练习 **1.1** 试只用条件（**1**）~（**8**）证明$\psi+\psi=2\psi$，$\psi 0=\mathrm{O}$和$\psi(-1)=-\psi$。

（完成人：梁立欢　　审核人：高思泽）

证明：由条件（**5**）、（**7**）得

$$\psi+\psi=\psi 1+\psi 1=\psi(1+1)=2\psi$$

只需证明$\psi 0=\mathrm{O}$和$\psi(-1)=-\psi$这两式互相等价

根据条件（**7**）

$$\psi 0=\psi(0+0)=\psi 0+\psi 0$$

现在等式两边加上$(-\psi 0)$，得

$$\psi 0+(-\psi 0)=(\psi 0+\psi 0)+(-\psi 0)$$

根据条件（**4**），

上式左$=\psi 0+(-\psi 0)=\mathrm{O}$

根据条件（**4**）、（**2**）

上式右$=\psi 0+(\psi 0-\psi 0)=\psi 0+\mathrm{O}=\psi 0$

$$\therefore \psi 0=\mathrm{O}$$

由$\psi 0=\mathrm{O}$，根据条件（**4**）、（**7**）得

$$\psi 0=\psi(1-1)=\psi+\psi(-1)=\mathrm{O}=\psi-\psi$$

$$\Rightarrow \psi(-1)=-\psi$$

#

练习 **1.2** 证明在内积空间中若$(\psi_1,\varphi)=(\psi_2,\varphi)$对任意$\varphi$成立，则必有$\psi_1=\psi_2$。

（完成人：谷巍　　审核人：肖钰斐）

证明　由题意可知，在内积空间中若$(\psi_1,\varphi)=(\psi_2,\varphi)$对任意$\varphi$成立，则有

$$(\psi_1,\varphi)-(\psi_2,\varphi)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

于是有

$$(\psi_1-\psi_2,\varphi)=0 \qquad \textbf{(2)}$$

由于在内积空间中$(\psi_1,\varphi)=(\psi_2,\varphi)$对任意$\varphi$成立，则可取$\varphi=\psi_1-\psi_2$,则有

$(\psi_1-\psi_2,\psi_1-\psi_2)=\mathbf{0}$ 成立 （3）

根据数乘的条件（12）可知，则必有

$\psi_1-\psi_2=0$

（4）

即 $\psi_1=\psi_2$

故命题成立，即必有 $\psi_1=\psi_2$.

#

练习 **1.3** 矢量空间运算的 **12** 个条件是不是独立的？有没有一条或两条是其余各条的逻辑推论？如有，试证明之。

（完成人：赵中亮 审核人：张伟）

解：矢量空间运算的 **12** 个条件是独立的。

#

练习 **1.4** （**1**）在第二个例子中若将加法的规定改为：和矢量的长度为二矢量长度之和，方向为二矢量所夹角 $(\langle 180^\circ)$ 的分角线方向，空间是否仍为内积空间？

（**2**）在第二个例子中若将二矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 内积的定义改为 $|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta$ 或 $\frac{1}{2}|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta$，空间是否仍为内积空间？

（**3**）在第三个例子的空间中，若将内积的定义改为

$$(l,m)=l_1^*m_1+2l_2^*m_2+3l_3^*m_3+4l_4^*m_4$$

空间是否仍为内积空间？

（**4**）在第四个例子的函数空间中，若将内积的定义改为

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f^*(x)g(x)x\,dx \text{或}$$
$$(f(x),g(x))=\int_a^b f^*(x)g(x)x^2\,dx$$

空间是否仍为内积空间？

（完成人：张伟 审核人：赵中亮）

解：（**1**）在第二个例子中若将加法的规定改变之后，空间不是内积空间。

因为将规定改之后对于任意的矢量不一定存在逆元，如一个不为零的矢量设为

$\vec{A}$，则任意矢量和它相加后，得到的矢量的长度不为零，所以一定不能得到零矢量，即找不到逆元。所以空间不是内积空间。

（**2**）在第二个例子中若将内积的定义改之后，空间不是一个内积空间。证明如下：

一般情况下，$\left|\vec{B}+\vec{C}\right| \neq \left|\vec{B}\right|+\left|\vec{C}\right|$,即有

$$\left(\vec{A},\vec{B}+\vec{C}\right)= \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}+\vec{C}\right|\sin\theta \neq \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\sin\theta+\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{C}\right|\sin\theta=\left(\vec{A},\vec{B}\right)+\left(\vec{A},\vec{C}\right)$$

所以内积的定义改变之后不是内积空间。

（**3**）在第三个例子中若将内积的定义改之后，空间仍然是一个内积空间。证明如下：

i

$$(m,l)^* = (m_1^* l_1 + 2m_2^* l_2 + 3m_3^* l_3 + 4m_4^* l_4)^* = l_1^* m_1 + 2l_2^* m_2 + 3l_3^* m_3 + 4l_4^* m_4 = (l,m)$$

ii.

$$\begin{aligned}(l,m+n) &= l_1^*(m_1+n_1)+2l_2^*(m_2+n_2)+3l_3^*(m_3+n_3)+4l_4^*(m_4+n_4)\\ &=(l_1^*m_1+2l_2^*m_2+3l_3^*m_3+4l_4^*m_4)+(l_1^*n_1+2l_2^*n_2+3l_3^*n_3+4l_4^*n_4)\\ &=(l,m)+(l,n)\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}(l,ma) &= l_1^*m_1a+2l_2^*m_2a+3l_3^*m_3a+4l_4^*m_4a\\ &=a(l_1^*m_1+2l_2^*m_2+3l_3^*m_3+4l_4^*m_4)\\ &=a(l,m)\end{aligned}$$

iv. $(l,l)=|l_1|^2+2|l_2|^2+3|l_3|^2+4|l_4|^2\geq 0$，对任意 l 成立

若 $(l,l)=0$,则必有 $l_1=l_2=l_3=l_4=0$,即 $l=0$

综上所述，新定义的内积规则符合条件（**9**）—条件（**12**），所以仍为内积空间

（**4**）在第四个例子的函数空间中，若将内积的定义改为

$\left(f(x),g(x)\right)=\int_a^b f^*(x)g(x)x\,dx$ 后，空间不是内积空间。

因为 $\left(f(x),f(x)\right)=\int_a^b f^*(x)f(x)x\,dx=\int_a^b \left|f(x)\right|^2 x\,dx$，积分号内的函数是一个奇函数，它不能保证对于任意的 $f(x)$ 积分出来后都大于零，即不符合条件**(12)**，

所以不是内积空间。

在第四个例子的函数空间中，若将内积的定义改为

$\left(f(x), g(x)\right)=\int_a^b f^*(x)g(x)x^2dx$ 后，空间是内积空间。

证明如下：

i $\left(f(x), g(x)\right)=\int_a^b f^*(x)g(x)x^2dx=\left(\int_a^b g^*(x)f(x)x^2dx\right)^*=\left(g(x), f(x)\right)^*$

ii

$\left(f(x), g(x)+h(x)\right)=\int_a^b f^*(x)g(x)x^2dx+\int_a^b f^*(x)h(x)x^2dx=\left(f(x), g(x)\right)+\left(f(x), h(x)\right)$

iii $\left(f(x), g(x)a\right)=\int_a^b f^*(x)g(x)ax^2dx=a\int_a^b f^*(x)g(x)x^2dx=a\left(f(x), g(x)\right)$

iv $\left(f(x), f(x)\right)=\int_a^b \left|f(x)\right|^2x^2dx\ge 0,$对任意$\psi$成立

若$\left(f(x), f(x)\right)=\int_a^b \left|f(x)\right|^2x^2dx=0$，则必有$f(x)=0$

综上所述，新定义的内积规则符合条件（**9**）—条件（**12**），所以仍为内积空间。

#

练习 **1.5** 若 **a** 为复数，证明若$\varphi=\psi a$时，**Schwartz** 不等式中的等号成立。

（完成人：肖钰斐　　审核人：谷巍）

证明：当若$\varphi=\psi a$时，分别带入 **Schwartz** 不等式的左边和右边。

左边=$\left|(\psi,\psi a)\right|=a\left|\psi\right|^2$

右边=$\left|\psi\right|\cdot\left|\psi a\right|=a\left|\psi\right|^2$

左边=右边，说明当$\varphi=\psi a$时，**Schwartz** 不等式中的等号成立。

#

练习 **1.6**　证明当且仅当 $|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$ 对一切数a成立时，ψ与φ正交。并在三维位形空间讨论这一命题的几何意义。

（完成人：赵中亮　　审核人：张伟）

证明：解：当$|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$对一切数$a$成立时，有

$|\psi+\varphi a|^2=|\psi-\varphi a|^2$

即　$(\psi+\varphi a,\psi+\varphi a)=(\psi-\varphi a,\psi-\varphi a)$

得　$(\psi,\psi)+(\psi,\varphi a)+(\varphi a,\psi)+(\varphi a,\varphi a)=(\psi,\psi)-(\psi,\varphi a)-(\varphi a,\psi)+(\varphi a,\varphi a)$
即　$(\psi,\varphi a)=-(\varphi a,\psi)$
　　$(\psi,\varphi)a=-a^*(\psi,\varphi)^*$
因为a可以取一切数,所以当a取纯虚数时，即$a=-a^*$
得　$(\psi,\varphi)=(\psi,\varphi)^*$
由此得(ψ,φ)只能是实数
当a取非零实数时，即$a=a^*$
　　$(\psi,\varphi)=-(\psi,\varphi)^*$
只有$(\psi,\varphi)=0$时，即ψ与φ正交时才成立
所以 当 $|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$ 对一切数a成立时，ψ与φ正交。

当ψ与φ正交时，$(\psi,\varphi)=0$
则　$(\psi,\varphi)=(\psi,\varphi)^*=0$
取a为任意数
则　$(\psi,\varphi)a=-a^*(\psi,\varphi)^*=0$
　　$(\psi,\varphi a)=-(\varphi a,\psi)$
　　$2(\psi,\varphi a)=-2(\varphi a,\psi)$
　　$(\psi,\psi)+2(\psi,\varphi a)+(\varphi a,\varphi a)=(\psi,\psi)-2(\varphi a,\psi)+(\varphi a,\varphi a)$
　　$(\psi,\psi)+(\psi,\varphi a)+(\varphi a,\psi)+(\varphi a,\varphi a)=(\psi,\psi)-(\psi,\varphi a)-(\varphi a,\psi)+(\varphi a,\varphi a)$
　　$(\psi+\varphi a,\psi+\varphi a)=(\psi-\varphi a,\psi-\varphi a)$
　　$|\psi+\varphi a|^2=|\psi-\varphi a|^2$
得　$|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$
即　$|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$ 对一切数a成立
综上，当且仅当 $|\psi+\varphi a|=|\psi-\varphi a|$ 对一切数a成立时，ψ与φ正交。
　　在三维位形空间中，这一命题的几何意义是：对角线相等的平行四边形是矩形。
#

练习 **1.7** 证明：当且仅当$|\psi-\varphi\alpha|\geq|\psi|$对一切数$\alpha$成立时，$\psi$与$\varphi$正交。

（完成人：班卫华　　审核人：何贤文）

　证明：因为$|\psi-\varphi\alpha|\geq|\psi|$，两边平方得

$$|\psi-\varphi\alpha|^2\geq|\psi|^2$$

$$|\psi|^2-(\psi^*\varphi+\varphi^*\psi)\alpha+|\varphi|^2\alpha^2\geq|\psi|^2$$

$$|\varphi|^2\alpha^2-(\psi^*\varphi+\varphi^*\psi)\alpha\geq 0$$

则构成以α为变量的二次函数，要使对一切α成立，判别式恒小于等于零，即

$$(\psi^*\varphi+\varphi^*\psi)^2\leq 0$$

只需

$$\psi^*\varphi+\varphi^*\psi=0$$

即

$$(\psi,\varphi)+(\varphi,\psi)=0$$

得

$$(\psi,\varphi)=0$$

所以当$|\psi-\varphi\alpha|\geq|\psi|$对一切数$\alpha$成立时，$\psi$与$\varphi$正交。

练习 1.8 在四维列矩阵空间中，给定四个不正交也不全归一的矢量：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \lambda_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \lambda_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \lambda_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

它们构成一个完全集，试用 **Schmidt** 方法求出一组基矢。

（完成人：肖钰斐　　审核人：谷巍）

解：由 **Schmidt** 方法，所求基矢：

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu_2' = \lambda_2 - \nu_1(\nu_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nu_2 = \frac{\nu_2'}{|\nu_2'|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu_3' = \lambda_3 - \nu_1(\nu_1, \lambda_3) - \nu_2(\nu_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nu_3 = \frac{\nu_3'}{|\nu_3'|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu_4' = \lambda_4 - \nu_1(\nu_1, \lambda_4) - \nu_2(\nu_2, \lambda_4) - \nu_3(\nu_3, \lambda_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nu_4 = \frac{\nu_4'}{|\nu_4'|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#

练习 1.9 在上题中，改变四个 λ 的次序，取

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

重新用 **Schmidt** 方法求出一组基矢。

（完成人：何贤文　　审核人：班卫华）

解：由空间中不满足正交归一条件的完全集$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$，求这个空间的一组基矢$\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$.

（1）首先取ν_1为归一化的λ_1：

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（**2**）取$\nu_2{}' = \lambda_2 - \nu_1 a_{12}$，选择常数$a_{12}$使$\nu_2{}'$与$\nu_1$正交，即

$$0 = (\nu_1, \nu_2{}') = (\nu_1, \lambda_2) - a_{12}$$

得

$$a_{12} = 1, \qquad \nu_2{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

取ν_2为归一化的$\nu_2{}'$：

$$\nu_2 = \frac{\nu_2{}'}{|\nu_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（**3**）取$\nu_3{}' = \lambda_3 - \nu_1 a_{13} - \nu_2 a_{23}$，选择常数$a_{13}$和$a_{23}$使$\nu_3{}'$与$\nu_1, \nu_2$正交，即

$$\nu_3{}' = \lambda_3 - \nu_1(\nu_1, \lambda_3) - \nu_2(\nu_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

归一化的ν_3为

$$\nu_3 = \frac{\nu_3{}'}{|\nu_3{}'|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（**4**）取$\nu_4{}' = \lambda_4 - \nu_1 a_{14} - \nu_2 a_{24} - \nu_3 a_{34}$，选择常数$a_{14}, a_{24}, a_{34}$使$\nu_4{}'$与已选定的$\nu_1, \nu_2, \nu_3$正交，即

$$v_4' = \lambda_4 - v_1(v_1,\lambda_4) - v_2(v_2,\lambda_4) - v_3(v_3,\lambda_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

归一化的v_4为

$$v_4 = \frac{v_4'}{|v_4'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

则找到一组基矢为 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

#

练习 1.10 在三维位形空间中，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是在互相垂直的 **x，y，z** 三个轴上的单位矢量。取三个归一化的矢量： （高思泽）

$$\vec{i} = \vec{\lambda}_1$$
$$\vec{\lambda}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$$
$$\vec{\lambda}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$$

在内积就是点乘积的定义下它们并不正交。现在改变正交的定义：定义这三个矢量$\vec{\lambda}_1$，$\vec{\lambda}_2$，$\vec{\lambda}_3$互相正交。

1. 证明：定义一个归一化的完全集里面的矢量彼此互相正交，等于定有一种内积规则。
2. 求出这个新的内积规则，即将任意两个矢量$\vec{r}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1$，

   $\vec{r}_2 = \vec{i}x_2 + \vec{j}y_2 + \vec{k}z_2$的内积表为$x_1,y_1,z_1$和$x_2,y_2,z_2$的函数。
3. 验证所求的内积规则符合条件（**9**）～（**12**）。
4. 用$(\vec{\lambda}_i, \vec{\lambda}_j) = \delta_{ij}$ 验证所求出的内积规则。

1 证明：

在一个归一化的完全集里面的矢量集合里，任意的两个矢量正交，根据矢量的正交 性定义，两个矢量 ψ 和 φ 的内积为零，即$(\psi,\varphi)=0$。

2 解：

由$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$与$\vec{\lambda}_1$，$\vec{\lambda}_2$，$\vec{\lambda}_3$的关系，可得到如下变换：

$$\vec{i}=\vec{\lambda}_1$$
$$\vec{j}=\sqrt{2}\vec{\lambda}_2-\vec{\lambda}_1$$
$$\vec{k}=\sqrt{2}\vec{\lambda}_3-\sqrt{2}\vec{\lambda}_2+\vec{\lambda}_1$$

由上面的关系得：

$$\vec{r}_1=\vec{\lambda}_1x_1+(\sqrt{2}\vec{\lambda}_2-\vec{\lambda}_1)y_1+(\sqrt{2}\vec{\lambda}_3-\sqrt{2}\vec{\lambda}_2+\vec{\lambda}_1)z_1=\vec{\lambda}_1(x_1-y_1+z_1)+\vec{\lambda}_2(\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1)+\vec{\lambda}_3\sqrt{2}z_1$$
$$\vec{r}_2=\vec{\lambda}_1x_2+(\sqrt{2}\vec{\lambda}_2-\vec{\lambda}_1)y_2+(\sqrt{2}\vec{\lambda}_3-\sqrt{2}\vec{\lambda}_2+\vec{\lambda}_1)z_2=\vec{\lambda}_1(x_2-y_2+z_2)+\vec{\lambda}_2(\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2)+\vec{\lambda}_3\sqrt{2}z_2$$

由此，

$$(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=(\vec{\lambda}_1(x_1-y_1+z_1)+\vec{\lambda}_2(\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1)+\vec{\lambda}_3\sqrt{2}z_1,\vec{\lambda}_1(x_2-y_2+z_2)+\vec{\lambda}_2(\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2)+\vec{\lambda}_3\sqrt{2}z_2)$$
$$=(x_1-y_1+z_1)^*(x_2-y_2+z_2)(\vec{\lambda}_1,\vec{\lambda}_1)+2(y_1-z_1)^*(y_2-z_2)(\vec{\lambda}_2,\vec{\lambda}_2)+4z_1^*z_2(\vec{\lambda}_3,\vec{\lambda}_3)$$
$$+\{\sqrt{2}(x_1-y_1+z_1)^*(y_2-z_2)+\sqrt{2}(x_2-y_2+z_2)^*(y_1-z_1)\}(\vec{\lambda}_1,\vec{\lambda}_2)+\{\sqrt{2}z_2(x_1-y_1+z_1)^*+\sqrt{2}z_1(x_2-y$$
$$+\{2z_2(y_1-z_1)^*+2z_1(y_2-z_2)^*\}(\vec{\lambda}_2,\vec{\lambda}_3)$$

定义$\vec{\lambda}_1$，$\vec{\lambda}_2$，$\vec{\lambda}_3$互相正交，有矢量的正交性，得

$$(\vec{\lambda}_1,\vec{\lambda}_1)=(\vec{\lambda}_3,\vec{\lambda}_3)=(\vec{\lambda}_3,\vec{\lambda}_3)=1$$
$$(\vec{\lambda}_1,\vec{\lambda}_2)=(\vec{\lambda}_1,\vec{\lambda}_3)=(\vec{\lambda}_2,\vec{\lambda}_3)=0$$

由此可得

$$(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=(x_1-y_1+z_1)^*(x_2-y_2+z_2)+2(y_1-z_1)^*(y_2-z_2)+4z_1^*z_2$$

3 证明：

$$(\vec{r}_2,\vec{r}_1)^*=((x_2-y_2+z_2)^*(x_1-y_1+z_1)+2(y_2-z_2)^*(y_1-z_1)+4z_2^*z_1)^*$$
$$=(x_1-y_1+z_1)^*(x_2-y_2+z_2)+2(y_1-z_1)^*(y_2-z_2)+4z_1^*z_2$$
$$=(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

$$(\vec{r}_1,\vec{r}_2a)=(x_1-y_1+z_1)^*(x_2-y_2+z_2)a+2(y_1-z_1)^*(y_2-z_2)a+4z_1^*z_2a=(\vec{r}_1,\vec{r}_2)a$$

$(\vec{r},\vec{r})=|(x-y+z)|^2+2|(y-z)|^2+4|z|^2\geq 0$ 当$(\vec{r},\vec{r})=0$时，只有 **x,y,z** 都同时等

于 **0** 才能满足，即$\vec{r}=\vec{0}$。

综上所述，所求的内积规则符合条件（9）～（12）。

4，见（**2**）

#

练习 **1.11** 在 **n** 维空间中，已知$\{\lambda_i\}$，**i=1,2,3.....,n** 是一组完全集（不一定正交），

现在有 **n** 个矢量$\{\psi_i\}$，**i=1,2,3.....,n**（也不一定正交），定义

$$\mathbf{D}=\begin{vmatrix}(\lambda_1,\psi_1) & (\lambda_1,\psi_2) & \cdots & (\lambda_1,\psi_n)\\ (\lambda_2,\psi_1) & (\lambda_2,\psi_2) & \cdots & (\lambda_2,\psi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\lambda_n,\psi_1) & (\lambda_n,\psi_2) & \cdots & (\lambda_n,\psi_n)\end{vmatrix}$$

证明$\{\psi_i\}$线性相关的必要和充分条件维 **D=0**。

（完成人：何贤文　　审核人：班卫华）

解：对于矢量空间的 **n** 个矢量的集合$\{\psi_i\}$，有$\sum_{i=1}^{n}\psi_i D_i=0$，此式是关于 **n** 个矢量的集合$\{\psi_i\}$的齐次方程组

$$\begin{cases}(\lambda_1,\psi_1)\psi_1+(\lambda_1,\psi_2)\psi_2+\cdots\cdots+(\lambda_1,\psi_n)\psi_n=0\\ (\lambda_2,\psi_1)\psi_1+(\lambda_2,\psi_2)\psi_2+\cdots\cdots+(\lambda_2,\psi_n)\psi_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\lambda_n,\psi_1)\psi_1+(\lambda_n,\psi_2)\psi_2+\cdots\cdots(\lambda_n,\psi_n)\psi_n=0\end{cases}\qquad(1)$$

若$\{\psi_i\}$线性相关，则满足$\sum_{i=1}^{n}\psi_i D_i=0$至少有一组非零解，则要求：

$$\begin{vmatrix}(\lambda_1,\psi_1) & (\lambda_1,\psi_2) & \cdots & (\lambda_1,\psi_n)\\ (\lambda_2,\psi_1) & (\lambda_2,\psi_2) & \cdots & (\lambda_2,\psi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\lambda_n,\psi_1) & (\lambda_n,\psi_2) & \cdots & (\lambda_n,\psi_n)\end{vmatrix}=0$$

即

D=0

若 **D=0**，则方程（**1**）必有非零解，即满足有一组不为零的复数使得

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i D_i=0$$

故$\{\psi_i\}$线性相关。

#

练习 **1.12** 一个矢量空间有两个不同的子空间 S_1 和 S_2，证明除去以下两种情况外，包括 S_1 的全部元和 S_2 的全部元的那个集合并不是子空间：

（**1** S_1 是 S_2 的子空间或 S_2 是 S_1 的子空间；

（**2** S_1 和 S_2 其中之一只含有零矢量一个元。

（完成人：张伟　审核人：赵中亮）

证明：（1）设子空间 S_1 和 S_2 的维数分别为 **m**，**n**，它们共同的基矢的个数为 $l(l<m,l<n)$ 个，当 S_1 不是 S_2 的子空间且 S_2 不是 S_1 的子空间时，它们之间含有不同的基矢。

则当 S_1 空间的一个矢量和 S_2 空间的一个矢量做加法的时，它们得到的矢量并不能一定在包括 S_1 的全部元和 S_2 的全部元的那个集合中找到，因为加法后得到的矢量的维数可以大到 $(m+n-l)$ 维，而 $m+n-l>m,\text{且}m+n-l>n$

所以包括 S_1 的全部元和 S_2 的全部元的那个集合并不是矢量空间，从而不是子空间。

（2）当 S_1 和 S_2 其中之一只含有零矢量一个元时，它必然是另一个子空间的子空间，由此可见**(2)**只不过是（**1**）的特例，显然得证。

#

练习 **1.13**　阅读狄拉克的《量子力学原理》**§6**，分析他建立左矢空间的方法与我们的方法有什么共同点和不同点.

（完成人：梁立欢　审核人：高思泽）

分析：

本书从空间的方向入手建立左矢量。我们对现有的一个矢量空间定义了其中矢量的加法、数乘和标量积运算，称此空间为单一空间。现在对照这个空间再建以下两个空间。一个叫右矢空间，它的构造同单一空间完会一样，每一个矢量（即右矢）都与单一空间里的矢量相对应，这些右矢有加法和数乘的运算，其定义和规则与单一空间相同。第二空间比照右欠空间来建立，称为左矢空间，其实右矢空间的每一个矢量在左矢空间都有一个左矢与其相对应。， 左矢空间中的事情不能随意去规定，需要同右矢空间的事情相互协调，它们通过标量积联系起来。这样建立的左矢空间是一个完全确定的（即有明确加法和数乘运算规则的）欠量空间。

狄拉克是从对偶矢量的方向入手建立左矢量。假定有一个数 **C**。它是右矢量 $|\psi\rangle$ 的函数， 就是说，对每一个右矢量 $|\psi\rangle$ 有一个函数 **C** 与之相应，并且进一步

假定此函数是线性函数， 其意义是，相应于$|\psi\rangle+|\varphi\rangle$的数等于相应于$|\psi\rangle$的数与相应于$|\varphi\rangle$的数之和，相应于$a|\psi\rangle$的数是相应于$|\psi\rangle$的数的$a$倍，其中$a$是任意的数字因子。这样，相应于任何$|\psi\rangle$的数 **C**，就可以看成是$|\psi\rangle$与某个新矢量的标量积，对右矢量$|\psi\rangle$的每一线性函数就有一个这样的新矢量。我们把这种新矢量称为“左矢量”或简称“左矢”。 在此引入的左矢量，是与右矢量完全不同的另一类矢量，而且直到现在。除了左矢量与右矢量之间存在着标量积以外，两者之间还没有任何联系。现在作一个假定：在左矢量与右矢量之间有一一对应关系。使得相应于$|\psi\rangle+|\varphi\rangle$的左矢是相应于$|\psi\rangle$的左矢与相应于$|\varphi\rangle$的左矢之和。而相应于$c|\varphi\rangle$的左矢则是相应于$|\varphi\rangle$的左矢乘以$\bar{c}$，$\bar{c}$是 **c** 的共轭复数，$|\varphi\rangle$相应的左矢可写成$\langle\varphi|$。

从以上两种方法来看，它们是从不同的方向来建立左矢空间的，在此过程中，都对矢量关系和运算问题进行了一些假定（或规定），并且所建立的左矢空间和右矢空间都是通过定义的标量积联系起来。

#

练习 **1.14** 证明：与所有左矢的内积均已给定（但给定值应满足内积条件（**9**）~（**12**））的右矢是一个确定的右矢（即必定存在而且只有一个）。

（完成人：谷巍　　审核人：肖钰斐）

证明　设右矢$|\varphi_1\rangle$和$|\varphi_2\rangle$与所有左矢$\langle\psi|$的内积均已给定,且内积均为 **C.**则有

$$\langle\psi|\varphi_1\rangle=C$$

（**1**）

$$\langle\psi|\varphi_2\rangle=C$$

（**2**）

根据内积条件（**10**）的第一式，由（**1**）－（2），则有

$$\langle\psi|\left(|\varphi_1\rangle-|\varphi_2\rangle\right)=0$$

（**3**）

因为$\langle\psi|$是任意的左矢，故知括号内为$|0\rangle$，即

$$|\varphi_1\rangle-|\varphi_2\rangle=|0\rangle$$

(4)

$$|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$$

(5)

故与所有左矢的内积均已给定的右矢是一个确定的右矢（即必定存在而且只有一个）**.**定理得证**.**

2.1 证明下列常用公式　　（陈玉辉解答　项鹏核对 ）

（1）$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$

证明：

$[A,BC]$

$=ABC-BCA$

$=BAC-BCA+ABC-BAC$

$=B[AC-CA]+[AB-BA]C$

$=B[A,C]+[A,B]C$

（2）$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$

证明：

$[AB,C]=ABC-CAB$

$=ABC-ACB+ACB-CAB$

$=A[BC-CB]+[AC-CA]B$

$=A[B,C]+[A,C]B$

2.2 若算符 B 与 $[A,B]$ 对易，证明：　（陈玉辉解答　项鹏核对 ）

$$[A,B^n]=nB^{n-1}[A,B]$$

证明：$[A,B^n]=[A,B\cdot B^{n-1}]=[A,B]B^{n-1}+B[A,B^{n-1}]$

将 n 换成（n-1）,就有

$$[A,B^{n-1}]=[A,B]B^{n-2}+B[A,B^{n-2}]$$

$\Rightarrow[A,B^n]=[A,B]B^{n-1}+[A,B]B^{n-1}+B^2[A,B^{n-2}]=2[A,B]B^{n-1}+B^2[A,B^{n-2}]$

重复这种递推过程（n-1）次，即得

$$\begin{aligned}[A,B^n]&=(n-1)[A,B]B^{n-1}+B^{n-1}[A,B^{n-(n-1)}]\\&=(n-1)[A,B]B^{n-1}+B^{n-1}[A,B]\\&=nB^{n-1}[A,B]\end{aligned}$$

#

练习 2.3　证明：　（输入人：杜花伟　核对人：王俊美）

（1）若 A 有逆，a≠0，则 aA 也有逆，且 $(aA)^{-1}=\frac{1}{a}A^{-1}$；

（2）若 A,B 都有逆，则 AB 也有逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

（3）$(A+B)^{-1}=A^{-1}\{1-B(A+B)^{-1}\}$；

（4）$(A-\lambda B)^{-1}=A^{-1}+\lambda A^{-1}BA^{-1}+\lambda^2A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}+\cdots$.(λ 为复数);

证明：（1）若 A 有逆，a≠0，满足 $AA^{-1}=1, aa^{-1}=1$，则

$$aAa^{-1}A^{-1}=aa^{-1}AA^{-1}=1$$

所以 aA 有逆,且 $(aA)^{-1}=\frac{1}{a}A^{-1}$.

(2) 若 A,B 都有逆,满足 $AA^{-1}=1, BB^{-1}=1$,则

$$ABB^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=1$$

所以 AB 有逆,且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(3)

$$\begin{aligned}
&(A+B)^{-1}\\
&=A^{-1}A(A+B)^{-1}\\
&=A^{-1}\{A(A+B)^{-1}\}\\
&=A^{-1}\{(A+B-B)(A+B)^{-1}\}\\
&=A^{-1}\{(A+B)(A+B)^{-1}-B(A+B)^{-1}\}\\
&=A^{-1}\{1-B(A+B)^{-1}\}
\end{aligned}$$

(4) 由于 $(1-\chi)^{-1}$（x 极小,即 x→0 时）展为级数:

$$(1-\chi)^{-1}=1+\chi+\chi^2+\chi^3+\cdots$$

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda B)^{-1}\\
&=[A(1-\lambda BA^{-1})]^{-1}\\
\text{故}(&=A^{-1}(1-\lambda BA^{-1})\\
&=A^{-1}(1+\lambda BA^{-1}+\lambda^2BA^{-1}BA^{-1}+\cdots)\\
&=A^{-1}+\lambda A^{-1}BA^{-1}+\lambda^2A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}+\cdots
\end{aligned}$$

#

2.4　若线性算符 A 有逆，{|μ>}（i=1,2,3,…，n）是 A 的有限维的定义域的中的一组完全集。证明在 A 的值域中{A|μ>}也是一组完全集，从而证明值域的维数与定义域相同。

证明：已知 A 为可逆算符得

$AA^{-1}=A^{-1}A=1$

{|μ>}（i=1,2,3,…，n） 是 A 的有限维的定义域中的一组完全集

A|Ψ>=|μ>

定义域 |μ>为 n 维的

假设值域|Ψ>不是一组完全集，那么值域中的每一个|Ψ>在定义域中有且只有一个|μ>所以的|Ψ>为数肯定小于 n。

又因为 A 算符是可逆的，所以得

$$A^{-1}|\Psi>=|\mu>$$

定义域|Ψ>维数小于 n 的

那么不论|μ>是否为完全集都应该小于或等于 n 维的。

这样的话|μ>的维数与题目相矛盾

由此得之

A 的值域中{A|μ>}也是一组完全集，而值域的维数与定义域相同。

练习 2.5 有逆算符 A 的定义域是有限维的，若已知 $AB=1$, 证明 $BA=1$。

证明：（何建贤解答　项朋核对）

已知 A 是可逆算符，所以 $AA^{-1}=1$ 和 $A^{-1}A=1$

又因为 $AB=1$，即 $AB=AA^{-1}$

两边同时右乘得

$$ABA=AA^{-1}A$$

两边同时左乘 A^{-1} 得

$$A^{-1}ABA=A^{-1}AA^{-1}A$$

所以得：$AB=1$

#

练习 2.6　证明任何线性算符作用于零矢量$|o\rangle$上，必得零矢量。

证明：（高召习解答 孟祥海核对）

设 A 为任意线性算符，由线性算符的性质得：

$$\mathrm{A}(|\varphi>\alpha)=(\mathrm{A}|\varphi>)\alpha$$

令 $\alpha=0$，由于 $|\varphi>\alpha=\alpha|\varphi>$，　$0|\varphi>=0$

所以　$\mathrm{A}|0>=(A|\varphi>)$

令 $A|\varphi>=|\phi>$，所以

$$A|0>=|\phi>0=0|\phi>=0$$

#

练习　2.7　（2.7）式与（2.8）式还各有一个用$\left[B,A^{(i)}\right]$型多重对易式表示的式子，试把它们求出来。（高召习解答 孟祥海核对）

解：（1）由于

$[B,A^{(0)}]=B$

$[B,A^{(1)}]=[B,A]$

$[B,A^{(2)}]=[[B,A],A]$

………………

显然，对于$[B,A^{(1)}]$型多重对易式有

$$[[B,A^{(i)}],A]=[B,A^{(i+1)}]$$

$$[B,A^{(1)}]A-A[B,A^{(1)}]=[B,A^{(i+1)}]$$

即$[B,A^{(1)}]A=[B,A^{(i+1)}]+-A[B,A^{(1)}]$

（2）由于

$$[A^{(i)},B]=-[B,A^{(i)}] \qquad (1)$$

且 $A^nB=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}[A^{(i)},B]A^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}[A^{(i)},B]A^{n-1}$ （2）

把（1）代入（2）得

$$A^nB=-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}[B,A^{(i)}]A^{n-1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}[B,A^{(i)}]A^{n-1}$$

#

练习 2.8 试用数学归纳法证明：（陈玉辉解答　项鹏核对）

$$[A,B^n]=\sum_{i=1}^{n}B^{n-1}[A,B]B^{i-1}$$

证明：用数学归纳法，当 n=1 时原式成为

$$[A,B]=[A,B]$$

原式显然成立；现设原式对 n 成立，推出它对 n+1 也成立：

$[A,B^{n+1}]$

$=[A,B\cdot B^n]$

$=B[A,B^n]+[A,B]B^n$

$=B\sum_{i=1}^{n}B^{n-1}[A,B]B^{i-1}+[A,B]B^n$

$=\sum_{i=1}^{n}B^{(n+1)-1}[A,B]B^{i-1}+B^{(n+1)-(n+1)}[A,B]B^{(n+1)-1}$

$=\sum_{i=1}^{n+1}B^{(n+1)-1}[A,B]B^{i-1}$

这就证明了原式对 n+1 也成立，所以

$$[A,B^n]=\sum_{i=1}^{n}B^{n-1}[A,B]B^{i-1}$$

#

2.9

2.10 若算符 A 有逆，证明 A 的伴算符也有逆，而且

$$\left(A^+\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^+$$

证明：取一任意$|\varphi\rangle$

$$|\varphi\rangle=1|\varphi\rangle=A^+B|\varphi\rangle=A^+\left(B|\varphi\rangle\right)$$

可见对于任意$|\varphi\rangle$，确有$|\psi\rangle$存在，这个$|\psi\rangle$就是$B|\varphi\rangle$。

若 $A^+|\psi_1\rangle=A^+|\psi_2\rangle$,用 C 作用在此式两边

$$CA^+|\psi_1\rangle=CA^+|\psi_2\rangle$$

但此式就是$|\psi_1\rangle=|\psi_2\rangle$，所以$\left(A^+\right)^{-1}$存在，因此 A 的伴算符也有逆。

又因 A 有逆，即 $AA^{-1}=1$

则$\langle\varphi|\psi\rangle=\langle\varphi|AA^{-1}|\psi\rangle=\langle\psi|\left(A^{-1}\right)^+A^+|\varphi\rangle^*$

由于$\langle\varphi|\psi\rangle=\langle\psi|\varphi\rangle^*$

则$\left(A^{-1}\right)^+A^+=1$

又因A^+有逆，所以$\left(A^+\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^+$

#

2.11 伴算符的定义式（2.24）或$\langle\varphi|B\psi\rangle=\langle B^+\varphi|\psi\rangle$可否改成对任意$|\psi\rangle$有：$\langle\psi|B\psi\rangle=\langle B^+\psi|\psi\rangle$？（许中平　　核对：田军龙）

证明：取一任意$|\psi\rangle$，都有$\langle\psi|\left(B|\psi\rangle\right)=\left(\langle\psi|B\right)|\psi\rangle$

式中的 B 是右矢空间的算符，此式右边的$\left(\langle\psi|B\right)|\psi\rangle$的右矢$|\psi\rangle$与左矢$\langle\psi|B$的内积，单用右矢空间的话说，就是右矢$|\psi\rangle$与右矢$B^+|\psi\rangle$的内积，在单一空间中，此式正是伴算符$B^+$的定义式，写成单一空间的形式就是：

$$(\psi, B\psi) = (B^{+}\psi, \psi)$$

因此，$\langle\varphi|B\psi\rangle = \langle B^{+}\varphi|\psi\rangle$可改成对任意$|\psi\rangle$有：$\langle\psi|B\psi\rangle = \langle B^{+}\psi|\psi\rangle$

#

练习 2.12 本节提到的由$\langle\psi|A|\psi\rangle = 0$断定$A = 0$的定理对于实空间（即数乘中的数是实数）是不成立的。试在三维位行空间（内积定义为标量积$\vec{x}\cdot\vec{y}$）中举出一个反例，证明此定理对实空间不成立。（邱鸿广解答　田军龙审核）

证明：在实空间中只要算符 A 为一个把矢量逆时针旋转 90 度的变换矩阵。则当它作用到任何一个位行空间矢量ψ上后再与原来的矢量ψ点积都为零。但 A 不为零。所以不成立。

例：　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

#

2.13 证明：若 A,B 是厄米算符，则当且仅当 A,B 对易时，算符 AB 才是厄米算符。（李泽超解答　董廷旭核对）

证明：　充分性：

A,B 对易，则$BA = AB$；　A , B 为厄米算符，则$A = A^{+}, B = B^{+}$

现任取一$|\psi\rangle$，

则：$\langle\psi|AB|\psi\rangle = \langle\psi|B^{+}A^{+}|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|BA|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|AB|\psi\rangle^{*}$

即：$\langle\psi|AB|\psi\rangle$是实数。即：AB 是厄米算符。

必要性：

A , B 为厄米算符，则$A = A^{+}, B = B^{+}$；AB 为厄米算符：则

$AB = (AB)^{+} = B^{+}A^{+}$.

现任取一$|\psi\rangle$，

则：$\langle\psi|AB|\psi\rangle = \langle\psi|(AB)^{+}|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|BA|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|AB|\psi\rangle^{*}$

$\Rightarrow \quad AB - BA = 0$

即：算符 A 与 B 对易。

#

2.14 证明，有逆的等距算符是幺正算符。（李泽超解答 董廷旭核对）

证明: 设算符 A 是等距算符，则: $A^{+}A=1$..................................(1)

由题意知算符 A 有逆，则：$A^{-1}A=1$..(2)

用 A^{-1} 右乘式（1）

得：$A^{+}=A^{-1}$..(3)

由（3）式得 A 为幺正算符。

#

练习 2.15 设 H 是厄米算符，U 是幺正算符，A 是任意算符，问下列算符是厄米的还是幺正的？ （孟祥海解答 高召习核对）

（1）UHU^{-1}， （2）$A^{+}HA$， （3）e^{iH}， （4）$\dfrac{1-iH}{1+iH}$， （5）$i\dfrac{U-1}{U+1}$

证明：

（1）先证: UHU^{-1} 是否为厄米算符，

对任意矢量 $|\varphi>$ 有：

$$<\varphi|UHU^{-1}|\varphi>=<U^{+}\varphi|H|U^{+}\varphi>=<U^{+}\varphi|H|U^{+}\varphi>^{*}=<\varphi|UHU^{+}|\varphi>=<\varphi|UHU^{-1}|\varphi>^{*}$$

即得证。

再证：UHU^{-1} 是否为幺正算符，

由上可知，$(UHU^{+})^{+}=UHU^{+}$

则 $(UHU^{+})^{+}UHU^{+}=UHHU^{+}$

只有当 $H=H^{-1}$ 时上式才为 1，即只有当 $H=H^{-1}$ 时 UHU^{-1} 为幺正算符。

（2）厄米性的证明：

$$<\varphi|A^{+}HA|\varphi>=<A\varphi|H|A\varphi>=<A\varphi|H|A\varphi>^{*}=<\varphi|A^{+}HA|\varphi>^{*}$$

即得证。

幺正性的证明：

由（1）中幺正性的证明（一般性与特殊性的关系）可知，$A^{+}HA$ 亦不是幺正的。

（3）公式：$e^{iH}=1+\dfrac{iH}{1!}-\dfrac{H^{2}}{2!}-i\dfrac{H^{3}}{3!}+\cdots$

厄米性的证明：

$$<\varphi|e^{iH}|\varphi>=<\varphi|\varphi>+i<\varphi|H|\varphi>+\cdots$$

由于$<\varphi|H|\varphi>$为实数，所以$i<\varphi|H|\varphi>$为复数。

可见e^{iH}为非厄米算符。

幺正性的证明：

$$<\varphi|(e^{iH})^{+}e^{iH}|\varphi>=<(1+\frac{iH}{1!}-\frac{H^2}{2!}-i\frac{H^3}{3!}+\cdots)\varphi|(1+\frac{iH}{1!}-\frac{H^2}{2!}-i\frac{H^3}{3!}+\cdots)\varphi>=<\varphi|\varphi>$$

即$(e^{iH})^{+}e^{iH}=1$，可见e^{iH}为幺正的。

（4）厄米性的证明：

$$<\varphi|\frac{1-iH}{1+iH}|\varphi>$$
$$=<\varphi|(1-iH)(1+iH)^{-1}|\varphi>$$
$$=<\varphi|(-2iH+1+iH)(1+iH)^{-1}|\varphi>$$
$$=<\varphi|iH(1+iH)^{-1}|\varphi>+<\varphi|(1+iH)(1+iH)^{-1}|\varphi>$$
$$=<\varphi|iH(1+iH)^{-1}|\varphi>+<\varphi|\varphi>$$

由于$|\varphi>$是任意选取的，所以$<\varphi|\varphi>$取复数。

可得，$\frac{1-iH}{1+iH}$为非厄米的。

幺正性的证明：由练习 2.3 （4）的公式得，

$$(1+iH)^{-1}=1-iH-H+iH+H=1$$

所以，

$$<\varphi|(\frac{1-iH}{1+iH})^{+}(\frac{1-iH}{1+iH})|\varphi>$$
$$=<\varphi|(1-iH)^{+}(1-iH)|\varphi>$$
$$=<\varphi|\varphi>+<\varphi|H^2|\varphi>$$

即$\frac{1-iH}{1+iH}$为非幺正算符。

（5）厄米性的证明：

若$i\frac{U-1}{U+1}$为厄米算符，则

$$<\varphi|(i\frac{U-1}{U+1})^{+}|\varphi>$$
$$=<i\frac{U-1}{U+1}\varphi|\varphi>$$
$$=-i<\varphi|\frac{U-1}{U+1}\varphi>^{*}$$
$$=-<\varphi|\frac{U-1}{U+1}\varphi>^{*}$$
$$=<\varphi|\frac{U-1}{U+1}\varphi>$$

也就是说，$<\varphi|(i\frac{U-1}{U+1})|\varphi>$是$i$的实数倍。可得$<\varphi|(i\frac{U-1}{U+1})|\varphi>$不是实数。即$i\frac{U-1}{U+1}$为非厄米算符。

幺正性的证明：

设$i\frac{U-1}{U+1}$为幺正算符，则

$$<\varphi|(i\frac{U-1}{U+1})^{+}(i\frac{U-1}{U+1})|\varphi>$$
$$=<i\frac{U-1}{U+1}\varphi|(i\frac{U-1}{U+1})\varphi>$$
$$=<\frac{U-1}{U+1}\varphi|(\frac{U-1}{U+1})\varphi>$$
$$=<\varphi|\varphi>$$

即$\frac{U-1}{U+1}=1$

即$U-1=U+1$。这是不可能的，所以$i\frac{U-1}{U+1}$为非幺正算符。

#

练习 2.16 设 T 为任意线性算符，证明下列二算符：

$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^{+}),\ T_2=\frac{1}{2i}(T-T^{+})$$

是厄米的；证明算符 T 按厄米算符的分解：

$$T=T_1+iT_2\ \ ,\ \ T^{+}=T_1-iT_2$$

是唯一的，即证明若另有厄米算符 S_1和 S_2满足$T=S_1+iS_2$时，必有 S_1=T_1, S_2=T_2.

（熊凯解答　赵中亮核对）

证明：（1）厄米性

$$T_1^+ = \frac{1}{2}(T + T^+)^+ = \frac{1}{2}(T + T^+) = T_1$$

$$T_2^+ = -\frac{1}{2i}(T - T^+)^+ = \frac{1}{2i}(T - T^+) = T_2$$

（2）算符 T 按厄米算符的分解：

$$T = T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^+) + \frac{i}{2i}(T - T^+) = T$$

$$T^+ = T_1 - iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^+) - \frac{i}{2i}(T - T^+) = T^+$$

假设上述分解不唯一，则存在有厄米算符 S_1 和 S_2 满足 $T = S_1 + iS_2$，此时 $S_1 \neq T_1$,

而 $T = S_1 + iS_2$，$T^+ = S_1 - iS_2$，则得 $S_1 = \frac{1}{2}(T + T^+) = T_1$，$S_2 = \frac{1}{2i}(T - T^+) = T_2$ 这与假设矛盾，所以上述分解是唯一的。

#

练习 2.17　算符 $|\psi\rangle\langle\varphi|$ 的伴算符是什么？（项朋解答 陈玉辉核对）

解：把算符 $|\psi\rangle\langle\varphi|$ 写成矩阵形式：

$$|\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* & \cdots & \cdots & \varphi_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1\varphi_1^* & \psi_1\varphi_2^* & \cdots & \cdots & \psi_1\varphi_n^* \\ \psi_2\varphi_1^* & \psi_2\varphi_2^* & \cdots & \cdots & \psi_2\varphi_n^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n\varphi_1^* & \psi_n\varphi_2^* & \cdots & \cdots & \psi_n\varphi_n^* \end{pmatrix}$$

$|\psi\rangle\langle\varphi|$ 的伴算符为

$$[|\psi\rangle\langle\varphi|]^+ = \begin{pmatrix} \varphi_1\psi_1^* & \varphi_1\psi_2^* & \cdots & \cdots & \varphi_1\psi_n^* \\ \varphi_2\psi_1^* & \varphi_2\psi_2^* & \cdots & \cdots & \varphi_2\psi_n^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n\psi_1^* & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_n\psi_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \cdots & \cdots & \psi_n^* \end{pmatrix} = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

#

练习 2.18　证明当 $i \neq j$ 时，$P_iP_j = 0$。（项朋解答 陈玉辉核对）

证：在空间中取一组基矢 $\{|v_i\rangle\}$，则投影算符 P_i，P_j 为，

$P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$，$P_j = |v_j\rangle\langle v_j|$

$P_iP_j = |v_i\rangle\langle v_i|v_j\rangle\langle v_j|$

$=|v_i\rangle\delta_{ij}\langle v_j|$

∴ 当$i\neq j$时，$P_iP_j=0$

#
习题 2.19　设P是空间中投向某一子空间的投影算符，*1* 单位算符。证明算符$1-P$：（1）是幂等的；（2）是投向这个子空间的补空间的投影算符。

证明：（1）、$\mathrm{p}=|v_i\rangle\langle v_i|$　　$1-p=1-|v_i\rangle\langle v_i|$

$$\Rightarrow(1-p)^n=1-p+C_n^2p^2+(-1)^3C_n^3p^3+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}p^{n-1}+(-1)^nC_n^np^n$$

由p的幂等性得：$p^n=p$

$$\Rightarrow(1-p)^n=1-p+C_n^2p+(-1)^3C_n^3p+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}p+(-1)^nC_n^np$$

$$=1-|v_i\rangle\langle v_i|+C_n^2|v_i\rangle\langle v_i|+(-1)^3C_n^3|v_i\rangle\langle v_i|+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}|v_i\rangle\langle v_i|+(-1)^nC_n^n|v_i\rangle\langle v_i|$$

$$=1-|v_i\rangle\langle v_i|=1-P$$

∴　$1-P$是幂等的；

（2）、由基矢的完全性关系得：

$$\sum_i|v_i\rangle\langle v_i|=1$$

∵　$|v_i\rangle\langle v_i|$只是某一空间的投影算符

则：其补空间的投影算符为：

$$\sum_i|v_i\rangle\langle v_i|-|v_i\rangle\langle v_i|=1-|v_i\rangle\langle v_i|=1-p$$

∴　$1-P$是这个子空间的不补空间的投影算符。

#
习题 2.20　投影算符有逆算符吗？为什么？（田军龙解答　邱鸿广核对）

解：投影算符有逆算符。

①、$p|\psi\rangle=\sum_i|v_i\rangle\langle v_i|\psi\rangle=|\varphi\rangle$

∵　$|\varphi\rangle$是一个投影矢量

∴　总能找到一个投影该矢量$|\varphi\rangle$的原矢量；

②、设$p|\psi_1\rangle=p|\psi_2\rangle$

由投影算符对空间任何矢量$|\psi\rangle$的作用是：

$$p|\psi\rangle=\sum_i|v_i\rangle\langle v_i|\psi\rangle=|\psi\rangle$$

得： $p|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle$ $p|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle$

又由设 $p|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ 得：

$$|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$$

由①②得对于每一个 $|\varphi\rangle$ 必有 $|\psi\rangle$ 且只有一个 $|\psi\rangle$。

∴　投影算符有逆算符。

#

3.1 （做题人：韩丽芳　　　　校对人：胡相英）　(好)

幺正算符也有本征矢量。证明幺正算符的本征值都是绝对值是 1 的复数；幺正算符的两个本征矢量，若所属本征值不同亦必正交。

证明： 设算符 U 为幺正算符，$\left|\psi\right\rangle$ 为其任意本征矢量，u 为对应的本征值。

即

$$U\left|\psi\right\rangle = u\left|\psi\right\rangle$$

则

$$\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\right|U^{+}U\left|\psi\right\rangle = \left\langle U\psi\middle|U\psi\right\rangle = u^{*}u\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle$$

因 $\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle \neq 0$，所以 $u^{*}u = 1$ 即 $|u| = 1$

即证得幺正算符的本征值都是绝对值是 1 的复数。

设算符 U 为幺正算符的两个本征值为 u_1、u_2，对应的矢量分别为 $\left|\psi_1\right\rangle$、$\left|\psi_2\right\rangle$，且 $u_1 \neq u_2$。

则

$$U\left|\psi_1\right\rangle = u_1\left|\psi_1\right\rangle \qquad U^{-1}\left|\psi_1\right\rangle = \frac{1}{u_1}\left|\psi_1\right\rangle$$

$$U\left|\psi_2\right\rangle = u_2\left|\psi_2\right\rangle \qquad U^{-1}\left|\psi_2\right\rangle = \frac{1}{u_2}\left|\psi_2\right\rangle$$

因为幺正算符 $U^{+} = U^{-1}$ 则有

$$\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle = \left\langle\psi_1\right|U^{+}U\left|\psi_2\right\rangle = u_1{}^{*}u_2\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle$$

$$= \left\langle\psi_1\right|UU^{+}\left|\psi_2\right\rangle = \frac{1}{u_1{}^{*}u_2}\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle$$

所以

$$\left(u_1{}^{*}u_2 - \frac{1}{u_1{}^{*}u_2}\right)\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle = 0$$

因为 $u_1{}^{*}u_2 - \dfrac{1}{u_1{}^{*}u_2} \neq 0$，故 $\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle = 0$，即 $\left|\psi_1\right\rangle$ 和 $\left|\psi_2\right\rangle$ 正交。

即证得幺正算符的两个本征矢量，若所属本征值不同亦必正交。

3.2 投影于某一子空间的投影算符 P，既然是厄米算符，它的本征值是什么？有无简并？本证子空间是什么？(好)

解：投影于某一子空间的投影算符 $P=\sum_{i=1}^{m}|i\rangle\langle i|$，设全空间是 n 维的，且 $m<n$。

则本征值方程

$$P|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{m}|i\rangle\langle i|\psi\rangle=\lambda|\psi\rangle \tag{1}$$

其中 λ 为本征值， $|\psi\rangle$ 为相应的本征态。

则

$$P^2|\psi\rangle=\lambda P|\psi\rangle=\lambda^2|\psi\rangle \tag{2}$$

由幺正算符等幂性 $P^2=P$ 得

$$P^2|\psi\rangle=P|\psi\rangle \tag{3}$$

由⑴、⑵和⑶ 式得 $\lambda^2=\lambda$，所以 $\lambda=1$ 或 $\lambda=0$。

即求得投影算符的本征值是 1 或 0。

当 $\lambda=1$ 时，本征矢量是 $|i\rangle$，其中 $i=1,2,\cdots m$。所以是简并的，本征子空间 S 是由这 m 个基矢构成的矢量空间。

当 $\lambda=0$ 时，本征矢量是与 $|i\rangle$ 正交的矢量。所以也是简并的，本征子空间是 S 空间的补空间。

#

练习 3.3　证明若算符的本征值谱中有零本征值，则这个算符肯定没有逆。

证明：假设算符 A 有逆，则在值域中取一任意|φ>，则定义域有|ψ>存在

即 $|\phi\rangle=1|\phi\rangle=AA^{-}|\psi\rangle$

$\because$ 已知 A 的全部本征值和相应的本征矢量： $A|\phi_i\rangle=a_i|\psi_i\rangle$　i=1，2，3…，

$\therefore\ |\phi\rangle=AA^{-}|\psi\rangle=a\left(A^{-}|\psi\rangle\right)$

$\because$ 算符 A 存在零本征值，即 $a=0\Rightarrow a|\phi\rangle=|0\rangle$

$\therefore$ 对于任意本征矢量 $|\phi\rangle\neq A^{-}\left(a|\psi\rangle\right)$ 与 $|\phi\rangle=a\left(A^{-}|\psi\rangle\right)$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立，即算符的本征值谱中有零本征值，这个算符肯定没有逆。

#

练习 3.4　根据完全性和封闭性的定义，分别证明：在 n 维空间中的一个完全矢量集{ $|\psi_i\rangle$ }，（ $|\psi_i\rangle$ 归一化但彼此不一定正交，i=1,2,3…,n），若从其中去掉一个矢量，例如

去掉 $|\psi_1\rangle$，就不再是完全集。（做题者：杨涛　审题人：吴汉成）

证明：假设在 n 维空间中的一个完全集$\{|\psi_i\rangle\}$去掉一个矢量$|\psi_1\rangle$后仍是完全集

$\therefore$ 新的矢量集 $\{|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle,\ldots|\psi_n\rangle\}$ 是线性无关的，即

$$|\psi\rangle=\sum_{i=2}^{n}|\psi_i\rangle\langle\psi_i||\psi\rangle=\sum_{i=2}^{n}|\psi_i\rangle c_i$$

我们把$|\psi_1\rangle$加入完全矢量集$\{|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle,\ldots|\psi_n\rangle\}$成立一个新集合$\{|\psi_i\rangle\}$，

$\because$ $\{|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle,\ldots|\psi_n\rangle\}$是完全集。则$|\psi_1\rangle$肯定能表为$|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle,\ldots|\psi_n\rangle$的线性叠加

$\therefore$新集合$\{|\psi_i\rangle\}$是线性相关的与它是线性无关相矛盾。

在 n 维空间中的一个完全集$\{|\psi_i\rangle\}$去掉一个矢量$|\psi_1\rangle$后不是完全集

#

3.5、在有限维空间中，有 A 和 B 两个相互对易的厄米算符。它们的全部线性无关的正交归一化本征矢量字分别为$\{|i\alpha\rangle\}$ 和$\{|i\beta\rangle\}$ ：

$$A|i\alpha\rangle=a_i|i\alpha\rangle \qquad a=1,2,3,\ldots\ldots\ldots m_i$$
$$B|i\beta\rangle=b_i|i\beta\rangle \qquad \beta=1,2,3,\ldots\ldots\ldots m_j$$

m_i， m_j分别为本征值a_i和b_j的简并度（它们也可以等于 1）。

（1）证明　$|ji\alpha\rangle=\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|ia\rangle$

是 A 和 B 的共同本征矢量。它们是否归一化？彼此是否正交？

（2）　全部不为零的$|ija\rangle$的总数是多少？它们是线性相关的还是线性无关的？

（做题：陈捷狮，审查人：刘强。）

解：（1）$A|ji\alpha\rangle=A\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle=\sum_{\beta}a_j|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle=\alpha_i|ji\alpha\rangle$

$$B|ji\alpha\rangle=B\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle=\sum_{\beta}b_j|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle=b_j|ji\alpha\rangle$$

所以：$|ji\alpha\rangle$是 A 和 B 的共同的本征矢量。

由于$\langle jia|jia\rangle=\left(\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle\right)^*\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle=\sum_{\beta}\langle j\beta|j\beta\rangle\langle j\beta|j\beta\rangle\langle ia|ia\rangle=1$

他们是归一的。

由于 A 和 B 作用在$|ji\alpha\rangle$的本征值不同，所以彼此是正交。

（2）全部不为零的$\left|ija\right\rangle$的总数是$m_i m_j$。它们是线性无关的。

#

练习 4 .1 在任何表象中，与厄米算符 H 对应的矩阵（H_{ij}）称为厄米矩阵，与幺正算符对应的矩阵（U_{ij}）称为幺正矩阵。证明它们分别满足下列关系：

$$H_{ji}=H_{ij}^* \qquad \sum_k U_{ki}^* U_{kj}=\sum_k U_{ik}U_{kj}^*=\sigma_{ij}$$

（做题：陈捷狮，审查人：刘强。）

解：（1）$H_{ji}=\langle j|H|i\rangle=\langle Hj|i\rangle=\langle i|Hj\rangle^*=\langle i|H|j\rangle^*=H_{ij}^*$

（2） 利用完全性关系可得：

$$\sum_k U_{ki}^* U_{kj}=\sum_k \langle k|U|i\rangle^* \langle k|U|j\rangle=\sum_k \langle Uk|i\rangle^* \langle Uk|j\rangle=\sum_k \langle Ui|k\rangle\langle k|Uj\rangle=\sigma_{ij}$$

$$=\sum_k \langle i|Uk\rangle\langle j|Uk\rangle^*=\sum_k U_{ik}U_{jk}^*$$

证毕!

练习 4.2 在某表象中，算符 $\hat{A}$ 的矩阵形式为

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} (1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 & (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 & (1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$$

（1） 求 $\hat{A}$ 的本征值及相应的本征矢量；

（2） 用 $\hat{A}$ 的一组正交归一化本征矢量集表示这一表象的三个基失。

解：（1）本征值方程为$\begin{pmatrix} (1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 & (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 & (1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

则久期方程为：$\begin{vmatrix} (1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda) & 0 & (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 & (\sqrt{2}-\lambda) & 0 \\ (-1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 & (1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda) \end{vmatrix}=0$

解得：$\lambda_1=\lambda_2=\sqrt{2}$，$\lambda_3=2$

当λ₁=λ₂=$\sqrt{2}$时本征函数为：$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = K_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

即此时本征函数分别为：$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

当时λ_3=2 本征函数为：$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

因为$\Psi_1 * \Psi_2 = 0$，$\Psi_1 * \Psi_3 = 0$，$\Psi_2 * \Psi_3 = 0$

所以用$\hat{A}$的一组正交归一化本征矢量集表示这一表象的三个基失为Ψ_1，Ψ_2，Ψ_3。

#

练习 4.3 在三维空间中，K 表象的基是$|\varepsilon_1\rangle$，$|\varepsilon_2\rangle$，$|\varepsilon_3\rangle$。有一算符 A，在此表象中的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 5 \end{pmatrix}$

（1）求 A 的本征矢量在 K 表象中的形式及相应的本征值；

（2）取 A 的本征矢量$|\alpha_1\rangle$，$|\alpha_2\rangle$，$|\alpha_3\rangle$为 L 表象（即 A 表象）的基，求表象变换的幺正矩阵U和U^{-1}；

（3）验证所求矩阵的幺正性；

（4）用U与U^{-1} 计算算符 A 在 L 表象中的矩阵。

（作题人：胡项英　　　校对人：韩丽芳）

解：（1）设 A 在 K 表象中的本征矢量为$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，相应的本征矢量为$\lambda$，则：

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

有解则：$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

所以得：$\lambda = 2,4,8$

所以：当$\lambda_1 = 2$时，代入本征值方程且根据$c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 = 1$ 则：

$c_1 = c_3 = 0, c_2 = 1$　　　所以：$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

同理：当$\lambda_2 = 4$时，则：

$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 0, c_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$　所以：$\psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

当$\lambda_3 = 8$时，则：

$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}$　所以：$\psi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（2）根据幺正矩阵$U = \langle \varepsilon_i | \alpha_i \rangle$则 A 在 K 表象中矢量按列排列即为$U$，

所以：$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3)将U ,U^{-1}的值代入得：$UU^{-1} = U^{-1}U = 1$

所以：U为幺正矩阵

（4）根据$A^{(l)} = U^{-1}A^{(k)}U$，分别代入U, U^{-1}则：

$$A^{(l)}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

#

练习 4.4　$\hat{H}$ 为厄米算符，$\hat{S}=\exp(i\hat{H})$　（侯书进）

证明：(1) $\hat{S}$ 是幺正算符；

(2) $\det\hat{S}=\exp(itr\hat{H})$

证明：（1）　$\hat{H}$ 为厄米算符，则 $\hat{H}^*=\hat{H}$

所以 $\hat{S}^*=\hat{S}^{-1}=\exp(-i\hat{H})$

即 $\hat{S}*\hat{S}^{-1}=\hat{S}*\hat{S}^*=\hat{I}$

则 $\hat{S}$ 是幺正算符

(2)因为 $\hat{S}$ 是 $\hat{H}$ 的函数，则 $\hat{S}$ 与 $\hat{H}$ 可以同时对角化。在 $\hat{H}$ 表象中，$\hat{H}$ 表现为对角矩阵，对角矩阵元 $H_{nn}=H_n$ 为 $\hat{H}$ 的本征值，则

$$tr\hat{H}=\sum_n H_{nn}=\sum_n H_n$$

而 $\hat{S}$ 的本征值 $\exp$（iH_n）

即 $S_n=S_{nn}=\exp$（iH_n）

则 $\det\hat{S}=\prod_n B_{nn}=\prod_n\exp(iH_n)=\exp(i\sum_n H_n)=\exp(itr\hat{H})$

#

练习 4.5　（吴汉成 完成，董延旭 核对）

在三维空间中，有矩阵 **A** 和 **B**：

$$A=\begin{pmatrix}5&5&\sqrt{2}\\5&5&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&10\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&-\sqrt{2}\\-1&1&-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

（1）　证明 **A** 和 **B** 均为厄米矩阵，而且**[A，B]=0**；

（2）　分别求 **A** 和 **B** 的本征值与本征矢量；

（3）　求 **A** 和 **B** 两算符的（归一化的）共同本征矢量集；

（4）　求能使 **A** 和 **B** 都对角化的幺正变换矩阵 **U**；

（5）　用 **U** 将 **A** 和 **B** 对角化。

解：　　（1）证明：由题意得 A 的转置矩阵 $\widetilde{A}$：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}5 & 5 & \sqrt{2}\\ 5 & 5 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10\end{pmatrix}$$

显然又得 $\widetilde{A}$ 的共轭矩阵：

$$(\widetilde{A})^{*}=\begin{pmatrix}5 & 5 & \sqrt{2}\\ 5 & 5 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10\end{pmatrix}$$

$(\widetilde{A})^{*}$ 与 A 比较，得：$(\widetilde{A})^{*}=A$

又∵ $A^{+}=(\widetilde{A})^{*}$，∴ $A^{+}=A$，显然 A 为厄米矩阵，

同理可证 B 为厄米矩阵。

又∵ $AB=\begin{pmatrix}5 & 5 & \sqrt{2}\\ 5 & 5 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -10\sqrt{2}\\ -2 & -2 & -10\sqrt{2}\\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5 & \sqrt{2}\\ 5 & 5 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -10\sqrt{2}\\ -2 & -2 & -10\sqrt{2}\\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4\end{pmatrix}$$

∴　　$AB-BA=0$

∴　　$[A,B]=AB-BA=0$，故得证。

（2）设 A 的本征值为 a，本征矢量为：$\psi_{A}=\begin{pmatrix}\psi_{A1}\\ \psi_{A2}\\ \psi_{A3}\end{pmatrix}$；B 的本征值为 b,本征矢量为:$\psi_{B}=\begin{pmatrix}\psi_{B1}\\ \psi_{B2}\\ \psi_{B3}\end{pmatrix}$。

则必有本征方程：$A\psi_{A}=a\psi_{A}$

即：

$$\begin{pmatrix}5 & 5 & \sqrt{2}\\ 5 & 5 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{A1}\\ \psi_{A2}\\ \psi_{A3}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\psi_{A1}\\ \psi_{A2}\\ \psi_{A3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-a & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 5-a & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{———[1]}$$

久期方程：

$$\begin{vmatrix} 5-a & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 5-a & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10-a \end{vmatrix} = 0$$

解之得： $a_1 = 0 \qquad a_2 = 8 \qquad a_3 = 12$

当 $a = a_1 = 0$,代入[1]式得：

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = 0$$

整理得：

$$5\psi_{A1} + 5\psi_{A2} + \sqrt{2}\psi_{A3} = 0$$

$$5\psi_{A1} + 5\psi_{A2} + \sqrt{2}\psi_{A3} = 0$$

$$\sqrt{2}\psi_{A1} + \sqrt{2}\psi_{A2} + 10\psi_{A3} = 0$$

联解得： $\psi_{A1} = -\psi_{A2}, \psi_{A3} = 0$

即得： $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ -\psi_{A1} \\ 0 \end{pmatrix}$

归一化条件： $\psi_A^+ \psi_A = 1$

即： $\begin{pmatrix} \psi_{A1}^* & -\psi_{A1}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ -\psi_{A1} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

即得 ： $\psi_{A1}^* \psi_{A1} + \psi_{A1}^* \psi_{A1} = 1$

解之得： $\psi_{A1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\psi_{A2} = -\psi_{A1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴ A 的本征矢量： $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$。

同理可得：

当 A 的本征值 $a = a_2 = 8$ 时，A 本征值矢量：$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

当 A 的本征值 $a = a_3 = 12$ 时，A 本征值矢量：$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_{A1} \\ \psi_{A2} \\ \psi_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

至于求 B 本征值和本征矢量的方法步骤，与求 A 的本征值和本征矢量的方法步骤是一样的，因此同理可求得 B 的本征值分别是： $b_1 = 2$ $\quad b_2 = 2$ $\quad b_3 = -2$

而且相应本征值 b 的本征矢量分别为：

1）本征值 $b = b_1 = 2$ 时，$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_{B1} \\ \psi_{B2} \\ \psi_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

2）本征值 $b = b_2 = 2$ 时 A，$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_{B1} \\ \psi_{B2} \\ \psi_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

3）本征值 $b = b_3 = -2$ 时，$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_{B1} \\ \psi_{B2} \\ \psi_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

(3) 设 A 和 B 的共同本征矢量$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$，则必有本征方程：

$$A\psi = a\psi, B\psi = b\psi$$

显然也有方程： $AB\psi = Ab\psi = bA\psi = ba\psi$

设$\lambda = ba$, 则 $AB\psi = \lambda\psi$

又∵ $AB = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$；并代入$AB\psi = \lambda\psi$ 式

得： $$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

∴ $$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & -10\sqrt{2} \\ -2 & -2-\lambda & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{————————————[2]}$$

所以得久期方程：

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -10\sqrt{2} \\ -2 & -2-\lambda & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解之得： $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 16, \lambda_3 = -24$

当$\lambda = \lambda_1 = 0$时，代入[2]式得：

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -2 & -2 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0$$

整理得： $$-2\psi_1 - 2\psi_2 - 10\sqrt{2}\psi_3 = 0$$

$$-2\psi_1 - 2\psi_2 - 10\sqrt{2}\psi_3 = 0$$

$$-10\sqrt{2}\psi_1 - 10\sqrt{2}\psi_2 - 4\psi_3 = 0$$

联解得： $\psi_1 = -\psi_2, \psi_3 = 0$

所以得：

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\-\psi_1\\0\end{pmatrix}$$

由归一化条件：$\psi^{+}\psi=1$，得：

$$\begin{pmatrix}\psi_1^* & -\psi_1^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\-\psi_1\\0\end{pmatrix}=0$$

解之得： $\psi_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\psi_2=-\psi_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以,当本征值 $\lambda=\lambda_1=0$ 时，ψ 的本征矢量：$\psi^{(1)}=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$

同理可得：

当本征值 $\lambda=\lambda_2=16$ 时，ψ 的本征矢量：$\psi^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

当本征值 $\lambda=\lambda_3=-24$ 时，ψ 的本征矢量：$\psi^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

综上所述得 A 和 B 的（归一化）共同本征矢量集：$\{\psi^{(1)}\quad\psi^{(2)}\quad\psi^{(3)}\}$，

$$\psi^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}\qquad\psi^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\qquad\psi^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

（4） 设能使 A 和 B 都对角化的幺正变换矩阵为 U，则必有

$$U^{+}=U^{-1}，\ A^{'}=UAU^{-1}=UAU^{+}，\ B^{'}=UBU^{-1}=UBU^{+}$$

$$\therefore \quad A^{'}B^{'}=\left(UAU^{+}\right)\left(UBU^{+}\right)=UAU^{+}UBU^{+}=UA\left(U^{+}U\right)BU^{+}$$

又 $\because$ $U^{+}U=1$，并代入上式

$$\therefore \quad A^{'}B^{'}=UABU^{+}=U(AB)U^{+}=U(AB)U^{-1}=\left(AB\right)^{'}$$

此关系式说明了：能使 A 和 B 都对角化的幺正变换矩阵，与能使（AB）对角化的幺正变换的矩阵，都是相同的，两者都是 U。另一方面，由（3）的结果可得能 AB 对角化的幺正矩阵为：

$$U=\left(\psi^{(3)}\quad \psi^{(2)}\quad \psi^{(1)}\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{————————[3]}$$

（5）由于 U 是幺正矩阵，所以$U^{-1}=U^{+}$，并联系[3]式得

$$U^{-1}=U^{+}=U=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

所以对角化：

$$A^{'}=U^{-1}AU=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，其对角元为 A 的本征值，与（2）小题的结果完全一致.

$$B^{'}=U^{-1}BU=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & \sqrt{2}\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$，其对角元为 B 的本征值，与（2）小题的结果完全一致。

#

练习 4.6　在一个 9 维空间中有二矩阵 A 和 B；

$$A=\begin{pmatrix}6 & . & . & . & . & . & & & \\ . & 4 & . & 2 & . & . & & & \\ . & . & 2 & . & 2 & . & & & \\ . & 2 & . & 4 & . & . & . & . & .\\ . & . & 2 & . & 4 & . & 2 & . & .\\ . & . & . & . & . & 4 & . & 2 & .\\ . & . & . & . & 2 & . & 2 & . & .\\ & & & . & . & 2 & . & 4 & .\\ & & & . & . & . & . & . & 6\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & -2\end{pmatrix}$$

式中空格及圆点均代表零。

（1）分别求 A 和 B 的本征值与本征矢量（不必归一化，取最简单形式），若本征值是 m 重简并的，写出其本征子空间的 m 个代表矢量；

（2）写出 A 和 B 的共同本征矢量完全集（共有 9 个矢量）。

（做题人:宁宏新　　校对人:胡项英）

解：１．设 A 的本征值为 λ，则 $\det(A-\lambda E)=0$，即

$$\det\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)^2\left[(4-\lambda)^2-4\right]\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(6-\lambda)^5(2-\lambda)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=6; \lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=2; \lambda_9=0$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=6$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $(\mathrm{A}-\lambda)\vec{\chi}=0$ 得

$$\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=\chi_1\\ \chi_2=\chi_4\\ \chi_3=\chi_7\\ \chi_5=2\chi_7\\ \chi_6=\chi_8\\ \chi_4=\chi_4\\ \chi_7=\chi_7\\ \chi_8=\chi_8\\ \chi_9=\chi_9\end{cases}\Rightarrow\bar{\chi}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_5\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

（$k_1\to k_5$为不同时为零的权）

本征值为 6 时，其是 5 重简并的，代表矢量为

$$\bar{\chi}_1^{(6)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_2^{(6)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_3^{(6)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_4^{(6)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_5^{(6)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=2$时，有

$$\begin{pmatrix}4&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0\\0&2&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&2&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&2&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由$(\mathrm{A}-\lambda)\bar{\chi}=0$得

$$\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=0\\ \chi_2=-\chi_4\\ \chi_3=-\chi_7\\ \chi_5=0\\ \chi_6=-\chi_8\\ \chi_4=\chi_4\\ \chi_7=\chi_7\\ \chi_8=\chi_8\\ \chi_9=0\end{cases}\Rightarrow\bar{\chi}=k_1\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$（$k_1\to k_3$为不同时为零的权）

本征值为 2 时为三重简并，代表矢量为

$$\bar{\chi}_1^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_2^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\bar{\chi}_3^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix};$$

当$\lambda_9=0$时，有

$$\begin{pmatrix}6&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&4&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&2&0&0&0&0\\0&2&0&4&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&4&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&4&0&2&0\\0&0&0&0&2&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&4&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由$\left(\mathrm{A}-\lambda\right)\bar{\chi}=0$得

$$\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=0\\ \chi_2=0\\ \chi_3=-\chi_5\\ \chi_5=-\chi_7\\ \chi_6=0\\ \chi_4=0\\ \chi_7=\chi_7\\ \chi_8=0\\ \chi_9=0\end{cases}\Rightarrow\bar{\chi}=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}(k\neq0)\text{代表矢量为}\ \bar{\chi}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

设B的本征值为δ，则 det$(\mathrm{B}-\delta\mathrm{E})=0$，即

$$\det\begin{vmatrix}2-\delta&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1-\delta&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0-\delta&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1-\delta&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0-\delta&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1-\delta&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0-\delta&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1-\delta&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&-2-\delta\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\delta_1=\delta_2=\delta_3=0;\delta_4=\delta_5=-1;\delta_6=\delta_7=1;\delta_8=2;\delta_9=-2$$

当$\Rightarrow\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$时

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B}-\delta\mathrm{E}\right)\bar{\chi}=0 \text{得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1=0 \\ \chi_2=0 \\ \chi_3=\chi_3 \\ \chi_5=\chi_5 \\ \chi_6=0 \\ \chi_4=0 \\ \chi_7=\chi_7 \\ \chi_8=0 \\ \chi_9=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\chi}=k_1\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \text{（}k_1\rightarrow k_3\text{为不同时为零的权）}$$

当$\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$时, 为三重简并, 代表矢量为:

$$\bar{\chi}_1^{(3)}=\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix};\bar{\chi}_2^{(3)}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix};\bar{\chi}_3^{(3)}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix};$$

当$\delta_4=\delta_5=-1$时, 有

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B} - \delta \mathrm{E}\right)\bar{\chi} = 0 \text{得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = 0 \\ \chi_2 = 0 \\ \chi_3 = 0 \\ \chi_5 = 0 \\ \chi_6 = \chi_6 \\ \chi_4 = 0 \\ \chi_7 = 0 \\ \chi_8 = \chi_8 \\ \chi_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\chi} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{（}k_1 k_2\text{不同时为零）}$$

$\delta_4 = \delta_5 = -1$ 为二重简并, 代表矢量为 $\bar{\chi}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\chi}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\delta_6 = \delta_7 = 1$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B} - \delta\mathrm{E}\right)\bar{\chi} = 0 \text{ 得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = 0 \\ \chi_2 = \chi_2 \\ \chi_3 = 0 \\ \chi_5 = 0 \\ \chi_6 = 0 \\ \chi_4 = \chi_4 \\ \chi_7 = 0 \\ \chi_8 = 0 \\ \chi_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\chi} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{（}k_1k_2\text{不同时为零）}$$

$$\delta_6 = \delta_7 = 1 \text{为二重简并, 代表矢量为} \bar{\chi}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\chi}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当$\delta_8 = 2$时

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B} - \delta \mathrm{E}\right)\bar{\chi} = 0 \text{得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \chi_1 \\ \chi_2 = 0 \\ \chi_3 = 0 \\ \chi_5 = 0 \\ \chi_6 = 0 \\ \chi_4 = 0 \\ \chi_7 = 0 \\ \chi_8 = 0 \\ \chi_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\chi} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(k \neq 0\right) \text{不简并, 代表矢量为} \; \bar{\chi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当 $\delta_9 = -2$ 时

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\text{由}(\mathrm{B}-\delta\mathrm{E})\bar{\chi}=0\text{得}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=0\\\chi_2=0\\\chi_3=0\\\chi_5=0\\\chi_6=0\\\chi_4=0\\\chi_7=0\\\chi_8=0\\\chi_9=\delta_9\end{cases}\Rightarrow\bar{\chi}=k\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)\text{不简并, 代表矢量为}\bar{\chi}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(3)求 A,B 的共同本正矢量完全集:对于 A, λ=6 本征值是 5 重简并的,则

$$\left\langle\chi_i^{(6)}\middle|\mathrm{B}\middle|\chi_j^{(6)}\right\rangle=\mathrm{B}_{ij}\Rightarrow\{\mathrm{B}_{ij}\}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}\text{设为}$$

$\mathrm{B}^{'},\det(\mathrm{B}^{'}-b\mathrm{E})=0\Rightarrow b_1=b_2=2;b_3=b_4=-2;b_5=0$

当$b_1=b_2=2$时有

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\text{由}(\mathrm{B}^{'}-b\mathrm{E})\vec{C}=0\Rightarrow\begin{cases}C_1=C_1\\C_2=C_2\\C_3=0\\C_4=0\\C_5=0\end{cases}$$

取$C_1=(1,0,0,0,0)$或$C_2=(0,1,0,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{J}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \vec{J}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

当 $b_3 = b_4 = -2$ 时有

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}4&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B}' - b\mathrm{E}\right)\vec{C} = 0 \Rightarrow \begin{cases}C_1 = 0\\C_2 = 0\\C_3 = 0\\C_4 = C_4\\C_5 = C_5\end{cases}$$

取 $C_3 = (0,0,0,1,0)$ 或 $C_4 = (0,0,0,0,1)$

$$\Rightarrow \vec{J}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \vec{J}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

当 $b_5 = 0$ 时

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \text{由} \left(\mathrm{B}' - b\mathrm{E}\right)\vec{C} = 0 \Rightarrow \begin{cases}C_1 = 0\\C_2 = 0\\C_3 = C_3\\C_4 = 0\\C_5 = 0\end{cases}$$

取 $C_5 = (0,0,1,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{J}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ =2 是三重简并的 $\left\langle \chi_i^{(3)} \middle| \mathrm{B} \middle| \chi_j^{(3)} \right\rangle = \mathrm{B}_{ij} \Rightarrow \{\mathrm{B}_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B'''$

$\det\left(B''' - bE\right) = 0 \Rightarrow b_1 = 2; b_2 = 1; b_3 = 0$

当 $b_1 = 2$ 时 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由 $\left(\mathrm{B}''' - b\mathrm{E}\right)\vec{C} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1 \\ C_2 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ 取 $C = (1,0,0)$ 则 $\vec{J}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $b_2 = 1$ 时 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由$\left(B'' - bE\right)\vec{C} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = C_2 \text{取} C = (0,1,0) \\ C_3 = 0 \end{cases}$ 则 $\vec{J}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$b_3 = 0$时$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由$\left(B'' - bE\right)\vec{C} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \ \text{取} C = (0,0,1) \\ C_3 = C_3 \end{cases}$ 则 $\vec{J}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

λ=0 时 A 与 B 有相同的本征态，即

$\vec{J}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ A 与 B 的共同本征矢量完全集为

$\left\{\vec{J}_1, \ \vec{J}_2, \ \vec{J}_3, \ \vec{J}_4, \ \vec{J}_5, \ \vec{J}_6, \ \vec{J}_7, \ \vec{J}_8, \ \vec{J}_9\right\}$

#

5.1　在一般的直和空间 $\mathrm{R}=\mathrm{R}_1\oplus\mathrm{R}_2$ 中，试论证 R_1 和 R_2 并非 R 的子空间。

（做题人 ：仪双喜　　校对人 ：董廷旭）

证明：如果 R_1 和 R_2 是 R 的子空间，那么大空间中的内积适用于所有的矢量，因此从 R_1 中选出四个矢量先做直和再做内积，所得结果与在直和空间中的内积定义有明显矛盾。因此，R_1 和 R_2 并非 R 的子空间。

#

5.2　为什么当两个子空间含有共同的非零矢量时，不能讨论这两个子空间的直和?（刘强　校正员：董廷旭）

解：这是因为大空间中的加法适用于所有矢量，从 R_1 和 R_2 中各取一个矢量构成的双矢量 $|\alpha\rangle\oplus|\psi\rangle$ 与二者之和 $|\alpha\rangle+|\psi\rangle$ 是等价的，前面公式中矢量的直和号 $\oplus$ 可以直接改写成加号。直和空间中不只包含 R_1 和 R_2 中的所有矢量,还包含更多的矢量。例如在三维物理空间中，若 R_1 是 xy 平面上的所有矢量，R_2 是沿 z 轴的所有矢量，则 $R_1\oplus R_2$ 包括这个三维空间中的全部矢量。由于算符在整个大空间中都有定义，所以一切算符在 R_1 和 R_2 中是通用的 ，这时没有算符的直和这一概念。如果有相同的非零矢量时，那么直和空间的维数不是两个子空间的维数之和。

#

练习 5.3　证明：

$$tr(A\oplus L)=trA+trL \tag{5.15}$$

$$\det(A\oplus L)=\det A\bullet\det L \tag{5.16}$$

证明：

$$tr\left(A\oplus L\right)=trA+trL$$
$$\det\left(A\oplus L\right)=\det A\bullet\det L$$

证明：在直和空间中，算符 $A\oplus L$ 的矩阵形式为：

$$A\oplus L=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$$

(1)　∵　$$tr(A\oplus L)=tr\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}=\sum_i A_{ii}+\sum_j A_{jj}=trA+trL$$

∴　$$tr\left(A\oplus L\right)=trA+trL$$

(2) $\because$ $\det(A \oplus L) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \det A \bullet \det L - 0 = \det A \bullet \det L$

$\therefore$ $\det(A \oplus L) = \det A \bullet \det L$

此题得证

#

练习 5.4　证明： $tr(A \otimes L) = trA \bullet trL$　（输入：王俊美　核对：杜花伟）

证明： $tr(A \otimes L) = trA \bullet trL$

证明：$\because$ $(A \otimes L)_{im,jn} = \langle v_i q_m | (A \otimes L) | v_j q_n \rangle = A_{ij} L_{mn}$

$\therefore$ $tr(A \otimes L) = \sum_{i,m} A_{ij} L_{mn} \delta_{ij} \delta_{mn} = \sum_i A_{ij} \delta_{ij} \sum_m L_{mn} \delta_{mn} = \sum_i A_{ii} \sum_m L_{jj} = trA \bullet trL$

即 $tr(A \otimes L) = trA \bullet trL$

此题得证。

练习 5.5　　有一本书[1]给出直积空间中的矢量加法定义，用我们的记号表示为

$$|\alpha\rangle \otimes |\psi\rangle + |\beta\rangle \otimes |\varphi\rangle = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \otimes (|\psi\rangle + |\varphi\rangle)$$

而其内积定义同我们的（5.20）式相同。试论证这一定义是否可行。

（做题人：董廷旭　　　　校正人：李泽超 ）

证：在直积空间中定义加法是为了表示新的矢量而如果我们可以定义为上式则会导致加法不会出现新的矢量。因为$(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$和$(|\psi\rangle + |\varphi\rangle)$还分别是 R_1和R_2空间的矢量。也就是说，直积空间经过加法运算后得到的矢量还是两个空间中各取一个矢量的直积，因此经过加法运算并没有产生出新的矢量。所以这种定义加法的方式不可行。

#

5.6　　有 3 个 2 维空间 R_1，R_2和R_3 将 **错误！未找到引用源。**

$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$,

$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

现在，在此三空间的直积空间$R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$中有一个算符 H，

$$H = \vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2 + \vec{\sigma}^2 \cdot \vec{\sigma}^3 + \vec{\sigma}^3 \cdot \vec{\sigma}^1$$

式中$\vec{A} \cdot \vec{B}$的定义为

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \otimes B_x + A_y \otimes B_y + A_z \otimes B_z$$

（1）求 H 的矩阵形式。

（2）求 H 的本征值。（ 做题人：董廷旭　　　　校稿人：李泽超　陈捷狮）

解: (1)

$$\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2 = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = 3\vec{\sigma}^1 \bullet \vec{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2）设 H 的本征矢量是$\psi = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$则

$$H\, H\psi = \lambda\psi \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

移项得$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0$此式有非零解的条件是行列式

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，$\lambda_4 = -9$.则 H 的本征值为 3 和-9

#

练习 5.7 **有一个二维空间 R_1，其中有三个算符，其矩阵形式如下；**

$$J_{1x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_{1y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_{1z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

又有一个三维空间 R_2，其中也有三个算符：

$$J_{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_{2z} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

定义 $J_i^2 = J_{ix}^2 + J_{iy}^2 + J_{iz}^2 (i = 1,2)$。

（1） 分别写出在这两个空间中 J_i^2 与 J_{iz} 的共同本征矢量的一列矩阵形式及相应的本征值。

（2） 构造六维直积空间 $R_1 \otimes R_2$。在此空间中定义下列算符：

$$J = J_1 + J_2 \qquad ;J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

求 J^2 与 J_z 二算符的矩阵形式。

在直积空间中求 J^2 与 J_z 的本征值及它们的全部共同本征矢量的一列矩阵形式。 （ 做题人：刘超　　审题者：何建贤）

解： (1) 因为 $J_1^2 = J_{1x}^2 + J_{1y}^2 + J_{1z}^2$，所以有

$$J_1^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设它们的共同本征矢量为 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，本征值为 λ，则有

$$\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

解它们的久期方程得:

$\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{4}$,把$\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{4}$代入（*）式得

$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

对于$J_{1z}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，同样可求出本征值为$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$，本征函数为

$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

同理可求得J_2^2和J_{2z}的本征函数和本征值

J_2^2的本征值为$\lambda_1=2$和$\lambda_2=\lambda_3=\frac{3}{2}$

$|\varphi\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$|\varphi\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$|\varphi\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

J_{2z}的本征函数和本征值为

$\lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$|\varphi\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\lambda_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|\varphi\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(2)根据已知条件，在六维直积空间$R_1\otimes R_2$中有

$J_x=J_{1x}\otimes J_{2x}$，$J_y=J_{1y}\otimes J_{2y}$，$J_z=J_{1z}\otimes J_{2z}$，$J^2=J_x^2+J_y^2+J_Z^2$

$$J_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$J_x^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同理可以求出其项

$$J_y=J_{1y}\otimes J_{2y}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$J_y^2=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$J_z=J_{1z}\otimes J_{2z}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$J_z^2=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可求得$J^2=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

(3)设它们的共同本征矢为$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}$，对于$J^2$有下列方程

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}$$

可求得本征值λ分别等于$\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$

可求得本质矢分别为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

同理可求得J_z的本征值为$-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{4}$，0

本征矢$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

因此它们的共同本征矢为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。

#

练习 6.1　在$|\psi\rangle$按A的本征矢量$\{|a_i\rangle\}$展开的（6.1）式中，证明若$|\psi\rangle$是归一化的，则$\sum_i c_i^* c_i = 1$，即A取各值的概率也是归一化的。（杜花伟）

证明：若$|\psi\rangle$是归一化的，则$\langle\psi|\psi\rangle = 1$。根据(6.1)式

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle c_i, \qquad c_i = \langle a_i|\psi\rangle$$

可得

$$\sum_i c_i^* c_i = \sum_i \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

即A取各值的概率是归一化的。

#

练习 6.2　(1) 证明在定态中,所有物理量取各可能值的概率都不随时间变化,因而,所有物理量的平均值也不随时间改变.

(2) 两个定态的叠加是不是定态? （杜花伟　核对：王俊美）

(1)证明：在定态中$H|i\rangle = E_i|i\rangle$,　$i = 1,2,3\cdots$

则

$$|\psi_i(t)\rangle = |i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}$$

所以

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}E_i t}\langle i|A|i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t} = \langle i|A|i\rangle .$$

即所有物理量的平均值不随时间变化.

(2)两个定态的叠加不一定是定态. 例如

$$\psi(x,t) = u(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + v(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$$

当$E_1 = E_2$时,叠加后$\psi(x,t)$是定态;当$E_1 \neq E_2$时，叠加后$\psi(x,t)$不是定态.

#

6.3 证明：当函数$f(x)$可以写成 x 的多项式时，下列形式上含有对算符求导的公式成立：

$$[X, f(P)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)$$

$$[f(X), P] = i\hbar\frac{\partial}{\partial X}f(X)$$

（解答：陈玉辉　　核对：项朋）

证明：(1)

$$[X,f(P)]\psi = Xf(P)\psi - f(P)X\psi$$
$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)\psi - f(P)i\hbar\frac{\partial}{\partial P}\psi$$
$$= \psi i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P) + f(P)i\hbar\frac{\partial}{\partial P}\psi - f(P)i\hbar\frac{\partial}{\partial P}\psi$$
$$= \psi i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)$$

所以 $[X,f(P)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)$

（2）

$$[f(X),P]\psi$$
$$= f(X)P\psi - Pf(X)\psi$$
$$= f(X)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial X})\psi - (-i\hbar\frac{\partial}{\partial X})f(X)\psi$$
$$= f(X)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial X})\psi - f(X)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial X})\psi - \psi(-i\hbar\frac{\partial}{\partial X})f(X)$$
$$= \psi i\hbar\frac{\partial}{\partial X}f(X)$$

所以 $[f(X),P] = i\hbar\frac{\partial}{\partial X}f(X)$

#

练习 6.4 下面公式是否正确？（解答：陈玉辉　　核对：项朋）

$$[X,f(X,P)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(X,P)$$

解：不正确。

因为 $f(X,P)$ 是 X 的函数，所以 $[X,f(X,P)]$ =0

#

练习 6.5 试利用 $Levi-Civita$ 符号，证明：（孟祥海）

（1） $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L}=0,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{L}=0$

（2） $[\boldsymbol{L},\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}]=0$

（3） $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{X}^2\boldsymbol{P}^2 - (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{X}) - 2i\hbar\,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}$

证明：

（1） $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L} = \sum_i P_i L_i = \sum_i P_i \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}X_jP_k = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}P_iX_jP_k$

由于 $\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk=123,231,312\\ -1, & ijk=132,213,321\\ 0, & 其他情况\end{cases}$　且 P_i，X_j，P_k 是相互对易的，

所以 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L}=\sum\limits_{ijk}\varepsilon_{ijk}P_iX_jP_k=0$

$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{L}=\sum\limits_{i}X_iL_i=\sum\limits_{i}X_i\sum\limits_{jk}\varepsilon_{ijk}X_jP_k=\sum\limits_{ijk}\varepsilon_{ijk}X_iX_jP_k$，同上面的过程可以得到

$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{L}=0$

（2）先计算：

$$\left[L_i,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}\right]=\left[\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}X_jP_k,\sum_{l}X_lP_l\right]=\sum_{l}\ \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\left[X_jP_k,X_lP_l\right]$$

由于 $\left[X_i,P_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$。将上式展开可以得到：$\left[L_i,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}\right]=0$，再利用相同的道理可以推出：

$\left[\boldsymbol{L},\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}\right]=0$

（3）证明：

$$\vec{X}^2\vec{P}^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$$
$$=x_1^2p_1^2+x_1^2p_2^2+x_1^2p_3^2+x_2^2p_1^2+x_2^2p_2^2+x_2^2p_3^2+x_3^2p_1^2+x_3^2p_2^2+x_3^2p_3^2$$

$$(\vec{X}\vec{P})(\vec{P}\vec{X})=(x_1p_1^2x_1+x_1p_1p_2x_2+x_1p_1p_3x_3+x_2p_2p_1x_1$$
$$+x_2p_2^2x_2+x_2p_2p_3x_3+x_3p_3p_1x_1+x_3p_3p_2x_2+x_3p_3^2x_3)$$

$$2i\hbar\vec{X}\vec{P}=2i\hbar(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$$

$$\vec{L}^2=x_2p_3x_2p_3-x_2p_3x_3p_2-x_3p_2x_2p_3+x_3p_2x_3p_2$$
$$+x_3p_1x_3p_1-x_3p_1x_1p_3-x_1p_3x_3p_1+x_1p_3x_1p_3$$
$$+x_1p_2x_1p_2-x_1p_2x_2p_1-x_2p_1x_1p_2+x_2p_1x_2p_1$$

利用公式 $[x_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}$

$$\vec{L}^2-\vec{X}^2\vec{P}^2+(\vec{X}\vec{P})(\vec{P}\vec{X})+2i\hbar\vec{X}\vec{P}$$
$$=-x_1^2p_1^2-x_2^2p_2^2-x_3^2p_3^2+x_1p_1^2x_1+x_2p_2^2x_2+x_3p_3^2x_3$$
$$+i\hbar(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3$$
$$=(x_1p_1^2x_1-x_1^2p_1^2)+(x_2p_2^2x_2-x_2^2p_2^2)+(x_3p_3^2x_3-x_3^2p_3^2)$$
$$+i\hbar(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$$
$$=-i\hbar x_1p_1-i\hbar x_2p_2-i\hbar x_3p_3+i\hbar(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$$
$$=0$$

即得证！

#

6.6 试仿照$(x^3p)_w$的计算方法，计算$(xp)_w$和$(x^2p^2)_w$。（高召习）

解：由 Weyle 规则，将物理量的经典式 A(x，p)写成ξ和η为变量的傅里叶积分

$$A(x,p)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}a(\xi,\eta)e^{i\xi x+i\eta p}d\eta \qquad (1)$$

将积分中指数上的 x 和 p 改为对应的算符 X 和 P。所得结果即为与 A(x，p)对应的算符式 A（X，P）

$$A(X,P)=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}a(\xi,\eta)e^{i\xi X+i\eta P}d\eta \qquad (2)$$

首先计算（1）式中 A(x，p)的傅里叶变换$A(\xi,\eta)$,取 A(x，p)为x^np^m，则有

$$a(\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}A(x,p)e^{-i\xi x-i\eta p}dp \qquad (3)$$

对于x^np^m有

$$\begin{aligned}a(\xi,\eta)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint x^np^me^{-i\xi x-i\eta p}dxdp\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^ne^{-i\xi x}\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^me^{-i\eta p}dxdp \qquad (4)\\&=\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\delta(\eta)\end{aligned}$$

对于 xp，n=1,m=1,将此式代入（2）得

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}(X,P)=(xp)_w\\&=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\delta(\eta)e^{i\xi x+i\eta p}d\xi d\eta\\&=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\delta(\eta)e^{i\xi x}e^{i\eta p}e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta}d\xi d\eta\\&=\int\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left\{e^{i\xi x}(-P-\frac{1}{2}\hbar\xi)\right\}d\xi\\&=\int\delta(\xi)e^{i\xi x}\left(XP+\frac{1}{2}\hbar\xi x-\frac{1}{2}i\hbar\right)d\xi\\&=XP-\frac{1}{2}i\hbar\\&=\frac{1}{2}(XP+PX)\end{aligned}$$

即 $(xp)_w = \frac{1}{2}(XP+PX)$

对于 x^2p^2，n=2，m=2，将此式代入（2）得

$$A(X,P)=(x^2p^2)_w$$
$$=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\delta(\eta)e^{i\xi x+i\eta p}d\xi d\eta$$
$$=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\delta(\eta)e^{i\xi x}e^{i\eta p}e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta}d\xi d\eta$$
$$=\int\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2e^{i\xi x}[\int\delta(\eta)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2e^{i\xi x}e^{i\eta p}d\eta]d\xi$$
$$=\frac{1}{6}(X^2P^2+XPXP+XP^2X+PX^2P+PXPX+P^2X^2)$$

即 $(x^2p^2)_w=\frac{1}{6}(X^2P^2+XPXP+XP^2X+PX^2P+PXPX+P^2X^2)$

#

练习 6.7　证明 $(x^np^m)_W$ 的一般公式：

$$(x^np^m)_W=(X-i\frac{\partial}{\partial\xi})^n(P+\frac{1}{2}\hbar\xi)^m|_{\xi=0}$$

并利用此式计算 $(x^np^m)_W$。　（解答：田军龙　　　审核：邱鸿广）

证明：$$(x^np^m)_W=\iint(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n\delta(\xi)(i\frac{\partial}{\partial\eta})^m\delta(\eta)e^{i\xi X+i\eta P}d\xi d\eta$$

$$=\iint(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n\delta(\xi)(i\frac{\partial}{\partial\eta})^m\delta(\eta)e^{i\xi X}e^{i\eta P}e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta}d\xi d\eta$$

$$=(-1)^{n+m}\int\delta(\xi)(i\frac{\partial}{\partial\xi})^ne^{i\xi X}\left[\int\delta(\eta)(i\frac{\partial}{\partial\eta})^m(e^{i\eta P}e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta})d\eta\right]d\xi$$

$$=(-1)^{n+m}\int\delta(\xi)(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n\left[e^{i\xi X}(-P-\frac{1}{2}\hbar\xi)^m\right]d\xi$$

$$=(-1)^{n+m}\int\left[e^{i\xi X}(-P-\frac{1}{2}\hbar\xi)^m(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n\delta(\xi)\right]d\xi$$

$$=(-1)^n\int\left[\delta(\xi)(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n e^{i\xi X}(P+\frac{1}{2}\hbar\xi)^m\right]d\xi$$

$$=(i\frac{\partial}{\partial\xi})^n e^{i\xi X}(P+\frac{1}{2}\hbar\xi)^m|_{\xi=0}$$

$$=(X-i\frac{\partial}{\partial\xi})^n(P+\frac{1}{2}\hbar\xi)^m|_{\xi=0}$$

$$(X^3P^2)_W=\frac{1}{8}(X^3P^2+X^2PXP+XPX^2P+X^2P^2X+XP^2X^2$$
$$+PX^2PX+PXPXX^2+P^2X^2)$$

#

练习 6.8　　（梁端）

解：$\left(x^n p\right)_B=\frac{1}{2}\left(X^nP+PX^n\right)$

因为：　$[X,P]=0$

所以：　$\left(x^n p\right)_B=X^nP$

欲求：　$\left(x^n p\right)_w$　　则：

$$a(\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint x^n pe^{-i\xi x-i\eta p}dxdp$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n e^{-i\xi x}\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)e^{-i\eta p}dxdp$$

$$=\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\delta(\eta)$$

所以：

$$\left(x^n p\right)_w=\mathrm{A}(X,P)=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\delta(\eta)e^{i\xi X+i\eta P}d\xi d\eta$$

$$=\iint\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\delta(\eta)e^{i\xi X}e^{i\eta P}d\xi d\eta$$

$$=(-1)^2\int\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n e^{i\xi X}\left[\int\delta(\eta)i\frac{\partial}{\partial\eta}e^{i\eta P}d\eta\right]d\xi$$

$$=\int\delta(\xi)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\left[(-P)e^{i\xi X}\right]d\xi$$

因为： $[X,P]=0$

$$(x^n p)_w=\frac{1}{n+1}\left[(n+1)X^n P\right]=X^n P$$

故： 在条件 $[X,P]=0$ 下

$$(x^n p)_B=(x^n p)_w$$

#

练习 6.9 一般认为一个正确的对应关系应满足：经典量 f 的算符对应的平方，应当与经典 f^2 的对应相同。试以 $f=xp$ 为例，说明 *Bohm* 规则与 *Weyl* 规则都不满足这个条件。

（解答：邱鸿广　　　审核：田军龙）

解：（1） *Bohm* 规则：

$f=xp$ 的对应算符为：$(xp)_B=\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{p}+\vec{p}\vec{x})$

此算符对应的平方为：$\frac{1}{4}(\vec{x}\vec{p}+\vec{p}\vec{x})^2$ （1）

经典量 f^2 的算符为 $(x^2p^2)_B=\frac{1}{2}(\vec{x}^2\vec{p}^2+\vec{p}^2\vec{x}^2)$ （2）

因为 $(1)\neq(2)$ 所以 *Bohm* 规则不满足提设这个条件。

（2） *Weyl* 规则：

$f=xp$ 的对应算符为：$(xp)_W=\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{p}+\vec{p}\vec{x})$

此算符对应的平方为：$\frac{1}{4}(\vec{x}\vec{p}+\vec{p}\vec{x})^2=\frac{1}{4}(\vec{x}\vec{p}\vec{x}\vec{p}+\vec{x}\vec{p}^2\vec{x}+\vec{p}\vec{x}^2\vec{p}+\vec{p}\vec{x}\vec{p}\vec{x})$ （3）

经典量 f^2 的算符为：$(x^2p^2)_W=\frac{1}{6}(\vec{x}^2\vec{p}^2+\vec{x}\vec{p}\vec{x}\vec{p}+\vec{x}\vec{p}^2\vec{x}+\vec{p}\vec{x}^2\vec{p}+\vec{x}\vec{p}\vec{x}\vec{p}+\vec{x}^2\vec{p}^2)$ （4）

因为 $(3)\neq(4)$ 所以 *Weyl* 规则也不满足提设这个条件。

#

6.10 证明：$\left[\vec{L},R\right]=0,\left[\vec{L},\frac{1}{R}\right]=0,\left[\vec{L},P\right]=0$.（解答：项朋　　　审核：陈玉辉）

证明：① 先计算$\left[\vec{L},R^2\right]$

$$\left[\vec{L},R^2\right]=\left[\vec{L},\vec{X}^2\right]=\sum_{ij}\vec{e}_i\left[L_i,X_jX_j\right]$$
$$=\sum_{ij}\vec{e}_i\left\{X_j\left[L_i,X_j\right]+\left[L_i,X_j\right]X_j\right\}$$
$$=\sum_{ij}\vec{e}_i\left\{2i\hbar\sum_k\varepsilon_{ijk}X_kX_j\right\}$$
$$=0$$

再计算$\left[\vec{L},R\right]$，

$$0=\left[\vec{L},R^2\right]=R\left[\vec{L},R\right]+\left[\vec{L},R\right]R=2R\left[\vec{L},R\right]$$

$\therefore\quad \left[\vec{L},R\right]=0$

② $$0=\left[\vec{L},1\right]=\left[\vec{L},R\frac{1}{R}\right]=R\left[\vec{L},\frac{1}{R}\right]+\left[\vec{L},R\right]\frac{1}{R}=R\left[\vec{L},\frac{1}{R}\right]+0$$

$$\therefore\left[\vec{L},\frac{1}{R}\right]=0$$

③

$$\left[\vec{L},P^2\right]=\left[\vec{L},\vec{P}^2\right]=\sum_{ij}\vec{e}_i\left[L_i,P_jP_j\right]$$
$$=\sum_{ij}\vec{e}_i\left\{P_j\left[L_i,P_j\right]+\left[L_i,P_j\right]P_j\right\}$$
$$=\sum_{ij}\vec{e}_i\left\{2i\hbar\sum_k\varepsilon_{ijk}P_k\right\}$$
$$=0$$

$$0=\left[\vec{L},P^2\right]=P\left[\vec{L},P\right]+\left[\vec{L},P\right]P=2P\left[\vec{L},P\right]$$

$\therefore\quad \left[\vec{L},P\right]=0$.

#

6.11 用数学归纳法求$\left[P^2,R^n\right]$和$\left[P^2,\dfrac{1}{R^n}\right]$，$n=0,1,2\cdots$（解答：项朋　　审核：陈玉辉）

解：① 由 6.28 式可知

$$\left[\vec{P},R^n\right]=-ni\hbar R^{n-2}\vec{R}$$

$\therefore$

$$\left[P^2,R^n\right]=\left[\vec{P}^2,R^n\right]=\vec{P}\left[\vec{P},R^n\right]+\left[\vec{P},R^n\right]\vec{P}$$
$$=-ni\hbar R^{n-2}\left(\vec{P}\vec{R}+\vec{R}\vec{P}\right)=-ni\hbar R^{n-2}\left(-i\hbar+2\vec{R}\vec{P}\right)$$

下面用数学归纳法证明上式成立:

当 $n=0$ 时，显然成立

当 $n=1$ 时，由 6.31 式，上式成立

再由上式推出一个将 n 改为 n+1 的同样公式;

$$\left[P^2,R^{n+1}\right]=R\left[P^2,R^n\right]+\left[P^2,R\right]R^n=-ni\hbar R^{n-1}\left(-i\hbar+2\vec{R}\vec{P}\right)+\left[-i\hbar\left(2\vec{P}\vec{R}+i\hbar\right)\frac{1}{R}\right]R^n$$
$$=-ni\hbar R^{n-1}\left(-i\hbar+2\vec{R}\vec{P}\right)+\left[-i\hbar R^{n-1}\left(-i\hbar+2\vec{R}\vec{P}\right)\right]=-(n+1)i\hbar R^{n-1}\left(-i\hbar+2\vec{R}\vec{P}\right)$$

说明了原式对 n+1 也成立，于是证明了上式的普遍成立。

② 由 6.29 式可知

$$\left[\vec{P},\frac{1}{R^n}\right]=ni\hbar\frac{1}{R^{n+2}}\vec{R}$$

∴

$$\left[P^2,\frac{1}{R^n}\right]=\left[\vec{P}^2,\frac{1}{R^n}\right]=\vec{P}\left[\vec{P},\frac{1}{R^n}\right]+\left[\vec{P},\frac{1}{R^n}\right]\vec{P}=ni\hbar\frac{1}{R^{n+2}}\left(\vec{P}\vec{R}+\vec{R}\vec{P}\right)=ni\hbar\frac{1}{R^{n+2}}\left(2\vec{P}\vec{R}+i\hbar\right)$$

下面用数学归纳法证明上式成立:

当 $n=0$ 时，显然成立

当 $n=1$ 时，由 6.31 式，上式成立

再由上式推出一个将 n 改为 n+1 的同样公式;

$$\left[P^2,\frac{1}{R^{n+1}}\right]=\frac{1}{R}\left[P^2,\frac{1}{R^n}\right]+\left[P^2,\frac{1}{R}\right]\frac{1}{R^n}=ni\hbar\frac{1}{R^{n+3}}\left(2\vec{P}\vec{R}+i\hbar\right)+i\hbar\frac{1}{R^3}\left(2\vec{P}\vec{R}+i\hbar\right)\frac{1}{R^n}$$
$$=(n+1)i\hbar\frac{1}{R^{n+3}}\left(2\vec{P}\vec{R}+i\hbar\right)$$

说明了原式对 n+1 也成立，于是证明了上式的普遍成立。

#

6.12　证明：（1） $\vec{P}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{P}=2i\hbar\vec{P}$

（2） $\left(\vec{P}\times\vec{L}\right)\bullet\left(\vec{L}\times\vec{P}\right)=P^2L^2$　　（梁端）

（1）证明： $\vec{P}\times\vec{L}=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}P_iL_j\vec{e}_k$

$$=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}P_i\sum_{lm}R_lP_m\vec{e}_k$$

$$=\sum_{ik}\sum_{lm}(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})P_iR_lP_m\vec{e}_k$$

$$=\sum_{ik}(P_iR_kP_i-P_iR_iP_k)\vec{e}_k$$

$$=\sum_{ik}[P_i(P_iR_k+i\hbar\delta_{ik})-P_iR_iP_k]\vec{e}_k$$

$$=P^2\vec{R}-\vec{P}\bullet\vec{R}\vec{P}+i\hbar\vec{P}$$

同理可证：

$$\vec{L}\times\vec{P}=-P^2\vec{R}+\vec{P}\bullet\vec{R}\vec{P}+i\hbar\vec{P}$$

故： $\vec{P}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{P}=2i\hbar\vec{P}$

（2）证明：由上题可知： $\vec{P}\times\vec{L}=P^2\vec{R}-\left(\vec{P}\bullet\vec{R}-i\hbar\right)\vec{P}$

将各个量化为三维形式：

$$\vec{P}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$$

$$P^2=p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2$$

所以：

$$\begin{aligned}\vec{P}\times\vec{L}=&\left(p_x{}^2x+p_y{}^2x+p_z{}^2x-p_xxp_x-p_yyp_x-p_zzp_x-i\hbar p_x\right)\vec{i}\\&+\left(p_x{}^2y+p_y{}^2y+p_z{}^2y-p_xxp_y-p_yyp_y-p_zzp_y-i\hbar p_y\right)\vec{j}\\&+\left(p_x{}^2z+p_y{}^2z+p_z{}^2z-p_xxp_z-p_yyp_z-p_zzp_z-i\hbar p_z\right)\vec{k}\end{aligned}$$

则有：

将上式进行点乘，经过整理得：

$$\begin{aligned}\left(\vec{P}\times\vec{L}\right)\bullet\left(\vec{P}\times\vec{L}\right)&=\left(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2\right)\left[\left(yp_z-zp_y\right)\vec{i}+\left(zp_x-xp_x\right)\vec{j}+\left(xp_y-yp_x\right)\vec{k}\right]^2\\&=P^2L^2\end{aligned}$$

故：此题得证

#

6.13

练习 7.1　推导以下列个关系式

$$T^{+}(\pi)\left|p\right\rangle=\left|p+\pi\right\rangle, T(\pi)\left|p\right\rangle=\left|p+\pi\right\rangle$$

$$\left\langle p\right|T^{+}(\pi)=\left\langle p+\pi\right|, \left\langle p\right|T(\pi)=\left\langle p+\pi\right|$$

解：用位置 X 构造一个幺正算符$T^{+}(\pi)$

$T^{+}(\pi)=\exp(\frac{i}{\hbar}\pi X)$其伴算符为$T(\pi)=\left[T^{+}(\pi)\right]^{-1}=\exp(-\frac{i}{\hbar}\pi X)$

$T^{+}(\pi)$与 P 的对易关系是：

$$\left[T^{+}(\pi),P\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial X}T^{+}(\pi)=-\pi T^{+}(\pi)$$

即$PT^{+}(\pi)=T^{+}(\pi)P+\pi T^{+}(\pi)$

将此式作用到$\left|p\right\rangle$上，得

$$PT^{+}(\pi)\left|p\right\rangle=T^{+}(\pi)P\left|p\right\rangle+\pi T^{+}(\pi)\left|p\right\rangle=(p+\pi)T^{+}(\pi)\left|p\right\rangle$$

则 P 的一个本征矢量$\left|p\right\rangle$被算符$T^{+}(\pi)$作用后，可得出另一个本征矢量，其本征值为$p+\pi$

$$T^{+}(\pi)\left|p\right\rangle=\left|p+\pi\right\rangle$$

由于$T^{+}(\pi)$的幺正性，$\left|p+\pi\right\rangle$也是归一的。我们称$T^{+}(\pi)$为作用于动量本征矢量的上升算符；有上式的左矢形式

$$\left\langle p\right|T(\pi)=\left\langle p+\pi\right|$$

可知，算符$T(\pi)$是左矢$\left\langle p\right|$的上升算符。

将$T(\pi)$作用于$\left|p\right\rangle$，由于$T(\pi)=T^{+}(-\pi)$可得，

$$T(\pi)\left|p\right\rangle=\left|p-\pi\right\rangle$$

$$\left\langle p\right|T^{+}(\pi)=\left\langle p-\pi\right|$$

可见算符$T(\pi)$是右矢$\left|p\right\rangle$的下降算符，而算符$T^{+}(\pi)$是左矢$\left\langle p\right|$的下降算符。

#

7.2 若取 $Q^{+}=e^{-\frac{i}{\hbar}\xi p}$ 中的 ξ 为复数，能否得出 X 的本征值为复数的结论？

（韩丽芳　侯书进　　审）

解：若 ξ 为复数，令 ξ=a+ib 则

由 $\left[X,Q_{(\xi)}{}^{+}\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial p}Q^{+}{}_{(\xi)}=\xi Q_{(\xi)}^{+},XQ_{(\xi)}^{+}=Q_{(\xi)}^{+}X+\xi Q_{(\xi)}^{+}\left|x\right\rangle$

得 $XQ_{(\xi)}^{+}\left|x\right\rangle=Q_{(\xi)}^{+}X\left|x\right\rangle+\xi Q_{(\xi)}^{+}\left|x\right\rangle=(x+\xi)Q_{(\xi)}^{+}\left|x\right\rangle$

因为 ξ 为复数，$Q_{(\xi)}^{+}$ 不再是幺正算符，现将 $Q_{(\xi)}^{+}\left|x\right\rangle$ 归一化得其归一化矢量为 $e^{-\frac{i}{\hbar}ap}\left|x\right\rangle$，其本征值为 x+ξ①

同理 $Xe^{-\frac{i}{\hbar}ap}\left|x\right\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}ap}X\left|x\right\rangle+ae^{-\frac{i}{\hbar}ap}\left|x\right\rangle=(a+x)e^{-\frac{i}{\hbar}ap}\left|x\right\rangle$

即此时本征值为 x+a②

①②,结论矛盾，所以 ξ 不能是复数，即 X 的本征值不可以是复数

7.3 证明：$X_{p'p}=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta\left(p'-p\right)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\left(p'-p\right)$ 式成立。

（做题人：杨涛　　审题人：吴汉成）

证明：令 $\left|0_{x}\right\rangle=\left|x=0\right\rangle$ 表示算符 X 的本征值为零的本征矢量，$\left|0_{p}\right\rangle=\left|p=0\right\rangle$ 表示算符 P 的本征值为零的本征矢量。

$$\langle p|x\rangle = \langle p|Q^{+}(x)|0_x\rangle = \langle p|e^{-\frac{i}{\hbar}xP}|0_x\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\langle p|0_x\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\langle 0_p|T(p)|0_x\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\langle 0_p|e^{-\frac{i}{\hbar}pX}|0_x\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\langle 0_p|0_x\rangle$$

$$\delta(x-x') = \langle x|x'\rangle = \int\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle dp$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}xp}\left|\langle 0_p|0_x\rangle\right|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}x'p}dp$$

$$= \left|\langle 0_p|0_x\rangle\right|^2\int e^{-\frac{i}{\hbar}p(x'-x)}dp$$

$$= \left|\langle 0_p|0_x\rangle\right|^2 2\pi\hbar\delta(x-x')$$

$$\therefore \langle 0_p|0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\therefore \langle p|x\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\langle 0_p|0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp}$$

$$X_{p'p} = \langle p'|X|p\rangle$$

$$= \iint\langle p'|x'\rangle dx'\langle x'|X|x\rangle dx\langle x|p\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\iint e^{-\frac{i}{\hbar}x'p'}x\delta(x'-x)e^{\frac{i}{\hbar}xp}dx'dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)}xdx$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\delta(p'-p)\cdot 2\pi\hbar$$

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p'-p)$$

证毕

7.4 证明以下两个左矢关系成立：（做题人：杨涛　　审题人：吴汉成）

$$\langle x|X = x\langle x|$$

$$\langle x|P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|$$

证明：在 $\langle x|X$ 式中右乘 $|x\rangle$

则 $\langle x|X|x\rangle = x\langle x|x'\rangle = x\delta(x-x')$

在 $x\langle x|$ 式中右乘 $|x\rangle$

$$x\langle x|x'\rangle = x\delta(x-x')$$

则 $\therefore \langle x|X|x\rangle = x\langle x|x'\rangle$

$$\therefore \langle x|X = x\langle x|$$

证毕

在 $\langle x|P$ 右乘 $|x\rangle$

则 $\langle x|P|x'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$

在 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|$ 右乘 $|x'\rangle \Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|x'\rangle$

$\therefore \langle x|P|x'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|x'\rangle$

$\therefore \langle x|P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|$

证毕

练习 7.5　试讨论动量表象的函数形式。（吴汉成 完成， 董延旭 核对）

解：讨论关系式：$|\varphi\rangle = X|\psi\rangle$，从矩阵形式出发则有：

$$\varphi(p) = \varphi_p = \langle p|\varphi\rangle = \langle p|X|\psi\rangle \text{--------------（1）}$$

而本征值矢量组 $\{|p'\rangle\}$ 是完全的，即：$\int_{-\infty}^{+\infty}dp'|p'\rangle\langle p'| = 1$，并代入（1）式得：

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty}dp'\langle p|X|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle$$

又 $\because$　$\langle p|X|p'\rangle = X_{pp'} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p-p'),\ \psi_{p'} = \langle p'|\psi\rangle$，并代入上式

得：$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty}dp'[-i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p-p')\psi_{p'}$　--------（2）

并对该式进行分部积分：

$$\varphi(p) = -i\hbar\delta(p-p')\psi_{p'}|_{p'=-\infty}^{p=+\infty} + \int\delta(p-p')[i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_{p'}]dp'$$

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi_p = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p)$$

上式可写成如下形式：

$\varphi(p)=\hat{X}\psi(p)$，其中算符 $\hat{X}=i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}$，此关系式便是动量表象的函数形式。

练习 7.6　证明描写同一状态 ψ 的位置表象波函数 $\psi(x)$ 与动量表象波函数 $\psi(p)$ 之间满足傅里叶变换：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(p)e^{\frac{i}{\hbar}xp}dp$$

$$\psi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}xp}dx$$

（吴汉成 完成， 董延旭 核对）

（1）　证明：已知 $\langle x\mid p\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$，显然得：

$$右边=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(p)e^{\frac{i}{\hbar}xp}dp$$

$$=\int\psi(p)(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px})dp$$

$$=\int\psi(p)\langle x\mid p\rangle dp$$

又有，$\psi(p)=\psi_p=\langle p\mid\psi\rangle$，并代入上式得：

$$右边=\int\langle p\mid\psi\rangle\langle x\mid p\rangle dp$$

$$=\int(\langle\psi\mid p\rangle)^*(\langle p\mid x\rangle)^*dp$$

$$=\int(\mid p\rangle\langle p\mid)^*dp\,(\langle\psi\mid x\rangle)^*\quad\text{--------（1）}$$

又 ∵ 本征值矢量组 $\{\mid p\rangle\}$ 的完全性，即：$\int\mid p\rangle\langle p\mid dp=1$

∴ $\int(\mid p\rangle\langle p\mid)^*dp=(\int\mid p\rangle\langle p\mid dp)^*=1$，并代入（1）式得：

$$右边=(\langle\psi\mid x\rangle)^*=\langle x\mid\psi\rangle=\psi_x=\psi(x)$$

显然证得：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(p)e^{\frac{i}{\hbar}xp}dp$$

（1） 证明：已知 $\langle x \mid p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$ ，则有：

$$\langle p \mid x\rangle = \langle x \mid p\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

显然得：右边=$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}xp}dx$

$$= \int\psi(x)(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px})dx$$

$$= \int\psi(x)\langle p \mid x\rangle dx$$

又有 $\psi(x) = \psi_x = \langle x \mid \psi\rangle$，并代入上式得：

右边 $= \int\langle x \mid \psi\rangle\langle p \mid x\rangle dx$

$$= \int(\langle\psi \mid x\rangle)^*(\langle x \mid p\rangle)^* dx$$

$$= \int(\mid x\rangle\langle x \mid)^* dx(\langle\psi \mid p\rangle)^* \quad \text{------------------（2）}$$

又 $\because$ 本征值矢量组 $\{\mid x\rangle\}$ 的完全性，即：$\int\mid x\rangle\langle x \mid dx = 1$

$\therefore$ $\int(\mid x\rangle\langle x \mid)^* dx = (\int\mid x\rangle\langle x \mid dx)^* = 1$，并代入(2)式得：

右边 $= (\langle\psi \mid p\rangle)^* = \langle p \mid \psi\rangle = \psi_p = \psi(p)$

显然证得：

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(p)e^{-\frac{i}{\hbar}xp}dx$$

7.7 在三维的位置表象或动量表象中，重新证明 (6.28)、(6.29) 和 (6.31) 各式，即

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{R}}\right] = -i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}, \qquad \left[\hat{\vec{P}},\frac{1}{r}\right] = i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}$$

$$\left[\hat{P}^2,\hat{\vec{R}}\right] = -2i\hbar\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}} + i\hbar\right)\frac{1}{r}, \quad \left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right] = 2i\hbar\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\frac{1}{r^3}$$ （王俊美）

证明 在三维的位置表象中：

利用 $\left[\vec{P}, f\left(\vec{X}\right)\right] = -i\hbar\nabla f\left(\vec{X}\right)$ 证明以下各式得:

$$(1)\because \left[\hat{\vec{P}},\hat{R}\right]=-i\hbar\nabla\hat{R}=-i\hbar\left(\frac{\hat{\vec{R}}}{r}\right)$$

$$\therefore \left[\hat{\vec{P}},\hat{R}\right]=-i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}$$

$$(2)\because \left[\hat{\vec{P}},\frac{1}{r}\right]=-i\hbar\nabla\frac{1}{r}=-i\hbar\left(-\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}\right)$$

$$\therefore \left[\hat{\vec{P}},\frac{1}{r}\right]=i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}$$

$$(3)\because \hat{P}^2=\hat{\vec{P}}^2$$

$$\therefore \left[\hat{\vec{P}}^2,\hat{\vec{R}}\right]=\hat{\vec{P}}\left[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{R}}\right]+\left[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{R}}\right]\hat{\vec{P}}$$

$$=\hat{\vec{P}}\left(-i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}\right)+\left(-i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}\right)\hat{\vec{P}}$$

$$=-i\hbar\left[\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\right)\frac{1}{r}+\hat{\vec{R}}\left(\hat{\vec{P}}\cdot\frac{1}{r}\right)\right]+\left(-i\hbar\frac{1}{r}\right)\hat{\vec{R}}\cdot\hat{\vec{P}}$$

$$又\because \hat{\vec{P}}\cdot\frac{1}{r}=-i\hbar\nabla\cdot\frac{1}{r}=i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3},\left[\hat{\vec{R}},\hat{\vec{P}}\right]=i\hbar$$

$$\therefore \left[\hat{\vec{P}}^2,\hat{\vec{R}}\right]=-i\hbar\left[\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\right)\frac{1}{r}+\hat{\vec{R}}\left(i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}\right)\right]+\left(-i\hbar\frac{1}{r}\right)\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}+i\hbar\right)$$

$$=-2i\hbar\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}+i\hbar\right)$$

$$\therefore \left[\hat{P}^2,\hat{\vec{R}}\right]=-2i\hbar\left(\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}+i\hbar\right)\frac{1}{r}$$

$$(4)\because \left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]=\left[\hat{\vec{P}}^2,\frac{1}{r}\right]=\hat{\vec{P}}\left[\hat{\vec{P}},\frac{1}{r}\right]+\left[\hat{\vec{P}},\frac{1}{r}\right]\hat{\vec{P}}$$

$$=\hat{\vec{P}}\left(-i\hbar\nabla\frac{1}{r}\right)+\left(-i\hbar\nabla\frac{1}{r}\right)\hat{\vec{P}}$$

$$=\hat{\vec{P}}\left(i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}\right)+\left(i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r^3}\right)\hat{\vec{P}}$$

$$=2i\hbar\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\frac{1}{r^3}$$

$$\therefore \left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]=2i\hbar\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\frac{1}{r^3}$$

7.8 同上题，重新证明（6.28）和（ 6.30）二式，（做题人：陈捷狮，审查人：刘强）

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^n\right]=-ni\hbar\hat{R}^{n-2}\hat{\vec{R}},\qquad \left[\hat{P}^n,\hat{\vec{R}}\right]=-ni\hbar\hat{P}^{n-2}\hat{\vec{P}}$$

证明：（1）由于

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^2\right]=\left[\hat{\vec{P}},\hat{X}^2\right]=\sum_{ij}e_i\left[\hat{P}_i,\hat{X}_j\hat{X}_j\right]=\sum_{ij}e_i\left\{\hat{X}_j\left[\hat{P}_i,\hat{X}_j\right]+\left[\hat{P}_i,\hat{X}_j\right]\hat{X}_j\right\}=-2i\hbar\hat{\vec{R}}$$

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^4\right]=-4i\hbar\hat{R}^2\hat{\vec{R}}\qquad \left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^6\right]=-6i\hbar\hat{R}^4\hat{\vec{R}}$$

由此猜想$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^n\right]=-ni\hbar\hat{R}^{n-2}\hat{\vec{R}}$

用数学归纳法：当 n=0,1,2,时已知上式成立。假设 n=n 时上式成立，则在 n=n+1 时有

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^{n+1}\right]=\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}\hat{R}^n\right]=\hat{R}\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^n\right]+\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}\right]\hat{R}^n=-(n+1)i\hbar\hat{R}^{(n+1)-2}\hat{\vec{R}}$$

则当原式成立，则当 n=n+1 时原式也成立。所以$\left[\hat{\vec{P}},\hat{R}^n\right]=-ni\hbar\hat{R}^{n-2}\hat{\vec{R}}$成立

（2）由于

$$\left[\hat{P}^2,\hat{\vec{R}}\right]=\left[\hat{P}^2,\hat{\vec{X}}\right]=\sum_{ij}e_i\left[\hat{P}_i\hat{P}_i,\hat{\vec{X}}_j\right]=\sum_{ij}e_i\left\{\hat{P}_I\left[\hat{P}_i,\hat{\vec{X}}_j\right]+\left[\hat{\vec{P}}_i,\hat{\vec{X}}_j\right]\hat{P}_i\right\}=-2i\hbar\hat{\vec{P}}$$

$$\left[\hat{P}^4,\hat{\vec{R}}\right]=-4i\hbar\hat{P}^2\hat{\vec{P}}\qquad \left[\hat{P}^6,\hat{\vec{R}}\right]=-6i\hbar\hat{P}^4\hat{\vec{P}}$$

由此猜想$\left[\hat{P}^n,\hat{\vec{R}}\right]=-ni\hbar\hat{P}^{n-2}\hat{\vec{P}}$

用数学归纳法：当 n=0,1,2,时已知上式成立。假设 n=n 时上式成立，则在 n=n+1 时有

$$\left[\hat{P}^{n+1},\hat{\vec{R}}\right]=\left[\hat{P}\hat{P}^n,\hat{\vec{R}}\right]=\hat{P}\left[\hat{P}^n,\hat{\vec{R}}\right]+\left[\hat{P},\hat{\vec{R}}\right]\hat{P}^n=-(n+1)i\hbar\hat{P}^{(n+1)-2}\hat{\vec{P}}$$

则当原式成立，则当 n=n+1 时原式也成立。所以$\left[\hat{P}^n,\hat{\vec{R}}\right]=-ni\hbar\hat{P}^{n-2}\hat{\vec{P}}$成立

7.9 证明：（做题人：陈捷狮，审查人：刘强）

$$\hat{\vec{R}}\cdot\hat{\vec{P}}=-i\hbar r\frac{\partial}{\partial r},\qquad \left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]=\frac{2\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}$$

证明：在三维的位置表象中，定义任意一个态函数$\psi=\psi(X,Y,Z)$

$$\vec{R}=r\vec{n}=\sum_i X_i\vec{e}_i=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

$$\hat{\vec{P}}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\cdot\vec{n}=\sum_i-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial X_i}\vec{e}_i\right)=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial X}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial Y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial Z}\vec{k}\right)$$

$$r=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

（1）由于$\left[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{R}}\right]=\hat{\vec{P}}\hat{\vec{R}}-\hat{\vec{R}}\hat{\vec{P}}=-i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}$

则有：$\hat{\vec{R}}\hat{\vec{P}}\varphi=\left(\hat{\vec{P}}\hat{\vec{R}}+i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}\right)\varphi=-i\hbar\frac{\partial\hat{\vec{R}}\varphi}{\partial r}+i\hbar\frac{\hat{\vec{R}}}{r}\varphi=-i\hbar\varphi-i\hbar r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+i\hbar\varphi=-i\hbar r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

（2）由于$\left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]=2i\hbar\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\frac{1}{r^3}$

其中：$\hat{\vec{P}}\hat{\vec{R}}\varphi=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\hat{\vec{R}}\varphi$　　　$\hat{\vec{R}}\varphi=r\varphi$

带入上式有：$\left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]\varphi=2i\hbar\hat{\vec{P}}\cdot\hat{\vec{R}}\frac{1}{r^3}\varphi=2i\hbar\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{\vec{R}}\varphi=2\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}r\frac{1}{r^3}\varphi$

所以：$\left[\hat{P}^2,\frac{1}{r}\right]=2\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2}=\frac{2\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}$

练习 7.10　在 x 表象的函数形式中，态函数$\psi(x)$与$\varphi(x)$有下列关系：

$$\varphi(x)=\hat{A}\psi(x)$$

另有一算符$\hat{K}$，具有离散的本征值k_i，本征函数为$u_i(x)$，即$\hat{K}u_i(x)=k_iu_i(x)$，试用函数形式语言，直接给出上式的 K 表象矩阵形式。

（解题人：胡项英　　　校对人：宁红新）

解：K 表象的本征函数$u_i(x)$构成 K 表象的一组基矢，任意状态可按照这组基矢展开，如：

$$\varphi(x)=\sum_i u_i(x)\varphi_i \qquad \psi(x)=\sum_i u_i(x)\psi_i$$

所以　$\varphi_i=\sum_i\hat{A}_{ij}\psi_i$　　　其中$\hat{A}_{ij}=\langle k_i|\hat{A}|k_j\rangle$

#

练习 7.11　　　（做题人：韩丽芳）

试通过下面的实例，说明算符的厄米性与内积的定义有关。设有一函数空间，其中函数$\psi(x)$和$\varphi(x)$等满足束缚态的边界条件，即$\psi(\pm\infty)=0$。证明：若内积的定义不用（7.40）式而改用

$$\langle\varphi|\psi\rangle=\int\varphi^*(x)\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

则算符 $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ 不再是厄米的，试求出在此情况下此算符的厄米共轭。

证明：若内积定义为

$$\langle\varphi|\psi\rangle=\int\varphi^*(x)\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

则厄米算符的定义可改为

$$\int\varphi^*(x)\hat{F}\psi(x)x^2\mathrm{d}x=\int\left(\hat{F}\varphi(x)\right)^*\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

算符 $\hat{P}_x=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，且 $\psi(\pm\infty)=0$ 则

$$\int\varphi^*(x)\hat{P}_x\psi(x)x^2\mathrm{d}x=\int\varphi^*(x)\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{i}\hbar\varphi^*(x)\psi(x)x^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}\hbar\int\psi(x)\mathrm{d}\varphi^*(x)x^2$$

$$=\mathrm{i}\hbar\int\psi(x)\left[2x\varphi^*(x)+x^2\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\psi(x)\left[-\mathrm{i}\hbar\left(2x+x^2\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]^*\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[-\mathrm{i}\hbar\left(\frac{2}{x}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]^*\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

$$\neq\int\left[-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right]^*\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

即

$$\int\varphi^*(x)\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)x^2\mathrm{d}\neq\int\left[-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right]^*\psi(x)x^2\mathrm{d}x$$

由厄米算符的定义，则算符 $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ 不再是厄米的。

由 $\int\left[\hat{A}^+\varphi(x)\right]^*\psi(x)\mathrm{d}x=\int\varphi(x)^*\hat{A}\,\psi(x)\mathrm{d}x$ 得

$$\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^+=-i\hbar\left(\frac{2}{x}+\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

#

8.7 证明：

$$(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{A}})(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{B}})=\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}+i\hat{\vec{\sigma}}\cdot(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}})$$

证明：（1） $(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{A}})(\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{B}})=(\sigma_x A_x+\sigma_y A_y+\sigma_z A_z)(\sigma_x B_x+\sigma_y B_y+\sigma_z B_z)$

$$=(\sigma_x{}^2 A_x B_x+\sigma_y{}^2 A_y B_y+\sigma_z{}^2 A_z B_z)+(\sigma_x A_x\sigma_y B_y+\sigma_x A_x\sigma_z B_z+$$
$$\sigma_y A_y\sigma_x B_x+\sigma_y A_y\sigma_z B_z+\sigma_z A_z\sigma_x B_x+\sigma_z A_z\sigma_y B_y)$$

$$\hat{\sigma}_x{}^2=\hat{\sigma}_y{}^2=\hat{\sigma}_z{}^2=1$$
$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=i\hat{\sigma}_z=-\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$$
$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=i\hat{\sigma}_x=-\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y$$
$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x=i\hat{\sigma}_y=-\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z$$

$$=(A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z)$$
$$+(i\sigma_z A_x B_y-i\sigma_y A_x B_z-i\sigma_z A_y B_x+i\sigma_x A_y B_z+i\sigma_y A_z B_x-i\sigma_x A_z B_y)$$
$$=\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}+i[\sigma_x(A_y B_z-A_z B_y)+\sigma_y(A_z B_x-A_x B_z)+\sigma_z(A_x B_y-A_y B_x)]$$
$$=\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}+i[\sigma_x(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}})_x+\sigma_y(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}})_y+\sigma_z(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}})_z]$$
$$=\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}+i\hat{\vec{\sigma}}\cdot(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}})$$

#

8.7 证明： $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}(\vec{A}\times\vec{B})$ （许中平）

证明：将左端展开成 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{\sigma}$ 的分量式，

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=(\sigma_x A_x+\sigma_y A_y+\sigma_z A_z)\cdot(\sigma_x B_x+\sigma_y B_y+\sigma_z B_z)$$
$$=(\sigma_x^2 A_x B_x+\sigma_y^2 A_y B_y+\sigma_z^2 A_z B_z)+(\sigma_x\sigma_y A_x B_y+\sigma_y\sigma_x A_y B_x)+(y\text{、}z\text{分量项})+(z\text{、}x\text{分量项})$$

利用 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$

$\sigma_x\sigma_y=i\sigma_z=-\sigma_y\sigma_x,\cdots$

即得 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\sigma_z(A_x B_y-A_y B_x)+\cdots$

$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\sigma_z(\vec{A}\times\vec{B})_z+\cdots$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}(\vec{A}\times\vec{B})$$

8.8 计算下式 （许中平）

$$tr\left(e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}\right)$$

式中 A 和 B 是两个非算符三维矢量。

解：由于 $e^{i\lambda\sigma_n}=\cos\lambda+i\sigma_n\sin\lambda$

得 $e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}=\cos A+i\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}{A}\sin A$

因此 $Tre^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}=2\cos A, A=\left|\vec{A}\right|$

类似的可写出 $e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}=\cos B+i\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}{B}\sin B$

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}=\left(\cos A+i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}{A}\sin A\right)\left(\cos B+i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}{B}\sin B\right)$$

$$=\cos A\cos B-\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\frac{1}{AB}\sin A\sin B+i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right)\frac{1}{A}\sin A\cos B+i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\frac{1}{B}\cos A\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\sin A\sin B-i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\frac{1}{AB}\sin A\sin B+i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right)\frac{1}{A}\sin A\cos B+i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\frac{1}{B}\cos A\sin B$$

上式中后三项为 $\vec{\sigma}$ 的线性项，迹为 0，所以

$$Tr\left(e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}}e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}\right)=2\cos A\cos B-2\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\sin A\sin B$$

#

练习 8.9 如果取定（8.80）式为自旋算符，那么（8.79）式中的两个算符

$$s_1=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{i\delta}\\ e^{-i\delta} & 0\end{pmatrix}\quad,\quad s_2=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -ie^{i\delta}\\ ie^{-i\delta} & 0\end{pmatrix}$$

是描写什么的物理量的算符？（解答人：熊凯　核对人：李泽超）

解：已知（8.80）式是（8.79）式取 δ 为 0 时的表示，上述两个算符 s_1 、s_2 与自旋算符 s_x、s_y 相差一个相位因子 δ，所以，s_1 、s_2 分别为自旋在 x 、y 方向上具有相位为 δ 的算符。

#

练习 8.10 在物理空间中给定一个方向 $\vec{n}$：

$$\vec{n}=\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}+\nu\vec{k},\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

（1）求在 S_z 表象中自旋在 $\vec{n}$ 方向上的投影 S_n 的矩阵形式；

（2）求在 S_z 表象中 S_n 的两个本征矢量 $\left|n+\right\rangle$，$\left|n-\right\rangle$ 的矩阵形式；

（3）已知在 S_z 表象中某状态的矩阵形式，求将此矩阵变换到 S_n 表象的幺正矩

阵 U，以及将 S_n 表象的矩阵变换到 S_z 表象的幺正矩阵 U^{-1} 。
解：（解答人：熊凯　核对人：李泽超）
（1） S_z 表象中自旋在 $\vec{n}$ 方向上的投影 S_n 为：

$$
\begin{aligned}
s_n &= (\vec{n},\vec{s}) = (\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}+\nu\vec{k}, s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}) \\
&= \lambda s_x + \mu s_y + \nu s_z \\
&= \frac{\hbar}{2}\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\mu\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\nu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\nu & \lambda-i\mu\\ \lambda+i\mu & -\nu\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

（2） 设 S_n 的本征矢量为 $|n\rangle = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 本征值为 $\frac{\hbar}{2}\kappa$，则其满足方程

$s_n|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\kappa|n\rangle$ ，即

$$
s_n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\kappa\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\nu & \lambda-i\mu\\ \lambda+i\mu & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\kappa\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
$$

其久期方程为：

$$
\begin{vmatrix}\nu-\kappa & \lambda-i\mu\\ \lambda+i\mu & -\nu-\kappa\end{vmatrix} = 0
$$

解上述方程得，$\kappa = \pm 1$

当 $\kappa = 1$ 时，将其代入本征方程中可求得：

$$
|n+\rangle = \begin{pmatrix}\nu+\kappa\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nu+1\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix} \quad ,\quad \text{（注：未归一化）}
$$

当 $\kappa = -1$ 时，将其代入本征方程中可求得：

$$
|n-\rangle = \begin{pmatrix}\lambda-iu\\ k-\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda-i\mu\\ -(\nu+1)\end{pmatrix} \quad ,\quad \text{（注：未归一化）}
$$

将上述两式归一化有

$$
\langle n+|n+\rangle = \begin{pmatrix}\nu+1 & \lambda-i\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu+1\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix} = (\nu+1)^2+\lambda^2+\mu^2 = 1
$$

又因为：$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$，所以

$$
\nu^2 = (\nu+1)^2 \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}
$$

则，归一化矢量为：

$$\left|n+\right\rangle=\begin{pmatrix}\nu+\kappa\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu+1\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \lambda+i\mu\end{pmatrix},$$

$$\left|n-\right\rangle=\begin{pmatrix}\lambda-iu\\ k-\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-i\mu\\ -(\nu+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-iu\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（注：以上矢量的取法不是唯一的）

（3）将上述二矢量按列排列则得到一个矩阵 U

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \lambda-iu\\ \lambda+iu & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ ，即为一个从 S_z 表象变换到 S_n 的幺正矩阵；

则，将 Sn 表象变换到 Sz 表象的幺正矩阵 U^{-1} 为：

$$U^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \lambda-iu\\ \lambda+iu & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

#

练习　9.1　把原子看成是在荷电 Ze 的固定原子核外的几个电子的系统,其势能算符为

$$V=-Ze^2\sum_i\frac{1}{r_i}+\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{|r_i-r_j|}$$

证明对于原子的任何定态,有

$\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle,\langle T\rangle=-E,\langle T\rangle=2E$

（做题人：宁宏新　　　校对人：胡项英）

解:由位力定理

$\langle T\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\sum_i x_i\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\nabla V\right\rangle$ 得

$$\sum_i r_i\frac{\partial V}{\partial r_i}+\sum_j r_j\frac{\partial V}{\partial r_j}$$

$$=\sum_i r_i\left[-Ze^2\sum_i(-1)\frac{1}{r_i^2}+\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}(-1)\frac{1}{(r_i-r_j)^2}\frac{\partial(r_i-r_j)}{\partial r_i}\right]$$

$$+\sum_j r_j\left[\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}(-1)\frac{1}{(r_i-r_j)^2}\frac{\partial(r_i-r_j)}{\partial r_j}\right]$$

$$=\sum_i r_i\left[-Ze^2\sum_i(-1)\frac{1}{r_i^2}\right]+\sum_{i\neq j}(r_i+r_j)\left[\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}(-1)\frac{1}{(r_i-r_j)^2}\right]$$

$$=(-1)\left[-Ze^2\sum_i\frac{1}{r_i}+\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{|r_i-r_j|}\right]=-V$$

所以有 $\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle$

由于 $E=\langle T\rangle+\langle V\rangle$，所以有 $\langle T\rangle=-E$，$\langle V\rangle=2E$

#

9.2

9.3

9.4 对于一维谐振子，证明：

(1) $\langle n|X|n\rangle=\langle n|P|n\rangle=0$

(2) $\langle n|X^2|n\rangle=\frac{1}{m\omega^2}E_n,\langle n|P^2|n\rangle=mE_n$

(3) $\langle n|X^4|n\rangle = 3\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2[1+2n(n+1)]$

(4) $\langle n|(\Delta X)^2|n\rangle\langle n|(\Delta P)^2|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2$

（做题人：理论物理 刘超　　审题人：何建贤）

证明：(1) 因为 $X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A^+ + A)$，$P=i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(A^+ - A)$

所以有 $\langle n|X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|A^+ + A|n\rangle$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|A^+|n\rangle + \langle n|A|n\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|\sqrt{n+1}|n+1\rangle + \langle n|\sqrt{n}|n-1\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n,n+1} + \sqrt{n}\delta_{n,n-1}\right)$$

$$=0$$

同理有 $\langle n|P|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle n|A^+ - A|n\rangle$

$$= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n,n+1} - \sqrt{n}\delta_{n,n-1}\right)$$

$$=0$$

(2) $\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|(A^+ + A)(A^+ + A)|n\rangle$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|(A^+)^2 + A^+A + AA^+ + A^2|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\delta_{n,n+2} + n + n + 1 + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\delta_{n,n-2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$

$$= \frac{E_n}{m\omega^2}$$

同理可以有 $\langle n|P^2|n\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle n|(A^+ - A)^2|n\rangle$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\delta_{n,n+2} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\delta_{n,n-2} - n - n - 1\right)$$

$$= mE_n$$

(3) 同理有 $\langle n|X^4|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle n|(A^+ + A)^4|n\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(3 + 2n^2 - 2n\right)$$

$$= 3\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 [1 + 2n(n-1)]$$

(4) 因为 $(\Delta X)^2 = \left(X - \overline{X}\right)^2$

$$(\Delta P)^2 = \left(P - \overline{P}\right)^2$$

$\overline{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\overline{A^+} + \overline{A}\right) = 0$, $\overline{P} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\overline{A^+} - \overline{A} = 0\right)$

所以 $(\Delta X)^2 = X^2, (\Delta P)^2 = P^2$

$\langle n|(\Delta X)^2|n\rangle\langle n|(\Delta P)^2|n\rangle = \langle n|X^2|n\rangle\langle n|P^2|n\rangle$

$$= \frac{1}{m\omega^2}E_n mE_n$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2$$

#

9.5 （仪双喜）

证明：因为 $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}(\hat{A}^+ + \hat{A})$ $\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{A}^+ - \hat{A}\right)$

所以在一维谐振子的基态 $|0\rangle$ 下。坐标算符与动量算符的平均值为

$$\overline{x} = \langle 0|\hat{x}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|\hat{A}^+ + \hat{A}|0\rangle = 0$$

$$\overline{P} = \langle 0|\hat{P}|0\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle 0|\hat{A}^+ - \hat{A}|0\rangle = 0$$

坐标与动量算符的平方算符的平均值为：

$$\overline{x}^2=\begin{pmatrix}\langle 0|x^2|0\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\hat{A}^++\hat{A}|0\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\hat{A}^+\hat{A}^++\hat{A}^+\hat{A}+\hat{A}\hat{A}^++\hat{A}\hat{A}|0\rangle\\=\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\hat{A}\hat{A}^+|0\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\end{pmatrix}$$

$$\overline{P}^2=\begin{pmatrix}\langle 0|P^2|0\rangle=-\frac{m\omega\hbar}{2}\langle 0|\hat{A}^+-\hat{A}|0\rangle=-\frac{m\omega\hbar}{2}\langle 0|\hat{A}^+\hat{A}^+-\hat{A}^+\hat{A}-\hat{A}\hat{A}^++\hat{A}\hat{A}|0\rangle\\=\frac{m\omega\hbar}{2}\langle 0|\hat{A}\hat{A}^+|0\rangle=\frac{m\omega\hbar}{2}\end{pmatrix}$$

由$(\Delta\overline{x})^2\bullet(\Delta\overline{P})^2=\left[\overline{x}^2-(\overline{x})^2\right]\bullet\left[\overline{P}^2-(\overline{P})^2\right]$得到

$$(\Delta\overline{x})^2\bullet(\Delta\overline{P})^2=\frac{\hbar^2}{4}\Rightarrow\Delta x\Delta P=\frac{\hbar}{2}$$

一维谐振子的基态$|0\rangle$具有最小的不确定度 $\Delta x\Delta P=\frac{\hbar}{2}$即$\Delta x\Delta P\geq\frac{\hbar}{2}$中的等号成立。

#

9.6（仪双喜）

证明：

利用公式：$\exp(A)B\exp(-A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[A^{(i)},B\right]$

$$\Rightarrow\exp(\xi A^+A)f(A,A^+)\exp(-\xi A^+A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[(\xi A^+A)^{(i)},f(A,A^+)\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\xi^i}{i!}\left[(A^+A)^{(i)},f(A,A^+)\right]$$

$f(A,A^+)$为A,A^+的多项式，简单的令$f(A,A^+)=A^++A$

所以，$\left[A^+A,A^++A\right]=\left[A^+A,A^+\right]+\left[A^+A,A\right]=A^+-A$

$$\left[(A^+A)^2,A^++A\right]=\left[A^+A,\left[A^+A,A^++A\right]\right]=\left[A^+A,A^+-A\right]=A^++A$$

同理：$\left[(A^+A)^3,A^++A\right]=A^+-A$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\xi^i}{i!}\left[\left(A^+A\right)^{(i)},A^++A\right]$$
$$=\left(A^++A\right)+\xi\left(A^+-A\right)+\frac{\xi^2}{2!}\left(A^++A\right)+\frac{\xi^3}{3!}\left(A^+-A\right)+\cdots$$
$$=\left(A^++\xi A^++\frac{\xi^2}{2!}A^++\frac{\xi^3}{3!}A^++\cdots\right)+\left(A-\xi A\ +\frac{\xi^2}{2!}A-\frac{\xi^3}{3!}A+\cdots\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\xi^i}{i!}A^++\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\xi^i}{i!}A$$
$$=\exp(\xi)A^++\exp(-\xi)A$$
$$=f\left(\exp(\xi)A^+,\exp(-\xi)A\right)$$

又因为：

$$f\left(A,A^+\right)=A^++A$$

得到：$\exp\left(\xi A^+A\right)f\left(A,A^+\right)\exp\left(-\xi A^+A\right)=f\left(\exp(\xi)A^+,\exp(-\xi)A\right)$

#

11.1 试根据（11.12）式，证明演化算符 U（t，t_0）满足：

（完成人：肖钰斐　　审核人：谷巍）

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0)=1$$

证：

$$\langle\psi(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

$$=\langle\psi(t_0)|U^+(t,t_0)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$=\langle\psi(t_0)|U^+(t,t_0)HU(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\langle\psi(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$$

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0)=1$$

#

11．2　试用两种方法，求一维谐振子的 $X^H(t)$ 和 $P^H(t)$ 的明显形式。

（做题者：班卫华　　　审核者：何贤文）

解:一维谐振子的哈密顿量为：$H=\dfrac{P^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2X^2$

（1）在薛定谔绘景中,

$$\begin{cases}i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}X^H(t)=X^SX^H(t)\\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}P^H(t)=P^SX^H(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dX^H(t)}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial P^H}=\dfrac{P^H}{m}\\ \dfrac{dP^H(t)}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial X^H}=-m\omega^2X^H\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d^2X^H(t)}{dt^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{P^H}{m}\right)}{dt}=\dfrac{1}{m}\dfrac{dP^H}{dt}=-\omega^2X^H\\ \dfrac{d^2P^H(t)}{dt^2}=\dfrac{d\left(-m\omega^2X^H\right)}{dt}=-\omega^2P^H\end{cases}$$

令其解为：$\begin{cases}X^H(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t\\ P^H(t)=A'\cos\omega t+B'\sin\omega t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dX^H(t)}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\\ \dfrac{dP^H(t)}{dt}=-A'\omega\sin\omega t+B'\omega\cos\omega t\end{cases}$

在 $t=0$ 时，$\begin{cases}X^H(0)=X^S=A\\ P^H(0)=P^S=A'\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\left(X^H(0)\right)'=B\omega=\dfrac{P^H}{m}=\dfrac{P^S}{m}\\ \left(P^H(0)\right)'=B'\omega=-m\omega^2X^H=-m\omega^2X^H\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\dfrac{P^S}{m\omega}\\ B'=-m\omega X^S\end{cases}$

$$\therefore\begin{cases} X^H(t) = X^S\cos\omega t + \dfrac{P^S}{m\omega}\sin\omega t \\ P^H(t) = P^S\cos\omega t - m\omega X^S\sin\omega t \end{cases}$$

（2）在 H 绘景中

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}X^H(t) = \left[X^H(t), H\right] \\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}P^H(t) = -\left[H, P^H(t)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dX^H(t)}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial P^H} = \dfrac{P^H}{m} \\ \dfrac{dP^H(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial X^H} = -m\omega^2 X^H \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{d^2X^H(t)}{dt^2} = \dfrac{d\left(\dfrac{P^H}{m}\right)}{dt} = \dfrac{1}{m}\dfrac{dP^H}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(-m\omega^2 X^H\right) = -\omega^2 X^H \\ \dfrac{d^2P^H(t)}{dt^2} = -\dfrac{d\left(m\omega^2 X^H\right)}{dt} = -m\omega^2\dfrac{dX^H}{dt} = -m\omega^2\cdot\dfrac{P^H}{m} = -\omega^2 P^H \end{cases}$$

令其解为：$\begin{cases} X^H(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ P^H(t) = A^{'}\cos\omega t + B^{'}\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dX^H(t)}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \\ \dfrac{dP^H(t)}{dt} = -A^{'}\omega\sin\omega t + B^{'}\omega\cos\omega t \end{cases}$

在 $t = 0$ 时

$\begin{cases} X^H(0) = e^{\frac{i}{\hbar}tH^S}X^S e^{-\frac{i}{\hbar}tH^S} = X^S = A \\ P^H(0) = e^{\frac{i}{\hbar}tH^S}P^S e^{-\frac{i}{\hbar}tH^S} = P^S = A^{'} \end{cases}$和$\begin{cases} \left(X^H(0)\right)^{'} = B\omega = \dfrac{P^H}{m} = \dfrac{P^S}{m} \\ \left(P^H(0)\right)^{'} = B^{'}\omega = -m\omega^2 X^H = -m\omega^2 X^S \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} B = \dfrac{P^S}{m\omega} \\ B^{'} = -m\omega X^S \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} X^H(t) = X^S\cos\omega t + \dfrac{P^S}{m\omega}\sin\omega t \\ P^H(t) = P^S\cos\omega t - m\omega X^S\sin\omega t \end{cases}$$

#

练习 11.3　试求一维谐振子的下列对易关系：（原著：梁立欢）

(1)　$[X^{\mathrm{H}}(t_1),\ X^{\mathrm{H}}(t_2)]$，$[P^{\mathrm{H}}(t_1),\ P^{\mathrm{H}}(t_2)]$

(2)　$[X^{\mathrm{H}}(t_1),\ P^{\mathrm{H}}(t_2)]$

解　薛定谔绘景下，A、A^{+}、X、P和H 间有如下关系：

$$X=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(A+A^{+}) \tag{1}$$

$$P=\mathrm{i}\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(A^{+}-A) \tag{2}$$

$$H=\frac{1}{2m}p^{2}+\frac{1}{2}m\omega^{2}X^{2}=\left(A^{+}A+1\right)\hbar\omega \tag{3}$$

$$[H,\ A]=-A\hbar\omega \tag{4}$$

$$[H,\ A^{+}]=A^{+}\hbar\omega \tag{5}$$

而在海森伯绘景里，

$$A^{\mathrm{H}}(t)=e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}A^{S}e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht} \tag{6}$$

$$(A^{+}(t))^{\mathrm{H}}=e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}A^{S}e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}=(A^{\mathrm{H}}(t))^{+} \tag{7}$$

根据海森伯绘景的运动方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{\mathrm{H}}(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\ A^{\mathrm{H}}(t)]=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}e^{\mathrm{i}Ht/\hbar}[H,\ A^{\mathrm{S}}]e^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}=-i\omega A^{\mathrm{H}}(t) \tag{8}$$

解为

$$A(t)=A(0)e^{-\mathrm{i}\omega t}=Ae^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9}$$

取共轭，即得

$$A^{+}(t)=A^{+}e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10}$$

由于算符之间的关系在两个绘景中是一样的，把(1)、(2)式换成海森伯表象，得

$$\begin{aligned}X(t)&=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}[A(t)+A^{+}(t)]\\&=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}[Ae^{-\mathrm{i}\omega t}+A^{+}e^{\mathrm{i}\omega t}]\\&=x\cos\omega t+p\frac{1}{m\omega}\sin\omega t\end{aligned}$$

(11)

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \mathrm{i}\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}}[A^{+}(t)-A(t)] \\
&= \mathrm{i}\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}}[A^{+}e^{\mathrm{i}\omega t}-Ae^{-\mathrm{i}\omega t}] \\
&= p\cos\omega t + xm\omega\sin\omega t
\end{aligned}
$$

(12)

(11)和(12)式中， $p=P(0),\ x=X(0)$.

利用(11)和(12)式，可得在海森伯绘景中:

$$
\begin{aligned}
[X^{\mathrm{H}}(t_1),\ X^{\mathrm{H}}(t_2)] &= [x\cos\omega t_1 + p\frac{1}{m\omega}\sin\omega t_1,\ p\cos\omega t_2 - xm\omega\sin\omega t_2] \\
&= [x,\ p]\frac{1}{m\omega}(\cos\omega t_1\sin\omega t_2 - \cos\omega t_2\sin\omega t_1) \\
&= \frac{\mathrm{i}\hbar}{m\omega}\sin\omega(t_2-t_1)
\end{aligned}
$$

类似地，可得

$$
\begin{aligned}
&[P^{\mathrm{H}}(t_1),\ P^{\mathrm{H}}(t_2)] = \mathrm{i}\,m\omega\hbar\sin\omega(t_2-t_1) \\
&[X^{\mathrm{H}}(t_1),\ P^{\mathrm{H}}(t_2)] = \mathrm{i}\,\hbar\cos\omega(t_2-t_1)
\end{aligned}
$$

练习 11.4 试从量子力学的哈密顿正则方程（11.26）式和（11.22）式推出薛定谔绘景中的运动方程（11.18）和（11.19）式。 （张伟）

解

保持希尔伯特空间的基矢框架不变，将$|\psi\rangle^{H}$连同所有描写物理量的算符$\mathrm{A}^{H}(t)$，全部进行一个含时的幺正变换。

幺正变换选用这个系统的演化算符$U(t,0)=e^{-\frac{i}{\hbar}tH^{S}}$ 进行，其中 H^{s} 是不含时的，则应有

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle^{S} &= U(t,0)|\psi\rangle^{H} \\
A^{S} &= U(t,0)A^{H}U^{-1}(t,0)
\end{aligned}
$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^{S}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,0)|\psi\rangle^{H}\right)$$

$$=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t,0)\right)|\psi\rangle^{H}+i\hbar U(t,0)\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^{H}$$

由（11.22）式　$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^{H}=0$，带入上式得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^{S}=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t,0)\right)|\psi\rangle^{H}$$

$$=i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{S}}\right)U(t,0)|\psi\rangle^{H}$$

$$=H^{\mathrm{S}}|\psi\rangle^{S}$$

此式即为式（11.18）

由（11.26）式可得 $\frac{\partial}{\partial t}A^{H}=\frac{i}{\hbar}\left[H,A^{H}\right]$

$$\text{上式左边}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(U^{-1}\mathrm{A}^{S}U\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(U^{-1}\right)\mathrm{A}^{S}U+U^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{A}^{S}\right)U+U^{-1}\mathrm{A}^{S}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}U$$

$$=\frac{i}{\hbar}H^{S}U^{-1}\mathrm{A}^{S}U+U^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{A}^{S}\right)U-\frac{i}{\hbar}U^{-1}\mathrm{A}^{S}UH^{S}$$

$$=\frac{i}{\hbar}\left[H^{S},A^{H}\right]+U^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{A}^{S}\right)U$$

与右式相比较得：

$U^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{A}^{S}\right)U=0$，从而可以推出$i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{A}^{S}=0$

此式即为11.19式。

练习　11.5　一维谐振子受到与位移成正比的微扰作用，在薛定鄂绘景中其哈密顿为

$$\mathrm{H}^{s}=\frac{1}{2m}P^{2}+\frac{m\omega^{2}}{2}X^{2}+\varepsilon X$$

ε 为一小量.试用两种方法求此系统在相互作用绘景中的演化算符 $U_{I}(t,0)$.（谷巍）

解：（方法 1）

对一个一维谐振子，受到与位移成正比的微扰作用，其中 ε 为一小量，它的哈密顿是

$$H^{s}=H_{0}^{s}+H_{1}^{s}\tag{1}$$

$$H_{0}^{s}=\frac{1}{2m}P^{2}+\frac{m\omega^{2}}{2}X^{2}=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(AA^{\dagger}+A^{\dagger}A\right)\tag{2}$$

$$H_1^s = \varepsilon X = \varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A^\dagger + A\right) = \alpha\hbar\left(A^\dagger + A\right) \tag{3}$$

其中 $A = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X + iP\right)$ ，$A^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X - iP\right)$ ，$\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}$.

在相互作用绘景中，态矢量的演化关系为：

$$\left|\psi(t)\right\rangle^{\mathrm{I}} = U_{\mathrm{I}}(t,0)\left|\psi(0)\right\rangle^{\mathrm{I}} \tag{4}$$

将其代入薛定谔方程中，求得演化算符$U_{\mathrm{I}}(t,0)$的级数解为：

$$U_{\mathrm{I}}(t,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2)\cdots H(t_n)$$

取演化算符$U_{\mathrm{I}}(t,0)$的前三相：

$$U_{\mathrm{I}}(t,0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t H_1^{\mathrm{I}}(t_1)dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \left[H_1^{\mathrm{I}}(t_1)\int_0^{t_1} H_1^{\mathrm{I}}(t_2)dt_2\right]dt_1 \tag{5}$$

对此，我们先求 $H_1^{\mathrm{I}}(t)$,它是由薛定谔绘景中的 $H_1^s(t)$ 经过变换得到的，所用的变换算符为 $U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0^s}$,故可知：

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = U_0^{-1}(t)H_1^s(t)U_0(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH_0^s} H_1^s e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0^s} = e^{\xi C} B e^{-\xi C} \tag{6}$$

式中 $\xi = i\omega t$ ，$C = A^\dagger A + 1/2$ ，$B = \alpha\hbar\left(A^\dagger + A\right)$.根据 $e^A B e^{-A} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[A^{(i)}, B\right]$可知：

$$\begin{aligned} H_1^{\mathrm{I}}(t) &= B + \xi\left[C, B\right] + \frac{\xi^2}{2}\left[C^{(2)}, B\right] + \frac{\xi^3}{3!}\left[C^{(3)}, B\right] + \cdots \\ &= \alpha\hbar\left[\left(A^\dagger + A\right) + \xi\left(A^\dagger - A\right) + \frac{\xi^2}{2}\left(A^\dagger + A\right) + \frac{\xi^3}{3!}\left(A^\dagger - A\right) + \cdots\right] \\ &= \alpha\hbar\left(A^\dagger e^{i\omega t} + A e^{-i\omega t}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

这是因为：

$$\left[C, B\right] = \left[C^{(3)}, B\right] = \left[C^{(5)}, B\right] = \cdots = \alpha\hbar\left(A^\dagger - A\right)$$

$$B = \left[C^{(2)}, B\right] = \left[C^{(4)}, B\right] = \cdots = \alpha\hbar\left(A^\dagger + A\right)$$

由（7）式可知，（5）式等号右边第二项和第三项分别为：

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_1^{\mathrm{I}}(t_1)dt_1 = -\frac{\alpha}{\omega}\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t} - 1\right) - A\left(e^{-i\omega t} - 1\right)\right] \tag{8}$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \alpha\hbar\left(A^\dagger e^{i\omega t_1}+Ae^{-i\omega t_1}\right)\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right)\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t_1}-1\right)-A\left(e^{-i\omega t_1}-1\right)\right]dt_1$$

$$=\frac{\alpha^2}{\omega^2}\left[A^\dagger A^\dagger\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}-1\right)^2+A^\dagger A\left(e^{i\omega t}-1-i\omega t\right)+AA^\dagger\left(e^{-i\omega t}-1+i\omega t\right)-AA\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}-1\right)^2\right] \quad (9)$$

将（8)、（9）式代入（5）式中，则演化算符$U_{\mathrm{I}}(t,0)$为：

$$U_{\mathrm{I}}(t,0)=1-\frac{\alpha}{\omega}\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t}-1\right)-A\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right]+\frac{\alpha^2}{\omega^2}\left[A^\dagger A^\dagger\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}-1\right)^2+A^\dagger A\left(e^{i\omega t}-1-i\omega t\right)\right.$$
$$\left.+AA^\dagger\left(e^{-i\omega t}-1+i\omega t\right)-AA\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}-1\right)^2\right]$$

（方法 **2**）

解：对一个一维谐振子，受到与位移成正比的微扰作用，其中ε为一小量，它的哈密顿是

$$H^s=H_0^s+H_1^s \quad (10)$$

$$H_0^s=\frac{1}{2m}P^2+\frac{m\omega^2}{2}X^2=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(AA^\dagger+A^\dagger A\right) \quad (11)$$

$$H_1^s=\varepsilon X=\varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A^\dagger+A\right)=\alpha\hbar\left(A^\dagger+A\right) \quad (12)$$

其中$A=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X+iP\right)$，$A^+=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X-iP\right)$，$\alpha=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}$.

在相互作用绘景中，态矢量的演化关系为：

$$\left|\psi(t)\right\rangle^{\mathrm{I}}=U_{\mathrm{I}}(t,0)\left|\psi(0)\right\rangle^{\mathrm{I}} \quad (13)$$

将其代入薛定谔方程中得：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{\mathrm{I}}(t,0)\left|\psi(t_0)\right\rangle=HU_{\mathrm{I}}(t,0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad (14)$$

此式对同一系统的一切初态$\left|\psi(t_0)\right\rangle$成立，于是得演化算符满足的微分方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{\mathrm{I}}(t,0)=HU_{\mathrm{I}}(t,0) \quad (15)$$

将（15）式两边对 t 积分，采用叠代法，则演化算符$U_{\mathrm{I}}(t,0)$的级数解为：

$$U_{\mathrm{I}}(t,0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\cdots\int_0^t dt_n\theta(t-t_1)\theta(t_1-t_2)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)H_1^{\mathrm{I}}(t_1)H_1^{\mathrm{I}}(t_2)\cdots H_1^{\mathrm{I}}(t_n)$$

(16)

式中各个积分中的变量$t_1,t_2,\cdots,t_n$,必须满足：

$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{n-1} \geq t_n \geq t_0$

且当$t > t'$时，$\theta(t-t') = 1$,否则$\theta(t-t') = 0$

我们再定义一个时序算符 C,再将（16）式两边对$t_1, t_2, \cdots, t_n$积分，右边$n!$项中的每一项都给出相同的贡献，于是可以把（16）式改写为：

$$U_1(t,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_n C[H_1^1(t_1) H_1^1(t_2) \cdots H_1^1(t_n)] \tag{17}$$

对此，我们先求$H_1^1(t)$,它是由薛定谔绘景中的$H_1^s(t)$经过变换得到的，所用的变换算符为$U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0^s}$,故可知：

$$H_1^1(t) = U_0^{-1}(t) H_1^s(t) U_0(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH_0^s} H_1^s e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0^s} = e^{\xi C} B e^{-\xi C} \tag{18}$$

式中$\xi = i\omega t$ ，$C = A^\dagger A + \frac{1}{2}$ ，$B = \alpha\hbar(A^\dagger + A)$.根据$e^A B e^{-A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}[A^{(i)}, B]$可知：

$$\begin{aligned} H_1^1(t) &= B + \xi[C,B] + \frac{\xi^2}{2}[C^{(2)},B] + \frac{\xi^3}{3!}[C^{(3)},B] + \cdots \\ &= \alpha\hbar[(A^\dagger + A) + \xi(A^\dagger - A) + \frac{\xi^2}{2}(A^\dagger + A) + \frac{\xi^3}{3!}(A^\dagger - A) + \cdots] \\ &= \alpha\hbar(A^\dagger e^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t}) \end{aligned} \tag{19}$$

这是因为：

$$[C,B] = [C^{(3)},B] = [C^{(5)},B] = \cdots = \alpha\hbar(A^\dagger - A)$$

$$B = [C^{(2)},B] = [C^{(4)},B] = \cdots = \alpha\hbar(A^\dagger + A)$$

又因为：

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_1^1(t_1) dt_1 = -\frac{\alpha}{\omega}[A^\dagger(e^{i\omega t} - 1) - A(e^{-i\omega t} - 1)] \tag{20}$$

将（19）、（20）式代入（17）式可得：

$$U_1(t,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\{-\frac{\alpha}{\omega}[A^\dagger(e^{i\omega t} - 1) - A(e^{-i\omega t} - 1)]\right\}^n \tag{21}$$

则演化算符$U_1(t,0)$为：

$$U_1(t,0) = 1 + \frac{1}{1!}\left\{-\frac{\alpha}{\omega}[A^\dagger(e^{i\omega t} - 1) - A(e^{-i\omega t} - 1)]\right\} + \frac{1}{2!}\left\{-\frac{\alpha}{\omega}[A^\dagger(e^{i\omega t} - 1) - A(e^{-i\omega t} - 1)]\right\}^2 + \cdots$$ 取演化算符$U_1(t,0)$的前三项，即：

$$U_I(t,0)=1+\frac{1}{1!}\left\{-\frac{\alpha}{\omega}\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t}-1\right)-A\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right]\right\}+\frac{1}{2!}\left\{-\frac{\alpha}{\omega}\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t}-1\right)-A\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right]\right\}^2$$

$$=1-\frac{\alpha}{\omega}\left[A^\dagger\left(e^{i\omega t}-1\right)-A\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right]+\frac{\alpha^2}{\omega^2}\Big[A^\dagger A^\dagger\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}-1\right)^2+A^\dagger A\left(e^{i\omega t}-1-i\omega t\right)$$

$$+AA^\dagger\left(e^{-i\omega t}-1+i\omega t\right)-AA\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}-1\right)^2\Big]$$

#

练习 11.6 一维谐振子带有电荷 $q=-e$，受随时间改变的均匀电场

$$E(t)=E_0e^{t/\tau}\qquad(\tau>0)$$

的作用，当 $t=-\infty$ 时，谐振子处于基态，求 $t=0$ 时它处于 n 态的概率.

（原著:梁立欢）

解 对于一维谐振子，受到微扰

$$H_1=q\vec{E}(t)\cdot\vec{r}=-eXE_0e^{t/\tau}\tag{1}$$

作用，它的哈密顿量是

$$H=H_0+H_1\tag{2}$$

$$H_0=\frac{1}{2m}P^2+\frac{m\omega^2}{2}X^2=\frac{1}{2}\hbar\omega(AA^++A^+A)\tag{3}$$

$$H_1=-eXE_0e^{t/\tau}=-eE_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{t/\tau}(A^++A)=\alpha\hbar(A^++A)\quad\left(\alpha=-eE_0\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}e^{t/\tau}\right)\tag{4}$$

谐振子满足薛定谔方程（薛定谔绘景）:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^S(t)\right\rangle=H\left|\psi^S(t)\right\rangle,\quad H=H_0+H_I\tag{5}$$

将谐振子波函数按 H_0 的含时本征矢量展开:

$$\left|\psi(t)\right\rangle=\sum_j\left|j\right\rangle e^{-\mathrm{i}(j+\frac{1}{2})\omega t}a_j(t)\tag{6}$$

微扰 H_1 的矩阵元为

$$\left\langle i\right|H_1\left|j\right\rangle=\alpha\hbar\left\langle i\right|A^++A\left|j\right\rangle=\alpha\hbar\left[\sqrt{i}\,\delta_{i-1,j}+\sqrt{i+1}\,\delta_{i+1,j}\right]\tag{7}$$

将此式代入课文（11.45）式中，得 $a_i(t)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_i(t)=-\mathrm{i}\alpha\left[\sqrt{i}e^{\mathrm{i}\omega t}a_{i-1}(t)+\sqrt{i+1}e^{-\mathrm{i}\omega t}a_{i+1}(t)\right]\tag{8}$$

初态是 $\left|0\right\rangle$，即该式的初始条件是 $a_i(t)=\delta_{i0}\ (t=-\infty)$.

用逐级近似法去解(8)式，把零级近似$a_i^{(0)}(t)=\delta_{i0}\ \ (t=-\infty)$代入(8)式右边，令$i$取不同值，得:

$$i\geq 2,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_i^{(1)}(t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_1^{(1)}(t)=-\mathrm{i}\alpha e^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_0^{(1)}(t)=0$$

由上述方程解得一级近似的解为

$$a_1^{(1)}(t)=\frac{\alpha\tau}{\omega\tau-\mathrm{i}}e^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$a_0^{(1)}(t)=1$$

$$a_i^{(1)}(t)=0,\qquad i\geq 2$$

再把上述值代入(8)式求二级近似，

$$i\geq 3,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_i^{(2)}(t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_2^{(2)}(t)=-\sqrt{2}\alpha^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_1^{(2)}(t)=-\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_0^{(2)}(t)=-\alpha^2$$

可以解出

$$i\geq 3,\qquad a_i^{(2)}(t)=0$$

$$a_2^{(2)}(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha^2\tau}{1+\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}$$

$$a_1^{(2)}(t)=\frac{\alpha\tau}{\omega\tau-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$a_0^{(2)}(t)=-\frac{1}{2}\alpha^2\tau$$

$t=0$时，$\beta=\alpha(0)=-eE_0(2m\hbar\omega)^{-1/2}$，一维谐振子处于各态概率为

$$\left|a_n^{(2)}(t)\right|^2 = 0, \qquad n \geq 3$$

$$\left|a_2^{(2)}(t)\right|^2 = \frac{\beta^4 \tau^2}{4}$$

$$\left|a_1^{(2)}(t)\right|^2 = \frac{\beta^2 \tau^2}{\omega^2 \tau^2 + 1}$$

$$\left|a_0^{(2)}(t)\right|^2 = \frac{\beta^4 \tau^2}{2(\omega^2 \tau^2 + 1)}$$

#

练习 12.1. 一维谐振子受微扰 $H_1=\varepsilon X^2$ 的问题，使有严格解的，试仿照正文中的方法，在薛定谔绘景中用近似的方法讨论这一问题，并将结果与严格解比较。

（解答人：李泽超 核对人：熊凯）

解：由题意得：

受微扰的一维谐振子的哈密顿量是：

$$H=H_0+H_1 \ldots\ldots(1)$$

$$H_0=\frac{1}{2m}P^2+\frac{m\omega^2}{2}X^2=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(AA^++A^+A\right)=\hbar\omega\left(AA^++\frac{1}{2}\right) \ldots\ldots(2)$$

$$\begin{pmatrix} A=\dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X+iP\right) & A^+=\dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X-iP\right) \\ X=\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(A^++A\right) & P=i\sqrt{\dfrac{m\omega\hbar}{2}}\left(A^+-A\right) \end{pmatrix}$$

$$H_1=\varepsilon X^2=\varepsilon\frac{\hbar}{2m\omega}\left(A^++A\right)^2=\tau\left(A^+A^++A^+A+AA^++AA\right) \ldots\ldots(3)$$

$$\left(\tau=\frac{\varepsilon\hbar}{2m\omega}\right)$$

谐振子从 $t=0$ 时刻起其状态满足薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle=H\left|\psi(t)\right\rangle, \text{其中}: H=H_0+H_1 \ldots\ldots(4)$$

H_0 的含时本征矢量的展开为：

$$\left|\psi(t)\right\rangle=\sum_j\left|j\right\rangle\exp\left(-i\left(j+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)a_j(t) \ldots\ldots(5)$$

$$a_m(t)=\left\langle m\|\psi(t)\right\rangle\exp\left(i\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)$$

微扰 H_1 的矩阵元为 $\left\langle i\middle|H\middle|j\right\rangle$，具体的形式为：

$$\left\langle i\middle|H\middle|j\right\rangle=\tau\hbar\left\langle i\middle|A^+A^++A^+A+AA^++AA\middle|j\right\rangle$$

利用算符 A^+ 和 A 对本征矢量函数的；上升和下降的性质，得：

$$\left\langle i\middle|H\middle|j\right\rangle=\tau\hbar\left(\sqrt{i(i-1)}\delta_{i-2,j}+(2i+)\delta_{i,j}+\sqrt{(i+1)(i+2)}\delta_{i+2,j}\right) \ldots\ldots(6)$$

采用微扰方法近似解薛定谔方程时，薛定谔方程可一化为下式：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}a_i(t)=\sum_j\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(E_i-E_j\right)t\right)\left\langle i\middle|H_1^S\middle|j\right\rangle a_j(t) \ldots\ldots(7)$$

将（6）式带入（7）式可得到在题意条件下的微扰方程的表达形式如下：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}a_i(t)=\sum_j \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(E_i-E_j\right)t\right)\tau\hbar\left(\sqrt{i(i-1)}\delta_{i-2,j}+(2i+1)\delta_{i,j}+\sqrt{(i+1)(i+2)}\delta_{i+2,j}\right)a_j(t)..(8)$$

经化简得：

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}a_i(t)=-i\tau\left(\sqrt{i(i-1)}\exp(2i\omega t)a_{i-2}(t)+(2i+1)a_i(t)\exp(-2i\omega t)\sqrt{(i+1)(i+2)}a_{i+2}(t)\right)..(9)$$

将 $a_i(t)$ 的已知的低级的近似 $a_i^{(n)}(t)$ 代入方程的右边，即可以解出高一级的近似 $a_i^{(n+1)}(t)$。

假设初态是 $\left|n\right\rangle$，则可以将零级近似 $a_i^0(t)=\delta_{i,j}$ 代入方程的右边，得到关于一级近似的方程如下式：

$$\frac{d}{dt}a_i^{(1)}(t)=-i\tau\left(\sqrt{i(i-1)}\exp(2i\omega t)\delta_{i-2,j}+(2i+1)\delta_{i,j}+\exp(-2i\omega t)\sqrt{(i+1)(i+2)}\delta_{i+2,j}\right)....(10)$$

当 i 取不同的值时，上述的方程有不同的形式，就 i 的不同的取值对（10）式进行讨论如下：

$$\left.\begin{aligned}
&i\le n-3:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_i^{(1)}(t)=0;\\
&i=n-2:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_{n-2}^{(1)}(t)=-i\tau\left(\exp\left(-2i\omega t\sqrt{(i+1)(i+2)}\right)\right)\\
&i=n-1:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_{n-1}^{(1)}(t)=0;\\
&i=n:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_n^{(1)}(t)=2i-1;\\
&i=n+1:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_{n+1}^{(1)}(t)=0;\\
&i=n+2:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_{n+2}^{(1)}(t)=-i\tau\sqrt{i(i-1)}\exp(2i\omega t);\\
&i\ge n+3:\Rightarrow:\frac{d}{dt}a_i^{(1)}(t)=0.
\end{aligned}\right\}\text{...}(11)$$

在初态的条件下，解方程组（11），所得的结果如下：

$$\begin{cases}
a_{n-2}^{(1)}(t)=\dfrac{\tau\sqrt{n(n-1)}}{2\omega}\left(\exp(-2i\omega t)-1\right);\\
a_n^{(1)}(t)=(2n+1)t;\\
a_{n+2}^{(1)}(t)=-\dfrac{\tau\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\omega}\left(\exp(2i\omega t)-1\right)
\end{cases}\text{..}(12)$$

当微扰项式 $H_1=\varepsilon X^2$ 时，一级近似的形式如下;

$$a_i^{(1)}(t)=\frac{\tau\sqrt{n(n-1)}}{2\omega}(\exp(-2i\omega t)-1)\delta_{i,n-2}+(2n+1)t\delta_{i,j}+$$
$$\left(-\frac{\tau\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\omega}\right)(\exp(2i\omega t)-1)\delta_{i,n-2}\cdots\cdots(13)$$

由（9）式和（13）式可以计算出微扰的二阶近似：

$$\frac{d}{dt}a_i^{(2)}(t)=-i\tau\left(\sqrt{i(i-1)}\exp(2i\omega t)a_{i-2}^{(1)}(t)+(2i+1)a_i^{(1)}(t)+\exp(-2i\omega t)\sqrt{(i+1)(i+2)}a_{i+2}^{(1)}(t)\right)..(14)$$

令 i 取不同的值，确定方程组，得到下列方程组：

$$\begin{cases}
i\le n-5:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_i^{(2)}(t)=0;\\
i=n-4:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n-4}^{(2)}(t)=\frac{-i\tau^2}{2\omega}\sqrt{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}\exp(-2i\omega t)(\exp(-2i\omega t)-1);\\
i=n-3:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n-3}^{(2)}(t)=0;\\
i=n-2:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n-2}^{(2)}(t)=-i\tau\begin{pmatrix}(2n-3)\frac{\tau\sqrt{n(n-1)}}{2\omega}(\exp(2i\omega t)-1)+\\ \exp(-2i\omega t)\sqrt{(n-1)n}(2n+1)t\end{pmatrix};\\
i=n-1:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n-1}^{(2)}(t)=0;\\
i=n:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_n^{(2)}(t)=-i\tau\begin{pmatrix}\frac{\tau}{2\omega}n(n-1)\exp(2i\omega t)(\exp(-2i\omega t)-1)+(2n+1)^2t-\\ \frac{\tau}{2\omega}(n+1)(n+2)\exp(-2i\omega t)(\exp(2i\omega t)-1)\end{pmatrix};\\
i=n+1:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n+1}^{(2)}(t)=0;\\
i=n+2:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n+2}^{(2)}(t)=-i\tau\begin{pmatrix}\sqrt{(n+2)(n+1)}\exp(2i\omega t)(2n+1)t-\\ (2n+5)\frac{\tau}{2\omega}\sqrt{(n+2)(n+1)}(\exp(2i\omega t)-1)\end{pmatrix}\\
i=n+3:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n+3}^{(2)}(t)=0;\\
i=n+4:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_{n+4}^{(2)}(t)=\frac{i\tau^2}{2\omega}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\exp(2i\omega t)(\exp(-2i\omega t)-1)\\
i\ge n+5:\Rightarrow \frac{d}{dt}a_i^{(2)}(t)=0.
\end{cases}\quad ..(14)$$

方程组（14）在初始条件 $a_i^{(2)}(t)=\delta_{i,j}$ 下的解为：

$$\begin{cases} a_{n-4}^{(2)}(t) = \left(-\left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 \sqrt{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}\left(\exp(-2i\omega t) - \frac{1}{2}\exp(-4i\omega t) - \frac{1}{2}\right)\right); \\ a_{n-2}^{(2)}(t) = \left(\begin{array}{l} -\left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 (2n+3)\sqrt{n(n-1)}(\exp(i\omega t) - 2i\omega t - 1) + \\ \frac{\tau}{2\omega}\sqrt{n(n-1)}(2n+1)\left(\exp(-2i\omega t) + \frac{1}{2i\omega}(\exp(-2i\omega t) - 1)\right) \end{array}\right); \\ a_n^{(2)}(t) = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 n(n-1)(2i\omega t + \exp(2i\omega t) + 1) - \\ \frac{i\tau}{2}(2n+1)^2 t^2 - \left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 (n+1)(n+2)(2i\omega t - \exp(-2i\omega t) - 1) \end{array}\right); \\ a_{n+2}^{(2)}(t) = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 (2n+5)\sqrt{(n+1)(n+2)}(2i\omega t + 1 - \exp(2i\omega t)) - \\ \frac{\tau}{2\omega}(2n+1)\sqrt{(n+1)(n+2)}\left(t\exp(2i\omega t) - \frac{1}{2i\omega}\exp(2i\omega t) + \frac{1}{2i\omega}\right) \end{array}\right); \\ a_{n+4}^{(2)}(t) = \left(\frac{\tau}{2\omega}\right)^2 \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\left(\frac{1}{2}\exp(4i\omega t) - \exp(2i\omega t) + \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad \text{.........(15)}$$

利用微扰解的结果如上。
下面对本题严格求解:
由题意得：
系统的哈密顿量形式如下：

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \varepsilon X^2 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(1 + \frac{2\varepsilon}{m\omega^2}\right)X^2 \text{.................................}(16)$$

令：$\omega'^2 = \omega^2\left(1 + \frac{2\varepsilon}{m\omega^2}\right)$ 。

则：$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega'^2 X^2$

以上可以等价为无微扰的情况下的薛定谔方程，其解为：

本征能量取值为：$E_K = \left(K + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega' = \left(K + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left(1 + \frac{2\varepsilon}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.......................(17)

取 $\alpha' = \sqrt{\frac{m\omega'}{\hbar}}$

的态函数为：

$$\psi_k^0(x)=\left(\frac{\alpha'}{\sqrt{\pi}2^k k!}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha'^2x^2\right)H_n(\alpha'x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

其中H_n为n阶厄米多项式。

$$\psi_k^0(x)=\left(\frac{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}2^k k!}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(1+\frac{2\varepsilon}{m\omega}\right)x^2\right)H_n\left(\alpha\left(1+\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}\right)x\right)$$

因为ε是个小量，所以上式中的三个相乘的因式都可一展开为罗朗级数，三个级数求和式相乘得到的多项式的低阶项（一阶和二阶项）和上面用微扰近似得到的结果及其的相近，没有太大的差别，差别可能出现在三阶或式四阶项上，可见两种方法的到的结果都是有价值的。#

练习 12.2 有一系统，处于H_0的一个本征态$|n\rangle$，若由小而大，缓慢的加上一个微扰H_1，证明此态也缓慢的变化，一直保持为当时的总哈密顿的本征态。证明时取$\mathrm{H}_1(t)=e^{\alpha t}\mathrm{H}_1(t)$，$\alpha$为一小的正数，在一级近似下用（11.42）式求$\mathrm{U}_1(0,-\infty)|n\rangle$.

（做题人：董廷旭 校对人：刘强 ）

证明:在相互作用绘景中，用演化算符$U_I(t,0)$来计算，这时有

$$|\psi(t)\rangle^I=U_I(t,0)|\psi(0)\rangle^I=U_I(t,0)|n\rangle \qquad (1)$$

由于$\mathrm{H}_1(t)$是微扰项，取$U_I(t,0)=1-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{H}_1^I(t_1)dt_1=1-\frac{i}{\alpha\hbar}\mathrm{H}_0^I(0)(e^{\alpha t}-1) \qquad (2)$

把(2)式代入（1）式得

$$|\psi(t)\rangle^I=\{1-\frac{i}{\alpha\hbar}\mathrm{H}_0^I(0)(e^{\alpha t}-1)\}|n\rangle$$

由上式可知此态缓慢变化，一直保持为当时总哈密顿的本征态。

第二问：$\mathrm{U}_I(0,-\infty)|n\rangle=\left[1-\frac{i}{\alpha\hbar}\mathrm{H}_1(0)\right]|n\rangle$

12.3：计算(12.27),(12.28),(12.29). (选择的是 12.28 中的第一式)

（做题人：刘强 校正: 董亭序）

解：$\because a_{mn}(t)=\gamma(t)e^{im\omega t}\sqrt{\frac{n!}{m!}}e^{-\frac{1}{2}|f(t)|^2}\times[-f(t)]^{n-m}\sum_{\nu=\nu_0}^{m}\frac{m!}{\nu!(m-\nu)!(n-m+\nu)!}\left[-|f(t)|^2\right]^{\nu}$

$$\therefore \mathrm{a}_{\text{n-2,n}} = \gamma(t) e^{i(n-2)\omega t} \sqrt{\frac{n!}{(n-2)!}} e^{-\frac{1}{2}|f(t)|^2} \times \left[-f(t)\right]^{n-n+2} \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{\nu!(n-2-\nu)!(2+\nu)!} \left[-|f(t)|^2\right]^{\nu}$$

$$= \gamma(t) e^{i(n-2)\omega t} \sqrt{n(n-1)} \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \frac{1}{2m\hbar\omega} (e^{2i\omega t} - 2e^{i\omega t} + 1) \times \left[1 - \frac{1}{2}|f(t)|^2\right] \left[\frac{1}{2} - \frac{n-2}{6}|f(t)|^2\right]$$

$$= \gamma(t) e^{in\omega t} \frac{1}{2} \sqrt{n(n-1)} \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \frac{1}{2m\hbar\omega} (1 - e^{-i\omega t})^2$$

#

练习 14.1　对于一个纯态的密度算符 ρ，证明：

（1）$\rho^2 = \rho$；

（2）在 ρ 的本征值中，必有一个且仅有一个等于 1；

（3）$\det\rho = 0$。

解：（1）设归一化的纯态为 $|\varphi\rangle$，由

$$\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

$$\rho^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho$$

所以，$\rho^2 = \rho$

（2）由 $\rho|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$

得 $|\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$

即 $|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$

所以 $\lambda = 1$，即在 ρ 的本征值中，必有一个且仅有一个等于 1。

(3) 由上题知，ρ 的本征态为 $|1\rangle$

则 $\rho_{mn} = \langle m|1\rangle\langle 1|n\rangle = \delta_{m1}\delta_{n1}$

它是一个对角阵，而且对角元中只有一个元素 ρ_{11} 不为 0（$\rho_{11} = 1$）

易得 $\det\rho = 0$

#

14.2 从一个描写纯态的密度算符 ρ，能否求出：　（何贤文）

（1）任意物理量在此态中取各值的概率？

（2）此物理量取各值的概率幅？

（3）描写这个态的态矢量 $|\psi\rangle$？

解：描写纯态的密度算符 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$，其中 $|\psi\rangle$ 是归一化的态矢量。

（1）任意物理量 A 在 $|\psi\rangle$ 态中取值 a_i 的概率 W_i：

$$W_i = |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_i\rangle = \langle a_i|\rho|a_i\rangle$$

（2）设物理量 A 的本征矢量为 $|a_i\rangle$，相应的本征值是 a_i，态矢量 $|\psi\rangle$ 是由有限个态叠加得到的，即

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle c_1 + |\psi_2\rangle c_2 + \cdots + |\psi_n\rangle c_n$$

物理量 A 在状态 $|\psi\rangle$ 中取各值 a_i 的概率幅为

$$\left|\langle a_i|\psi\rangle\right| = \left|\langle a_i|\psi_1\rangle c_1 + \langle a_i|\psi_2\rangle c_2 + \cdots + \langle a_i|\psi_n\rangle c_n\right|$$

$$= \left|\rho_{i1}^{\frac{1}{2}} c_1 + \rho_{i2}^{\frac{1}{2}} c_2 + \cdots + \rho_{in}^{\frac{1}{2}} c_n\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}^{\frac{1}{2}} c_j\right|$$

（3）处于纯态$|\psi\rangle$时，系统的密度算符是

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

将上式中的ρ作用于态矢$|\psi\rangle$，有

$$\rho|\psi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

即是

$$\rho|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

在上式中，1 是算符ρ的一个本征值。

：在坐标表象中，密度算符$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$的矩阵元可以表示为

$$\rho(r,r') = \langle r|\rho|r'\rangle = \langle r|\psi\rangle\langle\psi|r'\rangle$$

即有

$$\rho(r,r) = \left|\langle r|\psi\rangle\right|^2$$

#

14.3 一个纯态，由态矢量描写转为密度算符描写后，是丢失了一些信息呢还是一点信息也没有丢失？

（完成人：肖钰斐　审核人：谷巍）

解：一个纯态，由态矢量描写转为密度算符描写后，是一点信息也没有丢失。

密度算符$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

一个物理量 A 在ψ态中的平均值可以写成

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|A|\psi\rangle = \sum_n \langle n|A|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = trA\rho \qquad (1)$$

物理量 A 在ψ态中取值a_i的概率W_i

$$W_i = \left|\langle a_i|\psi\rangle\right|^2 = \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_i\rangle = \langle a_i|\rho|a_i\rangle \qquad (2)$$

由（1）和（2）两式可知，密度算符可以完全替代态矢量来描写纯态，密度算符包含了态矢量的一切信息。

#

14.4 对于（14.27）式类型的密度算符[满足（14.28）式的条件]，证明（14.20）和（14.21）二式成立。　（做题者：班卫华　审核者：何贤文）

证明：由题意，得 $\rho = \sum |m^{'}\rangle P_{mm^{'}} \langle m|$

$$P_{mm^{'}} = \sum_i C_{m^{'}i} P_i C^*_{mi}, \sum_i P_i = 1, C_{mi} = \langle m \| \psi_i \rangle, \sum_m |C_{mi}|^2 = 1$$

取一组基 $\{|n\rangle\}$，利用完全性关系 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$，有

$$tr\rho = \sum_n \sum_{m^{'}m} \langle n|m^{'}\rangle P_{m^{'}m} \langle m|n\rangle = \sum_n \sum_{m^{'}m} \langle n|m^{'}\rangle \sum_i C_{m^{'}i} P_{m^{'}m} C^*_{mi} \langle m|n\rangle$$

$$= \sum_{m^{'}m} \sum_i |m^{'}\rangle\langle m^{'}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|m\rangle\langle m|P_i = \sum_i P_i = 1$$

$$tr\rho^2 = \sum_n \sum_{m^{'}m} \sum_{ij} \langle n|m^{'}\rangle P_{mm^{'}i} \langle m|m^{'}\rangle P_{mm^{'}j} \langle m|n\rangle$$

$$= \sum_{mm^{'}} |m^{'}\rangle \sum_i C_{m^{'}i} P_i C^*_{mi} \langle m|m^{'}\rangle \sum_j C_{m^{'}j} P_j C^*_{mj} \langle m|$$

$$= \sum_{mm^{'}} \sum_{ij} |m^{'}\rangle\langle m^{'}|\psi_i\rangle P_i \langle\psi_i|m\rangle\langle m|m^{'}\rangle\langle m^{'}|\psi_j\rangle P_j \langle\psi_j|m\rangle\langle m|$$

$$= \sum_{ij} \langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle P_i P_j = \sum_i P_i \left[\sum_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 P_j \right] \langle \sum_{ij} P_i |\psi_i|^2 |\psi_j|^2 P_j = 1$$

对纯态， $\rho = \sum |m^{'}\rangle P_{mm^{'}} \langle m|, \rho^2 = \sum |m^{'}\rangle P_{mm^{'}} \langle m|$

$$\therefore tr\rho^2 = \sum_n \langle n|\rho^2|n\rangle = \sum_n \sum_{mm^{'}} \langle n|m^{'}\rangle P_{mm^{'}} \langle m|n\rangle = \sum_{mm^{'}} |m^{'}\rangle \sum_i C_{m^{'}i} P_i C^*_{mi} \langle m|$$

$$= \sum_{mm^{'}} \sum_i |m^{'}\rangle\langle m^{'}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|m\rangle\langle m|P_i = \sum_i P_i = 1$$

#

练习 14.5 当（14.19）式中参与混合态的状态 $|\psi_i\rangle$ 是归一化且互相正交时，重新证明密度算符的性质即（14.20）和（14.21）二式。　（张伟）

证明：取一组基 $\{|n\rangle\}$，利用完全性关系 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$，有

$$tr\rho = \sum_n \sum_i \langle n|\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|n\rangle = \sum_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle p_i = \sum_i p_i = 1$$

上式即为（14.20）式

$$tr\rho^2=\sum_n\sum_{ij}\langle n|\psi_i\rangle p_i\langle\psi_i|\psi_j\rangle p_j\langle\psi_j|n\rangle$$

$$=\sum_{ij}\langle\psi_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle p_i p_j$$

因为(14.19)式中参与混合 态的状态$|\langle\psi_{\mathrm{i}}|\rangle$是归一化且互相正交的，所以

$$\langle\psi_j|\psi_i\rangle=\delta_{\mathrm{ij}}$$

即$tr\rho^2=\sum_{ij}\delta_{\mathrm{ji}}\delta_{\mathrm{ij}}p_i p_j=\sum_i p_i=1$

#

练习 14.6　由一个单电子自旋态，已知在此态中自旋三个分量的平均值$\langle S_x\rangle$、$\langle S_y\rangle$、$\langle S_{\mathrm{Z}}\rangle$，求：（1）此态的密度矩阵；

（2）此态成为纯态的条件。

解：（1）已知$S_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$S_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，$S_{\mathrm{Z}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

令 $\rho=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

由 $\langle A\rangle=trA\rho$，得

$$\langle S_x\rangle=trS_x\rho=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}(c+b)\qquad（1）$$

$$\langle S_y\rangle=trS_y\rho=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-ic&-id\\ia&ib\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}(-ic+ib)\qquad（2）$$

$$\langle S_Z\rangle=trS_Z\rho=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=tr\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a&b\\-c&-d\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}(a-d)\qquad（3）$$

又由密度算符的性质，$tr\rho=1$

所以　　　　　　$a+d=1$　　　　　　（4）

由(1)、(2)、(3)、(4)可解得：

$$\rho=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar}&\frac{\langle S_x\rangle-i\langle S_y\rangle}{\hbar}\\\frac{\langle S_x\rangle+i\langle S_Y\rangle}{\hbar}&\frac{1}{2}-\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar}\end{pmatrix}$$

（2）满足纯态的条件是 $tr\rho^2=1$

$$\rho^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar} & \frac{\langle S_x\rangle-i\langle S_y\rangle}{\hbar}\\ \frac{\langle S_x\rangle+i\langle S_Y\rangle}{\hbar} & \frac{1}{2}-\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar} & \frac{\langle S_x\rangle-i\langle S_y\rangle}{\hbar}\\ \frac{\langle S_x\rangle+i\langle S_Y\rangle}{\hbar} & \frac{1}{2}-\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2}+\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar})^2+\frac{\langle S_x\rangle^2+\langle S_y\rangle^2}{\hbar^2} & \Delta\\ \Delta & (\frac{1}{2}-\frac{\langle S_Z\rangle}{\hbar})^2+\frac{\langle S_x\rangle^2+\langle S_y\rangle^2}{\hbar^2}\end{pmatrix}$$

$$tr\rho^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{\hbar^2}\langle S_Z\rangle^2+\frac{2}{\hbar^2}(\langle S_x\rangle^2+\langle S_y\rangle^2)=1$$

即得 $\langle S_x\rangle^2+\langle S_y\rangle^2+\langle S_Z\rangle^2=\frac{\hbar^2}{4}$

所以此态成为纯态的条件是 $\langle S_x\rangle^2+\langle S_y\rangle^2+\langle S_Z\rangle^2=\frac{\hbar^2}{4}$ 。

#

14.7 有一自旋混合态，其参与态及概率如下： （高思泽）

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathrm{p}_1=\frac{1}{4};\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\mathrm{p}_2=\frac{1}{4};\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\mathrm{p}_3=\frac{1}{4}$$

（1） 求这个态的密度矩阵，判断此态是否混合态。

（2） 求能给出同样密度矩阵的两个正交态及相应的参与概率。

（3） 用（2）中所求得的结果反过来去计算密度矩阵作为验证。

解：

（1） 这个态的密度矩阵为

$$\rho=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

可以算出 $tr\rho=1,tr\rho^2=\frac{9}{16}<1$，所以此态为混合态。

（2） ρ 是厄米算符，求出其本征态和本征值。

令其本征态 $|\psi\rangle=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$，本征值为 p，则

$$\rho|\psi>=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$$

解得：$a=-1\pm\sqrt{2}, p=\frac{5}{8}\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

ρ本征态和本征值为：

$$|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\-1+\sqrt{2}\end{pmatrix}, p_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\-1-\sqrt{2}\end{pmatrix}, p_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

可知$|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle$正交，其相应的本征值即为相应的参与概率。

（4） 用（2）中所求得的结果反过来去计算密度矩阵

$$\rho=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\begin{pmatrix}1\\-1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1+\sqrt{2}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\begin{pmatrix}1\\-1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

可知（2）所求的正交态得出的密度矩阵ρ与题目给出的自旋混合态是一样的。

#

15.1 将狄拉克方程（15.11）式左乘以ψ^*，再将（15.11）式的左矢形式右乘以ψ，二式相加，从而证明由狄拉克方程可以导出连续方程$\psi\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}=0$。（孟祥海）

并证明

$$\psi\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}=0\rho=\psi^*\psi \qquad \vec{\boldsymbol{j}}=c\psi^*\vec{\boldsymbol{\alpha}}\psi$$

证明：狄拉克方程：

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\left(-i\hbar\nabla\right)-\beta mc^2\right]\psi=0 \qquad (15.11)$$

将（15.11）式左乘以ψ^*得到

$$i\hbar\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi+i\hbar c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\psi^*\nabla\psi-\psi^*\beta mc^2\psi=0 \qquad (1)$$

将（15.11）式的左矢形式右乘以ψ得到

$$i\hbar\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*+i\hbar c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\psi\nabla\psi^*+\psi^*\beta mc^2\psi=0 \qquad (2)$$

将（1）式加上（2）式得到

$$i\hbar(\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*+\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi)+i\hbar c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\psi\nabla\psi^*+\psi\nabla\psi^*)=0 \qquad (3)$$

化简得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\psi^*+i\hbar c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\nabla\psi^*\psi)=0$$

另$\rho=\psi^*\psi$并且$\vec{\boldsymbol{j}}=c\psi^*\vec{\boldsymbol{\alpha}}\psi$，上式可表述为

$$\psi\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}=0$$

即得证。

#

15.2 不用具体矩阵形式，证明：

（1）$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}})(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})=2\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}-(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}})$

（2）$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}})(1+\beta)(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})(1+\beta)=0$

（3） $tr\beta=0, tr\alpha_i\beta=0, tr\alpha_i\alpha_j\beta=0, trtr\alpha_i\alpha_j\alpha_k\beta=0$

式中 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 是位形空间中的矢量算符，互相对易。（孟祥海）

证明：

（1）$\vec{\alpha}$是自旋空间算符，$\vec{A},\vec{B}$是位形空间算符。因此，$\vec{\alpha}$与$\vec{A},\vec{B}$是相互对易的。所以可以利用公式

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (1)$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (2)$$

（1）+(2)得，

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})=2\vec{A}\cdot\vec{B}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})$$

即得证。

（2）

$$\begin{aligned}&(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(1+\beta)(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})(1+\beta)\\&=(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})\beta+(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})\beta\end{aligned}$$

利用公式$\begin{matrix}\beta^2=1\\ \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0\Rightarrow\vec{\alpha}\beta=-\beta\vec{\alpha}\end{matrix}$且$\beta$与$\vec{A},\vec{B}$也是相互对易的。

上式可以转变为：

$$\begin{aligned}&(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(1+\beta)(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})(1+\beta)=(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})\beta\\&-(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})\beta-(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})(\vec{\alpha}\cdot\vec{B})\beta^2=0\end{aligned}$$

即得证。

（3）由α和β的定义式：$\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}$其中，$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

所以，$$tr\beta=tr\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=0$$

$$tr\alpha_i\beta = tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right\} = tr\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i I \\ -\sigma_i I & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$tr\alpha_i\alpha_j\beta = tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right\} = tr\begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j I & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j I \end{pmatrix} = 0$$

$$tr\alpha_i\alpha_j\alpha_k\beta = tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right\} = tr\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i\sigma_j\sigma_k I \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_k I & 0 \end{pmatrix} = 0$$

#

练习 15.3　证明(15.27)(15.28)和(15.29)三式.　（邱鸿广）

证明：（15.27）式：

$$\left(\vec{\Sigma}\bullet\vec{A}\right)\left(\vec{\Sigma}\bullet\vec{B}\right) = \sum_{ij}\Sigma_i\Sigma_j A_i B_j = \sum_{ij}\left(\delta_{ij} + i\sum_k \varepsilon_{ijk}\Sigma_k\right)A_i B_j = \vec{A}\bullet\vec{B} + i\sum\bullet\vec{A}\times\vec{B}$$

（15.28）式：

$$\begin{aligned}\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{A}\right)\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{B}\right) &= \left(\alpha_x A_x + \alpha_y A_y + \alpha_z A_z\right)\left(\alpha_x B_x + \alpha_y B_y + \alpha_z B_z\right) \\ &= \left(\alpha_x^{\ 2} A_x B_x + \alpha_y^{\ 2} A_y B_y + \alpha_z^{\ 2} A_z B_z\right) + \left(\alpha_x\alpha_y A_x B_y + \alpha_y\alpha_x A_y B_x\right) \\ &+ \left(\alpha_y\alpha_z A_y B_z + \alpha_z\alpha_y A_z B_y\right) + \left(\alpha_z\alpha_x A_z B_x + \alpha_x\alpha_z A_x B_z\right)\end{aligned}$$

利用$\alpha_x^{\ 2} = \alpha_y^{\ 2} = \alpha_z^{\ 2} = 1$及$\alpha_x\alpha_y = i\alpha_z = -\alpha_y\alpha_x$

$\alpha_y\alpha_z = i\alpha_x = -\alpha_z\alpha_y \qquad \alpha_z\alpha_x = i\alpha_y = -\alpha_x\alpha_z$

即得到：

$$\begin{aligned}\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{A}\right)\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{B}\right) &= \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) + i\alpha_z\left(A_x B_y - A_y B_x\right) \\ &+ i\alpha_x\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + i\alpha_y\left(A_z B_x - A_x B_z\right) \\ &= \vec{A}\bullet\vec{B} + i\vec{\alpha}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\end{aligned}$$

（15.29）式：

$\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{A}\right)\left(\vec{\Sigma}\bullet\vec{B}\right) = -\gamma_5\vec{A}\bullet\vec{B} + i\vec{\alpha}\bullet\vec{A}\times\vec{B}$　　（未证明）

练习 17.1　证明当$\vec{\mathrm{P}}$给定后，（17.20）中式的四个态是相互正交的。

即$\psi_{+\vec{p}+}(t)=N\begin{pmatrix}\chi_+\\ a\chi_+\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$ ；$\psi_{+\vec{p}-}(t)=N\begin{pmatrix}\chi_-\\ -a\chi_-\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$\psi_{-\vec{p}+}(t)=N\begin{pmatrix}a\chi_+\\ -\chi_+\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$ ；$\psi_{-\vec{p}-}(t)=N\begin{pmatrix}a\chi_-\\ \chi_-\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$.

（杜花伟）

证明：根据

$$\chi_+=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}\qquad \chi_-=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}$$

可得到：

$$\chi_+^*\chi_+=\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}+\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}=1$$

$$\chi_+^*\chi_-=\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}+\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}=0$$

$$\chi_-^*\chi_+=-\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}=0$$

$$\chi_-^*\chi_-=-\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}=1$$

当$\vec{P}$给定后，而 N 为归一化常数：

$$\psi_{+\vec{p}+}^*(t)\psi_{+\vec{p}-}(t)=N^*\begin{pmatrix}\chi_+^* & a\chi_+^*\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\cdot N\begin{pmatrix}\chi_-\\ -a\chi_-\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

$$=\chi_+^*\chi_--a^2\chi_+^*\chi_-=0$$

$$\psi_{+\vec{p}+}^*(t)\psi_{-\vec{p}+}(t)=N^*\begin{pmatrix}\chi_+^* & a\chi_+^*\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\cdot N\begin{pmatrix}a\chi_+\\ -\chi_+\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$$

$$=\left(a\chi_+^*\chi_+-a\chi_+^*\chi_+\right)e^{2\frac{i}{\hbar}Et}=0$$

$$\psi_{+\vec{p}+}^*(t)\psi_{-\vec{p}-}(t)=N^*\begin{pmatrix}\chi_+^* & a\chi_+^*\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\cdot N\begin{pmatrix}a\chi_-\\ \chi_-\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$$

$$=\left(a\chi_+^*\chi_-+a\chi_+^*\chi_-\right)e^{2\frac{i}{\hbar}Et}=0$$

$$\psi^*_{+\vec{p}-}(t)\psi_{-\vec{p}+}(t)=N^*\left(\chi^*_- \quad -a\chi^*_-\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\cdot N\begin{pmatrix} a\chi_+ \\ -\chi_+ \end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$$

$$=\left(a\chi^*_-\chi_+ + a\chi^*_-\chi_+\right)e^{2\frac{i}{\hbar}Et}=0$$

$$\psi^*_{+\vec{p}-}(t)\psi_{-\vec{p}-}(t)=N^*\left(\chi^*_- \quad -a\chi^*_-\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\cdot N\begin{pmatrix} a\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$$

$$=\left(a\chi^*_-\chi_- - a\chi^*_-\chi_-\right)e^{2\frac{i}{\hbar}Et}=0$$

$$\psi^*_{-\vec{p}+}(t)\psi_{-\vec{p}-}(t)=N^*\left(a\chi^*_+ \quad -\chi^*_+\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}\cdot N\begin{pmatrix} a\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et)}$$

$$=\left(a^2\chi^*_+\chi_- - \chi^*_+\chi_-\right)=0$$

通过以上证明可知这四个态是相互正交的。

#

17.2 讨论算符$\sigma\cdot\hat{N}$其中σ为2×2的泡利矩阵，$\hat{N}$为方向算符

（1）证明：$\left[\sigma\cdot\hat{N},\hat{K}\right]=0$；

(2)用两种方法证明：$\left(\sigma\cdot\hat{N}\right)\chi^{\pm}_{jm}=\chi^{\mp}_{jm}$ （做题人：李泽超　审核人：熊　凯）

（1）证明：

$$\begin{aligned}
&\left[\sigma\cdot\hat{N},\hat{K}\right]\\
&=\sigma\cdot\hat{N}\cdot\hat{K}-\hat{K}\cdot\sigma\cdot\hat{N}\\
&=\sigma\frac{\hat{R}}{\hbar R}\begin{bmatrix}\hat{L}\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\sigma-\hbar\end{bmatrix}-\frac{1}{\hbar R}\begin{bmatrix}\hat{L}\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\sigma-\hbar\end{bmatrix}\sigma\hat{R}\\
&=\frac{1}{\hbar R}\begin{bmatrix}\left[\sigma\hat{R},\hat{L}\sigma\right] & 0\\ 0 & \left[\hat{L}\sigma,\sigma\hat{R}\right]\end{bmatrix}\\
&\because\left[L_i,R_j\right]=i\hbar\sum_k\varepsilon_{ijk}R_k\Rightarrow\left[\hat{L},\hat{R}\right]=0\\
&\therefore\begin{bmatrix}\left[\sigma\hat{R},\hat{L}\sigma\right] & 0\\ 0 & \left[\hat{L}\sigma,\sigma\hat{R}\right]\end{bmatrix}=0\\
&\Rightarrow\left[\sigma\hat{N},\hat{K}\right]=0
\end{aligned}$$

本题证毕

（2）第一种方法…

$\because \left(\sigma\cdot\hat{N}\right)k_{\pm} = \left(\sigma\cdot\hat{N}\right)\left(\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) = \mp\left(j+\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \left(\sigma\cdot\hat{N}\right)\chi_{jm}^{\pm} = \chi_{jm}^{\mp}$

第二种方法

$\because \left(\sigma\cdot\hat{N}\right)l^{\pm} = l^{\mp}$

$\therefore \left(\sigma\cdot\hat{N}\right)\chi_{jm}^{\pm} = \chi_{jm}^{\mp}$

#

17.3 证明 4×4 的 $\left(\hbar\hat{K}\right)^2 = J^2 + \frac{1}{4}\hbar^2$。 （做题人：李泽超　审核人：熊　凯）

证明：

$$\hbar\hat{K} = \beta\left(\hat{L}\cdot\sum+\hbar\right) = \begin{bmatrix}\hat{L}\cdot\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\cdot\sigma-\hbar\end{bmatrix}$$

$$\left(\hbar\hat{K}\right) = \begin{bmatrix}\hat{L}\cdot\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\cdot\sigma-\hbar\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{L}\cdot\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\cdot\sigma-\hbar\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\hat{L}\cdot\sigma+\hbar & 0\\ 0 & -\hat{L}\cdot\sigma-\hbar\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\hat{J}^2+\frac{1}{4}\hbar^2 & 0\\ 0 & \hat{J}^2+\frac{1}{4}\hbar^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\hbar\hat{K}\right)^2 = \hat{J}^2 + \frac{1}{4}\hbar^2$$

#

19.1　试用公式（2.9）式验证（19.34）式。　（做题人：何贤文　　审题人：班卫华）

解：　公式（2.9）为 $e^{A}Be^{-A}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}[A^{(i)},B]$

公式（19.34）为 $R'=D(\lambda)RD^{-1}(\lambda)=Q^{-1}R=R-\lambda$

$$D(\lambda)RD^{-1}(\lambda)=e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda\bullet P}\mathrm{R}e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\bullet P}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}[(-\frac{i}{\hbar}\lambda\bullet P)^{(j)},R]$$

将其展开：

$$\text{原式}=\frac{1}{0!}[(-\frac{i}{\hbar}\lambda\bullet P)^{(0)},R]+\frac{1}{1!}[(-\frac{i}{\hbar}\lambda\bullet P)^{(1)},R]+0+0+0+\cdots$$
$$=R-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\{\lambda[\mathrm{P}，\mathrm{R}]+[\lambda，R]P\}+0+0+0+\cdots$$
$$=R-\lambda$$

#

练习 19.2 试用两种方法求轨道角动量算符 L 的平移。　（高思泽）

证明：设轨道角动量算符 $\vec{L}$ 的平移为 $\vec{L}'$。

方法一：

位置算符 $\vec{R}$ 的空间平移 $\vec{R}'=\vec{R}-\vec{\lambda}$，动量算符 $\vec{P}$ 的空间平移 $\vec{P}'=\vec{P}$，则

$$\vec{L}'=\vec{R}'\times\vec{P}'=(\vec{R}-\vec{\lambda})\times\vec{P}=\vec{R}\times\vec{P}-\vec{\lambda}\times\vec{P}=\vec{L}-\vec{\lambda}\times\vec{P}$$

方法二：

$$\vec{L}'=D(\vec{\lambda})\vec{L}D^{-1}(\vec{\lambda})=D(\vec{\lambda})\vec{R}\times\vec{P}D^{-1}(\vec{\lambda})=D(\vec{\lambda})\vec{R}D^{-1}(\vec{\lambda})\times D(\vec{\lambda})\vec{P}D^{-1}(\vec{\lambda})=\vec{R}\times\vec{P}-\vec{\lambda}\times\vec{P}=\vec{L}-\vec{\lambda}\times\vec{P}$$

#

练习 19.3　试由（19.33）式证明　（赵中亮）

$$\hat{D}(\vec{\lambda})\psi(\vec{r})=\psi(\vec{r}-\vec{\lambda})$$

证明：由（19.33）式　$D(\vec{\lambda})|\vec{r}\rangle=|Q(\vec{\lambda})\vec{r}\rangle=|\vec{r}+\vec{\lambda}\rangle$　　（1）

和　　$D^{-1}(Q)|\vec{r}\rangle=|Q^{-1}r^{-1}\rangle$　　（2）

（1）、（2）联立可得　$D^{-1}(\vec{\lambda})|\vec{r}\rangle=|Q^{-1}(\vec{\lambda})\vec{r}\rangle=|\vec{r}-\vec{\lambda}\rangle$

两边取共轭得　　$\langle \vec{r} | D(\vec{\lambda}) = \langle Q^{-1}(\vec{\lambda})\vec{r} | = \langle \vec{r} - \vec{\lambda} |$

又由（19.9）式　　$\langle \vec{r} | D(Q) = \hat{D}(Q) \langle \vec{r} |$

所以　$\hat{D}(\vec{\lambda})\psi(\vec{r}) = \hat{D}(\vec{\lambda})\langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | D(\vec{\lambda}) | \psi \rangle = \langle \vec{r} - \vec{\lambda} | \psi \rangle = \psi(\vec{r} - \vec{\lambda})$

得证。

练习 19.4 证明在三维位形空间中两个矢量的点乘积是一个标量。（高思泽）

证明：假设三维位形空间中任意两个矢量为

$$\vec{A} = \sum_i a_i \vec{e}_i \qquad \vec{B} = \sum_i b_i \vec{e}_i \qquad \text{i=1,2,3} \ , \quad a_i, b_i \text{ 为常量}$$

又由于三维位形空间有如下关系：

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

所以

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \sum_i a_i \vec{e}_i \bullet \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \sum_i a_i b_i = \text{常数}$$

即：在三维位形空间中两个矢量的点乘积是一个标量。

#

练习 19.5 证明对于矢量 $\vec{V}$ 有　　（谷巍）

$$e^{-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}} \vec{V} e^{\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}} = \vec{V} - d\varphi\vec{n}\times\vec{V} + \frac{1}{2}(d\varphi)^2 \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{V}) - \frac{1}{3!}(d\varphi)^3 \vec{n}\times[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{V})] + \cdots$$

证明：将 $e^{-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}$ 和 $e^{\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}$ 展开为泰勒级数，即

$$e^{-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}} = 1 + (-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}) + \frac{1}{2!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3 + \cdots \tag{1}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}} = 1 + (\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}) + \frac{1}{2!}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3 + \cdots \tag{2}$$

将（1）、（2）式代入 $e^{-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}} \vec{V} e^{\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}$ 中，舍去三次以上高阶项可得：

$$\left[1+(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})+\frac{1}{2!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2+\frac{1}{3!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3+\cdots\right]\vec{V}$$

$$\left[1+(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})+\frac{1}{2!}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2+\frac{1}{3!}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3+\cdots\right]$$

$$=\vec{V}-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}\cdot\vec{V}+\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{V}\cdot\vec{n}\cdot\vec{L}+\frac{1}{2!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2\vec{V}+(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})\vec{V}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})+$$

$$\frac{1}{2!}\vec{V}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2+\frac{1}{3!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3\vec{V}+\frac{1}{2!}(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2\vec{V}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})+$$

$$(-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})\vec{V}\frac{1}{2!}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^2+\frac{1}{3!}\vec{V}(\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L})^3+\cdots$$

$$=\vec{V}-\frac{i}{\hbar}d\varphi\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^2\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\vec{V}-2\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\vec{V}\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)+\vec{V}\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\right]-$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^3\vec{V}-3\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\vec{V}\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)+3\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\vec{V}\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2-\vec{V}\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^3\right]+\cdots$$

$$=\vec{V}-\frac{i}{\hbar}d\varphi\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^2\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]-\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right\}-$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]-2\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)+\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\right\}+\cdots$$

由$\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]=-i\hbar\vec{n}\times\vec{V}$可得：

$$e^{-\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}\vec{V}e^{\frac{i}{\hbar}d\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}=\vec{V}-\frac{i}{\hbar}d\varphi\left(-i\hbar\vec{n}\times\vec{V}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^2\left(-i\hbar\right)\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right\}-$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left(-i\hbar\right)\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-2\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)+\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)^2\right\}+\cdots$$

$$=\vec{V}-d\varphi\vec{n}\times\vec{V}+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^2\left(-i\hbar\right)\left\{\vec{n}\times\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]\right\}-$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left(-i\hbar\right)\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right]-\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right]\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right\}+\cdots$$

$$=\vec{V}-d\varphi\vec{n}\times\vec{V}+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^2\left(-i\hbar\right)\left(-i\hbar\right)\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left(-i\hbar\right)\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\left(-i\hbar\right)\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\left(-i\hbar\right)\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\right\}+\cdots$$

$$=\vec{V}-d\varphi\vec{n}\times\vec{V}+\frac{1}{2}\left(d\varphi\right)^2\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left(-i\hbar\right)\left(-i\hbar\right)\vec{n}\times\vec{n}\times\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\vec{V}\right]+\cdots$$

$$=\vec{V}-d\varphi\vec{n}\times\vec{V}+\frac{1}{2}\left(d\varphi\right)^2\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}d\varphi\right)^3\left(-i\hbar\right)\left(-i\hbar\right)\left(-i\hbar\right)\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\right]+\cdots$$

$$=\vec{V}-d\varphi\vec{n}\times\vec{V}+\frac{1}{2}\left(d\varphi\right)^2\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)-\frac{1}{3!}\left(d\varphi\right)^3\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{V}\right)\right]+\cdots$$

故等式成立。

#

19.6

练习 19.7　　设Q为一个转动，$D(Q)$为希尔伯特空间中的转动算符，$\hat{D}(Q)$为位置表象中的转动算符，证明：

$$\hat{D}(Q)\langle\vec{r}| = \langle\vec{r}|D(Q) = \langle Q^{-1}\vec{r}|$$

$$D(Q)\vec{R}D^{-1}(Q) = Q^{-1}\vec{R}$$

（梁立欢　审核:张伟）

解　在位置表象中，$\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$，$\psi'(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi'\rangle$

$$\hat{D}(Q)\langle\vec{r}|\psi\rangle = \hat{D}(\vec{n}\mathrm{d}\varphi)\psi(\vec{r})$$

$$= (1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}})\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{r}\cdot\nabla\psi(\vec{r})$$

$$\langle\vec{r}|D(Q)|\psi\rangle = \langle\vec{r}|(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L})|\psi\rangle$$

$$= \langle\vec{r}|\psi\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}\langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r}) - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{r}\cdot\nabla\psi(\vec{r})$$

$$= \hat{D}(Q)\langle\vec{r}|\psi\rangle$$

$$\langle Q^{-1}\vec{r}|\psi\rangle = \langle\vec{r} - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r} - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{r}\cdot\nabla\psi(\vec{r})$$

所以有，

$$\hat{D}(Q)\langle\vec{r}| = \langle\vec{r}|D(Q) = \langle Q^{-1}\vec{r}|$$

对于第二个等式，

$$\vec{R}' = D(\vec{n}\,\mathrm{d}\varphi)\vec{R}D^{-1}(\vec{n}\,\mathrm{d}\varphi)$$

$$= \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L}\right)\vec{R}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L}\right) = \vec{R} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{d}\varphi\left[\vec{n}\cdot\vec{L},\ \vec{R}\right]$$

$$= \vec{R} - \mathrm{d}\varphi\,\vec{n}\times\vec{R} = Q(\vec{n}\,\mathrm{d}\varphi)\vec{R}$$

#

19.8. 同上题，P 为动量算符，证明：　（做题人：何贤文　　审题人：班卫华）

$$D(Q)PD^{-1}(Q) = Q^{-1}P$$

证明：

$$D(Q)PD^{-1}(Q) = (1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi n \cdot L)P(1 + \frac{i}{\hbar} d\varphi n \cdot L)$$

$$= (P - \frac{i}{\hbar} d\varphi n \cdot L)(1 + \frac{i}{\hbar} d\varphi n \cdot L)$$

$$= P - \frac{i}{\hbar} d\varphi n \cdot L + \frac{i}{\hbar} d\varphi P \cdot n \cdot L + 0$$

$$= p - \frac{i}{\hbar} d\varphi [n \cdot L, P]$$

$$= P - d\varphi n \times P$$

$$= Q^{-1}(nd\varphi)P$$

#

21.1

21.2.证明任意量子系统的任何态函数都是$\hat{T}^2$的本征函数，且本征值为+1 或-1，即有$\hat{T}^2=\pm 1$，系统中无自旋$1/2$粒子或有偶数个时取上号、有奇数个自旋$1/2$粒子时取下号。（做题者：班卫华）

证明：由时间反演算符的定义可知，$\hat{T}=\hat{K}\hat{\Gamma}$ (1)

其中，算符$\hat{K}$、$\hat{\Gamma}$分别满足 $\left.\begin{aligned}\hat{K}\psi(\bar{r}、t)=\psi^*(\bar{r}、t)\\ \hat{\Gamma}\psi(\bar{r}、t)=\psi(\bar{r}、-t)\end{aligned}\right\}$ （2）

当体系与自旋无关时，有$\hat{T}^2\psi(\bar{r}、t)=\hat{T}\psi^*(\bar{r}、-t)=\psi(\bar{r}、t)$ （3）

显然，任意的量子态都是$\hat{T}^2$算符的本征态，相应的本征值为+1。

对一个自旋为$1/2\hbar$的粒子而言，时间反演算符$\hat{T}$除满足（1）式与（2）式之外，还应满足$\hat{T}\hat{S}\hat{T}^{-1}=-\hat{S}$ (4)

其中$\hat{S}$是自旋为$1/2\hbar$粒子的自旋算符，为此令$\hat{T}=\hat{U}\hat{T}_0=\hat{U}\hat{K}\hat{\Gamma}$ (5) 式中$\hat{U}$是自旋空间中一个 2×2的矩阵。

将（5）式代入（4）式，得

$$-\hat{S}=\hat{T}\hat{S}\hat{T}^{-1}=\hat{U}\hat{T}_0\hat{S}\hat{T}_0^{-1}\hat{U}^{-1}=\hat{U}\hat{S}^*\hat{U}^{-1} \qquad (6)$$

在 S_z表象中，由于$\hat{S}_x,\hat{S}_z$为实矩阵，而$\hat{S}_y$是纯虚数矩阵，故可以将上式写成分量形式：

$$\left.\begin{aligned}\hat{U}\hat{S}_x\hat{U}^{-1}=-\hat{S}_x\\ \hat{U}\hat{S}_y\hat{U}^{-1}=-\hat{S}_y\\ \hat{U}\hat{S}_z\hat{U}^{-1}=-\hat{S}_z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

若取$\hat{U}=i\hat{\delta}_y,\hat{U}^{-1}=-i\hat{\delta}_y$ （8）

则可满足（7）式的要求。于是满足（4）式的时间反演算符变成$\hat{T}=i\hat{\delta}_y\hat{T}_0$ (9)

$$\hat{T}^2=\left(i\hat{\delta}_y\hat{T}_0\right)\left(i\hat{\delta}_y\hat{T}_0\right)=-\hat{\delta}_y^2\hat{T}_0^2=-1 \qquad (10)$$

上式表明，对于一个自旋为$\frac{1}{2}\hbar$的粒子，任意的量子态都是$\hat{T}^2$算符的本征态，想应的本征值为-1。

由于结果可知，对于由 N 个自旋为$\frac{\hbar}{2}$粒子构成的体系，有

$$\hat{T}^2=(-1)^N \qquad (11)$$

当 N 为偶数时$\hat{T}^2=+1$,当 N 为奇数时$\hat{T}^2=-1$。

即$\hat{T}^2=\pm 1$。系统中无自旋 1/2 粒子或有偶数个时取上号，有奇数个自旋 1/2 粒子时取下号。

#

21.3.利用上题结果证明：在存在任意电场但无磁场的情况下，含有奇数个电子的系统，其能级中没有单能级，至少是二重简并的（Kramers 定理）。（做题者：班卫华）

证明：由上题结果可知，含奇数个电子的系统时，有$\hat{T}^2=-1$,

计算$\left(\hat{T}\varphi,\psi\right)$,$\varphi$与$\psi$是两个任意的量子态，暂时令$\hat{T}\varphi=f$，利用反幺正算符的性质$\left[(\psi',\phi')=(\psi,\phi)^*=(\phi,\psi)\right]$，可知：

$$\left(\hat{T}\varphi,\psi\right)=(f,\psi)=\left(\hat{T}\psi,\hat{T}f\right)=\left(\hat{T}\psi,\hat{T}^2\varphi\right)=\hat{T}^2\left(\hat{T}\psi,\varphi\right)=-\left(\hat{T}\psi,\varphi\right)$$

取$\psi=\varphi$，得$\left(\hat{T}\varphi,\varphi\right)=-\left(\hat{T}\varphi,\varphi\right)=0$,这表明$\hat{T}\varphi$与$\varphi$态正交，因此代表不同的态，假设体系具有时间反演不变性，$\left(\hat{T},\hat{H}\right)=0$，此时，如$\varphi$是$\hat{H}$的一个本征态，则容易看出$\hat{T}\varphi$也是$\hat{H}$的一个本征态，而且它们对应的能量本征值相同，但$\hat{T}\varphi$与$\varphi$是两个不同的态，所以$\hat{H}$的本征态出现简并。所以在存在任意电场但无磁场的情况下，含有奇数个电子的系统，其能级中没有单能级，至少是二重简并的。

练习 21.4 单电子包含自旋轨道相互作用的哈密顿为　（谷巍）

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$$

其中

$$\hat{H}_0=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right\}I$$

$$\hat{H}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\vec{S}\cdot\hat{\vec{L}}$$

式中 I 为 2×2 单位矩阵. $\hat{H}_1$ 见（11.9）式.

这里 $\hat{H}$ 虽然不是实算符，证明若

$$\hat{H}\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$$

则 $\psi(\vec{r})$ 的时间反演态 $\psi'(\vec{r})=\hat{T}\psi(\vec{r})=i\sigma_y\psi^*(\vec{r})$ 满足

$$\hat{H}\psi'(\vec{r})=E\psi'(\vec{r})$$

$\psi(\vec{r})$ 和 $\psi'(\vec{r})$ 都是一列二行的旋量.

证明：因为 $\hat{H}\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$，即可知：

$$\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\vec{S}\cdot\hat{\vec{L}}\right\}\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$$

因为 $[\vec{S},\vec{L}]=0$,即 $\vec{S}\vec{L}-\vec{L}\vec{S}=0$,则有：

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\vec{S}\cdot\hat{\vec{L}}\right\}^\dagger\\
&=\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}(\vec{S}\cdot\hat{\vec{L}})^\dagger\right\}\\
&=\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\left(\hat{\vec{L}}^*\vec{S}^*\right)\right\}\\
&=\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\left[\left(-\hat{\vec{L}}\right)\left(-\vec{S}\right)\right]\right\}\\
&=\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{R})\right]I+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\vec{S}\cdot\hat{\vec{L}}\right\}
\end{aligned}$$

即 $\hat{H}^\dagger=\hat{H}$,故 $\hat{H}$ 为厄米算符，则其本征值 E 必为实数.

令 $U=i\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,它是一个 2×2 矩阵，是自旋空间中的算符，则 $\psi(\vec{r})$ 的时间反演态

为$\psi'(\vec{r})=\hat{T}\psi(\vec{r})=i\sigma_y\psi^*(\vec{r})=U\psi^*(\vec{r})$.

又因为$\hat{H}$不是实算符，则有

$$
\begin{aligned}
&\hat{H}\psi'(\vec{r})=U\hat{H}^*U^{-1}U\psi^*(\vec{r})\\
&=U\hat{H}^*\psi^*(\vec{r})=U\left(\hat{H}\psi(\vec{r})\right)^*\\
&=U\left(E\psi(\vec{r})\right)^*=EU\psi^*(\vec{r})\\
&=E\psi'(\vec{r})
\end{aligned}
$$

故证明成立。

21.5 在希尔伯特空间中求$T_o|r\rangle$、$T_o|r\rangle$和$T_0|lm\rangle$ （肖钰裴）

解：

$$T_o|r\rangle=\int dr|r\rangle\langle r|r\rangle=|r\rangle$$

$$\langle r|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}pr}$$

$$
\begin{aligned}
&T_0|p\rangle=\int dr|r\rangle\langle p|r\rangle=\int dr|r\rangle\langle r|p\rangle^*\\
&=-\int dr|r\rangle\langle r|p\rangle=-|p\rangle\\
&T_0|lm\rangle=\int dr|r\rangle\langle lm|r\rangle=-|lm\rangle
\end{aligned}
$$

练习 21.6 在希尔伯特空间中，证明：$T_0\vec{P}T_0^{-1}=-\vec{P}$

（完成人：张伟）

证明：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_0\vec{P}T_0^{-1}|\psi(t)\rangle&=\mathrm{T}_0\vec{P}T_0|\psi(t)\rangle\\
&=\mathrm{T}_0\vec{P}\int d\vec{r}'|\vec{r}'\rangle\langle\psi(-t)|\vec{r}'\rangle\\
&=\mathrm{T}_0(-i\hbar\nabla)\int d\vec{r}'|\vec{r}'\rangle\langle\psi(-t)|\vec{r}'\rangle\\
&=i\hbar\nabla\int d\vec{r}'|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\psi(t)\rangle\\
&=-\vec{P}|\psi(t)\rangle
\end{aligned}
$$

即$\mathrm{T}_0\vec{P}T_0^{-1}=-\vec{P}$

#

练习 21.7 下面是一段推导：

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{r}|K|\psi\rangle&=\int \mathrm{d}\vec{r}\langle\vec{r}|K|r'\rangle\langle r'|\psi\rangle\\
&=\int \mathrm{d}\vec{r}\langle\vec{r}|r'\rangle\langle r'|\psi\rangle\\
&=\langle\vec{r}|\psi\rangle
\end{aligned}
$$

推导中利用了 $K\left|r'\right\rangle = \left|r'\right\rangle$, 这一推导结果与(21. 16)式不符, 原因何在?

（梁立欢　审核:张伟）

解　正确的推导应该是

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{r}\left|K\right|\psi\right\rangle &= \int \mathrm{d}\vec{r}'\left\langle\vec{r}\left|K\right|r'\right\rangle\left\langle r'\left|\psi\right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}\vec{r}'\left\langle\vec{r}\left|K\left(\left|r'\right\rangle\left\langle r'\left|\psi\right\rangle\right)\right.\right. \\ &= \int \mathrm{d}\vec{r}'\left\langle\vec{r}\left|\left(K\left|r'\right\rangle\right)\left\langle\psi\left|r'\right\rangle\right.\right.\right. \\ &= \int \mathrm{d}\vec{r}'\left\langle\vec{r}\left|r'\right\rangle\left\langle\psi\left|r'\right\rangle\right.\right.\end{aligned}$$

K 不仅仅作用于 $\left|\vec{r}'\right\rangle$, 还应作用与 $\left\langle\vec{r}'\left|\psi\right\rangle\right.$

#

练习 21.8 根据希尔伯特空间的算符定义（21.20）式，证明：$KK = 1$即$K^{-1} = K$

（完成人：张伟）

证明：

由（21.20）式，

$K\left|\psi(t)\right\rangle = \int d\vec{r}\left|\vec{r}\right\rangle\left\langle\psi(t)\left|\vec{r}\right\rangle\right.$

所以，

$$\begin{aligned}KK\left|\psi(t)\right\rangle &= K\int d\vec{r}\left|\vec{r}\right\rangle\left\langle\psi(t)\left|\vec{r}\right\rangle\right. \\ &= \int d\vec{r}\left|\vec{r}\right\rangle\left\langle\vec{r}\left|\psi(t)\right\rangle\right. \\ &= \left|\psi(t)\right\rangle\end{aligned}$$

从而有$KK = 1$即$K = K^{-1}$

#

22.1　算出下面两个式子：（许中平）

$$Q(\vec{n}\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi+\lambda^2(1-\cos\varphi) & \lambda\mu(1-\cos\varphi)-\nu\sin\varphi & \lambda\nu(1-\cos\varphi)+\mu\sin\varphi\\ \mu\lambda(1-\cos\varphi)+\nu\sin\varphi & \cos\varphi+\mu^2(1-\cos\varphi) & \mu\nu(1-\cos\varphi)-\lambda\sin\varphi\\ \nu\lambda(1-\cos\varphi)-\mu\sin\varphi & \nu\mu(1-\cos\varphi)+\lambda\sin\varphi & \cos\varphi+\nu^2(1-\cos\varphi)\end{pmatrix}$$

（1）

$$Q(\alpha\beta\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}$$

（2）

解：由于 $Q(\vec{k}\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$Q(\vec{j}\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{k}\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{j},-\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{k},-\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

又　$Q(\vec{n}\varphi)=Q(\vec{k}\psi)Q(\vec{j}\theta)Q(\vec{k}\varphi)Q(\vec{j},-\theta)Q(\vec{k},-\psi)$

$$Q(\vec{n}\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

化简得：

$$Q(\vec{n}\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi+\sin^2\theta\cos^2\psi(1-\cos\varphi) & \sin^2\theta\sin\psi\cos\psi(1-\cos\varphi)-\cos\theta\sin\varphi & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\theta\cos\psi(1-\mathrm{c} \\ \sin^2\theta\sin\psi\cos\psi(1-\cos\varphi)+\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi+\sin^2\psi\sin^2\theta(1-\cos\varphi) & \sin\psi\sin\theta\cos\theta(1-\cos\varphi)-\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\psi(1-\cos\varphi)-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\theta(1-\cos\varphi)+\sin\theta\cos\psi\sin\varphi & \cos\varphi+\cos^2\theta(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{n}\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi+\lambda^2(1-\cos\varphi) & \lambda\mu(1-\cos\varphi)-\nu\sin\varphi & \nu\lambda(1-\cos\varphi)+\mu\sin\varphi \\ \mu\lambda(1-\cos\varphi)+\nu\sin\varphi & \cos\varphi+\mu^2(1-\cos\varphi) & \mu\nu(1-\cos\varphi)-\lambda\sin\varphi \\ \nu\lambda(1-\cos\varphi)-\mu\sin\varphi & \nu\mu(1-\cos\varphi)+\lambda\sin\varphi & \cos\varphi+\nu^2(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$$

（1）

式中 λ μ ν 为$\vec{n}$的方向余弦。

由于 $$Q(\vec{k}\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{j}\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{k}\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(\alpha\beta\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

化简得：

$$Q(\alpha\beta\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

（2）

#

22.2 计算下面的式子:　　（许中平）

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\dfrac{\varphi}{2}=\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2} \\
\lambda=-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2} \\
\mu=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2} \\
\nu=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}
\end{array}\right\}$$

解：由上题(1)(2)式联立：

$$\left\{\begin{array}{c}
\cos\varphi+\lambda^2(1-\cos\varphi)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma \\
\lambda\mu(1-\cos\varphi)-\nu\sin\varphi=-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma \\
\nu\lambda(1-\cos\varphi)+\mu\sin\varphi=\cos\alpha\sin\beta \\
\mu\lambda(1-\cos\varphi)+\nu\sin\varphi=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma \\
\cos\varphi+\mu^2(1-\cos\varphi)=-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma \\
\mu\nu(1-\cos\varphi)-\lambda\sin\varphi=\sin\alpha\sin\beta \\
\nu\lambda(1-\cos\varphi)-\mu\sin\varphi=-\sin\beta\cos\gamma \\
\nu\mu(1-\cos\varphi)+\lambda\sin\varphi=\sin\beta\sin\gamma \\
\cos\varphi+\nu^2(1-\cos\varphi)=\cos\beta
\end{array}\right.$$

可得出：

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\dfrac{\varphi}{2}=\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2} \\
\lambda=-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2} \\
\mu=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2} \\
\nu=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}
\end{array}\right\}$$

#

22.3

22.4 试直接由（22.34）式求 $D^{\frac{1}{2}}(ab)$和$D^{1}(ab)$。（解答：陈玉辉　核对：项朋）

解

$$D^{j}_{m'm}(a,b)=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times a^{j+m'-n}(a^{*})^{j-m-n}b^{n}(b^{*})^{n+m-m'}$$

$$D^{\frac{1}{2}}(a,b):j=\frac{1}{2};m',m=\pm\frac{1}{2}$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(a,b)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!}}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n)!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n)!n!(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!}\times a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n}(a^{*})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n}b^{n}(b^{*})^{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{0!1!0!1!}}{(1-n)!(-n)!n!(n)!}\times a^{1-n}(a^{*})^{-n}b^{n}(b^{*})^{n}\sim\sim\sim(\text{保证分母不为零，则}n\text{取}0)$$
$$=a$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(a,b)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!}}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n)!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n)!n!(n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!}\times a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n}(a^{*})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n}b^{n}(b^{*})^{n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{1!0!0!1!}}{(1-n)!(1-n)!n!(n-1)!}\times a^{1-n}(a^{*})^{1-n}b^{n}(b^{*})^{n-1}\sim\sim\sim(\text{保证分母不为零，则}n\text{取}1)$$
$$=-b$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(a,b)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n)!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n)!n!(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!}\times a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n}(a^{*})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n}b^{n}(b^{*})^{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{1!0!1!0!}}{(-n)!(1-n)!n!n!}\times a^{-n}(a^{*})^{1-n}b^{n}(b^{*})^{n}\sim\sim\sim(\text{保证分母不为零，则}n\text{取}0)$$
$$=a^{*}$$

$D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(a,b)$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})!}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n)!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n)!n!(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})!}\times a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n}(a^*)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-n}b^n(b^*)^{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{0!1!1!0!}}{(-n)!(-n)!n!(n+1)!}\times a^{-n}(a^*)^{-n}b^n(b^*)^{n+1}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$=b^*$

$D^1(ab): j=1; m^{'}, m=\pm 1,0$

$D^1_{11}(ab)$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(1-1)!(1+1)!(1-1)!(1+1)!}}{(1+1-n)!(1-1-n)!n!(n+1-1)!}\times a^{1+1-n}(a^*)^{1-1-n}b^n(b^*)^{n+1-1}$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{0!2!0!2!}}{(2-n)!(-n)!n!n!}\times a^{2-n}(a^*)^{-n}b^n(b^*)^n$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$=a^2$

$D^1_{10}(ab)$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(1-0)!(1+0)!(1-1)!(1+1)!}}{(1+1-n)!(1-0-n)!n!(n+0-1)!}\times a^{1+1-n}(a^*)^{1-0-n}b^n(b^*)^{n+0-1}$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{1!1!0!2!}}{(2-n)!(1-n)!n!(n-1)!}\times a^{2-n}(a^*)^{1-n}b^n(b^*)^{n-1}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取1)

$=-\sqrt{2}ab$

$D^1_{1-1}(ab)$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(1+1)!(1-1)!(1-1)!(1+1)!}}{(1+1-n)!(1+1-n)!n!(n-1-1)!}\times a^{1+1-n}(a^*)^{1+1-n}b^n(b^*)^{n-1-1}$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{2!0!0!2!}}{(2-n)!(2-n)!n!(n-2)!}\times a^{2-n}(a^*)^{2-n}b^n(b^*)^{n-2}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取2)

$=b^2$

$D^1_{01}(ab)$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(1-1)!(1+1)!(1-0)!(1+0)!}}{(1+0-n)!(1-1-n)!n!(n+1-0)!}\times a^{1+0-n}(a^*)^{1-1-n}b^n(b^*)^{n+1-0}$

$=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{0!2!1!1!}}{(1-n)!(-n)!n!(n+1)!}\times a^{1-n}(a^*)^{-n}b^n(b^*)^{n+1}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$=\sqrt{2}ab$

$D_{00}^{1}(ab)$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{(1-0)!(1+0)!(1-0)!(1+0)!}}{(1+0-n)!(1-0-n)!n!(n+0-0)!} \times a^{1+0-n}(a^*)^{1-0-n} b^n (b^*)^{n+0-0}$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{1!1!1!1!}}{(1-n)!(1-n)!n!n!} \times a^{1-n}(a^*)^{1-n} b^n (b^*)^n$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0,1)

$= aa^* - bb^*$

$D_{0-1}^{1}(ab)$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{(1+1)!(1-1)!(1-0)!(1+0)!}}{(1+0-n)!(1+1-n)!n!(n-1-0)!} \times a^{1+0-n}(a^*)^{1+1-n} b^n (b^*)^{n-1-0}$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{2!0!1!1!}}{(1-n)!(2-n)!n!(n-1)!} \times a^{1-n}(a^*)^{2-n} b^n (b^*)^{n-1}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取1)

$= -\sqrt{2} a^* b$

$D_{-11}^{1}(ab)$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{(1-1)!(1+1)!(1+1)!(1-1)!}}{(1-1-n)!(1-1-n)!n!(n+1+1)!} \times a^{1-1-n}(a^*)^{1-1-n} b^n (b^*)^{n+1+1}$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{0!2!2!0!}}{(-n)!(-n)!n!(n+2)!} \times a^{-n}(a^*)^{-n} b^n (b^*)^{n+2}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$= (b^*)^2$

$D_{-10}^{1}(ab)$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{(1-0)!(1+0)!(1+1)!(1-1)!}}{(1-1-n)!(1-0-n)!n!(n+0+1)!} \times a^{1-1-n}(a^*)^{1-0-n} b^n (b^*)^{n+0+1}$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{1!1!2!0!}}{(-n)!(1-n)!n!(n+1)!} \times a^{-n}(a^*)^{1-n} b^n (b^*)^{n+1}$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$= \sqrt{2} a^* b^*$

$D_{-1-1}^{1}(ab)$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{(1+1)!(1-1)!(1+1)!(1-1)!}}{(1-1-n)!(1+1-n)!n!(n-1+1)!} \times a^{1-1-n}(a^*)^{1+1-n} b^n (b^*)^{n-1+1}$

$= \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{2!0!2!0!}}{(-n)!(2-n)!n!n!} \times a^{-n}(a^*)^{2-n} b^n (b^*)^n$ ~~~ (保证分母不为零，则n取0)

$= (a^*)^2$

#

22.5 试由（22.38）式求出$D_{m'm}^{j}(00\gamma)$和$D_{m'm}^{j}(0\beta 0)$。（解答：陈玉辉　核对：项朋）

解

$$D_{m'm}^{j}(\alpha\beta\gamma)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times e^{-im'\alpha}(\cos\frac{\beta}{2})^{2j+m'-m-2n}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-m'}e^{-im\gamma}$$

$$D_{m'm}^{j}(00\gamma)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times e^{-im'0}(\cos\frac{0}{2})^{2j+m'-m-2n}(\sin\frac{0}{2})^{2n+m-m'}e^{-im\gamma}$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times 1\cdot 1\cdot 0\cdot e^{-im\gamma}$$
$$=0$$

$$D_{m'm}^{j}(0\beta 0)$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times e^{-im'0}(\cos\frac{\beta}{2})^{2j+m'-m-2n}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-m'}e^{-im0}$$
$$=\sum_{n}(-1)^{n}\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!}\times(\cos\frac{\beta}{2})^{2j+m'-m-2n}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-m'}$$

22.6 设 l 和 m 为整数，证明：（解答：陈玉辉　核对：项朋）

$$D_{lm}^{l}(\alpha\beta\gamma)=(-1)^{l-m}e^{-il\alpha}\sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}}(\cos\frac{\beta}{2})^{l+m}(\sin\frac{\beta}{2})^{l-m}e^{-im\gamma}$$

证明：

$D^l_{lm}(\alpha\beta\gamma): j=l; m^{'}=l; m=m$

$D^l_{lm}(\alpha\beta\gamma)$

$=\sum_n(-1)^n \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-l)!(l+l)!}}{(l+l-n)!(l-m-n)!n!(n+m-l)!}\times e^{-il\alpha}(\cos\frac{\beta}{2})^{2l+l-m-2n}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-l}e^{-im\gamma}$

$=\sum_n(-1)^n \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!0!2l!}}{(2l-n)!(l-m-n)!n!(n+m-l)!}\times e^{-il\alpha}(\cos\frac{\beta}{2})^{3l-m-2n}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-l}e^{-im\gamma}$

满足分母不为零，则：

$2l-n\geq 0$

$l-m-n\geq 0 \Rightarrow l=m+n$（或$n=l-m$）

$n\geq 0$

$n+m-l\geq 0$

所以

$D^l_{lm}(\alpha\beta\gamma)$

$=(-1)^{l-m}\frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!0!2l!}}{(2l-l+m)!(l-m-l+m)!(l-m)!(l-m+m-l)!}\times e^{-il\alpha}(\cos\frac{\beta}{2})^{l+2l-2m-2n+m}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+2m-2l-m+l}e^{-im\gamma}$

$=(-1)^{l-m}\frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!2l!}}{(l+m)!(l-m)!}\times e^{-il\alpha}(\cos\frac{\beta}{2})^{l++m}(\sin\frac{\beta}{2})^{-m+l}e^{-im\gamma}$

$=(-1)^{l-m}e^{-il\alpha}\sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}}(\cos\frac{\beta}{2})^{l+m}(\sin\frac{\beta}{2})^{l-m}e^{-im\gamma}$

#

练习 22.7 通常将 $D^j_{mm^{'}}(\alpha\beta\gamma)$ 写成

$$D^j_{mm^{'}}(\alpha\beta\gamma)=e^{-im^{'}\alpha}d^j_{mm^{'}}(\beta)e^{-im\gamma}$$

写出 $d^j_{mm^{'}}(\beta)$ 的矩阵。　（何建贤）

解：根据公式得

$$d^j_{mm^{'}}(\beta)=\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & \sin^2\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & \cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin^2\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & \cos^2\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

练习 22.8 用欧拉角 $\alpha\beta\gamma$ 表示正当转动的 2，3，4 维表示的特征表 $\chi^{1/2}(\alpha\beta\gamma)$，$\chi^1(\alpha\beta\gamma)$，$\chi^{3/2}(\alpha\beta\gamma)$。　（何建贤）

解：$\chi^{1/2}(\alpha\beta\gamma)=trD^{1/2}(\alpha\beta\gamma)=e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2}+e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2}$

$$\chi^1(\alpha\beta\gamma)=trD^1(\alpha\beta\gamma)=e^{-i(\alpha+\beta)}\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}+e^{i(\alpha+\beta)}\cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$\chi^{3/2}(\alpha\beta\gamma)=trD^{3/2}(\alpha\beta\gamma)=e^{-3i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos^3\frac{\beta}{2}+e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+e^{3i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos^3\frac{\beta}{2}$$

#

22.9

22.10 写出 $d^2_{m'm}(\beta)=D^2_{m'm}(0\beta 0)$ 的各矩阵元。 （陈捷狮）

解：根据 SO（3）群的群元的表示矩阵元公式：

$$D^j_{m'm}(\alpha\beta r)=\sum_n(-1)^n\frac{\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{(j+m'-n)!(j-m-n)!n!(n+m-m')!} \quad (1)$$

$$\times e^{-im\alpha'}(\cos\frac{\beta}{2})^{2j+m'-m-2n'}(\sin\frac{\beta}{2})^{2n+m-m'}e^{-im\gamma}$$

其中： $\alpha=0$ $\gamma=0$ $j=2$，m 和 m' 的取值范围是：-2、-1、0、1、2.

把以上条件代人公式（1）可知：

$$d^2_{22}=d^2_{-2-2}=\cos^4\frac{\beta}{2}$$

$$d^2_{21}=-d^2_{12}=-d^2_{-2-1}=d^2_{-1-2}=-\frac{1}{2}\sin\beta(1+\cos\beta)$$

$$d^2_{20}=d^2_{02}=d^2_{-20}=d^2_{0-2}=\sqrt{\frac{3}{8}}\sin^2\beta$$

$$d^2_{2-1}=d^2_{1-2}=-d^2_{-21}=-d^2_{-12}=\frac{1}{2}\sin\beta(\cos\beta-1)$$

$$d^2_{2-2}=d^2_{-22}=\sin^4\frac{\beta}{2}$$

$$d^2_{11}=d^2_{-1-1}=\frac{1}{2}(2\cos\beta-1)(\cos\beta+1)$$

$$d^2_{10}=d^2_{0-1}=-d^2_{01}=-d^2_{-10}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\beta\cos\beta$$

$$d^2_{1-1}=d^2_{-11}=\frac{1}{2}(2\cos\beta+1)(1-\cos\beta)$$

$$d^2_{00}=\frac{1}{2}(3\cos^2\beta-1)$$

#

22.11

练习 23.1 利用恒等式$(x+y)^n(x+y)^m=(x+y)^{n+m}$及 Taylor 展开，证明:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{m}{t-r}=\binom{n+m}{t}$$

对整数 n 和 m 都成立；式中$\binom{n}{r}$定义为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r-1)}{r!}$$

证明：（王俊美）

因为 $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{m}{t-r}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\frac{m(m-1)(m-2)(m+r-t+1)}{(t-r)!}$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{m!}{(t-r)!(m+r-t)!}$$
$$=C_n^rC_m^{t-r}$$

$$\binom{n+m}{t}=\frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-r+1)}{t!}=\frac{(n+m)!}{t!(n+m-t)!}=C_{n+m}^t$$

对 $(x+y)^n(x+y)^m=(x+y)^{n+m}$ 进行 Taylor 得

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^ky^{n-k}\sum_{k'=0}^{m}C_m^{k'}x^{k'}y^{m-k'}=\sum_{k''=0}^{n+m}C_{n+m}^{k''}x^{k''}y^{n+m-k''}$$ （这里 $k''=k+k'$）

则 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sum_{k'=0}^{m}C_m^{k'}=\sum_{k+k'=0}^{n+m}C_{n+m}^{k''}$

所以 $C_n^rC_m^{t-r}=C_{n+m}^t$

即 $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{m}{t-r}=\binom{n+m}{t}$

此题得证。

练习 23.2 利用上题，证明当 a,b,c,n,m,s 为正整数，且 $a>b,a>c,s<n+m$ 时有

$$\frac{a!}{b!c!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a-b)!(a-c)!}{(a-b-r)!(a-c-r)!(b+c-a+r)!r!}$$

$$\frac{(n+m)!}{n!m!s!(n+m-s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(n-r)!(s-r)!(m-s+r)!r!}$$

证明：（王俊美）

(1)因为 $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a-b)!(a-c)!}{(a-b-r)!(a-c-r)!(b+c-a+r)!r!}$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a-b)!b!}{(a-b-r)!r!}\frac{b\,!}{[b-(a-c-r)]!(a-c-r)!}\frac{(a-c)!}{b!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_{a\text{-}b}^{r}C_{b}^{a-c-r}\frac{(a-c)!}{b!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_{a}^{a\text{-}c}\frac{(a-c)!}{b!}$$

$$=\frac{a!}{(a-c)!c!}\frac{(a-c)!}{b!}$$

$$=\frac{a!}{b!c!}$$

所以 $\displaystyle\frac{a!}{b!c!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a-b)!(a-c)!}{(a-b-r)!(a-c-r)!(b+c-a+r)!r!}$

此题得证

(2) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(n-r)!(s-r)!(m-s+r)!r!}$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{m!}{(s-r)![m-(s-r)]}\frac{1}{n!m!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_{n}^{r}C_{m}^{s-r}\frac{1}{n!m!}$$

$$=C_{n+m}^{s}\frac{1}{n!m!}$$

$$=\frac{(n+m)!}{s!(n+m+s)!}\frac{1}{n!m!}$$

所以 $$\frac{(n+m)!}{n!m!s!(n+m-s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(n-r)!(s-r)!(m-s+r)!r!}$$

此题得证。

练习 23.3　证明当$s\ge n\ge 0,s\ge t\ge 0$及$a\ge c,b\ge d$时有　（杨涛）

$$\frac{(s-n)!(s-t)!}{n!t!(s-n-t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(s-r)!}{r!(n-r)!(t-r)!}\quad（1）$$

$$\frac{(a+b+1)!(a-c)!(b-d)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a+s)!(b-s)!}{(c+s)!(d-s)!}\quad（2）$$

证明：对（1）式变形的$\dfrac{(s-n)!}{t!(s-n-t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\dfrac{(s-r)!}{(t-r)!(s-t)!}$

$$\binom{s-n}{t}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{s-r}{t-r}\quad（3）$$

要证（1）式成立即要求（3）式成立即可

由$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{m}{t-r}=\binom{n+m}{t}$可得（3）式的左式$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{s}{r}\binom{-n}{t-r}$

由$\binom{n}{r}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}$可得

右式$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{s}{t}\binom{-n}{t-r}$

$\therefore$左式=右式

题中所列等式成立 即（1）式成立

对（2）式变形，左式与右式同时乘以$\dfrac{1}{(a-c)!(b-d)!}$

则左式$=\dfrac{(a+b+1)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!}$

$$右式=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a+s)!(b-s)!}{(c+s)!(d-s)!(a-c)!(b-d)!}$$

$$据\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$右式=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{a+s}{c+s}\binom{b-s}{d-s}$$

$$又\because\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{m}{t-r}=\binom{n+m}{t}$$

假定$c+s=r,\quad t-r=d-s,\quad t=d+c$

$$则右式=\sum_{c+s=0}^{\infty}\binom{a+s}{c+s}\binom{b-s}{d-s}\frac{a+b+1}{a+b+1-c-d}$$

$$=\frac{(a+b)!}{(c+d)!(a+b-c-d)!}\frac{a+b+1}{a+b+1-c-d}$$

$$\frac{(a+b+1)!}{(c+d)!(a+b+1-c-d)!}$$

$$\binom{a+b+1}{c+d}$$

$\therefore$左式=右式

即题设中所列等式成立

#

练习 23.4　利用 23.2 与 23.3 的结果。证明：（杨涛）

$$\frac{(j+j_2-m_1-s)}{(j_1-m_1-s)!(j-m-s)!(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!}=\sum_u\frac{1}{u!(j_1-j_2-m-s+u)!(j-j_1+j_2-u)!(j_1+m_2-u)!}\qquad（1）$$

$$及\sum_s(-1)^s\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}=(-1)^{j_1-j_2-m+u}\frac{(j_1+m_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j_1-j_2-m+u)!(j_1-j-m_2+u)!(j+m-u)!}\qquad（2）$$

证明：由$\dfrac{(n+m)!}{n!m!s!(n+m-s)!}=\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(n-r)!(s-r)!(m-s+r)!r!}$可得

假设$a=j-j_1+j_2 \qquad b=j_1-m_1-s \qquad p=j_2+m-m_1$

（1）式的左式
$$=\frac{(a+b)!}{a!p!b!(a+b-p)!}=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{1}{(a-u)!(p-u)!(b-p+u)!u!}$$
$$=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{1}{(j-j_1+j_2-u)!(j_2+m-m_1-u)!(j_1-m_1-s-j_2-m+m_1+u)!u!}$$

又$\because m=m_1+m_2$

$$\therefore \text{左式}=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{1}{(j-j_1+j_2-u)!(j_1-j_2-m-s+u)!(j_2+m_2-u)!u!}=\text{右式}$$

$\therefore$题设中（1）式成立

据$\frac{(s-n)!(s-t)!}{n!t!(s-n-t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(s-r)!}{r!(n-r)!(t-r)!}$可得：$s=s-n-t+n+t$

根据（2）式我们知：

$$S=j_1-j_2-m+j_1-j-m_2+u+j+m-u=2j_1-j_2-m_2+u$$
$$N=2j_1-j_2-m_2+u-m_1-j_1=j_1-j_2-m_2-m_1+u$$
$$T=2j_1-j_2-m_2+u-j_1+j_2=j_1-j-m_2+u$$
$$R=2j_1-j_2-m_2+u-j_1-m_1-s=j_1-j_2-m+u$$

$$\frac{(j_1+m_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j_1-j_2-m+u)!(j_1-j-m_2+u)!(j+m-u)!}$$
$$=\sum_{s-j_1+j_2+m-u}(-1)^{s-j_1+j_2+m-u}\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$
$$=\sum_{s-j_1+j_2+m-u}(-1)^s\frac{1}{(-1)^{j_1-j_2-m+u}}\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$

$$(2)\text{式的右式}=(-1)^{j_1-j_2-m+u}\sum_{s-j_1+j_2+m-u}(-1)^s\frac{1}{(-1)^{j_1-j_2-m+u}}\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$
$$=\text{② 式的左式}\sum_s(-1)^s\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$

即（2）式证毕

#

练习 23.5 利用上题结果，证明 CG 系数的 Edmonds 形式（23.19）式与（23.20）

等价。　（做题人：韩丽芳）

证明：CG 系数的 Edmonds 形式（23.19）式如下式所示

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$
$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}}$$
$$\times\sum_s(-1)^{j_1-m_1+s}\frac{(j_1+m_1+s)!(j+j_2-m_1-s)!}{s!(j-m-s)!(j_1-m_1-s)!(j_2-j+m_1+s)!}$$

CG 系数的另一种 Racah 形式（23.20）式如下所示

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$
$$\times\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}$$
$$\times\sum_z(-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!}$$

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$
$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}}$$
$$\times\sum_s(-1)^{j_1-m_1+s}\frac{(j_1+m_1+s)!(j+j_2-m_1-s)!}{s!(j-m-s)!(j_1-m_1-s)!(j_2-j+m_1+s)!}\qquad（1）$$

而

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$
$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$
$$\times\sqrt{(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}$$
$$\times\sum_z(-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!}$$

$$\times \frac{1}{(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!}$$

（2）

由公式

$$\frac{(j+j_2-m_1-s)!}{(j_1-m_1-s)!(j-m-s)!(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!}$$

$$=\sum_u \frac{1}{u!(j_1-j_2-m-s+u)!(j-j_1+j_2-u)!(j_2+m_2-u)!} \tag{3}$$

及
$$\sum_s (-1)^s \frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-J+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$

$$=(-)^{j_1-j_2-m+u} \frac{(j_1+m_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j_1-j_2-m+u)!(j_1-j-m_2+u)!(j+m+u)!} \tag{4}$$

则（1）式的最后一项为

$$\sum_s (-1)^{j_1-m_1+s} \frac{(j_1+m_1+s)!(j+j_2-m_1-s)!}{s!(j-m-s)!(j_1-m_1-s)!(j_2-j+m_1+s)!}$$

$$=\sum_s (-1)^{j_1-m_1+s} \frac{(j+j_2-m_1-s)!}{(j_1-m_1-s)!(j-m-s)!(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!}$$

$$\times \frac{(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!(j_1+m_1-s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!}$$

$$=\sum_s (-)^{j_1-m_1+s} \sum_u \frac{1}{u!(j_1-j_2-m-s+u)!(j-j_1+j_2-u)!(j_2+m_2-u)!}$$

$$\times \frac{(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!(j_1+m_1-s)!}{s!(j_2-j+m_1+s)!}$$

$$=(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)$$

$$\times \sum_u (-1)^u \frac{1}{u!(j_1+j_2-j-u)!(j_1-m_1-u)!(j_2+m_2-u)!}$$

将u换成z得

$$\sum_s (-1)^{j_1-m_1+s}\frac{(j_1+m_1+s)!(j+j_2-m_1-s)!}{s!(j-m-s)!(j_1-m_1-s)!(j_2-j+m_1+s)!}$$

$$=(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)$$

$$\times\sum_z (-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!} \qquad （5）$$

将（5）代入（1）式并和（2）式比较证得两式等价

即 CG 系数的 Edmonds 形式与 Racah 形式等价。

#

23.6 证明（23.27）式与（23.20）式等价。（做题人：韩丽芳）

证明：CG 系数的 Racah 形式（23.20）式如下所示

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$

$$\times\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}$$

$$\times\sum_z (-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!}$$

$$\times\frac{1}{(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!}$$

CG 系数的 Wigner 形式（23.27）如下所示

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$

$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}$$

$$\times\sum_n (-1)^{n+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-n)!(j_1-m_1+n)!}{(j-j_1+j_2-n)!(j+m-n)!n!(n+j_1-j_2-m)!}$$

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$

$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$

$$\times\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}$$

$$\times\sum_z(-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!}$$

$$\times\frac{1}{(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!} \qquad (1)$$

而

$$S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}=\delta(m_1+m_2,m)$$

$$\times\sqrt{(2j+1)\frac{(j_1+j_2-j)!(j+j_2-j_1)!(j+j_1-j_2)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!}}$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}$$

$$\times\sum_n(-1)^{n+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-n)!(j_1-m_1+n)!}{(j-j_1+j_2-n)!(j+m-n)!n!(n+j_1-j_2-m)!} \qquad (2)$$

由公式

$$\frac{(j+j_2-m_1-s)!}{(j_1-m_1-s)!(j-m-s)!(j-j_1+j_2)!(j_2+m-m_1)!}$$

$$=\sum_u\frac{1}{u!(j_1-j_2-m-s+u)!(j-j_1+j_2-u)!(j_2+m_2-u)!} \qquad (3)$$

及 $$\sum_s(-1)^s\frac{(j_1+m_1+s)!}{s!(j_2-J+m_1+s)!(j_1-j_2-m+u-s)!}$$

$$=(-)^{j_1-j_2-m+u}\frac{(j_1+m_1)!(j+j_1-j_2)!}{(j_1-j_2-m+u)!(j_1-j-m_2+u)!(j+m+u)!} \qquad (4)$$

则（2）式的最后一项为

$$\sum_n(-1)^{n+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-n)!(j_1-m_1+n)!}{(j-j_1+j_2-n)!(j+m-n)!n!(n+j_1-j_2-m)!}$$

$$=(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)$$

$$\times\sum_z(-1)^z\frac{1}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!}$$

$$\times\frac{1}{(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!} \qquad (5)$$

将（5）式代入（2）式得，再与（1）式进行比较，证得两式等价，即 CG 系数的 Racah 形式与 CG 系数的 Wigner 形式。

23.7 取 $j_1=j_2=1$,**取转动** $Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{\pi}{2} & 0\end{pmatrix}$,**写出:(1)** $D^1\otimes D^1$;**(2) S ； (3)** S^{-1}**(这三者都是** 9×9 **矩阵).** （吴汉成）

解： $\because\quad j_1=j_2=1$

$\therefore\quad J=j_1+j_2,j_1+j_2-1,|j_1-j_2|=2,1,0$

$\therefore\quad m_1=m_2=1,0,-1$

$\therefore\quad m=m_1+m_2=2,1,0,-1,-2$

又$\because\quad Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{\pi}{2} & 0\end{pmatrix}$

$\because\quad \alpha=0$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=0$

（1） 根椐公式：

$$D^1(\alpha\beta\gamma)=\begin{pmatrix}e^{-i(\alpha+\lambda)}\cos^2\frac{\beta}{2} & -\sqrt{2}e^{-i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i(\alpha-\gamma)}\sin^2\frac{\beta}{2}\\ \sqrt{2}e^{-i\gamma}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & \cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2} & -\sqrt{2}e^{i\gamma}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)}\sin^2\frac{\beta}{2} & \sqrt{2}e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)}\cos^2\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

可得：$D^1=D^1(0,\frac{\beta}{2},0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

所以，$D^1\otimes D^1=D^1(0,\frac{\pi}{2},0)\otimes D^1(0,\frac{\pi}{2},0)$

$$
=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\
-\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\
-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
-\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\
\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\
-\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}
$$

（2）根据 CG 系数 Wigner 形式的公式：

$$
S^{j_1 j_2}_{m_1 m_2 jm} = \delta(m_1 + m_2, m)
$$

$$
\times \sqrt{(2j+1)\frac{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!(j+m)!(j-m)!}{(j+j_1+j_2+1)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}
$$

$$
\times \sum_n (-1)^{n+j_2+m_2} \frac{(j+j_2+m_1-n)!(j_1-m_1+n)!}{(j-j_1+j_2-n)!(j+m-n)!n!(n+j_1-j_2-m)!}
$$

可得 S 的矩阵 $S^{11}_{m_1 m_2 jm}$ 如下：

$$S^{11}_{m_1m_2,jm}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1/3} & 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/6} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{1/3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/3} & 0 & -\sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

m_1m_2 表示行序号：$m_1m_2=11,10,1-1,01,00,0-1,-11,-10,-1-1$，它们的取值，11 表示第一行，10 表示第二行，依此类推，-1-1 表示第九行。

jm 表示列序号：$jm=00,11,10,1-1,22,21,20,2-1,2-2$，它们的取值，00 表示第一列，11 表示第二列，依此类推，2-2 表示第九列。

（3）因为 $SS^{-1}=1$，所以 S^{-1} 的矩阵 $(S^{11}_{m_1m_2,jm})^{-1}=S^{11}_{jm,m_1m_2}$，$S^{11}_{jm,m_1m_2}$ 则的值（把 $S^{11}_{m_1m_2,jm}$ 转置后，再取转置后矩阵元的倒数，即得 S^{11}_{jm,m_1m_2} 的矩阵元）,如下：

$$S^{-1}=S^{11}_{jm,m_2m_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jm 表示行序号：jm=00，11，10，1-1，22，21，20，2-1，2-2。
00 表示第一行，11 表示第二行，依此类推，2-2 表示第九行。

m_1m_2 表示列序号：m_1m_2=11，10，1-1，01，00，0-1，-11，-10，-1-1。11 表示第一列，10 表示第二列，依此类推，-1-1 表示第九列。

#

23.8 证明（23.70）式等号右边的分子

$$\langle (j_1j_2)j_{12}j_3jm | j_1(j_2j_3)j_{23}jm \rangle$$

m 与无关。（吴汉成）

证明：已知（23.69）式为：

$$\left|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle=\sum_{j_{12}}\left|(j_1j_2)j_{12}j_3jm\right\rangle\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle$$

现取 m<j,且把 m 改为 m+1，则上式可改为：

$$\left|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle=\sum_{j_{12}}\left|(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\right\rangle\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle$$

-------------------------------- (1)式

另一方面，根据上升算符 j_+ 的性质：

$j_+\left|jm\right\rangle=\left|j(m+1)\right\rangle\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$， 可把 j_+ 作用于（23.69）式两边,得：

$$j_+\left|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle=\sum_{j_{12}}j_+\left|(j_1j_2)j_{12}j_3jm\right\rangle\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle$$

$$\left|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle\sqrt{(j-m)(j+m+1)}=\sum_{j_{12}}\left|(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\right\rangle\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle$$

两边除以 $\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$，得：

$$\left|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle=\sum_{j_{12}}\left|(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\right\rangle\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle$$

-------------------------- （2）式

（1）（2）两式比较，得：

$$\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle=\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle$$

此恒等式含有递推关系：

$$\begin{aligned}\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+1)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+1)\right\rangle&=\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+2)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+2)\right\rangle\\&=\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+3)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+3)\right\rangle\\&=----------------------\\&=\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3j(m+\kappa)\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}j(m+\kappa)\right\rangle\end{aligned}$$

其中 $m+\kappa\le j$， $\kappa=1,2,3,---$。现设 $m+\kappa=n(n\le j)$，则综上所述，得：

$$\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle=\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jn\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jn\right\rangle$$ -----（3）式

此（3）式表明了：在 $m<j$ 范围内，取任意两值 m 和 $n(n=m+\kappa)$ 时，该式都是恒等的，

即该恒等式与 m 的取值无关，所以证得 $\left\langle(j_1j_2)j_{12}j_3jm\middle|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\right\rangle$ 与 m 无关。

#

23.9.取 $j_1=j_2=j_3=1$，讨论在两种耦合方式中 j 的取值范围与耦合方式无关。（刘强）

证明：

第一种耦合方式：（利用 CG 系数不为零的条件）

在 j_1 和 j_2 耦合中满足：

$$\begin{cases} j_1 + j_2 - j_{12} \geq 0 \\ j_1 - j_2 + j_{12} \geq 0 \\ -j_1 + j_2 + j_{12} \geq 0 \\ j_1 + j_2 + j_{12} = \text{整数} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_{12} \leq j_1 + j_2 \\ j_{12} \geq j_2 - j_1 \\ j_{12} \geq j_1 - j_2 \end{cases} \Rightarrow |j_1 - j_2| \leq j_{12} \leq j_1 + j_2 \qquad (1)$$

在 j_{12} 和 j_3 耦合中满足：

$$\begin{cases} j_{12} + j_3 - j \geq 0 \\ j_{23} - j_3 + j \geq 0 \\ -j_{23} + j_3 + j \geq 0 \\ j_{23} + j_3 + j = \text{整数} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j \leq j_{12} + j_3 \\ j \geq j_3 - j_{23} \\ j \geq j_{23} - j_3 \end{cases} \Rightarrow |j_3 - j_{23}| \leq j \leq j_{12} + j_3 \qquad (2)$$

由（1）（2）两式得

$$\left| j_3 - |j_1 - j_2| \right| \leq j \leq j_1 + j_2 + j_3$$

令 $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ 得 $1 \leq j \leq 3$；

第二种耦合方式：j_2 与 j_3 先耦合成 j_{23} 再与 j_1 耦合，

同理我们可得到

$$\left| j_1 - |j_2 - j_3| \right| \leq j \leq j_1 + j_2 + j_3$$

令 $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ 得 $1 \leq j \leq 3$；

当 $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ 时，在两种耦合方式中 j 的取值范围都是 $1 \leq j \leq 3$。

即证得 j 的取值范围与耦合方式无关。

23.10 在多粒子系统中，给定 i 和 j，直接证明 $\sum_k L_k$ 与 $\frac{1}{r_{ij}}$ 对易。 （刘强）

证明：

$$\left[\sum_k L_k, \frac{1}{r_{ij}} \right] = \sum_k \left[L_k, \frac{1}{r_{ij}} \right] = \sum_k \left(L_k \frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}} L_k \right)$$

r_{ij} 为两粒子之间的距离，

对于多粒子系统中，给定ij, r_{ij}为一个数值，

则上式=$\frac{1}{r_{ij}}\sum_k (L_k - L_k) = 0$

即$\left[\sum_k L_k, \frac{1}{r_{ij}}\right] = 0$

证得$\sum_k L_k$与$\frac{1}{r_{ij}}$对易。

#

24.1（1）写出：$U^{-1}\otimes U^{-1}$和$S^{11}_{m_1m_2jm}$的明显 9×9 矩阵形式。　（董廷旭）

（2）利用（24.21）式，由 9 个 $A_{i_1}B_{i_2}$ 计算出（24.22）、（24.23）和（24.24）三式。

解（1）

$$U^{-1}\otimes U^{-1}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\
\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2}\\
0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\
\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2}\\
-\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\
0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$S^{11}_{m_1m_2jm}$的明显矩阵形式是
$$\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & & & \\
 & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & & & \\
\sqrt{1/3} & & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/6} & & \\
 & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & & & \\
-\sqrt{1/3} & & & & & & \sqrt{2/3} & & \\
 & & & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & \\
\sqrt{1/3} & & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/6} & & \\
 & & & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} &
\end{pmatrix}$$

空着的元素为零

$$T_m^{(j)}=\left[\left(T_AT_B\right)S\right]_{jm}=\sum_{i_1i_2}\sum_{m_1m_2}\left(AB\right)_{i_1i_2}\left(U^{-1}\otimes U^{-1}\right)_{i_1i_2m_1m_2}S_{m_1m_2,jm}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 & A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 & A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3\end{pmatrix}*$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \\
0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \\
-\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}*$$

（2）
$$\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & & & \\
 & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & & & \\
\sqrt{1/3} & & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/6} & & \\
 & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & & & \\
-\sqrt{1/3} & & & & & & \sqrt{2/3} & & \\
 & & & \sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & \\
\sqrt{1/3} & & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/6} & & \\
 & & & -\sqrt{1/2} & & & & \sqrt{1/2} & \\
 & & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

根据矩阵的下标可计算得

$$T^{(0)}:T^{(0)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_i A_iB_i=-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$T^{(1)}:\begin{cases}T_1^{(1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)_x+i\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y\right] \\ T_0^{(1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z \\ T_{-1}^{(1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_x-i\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y\right]\end{cases}$$

$$T^{(2)}:\begin{cases} T_2^{(2)}=\dfrac{1}{2}A_+B_+ \\ T_1^{(2)}=\dfrac{1}{2}\left(A_+B_z+A_zB_+\right) \\ T_0^{(2)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(3A_zB_z-\vec{A}\cdot\vec{B}\right) \\ T_{-1}^{(2)}=\dfrac{1}{2}\left(A_-B_z+A_zB_-\right) \\ T_{-2}^{(2)}=\dfrac{1}{2}A_-B_- \end{cases}$$

#

24.2 证明除零秩外，所有不可约张量算符的迹都是零。 （董廷旭）？？？？

证明：根据不可约张量算符的定义，我们知道，$T^{(k)}$具有在转动下按球谐函数$Y_{lm}(\theta,\varphi)$的规律变换的一组算符作为其分量。与球谐函数的性质做类比，我们可以通过幺正变换把不可约张量算符的矩阵变成对角阵，而对角元素就是相应本征函数的本征值，又因为其本征值必是 2k+1 个以原点对称的数，所以本征值的和为零。从而得到对角矩阵的迹为零。又因为幺正变换不改变矩阵的迹。零秩显然本身不为零。从而我们得出除零秩外，所有不可约张量算符的迹都是零。

练习 24.3 设已知一个二秩不可约张量$T^{(2)}$的一个分量为$T_2^{(2)}=A_+B_+$式中A和B为二矢量，$A_+=A_x+\mathrm{i}A_y$，B_+亦同。求$T^{(2)}$的其余分量。（做题人：侯书进）

解：由公式 $\left[J_x\pm iJ_y,T_q^{(k)}\right]=\left[J_\pm,T_q^{(k)}\right]=\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\hbar T_{q\pm1}^{(k)}$

并且由已知

$$T_2^{(2)}=A_+B_+$$

得

$$\left[A_-,T_2^{(2)}\right]=\sqrt{(2+2)(2-2+1)}\hbar T_1^{(2)}=2\hbar T_1^{(2)}$$

即求得

$$T_1^{(2)}=\frac{1}{2\hbar}\left[A_-,T_2^{(2)}\right]=\frac{1}{2\hbar}\left[A_-,A_+B_+\right]$$

同理

$$\left[A_-,T_1^{(2)}\right]=\sqrt{(2+1)(2-1+1)}\hbar T_0^{(2)}=\sqrt{6}\hbar T_0^{(2)}$$

即得

$$T_0^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{6}\hbar}\left[A_-,\frac{1}{2\hbar}[A_-,A_+B_+]\right]=\frac{1}{2\sqrt{6}\hbar^2}[A_-,[A_-,A_+B_+]]=\frac{1}{2\sqrt{6}\hbar^2}\left[A_-^{(2)},A_+B_+\right]$$

由

$$\left[A_-,T_0^{(2)}\right]=\sqrt{(2+0)(2-0+1)}\hbar T_{-1}^{(2)}=\sqrt{6}\hbar T_{-1}^{(2)}$$

得

$$T_{-1}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{6}\hbar}\left[A_-,\frac{1}{\sqrt{6}\hbar}\left[A_-,\frac{1}{2\hbar}[A_-,A_+B_+]\right]\right]=\frac{1}{12\hbar^3}\left[A_-^{(3)},A_+B_+\right]$$

及由

$$\left[A_-,T_{-1}^{(2)}\right]=\sqrt{(2-1)(2+1+1)}\hbar T_{-2}^{(2)}=2\hbar T_{-2}^{(2)}$$

得

$$T_{-2}^{(2)}=\frac{1}{24\hbar^4}\left[A_-^{(4)},A_+B_+\right]$$

即求得求$T^{(2)}$的其余分量为

$$T_2^{(2)}=A_+B_+$$

$$T_1^{(2)}=\frac{1}{2\hbar}\left[A_-,A_+B_+\right]$$

$$T_0^{(2)}=\frac{1}{2\sqrt{6}\hbar^2}\left[A_-^{(2)},A_+B_+\right]$$

$$T_{-1}^{(2)}=\frac{1}{12\hbar^3}\left[A_-^{(3)},A_+B_+\right]$$

$$T_{-2}^{(2)}=\frac{1}{24\hbar^4}\left[A_-^{(4)},A_+B_+\right]$$

练习 24.4 采用公式 $\left[J_x\pm iJ_y,T_q^{(k)}\right]=\left[J_\pm,T_q^{(k)}\right]=\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\hbar T_{q\pm1}^{(k)}$ 和 $\left[J_z,T_q^{(k)}\right]=q\hbar T_q^{(k)}$ 为不可约张量算符的定义，证明两个不可约张量算符的直积 $X_q^{(k)}=\sum_{q_1q_2}T_{q_1}^{(k)}U_{q_2}^{(k)}S_{q_1q_2kq}^{k_1k_2}$ 的左方确实是一个不可约张量算符。（做题人：侯书进）

证明： 两个不可约张量算符$T_{q_1}^{(k_1)}$和$U_{q_2}^{(k_2)}$，可以通过它们的直积构成一些新的不可约张量算符$X_q^{(k)}$

$$X_q^{(k)} = \sum_{q_1 q_2} T_{q_1}^{(k_1)} U_{q_2}^{(k_2)} S_{q_1 q_2 kq}^{k_1 k_2}$$

$$= \sum_{q_1 q_2} (-1)^{-k_1+k_2+q} \sqrt{2k+1} T_{q_1}^{(k_1)} U_{q_2}^{(k_2)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}$$

式中 k 的取值为 $|k_1 - k_2| \le k \le k_1 + k_2$，上式可以简写成

$$X^{(k)} = T^{(k_1)} \otimes U^{(k_2)}$$

$$X_q^{(k)} = (T^{(k_1)} \otimes U^{(k_2)})_q^{(k)}$$

要证明（24.30）式的左方确实是一个不可约张量算符，只需利用定义式 $T_q'^{(k)} = D(Q) T_q^{(k)} D^{-1}(Q) = \sum_q T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^k(Q)$ 及转动群的不可约表示 $D(Q)$ 的直积约化关系 $\left[S^{-1}(D_1^{j_1} \otimes D_2^{j_2}) S\right]_{j'm',jm} = \delta_{j'j} D_{m'm}^j(Q)$ 即可。

#
24.5

练习 24.6 采用与角动量的对易关系(24.27)式为不可约张量算符的定义,由此定义直接证明 Wigner-Eckart 定理. （杜花伟）

证明: 令 $T_q^{(k)} = D(Q) T_q^{(k)} D^{-1}(Q) = \sum_q T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(Q)$

则根据(24.27)式

$$\left[J_x + iJ_y, T_q^{(k)}\right] = \left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\hbar T_{q+1}^{(k)}$$

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = q\hbar T_q^{(k)}$$

得

$$J_z T_q^{(k)} |\tau jm\rangle = (m+q) T_q^{(k)} |\tau jm\rangle$$

$$D(Q) T_q^{(k)} |\tau jm\rangle = \sum_{q'} T_q'^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(Q) D(Q) |\tau jm\rangle$$

$$= \sum_{q'm'} T_q'^{(k)} |\tau jm'\rangle D_{q'q}^{(k)}(Q) D_{m'm}^{(k)}(Q)$$

$$T^{(\tau)} j'm' = \sum_{qm} T_q^{(k)} |\tau jm\rangle \langle kjj'm' | kqjm\rangle$$

对于 $T^{(\tau)} j'm' \ne 0$ 的每个 j' ,由 $m' = -j', \cdots, j'$ 给出 $2j'+1$ 个非零态矢量.

$$J_\pm \left| T^{(\tau)} j'm' \right\rangle = \left| T^{(\tau)} j'm' \pm 1 \right\rangle \sqrt{(j' \mp m')(j' \pm m' + 1)}$$

$$T_q^{(k)} |\tau jm\rangle = \sum_{j'm'} \left| T^{(\tau)} j'm' \right\rangle \langle kqjm | j'm'\rangle$$

$$\langle\tau' j' m'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle=\langle\tau' j' m'|T^{(\tau)} j' m'\rangle\langle kqjm|j'm'\rangle$$

所以$\langle\tau' j' m'|T^{(\tau)} j' m'\rangle$与$m'$无关，因此

$$\langle\tau' j' m'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle=\frac{1}{\sqrt{2j'+1}}\langle\tau' j'\|T^{(k)}\|\tau j\rangle\langle kqjm|j'm'\rangle$$

$$=S^{jk}_{mqj'm'}\frac{1}{\sqrt{2j'+1}}\langle\tau' j'\|T^{(k)}\|\tau j\rangle$$

#

练习 24.7 **证明:** $\sum_q\sum_{m'm}\left|\langle\tau' j' m'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle\right|^2=\left|\langle\tau' j'\|T^{(k)}\|\tau j\rangle\right|^2$

（做题人：宁宏新）

证明:由 **Wigner-Eckart** 定理得

$$\langle\tau' j' m'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle=S^{jk}_{mqj'm'}\frac{1}{\sqrt{2j'+1}}\langle\tau' j'\|T^{(k)}\|\tau j\rangle$$

$$\begin{aligned}&\left|\langle\tau' j' m'|T_q^{k}|\tau jm\rangle\right|^2\\&=\langle\tau' j' m'|T_q^{k}|\tau jm\rangle\langle\tau' j' m'|T_q^{k}|\tau jm\rangle^*\\&=S^{jk}_{mqj'm'}{}^*S^{jk}_{mqj'm'}\frac{1}{2j'+1}\left|\langle\tau' j'\|T_q^{k}\|\tau j\rangle\right|^2\end{aligned}$$

因为$\sum_{mq}S^{jk}_{mqj'm'}{}^*S^{jk}_{mqj'm'}=1$有$m'$的个数为$2j'+1$

所以$\sum_q\sum_{m'm}\left|\langle\tau' j' m'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle\right|^2$

$$\begin{aligned}&=\sum_{m'}\sum_{mq}S^{jk}_{mqj'm'}{}^*S^{jk}_{mqj'm'}\frac{1}{2j'+1}\left|\langle\tau' j'\|T_q^{k}\|\tau j\rangle\right|^2\\&=1\times(2j'+1)\frac{1}{2j'+1}\left|\langle\tau' j'\|T_q^{k}\|\tau j\rangle\right|^2\\&=\left|\langle\tau' j'\|T_q^{k}\|\tau j\rangle\right|^2\end{aligned}$$

#

24.8

24.9

24.10 设 ℓ 和 s 是电子的轨道和自旋量子数，证明在 $s\ell jm$ 表象中有：　（仪双喜）

（1）$\langle s\ell j \| L \| s\ell j\rangle = \sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\dfrac{j(j+1)+\ell(\ell+1)-s(s+1)}{2j(j+1)}$

（2）$\langle s\ell j \| S \| s\ell j\rangle = \sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\dfrac{j(j+1)+s(s+1)-\ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$

证明：(1)，对于　$\langle s\ell j \| L \| s\ell j\rangle$ 有 Wigner—Eckart 定理知，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\frac{\langle s\ell jm \| L \| s\ell jm\rangle}{S} \\
&= \sqrt{j(j+1)(2j+1)}g \\
&= \sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\frac{j(j+1)+\ell(\ell+1)-s(s+1)}{2j(j+1)}
\end{aligned}
$$

(2)，对于　$\langle s\ell j \| S \| s\ell j\rangle$ 有 Wigner—Eckart 定理知

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\frac{\langle s\ell jm \| S \| s\ell jm\rangle}{S} \\
&= \sqrt{j(j+1)(2j+1)}g \\
&= \sqrt{j(j+1)(2j+1)}\,\frac{j(j+1)+s(s+1)-\ell(\ell+1)}{2j(j+1)}
\end{aligned}
$$

及证得。

27.1

练习 27.2 （1）根据（27.9）式，证明完全性关系：

$$\int|\vec{k}\rangle d\vec{k}\langle\vec{k}| = \int|\vec{p}\rangle d\vec{p}\langle\vec{p}| = 1$$

（2） 在 $p\theta\varphi$ 表象和 $k\theta\varphi$ 表象中，有 $|\vec{p}\rangle = |p\rangle|\theta\varphi\rangle, |\vec{k}\rangle = |k\rangle|\theta\varphi\rangle$ 证明当时有：

$\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \hbar^3\langle p'|p\rangle$ （吴汉成）

证：（1） 由（27.9）式可知在位置 x 表象中，有：

$$\langle x|\vec{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}，\ \langle x|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}kx} = \hbar^{\frac{1}{2}}\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle，\ |\vec{k}\rangle = \hbar^{\frac{1}{2}}|\vec{p}\rangle，\ \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

显然有： $\langle\vec{k}| = \hbar^{\frac{1}{2}}\langle\vec{p}|$ ， $d\vec{k} = \dfrac{d\vec{p}}{\hbar}$

$$\therefore\ \int|\vec{k}\rangle d\vec{k}\langle\vec{k}| = \int\hbar^{\frac{1}{2}}|\vec{p}\rangle\frac{d\vec{p}}{\hbar}\hbar^{\frac{1}{2}}\langle\vec{p}|$$

$= \int|\vec{p}\rangle d\vec{p}\langle\vec{p}|$ （完全性）

$= 1$ 得证。

（2）由题意可知在 $p\theta\varphi$ 表象和 $k\theta\varphi$ 表象中，有：

$$|\vec{k}\rangle = \hbar^{\frac{3}{2}}|\vec{p}\rangle，\quad \langle\vec{k}'| = \hbar^{\frac{3}{2}}\langle\vec{p}'|$$

$$\therefore\quad \langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \hbar^{\frac{3}{2}}\langle\vec{p}'|\hbar^{\frac{3}{2}}|\vec{p}\rangle = \hbar^3\langle\vec{p}'|\vec{p}\rangle \text{ 得证}$$

#

27.3

练习 27.4 由（27.34）式推出（27.35）式。 （吴汉成）

解：（27.34）式：$(E_i - H \pm i\varepsilon)|\psi^{\pm}_{\vec{p}_i}\rangle = (E_i - H \pm i\varepsilon)|\vec{k}_i\rangle + V|\vec{k}_i\rangle$

两边除以 $E_i - H \pm i\varepsilon$ 得：

$$|\psi^{\pm}_{\vec{p}_i}\rangle = |\vec{k}_i\rangle + \frac{1}{E_i - H \pm i\varepsilon}V|\vec{k}_i\rangle，\text{得证。}$$

#

练习 27.5 由（27.30）式证明散射态矢量的正交归一性：（吴汉成）

$$\langle\psi^{\pm}_{\vec{P}'}|\psi^{\pm}_{\vec{P}}\rangle = \langle k'|k\rangle = \delta(\vec{k}' - \vec{k})$$

解：已知：算符$V=E_i-H_0\pm i\varepsilon$ ，$V\left|\psi_P^{\pm}\right\rangle=V\left|\vec{k}\right\rangle$。

$$\because\quad \left|\psi_{\vec{p}_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\psi_P^{\pm}\right\rangle$$

$$=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\vec{k}\right\rangle$$

$$=(1+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V)\left|\vec{k}\right\rangle$$

显然得：$\left\langle\psi_{P'}^{\pm}\right|=(1+\frac{1}{E_i-H_0\mp i\varepsilon}V^{+})\left\langle\vec{k}'\right|$

$$\left\langle\psi_{P'}^{\pm}\middle|\psi_P^{\pm}\right\rangle=(1+\frac{1}{E_i-H_0\mp i\varepsilon}V^{+})\left\langle\vec{k}'\right|\ (1+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V)\left|\vec{k}\right\rangle$$

$$=(1+\frac{1}{E_i-H_0\mp i\varepsilon}V^{+})(1+\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}V)\left\langle\vec{k}'\middle|\vec{k}\right\rangle$$

$$=(\frac{E_i-H_0+1\mp i\varepsilon}{E_i-H_0\mp i\varepsilon})(\frac{E_i-H_0+1\pm i\varepsilon}{E_i-H_0\pm i\varepsilon})V^{+}V\left\langle\vec{k}'\middle|\vec{k}\right\rangle\quad（\because\ V^{+}V=1）$$

$$=[\frac{(E_i-H_0+1)^2+\varepsilon^2}{(E_i-H_0)^2+\varepsilon^2}]\left\langle\vec{k}'\middle|\vec{k}\right\rangle\quad（\because\ E_i>>1）$$

$$=\left\langle\vec{k}'\middle|\vec{k}\right\rangle$$

#

27.6

27.7

练习 27.8　讨论（27.30）式中$\left|\psi_{P_i}^{\pm}\right\rangle$的时间反演态，证明：（吴汉成）

$$T_0\left|\psi_{P_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\psi_{-P_i}^{\mp}\right\rangle$$

证明：已知：$V\left|\psi_P^{\pm}\right\rangle=V\left|\vec{k}\right\rangle$，$\left|\vec{k}\right\rangle=\hbar^{3/2}\left|\vec{p}\right\rangle$则得：

$$\left|\psi_{\vec{p}_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\psi_P^{\pm}\right\rangle$$

$$=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\vec{k}\right\rangle$$

$$=\hbar^{3/2}\left|\vec{P}_i\right\rangle+\frac{\hbar^{3/2}}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\vec{P}_i\right\rangle$$

等价$\propto F(\vec{P}_i)$　（F 为函数）

$\because$　$T_0 P_i T_{-1}^0=-\vec{P}_i$　，$\therefore$　$T_0 F(\vec{P}_i)=F^*(-\vec{P}_i)$

显然得：　$T_0\left|\psi_{\vec{P}_i}^{\pm}\right\rangle=T_0(\hbar^{3/2}\left|\vec{P}_i\right\rangle+\frac{\hbar^{3/2}}{E_i-H_0\pm i\varepsilon}V\left|\vec{P}_i\right\rangle)$

$$=\hbar^{3/2}\left|-\vec{P}_i\right\rangle+\frac{\hbar^{3/2}}{E_i-H_0\mp i\varepsilon}V\left|-\vec{P}_i\right\rangle=\left|\psi_{-\vec{P}_i}^{\mp}\right\rangle$$

即：　$T_0\left|\psi_{P_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\psi_{-P_i}^{\mp}\right\rangle$　　得证。

#

练习 27.8　讨论（27.30）式$\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle$的时间反演态，证明：

$$T_0\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle \qquad \text{（刘超）}$$

证明：讨论$\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle$的时间反演态，这一变换的结果是时间变号，

并且函数求复共轭。我们知道动量与时间有关，$\left|\vec{k}\right\rangle$也与时间有关

又因为

$$\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle$$

则$\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle$的时间反演态为

$$\left(\left|-\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\mp\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle\right)=\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle$$

因为T_0为时间反演算符，由时间算符的定义得

$$T_0\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle=T_0\left(\left|\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle\right)$$

$$=\left(\left|-\vec{k}\right\rangle+\frac{1}{E_i-H_0\mp\mathrm{i}\varepsilon}V\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle\right)$$

$$=\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle$$

即证得

$$T_0\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle=\left|\psi_{-p_i}^{\mp}\right\rangle$$

27.9　证明（27.39）式 $f(\theta,\varphi)=-\frac{4\pi^2m}{\hbar^2}\left\langle\vec{k}_f\right|V\left|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle$ 可以写成　　（刘超）

$$f(\theta,\varphi)=-\frac{4\pi^2m}{\hbar^2}\left\langle\psi_{p_f}^{-}\right|V\left|\vec{k}_i\right\rangle$$

证明：因为 $\left|\psi_{pf_i}^{-}\right\rangle=\left|k_f\right\rangle+\frac{1}{E_i-H-i\varepsilon}V\left|k_f\right\rangle$

所以 $\left\langle\psi_{pf}^{-}\right|=\left\langle k_f\right|+\frac{1}{E_i-H+i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V$

用 $V\left|k_i\right\rangle$ 作用得　$\left\langle\psi_{pf}^{-}\right|V\left|k_i\right\rangle=\left\langle k_f\right|V\left|k_i\right\rangle+\frac{1}{E_i-H+i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V^2\left|k_i\right\rangle$

同理有 $\left|\psi_{pi_i}^{+}\right\rangle=\left|k_i\right\rangle+\frac{1}{E_i-H+i\varepsilon}V\left|k_i\right\rangle$

$$\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{pi}^{+}\right\rangle=\left\langle k_f\right|V\left|k_i\right\rangle+\frac{1}{E_i-H+i\varepsilon}\left\langle k_{fi}\right|V^2\left|k_i\right\rangle$$

所以　$\left\langle\psi_{pf}^{-}\right|V\left|k_i\right\rangle=\left\langle k_i\right|V\left|\psi_{pi}^{=}\right\rangle$

即证得：$f(\theta,\varphi)=-\frac{4\pi^2m}{\hbar^2}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{pi}^{+}\right\rangle$ 可以写成

$$f(\theta,\varphi)=-\frac{4\pi^2m}{\hbar^2}\left\langle\psi_{pf}^{-}\right|V\left|k_i\right\rangle$$

27.10 证明：$T^{\pm}G_0^{\pm}=VG^{\pm}$。　　（刘超）

证明：已知 LS 方程为

$$\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle=\left|k\right\rangle+G_0^{(\pm)}V\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle \qquad (1)$$

其中零级格林算符的定义是

$$G_0^{(\pm)} = \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \qquad (2)$$

用 $E - H_0 \pm i\varepsilon$ 左乘（1）的两边得

$$(E - H_0 \pm i\varepsilon)\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = (E - H_0 \pm i\varepsilon)\left|k\right\rangle + V\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle \qquad (3)$$

由于 $H_0 = H - V$,故上式可写为

$$(E - H_0 \pm i\varepsilon)\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = (E - H \pm i\varepsilon)\left|k\right\rangle + V\left|k\right\rangle \qquad (4)$$

利用格林算符的定义

$$G^{(\pm)} = \frac{1}{E - H \ \pm i\varepsilon} \qquad (5)$$

可以把（4）式改写成

$$\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = \left|k\right\rangle + G^{(\pm)}V\left|k\right\rangle \qquad (6)$$

跃迁算符的定义为

$$T^{(\pm)}\left|k\right\rangle = V\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle \qquad (7)$$

将其代入（1）得

$$\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = \left|k\right\rangle + G_0^{(\pm)}V\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = \left|k\right\rangle + G_0^{(\pm)}T^{(\pm)}\left|k\right\rangle \qquad (8)$$

比较（8）和（6）得到

$$G_0^{(\pm)}T^{(\pm)} = G^{(\pm)}V \qquad (9)$$

由零级格林算符的定义可知：

$$(G_0^{(\pm)})^{+} = G_0^{(\mp)} \qquad (G^{(\pm)})^{+} = G^{(\mp)} \qquad (10)$$

从跃迁算符的定义（7）出发，利用 LS 方程（6）得到

$$T^{(\pm)}\left|k\right\rangle = V\left|\psi_k^{(\pm)}\right\rangle = V\left[\left|k\right\rangle + G^{(\pm)}V\left|k\right\rangle\right] = \left[V + VG^{(\pm)}V\right]\left|k\right\rangle \qquad (11)$$

此即

$$T^{(\pm)} = V + VG^{(\pm)}V \qquad (12)$$

由（10）可知

$$(T^{(\pm)})^{+} = T^{(\mp)} \qquad (13)$$

将（9）两端取共轭，并利用（10）与（13）的结果，得到

$$T^{\pm}G_0^{\pm} = VG^{\pm}$$

#

练习 27.11. 证明（27.58）式. （何贤文）

证明：　　利用式（27.30）$\left|\psi_p^{\pm}\right\rangle = \left|k\right\rangle + \dfrac{1}{E_i - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_p^{\pm}\right\rangle$

式（27.35）
$$\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle = \left|k_i\right\rangle + \frac{1}{E_i - H \pm i\varepsilon} V \left|k_i\right\rangle$$
$$\left\langle\psi_{p_i}^{\pm}\right| = \left\langle k_i\right| + \left\langle k_i\right| \frac{1}{E_i - H \mp i\varepsilon} V$$

得到

$$S_{fi} = \left\langle k_f\right|S\left|k_i\right\rangle = \left\langle k_f\right|(\Omega^-)^+\Omega^+\left|k_i\right\rangle = \left\langle\psi_{p_f}^-\middle|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= [\left\langle k_f\right| + \left\langle k_f\right|V\frac{1}{E_f - H + i\varepsilon}]\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \left\langle k_f\middle|\psi_{p_i}^+\right\rangle + \frac{1}{E_f - H + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$

由于格林算符作用在H的本征矢量$\left|\psi^{\pm}\right\rangle$，所以有

$$S_{fi} = \left\langle k_f\middle|\psi_{p_i}^+\right\rangle + \frac{1}{E_f - E_i + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$

由式（27.30）

$$S_{fi} = \left\langle k_f\right|[\left|k_i\right\rangle + \frac{1}{E_i - H + i\varepsilon}V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle] + \frac{1}{E_f - E_i + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \left\langle k_f\right|[\left|k_i\right\rangle + \frac{1}{E_i - E_f + i\varepsilon}V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle] + \frac{1}{E_f - E_i + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \left\langle k_f\middle|k_i\right\rangle + \frac{1}{E_i - E_f + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle + \frac{1}{E_f - E_i + i\varepsilon}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \delta_{fi} + \left(\frac{1}{E_i - E_f + i\varepsilon} + \frac{1}{E_f - E_i + i\varepsilon}\right)\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \delta_{fi} + \left(\frac{1}{E_i - E_f + i\varepsilon} + \frac{1}{-(E_i - E_f) + i\varepsilon}\right)\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$
$$= \delta_{fi} - \frac{2i\varepsilon}{(E_i - E_f)^2 + \varepsilon^2}\left\langle k_f\right|V\left|\psi_{p_i}^+\right\rangle$$

由式（27.40）

$$T^{\pm}\left|k_i\right\rangle = V\left|\psi_{p_i}^{\pm}\right\rangle$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{2i\varepsilon}{(E_i - E_f)^2 + \varepsilon^2}\left\langle k_f\right|T^+\left|k_i\right\rangle$$

证毕.

练习 27.12.证明下列关系成立：　　（何贤文）

（1）. $H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}H_0$

（2）. $(\Omega^{\pm})^{+}H = H_0(\Omega^{\pm})^{+}$

（3）. $(\Omega^{\pm})^{+}B = 0$

（4）. $[S, H_0] = 0$

证明：

(1)..哈密顿算符$H = H_0 + V$

利用摩勒算符的定义

$$\Omega^{\pm}|k\rangle = |\psi_{p_i}^{\pm}\rangle$$

用哈密顿算符左乘上式两端，得

$$H\Omega^{\pm}|k\rangle = H|\psi_{p_i}^{\pm}\rangle = E_0|\psi_{p_i}^{\pm}\rangle$$

而

$$\Omega^{\pm}H_0|k\rangle = E_0\Omega^{\pm}|k\rangle$$

则有

$$\Omega^{\pm}H_0|k\rangle = E_0|\psi_{p_i}^{\pm}\rangle$$

即

$$H\Omega^{\pm}|k\rangle = \Omega^{\pm}H_0|k\rangle$$

由$|k\rangle$的任意性得

$$H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}H_0$$

(2).由上面证明知

$$H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}H_0$$

对上式两端取共轭，得

$$(\Omega^{\pm})^{+}H^{+} = H_0{}^{+}(\Omega^{\pm})^{+}$$

由哈密顿算符的厄米性质，知

$$(\Omega^{\pm})^{+}H = H_0(\Omega^{\pm})^{+}$$

.(3).由式子（27.53）

$$\Omega^{\pm}(\Omega^{\pm})^{+} = 1 - B$$

利用$(\Omega^{\pm})^{+}\Omega^{\pm} = 1$,在上式两端左乘$(\Omega^{\pm})^{+}$得到

$$(\Omega^{\pm})^{+}\Omega^{\pm}(\Omega^{\pm})^{+} = (\Omega^{\pm})^{+} - (\Omega^{\pm})^{+}B$$

$$(\Omega^{\pm})^{+} = (\Omega^{\pm})^{+} - (\Omega^{\pm})^{+}B$$

$$(\Omega^{\pm})^{+}B = 0$$

(4).利用上述证明结论以及$S=(\Omega^-)^+\Omega^+$可得到

$$
\begin{aligned}
[S,H_0]=SH_0-H_0S&=(\Omega^-)^+\Omega^+H_0-H_0(\Omega^-)^+\Omega^+\\
&=(\Omega^-)^+(\Omega^+H_0)-(H_0(\Omega^-)^+)\Omega^+\\
&=(\Omega^-)^+H\Omega^+-(\Omega^-)^+H\Omega^+\\
&=0
\end{aligned}
$$

证毕.

练习 27.13 定义S'为 （杜花伟）

$$S'=\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+ \tag{27.64}$$

证明：（1） $\left[S',H\right]=0$ （27.65）

(2) 当H不含束缚本征态时有

$$\left\langle\psi_{p'}^{\pm}\middle|S'\middle|\psi_p^{\pm}\right\rangle=\left\langle\psi_{p'}^{\pm}\middle|\psi_p^{\pm}\right\rangle=\left\langle\vec{k}'\middle|S\middle|\vec{k}\right\rangle \tag{27.66}$$

证明:(1) 由关系式

$$H\Omega^{\pm}=\Omega^{\pm}H_0\qquad\left(\Omega^{\pm}\right)^+H=H_0\left(\Omega^{\pm}\right)^+$$

得

$$
\begin{aligned}
\left[S',H\right]=S'H-HS'&=\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+H-H\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+\\
&=\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+H-\Omega^+H_0\left(\Omega^-\right)^+\\
&=\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+H-\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+H\\
&=0
\end{aligned}
$$

（2）当H不含束缚本征态时，摩勒算符Ω^+和Ω^-是幺正算符.

根据

$$\Omega^+=\sum_k\left|\psi_p^+\right\rangle\left\langle\vec{k}\right|\qquad\Omega^-=\sum_k\left|\psi_p^-\right\rangle\left\langle\vec{k}\right|$$

可知

$$
\begin{aligned}
\left\langle\psi_{p'}^{\pm}\middle|S'\middle|\psi_p^{\pm}\right\rangle&=\left\langle\psi_{p'}^{\pm}\middle|\Omega^+\left(\Omega^-\right)^+\middle|\psi_p^{\pm}\right\rangle\\
&=\sum_{k'}\sum_k\left\langle\psi_{p'}^{\pm}\middle|\psi_{p'}^{+}\right\rangle\left\langle\vec{k}'\middle|\vec{k}\right\rangle\left\langle\psi_p^-\middle|\psi_p^{\pm}\right\rangle\\
&=\left\langle\psi_{p'}^{-}\middle|\psi_p^{+}\right\rangle\\
&=\left\langle\vec{k}'\middle|\left(\Omega^-\right)^+\Omega^+\middle|\vec{k}\right\rangle\\
&=\left\langle\vec{k}'\middle|S\middle|\vec{k}\right\rangle
\end{aligned}
$$

#

27.14

27.15　求自旋 1/2 的粒子在势$V(r)=\begin{cases}V_0, r>a\\ 0, r<a\end{cases}$中的微分截面及总截面。（董廷旭）

解：　系统的哈密顿为$H=\dfrac{p^2}{2m}+V_0+V'(r)\vec{S}\cdot\vec{L}$ 当 r<a 时当 r>a 时 $H=\dfrac{p^2}{2m}$

$$V'(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

因为$V(r)=\begin{cases}V_0, r<a\\ 0, r>a\end{cases}$所以$V'=0$

$$H=\begin{cases}\dfrac{p^2}{2m}+V_0, r<a\\ \dfrac{p^2}{2m}, r>a\end{cases}$$

设入射粒子的能量为$E=\dfrac{p^2}{2m}$，入射方向为 Z 方向，粒子的自旋在入射方向上的分量

$S_z=m\hbar$ 则入射的态矢量为 $|k_i m_i\rangle$ 取一级波恩近似

$$\frac{d\delta}{d\Omega}=|f(\theta,\varphi)|^2=\frac{(2\pi)^4m^2}{\hbar^4}\left|\langle\vec{k}_f m'_f|V|\vec{k}_i m_i\rangle\right|$$

$$=\frac{m^2V_0^{\ 2}}{(2\pi)^2\hbar^4}\left|\langle m'_f|m_i\rangle\right|^2\frac{4}{q^2\cos^2\theta}\left[1-\cos(qa\cos\theta')\right]^2$$

式中$q=2k\sin\dfrac{\theta}{2}$　　θ是k_i与k_f的夹角，θ'是对$\vec{r}$积分时取$\vec{q}$为极轴方向时与$\vec{r}$夹角

$$\langle m'_f|m_i\rangle=\left(D_{mm'_f}^{\ 1/2}\right)^*=\begin{pmatrix}e^{i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ -e^{i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

总散射截面$\delta=\int d\delta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta|f(\theta,\varphi)|^2$

#

练习 28.1　证明:　（杜花伟）

$$\left[G_0^+(t)\right]^+ = G_0^-(-t)$$

证明: 根据公式(28.4)

$$G_0^\pm(t-t') = \mp\frac{i}{\hbar}\theta(\pm t \mp t')e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')H_0}$$

可知

$$G_0^+(t) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t)e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}$$

$$G_0^-(-t) = +\frac{i}{\hbar}\theta(t)e^{-\frac{i}{\hbar}(-t)H_0}$$

则

$$\left[G_0^+(t)\right]^+ = \left[-\frac{i}{\hbar}\theta(t)e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}\right]^+ = \frac{i}{\hbar}\theta(t)e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\theta(t)e^{-\frac{i}{\hbar}(-t)H_0} = G_0^-(-t)$$

#

28.2 证明下列二式成立:（刘强）

$$G^\pm(t-t') = G_0^\pm(t-t') + \int_{-\infty}^{\infty} G_0^\pm(t-t'')VG^\pm(t-t')dt''$$

$$G^\pm(t-t') = G_0^\pm(t-t') + \int_{-\infty}^{\infty} G^\pm(t-t'')VG_0^\pm(t''-t')dt''$$

证明：因为：

$$G^\pm(t-t') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} G^\pm(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

$$G_0^\pm(t-t') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} G_0^\pm(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

又因为:

$$G^\pm(E) = G_0^\pm(E) + G_0^\pm(E)VG^\pm(E)$$

即有

$$G_0^{\pm}(t-t')=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G_0^{\pm}(E)+G_0^{\pm}(E)VG^{\pm}(E)\right]e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE+\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(E)VG^{\pm}(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

$$=G_0^{\pm}(t-t')+\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(E)VG^{\pm}(E)e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')}dE$$

$$=G_0^{\pm}(t-t')+\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(t-t'')VG^{\pm}(t''-t')dt''$$

又因为

$$G^{\pm}(E)=G_0^{\pm}(E)+G_0^{\pm}(E)VG^{\pm}(E)=G_0^{\pm}(E)+G^{\pm}(E)VG_0^{\pm}(E)$$

同理可证得

$$G^{\pm}(t-t')=G_0^{\pm}(t-t')+\int_{-\infty}^{+\infty}G^{\pm}(t-t'')VG_0^{\pm}(t''-t')dt''$$

综上所述

$$G^{\pm}(t-t')=G_0^{\pm}(t-t')+\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^{\pm}(t-t'')VG^{\pm}(t''-t')dt''$$
$$G^{\pm}(t-t')=G_0^{\pm}(t-t')+\int_{-\infty}^{+\infty}G^{\pm}(t-t'')VG_0^{\pm}(t''-t')dt''$$

两式成立。

#

28.3 利用（28.32）和（28.33）二式证明（27.51）式，即 $(\Omega^{\pm})^{+}\Omega^{\pm}=1$

证明： （董廷旭）

因为$\Omega^{+}\left|\psi_{p_i}^{in}\right\rangle=\Omega^{+}\left|\vec{k}_i\right\rangle=\left|\psi_{p_i}{}^{+}\right\rangle$

所以$\Omega^{+}=\sum_{k_i}\left|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\left\langle\vec{k}_i\right|$

$(\Omega^{+})^{+}=\sum_{k_i}\left|\vec{k}_i\right\rangle\left\langle\psi_{p_i}^{+}\right|$则$(\Omega^{+})^{+}\Omega^{+}=\sum_{k_i}\sum_{k_i}\left|\vec{k}_i\right\rangle\left\langle\psi_{p_i}^{+}\right\|\psi_{p_i}^{+}\left\rangle\left\langle\vec{k}_i\right|=1\right.$

又因为$\Omega^{-}\left|\psi_{p_i}^{out}\right\rangle=\Omega^{-}\left|\vec{k}_f\right\rangle=\left|\psi_{p_f}^{-}\right\rangle$

所以$\Omega^{-}=\sum_{k_f}\left|\psi_{p_f}^{-}\right\rangle\left\langle\vec{k}_f\right|$

$(\Omega^{-})^{+}=\sum_{k_f}\left|\vec{k}_f\right\rangle\left\langle\psi_{p_f}^{-}\right|$

则$(\Omega^{-})^{+}\Omega^{-}=\sum_{k_f}\sum_{k_f}\left|\vec{k}_f\right\rangle\left\langle\psi_{p_f}^{-}\right\|\psi_{p_f}^{-}\left\rangle\left\langle\vec{k}_f\right|=1\right.$

综上可得:$(\Omega^{\pm})^{+}\Omega^{\pm}=1$

#

练习 28.4　从(28.29)和(28.30)二式出发,证明(27.60)式,即　（杜花伟）

$$H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm} H_0$$

提示　可先证明

$$e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm} e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}$$

证明: 摩勒算符的定义为:

$$\Omega^{\pm}\left|\vec{k}\right\rangle = \left|\psi_k^{\pm}\right\rangle$$

用哈密顿算符从左作用上式两端,得

$$H\Omega^{\pm}\left|\vec{k}\right\rangle = H\left|\psi_k^{\pm}\right\rangle = E_k\left|\psi_k^{\pm}\right\rangle$$

$\left|\psi_k^{+}\right\rangle$和$\left|\psi_k^{-}\right\rangle$都是$H$的本征态, 则有

$$HU(0,\pm\infty) = U(0,\pm\infty)H_0$$

即

$$HU(0,\pm\infty)U_0(\pm\infty,0) = U(0,\pm\infty)H_0U_0(\pm\infty,0)$$

$$= U(0,\pm\infty)U_0(\pm\infty,0)H_0$$

因(28.29)和(28.30)二式可写成

$$\Omega^{+} = U(0,-\infty)U_0(+\infty,0)$$

$$\Omega^{-} = U(0,+\infty)U_0(+\infty,0)$$

故(27.60)式得证, 即$H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm} H_0$.

#

28.5

28.6　证明微观可逆性定理：$\begin{matrix}\left\langle \vec{k}'\right|\hat{S}\left|\vec{k}\right\rangle = \left\langle -\vec{k}\right|\hat{S}\left|-\vec{k}'\right\rangle \\ \left\langle \vec{k}'\right|\hat{T}\left|\vec{k}\right\rangle = \left\langle -\vec{k}\right|\hat{T}\left|-\vec{k}'\right\rangle\end{matrix}$并解释上式的意义。

证明：　（董廷旭）

设 $\left|\vec{k}_i\right\rangle\left|\vec{k}\right\rangle$ 分 别 为 指 定 的 末 态 和 初 态 ， 对 于 弹 性 散 射 来 说

$\vec{p}_f$的大小与$\vec{p}_i$一样的。所以$\vec{k}'$的大小等于$\vec{k}$的大小

则$\langle \vec{k}'|\hat{S}|\vec{k}\rangle$与$\langle \vec{k}|\hat{S}|\vec{k}'\rangle$和$\langle \vec{k}'|\hat{T}|\vec{k}\rangle$与$\langle \vec{k}|\hat{T}|\vec{k}'\rangle$每一个

相应的矩阵元的大小是一样的。同样

$\langle \vec{k}'|\hat{S}|\vec{k}\rangle = \langle -\vec{k}|\hat{S}|-\vec{k}'\rangle$

$\langle \vec{k}'|\hat{T}|\vec{k}\rangle = \langle -\vec{k}|\hat{T}|-\vec{k}'\rangle$

意义：对于粒子散射的整个过程，让粒子反向运动，末态变成初态，则改变后的散射的末态与改变前的初态概率幅相等。

#

练习 28.7　试从(28.41)式直接证明(28.56)式.　（杜花伟）

提示　$\langle f|S|i\rangle = \langle \psi_f^-|\psi_i^+\rangle = \langle \psi_f^+|\psi_i^+\rangle + \left(\langle \psi_f^-| - \langle \psi_f^+|\right)|\psi_i^+\rangle$

证明: 令$\varepsilon(t)=0$，当$t>0$；$\varepsilon(t)=1$，当$t<0$.

利用$\varepsilon(t)e^{iHt} = \dfrac{i}{2\pi}\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dE \dfrac{e^{iEt}}{E-H+i\varepsilon}$

有

$$\Omega^+ = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{i}{\hbar}Ht} V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} dt = 1 + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{E-H+i\varepsilon} V dE$$

故

$$\Omega^+(E) = 1 + \frac{1}{E-H+i\varepsilon}V$$

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle \vec{k}_f|S|\vec{k}_i\rangle = \langle \psi_f^-|\psi_i^+\rangle \\
&= \langle \psi_f^+|\psi_i^+\rangle + \left(\langle \psi_f^-| - \langle \psi_f^+|\right)|\psi_i^+\rangle \\
&= \langle \vec{k}_f|\vec{k}_i\rangle + \left(\langle \psi_f^-| - \langle \psi_f^+|\right)|\psi_i^+\rangle \\
&= \delta_{fi} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle \vec{k}_f|V_f\left(\frac{1}{E_f-H+i\varepsilon} - \frac{1}{E_f-H-i\varepsilon}\right)|\psi_i^+\rangle \\
&= \delta_{fi} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{E_f-E_i+i\varepsilon} - \frac{1}{E_f-E_i-i\varepsilon}\right)\langle \vec{k}_f|V_f|\psi_i^+\rangle \\
&= \delta_{fi} - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2i\varepsilon}{(E_f-E_i)^2+\varepsilon^2}\langle \vec{k}_f|V_f|\psi_i^+\rangle \\
&= \delta_{fi} - \frac{2i\varepsilon}{(E_f-E_i)^2+\varepsilon^2}\langle \vec{k}_f|T|\vec{k}_i\rangle
\end{aligned}$$

再利用 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\pi\delta(x)$

得

$$S_{fi}=\delta_{fi}-2\pi i\delta(E_f-E_i)T_{fi}$$

#

28.8 证明在相互作用绘景中默勒算符 $\Omega^{\pm}$ 为 （刘强）

$$\Omega^{\pm I}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}$$

将此式直接对 t 求导证明：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Omega^{\pm I}(t)=V^I(t)\Omega^{\pm I}(t)$$

证明：因为在相互作用绘景中默勒算符 $\Omega^{\pm}$ 为

$$\Omega^{\pm I}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm} \quad（1）$$

又因为

$$\Omega^{\pm}=\lim_{t\to\mp\infty}e^{\frac{i}{\hbar}tH}e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}$$

可见，$\Omega^{\pm}$ 是两个含时的演化算符乘积的极限

所以 $\Omega^{\pm}$ 是一个不含时的幺正或等距算符。

将（1）式对时间求导得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega^{\pm I}(t)=\frac{i}{\hbar}H_0e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}-\frac{i}{\hbar}He^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Omega^{\pm I}(t)=-H_0e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}+He^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}$$

$$=(H-H_0)e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\Omega^{\pm}=(H_0-H)\Omega^{\pm I}(t)$$

$$=V^I(t)\Omega^{\pm I}(t)$$

即得证

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Omega^{\pm I}(t)=V^I(t)\Omega^{\pm I}(t)$$

#

28.9 用相互作用绘景证明：$\Omega^{+}=U_I(0,-\infty)=1+\dfrac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}dt'$ 并与练习 28.5 第(2)问中的公式比较。

证明： （董廷旭）

$$U_s(t,t')=e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')H}$$

$$U_I(t,t')=e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}U_s(t,t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}=e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')H}e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}$$

则$U_I(0,t')=e^{\frac{i}{\hbar}t'H}e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}$

$$\frac{\partial U_I(0,t')}{\partial t'}=\frac{i}{\hbar}He^{\frac{i}{\hbar}t'H}e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}-\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}H_0e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}=e^{\frac{i}{\hbar}t'H}\frac{i}{\hbar}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}$$

积分：$U_I(0,t')=\int_0^{t'}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}\frac{i}{\hbar}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}dt'+c$

c为积分常数，又因为$U_I(t,t)=1$所以$c=1$

$$U_I(0,-\infty)=1+\int_0^{-\infty}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}\frac{i}{\hbar}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}dt'=1-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}\frac{i}{\hbar}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}dt'$$

$$=1+\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{i}{\hbar}t'H}V(t')e^{-\frac{i}{\hbar}t'H_0}dt'$$

把式中的t'用t_1替换就得证。

与 28.5 题的公式比较，可得出两者是一样，与绘景无关。
#

练习 28.10 取一个包含散射中心的大封闭曲面,在散射进行过程中一个平面波从左边进来,从右边出去,同时又有一个球面波出去.那么散射现象不是违反了概率守恒的原则了吗?
（杜花伟）
答: 此散射现象没有违反概率守恒原则.

散射的过程，S_{fi} 是以动量 $\vec{P}_i$ 入射的粒子散射后成为指定动量 $\vec{P}_f$ 的概率幅. 入射波$\left|\vec{P}_i\right\rangle$演化到$t=0$成为一个平面波$\left|\vec{P}_i\right\rangle$加一个复杂的近处结构和一个远处的向外球面波,在远处是把一个向外的球面波展开成为不同方向的平面波和向内的球面波.展开后让时间继续从$t=0$前进,到$t=+\infty$时,近处的复杂结构和向内的球面波全部消失,只剩下一些向不同方向传播的平面波的叠加.可见从$t=0$到$t=+\infty$的演化,远处向外的球面波按不同方向的平面波的展开一点都没有变,变化的是近处的复杂结构.
#

28.11

28.12

将w_{fi}写成

$w_{fi}=\frac{d}{dt}\lim_{t'\to-\infty}W_{fi}(t,t')=\frac{d}{dt}\left|(\vec{k}_f\left|U_I(t,0)U_I(0,-\infty)\right|k_i)\right|^2$ 直接对时间求导，得出（28.65）式。

解：（董廷旭）

$$w_{fi}=\frac{d}{dt}\lim_{t'\to-\infty}W_{fi}\left(t,t'\right)=\frac{d}{dt}\left|\left(\vec{k}_f\left|U_I\left(t,0\right)U_I\left(0,-\infty\right)\right|k_i\right)\right|^2$$

$$=\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\frac{d}{dt}\left|\left\langle\vec{k}_f\left|U_I\left(t,0\right)\right|\psi_{p_i}{}^{+}\right\rangle\right|^2$$

$$=\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\left\langle\vec{k}_f\left|\frac{\partial U_I\left(t,0\right)}{\partial t}\right|\psi_{p_i}{}^{+}\right\rangle\left\langle\vec{k}_f\left|U_I\left(t,0\right)\right|\psi_{p_i}{}^{+}\right\rangle^*+\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}c.c.$$

$(c.c.$表示与前一项复共轭的项$)$

$$U_I\left(t,0\right)=\exp\left(\frac{iH_ft}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-iH_0t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{\partial U_I\left(t,0\right)}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}\exp\left(\frac{iH_ft}{\hbar}\right)V_f\exp\left(\frac{-iH_0t}{\hbar}\right)$$

因为$\left|\vec{k}_f\right\rangle$和$\left|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle$分别是$H_f$和$H$的本征态，$E_i=E_f$

故$w_{fi}=\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\left\langle\vec{k}_f\left|\psi_{p_i}^{+}\right.\right\rangle^*+\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}c.c.$

$$\left\langle\vec{k}_f\left|\psi_{p_i}^{+}\right.\right\rangle=\left\langle\psi_{p_f}^{+}\left|\psi_{p_i}^{+}\right.\right\rangle+\left\langle\vec{k}_f-\psi_{p_f}^{+}\left|\psi_{p_i}^{+}\right.\right\rangle$$

$$=\delta_{fi}-\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\frac{1}{E_f-H_0-i\varepsilon}\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle$$

$$=\delta_{fi}-\frac{1}{E_f-H_0-i\varepsilon}\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle$$

故$w_{fi}=\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\left[\delta_{fi}-\frac{1}{E_f-H_0-i\varepsilon}\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle^*\right]+\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}c.c.$

$$=\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}\left[\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\right]\delta_{fi}-\frac{i}{\hbar}\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}\left|\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\right|^2\left(\frac{1}{E_f-E_i-i\varepsilon}-\frac{1}{E_f-E_i+i\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{2}{\hbar}\frac{\left(2\pi\right)^6}{V^2}Im\left\langle\vec{k}_f\left|V_f\right|\psi_{p_i}^{+}\right\rangle\delta_{fi}+\frac{\left(2\pi\right)^7}{V^2\hbar}\delta\left(E_f-E_i\right)\left|T_{fi}\right|^2$$

最后一步利用了$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\left(E_f-E_i\right)^2+\varepsilon^2}=\pi\delta\left(E_f-E_i\right)$

当$\left|\vec{k}_f\right\rangle\neq\left|\vec{k}_i\right\rangle$时$\delta_{fi}=0$

所以$w_{fi}=\frac{\left(2\pi\right)^7}{V^2\hbar}\delta\left(E_f-E_i\right)\left|T_{fi}\right|^2$

#

30.1 两个全同粒子构成一个系统，讨论它的自旋希尔伯特空间。证明若粒子的自旋为s，则对称希尔伯特空间与反对称希尔伯特空间维数之比为$(s+1)/s$。（韩丽芳）

证明：该系统有两个全同粒子构成，下面讨论它的自旋希尔伯特空间。χ代表单粒子的一组完备自旋物理量，$\chi^{\alpha},\chi^{\beta},\cdots$代表这组物理量各组不同的本征值。则整个系统的希尔伯特空间的基失为

$$\left|\chi^{\alpha}\right\rangle_1\left|\chi^{\beta}\right\rangle_2$$

则对称化基失为

$$\left|2;\chi^{\alpha}\chi^{\beta}\right\rangle_S=\frac{1}{2}\sum_P P\left|\chi^{\alpha}\right\rangle_1\left|\chi^{\beta}\right\rangle_2$$

反对称化的基失为

$$\left|2;\chi^{\alpha}\chi^{\beta}\right\rangle_A=\frac{1}{2}\sum_P(-)^P P\left|\chi^{\alpha}\right\rangle_1\left|\chi^{\beta}\right\rangle_2$$

若自旋为s，对于对称化的基失，

若$\left|\chi^{\alpha}\right\rangle=\left|\chi^{\beta}\right\rangle$，则有$(2s+1)$个基失；

若$\left|\chi^{\alpha}\right\rangle\neq\left|\chi^{\beta}\right\rangle$，则有$C_{2s+1}^2=(2s+1)s$个基失。

对于反对称化的基失$\left|\chi^{\alpha}\right\rangle\neq\left|\chi^{\beta}\right\rangle$，则有$C_{2s+1}^2=(2s+1)s$个基失。

则

$$\frac{(2s+1)+s(2s+1)}{s(2s+1)}=\frac{s+1}{s}$$

即证得对称希尔伯特空间与反对称希尔伯特空间维数之比为$(s+1)/s$。

#

30.2 两个自旋为1的粒子构成全同粒子系统。若其单粒子自旋态矢量$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$和$|\gamma\rangle$的$S_z$量子数分别为1,0和$-1$。试在其自旋希尔伯特空间中具体写出系统的全部对称基失和反对称基失，并给出每个基失的总自旋角动量J^2和J_z之值。（韩丽芳）

证明：对于两个粒子构成的系统

对称化基失为

$$\left|2;\chi^{\alpha}\chi^{\beta}\right\rangle_S=\frac{1}{2}\sum_P P\left|\chi^{\alpha}\right\rangle_1\left|\chi^{\beta}\right\rangle_2$$

反对称化的基失为

$$\left|2;\chi^{\alpha}\chi^{\beta}\right\rangle_A=\frac{1}{2}\sum_P(-)^P P\left|\chi^{\alpha}\right\rangle_1\left|\chi^{\beta}\right\rangle_2$$

因为单粒子自旋态矢量$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$和$|\gamma\rangle$，则该系统的希尔伯特空间的全部基失为

对称化基失：

$|2;\alpha\alpha\rangle_S=|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2$　　$S_z=1,1$　$J^2=6\hbar^2$　$J_z=2\hbar$

$|2;\beta\beta\rangle_S=|\beta\rangle_1|\beta\rangle_2$　　$S_z=0,0$　$J^2=0$　$J_z=0$

$|2;\gamma\gamma\rangle_S=|\gamma\rangle_1|\gamma\rangle_2$　　$S_z=-1,-1$　$J^2=2\hbar^2$　$J_z=-2\hbar$

$|2;\alpha\beta\rangle_S=\frac{1}{2}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2+|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$　　$S_z=1,0$　$J^2=2\hbar^2$　$J_z=\hbar$

$|2;\alpha\gamma\rangle_S=\frac{1}{2}\left(|\alpha\rangle_1|\gamma\rangle_2+|\gamma\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$　　$S_z=1,-1$　$J^2=0$　$J_z=0$

$|2;\beta\gamma\rangle_S=\frac{1}{2}\left(|\beta\rangle_1|\gamma\rangle_2+|\gamma\rangle_1|\beta\rangle_2\right)$　　$S_z=0,-1$　$J^2=0$　$J_z=-\hbar$

对反称化基失：

$|2;\alpha\beta\rangle_A=\frac{1}{2}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2-|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$　　$S_z=1,0$　$J^2=2\hbar^2$　$J_z=\hbar$

$|2;\alpha\gamma\rangle_A=\frac{1}{2}\left(|\alpha\rangle_1|\gamma\rangle_2-|\gamma\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$　　$S_z=1,-1$　$J^2=0$　$J_z=0$

$|2;\beta\gamma\rangle_A=\frac{1}{2}\left(|\beta\rangle_1|\gamma\rangle_2-|\gamma\rangle_1|\beta\rangle_2\right)$　　$S_z=0,-1$　$J^2=0$　$J_z=-\hbar$

#

练习 30.3 取单电子算符 B 为自旋 S_z，则本征值 $b_1=+\hbar/2, b_2=-\hbar/2$，简写为 $b_1=+,b_2=-$。讨论 5 电子系统的对称自旋态$|\psi\rangle$：（输入人;：王俊美　检阅人 杜花伟）

$$|\psi\rangle=|5;+++++\rangle$$

系统的总自旋算符为$\vec{S}$，

$$\vec{S}=\sum_i\vec{S}_i$$

(1) 求S_-对$|\psi\rangle$的作用，即求$S_-^n|\psi\rangle=|\psi_n\rangle, n=1,2,3\cdots,6,$ 写成$\left|5;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\delta}\right\rangle$形式。

(2) 证明$|\psi\rangle,|\psi_1\rangle,\cdots,|\psi_5\rangle$都是$S_z$的本征矢量，求出本征值。

(3) 证明$|\psi\rangle,|\psi_1\rangle,\cdots,|\psi_5\rangle$都是$S_z$的本征矢量，求出本征值.

解: ⑴$\because S_{-}=S_x-iS_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$$S_{-}^2=\left(S_x-iS_y\right)^2=S_x^2-S_y^2-i\left(S_xS_y+S_yS_x\right)=0$$

$$S_{-}\left|+\right\rangle=\hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\hbar\left|-\right\rangle$$

$$\therefore\left|\psi_1\right\rangle=S_{-}\left|\psi\right\rangle=\sum_i S_{-i}\left|5;+++++\right\rangle$$

$$=\hbar\left[\left|5;-++++\right\rangle+\left|5;+-+++\right\rangle+\left|5;++-++\right\rangle+\left|5;+++-+\right\rangle+\left|5;++++-\right\rangle\right]$$

$$=\hbar\left[\left|5;-++++\right\rangle-\left|5;-++++\right\rangle+\left|5;++-++\right\rangle+\left|5;++-++\right\rangle+\left|5;++++-\right\rangle\right]$$

$$=\hbar\left|5;++++-\right\rangle$$

$$\left|\psi_2\right\rangle=S_{-}^2\left|\psi\right\rangle=0\left|\psi\right\rangle=0$$

同理 $\left|\psi_3\right\rangle=0;\quad\left|\psi_4\right\rangle=0;\quad\left|\psi_5\right\rangle=0;\quad\left|\psi_6\right\rangle=0$

⑵$^{\perp}$ 证明：$\because \mathrm{S}_z\left|+\right\rangle=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\left|+\right\rangle;\mathrm{S}_z\left|-\right\rangle=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\left|-\right\rangle$

$$\therefore S_z\left|\psi\right\rangle=\sum_i\vec{S}_{zi}\left|5;+++++\right\rangle=\frac{5\hbar}{2}\left|\psi\right\rangle$$

$$S_z\left|\psi_1\right\rangle=\sum_i\vec{S}_{zi}\hbar\left|5;++++-\right\rangle=4\times\frac{\hbar}{2}\hbar\left|5;++++-\right\rangle+\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left|5;++++-\right\rangle=\frac{3\hbar^2}{2}\left|\psi_1\right\rangle$$

所以 $\left|\psi\right\rangle,\left|\psi_1\right\rangle$都是$S_z$的本征矢量，本征值分别$\frac{5\hbar}{2},\frac{3\hbar^2}{2}$;

由⑴解可知 $S_z\left|\psi_3\right\rangle=0\left|\psi_3\right\rangle;S_z\left|\psi_4\right\rangle=0\left|\psi_4\right\rangle;S_z\left|\psi_5\right\rangle=0\left|\psi_5\right\rangle$

由此可证$\left|\psi_2\right\rangle;\left|\psi_3\right\rangle,\left|\psi_4\right\rangle,\left|\psi_5\right\rangle$都是$S_z$的本征矢量，其本征值均为 0。

此题得证

⑶证明：$\because S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2=\frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\therefore S^2\left|+\right\rangle=\frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{3\hbar^2}{4}\left|+\right\rangle;S^2\left|-\right\rangle=\frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{3\hbar^2}{4}\left|-\right\rangle$$

$$\therefore S^2\left|\psi\right\rangle=S^2\left|5;+++++\right\rangle=\frac{15\hbar^2}{4}\left|\psi\right\rangle;S^2\left|\psi_1\right\rangle=S^2\left|5;++++-\right\rangle=\frac{15\hbar^3}{4}\left|\psi_1\right\rangle$$

$$S^2\left|\psi_2\right\rangle=0;S^2\left|\psi_3\right\rangle=0;S^2\left|\psi_4\right\rangle=0;S^2\left|\psi_5\right\rangle=0;$$

由此可以证明$\left|\psi\right\rangle,\left|\psi_1\right\rangle,\cdots,\left|\psi_5\right\rangle$都是$S^2$的本征矢量，其本征值分别为$\frac{15\hbar^2}{4};\frac{15\hbar^3}{4};0;0;0;0$。

练习 30.4 设单粒子算符 B 有三个本征值b^1,b^2,b^3,简写为 1，2，3，对于玻色子系统计算下列内积：

$$\langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 2\quad 3\rangle,\quad \langle 1\quad 1\quad 2|1\quad 1\quad 2\rangle,\quad \langle 1\quad 1\quad 2|2\quad 1\quad 1\rangle,\ \langle 1\quad 1\quad 1|1\quad 1\quad 1\rangle$$

对于费米子系统，计算

$$\langle 1\quad 2|1\quad 2\rangle\ ,\ \langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 2\quad 3\rangle,\ \langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 3\quad 2\rangle$$

态矢量$\left|n;\quad b^1\quad b^2\quad b^3\right\rangle$中的粒子数 n 已经省去，单粒子的本征矢量是归一化的。（胡项英）

解：玻色系统$\varepsilon=1$并且根据内积定理：公式（30.9）

$$\begin{aligned}
&\langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 2\quad 3\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 2\quad 3\rangle\\
&+\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 3\rangle\\
&+\langle 1|3\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 2\rangle)\\
&=\frac{1}{n}(\frac{1}{n-1}\langle 2|2\rangle\langle 3|3\rangle)\\
&=\frac{1}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle 1\quad 1\quad 2|1\quad 1\quad 2\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 1\quad 2\rangle\\
&+\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 1\quad 2\rangle+\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 1\quad 1\rangle\\
&=\frac{2}{n}(\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1\quad 1\quad 2\rangle)\\
&=\frac{2}{n}(\frac{1}{n-1}\langle 1|1\rangle\langle 2|2\rangle)\\
&=\frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle 1\quad 1\quad 2|2\quad 1\quad 1\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 1\quad 1\rangle\\
&+\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 2\quad 1\rangle+\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 2\quad 1\rangle)\\
&=\frac{2}{n}(\langle n-1;\quad 1\quad 2|n-1;\quad 2\quad 1\rangle\\
&=\frac{2}{n}(\frac{1}{n-1}\langle 1|1\rangle\langle 2|2\rangle)\\
&=\frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\langle 1\quad 1\quad 1|1\quad 1\quad 1\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 1|n-1;\quad 1\quad 1\rangle$$

$$+\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 1|n-1;\quad 1\quad 1\rangle+\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 1\quad 1|n-1;\quad 1\quad 1\rangle$$

$$=\frac{3}{n}\langle n-1;\quad 1\quad 1|n-1;\quad 1\quad 1\rangle$$

$$=\frac{3}{n}(\frac{2}{n-1}\langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle)$$

$$=\frac{6}{n(n-1)}$$

对于费米系统，$\varepsilon=-1$，又内积定理得：

$$\langle 1\quad 2|1\quad 2\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 2|2\rangle+\varepsilon\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 2|1\rangle)$$

$$=\frac{1}{n}$$

$$\langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 2\quad 3\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 2\quad 3\rangle$$

$$+\varepsilon\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 3\rangle+\varepsilon^2\langle 1|3\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 2\rangle)$$

$$=\frac{1}{n}\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 2\quad 3\rangle$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}(\langle 2|2\rangle\langle 3|3\rangle+\varepsilon\langle 2|3\rangle\langle 3|2\rangle)$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\langle 1\quad 2\quad 3|1\quad 3\quad 2\rangle=\frac{1}{n}(\langle 1|1\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 3\quad 2\rangle$$

$$+\varepsilon\langle 1|3\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 2\rangle+\varepsilon^2\langle 1|2\rangle\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 1\quad 3\rangle)$$

$$=\frac{1}{n}\langle n-1;\quad 2\quad 3|n-1;\quad 3\quad 2\rangle$$

$$=\frac{1}{n}\bullet\frac{1}{n-1}(\langle 2|3\rangle\langle 3|2\rangle+\varepsilon\langle 2|2\rangle\langle 3|3\rangle)$$

$$=-\frac{1}{n(n-1)}$$

#

30.5 （1）试将三粒子系统的对称化δ函数

$$\frac{1}{6}\sum_p\varepsilon^p P\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\gamma}\right)$$

具体展开成六项。（做题人：刘强　审核人：韩丽芳）

（2）利用此展开具体验证：若函数$f\left(b^{\alpha}b^{\beta}b^{\chi}\right)$对其自变量的对调是对称化的(即具有对

称性或反对称性)，则对称化的δ函数的作用与普通的δ函数相同，即具有类似于下式的关系：

$$\int f(b)\delta(b-b')db = f(b')$$

解：(1)对称化δ函数展开为：

$$\frac{1}{6}\sum_p \varepsilon^p P\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\chi'}-b^{\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l}\varepsilon^0\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\gamma}\right)\\ +\varepsilon^1\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\gamma}\right)\\ +\varepsilon^2\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\gamma}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\beta}\right)\\ +\varepsilon^3\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\gamma}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\beta}\right)\\ +\varepsilon^4\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\gamma}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\alpha}\right)\\ +\varepsilon^5\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\gamma}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\gamma'}-b^{\alpha}\right)\end{array}\right\}$$

(2)证：若有 $f(b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})=\frac{1}{6}\sum_p \varepsilon^p P\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta}\right)\delta\left(b^{\chi'}-b^{\gamma}\right)$

则有：

$$\int f(b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})\delta\left(b^{\alpha}-b^{\alpha'}\right)\delta\left(b^{\beta}-b^{\beta'}\right)\delta\left(b^{\chi}-b^{\gamma'}\right)db^{\alpha}db^{\beta}db^{\gamma}$$
$$=\frac{1}{6}\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha'}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta'}\right)\delta\left(b^{\chi'}-b^{\gamma'}\right)$$

而且有

$$f(b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'})=\frac{1}{6}\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha'}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta'}\right)\delta\left(b^{\chi'}-b^{\gamma'}\right)$$

即证得：

$$\int f(b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})\delta\left(b^{\alpha}-b^{\alpha'}\right)\delta\left(b^{\beta}-b^{\beta'}\right)\delta\left(b^{\chi}-b^{\gamma'}\right)db^{\alpha}db^{\beta}db^{\gamma}$$
$$=\frac{1}{6}\delta\left(b^{\alpha'}-b^{\alpha'}\right)\delta\left(b^{\beta'}-b^{\beta'}\right)\delta\left(b^{\chi'}-b^{\gamma'}\right)$$
$$=f(b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'})$$

即对称化的δ函数的作用与普通的函数相同。

#

练习 30.6　内积定理（30.9）式的右边各项中的左矢是相同的.内积定理还有一个类似的形式,其右边各项中右矢是相同的,试导出这一形式的内积定理. （仪双喜）

解: $\left\langle n;b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}\middle|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\right\rangle$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{p'}\varepsilon^{p'}\left\langle b^{\alpha'}\middle|b^{\alpha}\right\rangle\left\langle b^{\beta'}\middle|b^{\beta}\right\rangle\left\langle b^{\gamma'}\middle|b^{\gamma}\right\rangle\cdots\left\langle b^{\nu'}\middle|b^{\nu}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{n}[\langle b^{\alpha'}|b^{\alpha}\rangle\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p'}\varepsilon^{p'}p'\langle b^{\beta'}|b^{\beta}\rangle\langle b^{\gamma'}|b^{\gamma}\rangle\cdots\langle b^{\nu'}|b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon\langle b^{\beta'}|b^{\alpha}\rangle\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p'}\varepsilon^{p'}p'\langle b^{\alpha'}|b^{\beta}\rangle\langle b^{\gamma'}|b^{\gamma}\rangle\cdots\langle b^{\nu'}|b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon^{2}\langle b^{\gamma'}|b^{\alpha}\rangle\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p'}\varepsilon^{p'}p'\langle b^{\alpha'}|b^{\beta}\rangle\langle b^{\beta'}|b^{\gamma}\rangle\cdots\langle b^{\nu'}|b^{\nu}\rangle$$

$$+\cdots+\varepsilon^{n-1}\langle b^{\nu'}|b^{\alpha}\rangle\frac{1}{(n-1)!}\sum_{p'}\varepsilon^{p'}p'\langle b^{\alpha'}|b^{\beta}\rangle\langle b^{\beta'}|b^{\gamma'}\rangle\cdots\langle b^{\mu'}|b^{\nu}\rangle]$$

$$=\frac{1}{n}[\langle b^{\alpha'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon\langle b^{\beta'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\alpha'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\cdots+\varepsilon^{n-1}\langle b^{\nu'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\mu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle]$$

即证得内积定理的另一种表达式.

$$\langle n;b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$=\frac{1}{n}[\langle b^{\alpha'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon\langle b^{\beta'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\alpha'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\cdots+\varepsilon^{n-1}\langle b^{\nu'}|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\mu'}|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle]$$

#

30.7

练习 31.1 证明$a(b)$与$a(b')$的对易关系（31.4）和$a(b)$与$a^{+}(b')$的对易关系（31.6）式。

$$a(b)a(b')-\varepsilon a(b')a(b)=0 \qquad (31.4)$$

$$a(b)a^{+}(b')-\varepsilon a^{+}(b')a(b)=0 \qquad (31.6)$$

（解答：熊凯 ； 校对：李泽超）

证明：将$a(b)a(b')$和$a(b')a(b)$分别作用在 n 粒子基左矢$\langle n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}|$上

$$\begin{aligned}\langle n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}|a(b)a(b') &= \sqrt{(n+1)(n+2)}\langle n+2;b'bb^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}| \\ &= \varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\langle n+2;bb'b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}|\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\langle n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}|a(b)a(b')=\sqrt{(n+1)(n+2)}\langle n+2;bb'b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}| \qquad (2)$$

由$(1)-\varepsilon(2)$得：

$$a(b)a(b')-\varepsilon a(b')a(b)=0$$

（2）将$a(b)a^{+}(b')$与$a^{+}(b')a(b)$分别作用在右矢$|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle$上

$$\begin{aligned}a(b)a^{+}(b')|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle &= \sqrt{n+1}a(b)|n+1;b'b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &= \delta(b-b')|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &\quad +\varepsilon\delta(b-b^{\alpha})|n;b'b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &\quad +\varepsilon^{2}\delta(b-b^{\beta})|n;b'b^{\alpha}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle+.... \\ &\quad +\varepsilon^{n}\delta(b-b^{\nu})|n;b'b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\mu}\rangle\end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}a^{+}(b')a(b)|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle &= a^{+}(b')\frac{1}{\sqrt{n}}[\delta(b-b^{\alpha})|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &\quad +\varepsilon\delta(b-b^{\beta})|n-1;b^{\alpha}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &\quad +\varepsilon^{2}\delta(b-b^{\gamma})|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}....b^{\nu}\rangle+.... \\ &\quad +\varepsilon^{n-1}\delta(b-b^{\nu})|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\mu}\rangle] \\ &= \delta(b-b^{\alpha})|n;b'b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle \\ &\quad +\varepsilon\delta(b-b^{\beta})|n;b'b^{\alpha}b^{\gamma}....b^{\nu}\rangle+.... \\ &\quad +\varepsilon^{n-1}\delta(b-b^{\nu})|n;b'b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}....b^{\mu}\rangle\end{aligned} \qquad (4)$$

由$(3)-\varepsilon(4)$得：$a(b)a^{+}(b')-\varepsilon a^{+}(b')a(b)=\delta(b-b')$ □

练习 31.2 计算下列对易关系：

$$[a^+(b)a(b), a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)]$$

$$[a^+(b')a(b'), a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)]$$

（解答：熊凯 ； 校对：李泽超）

解：（1）令 $N(b)=a^+(b)a(b)$ 为处于 b 态的占有数算符由（31.10）、（31.11）两式

可得：$[N(b), a^+(b)] = a^+(b)\delta(b-b')$ （31.10）

$[N(b), a(b)] = -a(b)\delta(b-b')$ （31.11）

$$\begin{aligned}[N(b), N(b')] &= [N(b), a^+(b')a(b')] \\ &= a^+(b')[N(b), a(b')] + [N(b), a^+(b')]a(b') \\ &= -a^+(b')a(b)\delta(b-b') + a^+(b)a(b')\delta(b-b') \\ &= [a^+(b)a(b') - a^+(b')a(b)]\delta(b-b') \\ &= 0\end{aligned}$$

从上式可以看出当 $b=b'$ 时中括号为 0，$b \neq b'$ 时 δ 函数为 0，所以上式为零
因为：

$$\begin{aligned}&[a^+(b)a(b), a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)] \\ &= a^+(b)a(b)a^+(b)a(b')a^+(b')a(b) - a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)a^+(b)a(b) \\ &= a^+(b)[a(b)a^+(b)a(b')a^+(b') - a(b')a^+(b')a(b)a^+(b)]a(b) \\ &= a^+(b)[a(b)a^+(b), a(b')a^+(b')]a(b) \\ &= a^+(b)[1+\varepsilon a^+(b)a(b), 1+\varepsilon a^+(b')a(b')]a(b) \\ &= \varepsilon^2 a^+(b)[a^+(b)a(b), a^+(b')a(b')]a(b) \\ &= \varepsilon^2 a^+(b)[N(b), N(b')]a(b) \\ &= 0\end{aligned}$$

上式中第四步计算用到了（31.6）式

∴ $$[a^+(b)a(b), a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)] = 0$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&[a^+(b')a(b'),a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)]\\
&=[N(b'),a^+(b)(\delta(b'-b')+\varepsilon a^+(b')a(b'))a(b)]\\
&=[N(b'),a^+(b)(1+\varepsilon a^+(b')a(b'))a(b)]\\
&=[N(b'),a^+(b)a(b)+\varepsilon a^+(b)a^+(b')a(b')a(b)]\\
&=[N(b'),N(b)+\varepsilon a^+(b)a^+(b')a(b')a(b)]\\
&=[N(b'),\varepsilon a^+(b)a^+(b')a(b')a(b)]\\
&=[N(b'),\varepsilon a^+(b)N(b')a(b)]\\
&=\varepsilon\{[N(b'),a^+(b)]N(b')a(b)+a^+(b)[N(b'),N(b')a(b)]\}\\
&=\varepsilon\{[N(b'),a^+(b)]N(b')a(b)+a^+(b)N(b')[N(b'),a(b)]\}\\
&=\varepsilon\{a^+(b')\delta(b'-b)N(b')a(b)-a^+(b)N(b')a(b')\delta(b'-b)\}\\
&=\varepsilon\{\delta(b'-b)a^+(b')N(b')a(b)-\delta(b'-b)a^+(b)N(b')a(b')\}\\
&=\varepsilon\delta(b'-b)\{a^+(b')N(b')a(b)-a^+(b)N(b')a(b')\}
\end{aligned}
$$

从上式可以看出：

当$b=b'$时括号为 0，$b\neq b'$时 δ 函数为 0，所以上式为 0

$$\therefore [a^+(b')a(b'),a^+(b)a(b')a^+(b')a(b)]=0$$

□

练习 31.3 讨论全同粒子的自旋态，设自旋为 1/2 的粒子的单粒子S_z的本征矢量为$|\alpha>$和$|\beta>$，相应的本征值为$+\hbar/2$和$-\hbar/2$；a_α^+,a_α和a_β^+,a_β分别是α态和β态的产生和消灭算符。现定义以下 4 个算符：（解答：陈玉辉 核对；项朋）

$$
\begin{aligned}
&A=\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+a_\alpha-a_\beta^+a_\beta)\\
&B=\hbar a_\alpha^+a_\beta\\
&C=\hbar a_\beta^+a_\alpha\\
&D=BC+A^2-\hbar A
\end{aligned}
$$

求它们的对易关系：$[A,B],[A,C],[B,C],[A,D],[B,D],[C,D]$

解：

$$[A,B]=[\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+a_\alpha-a_\beta^+a_\beta),\hbar a_\alpha^+a_\beta]$$
$$=[\frac{\hbar}{2}a_\alpha^+a_\alpha,\hbar a_\alpha^+a_\beta]-[\frac{\hbar}{2}a_\beta^+a_\beta,\hbar a_\alpha^+a_\beta]$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}\{a_\alpha^+[a_\alpha,a_\alpha^+a_\beta]+[a_\alpha^+,a_\alpha^+a_\beta]a_\alpha-a_\beta^+[a_\beta,a_\alpha^+a_\beta]-[a_\beta^+,a_\alpha^+a_\beta]a_\beta\}$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}\{a_\alpha^+a_\alpha^+[a_\alpha,a_\beta]+a_\alpha^+[a_\alpha,a_\alpha^+]a_\beta+[a_\alpha^+,a_\alpha^+]a_\beta a_\alpha+a_\alpha^+[a_\alpha^+,a_\beta]a_\alpha$$
$$-a_\beta^+[a_\beta,a_\alpha^+]a_\beta-a_\beta^+a_\alpha^+[a_\beta,a_\beta]-[a_\beta^+,a_\alpha^+]a_\beta a_\beta-a_\alpha^+[a_\beta^+,a_\beta]a_\beta\}$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}(a_\alpha^+a_\beta+a_\alpha^+a_\beta)$$
$$=\hbar^2a_\alpha^+a_\beta$$

$$[A,C]=[\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+a_\alpha-a_\beta^+a_\beta),\hbar a_\beta^+a_\alpha]$$
$$=[\frac{\hbar}{2}a_\alpha^+a_\alpha,\hbar a_\beta^+a_\alpha]-[\frac{\hbar}{2}a_\beta^+a_\beta,\hbar a_\beta^+a_\alpha]$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}\{a_\alpha^+[a_\alpha,a_\beta^+a_\alpha]+[a_\alpha^+,a_\beta^+a_\alpha]a_\alpha-a_\beta^+[a_\beta,a_\beta^+a_\alpha]-[a_\beta^+,a_\beta^+a_\alpha]a_\beta\}$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}\{a_\alpha^+[a_\alpha,a_\beta^+]a_\alpha+a_\alpha^+a_\beta^+[a_\alpha,a_\alpha]+[a_\alpha^+,a_\beta^+]a_\alpha a_\alpha+a_\beta^+[a_\alpha^+,a_\alpha]a_\alpha$$
$$-a_\beta^+[a_\beta,a_\beta^+]a_\alpha-a_\beta^+a_\beta^+[a_\beta,a_\alpha]-[a_\beta^+,a_\beta^+]a_\alpha a_\beta-a_\beta^+[a_\beta^+,a_\alpha]a_\beta\}$$
$$=\frac{\hbar^2}{2}\{-a_\beta^+a_\alpha-a_\beta^+a_\alpha\}$$
$$=-\hbar^2a_\beta^+a_\alpha$$

$$[B,C]$$
$$=[\hbar a_\alpha^+a_\beta,\hbar a_\beta^+a_\alpha]$$
$$=\hbar^2[a_\alpha^+a_\beta,a_\beta^+a_\alpha]$$
$$=\hbar^2\{a_\alpha^+[a_\beta,a_\beta^+a_\alpha]+[a_\alpha^+,a_\beta^+a_\alpha]a_\beta\}$$
$$=\hbar^2\{a_\alpha^+[a_\beta,a_\beta^+]a_\alpha+a_\alpha^+a_\beta^+[a_\beta,a_\alpha]+[a_\alpha^+,a_\beta^+]a_\alpha a_\beta+a_\beta^+[a_\alpha^+,a_\alpha]a_\beta\}$$
$$=\hbar^2(a_\alpha^+a_\alpha-a_\beta^+a_\beta)$$

$[A,D]$
$=[A,BC+A^2-\hbar A]$
$=[A,BC]$
$=B[A,C]+[A,B]C$
$=\hbar a_\alpha^+ a_\beta(-\hbar^2 a_\beta^+ a_\alpha)+\hbar^2 a_\alpha^+ a_\beta \hbar a_\beta^+ a_\alpha$
$=0$

$[B,D]$
$=[B,BC+A^2-\hbar A]$
$=[B,BC]+[B,A^2-\hbar A]$
$=B[B,C]+[B,A^2]-\hbar[B,A]$
$=B[B,C]+[B,A]A+A[B,A]-\hbar[B,A]$
$=\hbar a_\alpha^+ a_\beta \hbar^2(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)+(-\hbar^2 a_\alpha^+ a_\beta)\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)$
$+\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)(-\hbar^2 a_\alpha^+ a_\beta)-\hbar(-\hbar^2 a_\alpha^+ a_\beta)$
$=\hbar^3 a_\alpha^+ a_\beta a_\alpha^+ a_\alpha - \hbar^3 a_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ a_\beta - \frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\beta a_\alpha^+ a_\alpha + \frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ a_\beta$
$-\frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha^+ a_\beta + \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\beta a_\alpha^+ a_\beta + \hbar^3 a_\alpha^+ a_\beta$
$=\frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\beta a_\alpha^+ a_\alpha - \frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ a_\beta - \frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha^+ a_\beta + \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\beta a_\alpha^+ a_\beta + \hbar^3 a_\alpha^+ a_\beta$
$[C,D]$
$=[C,BC+A^2-\hbar A]$
$=[C,B]C+[C,A]A+A[C,A]-\hbar[C,A]$
$=-\hbar^2(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)\hbar a_\beta^+ a_\alpha + \hbar^2 a_\beta^+ a_\alpha \frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)$
$+\frac{\hbar}{2}(a_\alpha^+ a_\alpha - a_\beta^+ a_\beta)\hbar^2 a_\beta^+ a_\alpha - \hbar^3 a_\beta^+ a_\alpha$
$=-\hbar^3 a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta^+ a_\alpha + \hbar^3 a_\beta^+ a_\beta a_\beta^+ a + \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha - \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\alpha a_\beta^+ a_\beta$
$+\frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta^+ a_\alpha - \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\beta a_\beta^+ a - \hbar^3 a_\beta^+ a_\alpha$
$=\frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha - \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\alpha a_\beta^+ a_\beta - \frac{\hbar^3}{2} a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta^+ a_\alpha + \frac{\hbar^3}{2} a_\beta^+ a_\beta a_\beta^+ a - \hbar^3 a_\beta^+ a_\alpha$

31.4

练习 31.5 取 单粒子算符为 $B=S_z$，其两个本征态为 $|+\hbar/2\rangle=|\alpha\rangle$，

$\left|-\hbar/2\right\rangle=\left|\beta\right\rangle$. $a_\alpha^+,a_\beta^+,a_\alpha,a_\beta$ 为相应的产生算符和消灭算符. 现有对称的多粒子自旋态 $\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle,\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle,\left|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\right\rangle$, 求下列算符作用到这些态上的结果:

$$A=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2}-\sigma'}\sqrt{\frac{1}{2}+\sigma}a^+_{\sigma'+\frac{1}{2}}a^+_{\sigma-\frac{1}{2}}a_\sigma a_{\sigma'}$$

$$B=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}a^+_{\sigma'}a^+_{\sigma}a_\sigma a_{\sigma'}$$

式中 σ 及 σ' 取 $\pm1/2$ 两值, $a_{\frac{1}{2}}=a_\alpha,a_{-\frac{1}{2}}=a_\beta$. （做题人：杜花伟）

解:(1)当 $A=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2}-\sigma'}\sqrt{\frac{1}{2}+\sigma}a^+_{\sigma'}a^+_{\sigma}a_\sigma a_{\sigma'}$ 时,作用到多粒子自旋态上的结果:

$$A=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2}-\sigma'}\sqrt{\frac{1}{2}+\sigma}a^+_{\sigma'}a^+_{\sigma}a_\sigma a_{\sigma'}=a^+_{-\frac{1}{2}}a^+_{\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2}}a_{-\frac{1}{2}}=a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha a_\beta$$

$$A\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle=a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha a_\beta\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle=0$$

$$A\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle=a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha a_\beta\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a^+_\beta a^+_\alpha\left[4\left|\alpha\alpha\alpha\right\rangle\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}a^+_\beta\left[4\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle\right]$$

$$=4\left|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle$$

$$A\left|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\right\rangle=a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha a_\beta\left|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}a^+_\beta a^+_\alpha a_\alpha\left[2\left|\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a^+_\beta a^+_\alpha\left[6\left|\alpha\alpha\beta\right\rangle\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}a^+_\beta\left[6\left|\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle\right]$$

$$=6\left|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle$$

(2)当 $A=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2}-\sigma'}\sqrt{\frac{1}{2}+\sigma}a^+_{\frac{1}{2}}a^+_{-\frac{1}{2}}a_\sigma a_{\sigma'}$ 时, 作用到多粒子自旋态上的结果:

$$A=\sum_{\sigma'}\sum_{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2}-\sigma'}\sqrt{\frac{1}{2}+\sigma}a^+_{\frac{1}{2}}a^+_{-\frac{1}{2}}a_\sigma a_{\sigma'}=a^+_{\frac{1}{2}}a^+_{-\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2}}a_{-\frac{1}{2}}=a^+_\alpha a^+_\beta a_\alpha a_\beta$$

$$A\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle=a^+_\alpha a^+_\beta a_\alpha a_\beta\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle=0$$

$$A\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle=a^+_\alpha a^+_\beta a_\alpha a_\beta\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}a^+_\alpha a^+_\beta a_\alpha\left|\alpha\alpha\alpha\alpha\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} a_\alpha^+ a_\beta^+ \left[4 \left| \alpha\alpha\alpha \right\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ \left[4 \left| \beta\alpha\alpha\alpha \right\rangle \right]$$

$$= 4 \left| \alpha\beta\alpha\alpha\alpha \right\rangle$$

$$A \left| \alpha\alpha\alpha\beta\beta \right\rangle = a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\alpha a_\beta \left| \alpha\alpha\alpha\beta\beta \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\alpha \left[2 \left| \alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} a_\alpha^+ a_\beta^+ \left[6 \left| \alpha\alpha\beta \right\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ \left[6 \left| \beta\alpha\alpha\beta \right\rangle \right]$$

$$= 6 \left| \alpha\beta\alpha\alpha\beta \right\rangle$$

$$B = \sum_{\sigma'} \sum_{\sigma} a_{\sigma'}^+ a_\sigma^+ a_{\sigma'} a_\sigma$$

$$= a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2}}^+ a_{-\frac{1}{2}}^+ a_{-\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}} a_{-\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}}^+ a_{-\frac{1}{2}}^+ a_{-\frac{1}{2}} a_{-\frac{1}{2}}$$

$$= a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha + a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta a_\alpha + a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta + a_\beta^+ a_\beta^+ a_\beta a_\beta$$

$$B \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle = a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle + a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta a_\alpha \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle$$

$$+ a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle + a_\beta^+ a_\beta^+ a_\beta a_\beta \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha \left[5 \left| \alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta \left[5 \left| \alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} a_\alpha^+ a_\alpha^+ \left[20 \left| \alpha\alpha\alpha \right\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ \left[20 \left| \alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle \right]$$

$$= 20 \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \right\rangle$$

$$B \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle = a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle + a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta a_\alpha \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle$$

$$+ a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\beta \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle + a_\beta^+ a_\beta^+ a_\beta a_\beta \left| \alpha\alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha \left[4 \left| \alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta \left[4 \left| \alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle \right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\alpha \left[\left| \alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} a_\beta^+ a_\beta^+ a_\beta \left[\left| \alpha\alpha\alpha\beta \right\rangle \right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\alpha^+a_\alpha^+\left[12|\alpha\alpha\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\alpha^+a_\beta^+\left[4|\alpha\alpha\alpha\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\beta^+a_\alpha^+\left[4|\alpha\alpha\alpha\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+\left[12|\alpha\alpha\alpha\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+\left[4|\beta\alpha\alpha\alpha\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\beta^+\left[4|\alpha\alpha\alpha\alpha\rangle\right]$$

$$=12|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\rangle+4|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\rangle+4|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\rangle$$

$$B|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle=a_\alpha^+a_\alpha^+a_\alpha a_\alpha|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle+a_\alpha^+a_\beta^+a_\beta a_\alpha|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle$$

$$+a_\beta^+a_\alpha^+a_\alpha a_\beta|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle+a_\beta^+a_\beta^+a_\beta a_\beta|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+a_\alpha^+a_\alpha\left[3|\alpha\alpha\beta\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+a_\beta^+a_\beta\left[3|\alpha\alpha\beta\beta\rangle\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\beta^+a_\alpha^+a_\alpha\left[2|\alpha\alpha\alpha\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\beta^+a_\beta^+a_\beta\left[2|\alpha\alpha\alpha\beta\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\alpha^+a_\alpha^+\left[6|\alpha\beta\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\alpha^+a_\beta^+\left[6|\alpha\alpha\beta\rangle\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\beta^+a_\alpha^+\left[6|\alpha\alpha\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}a_\beta^+a_\beta^+\left[3|\alpha\alpha\alpha\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+\left[6|\alpha\alpha\beta\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\alpha^+\left[6|\beta\alpha\alpha\beta\rangle\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\beta^+\left[6|\alpha\alpha\alpha\beta\rangle\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}a_\beta^+\left[2|\beta\alpha\alpha\beta\rangle\right]$$

$$=6|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\rangle+6|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\rangle+6|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\rangle+2|\beta\beta\alpha\alpha\alpha\rangle$$

#

31.6：（梁端）

证明：$\left[N(b),a^+(b')\right]=N(b)a^+(b')-a^+(b')N(b)$

根据算符定义：令 $N(b)a^+(b')$ 作用于任意一个基矢

则：$N(b)a^+(b')|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\rangle=a^+(b)a(b)a^+(b')|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\rangle$

根据产生算符和湮灭算符的定义：原式可以变成

$$a^+(b)a(b)\sqrt{n+1}\left|n+1;b'b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle = a^+(b)\left[\delta(b-b')\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle + \varepsilon\delta(b-b^\alpha)\left|n;b'b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle\right.$$
$$\left.+\varepsilon^2\delta(b-b^\beta)\left|n;b'b^\alpha b^\gamma\cdots b^\upsilon\right\rangle + \cdots + \varepsilon^n\delta(b-b^\upsilon)\left|n;b'b^\alpha b^\beta\cdots b^\mu\right\rangle\ \right]$$
$$=\delta(b-b')\sqrt{n+1}\left|n+1;bb^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle + \varepsilon\delta(b-b^\alpha)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle + \cdots$$
$$+\varepsilon^n\delta(b-b^\upsilon)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\alpha\cdots b^\mu\right\rangle$$

同理，将 $a^+(b')N(b)$ 作用于任意一个基矢，利用产生算符和湮灭算符可以得出：

$$a^+(b')N(b)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle = \varepsilon\delta(b-b^\alpha)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle$$
$$+\varepsilon^2\delta(b-b^\beta)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\alpha\cdots b^\upsilon\right\rangle + \varepsilon^3\delta(b-b^\gamma)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\alpha\cdots b^\upsilon\right\rangle + \cdots$$
$$+\varepsilon^n\delta(b-b^\upsilon)\sqrt{n+1}\left|n+1;bb'b^\alpha\cdots b^\upsilon\right\rangle$$

$$N(b)a^+(b')\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle - a^+(b')N(b)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle$$

故：$$=\delta(b-b')\sqrt{n+1}\left|n+1;bb^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle$$
$$=\delta(b-b')a^+(b)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\upsilon\right\rangle$$

即：$\left[N(b),a^+(b')\right] = a^+(b)\delta(b-b')$

同理，用上面方法可证：$\left[N(b),a(b')\right] = -a(b)\delta(b-b')$

#

31.7

31.8 试利用 X 和 B 两个表象中产生算符和消灭算符之间的关系 31.21 和 31.22 两式，直接证明在这两个表象中总粒子数算符相同，即 （刘强）

$$\int\Psi^+(x)\Psi(x)dx = \int a^+(b)a(b)db$$

证明：

因为：

$$a^+(b) = \int dx\langle x|b\rangle\Psi^+(x)$$
$$a(b) = \int dx\langle b|x\rangle\Psi(x)$$

所以：

$$\int a^{+}(b)a(b)db$$
$$=\int db\int dx'\langle x'|b\rangle\Psi^{+}(x')\int dx\langle b|x\rangle\Psi(x)$$
$$=\iiint dbdx'dx\langle x'|b\rangle\langle b|x\rangle\Psi^{+}(x')\Psi(x)$$
$$=\iint dx'dx\langle x'|x\rangle\Psi^{+}(x')\Psi(x)$$
$$=\iint dx'dx\delta(x'-x)\Psi^{+}(x')\Psi(x)$$
$$=\int\Psi^{+}(x')\Psi(x)dx$$

即证得 $\int\Psi^{+}(x')\Psi(x)dx=\int a^{+}(b)a(b)db$

也就是说：在这两个表象中总粒子算符相同。

#

练习 31.8　试用 X 和 B 两个表象中产生算符与消灭算符之间的关系（31.21）和（32.22）两式，直接证明在这两个表象中总粒子数算符相同，即：

$$\int\psi^{+}(x)\psi(x)dx=\int a^{+}(b)a(b)db\text{。}$$　　（吴汉成）

证明：由题意可知（31.2）和（32.22）两式分别为：

$$a^{+}(b)=\int dx\langle x|b\rangle\psi^{+}(x)\text{和}a(b)=\int dx\langle b|x\rangle\psi(x)\text{。}$$

为便于讨论把 $a^{+}(b)=\int dx\langle x|b\rangle\psi^{+}(x)$ 式中的 x 改为 x'，则有：

$a^{+}(b)=\int dx'\langle x'|b\rangle\psi^{+}(x')$。所以：

$$\int a^{+}(b)a(b)db=\int db\int dx'\langle x'|b\rangle\psi^{+}(x')\int dx\langle b|x\rangle\psi(x)$$

$$=\iiint dbdx'dx\langle x'|b\rangle\langle b|x\rangle\psi^{+}(x')\psi(x)\qquad（\because\int\langle b|b\rangle db=1）$$

$$=\iint dx'dx\langle x'|x\rangle\psi^{+}(x')\psi(x)\qquad（\because\langle x'|x\rangle=\delta(x'-x)）$$

$$=\iint dx'dx\delta(x'-x)\psi^{+}(x')\psi(x)\qquad（\because\text{归一化}\int\delta(x'-x)dx'=1）$$

$$=\int\psi^{+}(x')\psi(x)dx\qquad（\text{把}x'\text{改为}x）$$

$$=\int\psi^{+}(x)\psi(x)dx\text{。于是得证。}$$

#

31.9 证明 $[G,N]=0$。　　（孟祥海）

证明：

$(GN-NG)|n;b^{\alpha},b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$=\frac{1}{n!}\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}$

$a^{+}(b^{\alpha\prime})a^{+}(b^{\beta\prime})\cdots a^{+}(b^{\gamma\prime})|0>$

$<n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}|G|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$<0|a(b^{\gamma})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})N|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$-\frac{N}{n!}\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}$

$a^{+}(b^{\alpha\prime})a^{+}(b^{\beta\prime})\cdots a^{+}(b^{\gamma\prime})|0>$

$<n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}|G|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$<0|a(b^{\gamma})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

利用公式：

$\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+}(b^{\alpha})a^{+}(b^{\beta})\cdots a^{+}(b^{\gamma})|0>=|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$\frac{1}{\sqrt{n!}}<0|a(b^{\gamma})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})=<n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}|$

并且$<n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}|G|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$是数，设为$A$。

上式$=\frac{1}{n!}\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}\sqrt{n!}\,|n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}>$

$A\sqrt{n!}<n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}|N|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$-\frac{N}{n!}\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}\sqrt{n!}\,|n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}>$

$A\sqrt{n!}<n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}>$

$=n\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}|n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}>A$

$-N\int\int\cdots\int db^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}\int\int\cdots\int db^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\gamma}|n;b^{\alpha\prime}b^{\beta\prime}\cdots b^{\gamma\prime}>A$

公式：$N=\int dbN(b)=\int dba^{+}(b)a(b)$，代入上式，可得上式为零。即，$[G,N]=0$。

#

31.10　在对称化的位置表象中，由与（31.35）式类似的一般公式出发，推出（31.36）式。（孟祥海）

解　（31.35）系统算符的表示式为

$$
\begin{aligned}
G=&\iint db^{\alpha'}db^{\alpha}a^{+}(b^{\alpha'})<b^{\alpha'}\mid g^{(1)}\mid b^{\alpha}>a(b^{\alpha})\\
&+\frac{1}{2!}\iint db^{\alpha'}db^{\beta'}\iint db^{\alpha}db^{\beta}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})(b^{\alpha'}b^{\beta'}\mid g^{(2)}\mid b^{\alpha}b^{\beta})a(b^{\beta})a(b^{\alpha})\\
&+\frac{1}{3!}\iiint db^{\alpha'}db^{\beta'}db^{\gamma'}\iiint db^{\alpha}db^{\beta}db^{\gamma}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})a^{+}(b^{\gamma'})\\
&\times(b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}\mid g^{(3)}\mid b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})a(b^{\gamma})a(b^{\beta})a(b^{\alpha})+\cdots \qquad (31.35)
\end{aligned}
$$

这就是算符G的二次量子化形式。可以看到，在上式中除了一些矩阵元之外只有产生算符和消灭算符。此外，在G中并不出现系统的粒子数n，因此此式适用于粒子数n取任何值的系统。

G在对称化的位置表象中的形式与（31.35）式类似，只要把b改成x，$a^{+}(b)$和$a(b)$改成$\psi^{+}(x)$和$\psi(x)$即可。下面写出有二体相互作用的多粒子系统的哈密顿算符在对称化的位置表象中的形式：

$$
\begin{aligned}
H=&\int dx\psi^{+}(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x)\\
&+\frac{1}{2}\iint dxdx'\psi^{+}(x)\psi^{+}(x')V(|x-x'|)\psi(x')\psi(x) \qquad (31.36)
\end{aligned}
$$

#

练习 32.1　　为什么$\left|b_r b_s \cdots b_v\right\rangle$ 的完全性关系(30.11)式(将其中积分理解为取和)与$\left|n_1 n_2 \cdots n_l \cdots\right\rangle$的完全性关系(32.8)式都等于 1？根据(32.5)式，这两个基矢不是相差一个常数因子吗？（梁立欢）

解　比照$\left|b_r b_s \cdots b_v\right\rangle$的完全性关系，$|\psi\rangle$可展开为对称化基矢的叠加：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \left|b_r b_s \cdots b_v\right\rangle c_1 + \left|b_{r'} b_{s'} \cdots b_{v'}\right\rangle c_2 + \cdots \\
&= c\left|n_1 n_2 \cdots n_l \cdots\right\rangle c_1 + c\left|n'_1\, n'_2 \cdots n'_l \cdots\right\rangle c_2 + \cdots \\
&= \left|n_1 n_2 \cdots n_l \cdots\right\rangle c'_1 + \left|n'_1\, n'_2 \cdots n'_l \cdots\right\rangle c'_2 + \cdots
\end{aligned}
$$

可见$\left|n_1 n_2 \cdots n_l \cdots\right\rangle$的完全性关系与$\left|b_r b_s \cdots b_v\right\rangle$一致，不因相差一个常数而改变，改变的只是展开式每项前的系数。

32.2

练习 32.3 从a_l^+和a_l作用于基矢$\left|n_1 n_2 \ldots n_l \ldots\right\rangle$的公式（32.13）和（32.14）二式出发，重新证明它们的对易关系（32.15）式。
（完成人：张伟）

证明： 由公式（32.13）和（32.14）

$$a_l\left|n_1 n_2 \ldots n_l \ldots\right\rangle = \varepsilon_l \sqrt{n_l}\left|n_1 n_2 \ldots n_l - 1 \ldots\right\rangle$$

$$a_l^+\left|n_1 n_2 \ldots n_l \ldots\right\rangle = \varepsilon_l \sqrt{n_l + 1}\left|n_1 n_2 \ldots n_l + 1 \ldots\right\rangle$$

其中$\varepsilon_l = \varepsilon^{n_1 + n_2 + \ldots + n_{l-1}}$

假设$n_{l'}$排在n_l的前面，不难证明另一种情况得到的结论是一样的

$$
\begin{aligned}
a_l^+ a_{l'}^+\left|n_1 n_2 \ldots n_{l'} \ldots n_l \ldots\right\rangle &= a_l^+ \varepsilon_{l'} \sqrt{n_{l'} + 1}\left|n_1 n_2 \ldots n_{l'} + 1 \ldots n_l \ldots\right\rangle \\
&= \varepsilon_l \varepsilon_{l'} \sqrt{n_l + 1}\sqrt{n_{l'} + 1}\left|n_1 n_2 \ldots n_{l'} + 1 \ldots n_l + 1 \ldots\right\rangle
\end{aligned}
$$

其中$\varepsilon_l \varepsilon_{l'} = \varepsilon^{n_1 + n_2 + \ldots + (n_{l'} + 1) + \ldots + n_{l-1}} \varepsilon^{n_1 + n_2 + \ldots + n_{l'-1}}$

即$\ln\left(\varepsilon_l \varepsilon_{l'}\right) = \left(n_1 + n_2 + \ldots + (n_{l'} + 1) + \ldots + n_{l-1} + n_1 + n_2 + \ldots + n_{l'-1}\right)\ln\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
a_{l'}^+ a_l^+\left|n_1 n_2 \ldots n_{l'} \ldots n_l \ldots\right\rangle &= a_{l'}^+ \varepsilon_l' \sqrt{n_l + 1}\left|n_1 n_2 \ldots n_l \ldots n_l + 1 \ldots\right\rangle \\
&= \varepsilon_{l'}' \varepsilon_l' \sqrt{n_{l'} + 1}\sqrt{n_l + 1}\left|n_1 n_2 \ldots n_{l'} + 1 \ldots n_l + 1 \ldots\right\rangle
\end{aligned}
$$

其中$\varepsilon_{l'}' \varepsilon_l' = \varepsilon^{n_1 + n_2 + \ldots + n_{l'} + \ldots + n_{l-1}} \varepsilon^{n_1 + n_2 + \ldots + n_{l-1}}$

即$\ln\left(\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'\right)=\left(n_1+n_2+\ldots+n_{l'}+\ldots+n_{l-1}+n_1+n_2+\ldots n_{l'-1}\right)\ln\varepsilon$

可见$\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'=\varepsilon\varepsilon_l\varepsilon_{l'}$

从而有$a_{l'}{}^{+}a_{l}{}^{+}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle=\varepsilon\varepsilon_l\varepsilon_{l'}\sqrt{n_l+1}\sqrt{n_{l'}+1}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}+1\ldots n_l+1\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon a_{l}{}^{+}a_{l'}{}^{+}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle$$

由此得到$a_l{}^{+}$和$a_{l'}{}^{+}$的对易关系$a_{l'}{}^{+}a_{l}{}^{+}-\varepsilon a_{l}{}^{+}a_{l'}{}^{+}=0$

类似的方法和证明过程可以证明

a_l和$a_{l'}$的对易关系为：$a_la_{l'}-\varepsilon a_{l'}a_l=0$

类似的可以证明：

当$n_{l'}\neq n_l$时有

$a_la_{l'}{}^{+}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle=a_l\varepsilon_{l'}\sqrt{n_{l'}+1}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}+1\ldots n_l\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon_l\varepsilon_{l'}\sqrt{n_l}\sqrt{n_{l'}+1}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}+1\ldots n_l-1\ldots\right\rangle$$

其中$\varepsilon_l\varepsilon_{l'}=\varepsilon^{n_1+n_2+\ldots+(n_{l'}+1)+\ldots+n_{l-1}}\varepsilon^{n_1+n_2+\ldots+n_{l-1}}$

即$\ln\left(\varepsilon_l\varepsilon_{l'}\right)=\left(n_1+n_2+\ldots+(n_{l'}+1)+\ldots+n_{l-1}+n_1+n_2+\ldots+n_{l'-1}\right)\ln\varepsilon$

$a_{l'}{}^{+}a_l\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle=a_{l'}{}^{+}\varepsilon_l{}'\sqrt{n_l}\left|n_1n_2\ldots n_l\ldots n_l-1\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'\sqrt{n_{l'}+1}\sqrt{n_l}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}+1\ldots n_l-1\ldots\right\rangle$$

其中$\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'=\varepsilon^{n_1+n_2+\ldots+n_{l'}+\ldots+n_{l-1}}\varepsilon^{n_1+n_2+\ldots+n_{l-1}}$

即$\ln\left(\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'\right)=\left(n_1+n_2+\ldots+n_{l'}+\ldots+n_{l-1}+n_1+n_2+\ldots n_{l'-1}\right)\ln\varepsilon$

可见$\varepsilon_{l'}{}'\varepsilon_{l}{}'=\varepsilon\varepsilon_l\varepsilon_{l'}$

从而有$a_{l'}{}^{+}a_l\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle=\varepsilon\varepsilon_l\varepsilon_{l'}\sqrt{n_{l'}+1}\sqrt{n_l}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}+1\ldots n_l-1\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon a_la_{l'}{}^{+}\left|n_1n_2\ldots n_{l'}\ldots n_l\ldots\right\rangle$$

从而，当$n_{l'}\neq n_l$时有：$a_{l'}{}^{+}a_l-\varepsilon a_la_{l'}{}^{+}=0$

当$n_{l'}=n_l$时

$a_la_l{}^{+}\left|n_1n_2\ldots n_l\ldots\right\rangle=a_l\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\left|n_1n_2\ldots n_l+1\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon_l\varepsilon_l\sqrt{n_l}\sqrt{n_l+1}\left|n_1n_2\ldots n_l\ldots\right\rangle$$

$a_l{}^{+}a_l\left|n_1n_2\ldots n_l\ldots\right\rangle=a_l{}^{+}\varepsilon_l\sqrt{n_l}\left|n_1n_2\ldots n_l-1\ldots\right\rangle$

$$=\varepsilon_l\varepsilon_l\sqrt{n_l}\sqrt{n_l+1}\left|n_1n_2\ldots n_l\ldots\right\rangle$$

比较上两式的结果，可得：

当$n_{l'}=n_l$时：$a_{l'}{}^{+}a_l-\varepsilon a_la_{l'}{}^{+}=1$

综合之后有，$a_{l'}{}^{+}a_l-\varepsilon a_la_{l'}{}^{+}=\delta_{ll'}$

至此$a_l{}^{+}$和a_l的对易关系（32.15）式已经全部证毕。

#

练习 **32.4** 证明不论玻色子或费米子，有　　（吴汉成）

$$[a_r^+ a_s, a_j^+] = \delta_{sj} a_r^+$$

$$[a_r^+ a_s, a_j] = -\delta_{jr} a_s$$

证明：a_l 和 a_m^+ 的对易关系的离散形式如下：

$$a_l^+ a_m^+ - \varepsilon a_m^+ a_l^+ = 0 \quad , \quad a_l a_m - \varepsilon a_m a_l = 0 \quad , \quad a_l a_m^+ - \varepsilon a_m^+ a_l = \delta_{lm} \quad \text{----（1）}$$

（一）对于玻色子 $\varepsilon = 1$，并代入（1）式中，则显然有：

$$a_l^+ a_m^+ - a_m^+ a_l^+ = 0 \quad , \quad a_l a_m - a_m a_l = 0 \quad , \quad a_l a_m^+ - a_m^+ a_l = \delta_{lm}$$

$$\therefore \quad [a_r^+ a_s, a_j^+] = a_r^+ [a_s, a_j^+] + [a_r^+, a_j^+] a_s$$

$$= a_r^+ (a_s a_j^+ - a_j^+ a_s) + (a_r^+ a_j^+ - a_j^+ a_r^+) a_s$$

$$= \delta_{sj} a_r^+$$

$$[a_r^+ a_s, a_j] = a_r^+ [a_s, a_j] + [a_r^+, a_j] a_s$$

$$= a_r^+ (a_s a_j - a_j a_s) + (a_r^+ a_j - a_j a_r^+) a_s$$

$$= -(a_j a_r^+ - a_r^+ a_j) a_s$$

$$= -\delta_{jr} a_s$$

（二）对于费米子 $\varepsilon = -1$，并入（1）式中，显然有：

$$a_l^+ a_m^+ + a_m^+ a_l^+ = 0 \quad , \quad a_l a_m + a_m a_l = 0 \quad , \quad a_l a_m^+ + a_m^+ a_l = \delta_{lm}$$

$$\therefore \quad [a_r^+ a_s, a_j^+] = a_r^+ [a_s, a_j^+] + [a_r^+, a_j^+] a_s$$

$$= a_r^+ (a_s a_j^+ - a_j^+ a_s) + (a_r^+ a_j^+ - a_j^+ a_r^+) a_s$$

$$\left(\because \quad a_j^+ a_r^+ = -a_r^+ a_j^+, a_s a_j^+ = \delta_{sj} - a_j^+ a_s \quad \right)$$

$$= a_r^+ (\delta_{sj} - a_j^+ a_s^+ - a_j^+ a_s^+) + (a_r^+ a_j^+ + a_r^+ a_j^+) a_s$$

$$= \delta_{sj} a_r^+ - 2 a_r^+ a_j^+ a_s^+ + 2 a_r^+ a_j^+ a_s$$

$$= \delta_{sj} a_r^+$$

$$[a_r^+ a_s, a_j] = a_r^+ [a_s, a_j] + [a_r^+, a_j] a_s$$

$$= a_r^+ (a_s a_j - a_j a_s) + (a_r^+ a_j - a_j a_r^+) a_s$$

（$\because$ $a_j a_s = -a_s a_j, a_r^+ a_j = \delta_{jr} - a_j a_r^+$）

$$= a_r^+(a_s a_j + a_s a_j) + (\delta_{jr} - a_j a_r^+ - a_j a_r^+) a_s$$

$$= 2a_r^+ a_s a_j + \delta_{jr} a_s - 2a_j a_r^+ a_s \quad (\because\ a_s a_j = -a_j a_s)$$

$$= \delta_{jr} a_s - 2a_r^+ a_j a_s - 2a_j a_r^+ a_s$$

$$= \delta_{jr} a_s - 2(a_r^+ a_j + a_j a_r^+) a_s$$

$$= -\delta_{jr} a_s$$

综合上述，显然得证。

#

32.5 证明：（何贤文）

$$[a_r a_s, a_j^+] = \varepsilon\delta_{sj} a_r + \varepsilon\delta_{ri} a_s$$
$$[a_r^+ a_s^+, a_j] = -\varepsilon\delta_{sj} a_r^+ - \varepsilon\delta_{rj} a_s^+$$

证：

由于 $\begin{matrix} a_r a_s - \varepsilon a_s a_r = 0 \\ a_r^+ a_s^+ - \varepsilon a_s^+ a_r^+ = 0 \end{matrix}$ 得到 $\begin{matrix} a_r a_s = \varepsilon a_s a_r \\ a_r^+ a_s^+ = \varepsilon a_s^+ a_r^+ \end{matrix}$

$$\begin{aligned} [a_r a_s, a_j^+] &= [\varepsilon a_s a_r, a_j^+] \\ &= \varepsilon a_s [a_r, a_j^+] + \varepsilon [a_s, a_j^+] a_r \\ &= \varepsilon\delta_{sj} a_r + \varepsilon\delta_{rj} a_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_r^+ a_s^+, a_j] &= [\varepsilon a_s^+ a_r^+, a_j] \\ &= \varepsilon a_s^+ [a_r^+, a_j] + \varepsilon [a_s^+, a_j] a_r^+ \\ &= -\varepsilon a_s^+ [a_j, a_r^+] - \varepsilon [a_j, a_s^+] a_r^+ \\ &= -\varepsilon\delta_{sj} a_r^+ - \varepsilon\delta_{rj} a_s^+ \end{aligned}$$

32.6 证明：（肖钰裴）

$$\left[G^{(1)}, a_j^{\ +}\right] = \sum_{b_r} a_r^{\ +} \langle b_r | g^{(1)} | b_j \rangle$$

$$\left[G^{(1)}, a_j\right] = \sum_{b_s} \langle b_s | g^{(1)} | b_j \rangle a_s$$

$$\left[G^{(2)}, a_j^{\ +}\right] = \frac{1}{2} \sum_{b_r b_s b_t} \left[(b_r b_s | g^{(2)} | b_t b_j) + \varepsilon (b_r b_s | g^{(2)} | b_j b_t) \right] a_r^{\ +} a_s^{\ +} a_t$$

$$\left[G^{(2)}, a_j\right] = -\frac{1}{2} \sum_{b_s b_t b_u} \left[(b_j b_s | g^{(2)} | b_t b_u) + \varepsilon (b_s b_j | g^{(2)} | b_t b_u) \right] a_s^{\ +} a_t a_u$$

证明：

$$G^{(1)} = \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l$$

$$\left[G^{(1)}, a_j^{\ +} \right] = \left[\sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l , a_j^{\ +} \right]$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l a_j^{\ +} - a_j^{\ +} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_{l'}^{+} a_l a_j^{\ +} - \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_j^{\ +} a_{l'}^{+} a_l$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle (a_{l'}^{+} a_l a_j^{\ +} - a_j^{\ +} a_{l'}^{+} a_l) = \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle (a_{l'}^{+} a_l a_j^{\ +} - \varepsilon a_{l'}^{+} a_j^{\ +} a_l)$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle \left[a_{l'}^{+} (a_l a_j^{\ +} - \varepsilon a_j^{\ +} a_l) \right] = \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l$$

$$\left[G^{(1)}, a_j \right] = \left[\sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l , a_j \right]$$

$$= a_j \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l - \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} a_{l'}^{+} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle a_l a_j$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle (a_j a_{l'}^{+} a_l - a_{l'}^{+} a_l a_j)$$

$$= \sum_{b_{l'}} \sum_{b_l} \langle b_{l'} | g^{(1)} | b_l \rangle (a_j a_{l'}^{+} a_l - \varepsilon a_{l'}^{+} a_j a_l) = \sum_{b_s} \langle b_s | g^{(1)} | b_j \rangle a_s$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) a_m a_l$$

$$\left[G^{(2)}, a_j^{\ +} \right] = \left[\frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) a_m a_l , a_j^{\ +} \right]$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) a_m a_l a_j^{\ +}$$

$$- \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} a_j^{\ +} a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) a_m a_l$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) (a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_m a_l a_j^{\ +} - a_j^{\ +} a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_m a_l)$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) (a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_m a_l a_j^{\ +} - \varepsilon a_{l'}^{\ +} a_j^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_m a_l)$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) (a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_m a_l a_j^{\ +} - a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} a_j^{\ +} a_m a_l)$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{b_{l'}} \sum_{b_{m'}} \sum_{b_l} \sum_{b_m} (b_{l'} b_{m'} | g^{(2)} | b_l b_m) \left[a_{l'}^{\ +} a_{m'}^{\ +} (\delta_{lj} a_m + \varepsilon \delta_{mj} a_l) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{b_r b_s b_t} \left[(b_r b_s | g^{(2)} | b_t b_j) + \varepsilon (b_r b_s | g^{(2)} | b_j b_t) \right] a_r^{\ +} a_s^{\ +} a_t$$

$$\left[G^{(2)}, a_j\right] = -\frac{1}{2}\sum_{b_s b_t b_u}\left[(b_j b_s|g^{(2)}|b_t b_u) + \varepsilon(b_s b_j|g^{(2)}|b_t b_u)\right]a_s^{+} a_t a_u$$

#

32.7

练习　32.8　写出全同粒子系统的总轨道角动量L_z、L_+和L_-的二次量子化形式。（谷巍）

解：在离散本征值谱的情况下，全同粒子系统的一般算符 G 的二次量子化形式为

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} + \cdots = \sum_{b_{l'}}\sum_{b_l} a_{l'}^{\dagger}\langle b_{l'}|g^{(1)}|b_l\rangle a_l + \frac{1}{2}\sum_{b_{l'}}\sum_{b_{m'}}\sum_{b_l}\sum_{b_m} a_{l'}^{\dagger}a_{m'}^{\dagger}(b_{l'}b_{m'}|g^{(2)}|b_l b_m)a_m a_l + \cdots$$ 对于全同粒子系统的总轨道角动量L_z、L_+和L_-，可知它们是单体算符之和的形式，所以只需要保留上式右边的第一项。则有：

$$L_z = \sum_{b_{l'}}\sum_{b_l} a_{l'}^{\dagger}\langle b_{l'}|l_z|b_l\rangle a_l$$

$$L_+ = \sum_{b_{l'}}\sum_{b_l} a_{l'}^{\dagger}\langle b_{l'}|l_+|b_l\rangle a_l$$

$$L_- = \sum_{b_{l'}}\sum_{b_l} a_{l'}^{\dagger}\langle b_{l'}|l_-|b_l\rangle a_l$$

又因为L_z、L_+和L_-有共同的本征矢量$|lm\rangle$，且存在下面的关系：

$$L_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle$$

$$L_\pm|lm\rangle = \sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\hbar|l, m\pm 1\rangle$$

我们可取

$$B = L_z, L_+, L_-, |b\rangle = |lm\rangle, a^{\dagger}(b) = a_{lm}^{\dagger}$$

则全同粒子系统的总轨道角动量L_z、L_+和L_-的二次量子化形式为：

$$L_z = \sum_{l'm'}\sum_{lm} a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|l_z|lm\rangle a_{lm} = \sum_{l'm'}\sum_{lm} m\hbar a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|lm\rangle a_{lm} = \sum_{lm} m\hbar a_{lm}^{\dagger}a_{lm}$$

$$L_+ = \sum_{l'm'}\sum_{lm} a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|l_+|lm\rangle a_{lm} = \sum_{l'm'}\sum_{lm}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|l, m+1\rangle a_{lm}$$

$$= \sum_{lm}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar a_{l,m+1}^{\dagger}a_{lm}$$

$$L_- = \sum_{l'm'}\sum_{lm} a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|l_-|lm\rangle a_{lm} = \sum_{l'm'}\sum_{lm}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar a_{l'm'}^{\dagger}\langle l'm'|l, m-1\rangle a_{lm}$$

$$= \sum_{lm}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar a_{l,m-1}^{\dagger}a_{lm}$$

#

32.9 利用$L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$，以及上题结果写出$L^2$的二次量子化形式，并与（32.23）式比较。

（做题者：班卫华 审核者：何贤文）

证明：上题结果为：$L_z=\sum_{lm}m\hbar a_{lm}^{+}a_{lm},L_z^{-}=\sum_{l'm'}m'\hbar a_{l'm'}^{+}a_{l'm'}$，

$$L_{+}=\sum_{l'm'}\sqrt{(l'-m')(l'+m'+1)}\hbar a_{l',m'+1}^{+}a_{l'm'}\ ,$$

$$L_{-}=\sum_{lm}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar a_{l,m-1}^{+}a_{lm}\ ,$$

代入 $L^2=L_{+}L_{-}+L_z^2-\hbar L_z$，得

$$L^2=\left[\sum_{l'm'}\sqrt{(l'-m')(l'+m'+1)}\hbar a_{l',m'+1}^{+}a_{l'm'}\right]\left[\sum_{lm}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar a_{l,m-1}^{+}a_{lm}\right]$$

$$+\left[\sum_{lm}m\hbar a_{lm}^{+}a_{lm}\right]\left[\sum_{l'm'}m'\hbar a_{l'm'}^{+}a_{l'm'}\right]-\hbar\sum_{lm}m\hbar a_{lm}^{+}a_{lm}$$

$$=\sum_{l'm'}\sum_{lm}\hbar^2\sqrt{(l'-m')(l'+m'+1)}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}a_{l',m'+1}^{+}a_{l,m-1}^{+}a_{l'm'}a_{lm}$$

$$+\sum_{l'm'}\sum_{lm}mm'\hbar^2a_{l'm'}^{+}a_{lm}^{+}a_{l'm'}a_{lm}-\sum_{lm}m\hbar^2a_{lm}^{+}a_{lm}$$

与（32.23）式比较得，当 $m=-l(l+1)$ 时，两式一样。

#

32.10 （完成人：何贤文 审题人：班卫华）

仿上题，写出自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子系统的总自旋算符 S_z,S_+,S_- 和 S^2 的二次量子化形式。

解： 全同粒子系统的一般算符 G 的二次量子化形式为

$$G=G^{(1)}+G^{(2)}+\cdots=\sum_{b_{l'}}\sum_{b_l}a_{l'}^{\dagger}\langle b_{l'}|g^{(1)}|b_l\rangle a_l+\frac{1}{2}\sum_{b_{l'}}\sum_{b_{m'}}\sum_{b_l}\sum_{b_m}a_{l'}^{\dagger}a_{m'}^{\dagger}(b_{l'}b_{m'}|g^{(2)}|b_lb_m)a_ma_l+\cdots$$ 对于自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子系统的总自旋算符 S_z,S_+,S_- 和 S^2，可知它们是单体算符之和的形式，所以只需要保留上式右边的第一项。

又因为全同粒子系统的总自旋算符 S_z,S_+,S_- 和 S^2 有下面的关系：

$$S_z|s,m\rangle=m\hbar|s,m\rangle$$

$$S_{\pm}|s,m\rangle=\sqrt{s(s+1)-(m\pm1)}\hbar|s,m\rangle$$

$$S^2|s,m\rangle=s(s+1)\hbar^2|s,m\rangle$$

取

$$B=S_z,S\pm,S^2;|b\rangle=|s,m\rangle,|s,m\pm1\rangle;a^{\dagger}(b)=a_{lm}^{\dagger}$$

则全同粒子系统的总自旋算符 S_z,S_+,S_- 和 S^2 的二次量子化形式为：

$$S_z = \sum_{s'm'} \sum_{sm} a^{+}_{s'm'} \langle s'm' | S_z | sm \rangle a_{sm} = \sum_{s'm'} \sum_{sm} m\hbar a^{+}_{s'm'} \langle s'm' | sm \rangle a_{sm} = \sum_{sm} m\hbar a^{+}_{sm} a_{sm}$$

$$S\pm = \sum_{s'm'} \sum_{sm} a^{+}_{s'm'} \langle s'm' | S_{\pm} | s, m \pm 1 \rangle a_{sm} = \sum_{s'm'} \sum_{sm} \sqrt{s(s+1) - (m \pm 1)} \hbar a^{\pm}_{s'm'} \langle s'm' | s, m \pm 1 \rangle a_{sm}$$

$$= \sum_{sm} \sqrt{\frac{3}{4} - (m \pm 1)} \hbar a^{\pm}_{s,m\pm 1} a_{sm}$$

$$S^2 = \sum_{s'm'} \sum_{sm} a^{\pm}_{s'm'} \langle s'm' | S^2 | sm \rangle a_{sm} = \sum_{s'm'} \sum_{sm} s(s+1) \hbar^2 a^{\pm}_{s'm'} \langle s'm' | sm \rangle a_{sm} = \sum_{sm} \frac{3}{4} \hbar^2 a^{+}_{sm} a_{sm}$$

#

33.1　见课件。

练习 33.1　（梁端）

解：$\frac{2\pi}{V}\int re^{-\mu r}\left(\frac{2}{kr}\sin(kr)\right)dr$

$$=\frac{4\pi}{Vk}\int e^{-\mu r}\sin(kr)dr$$

$$=\frac{4\pi}{Vk^2}\int e^{\left(-\frac{\mu}{k}\right)(kr)}\sin(kr)d(kr)$$

$$=\frac{4\pi}{Vk^2}\frac{e^{-\mu r}}{\left(-\frac{\mu}{k}\right)^2+1}\left[\left(-\frac{\mu}{k}\right)\sin(kr)-\cos(kr)\right]$$

$$=\frac{1}{V}\frac{4\pi}{k^2+\mu^2}e^{-\mu r}\left[\left(-\frac{\mu}{k}\right)\sin(kr)-\cos(kr)\right]$$

取级数：$e^{\mu r}=1+\mu r$　　　（1）

$\sin(kr)=kr$　　　（2）

$\cos(kr)=1$　　　（3）

将（1），（2），（3）代入上式：

$$=\frac{1}{V}\frac{4\pi}{k^2+\mu^2}\frac{1+\mu r}{1+\mu r}$$

$$=\frac{1}{V}\frac{4\pi}{k^2+\mu^2}$$

因为$k=k_{l'}-k_l$　　代入上式：

$$=\frac{1}{V}\frac{4\pi}{(k_{l'}-k_l)^2+\mu^2}$$

#

33.2　见课件。

33.3 计算积分式 33.30　（解题人：李泽超　审核人：熊凯）

积分式 33.30 为：

$$F(q)=\int d^3k\theta(k_F-|k+q|)\theta(k_F-k)=\iiint\limits_{\substack{|k+q|\langle k_F\\ k\langle k_F}}dk_xdk_ydk_z$$

解：本积分式，相当与求两个球相交的部分的体积，即两个球缺的体积，

下面先计算一个球缺的体积。

球缺的体积公式为：

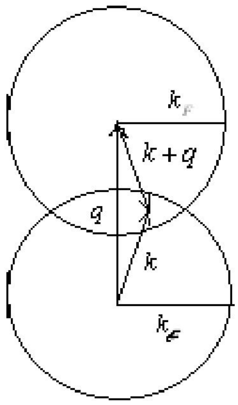
$$V = {\pi h\left(3r^2 + h^2\right)} \big/ 6$$

$$V = {\pi\left(k_F - \frac{q}{2}\right)\left[3\left(k_F{}^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2\right) + \left(k_F - \frac{q}{2}\right)^2\right]} \Big/ 6$$

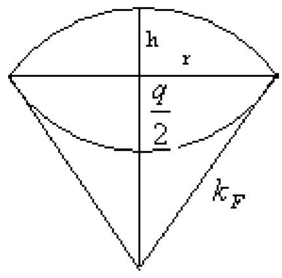
$$= \frac{\pi}{6}\left(k_F - \frac{q}{2}\right)\left(4k_F{}^2 - 2\left(\frac{q}{2}\right)^2 - qk_F\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(4k_F^3 - 3qk^2{}_F + \frac{q^3}{4}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}k_F^3 - 2qk^2{}_F + \frac{q^3}{24}\right)$$



图示



图示2

$$F(q) = 2V = 2\pi\left(\frac{2}{3}k_F^3 - 2qk^2{}_F + \frac{q^3}{24}\right)$$

积分式推导完毕。

#

34.1

34.2 按照正文中的对哈特利—福克方程（34.22）式中第二项的理解，这一项是处于 k 态的电子同其余电子之间的库仑相互作用。既然这样，$\rho(\vec{r})$即（34.20）式对 j 的取和中，就不应含有 j=k 的项，但是现在（34.22）式中并未将 j=k 这一项去掉，这是为什么？（邱鸿广）
解：文中哈特利-福克方程（31.14）式在位置表象中的形式为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})\right)\varphi_k(\vec{r}\sigma)+$$

$$\sum_j\sum_{\sigma'}\int d\vec{r}'\varphi_j^*(\vec{r}'\sigma')\frac{e_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\varphi_k(\vec{r}\sigma)\varphi_j(\vec{r}'\sigma')-$$

$$\sum_j\sum_{\sigma'}\int d\vec{r}'\varphi_j^*(\vec{r}'\sigma')\frac{e_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\varphi_j(\vec{r}\sigma)\varphi_k(\vec{r}'\sigma')-$$

$$\lambda_k\varphi_k(\vec{r}\sigma)=0$$

在式子中当 $j=k$ 时，式子中的第二项和第三项相减就消去了。所以（34.22）式中并未将 $j=k$ 这一项去掉。

#

练习 34.3　在本小节位置表象的范围内，证明满足哈特利-福克方程的不同单粒子态 $\varphi_j(\vec{r}\sigma)$ 和 $\varphi_k(\vec{r}\sigma)$ 是互相正交的。　（做题人：田军龙　审题人：丘鸿广）

证明：
$$\int\varphi_j^*(\vec{r}\sigma)\varphi_k(\vec{r}\sigma)d\tau$$
$$=\int\langle b_j|\vec{r}\sigma\rangle\langle\vec{r}\sigma|b_k\rangle d\tau$$
$$=\langle b_j|b_k\rangle$$

∵　$|b_i\rangle$是一套正交归一基矢量且 $j\neq k$

∴　$\langle b_j|b_k\rangle=\delta_{jk}=0$　当 $j\neq k$

∴　$\int\varphi_j^*(\vec{r}\sigma)\varphi_k(\vec{r}\sigma)d\tau=0$

∴　$\varphi_j(\vec{r}\sigma)$ 和 $\varphi_k(\vec{r}\sigma)$ 是互相正交的。

35.1 态函数的正交归一化条件是什么？（侯书进做。 韩丽芳审核）
解：归一化条件是

$$\left\langle \psi\left(n_1'n_2'n_3'\cdots n_l'\cdots\right)\middle|\psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)\right\rangle = \delta\left(n-\sum n_i\right)\delta_{n_1'n_1}\delta_{n_2'n_2}\delta_{n_3'n_3}\cdots\delta_{n_l'n_l}\cdots$$

#

35.2 （1）利用 $\widehat{N}_l = \widehat{a}_l{}^{+}\widehat{a}_l, \widehat{a}_l{}^{+}\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right) = \varepsilon_l\sqrt{n_l}\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_{l-1}\cdots\right)$ 以及

$\widehat{a}_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right) = \varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_{l+1}\cdots\right)$

证明：$\widehat{N}_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right) = n_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$

(2)上式是否说明$\psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$是占有数算符$\hat{N}_l$的本征函数？如果是，说明理由：如果不是，那么$\hat{N}_l$的本征函数是什么？（侯书进做。 韩丽芳审核）

证明：$\widehat{N}_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right) = \widehat{a}_l{}^{+}\widehat{a}_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$

$$= \widehat{a}_l{}^{+}\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_{l+1}\cdots\right)$$
$$= \varepsilon_l\sqrt{n_l}\,\varepsilon_l\sqrt{(n_l-1)+1}\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$$
$$= n_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$$

即证得：$\widehat{N}_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right) = n_l\Psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$

（2） $\psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$ 不是占有数算符 $\hat{N}_l$ 的本征函数，因为 $\hat{N}_l$ 所作用的 $\psi\left(n_1n_2n_3\cdots n_l\cdots\right)$中的$n$值是变量，$\hat{N}_l$的本征函数是空间的基失。

#

练习 35.3 从定义式（35.14）式和（35.15）式出发，验证对易关系（35.10）式，并与练习 32.3 比较。（做题人：董廷旭 校对人:刘强）
解：

我们设定$l' > l$

$$\hat{a}_l^{+}\hat{a}_{l'}^{+}\psi\left(n_1n_2n_3\ldots n_l\ldots n_{l'}\ldots\right)$$
$$= \hat{a}_l^{+}\varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+n_l+\cdots+n_{l'-1}}\sqrt{n_{l'}}\,\psi\left(n_1n_2n_3\ldots n_l\ldots n_{l'}-1\ldots\right)$$
$$= \varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+n_{l-1}}\varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+(n_l-1)+\cdots+n_{l'-1}}\sqrt{n_l}\sqrt{n_{l'}}\,\psi\left(n_1n_2n_3\ldots n_l-1\ldots n_{l'}-1\ldots\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{l}^{+}\psi\left(n_1 n_2 n_3 \ldots n_l \ldots n_{l'} \ldots\right) \\
&= \hat{a}_{l'}^{+}\varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+n_{l-1}}\sqrt{n_l}\,\psi\left(n_1 n_2 n_3 \ldots n_l - 1 \ldots n_{l'} \ldots\right) \\
&= \varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+n_{l-1}}\varepsilon^{n_1+n_2+\cdots+n_l+\cdots+n_{l'-1}}\sqrt{n_l}\sqrt{n_{l'}}\,\psi\left(n_1 n_2 n_3 \ldots n_l - 1 \ldots n_{l'} - 1 \ldots\right)
\end{aligned}
$$

比较两式的ε的幂次我们可以发现正好差一个ε。

由此可得：$\hat{a}_{l}^{+}\hat{a}_{l'}^{+} - \varepsilon\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{l}^{+} = 0$

同理可证明$\hat{a}_{l}{}^{+}\hat{a}_{l'}^{+} - \varepsilon\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{l}{}^{+} = 0$和

$\hat{a}_{l}\hat{a}_{l'}^{+} - \varepsilon\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{l} = \delta_{ll'}$

#

练习 35.4　用（35.17）式的修改定义，重新做（35.16）式的计算。

（做题人：董廷旭　校对人:刘强）

解：

$$
\begin{aligned}
&\left(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+} + \hat{a}_l^{+}\hat{a}_l\right)\psi\left(\ldots n_l \ldots\right) \\
&= \hat{a}_l\delta_{n_l,1}\varepsilon_l\sqrt{n_l}\,\psi\left(n_1 n_2 \ldots n_l - 1 \ldots\right) + \hat{a}_l^{+}\delta_{n_l,0}\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\,\psi\left(n_1 n_2 \ldots n_l + 1 \ldots\right) \\
&= \delta_{n_l,0}\delta_{n_l+1,1}\varepsilon_l\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\sqrt{n_l+1}\,\psi\left(n_1 n_2 \ldots n_l \ldots\right) + \delta_{n_l,1}\delta_{n_l-1,0}\varepsilon_l\varepsilon_l\sqrt{n_l}\sqrt{n_l}\,\psi\left(n_1 n_2 \ldots n_l \ldots\right)
\end{aligned}
$$

当$n_l = 0$时$\left(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+} + \hat{a}_l^{+}\hat{a}_l\right)\psi\left(\ldots n_l \ldots\right) =$（$n_l + 1$）$\psi\left(\ldots n_l \ldots\right)$

当$n_l = 1$时$\left(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+} + \hat{a}_l^{+}\hat{a}_l\right)\psi\left(\ldots n_l \ldots\right) = n_l\psi\left(\ldots n_l \ldots\right)$

综上可知$\left(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+} + \hat{a}_l^{+}\hat{a}_l\right)\psi\left(\ldots n_l \ldots\right) = \psi\left(\ldots n_l \ldots\right)$

#

练习 35.5　用(35.18)式的修改定义,重新做(35.16)式的计算,用这种定义避免死而复生的问题靠得住吗?　（作题人：宁宏新）

解:

$$
\begin{aligned}
&(\hat{a}_l\hat{a}_l{}^{+} + \hat{a}_l{}^{+}\hat{a}_l)\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) \\
&= \hat{a}_l\hat{a}_l{}^{+}\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) + \hat{a}_l{}^{+}\hat{a}_l\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) \\
&= \hat{a}_l\varepsilon_l\sqrt{n_l}\,\Psi\left(\cdots\cdots 1 - n_l \cdots\cdots\right) + \hat{a}_l{}^{+}\varepsilon_l\sqrt{1-n_l}\,\Psi\left(\cdots\cdots 1 - n_l \cdots\cdots\right) \\
&= \varepsilon_l\sqrt{1-n_l}\,\varepsilon_l\sqrt{1-n_l}\,\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) + \varepsilon_l\sqrt{n_l}\,\varepsilon_l\sqrt{n_l}\,\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) \\
&= (1-n_l)\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) + n_l\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) \\
&= \Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right)
\end{aligned}
$$

此结果与对易关系 $\hat{a}_l\hat{a}_l{}^{+} + \hat{a}_l{}^{+}\hat{a}_l = 1$ 一致，但是正确表达式为

$$
(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+} + \hat{a}_l^{+}\hat{a}_l)\Psi\left(\cdots\cdots n \cdots\cdots\right) = \begin{cases} (n_l+1)\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) n_l = 0 \\ n_l\Psi\left(\cdots\cdots n_l \cdots\cdots\right) n_l = 1 \end{cases}
$$

也就是说 $n_l = 0$ 或 $n_l = 1$ 只取两项中的一项,而此修改定义的推导中是第一项和第二项都有

连续作用,可见这种避免死而复生的问题不完全靠得住.

#

35.6　根据定义式（35.12)式和(35.13)式对费米子系统进行计算:

$(\hat{a}_l\hat{a}_l^{+}+\hat{a}_l^{+}\hat{a}_l)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle$ 讨论其中的死而复生问题.（做题人:宁宏新）

解:

$$
\begin{aligned}
&(a_la_l^{+}+a_l^{+}a_l)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle\\
&=a_la_l^{+}|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle+a_l^{+}a_l|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle\\
&=a_l\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}|n_1n_2\cdots n_l+1\cdots\rangle+a_l^{+}\varepsilon_l\sqrt{n_l}|n_1n_2\cdots n_l-1\cdots\rangle\\
&=\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}a_l|n_1n_2\cdots n_l+1\cdots\rangle+\varepsilon_l\sqrt{n_l}a_l^{+}|n_1n_2\cdots n_l-1\cdots\rangle\\
&=\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}\varepsilon_l\sqrt{n_l+1}|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle+\varepsilon_l\sqrt{n_l}\varepsilon_l\sqrt{n_l}|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle\\
&=(n_l+1)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle+n_l|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle\\
&=(2n_l+1)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle
\end{aligned}
$$

由费米子的对易关系式: $a_la_l^{+}+a_l^{+}a_l=1$ 可知这个结果是错误的,上式第二步中,第一项中 a_l 作用对象中含有 $|n_1n_2\cdots n_l+1\cdots\rangle$ 这说明当 n_l=1 时,此项为 0,接下来此项还为零,同理,对于第二项中 a_l^{+} 的作用对象含有 $|n_1n_2\cdots n_l-1\cdots\rangle$,当 $n_l=0$ 时,此项为零.所以上式推导时出现死而复生的现象,应在最后结果中, $n_l=0$ 时只取第一项, $n_l=1$ 时只取第二项.

即: $$(a_la_l^{+}+a_l^{+}a_l)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle=\begin{cases}(n_l+1)|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle & n_l=0\\ n_l|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle & n_l=1\end{cases}$$

$$=|n_1n_2\cdots n_l\cdots\rangle$$

#

36.1 由一般公式（31. 28）式取位置表象导出（36.4）

解：由一般公式

$$G=\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}$$
$$\times\left|b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right\rangle\left\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right|G\left|b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle\left\langle b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right|$$
$$=\frac{1}{n!}\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}$$
$$\times a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})\cdots a^{+}(b^{\nu'})\left|0\right\rangle\left\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right|G\left|b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle$$
$$\times\left\langle 0\right|a(b^{\nu})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

根据公式：$a^{+}(b)=\int dx\langle x|b\rangle\boldsymbol{\psi}^{+}(x)$　　$a(b)=\int dx\langle b|x\rangle\boldsymbol{\psi}(x)$ 可知

一般公式的位置表象为：

$$H=\int dx^{\alpha'}\psi^{+}(x^{\alpha'})U\psi(x^{\alpha'})+\frac{1}{2}\iint dx^{\beta'}dx^{\alpha'}\,\psi^{+}(x^{\beta'})\psi^{+}(x^{\alpha'})V\psi(x^{\alpha'})\psi(x^{\beta'})$$
$$+\frac{1}{3!}\iiint dx^{\alpha'}dx^{\beta'}dx^{\gamma'}\iiint dx^{\alpha}dx^{\beta}dx^{\gamma}\psi^{+}(x^{\alpha'})\psi^{+}(x^{\beta'})\psi^{+}(x^{\gamma'})$$
$$\times(x^{\alpha'}x^{\beta'}x^{\gamma'}\left|g^{(3)}\right|x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma})a(x^{\gamma})a(x^{\beta})a(x^{\alpha})+\cdots$$

所以对单粒子在位置的表象可以表示为：

$$H=\int dx^{\alpha'}\psi^{+}(x^{\alpha'})U\psi(x^{\alpha'})+\frac{1}{2}\iint dx^{\beta'}dx^{\alpha'}\,\psi^{+}(x^{\beta'})\psi^{+}(x^{\alpha'})V\psi(x^{\alpha'})\psi(x^{\beta'})$$

#

36.2 证明（36.9）式，从证明过程中确认，只要 H 中各项具有同样数目的产生算符和消灭算符，则这一项就与 N 对易。

解：设 H 为：

$$\hat{H}=\sum_{b_{l'}}\sum_{b_l}\hat{a}_{l'}^{+}\langle b_{l'}|U|b_l\rangle\hat{a}_l+\frac{1}{2}\sum_{b_{l'}}\sum_{b_{m'}}\sum_{b_l}\sum_{b_m}\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{m'}^{+}(b_{l'}b_{m'}|V|b_lb_m)\hat{a}_m\hat{a}_l$$

则（36.9）式表示为：

$$[H,N]=HN-NH=(\sum_{b_{l'}}\sum_{b_l}\hat{a}_{l'}^{+}\langle b_{l'}|U|b_l\rangle\hat{a}_l+\frac{1}{2}\sum_{b_{l'}}\sum_{b_{m'}}\sum_{b_l}\sum_{b_m}\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{m'}^{+}(b_{l'}b_{m'}|V|b_lb_m)\hat{a}_m\hat{a}_l)N$$
$$-N(\sum_{b_{l'}}\sum_{b_l}\hat{a}_{l'}^{+}\langle b_{l'}|U|b_l\rangle\hat{a}_l+\frac{1}{2}\sum_{b_{l'}}\sum_{b_{m'}}\sum_{b_l}\sum_{b_m}\hat{a}_{l'}^{+}\hat{a}_{m'}^{+}(b_{l'}b_{m'}|V|b_lb_m)\hat{a}_m\hat{a}_l)$$

根据对易关系式：$[N,a(b)]=-a(b)$　　$[N,a^{+}(b)]=a^{+}(b)$

可知：$[H,N]=0$

从计算过程可以知道只要 H 中各项具有同样数目的产生算符和消灭算符，上式都成立。

#

练习 36.3 （吴汉成）

计算(36.19)式:即计算: $-[H_1,\psi(x,t)]=\int dy\psi^+(y,t)V(x,y)\psi(y,t)\psi(x,t)$.

解:由(36.18)式,知:

$$H_1=\frac{1}{2}\iint dx'dx\psi^{+H}(x',t)\psi^{+H}(x,t)V(x',x)\psi^H(x,t)\psi^H(x',t)$$

由于$\psi(x,t)$已经表示出海森伯绘景,计算中将上角 H 略去,同时为了方便,将H_1中的积分变量x'写成y',x写成y.显然H_1可写成:

$$H_1=\frac{1}{2}\iint dy'dy\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)$$

所以:

$$-[H_1,\psi(x,t)]=-[H_1\psi(x,t)-\psi(x,t)H_1$$

$$=-[\frac{1}{2}\iint dy'dy\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)\psi(x,t)$$

$$-\psi(x,t)\frac{1}{2}\iint dy'dy\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)]$$

$$=-\frac{1}{2}\iint dy'dy[\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)\psi(x,t)$$

$$-\psi(x,t)\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)]\text{----------(1)}$$

把(1)式右边的第一大项: $\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)\psi(x,t)$中的$\psi(y',t)$移到$\psi^+(y',t)$的后面,得:

$$\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)\psi(x,t)$$

$$=\varepsilon^3\psi^+(y',t)\psi(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

$$=-\psi^+(y',t)\psi(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)\ \text{-------（2）}$$

(注:$\varepsilon=-1$表示每向前移动一项,函数就变为“-1”，上式向前移了 3 项，所以有$\varepsilon^3=-1$)

同理，首先把（1）式右边的第二大项：$\psi(x,t)\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)$中$\psi(y',t)$向前移到$\psi^+(y',t)$的后面，此时移动了三次，则有$\varepsilon^3$；然后再把$\psi(x,t)$往后移到$\psi(y,t)$的后面，此时移动了 5 项，则又有$\varepsilon^5$。经过上述二次大移动后，（1）式第二大项中，总改变了$\varepsilon^3\ \varepsilon^5=\varepsilon^8=1$，即：

$$\psi(x,t)\psi^+(y',t)\psi^+(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(y',t)$$

$$=\varepsilon^{8}\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)\psi^{+}(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

$$=\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)\psi^{+}(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

把(2)和(3)式代入(1)式得：

$$-[H_1,\psi(x,t)]=-\frac{1}{2}\iint dy'dy[-\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)\psi^{+}(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

$$-\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)\psi^{+}(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

$$=\iint dy'dy\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)\psi^{+}(y,t)V(y',y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$

根据归一化关系:$\int dy'\psi^{+}(y',t)\psi(y',t)=1$,并且把$V(y',y)$的$y'$写成$x$,代入上式得：

$$-[H_1,\psi(x,t)]=\int dy\psi^{+}(y,t)V(x,y)\psi(y,t)\psi(x,t)$$,于是得解。