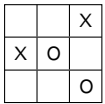
Tic-Tac-Toe like a Pro

Vortrag zum Thema Spielbäume

Joschka Heinrich

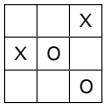


Proseminar Theoretische Informatik
Fakultät Informatik, TU Dresden
15.02.2018

Tic-Tac-Toe like a Bro

Vortrag zum Thema Spielbäume

Joschka Heinrich

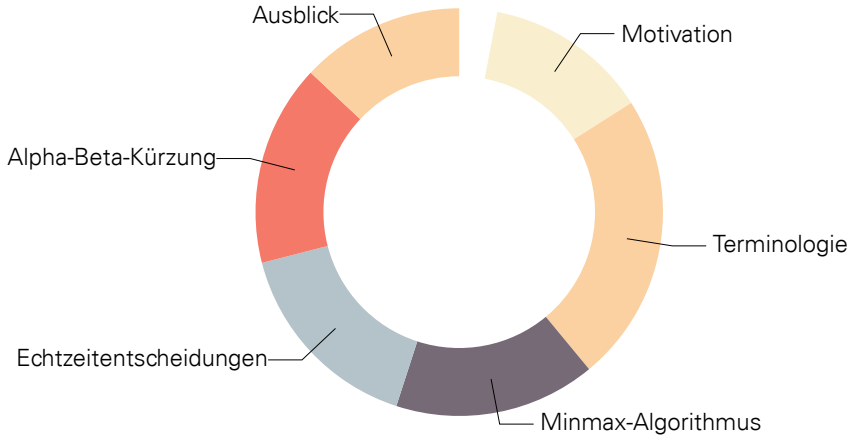


Proseminar Theoretische Informatik
Fakultät Informatik, TU Dresden
15.02.2018

Wie wähle ich in einem Spiel den günstigsten Zug?

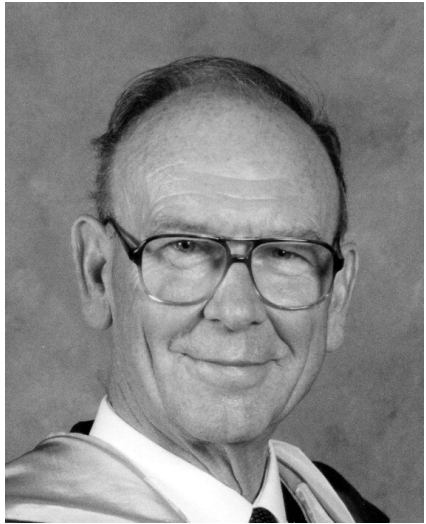
Agenda

Tic-Tac-Toe like a Pro



Donald Michies „Menace“

Motivation

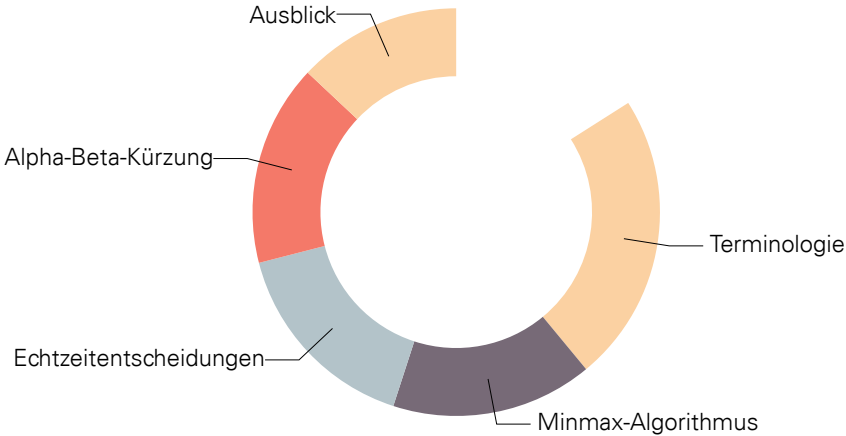


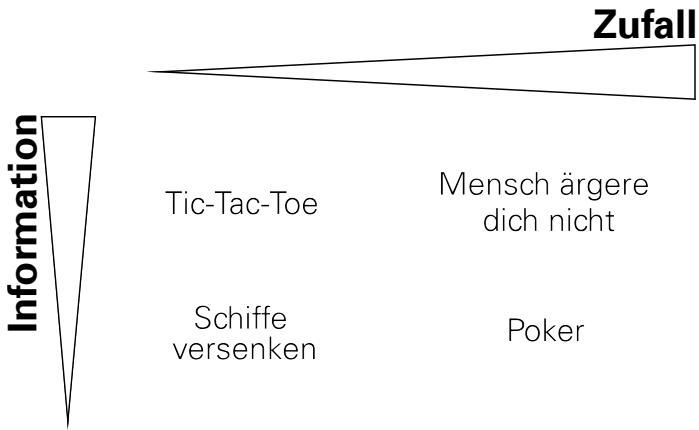
_ Donald Michies, 2003 [1]

- _ formale Betrachtung von **Spielen** verstehen
- _ **Minmax-Algorithmus** nachvollziehen können
- _ gute und schlechte **Heuristiken** unterscheiden und anwenden können
- _ Vorteile der **Alpha-Beta-Kürzung** verstehen

Terminologie

Spiel, Konfiguration, Spielbaum




Zufall
Information
Tic-Tac-Toe
Mensch ärgere dich nicht
Schiffe versenken
Poker

Spiel, Spielzug, Konfiguration

Terminologie

- zwei Spieler: **Max** und **Min**
- Nullsummenspiel
- K Menge aller **zulässigen Konfigurationen**
- Spiel $S := (R, k_0, F)$
  - R Menge **legaler Spielzüge**
  - $k_0 \in K$ **Anfangskonfiguration**
  - $F \subset K$ Menge der **Endkonfigurationen**

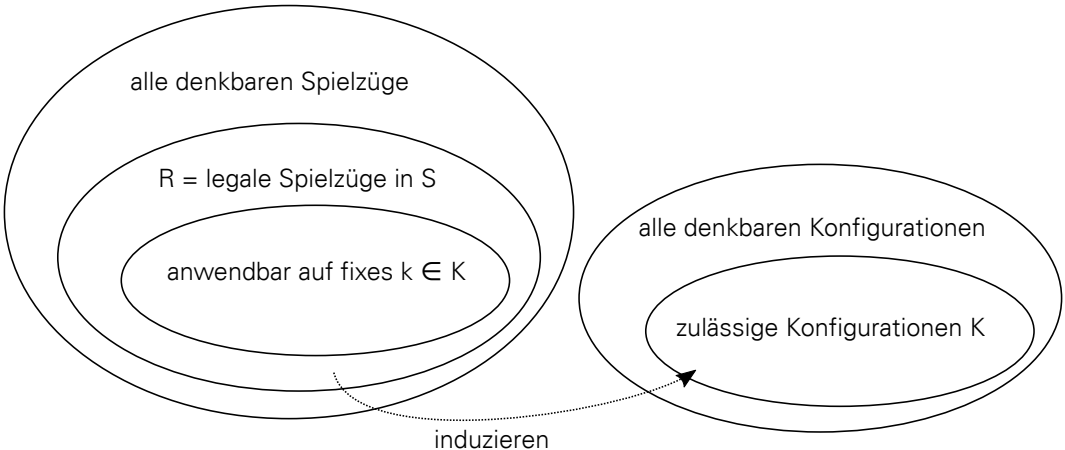
Spielzüge als Funktion, Folgekonfiguration

Terminologie

- $R : K^2$, r legal
  - wenn $v = r(u)$, dann heißt v **Kindkonfiguration** von u (bezüglich r)
  - analog: u **Elternkonfiguration** von v (bezüglich r)
- $R_k := \{r \in R \mid r \text{ anwendbar auf } k\}$
- **Menge der Kindkonfigurationen** $N(k) := \{r(k) \mid r \in R_k\} \subseteq K$
  - $N(k_f) = \varnothing$, $k_f \in F$
- K induktiv über Kindkonfiguration definierbar:
  (1) $k_0 \in K$
  (2) $\forall k \in K : N(k) \subset K$

mögliche, legale und anwendbare Spielzüge

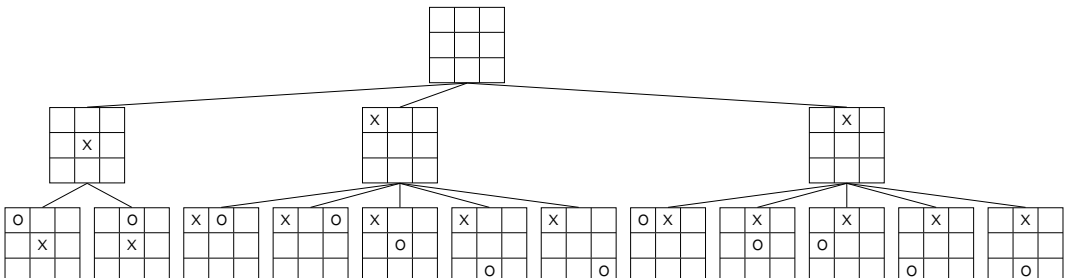
Terminologie

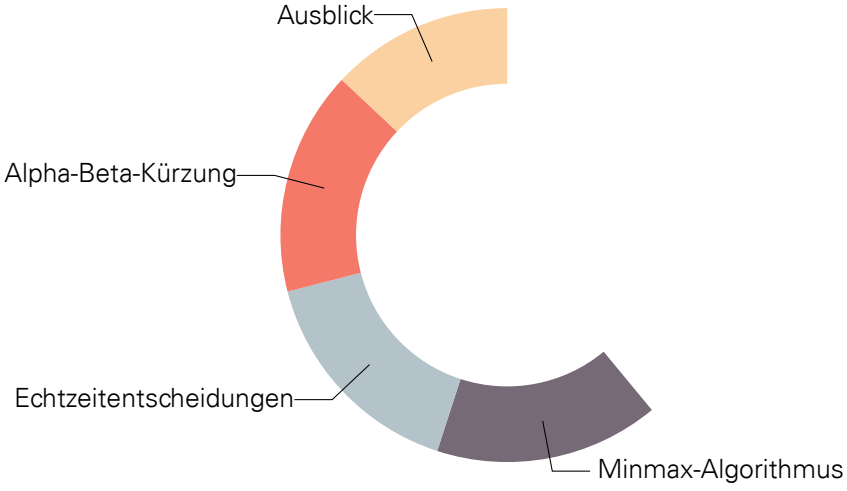


- **Spielbaum** ist gerichteter Graph $G_S := (V, E)$
  - Knoten $V = K$
  - Kanten $E = \bigcup_{u \in K} \{(u, v) \mid v \in N(u)\}$
- G_S ist Baum mit Wurzel k_0, Blättern F
- Spielverlauf mit l Zügen ist Pfad p subsequenter Kindkonfigurationen
  - $p = (k_0, k_1, \ldots, k_l)$
- zu große Komplexität

Tic-Tac-Toe-Spielbaum der Tiefe 2

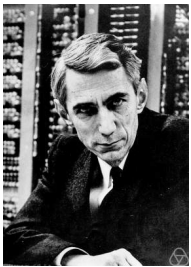
Terminologie



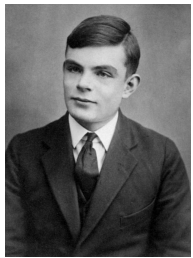

Ausblick
Alpha-Beta-Kürzung
Echtzeitentscheidungen
Minmax-Algorithmus

Geschichte des Minmax-Algorithmus

- populär als Suchalgorithmus für Spielstrategie in Schachprogrammen
- 1912 erstmals von Ernst Zermelo erwähnt
- 1940er: Bedeutung von Minmax betont (Shannon, Turing)



_ Claude Shannon, 1963 [3]



_ Alan Turing, 1928 [4]

Voraussetzungen für den Algorithmus

Minmax

- zwei Typen von Knoten
  - Max ist am Zug: **Max-Knoten** $\triangle$
  - Min ist am Zug: **Min-Knoten** $\triangledown$
  - Min/Max alternierend in jedem Halbzug
- jedem Knoten im Baum wird ein Minmax-Wert zugeordnet
  - entspricht Max' **Nutzen dieser Konfiguration**
- Minmax-Wert des Knotens k ergibt sich aus Minmax-Werten der Kinder $N(k)$
  $\rightarrow$ **Tiefensuche** (*depth first*)
- Gewinnfunktion $g : F \rightarrow \mathbb{N}$, die Endkonfigurationen bewertet
  (aus Sicht von Max)

Der Minmax-Algorithmus

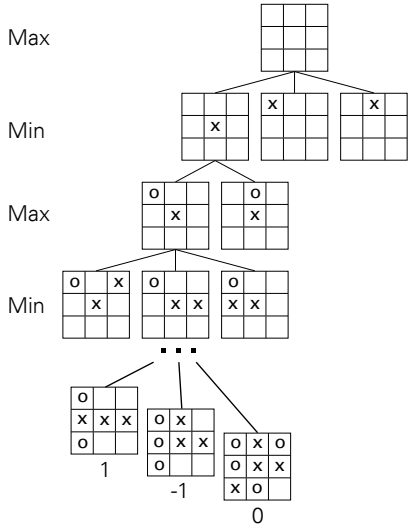
Minmax

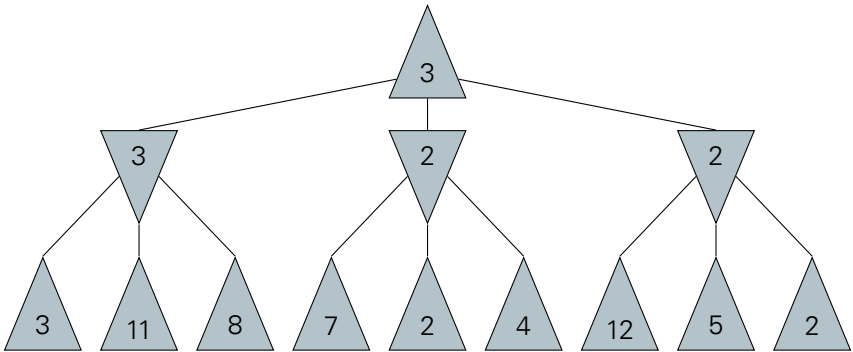
$$Minmax(u) = \begin{cases} g(u) & \text{wenn } u \in F \\ max_{v \in N(u)} Minmax(v) & \text{wenn Max in } u \text{ am Zug} \\ min_{v \in N(u)} Minmax(v) & \text{wenn Min in } u \text{ am Zug} \end{cases}$$

- Max-Knoten: Max wählt besten Zug
  $\rightarrow$ **höchsten** Wert annehmen
- Min-Knoten: bester Zug für Min ist schlechtester für Max
  $\rightarrow$ **kleinsten** Wert für Max annehmen

Minmax bei Tic-Tac-Toe

Minmax

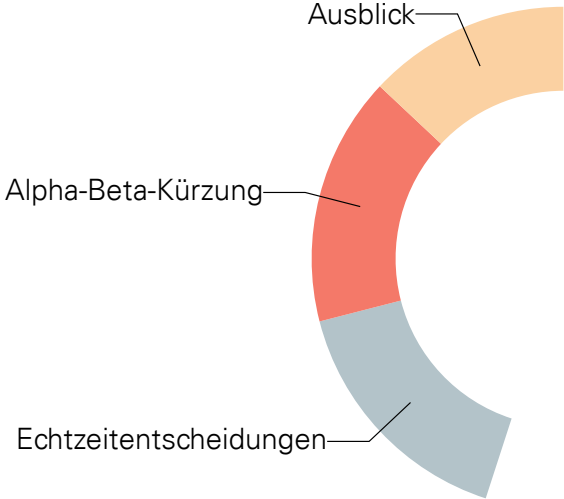



3
3
2
2
3
11
8
7
2
4
12
5
2

- m **maximale Tiefe** des Spielbaumes
- b **Verzweigungsgrad**
- Zeitkomplexität: $\mathcal{O}(b^m)$
- Speicherkomplexität: $\mathcal{O}(bm)$, bzw. $\mathcal{O}(m)$

Unvollständige Echtzeitentscheidungen

Heuristik, Expansionskriterium



Verbesserung Minmax

Unvollständige Echtzeitentscheidung

- neu: **Kriterium**, wann Knoten expandiert werden soll
- **Heuristik**, um nicht-Endkonfiguration zu bewerten
- Stärke des Agenten hängt ab von:
  (a) Bewertung des Nutzens einer Knotenexpansion
  (b) Genauigkeit der Heuristik

Heuristiken

Unvollständige Echtzeitentscheidung

- Heuristik schätzt Nutzen für Spieler in bestimmter Konfiguration
  - vergleichbar mit A^*-Suche
- aus Merkmalen der Konfiguration zusammengesetzt
- Anforderungen:
  - muss gleiche Ordnung wie Gewinnfunktion erzeugen
  - muss effizient sein
  - muss für nicht-Endkonfigurationen Wert nahe der *tatsächlichen* Chance liefern

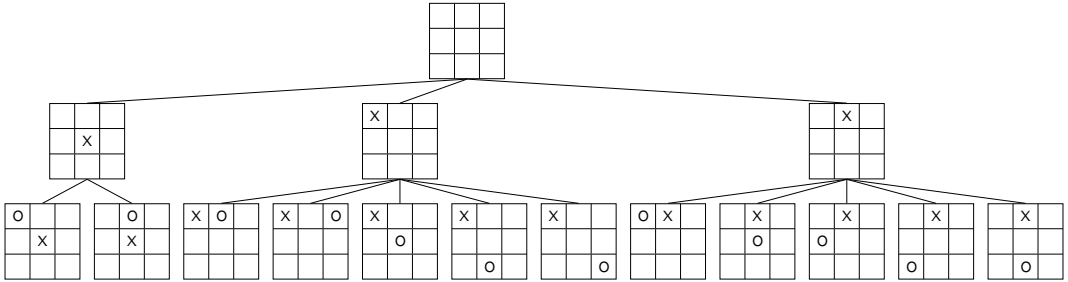
Eine Heuristik für TicTacToe

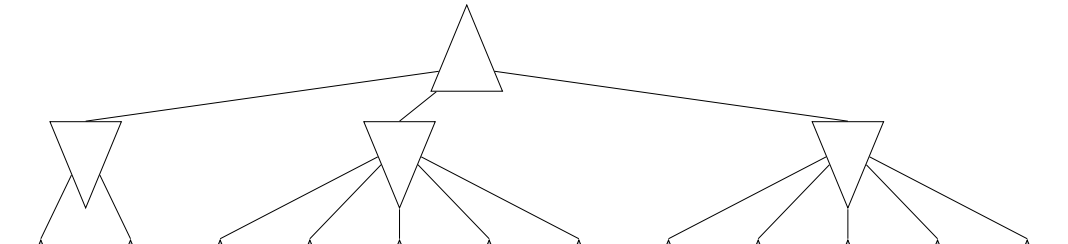
Unvollständige Echtzeitentscheidung

- $f(k) = A_X(k) - A_O(k)$
  - $A_{X/O}(k)$ „Wie viele Möglichkeiten zur Verfollständigung von Linien gibt es?“

Noch einmal Tic-Tac-Toe

Terminologie

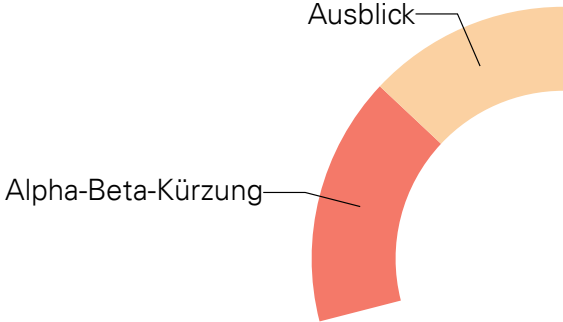




Expansionskriterium

Unvollständige Echtzeitentscheidung

- trivial: immer terminieren, wenn Endkonfiguration erreicht ist
- Metaschluss: Wann lohnt es sich, eine Berechnung anzustellen?
- Beispiele
  - feste Tiefe l
  - **Ruhesuche:** Bewertung ändert sich nicht mehr stark


Ausblick
Alpha-Beta-Kürzung

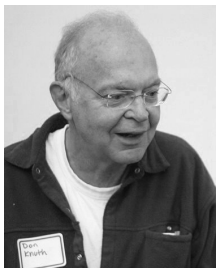
Geschichte der Alpha-Beta-Kürzung (auch α-β-Pruning, -Suche)

α, β

- Optimierung von Minmax
- 1956 in Dartmouth vorgestellt (McCarthy)

_ John McCarthy, 1967 [5]

- 1961 erstmals in Schachprogramm eingesetzt
- 1975 verfeinert (Knuth, Moore)



_ Donald E. Knuth, 2005 [6]

Erweiterung von Minmax

α, β

- einen Alpha- und einen Beta-Wert für jeden Knoten
- **untere Schranke** α für Maxknoten
  - bisher größte Bewertung im Pfad zu k
- **obere Schranke** β für Minknoten
  - bisher kleinste Bewertung im Pfad zu k
- α und β werden nach jeder untersuchten Konfiguration aktualisiert
  - initial $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$
  - α wird an einem Max-Knoten maximiert
  - β wird an einem Min-Knoten minimiert

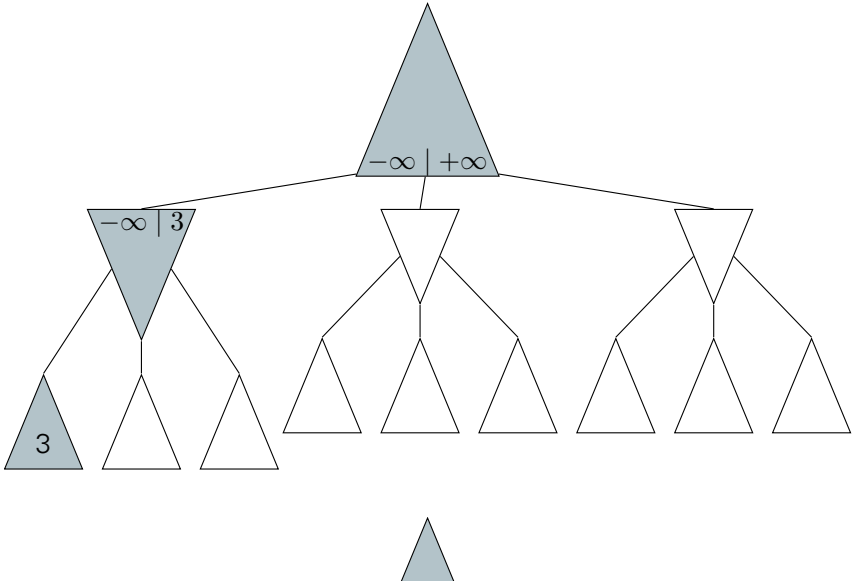
Kürzung

α, β

- **Kürzung** der Kindknoten,
  d.h. die Rekursion *vor* Erreichen der Endkonfiguration terminiert
- an Max-Knoten α**-Cut**
  - es wird der größte Wert unter den Kindern gesucht
  - sobald β eines Kindes $\leq \alpha$
- an Min-Knoten β**-Cut**
  - es wird der kleinste Wert unter den Kindern gesucht
  - sobald α eines Kindes $\geq \beta$

Ein α, β Beispiel

α, β



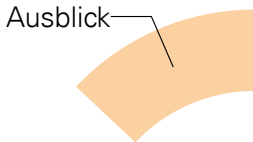
Komplexität

α, β

- Minmax: $\mathcal{O}(b^m)$
- Alpha-Beta-Kürzung: $\mathcal{O}(b^{\frac{m}{2}})$
  - bei optimaler Sortierung (**Zugreihenfolge**)
  - theoretisches Limit, wenn immer sofort gekürzt werden kann
  - bei zufälliger Sortierung der Knoten: $\mathcal{O}(b^{\frac{3}{4}m})$

Ausblick

Zugreihenfolge



- vorsortieren und Killerzüge finden (”Killerzugheuristik”)
- dynamisch: zuerst Züge probieren, die vorher gut waren
  - Situationen können wieder auftreten $\rightarrow$ Hashtabelle anlegen

Verbesserung mit iterativer Tiefensuche

Ausblick

- Suchtiefe mit jedem Durchlauf erhöhen
- hilft bei Wahl einer günstigen Zugreihenfolge
- nutzt begrenzte Zeit best möglich aus

Rückblick
zur Motivation

- _ formale Betrachtung von **Spielen** verstehen
- _ **Minmax-Algorithmus** nachvollziehen können
- _ gute und schlechte **Heuristiken** unterscheiden und anwenden können
- _ Vorteile der **Alpha-Beta-Kürzung** verstehen

joschka.heinrich@tu-dresden.de

B40E 67C7 FF62 C860 7854 A778 6FB9 666F 1147 A401

`https://github.com/foobar0112/tic`

- Klüppelholz: „Entwurfs- und Analysemethoden für Algorithmen – Skript zur Vorlesung SS 2016“
- Russel, Norvig: „Künstliche Intelligenz – Ein moderner Ansatz“, 3., aktualisierte Auflage, 2012
- `http://chalkdustmagazine.com/features/menace-machine-educable-noughts-crosses-engine`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Tic-Tac-Toe`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Tic-tac-toe`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Minimax-Algorithmus`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Alpha-Beta-Suche`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Alpha-beta_pruning`

Bildquellen

Anhang

[1] Donald Michies http://www.aiai.ed.ac.uk/~dm/donald-michie-2003.jpg

[2] Menace http://images.slideplayer.nl/9/2257151/slides/slide_6.jpg

[3] Claude Shannon https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/ClaudeShannon_MFO3807.jpg

[4] Alan Turing https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Alan_Turing_Aged_16.jpg

[5] John McCarthy http://images.computerhistory.org/fellows/2-4a.stanford_university.mccarthy-john.c1967.l062302006.stanford_university.src.jpg

[6] Donald E. Knuth https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4f/KnuthAtOpenContentAlliance.jpg

Suchbaum $\not\equiv$ **Spielbaum**

Anhang

- **Suchbaum** ist gerichteter Graph (V, E, l, w), Baum
  - Tiefe $l \in \mathbb{N}_{>0}$
  - Knoten entsprechen Pfaden der maximalen Länge l, ausgehend von w im *Spiel*baum
  - Kanten entsprechen anwendbarem Zug

Min spielt nicht optimal

Anhang

- Minmax ist nur beste Strategie, wenn Min-Spieler auch optimal spielt
- wenn nicht: dann noch besser für Max
- aber: es gibt ggf. noch bessere Strategien

Spiel mit mehr als 2 Spielern

Anhang

- nicht Min-/Max-Halbzüge, sondern A,B,C,…-Züge
- nicht ein Minmax-Wert sondern Vektor mit Max-Werte jedes Spielers
- Warum kein Vektor bei 2 Spielern?
  - $\rightarrow$ Nullsummenspiel: Gewinn des einen ist Verlust des anderen
- Problem: Spielstrategie mit Allianzen

- jeder Spieler hat eigene Nutzenfunktion (die allgemein bekannt ist)

- dritter Typ Knoten: Zufallsknoten
- Erwartungswert statt Minmax-Wert pro Knoten