Definitionen

Sei $G(V, E)$ ein gerichteter Graph mit $|V| = m$ Knoten, bezeichnet mit den Zahlen $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq m-1$.

G hamilitonisch $\Leftrightarrow$ es ex. hamilitonische Kreis, d.h. ein geschlossener Pfad π in G, der alle Knoten aus V genau einmal enthält.

$\mathcal{V} = \{p_{x,t} \mid 0 \leq x \leq m-1,\ 0 \leq t \leq m-1\} \ \cup\ \{e_{x,y} \mid (x, y) \in ab\}$

I Interpretation:
${p_{x,t}}^I = \top \Leftrightarrow$ Knoten x ist in π an Position t
${e_{x,y}}^I = \top \Leftrightarrow$ in G gibt es eine Kante von x nach y

Bedingungen

Seien $\mathcal{F}_i$ aussagenlogische Formeln über der Menge der Variablen V.

(i) an jeder Position in π steht mindstens ein Knoten:

$$\mathcal{F}_1 = \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigvee_{j=0}^{m-1} p_{j,i}$$

(ii) an jeder Position in π steht höstens ein Knoten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{m-1} \Big(p_{i,j} \ \rightarrow\ \neg\big(\bigvee_{k=0,k\neq j}^{m-1} p_{i,k}\big)\Big) \\
&= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{m-1} \Big(\neg p_{i,j} \ \vee\ \neg\big(\bigvee_{k=0,k\neq j}^{m-1} p_{i,k}\big)\Big) \\
&= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{m-1} \Big(\neg p_{i,j} \ \vee\ \bigwedge_{k=0,k\neq j}^{m-1} \neg p_{i,k}\Big) \\
&= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{m-1} \bigwedge_{k=0,k\neq j}^{m-1} \Big(\neg p_{i,j} \ \vee\ \neg p_{i,k}\Big)
\end{aligned}$$

(iii) wenn es keine gerichtete Kante $(x, y) \in E$ von Knoten $x \in V$ nach $y \in V$ gibt, dann kann y nicht Nachfolger von x in π sein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 &= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0,j\neq i}^{m-1} \Big(\neg e_{i,j} \ \rightarrow\ \neg\big(\bigvee_{k=0}^{m-1} (p_{i,k} \wedge p_{j,k+1\ (mod\ m)})\big)\Big) \\
&= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0,j\neq i}^{m-1} \Big(e_{i,j} \ \vee\ \neg\big(\bigvee_{k=0}^{m-1} (p_{i,k} \wedge p_{j,k+1\ (mod\ m)})\big)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0, j\neq i}^{m-1} \left(e_{i,j} \ \vee \ \bigwedge_{k=0}^{m-1} \neg(p_{i,k} \wedge p_{j,k+1 \ (mod \ m)}) \right)$$

$$= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0, j\neq i}^{m-1} \left(e_{i,j} \ \vee \ \bigwedge_{k=0}^{m-1} (\neg p_{i,k} \ \vee \ \neg p_{j,k+1 \ (mod \ m)}) \right)$$

$$= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0, j\neq i}^{m-1} \bigwedge_{k=0}^{m-1} \left(e_{i,j} \ \vee \ \neg p_{i,k} \ \vee \ \neg p_{j,k+1 \ (mod \ m)} \right)$$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3 \wedge \bigwedge_{e \in E} e_{i,j}$ mit $e = (i, j), i \neq j$

es gibt Interpretation I mit $I \models \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt hamilitonischen Kreis in G $\Leftrightarrow$ G hamilitonisch.