Znajdowanie zer wielomianu w postaci Beziera za pomocą przycinania sześciennego

Maciej Pacut

Wrocław 2010

0.1 Wstęp

!!!!!!!!! Wstęp napisz na końcu, powinien on opisywac , co zostanie zawarte w pracy.

Jakie zastosowania ma znajdowanie zer? Szukanie przeciec krzywej z prosta. Szukanie najblizszych punktow na prostej. Niniejsza praca daje pogląd na to, czym jest szukanie zer wielomianu i jak napisać metodę szukania zer.

0.2 Numeryczne znajdowanie zer

Metoda znajdowania jednego zera funkcji dostaje argumenty:

1. pewien opis funkcji f, który umożliwia obliczenie wartości tej funkcji dla dowolnego argumentu
2. przybliżenie początkowe P_0, czyli przedział w którym szukamy zera funkcji f
3. żądana dokładność ε znalezienia zera funkcji f

Zakładając, że w przedziale P_0 znajduje się zero funkcji f, metoda numerycznego znajdowania jednego zera funkcji f generuje ciąg przedziałów $\langle P_0, P_1, ..., P_n\rangle$ o własnościach:

1. każdy przedział jest podprzedziałem poprzedniego przedziału:
$$P_k \subset P_{k-1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$
2. każdy przedział zawiera zero funkcji f
3. ostatni przedział P_n jest pierwszym przedziałem krótszym niż 2ε

Wynikiem jest środek przedziału P_n, który jest odległy od zera funkcji f o conajwyżej ε. W przypadku istnienia zera w przedziale P_0, udało się znaleźć zero funkcji f z dokładnością ε.

Przedstawiona została w powyższym schemacie pewna rodzina metod znajdowania jednego zera funkcji f. Metody w tej rodzinie różnią się realizacją funkcji generującej ciąg $\langle P_0, P_1, ..., P_n\rangle$. Kolejny przedział jest pewną funkcją poprzedniego przedziału. Przykładem metody znajdowania jednego zera funkcji jest bisekcja.

W bisekcji przedział P_{k+1} otrzymuje się z przedziału P_k z początkiem w a_k oraz końcem w b_k przez podzielenie P_k na dwie połowy: A i B oraz odrzucenie przedzialu w ktorym nie ma zera. Gdy w obu nie ma zera to stop, nie ma zera w P0.

! rysunek bisekcji

Istnieja innne rodziny metod szukania zer, np newton i pochodne

Dobrym przykładem metody tego typu jest bisekcja. Bisekcja to przyklad metody numerycnzego znajdowania jednego zera. Jej realizacja to nastepujaca funkcja przejscia z Pi do Pi+1: Dzielenie przedzialu na pol i rozwiazanie problemu decyzyjnego: czy w danym przedziale istnieje zero. W bisekcji do rozw. problemu decyzyjnego potrzebne jest zalozenie o ciaglosci funkcji f.

Przykladem na rysunku moze byc obliczanie pierwiastka kwadratowego.

Szukanie wszystkich zer rzeczywistych - bisekcja z dzieleniem przedziału na 2 gdy moze wystapic wiecej niz 1 zero w przedziale (np. gdy jest zbyt długi). Modyfikacja schematu.

Inne metody. Szybkosc zbieznosci jest jakoscia metody.

0.3 Znajdowanie zer wielomianów

Wzory analityczne na zera wielomianów niskiego stopnia (2 i 3 napisac, 4 wspomniec ze są) * Wyższego stopnia nalezy szukac numerycznie ** regula descartes ** twierdzenie Sturma. ** http://mathworld.wolfram.com/AbelsImpossibilityTheorem.html

Gdy mamy informację, że funkcja, której zer szukamy jest wielomianem, możemy skorzystać z własności wielomianów do: * przyspieszenia metody * upewnienia się, że znajdujemy wszystkie zera ** ograniczenie na liczbę zer rzeczywistych - stopień ** ustalenie pewnego przyblizenia poczatkowego

0.4 Wielomiany w formie Beziera

Baza Bernsteina. Również jest bazą wielomianów, co oznacza, że każdy wielomian w bazie potęgowej ma odpowiadające przedstawienie w bazei Bernsteina.

Zastosowanie: krzywe i powierzchnie w programach CAD (takze miejsce wymyslenia). Rysunek krzywej, rysunek powierzchni. W formie potegowej nie ma wyraznego powiazania geometrii wielomianu z jego wspolczynnikami.

Postac Beziera ma wiele ciekawych wlasnosci: * Otoczka wypukła. Krótki dowód jako kombinacja wypukla * Dzielenie przedziału. Algorytm de Casteljau. Poddziedzina. Rozszerzona definicja wielomianu Beziera ze względu na dziedzinę.

Metoda bezclip. Szybkosc metody bezclip. Wykorzystujemy właściwości wielomianu: podziedziena (do nowej otoczki wypuklej) Metoda pasuje do schematu w/w.

0.5 Aproksymacja wielomianu wielomianem

Bez wglebiania sie w samą aproksymacje? Mozna przedstawic aproksymacje jako zagadnienie geometryczne.

Przyblizenie wielomianu wysokiego stopnia wielomianem niskiego stopnia. “Redukcja stopnia”.

Aproksymujac wielomian upraszczamy go, tracac informacje (punkty krańcowe,) ale jednoczesnie zyskujac mozliwosc latwiejszego przetwarzania go.

Macierz redukcji. Obliczanie macierzy redukcji metodą Lewanowicza-Woźnego.

0.6 n-clip

Maksymalna różnica między wielomianami.

Podnoszenie stopnia.

Dwa wielomiany ograniczające.

Modyfikacja n-clip jest modyfikacja bisekcji. Wykorzystuje fakt, ze funkcja, ktorej zer szukamy jest wielomianem. Wykorzystujemy takze pewne wlasnosci wielomianow Beziera tj. podzial wielomianu w punkcje czy poddziedzina. (Potrzebne jest to przy wielokrotnym wykorzystaniu tej samej macierzy redukcji, zauwazmy rozwniez, ze po znalezieniu pierwszego zera nie warto szukac zer wielomianu P(x)/(x-r0), gdyz nie mozna wykorzystac tej samej macierzy redukcji)

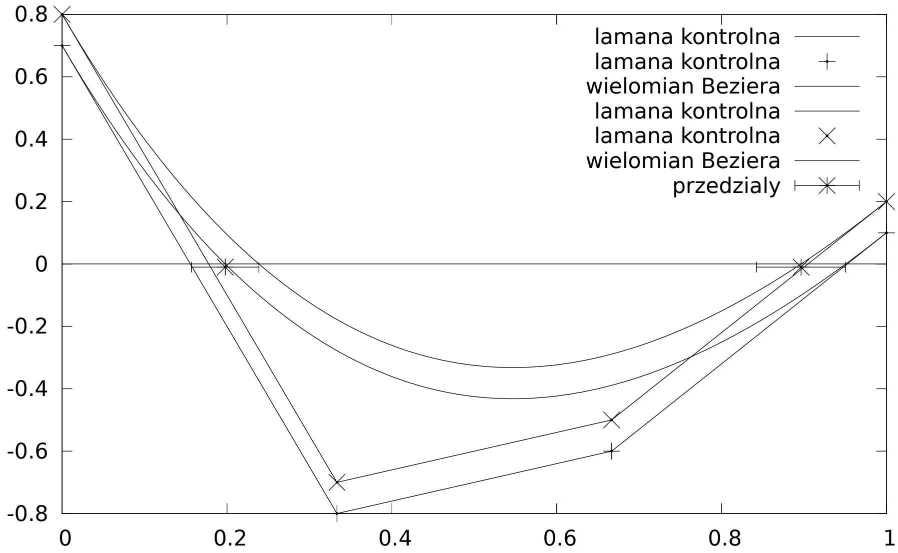
0.6.1 cubicclipping

0.6.2 podsumowanie

!! na koncu

0.7 Dodatek 1: Operacje na przedziałach

- odejmowanie przedziałów od siebie


lamana kontrolna
lamana kontrolna
wielomian Beziera
lamana kontrolna
lamana kontrolna
wielomian Beziera
przedzialy
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1