引力理论专题汇报

冯振华 202221140015

2023 年 06 月 20 日

最开始决定学习广义相对论是自学朗道的《理论物理学教程-场论（第二卷）》[1]。来到北师大后，发现引力是按照梁灿彬老师的教材讲的，两个教材体系最大的区别是朗道尽量避开了抽象指标，而梁老师的书和我们在引力理论专题课上都使用的是抽象指标来论述广义相对论。当这门课结束后，我结合张若京的《张量分析简明教程》中关于曲线坐标系的理论, 给出了抽象指标表示的直观理解, 所以现在可以掌握两种方法。朗道书在描述爱因斯坦方程的标架表示时使用了抽象指标，这也是朗道唯一一处使用抽象指标的地方，同时朗道书第 328 页的（98.14）式书中没有给出详细的推导过程，所以决定详细推导式 (98.14) 作为我的引力理论专题汇报内容。

1 矢量的协变和逆变表示

此处有别于引力专题中使用的符号，我采用张若京《张量分析简明教程》中的约定，以一个字母下面画一条横线表示一个矢量。则任意一个矢量 $\underline{A}$ 可以用上指标的逆变基 $\underline{g}^i$ 展开，也可以用下指标的协变基 $\underline{g}_i$ 展开, 即

$$\underline{A} = A_i\underline{g}^i = A^i\underline{g}_i \tag{1}$$

其中 A_i 称为协变分量，A^i 称为逆变分量，同时两组基满足 $\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_i^j$ 于是可得

$$A_i = \underline{A} \cdot \underline{g}_i \qquad A^i = \underline{A} \cdot \underline{g}^i \tag{2}$$

2 抽象指标

本小节通过分析新旧基的转换关系，明确抽象指标表示的意义，建立一种关于抽象指标的直观的物理图像。

2.1 旧基和新基的相互表示

$$\begin{aligned}
\underline{e}_a &= \underline{g}^i\underline{g}_i \cdot \underline{e}_a = \underline{g}^i e_{i(a)} \\
\underline{e}_a &= \underline{g}_i\underline{g}^i \cdot \underline{e}_a = \underline{g}_i e^i_{(a)} \\
\underline{e}^a &= \underline{g}_i\underline{g}^i \cdot \underline{e}^a = \underline{g}_i e^{i(a)} \\
\underline{e}^a &= \underline{g}^i\underline{g}_i \cdot \underline{e}^a = \underline{g}^i e^{(a)}_i
\end{aligned} \tag{3}$$

于是可得

$$e_{i(a)} = \underline{g}_i \cdot \underline{e}_a, \quad e^i_{(a)} = \underline{g}^i \cdot \underline{e}_a, \quad e^{(a)}_i = \underline{g}_i \cdot \underline{e}^a, \quad e^{i(a)} = \underline{g}^i \cdot \underline{e}^a \tag{4}$$

[1]朗道，栗弗席兹著; 鲁欣，任朗，袁炳南译。–北京：高等教育出版社，2012.8

同理可得逆变换

$$\underline{g}_i = \underline{e}_a \underline{e}^a \cdot \underline{g}_i = e_i^{(a)} \underline{e}_a = e_{i(a)} \underline{e}^a \qquad \underline{g}^i = \underline{e}_a \underline{e}^a \cdot \underline{g}^i = e^{i(a)} \underline{e}_a = e^i_{(a)} \underline{e}^a \tag{5}$$

2.2 旧度规和新度规的相互表示

按度规的定义可得

$$g_{ik} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_k \qquad g^{ik} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^k \tag{6}$$

式(6)中的协变基和逆变基分别用新基表达出来，即

$$g_{ik} = \underline{g}_i \cdot \underline{e}_a e_k^{(a)} = e_{i(a)} e_k^{(a)} \tag{7}$$

同理可得

$$g^{ik} = \underline{g}^i \cdot \underline{e}_a e^{k(a)} = e^i_{(a)} e^{k(a)} \tag{8}$$

式(7)和式(8)也可以认为是新基下的坐标求内积, 新基下的度规如下表示

$$\eta_{ab} = \underline{e}_a \cdot \underline{e}_b = e_{(a)i} e^i_{(b)} \qquad \eta^{ab} = \underline{e}^a \cdot \underline{e}^b = e_i^{(a)} e^{i(b)} \tag{9}$$

式(9)也可以视为新度规在旧基下的坐标表示。

2.3 间隔的标架表示

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e_i^{(a)} e_{(a)k} dx^i dx^k = \eta_{ab} \left[e_i^{(a)} dx^i \right] \left[e_k^{(b)} dx^k \right] \tag{10}$$

3 引力场方程的标架表示

3.1 里奇旋度系数

3.1.1 里奇旋度系数的定义

$$\gamma_{abc} = e_{(a)i;k} e^i_{(b)} e^k_{(c)} \tag{11}$$

3.1.2 里奇旋度系数的反对称性

基于 $e_{(a)i} e^{i(b)} = \delta_a^b$ 考虑

$$e_{(a)i;k} e^{i(b)} = -e_{(a)i} e^{i(b)}_{;k} \tag{12}$$

以 η^{bc} 左乘式(12)将 $e^{i(b)}$ 的抽象指标 (b) 下移得

$$e_{(a)i;k} e^i_{(c)} = -e_{(a)i} e^i_{(c);k} \tag{13}$$

交换式(13)等号右侧的 i 下下标，得

$$e_{(a)i;k} e^i_{(c)} = -e^i_{(a)} e_{i(c);k} \tag{14}$$

由于 $e_{i(c)} = e_{(c)i}$, 于是式(14)可以表达为

$$e_{(a)i;k} e^i_{(c)} = -e^i_{(a)} e_{(c)i;k} \tag{15}$$

由定义式(11)可得

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac} \tag{16}$$

式(16)正是朗道书第 (98.12) 式。

3.2 里奇旋度系数的线性组合表达式

为了计算方便，对里奇系数进行线性组合后表达为 λ_{abc} 的形式，即

$$\begin{aligned}\lambda_{abc} &= \gamma_{abc} - \gamma_{acb} \\ &= e_{(a)i;k} e^i_{(b)} e^k_{(c)} - e_{(a)i;k} e^i_{(c)} e^k_{(b)} \\ &= e_{(a)i;k} e^i_{(b)} e^k_{(c)} - e_{(a)k;i} e^k_{(c)} e^i_{(b)} \\ &= \left[e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i}\right] e^i_{(b)} e^k_{(c)}\end{aligned} \tag{17}$$

由 λ_{abc} 的定义可得，其指标 bc 反对称，即

$$\begin{aligned}\lambda_{abc} &= -\lambda_{acb} \\ \lambda_{abc} &= \gamma_{abc} - \gamma_{acb}\end{aligned} \tag{18}$$

3.3 里奇旋度系数的逆线性组合表达式

逆线性组合表达指用 λ_{abc} 来表示 γ_{abc} 的方法，即

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} \tag{19}$$

$$\lambda_{cab} = \gamma_{cab} - \gamma_{cba}$$

$$\lambda_{cab} = -\gamma_{acb} + \gamma_{bca} \tag{20}$$

$$\lambda_{bca} = \gamma_{bca} - \gamma_{bac}$$

$$\lambda_{bca} = \gamma_{bca} + \gamma_{abc} \tag{21}$$

令式(19)+(21)-(20), 经简单计算得：

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}\right] \tag{22}$$

式(22)正是朗道书第 (98.11) 式。

4 曲率张量的标架分量

在朗道书第 (96.1) 式给出

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m{}_{ikl} \tag{23}$$

此处用 $e_{(a)i}$ 代 A_i 得

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = e_{(a)m} R^m{}_{ikl} \tag{24}$$

以 $e^i_{(b)} e^k_{(c)} e^l_{(d)}$ 右乘式(24)得

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = e_{(a)m} R^m{}_{ikl} e^i_{(b)} e^k_{(c)} e^l_{(d)} \tag{25}$$

将式(24)代入式(25)得

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \left[e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k}\right] e^i_{(b)} e^k_{(c)} e^l_{(d)} \tag{26}$$

先来计算式(26)等号右侧第一式，即

$$
\begin{aligned}
e_{(a)i;k;l}e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} &= \left[\gamma_{apq}e^{(p)}_i e^{(q)}_k\right]_{;k} e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} \\
&= \gamma_{apq;l}e^{(p)}_i e^{(q)}_k e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} + \gamma_{apq}e^{(p)}_{i;l} e^{(q)}_k e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} + \gamma_{apq}e^{(p)}_i e^{(q)}_{k;l} e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} \\
&= \gamma_{abc;l}e^l_{(d)} + \gamma_{apc}e^{(p)}_{i;l}e^i_{(b)}e^l_{(d)} + \gamma_{abq}e^{(q)}_{k;l}e^k_{(c)}e^l_{(d)} \\
&= \gamma_{abc;l}e^l_{(d)} + \gamma_{qpc}\eta^{pf}\gamma_{fmn}e^{(m)}_i e^{(n)}_l e^i_{(b)}e^l_{(d)} + \gamma_{abq}\eta^{qf}\gamma_{fmn}e^{(m)}_k e^{(n)}_l e^k_{(c)}e^l_{(d)} \\
&= \gamma_{abc;l}e^l_{(d)} + \gamma_{apc}\gamma^p{}_{bd} + \gamma_{abq}\gamma^q{}_{cd} \\
&= e^l_{(d)}\frac{\partial\gamma_{abc}}{\partial x^l} + \gamma_{apc}\gamma^p{}_{bd} + \gamma_{abq}\gamma^q{}_{cd} \\
&= \gamma_{abc,d} + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} + \gamma_{abf}\gamma^f{}_{cd}
\end{aligned} \tag{27}
$$

同时式(26)等号右侧第一式交换 k,l 后得

$$
e_{(a)i;k;l}e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} = e_{(a)i;l;k}e^i_{(b)}e^k_{(d)}e^l_{(c)} \tag{28}
$$

式(28)表明，交换式(27)中的抽象指标 c,d 即可得到等号右侧第二项，即

$$
e_{(a)i;l;k}e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)} = \gamma_{abd,c} + \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc} + \gamma_{abf}\gamma^f{}_{cd} \tag{29}
$$

将式(27)和式(29)代入式(26)得

$$
R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}\left(\gamma^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{dc}\right) + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc} \tag{30}
$$

式(30)即是朗道书第 (98.13) 式。[2] 考虑到 $\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb}$, 于是式(30)可以写为

$$
R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}\lambda^f{}_{cd} + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc} \tag{31}
$$

以 η^{ac} 作用于式(31)完成缩并，同时考虑到 $\eta^{ac}\lambda_{abc} = \eta^{ac}\gamma_{abc} - \eta^{ac}\gamma_{acb} = \gamma^c{}_{bc}$, 于是简单计算可得

$$
\eta^{ac}R_{(a)(b)(c)(d)} = \lambda^c{}_{bc,d} - \gamma^c{}_{bd,c} + \gamma^c{}_{bf}\lambda^f_{cd} + \lambda^c{}_{fc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma^c{}_{fd}\gamma^f{}_{bc} \tag{32}
$$

考虑到曲率张量的性质 $R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{(c)(d)(a)(b)}$, 于是得

$$
\eta^{ac}R_{(c)(d)(a)(b)} = \lambda^c{}_{dc,b} - \gamma^c{}_{db,c} + \gamma^c{}_{df}\lambda^f_{cb} + \lambda^c{}_{fc}\gamma^f{}_{db} - \gamma^c{}_{fb}\gamma^f{}_{dc} \tag{33}
$$

令式(32)和式(33)相加得

$$
2R_{(b)(d)} = \lambda^c{}_{bc,d}+\lambda^c{}_{dc,b}-\left(\gamma^c{}_{bd}+\gamma^c{}_{db}\right)_{,c}+\lambda^c{}_{fc}\left(\gamma^f{}_{bd}+\gamma^f{}_{db}\right)+\gamma^c{}_{bf}\lambda^f{}_{cd}-\gamma^c{}_{fd}\gamma^f{}_{bc}+\gamma^c{}_{df}\lambda^f{}_{cb}-\gamma^c{}_{fb}\gamma^f{}_{dc} \tag{34}
$$

考虑到关系

$$
\begin{cases}\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{abc}+\lambda_{bca}-\lambda_{cab}\right] \\ \gamma_{acb} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{acb}+\lambda_{cba}-\lambda_{bac}\right]\end{cases} \qquad \begin{cases}\lambda_{bca} = -\lambda_{bac} \\ \lambda_{cba} = -\lambda_{cab}\end{cases} \tag{35}
$$

由式(35)可得

$$
\gamma_{abc} + \gamma_{acb} = \lambda_{bca} + \lambda_{cba} \tag{36}
$$

基于式(36)考虑，则式(34)中括号内的和式，可以将 γ 换成 λ, 于是得

$$
2R_{(b)(d)} = \lambda^c{}_{bc,d} + \lambda^c{}_{dc,b} - \left(\lambda^c_{bc}+\lambda^c_{db}\right) + \lambda^c{}_{fc}\left(\lambda^f_{bc}+\lambda^f_{db}\right) + \left[\gamma^c{}_{bf}\lambda^f{}_{cd} - \gamma^c{}_{fd}\gamma^f{}_{bc}\right] + \left[\gamma^c{}_{df}\lambda^f{}_{cb} - \gamma^c{}_{fb}\gamma^f{}_{dc}\right] \tag{37}
$$

[2]朗道书第 328 页 (98.13) 式下方出现印刷错误 $\gamma^a_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{abc}$, 正确的应当写为 $\gamma^a_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$

式(37)中等号右侧第一个方括号内，f, c 均为哑指标，可以交换，于是可得

$$\gamma^c{}_{bf}\lambda^f{}_{cd} - \gamma^c_{fd}\gamma^f{}_{bc} = \gamma^c_{bf}\lambda^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{cd}\gamma^c{}_{bf} = -\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc} \tag{38}$$

同理可得第二个方括号内

$$\gamma^c{}_{df}\lambda^f{}_{cb} - \gamma^c{}_{fb}\gamma^f{}_{dc} = \gamma^c{}_{df}\lambda^f{}_{cb} - \gamma^f{}_{cb}\gamma^c{}_{df} = -\gamma^c{}_{df}\gamma^f{}_{bc} \tag{39}$$

再考虑到 $\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc} = \gamma^f{}_{bc}\gamma^c{}_{df}$ 于是式(37)化为

$$2R_{(b)(d)} = \lambda^c{}_{bc,d} + \lambda^c{}_{dc,b} - \lambda_{db}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{fc}\lambda_{bd}{}^f + \lambda^c{}_{fc}\lambda_{db}{}^f - 2\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc} \tag{40}$$

下面计算式(40)中的 $2\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc}$ 项，则

$$\begin{aligned} 2\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc} &= \frac{1}{2}\left[\lambda^c{}_{bf} + \lambda_{bf}{}^c - \lambda_f{}^c{}_b\right]\left[\lambda^f{}_{dc} + \lambda_{dc}{}^f - \lambda_c{}^f{}_d\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} + \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f + \lambda^c{}_{bf}\lambda_{cd}{}^f\right. \\ &\quad + \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} + \lambda_{bf}{}^c\lambda_{dc}{}^f + \lambda_{bf}{}^c\lambda_{cd}{}^f \\ &\quad \left. + \lambda_{fb}{}^f\lambda^f{}_{dc} + \lambda_{fb}{}^c\lambda_{dc}{}^f + \lambda_{fb}{}^c\lambda_{cd}{}^f\right\} \end{aligned} \tag{41}$$

为了计算式(41)先来考虑如下计算

$$\lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} = \eta^{cm}\eta^{fn}\lambda_{mbf}\lambda_{ndc} = \lambda_{mb}{}^n\lambda_{nd}{}^m = \lambda_{cb}{}^f\lambda_{fd}{}^c \tag{42}$$

式(42)表明，哑标 c, f 除了可以交换外，也可以交换上下而值不变，于是在式(41)中

$$\begin{cases} \lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} = \lambda_{cb}{}^f\lambda_{fd}{}^c = \lambda_{fb}{}^c\lambda_{cd}{}^f \\ \lambda^c{}_{bf}\lambda_{cd}{}^f = \lambda_{cb}{}^f\lambda^c{}_{df} = \lambda_{fb}{}^c\lambda^f{}_{dc} \end{cases} \tag{43}$$

再来考虑相加为零的项，即

$$\begin{aligned} \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f + \lambda_{fb}{}^c\lambda_{dc}{}^f &= \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f + \lambda^c{}_{bc}\lambda_d{}^c{}_f \\ &= \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f + \lambda^c{}_{bf}\lambda_d{}^f{}_c \\ &= \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f - \lambda^c{}_{bf}\lambda_{dc}{}^f \\ &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} + \lambda_{bf}{}^c\lambda_{cd}{}^f &= \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} + \lambda_b{}^f{}_c\lambda^c{}_{df} \\ &= \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} + \lambda_b{}^c{}_f\lambda^f{}_{dc} \\ &= \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} - \lambda_{bf}{}^c\lambda^f{}_{dc} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

将式(43)、(44)、(45)代入式(41)得

$$2\gamma^c{}_{bf}\gamma^f{}_{dc} = \lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} + \lambda^c{}_{bf}\lambda_{cd}{}^f + \frac{1}{2}\lambda_{bf}{}^c\lambda_{dc}{}^f \tag{46}$$

将式(46)代入式(40)得

$$2R_{(b)(d)} = \lambda^c{}_{bc,d} + \lambda^c{}_{cd,b} - \lambda_{bd}{}^c{}_{,c} - \lambda_{db}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{fc}\lambda_{bd}{}^f + \lambda^c{}_{fc}\lambda_{db}{}^f - \lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} - \lambda^c{}_{bf}\lambda_{cd}{}^f - \frac{1}{2}\lambda_{bf}{}^c\lambda_{dc}{}^f \tag{47}$$

利用 $\lambda_{abc} = -\lambda_{acb}$ 将式(47)所有项全部写成负值得

$$2R_{(b)(d)} = -\left[\lambda^c{}_{cb,d} + \lambda^c{}_{cd,b} + \lambda_{bd}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{cf}\lambda_{bd}{}^f + \lambda^c{}_{cf}\lambda_{db}{}^f + \lambda^c{}_{bf}\lambda^f{}_{dc} + \lambda^c{}_{bf}\lambda_{cd}{}^f + \frac{1}{2}\lambda_{bf}{}^c\lambda_{dc}{}^f\right] \tag{48}$$

将式(48)b,d 交换，然后再将 d 写为 a, 同时除以 2 得

$$R_{(a)(b)}=-\frac{1}{2}\left\{\lambda^{c}{}_{ca,b}+\lambda^{c}{}_{cb,a}+\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,c}+\lambda_{ba}{}^{c}{}_{,c}+\lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ab}{}^{f}+\lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ba}{}^{f}+\lambda^{c}{}_{af}\lambda^{f}{}_{bc}+\lambda^{c}{}_{af}\lambda_{cb}{}^{f}+\frac{1}{2}\lambda_{af}{}^{c}\lambda_{bc}{}^{f}\right\} \tag{49}$$

调整式(49)各项，写成与朗道书顺序相同的式子得

$$R_{(a)(b)}=-\frac{1}{2}\left\{\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,c}+\lambda_{ba}{}^{c}{}_{,c}+\lambda^{c}{}_{ca,b}+\lambda^{c}{}_{cb,a}+\lambda^{c}{}_{af}\lambda^{f}{}_{bc}+\lambda^{c}{}_{af}\lambda_{cb}{}^{f}+\lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ab}{}^{f}+\lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ba}{}^{f}+\frac{1}{2}\lambda_{af}{}^{c}\lambda_{bc}{}^{f}\right\} \tag{50}$$

在式(50)中有

$$\begin{cases}\lambda^{c}{}_{af}\lambda^{f}{}_{bc}=\lambda^{f}{}_{ac}\lambda^{c}{}_{bf}=\lambda^{c}{}_{b}{}^{d}\lambda_{dac}=\lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{dca}\\ \lambda^{c}{}_{af}\lambda_{cb}{}^{f}=\lambda_{ca}{}^{d}\lambda^{c}{}_{bd}=\lambda_{cad}\lambda^{c}{}_{b}{}^{d}=\lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{cda}\\ \lambda_{af}{}^{c}\lambda_{bc}{}^{f}=\lambda_{afc}\lambda_{b}{}^{cf}=-\lambda_{b}{}^{cd}\lambda_{acd}\\ \lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ab}{}^{f}=\lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ab}{}^{d}\\ \lambda^{c}{}_{cf}\lambda_{ba}{}^{f}=\lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ba}{}^{d}\end{cases} \tag{51}$$

将式(51)代入式(50)得

$$R_{(a)(b)}=-\frac{1}{2}\left(\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,c}+\lambda_{ba,c}^{c}+\lambda^{c}{}_{ca,b}+\lambda^{c}{}_{cb,a}+\lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{dca}+\lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{cda}+\lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ab}{}^{d}+\lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ba}{}^{d}-\frac{1}{2}\lambda_{b}{}^{cd}\lambda_{acd}\right) \tag{52}$$

式(52)即是朗道书第 (98.14) 式。