

# 从前缀和到树状数组

胡船长

初航我带你，远航靠自己

# 树状数组基础

大约用时：（60 mins）

下一部分：经典面试题刷题专项环节

# 再看前缀和

前缀和数组：

初始化： $O(n)$  时间复杂度，顺序扫描原数组即可

查询区间和： $O(1)$  时间复杂度， $S[j]-S[i]$  即为原数组  $i$  到  $j$  的区间和

单点修改： $O(n)$  时间复杂度，需要修改  $S[i] \sim S[n]$  所有值

慢，是因为  $S[i]$  的值与之前原数组中所有项都有关系

弱化这种关系，即可加快单点修改速度，当然也会丧失部分查询速度  
可这种取舍，是值得的！

# lowbit函数

定义:

**lowbit(i)**: 代表 i 这个数字, 二进制表示的最后一位 1 的位权

例如:

$$\text{lowbit}(8) = (1000)_2 = 8$$

$$\text{lowbit}(6) = (110)_2 = 2$$

$$\text{lowbit}(12) = (1100)_2 = 4$$

$$\text{lowbit}(7) = (111)_2 = 1$$

$$\text{lowbit}(x) = x \& (-x)$$

# 树 状 数 组

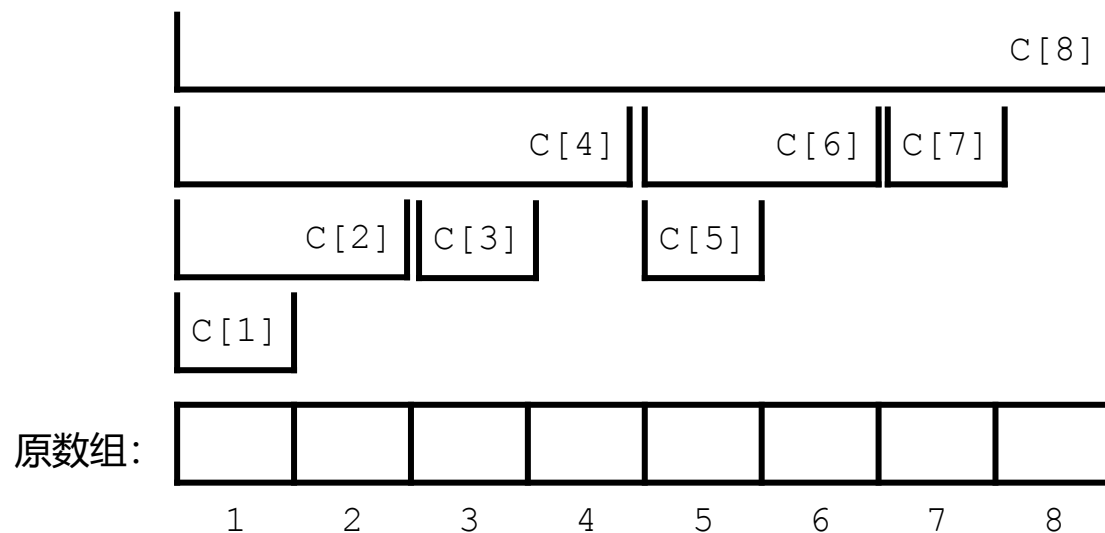
改进前缀和：

**lowbit(i)**：代表  $C[i]$  代表前  $\text{lowbit}(i)$  项的和

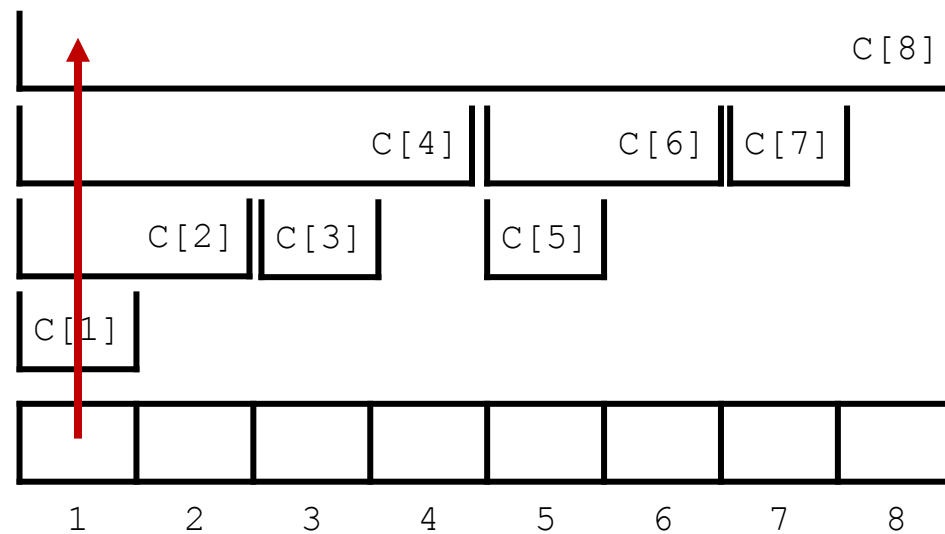
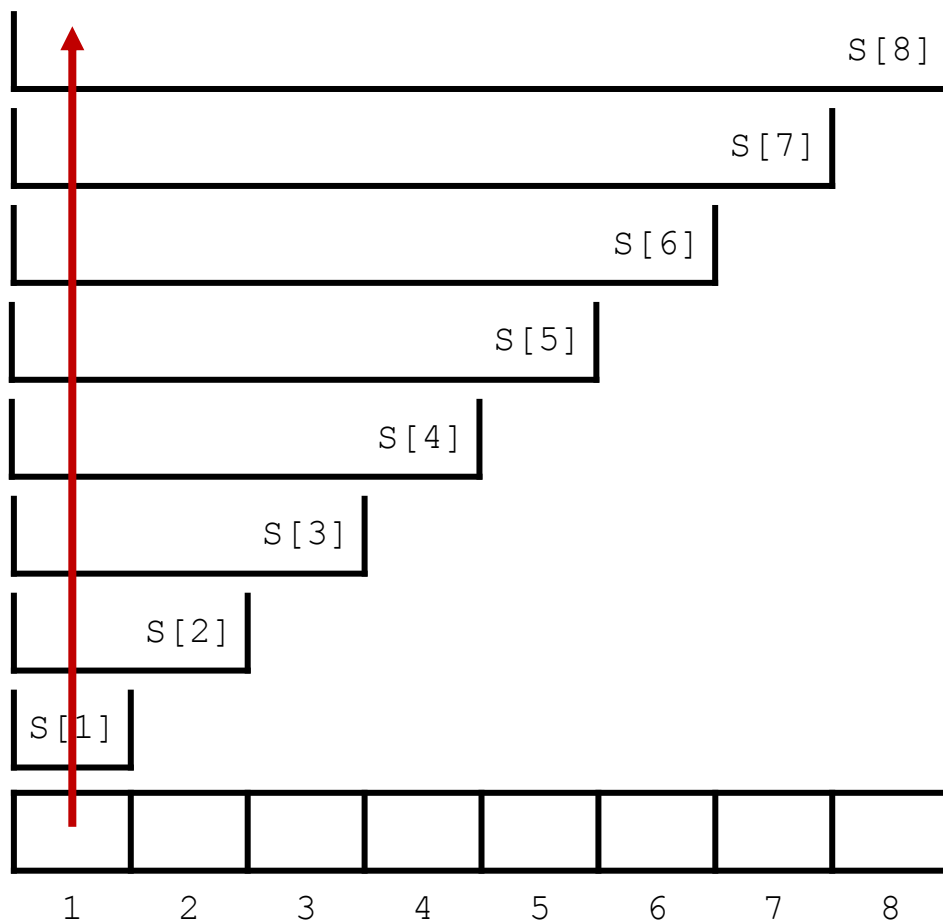
例如：

$$\text{lowbit}(10) = 2, C[10] = a[10] + a[9]$$

$$\text{lowbit}(12) = 4, C[12] = a[12] + a[11] + a[10] + a[9]$$



# 树状数组



# 树 状 数 组

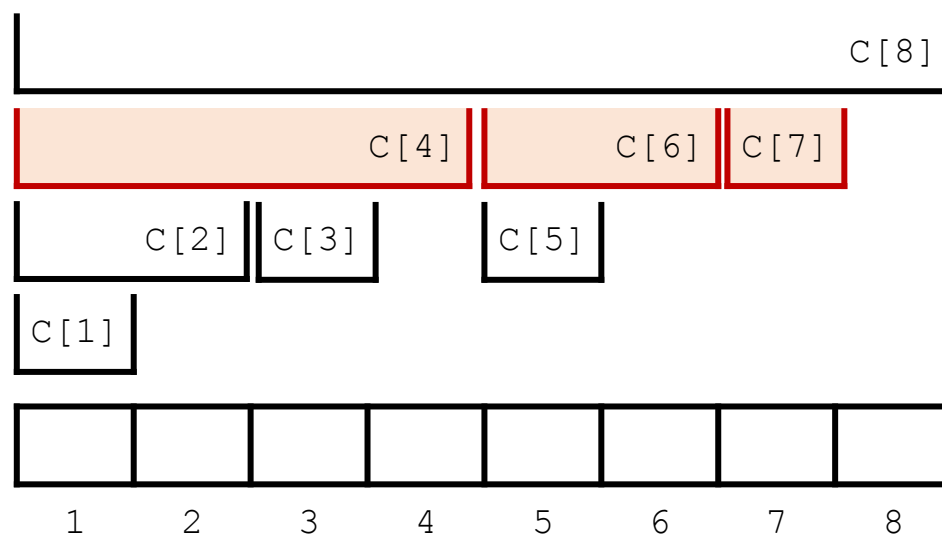
基本操作:

前缀和查询:  $S[i] = S[i - \text{lowbit}(i)] + C[i]$

例如:

$$S[7] = S[6] + C[7] = S[4] + C[6] + C[7] = C[4] + C[6] + C[7]$$

$$S[12] = ?$$



# 树 状 数 组

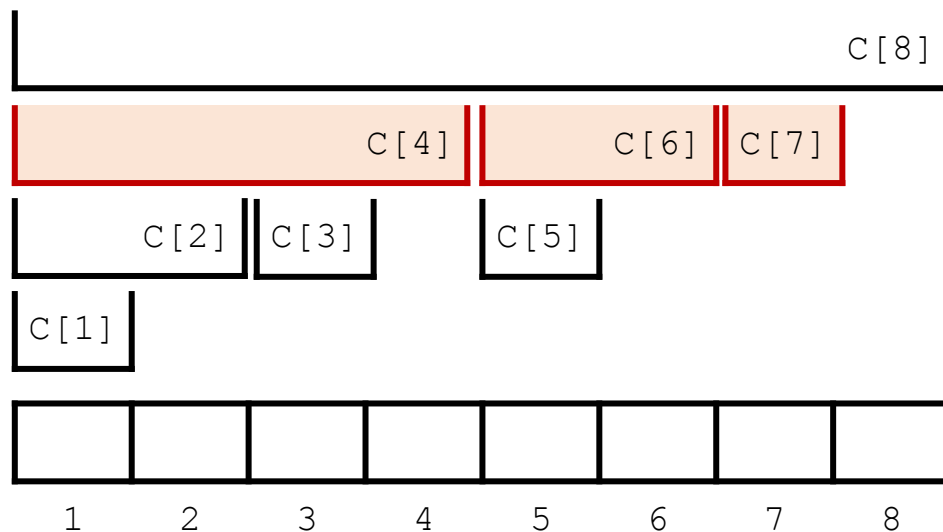
基本操作:

前缀和查询:  $S[i] = S[i - \text{lowbit}(i)] + C[i]$

例如:

$$S[7] = S[6] + C[7] = S[4] + C[6] + C[7] = C[4] + C[6] + C[7]$$

$$S[12] = S[8] + C[12] = C[8] + C[12]$$





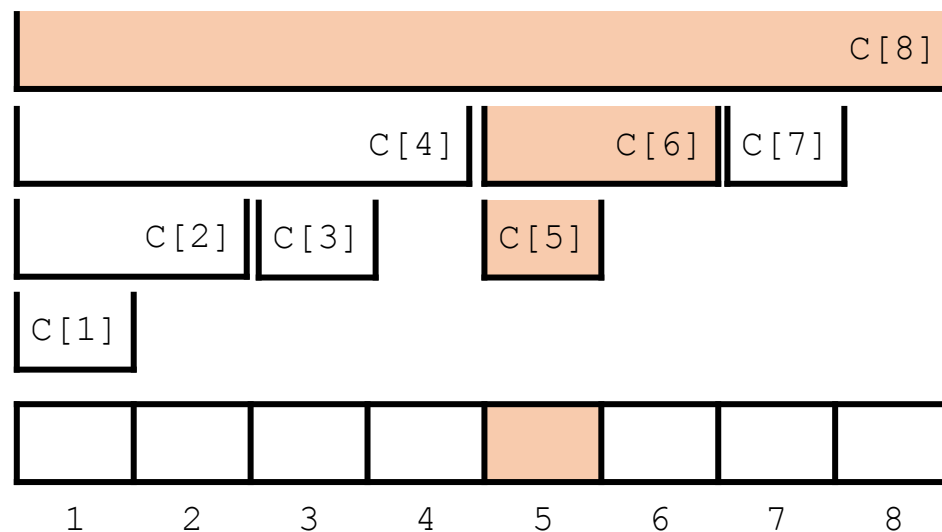
# 树 状 数 组

基本操作：

单点修改：当修改 $A[j]$ 位置的的值的时候，首先需要更新的显然是 $C[j]$ 的值，可 $C[j]$ 之后，应该更新哪个值呢？也就是找到 $C[j]$ 脑袋上面的区间。

例如：

更新原数组  $A[5]$  的值，那么需要更新  $C[5], C[6], C[8]$  这三个点的值



# 树 状 数 组

基本操作:

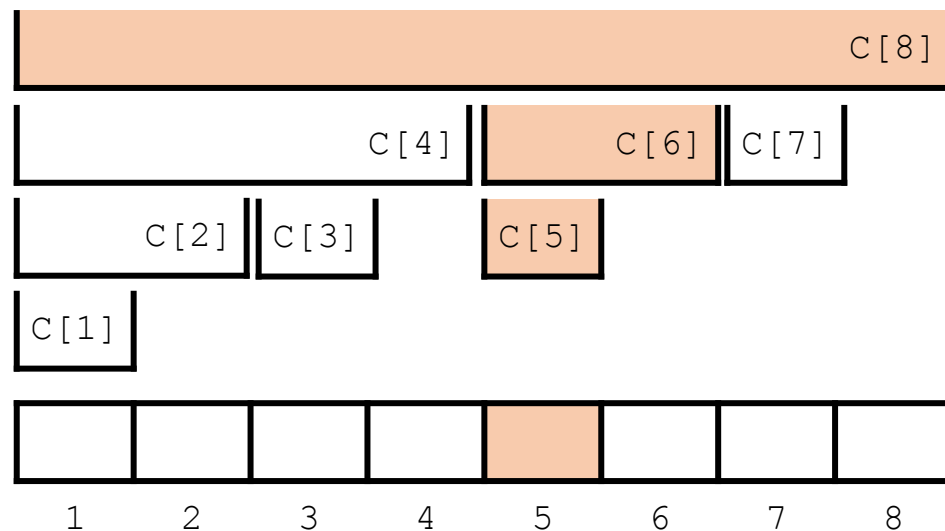
性质1:  $C[j+k]$  当  $k < \text{lowbit}(j)$  时,  $C[j+k]$  区间不包含  $C[j]$  区间

证明1:

易得  $\text{lowbit}(j+k) \leq k$

$j+k-\text{lowbit}(j+k) \geq j+k-k$

$j+k-\text{lowbit}(j+k) \geq j$



# 树 状 数 组

基本操作:

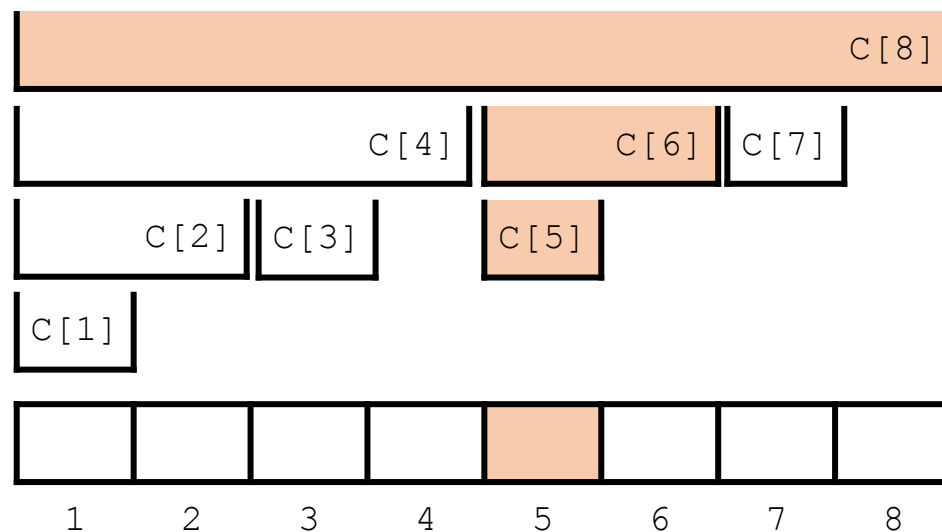
性质2:  $C[j+k]$  当  $k = \text{lowbit}(j)$  时,  $C[j+k]$  区间包含  $C[j]$  区间

证明2:

易得  $\text{lowbit}(j+k) > k$

$j+k-\text{lowbit}(j+k) < j+k-k$

$j+k-\text{lowbit}(j+k) < j$



# 树 状 数 组

基本操作：

单点修改：A[j]发生改变时，当修改完C[j]，下一个应该修改  $C[j + \text{lowbit}[j]]$

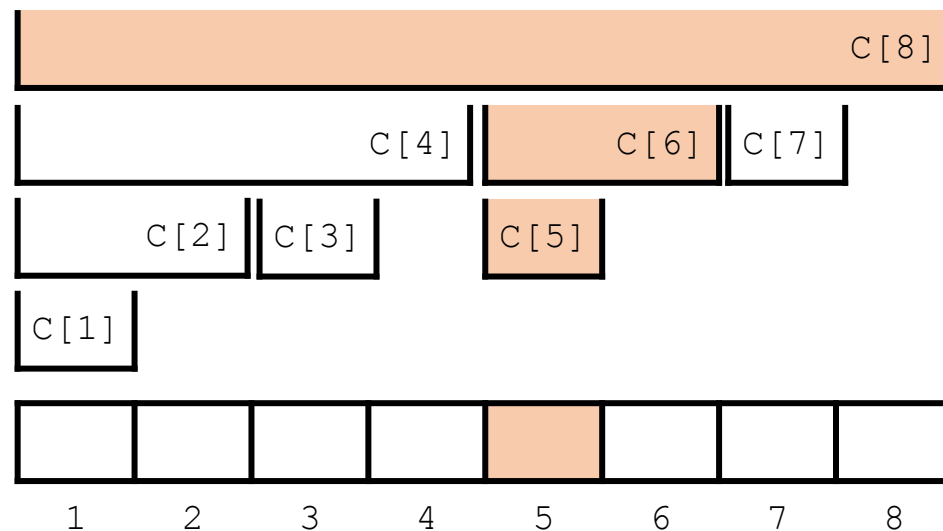
例如：

更新原数组 A[5] 的值，那么需要更新：

$C[5], 5 + \text{lowbit}(5) = 6,$

$C[6], 6 + \text{lowbit}(6) = 8$

$C[8]$  这三个点的值



# 树状数组—关键词



**lowbit**函数：求数字  $x$  中二进制表示的最后一位 1

查 询 操 作：维护前缀和，向前统计， $i - \text{lowbit}(i)$

更 新 操 作：更新单点的值，先后更新， $i + \text{lowbit}(i)$

# 经典面试题刷题专项环节

大约用时： (120 mins)

下一部分： 大家晚安



每天都想干翻这个世界  
到头来，被世界干的服服帖帖

大家晚安  
--船长