

Znajdowanie zer wielomianu w postaci Beziiera za
pomocą przycinania sześciennego

Maciej Pacut

Wrocław 2010

0.1 Wstęp

!!!!!!! Wstęp napisz na końcu, powinien on opisywać, co zostanie zawarte w pracy

Jakie zastosowania ma znajdowanie zer? Szukanie przecięcia krzywej z prostą. Szukanie najbliższych punktów na prostej. Niniejsza praca daje pogląd na to, czym jest szukanie zer wielomianu i jak napisać metodę szukania zer.

0.2 Numeryczne znajdowanie zer

0.2.1 Znajdowanie jednego zera

Metoda znajdowania jednego zera funkcji dostaje argumenty:

1. Pewien opis funkcji f , który umożliwia obliczenie wartości tej funkcji dla dowolnego argumentu.
2. Przedział początkowy P_0 , czyli przedział w którym szukamy zera funkcji f ; metoda nie znajdzie żadnego zera spoza tego przedziału.
3. Żądaną dokładność ε znalezienia zera funkcji f .

Metoda numerycznego znajdowania jednego zera funkcji f generuje ciąg przedziałów $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ o własnościach:

1. Każdy przedział tego ciągu jest podprzedziałem swojego poprzednika:

$$P_k \subset P_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

2. Każdy przedział zawiera zero funkcji f z przedziału P_0 .
3. P_n jest jedynym przedziałem krótszym niż 2ε .

Jeśli w przedziale P_0 metoda nie znalazła zera, to ostatnim przedziałem w ciągu jest przedział pusty; wtedy wynikiem jest brak zer. W przeciwnym przypadku wynikiem jest środek przedziału P_n , który jest odległy od zera funkcji f o co najwyżej ε . W przypadku istnienia zera w przedziale P_0 , udało się znaleźć zero funkcji f z dokładnością ε .

Przedstawiony został w powyższym schemacie pewien zbiór metod znajdowania jednego zera funkcji f . Metody w tym zbiorze różnią się realizacją funkcji generującej ciąg $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$. Generowanie ciągu można opisać w postaci szukania podprzedziału P_{k+1} dla danego przedziału P_k .

Przykładem metody znajdowania jednego zera funkcji jest bisekcja. W bisekcji przedział P_{k+1} otrzymuje się dzieląc P_k na pół i jako P_{k+1} wybierając tę połowę, w której jest możliwość wystąpienia zera. W przypadku, gdy w żadnej połowie nie ma możliwości wystąpienia zera, P_{k+1} jest przedziałem pustym i metoda kończy działanie. W przypadku, gdy w obu połowach jest

możliwość wystąpienia zera, jako P_{k+1} wybierana jest dowolna z połów. W bisekcji należy określić realizację operacji określającej możliwość wystąpienia zera w danym przedziale (w danej połowie przedziału P_k). Przykładową taką operacją jest sprawdzenie, czy funkcja f ma w końcach sprawdzanego przedziału różne znaki.

! rysunek bisekcji

W niniejszej pracy zajmiemy się inną metodą z wyżej przedstawionego zbioru metod szukania zer funkcji. Przykładem metody nie należącej do wyżej opisanego zbioru metod jest metoda Newtona. Znaczącą różnicą między metodą Newtona a metodami opisanymi wyżej jest generowanie ciągu przybliżeń zera funkcji zamiast generowania ciągu przedziałów zawierających zero.

0.2.2 Znajdowanie wielu zer

Zmodyfikujmy powyższy schemat znajdowania jednego zera. Zamiast generowania ciągu przedziałów, metoda szukania wielu zer generuje drzewo przedziałów. Drzewo przedziałów ma własności:

1. w korzeniu znajduje się przedział początkowy P_0
2. każdy potomek jest podprzedziałem swojego rodzica
3. przedział z każdego węzła zawiera zero funkcji f !! to niekoniecznie jest prawda
4. każdy liść L jest pierwszym przedziałem na ścieżce od korzenia do L , który ma długość mniejszą niż 2ε

Wynikiem jest zbiór środków niepustych przedziałów znajdujących się w liściach drzewa przedziałów.

!! Rysunek drzewa przedziałów w bisekcji przy dwóch podprzedziałach, rysunek drzewa przedziałów zdegenerowanego do listy !! Podpis do rysunku: W wypadku 1 zera drzewo może się degenerować do listy, która można traktować jako ciąg z poprzedniego schematu.

Przedstawiony został w powyższym schemacie pewien zbiór metod znajdowania jednego zera funkcji f . Metody w tym zbiorze różnią się realizacją funkcji generującej drzewo przedziałów. Generowanie drzewa można opisać w postaci operacji znajdowania zbioru podprzedziałów (potomków) dla danego przedziału (rodzica).

Przykładem metody szukania wielu zer funkcji jest modyfikacja opisanej w poprzednim podrozdziale metody bisekcji. W przypadku gdy w obu połowach dzielonego przedziału jest możliwość wystąpienia zera, obie połowy są określane jako potomkowie przedziału.

0.2.3 Szybkość metody znajdowania zer

Szybkość znajdowania zer jest jedną z miar jakości metody. Możemy do pomiaru szybkości użyć komputera. Można zaprogramować metodę szukania zer w pewnym ustalonym języku programowania, za pomocą ustalonego kompilatora i uruchomić ją na komputerze z ustalonym procesorem, ustaloną hierarchią pamięci, na ustalonym systemie operacyjnym, na którym pracują równolegle ustalone programy i podać na wejście programowi ustaloną funkcję, której zer szukamy i ustaloną dokładność. Czas, który upłynął od podania danych do otrzymania wyniku można traktować jako szybkość działania metody. To podejście ma pewne wady, takie jak testowanie metody na skończonej liczbie funkcji oraz brak możliwości powtórzenia eksperymentu w dokładnie tych samych warunkach. Jednak jest to pomiar łatwy do wykonania i dający pewne wskazówki co do szybkości działania metody.

Zamiast mierzenia czasu możemy zmierzyć liczbę operacji zmiennoprzecinkowych, które wykonano znajdując zera konkretnej funkcji. To podejście wyklucza wiele czynników, biorących udział w poprzednim pomiarze. Przykładowo, pomijane są realizacje operacji przydziału i zwalniania pamięci, wczytywania danych i wypisywania wyników. Zyskujemy możliwość porównywania metod znajdowania zer przez uruchamianie ich na tych samych danych, lecz na innych komputerach. Jednakże, wciąż jesteśmy ograniczeni do testowania na skończonej liczbie funkcji.

Lepsze metody zostały wymyślane. Możemy rozpatrzyć zależności między kolejnymi przedziałami dla dowolnej funkcji analizując operację znajdowania następnika przedziału w ciągu lub potomków przedziału w drzewie przedziałów. Posługujemy się pojęciem rzędu zbieżności, czyli miarą tego, ile krótszy jest następny wygenerowany przedział od poprzedniego. Oznaczając długość k -tego przedziału w ciągu jako e_k metoda ma rząd zbieżności p , gdy:

$$e_k^p \sim e_{k+1}$$

Biorąc pod uwagę, że przedziały nie mogą mieć ujemnej długości, że zależność może się stabilizować dopiero od pewnego kroku, oraz że analizowana metoda powinna być zbieżna, mamy rząd zbieżności 1 gdy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = u \quad 0 < u < 1$$

oraz rząd zbieżności p , $p > 1$, gdy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = u \quad u > 0$$

Przykładowo. bisekcja ma rząd zbieżności 1, gdyż następny przedział jest połową poprzedniego:

$$\begin{cases} e_{k+1} = \frac{1}{2}e_k \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

0.3 Znajdowanie zer wielomianów

0.3.1 Zera wielomianów niskiego stopnia

Do szukania zer wielomianów niskich stopni można użyć wzorów analitycznych.

Wielomian stopnia zerowego posiada zero lub nieskończoną liczbę pierwiastków. Wielomian stopnia pierwszego ma jeden pierwiastek, który można otrzymać za pomocą jednego dzielenia i zmiany znaku. Wielomian stopnia drugiego ma zero, jeden lub dwa pierwiastki, które można otrzymać wykonując proste operacje arytmetyczne i obliczając pierwiastek kwadratowy. Wielomian stopnia trzeciego ma jeden, dwa lub trzy pierwiastki, które można otrzymać za pomocą prostych działań arytmetycznych i obliczania pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia.

Obliczenie pierwiastka n -tego stopnia z liczby a wymaga rozwiązania równania $x^n = a$. Dlatego mimo istnienia analitycznych wzorów na zera wielomianów stopnia 2 i 3, obliczenie ich wymaga zastosowania metod numerycznych. Do obliczenia pierwiastka można użyć bisekcji, jednak lepsze rezultaty daje skorzystanie z metody Newtona.

0.3.2 Zera wielomianów dowolnego stopnia

Do znalezienia zer wielomianu stopnia wyższego niż 5 należy użyć metod numerycznych. Tych zer nie da się zapisać za pomocą skończonej liczby prostych operacji arytmetycznych i pierwiastkowania. Znajdowanie zer wielomianów nie jest jednak tak ogólnym zadaniem jak znajdowanie zer funkcji ciągłych. Możemy skorzystać z wielu własności charakterystycznych dla wielomianów. Własności te, takie jak ciągłość, ograniczenie liczby zer rzeczywistych przez stopień wielomianu, łatwość obliczania pochodnej dają narzędzia do konstrukcji specyficznych dla wielomianów metod szukania zer.

0.4 Wielomiany w postaci Beziara

Zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n jest przestrzenią wektorową o wymiarze n . Każda przestrzeń liniowa ma nieskończoną liczbę baz. Jedną z baz wielomianów jest baza potęgowa $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$. Inną bazą jest baza Bernsteina $B_0^n(x), \dots, B_n^n(x)$, gdzie $B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$. Wielomian wyrażony w bazie Bernsteina nazywany jest wielomianem w postaci Beziara. Każdy wielomian w bazie potęgowej $P(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ można przedstawić w bazie Bernsteina $P(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(x)$. Zależność między wektorem $p = <$

$p_0, \dots, p_n >$ a wektorem $b = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$ w formie $p[m_{ij}] = b$ nazywana jest macierzą konwersji albo macierzą przejścia.

Postać Beziera ma inne własności niż postać potęgowa. W jednych zastosowaniach sprawdza się postać potęgowa, w innych postać Beziera, w innych sprawdzają się jeszcze inne bazy. Przykładowym zastosowaniem postaci Beziera jest grafika komputerowa. Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (udowodnionym zresztą przy pomocy wielomianów w bazie Bernsteina) krzywa parametryczna opisana parą wielomianów może odwzorowywać dowolny kształt ciągły z dowolną dokładnością. Specjalne krzywe wielomianowe, krzywe, których wielomiany są opisane w postaci Beziera umożliwiają łatwe kształtowanie krzywej. Związek współczynników Beziera wielomianów opisujących krzywą jest wizualnie powiązany z kształtem krzywej.

!! rysunek wielomianu w postaci Beziera wraz z punktami kontrolnymi
!! rysunek krzywej !! rysunek powierzchni

Powodem powiązania geometrycznego postaci Beziera z jej wykresem jest jej własność otoczki wypukłej. Krótki dowód przez kombinację wypukłą.

!! rysunek otoczki wypukłej

0.5 Znajdowanie zer wielomianu w postaci Beziera

Przecięcie krzywa, powierzchnia-prosta jest problemem, który sprowadza się do znajdowania zera wielomianu w formie Beziera. Problem ten występuje np. w ray-tracingu, czyli wyświetlaniu sceny oświetlonej techniką śledzenia promieni w scenie, której obiekty są powierzchniami w postaci Beziera. Krótkie przedstawienie tej redukcji.

Pomysły na szukanie zer. Pierwszy pomysł to obliczenie macierzy przejścia (wspomnienie, że efektywne algorytmy wymagają czasu proporcjonalnego liniowo do stopnia, gdyż macierz przejścia jest wstęgowa). Jednakże, lepsze metody istnieją. Wykorzystują one pewne własności postaci Beziera.

* Dzielenie przedziału. Algorytm de Casteljau. Poddziedzina. Rozszerzona definicja wielomianu Beziera ze względu na dziedzinę.

Metoda bezclip. Aby zdefiniować bezclip wystarczy zdefiniować znajdowanie potomków przedziału w drzewie przedziału. PRZeciecie otoczki wypukłej punktów kontrolnych wielomianu z osią OX oraz ew. dzielenie na 2 części.

!! Dlaczego na 2 części? Bo rząd zbieżności jest 2. Czy to stwierdzenie jest prawdziwe i czy metode, która ma rząd zbieżności 3 najlepiej podzielić na więcej części?

!! rysunek kolejnych otoczek wypukłych

Szybkość metody bezclip.

Wykorzystujemy właściwości wielomianu: poddziedzina (do nowej otoczki wypukłej)

0.6 Aproksymacja wielomianu wielomianem

Aproksymacja to utworzenie uproszczonego modelu, który daje pewne informacje o oryginale i jest łatwiejszy do przetworzenia. Tutaj będziemy aproksymować wielomian wysokiego stopnia, którego zera nie można określić analitycznie wielomianem stopnia niskiego, którego zera możemy określić analitycznie. Musimy także określić, jak zera wielomianu niskiego stopnia różnią się od zer oryginalnego wielomianu.

Przybliżenie wielomianu wysokiego stopnia wielomianem niskiego stopnia. “Redukcja stopnia”.

Aproksymując wielomian upraszczamy go, tracąc informacje (punkty krańcowe,) ale jednocześnie zyskując możliwość łatwiejszego przetwarzania go.

Macierz redukcji. Obliczanie macierzy redukcji metodą Lewanowicza-Woźnego.

0.7 n-clip

Dzięki skorzystaniu z dalszych własności postaci Bezierra: * Maksymalna różnica między wielomianami dzięki łatwemu obliczaniu normy maksymalnej wielomianu różnicy. * Podnoszenie stopnia.

Dwa wielomiany ograniczające.

Wykorzystuje fakt, że funkcja, której zera szukamy jest wielomianem. Wykorzystujemy także pewne własności wielomianów Bezierra tj. podział wielomianu w punkcie czy poddziedzina. (Potrzebne jest to przy wielokrotnym wykorzystaniu tej samej macierzy redukcji, zauważmy również, że po znalezieniu pierwszego zera nie warto szukać zer wielomianu $P(x)/(x-r_0)$, gdyż nie można wykorzystać tej samej macierzy redukcji)

0.7.1 cubicclipping

0.7.2 podsumowanie

!! na koncu

0.8 Dodatek 1: Operacje na przedziałach

- odejmowanie przedziałów od siebie

