Algoritmos y Estructuras de Datos

Backtracking

Enumeraciones combinatorias

Backtracking y podas

Método minimax

Métodos de fuerza bruta

Queremos calcular una función $f : X \to Y$.

Dado $x \in X$, los métodos de **fuerza bruta** consisten en:

- Generar una lista $y_1, \ldots, y_n \in Y$ de candidatos.
- Para cada candidato $y \in Y$:
  - Si y tiene las propiedades esperadas de $f(x)$, devolver y.

Calcular la solución y se reduce a **verificar** si y es solución.

En general es extremadamente ineficiente.
Pero:

- Puede ser practicable cuando los datos de entrada son chicos.
- Hay problemas para los que no hay (o no se conoce) una solución esencialmente mejor.
- Útil para hacer testing.

Métodos de fuerza bruta

Ejemplo

- La clave del usuario es un PIN de 10 dígitos.
- El sistema no guarda la clave K sino $H(K)$.
- H es una función de *hash criptográfico*.
  (Calcular la inversa H^{-1} es impracticable).
- Si averiguo $H(K)$, ¿cómo puedo averiguar K?
- Calcular:

  $$H(0000000000),\ H(0000000001),\ \ldots,\ H(9999999999)$$

  hasta dar con la entrada K que otorga el valor buscado.
- 10^{10} cómputos se pueden hacer en cuestión de minutos.

Enumeraciones combinatorias: variaciones

Entrada: una lista A y un entero $k \geq 0$.
Salida: todas las listas de longitud k que se pueden formar tomando elementos de A (con repeticiones; el orden es relevante).

Por ejemplo, si $A = [0, 1]$ y $k = 3$, el resultado es:

$$[[0,0,0],[0,0,1],[0,1,0],[0,1,1],[1,0,0],[1,0,1],[1,1,0],[1,1,1]]$$

Si $|A| = n$, hay n^k variaciones con repetición.

```
def variaciones_con_repeticion(a, k):
    if k == 0:
        return [[]]
    res = []
    for x in a:
        for v in variaciones(a, k - 1):
            res.append([x] + v)
    return res
```

Enumeraciones combinatorias: combinaciones

Entrada: una lista A y un entero $k \geq 0$.
Salida: todas las listas de longitud k que se pueden formar tomando elementos de A (sin repetir; el orden es irrelevante).

Por ejemplo, si $A = [0, 1, 2, 3]$ y $k = 3$, el resultado es:

$$[[0, 1, 2], [0, 1, 3], [0, 2, 3], [1, 2, 3]]$$

Si $|A| = n$, hay $\binom{n}{k}$ combinaciones sin repetición.

```
def combinaciones_sin_repeticion(a, k):
    if k == 0:
        return [[]]
    elif len(a) == 0:
        return []
    res = []
    for c in combinaciones_sin_repeticion(a[1:], k - 1):
        res.append([a[0]] + c)
    for c in combinaciones_sin_repeticion(a[1:], k):
        res.append(c)
    return res
```

Enumeraciones combinatorias: permutaciones

Entrada: una lista A.
Salida: una lista con todas las permutaciones de A.

Por ejemplo, si $A = [0, 1, 2]$, el resultado es:

$$[[0, 1, 2], [0, 2, 1], [1, 0, 2], [1, 2, 0], [2, 0, 1], [2, 1, 0]]$$

Si $|A| = n$, hay $n!$ permutaciones.

```
def permutaciones(a):
    if len(a) == 0:
        return [[]]
    res = []
    for i in range(len(a)):
        for p in permutaciones(a[:i] + a[i + 1:]):
            res.append([a[i]] + p)
    return res
```

Enumeraciones combinatorias

Backtracking y podas

Método minimax

Backtracking

El *backtracking* es una técnica algorítmica para buscar soluciones.

Consiste en las siguientes ideas:

1. Cada vez que la búsqueda presenta varias opciones, elegir alguna de ellas.
2. Cuando se llega a un estado que no conduce a una solución, retroceder hasta el último punto en el que se eligió una opción, y probar con otra opción.
3. Cuando se agotan las opciones, seguir retrocediendo.

Backtracking

Ejemplo — Laberinto

1. Un laberinto es una matriz de n filas por m columnas.
2. El inicio está en la posición $(0, 0)$.

   El final está en la posición $(n - 1, m - 1)$.
3. Cada celda del laberinto contiene uno de tres posibles valores:
   - 3.1 `VACIO`: camino por el que es posible transitar.
   - 3.2 `PARED`: pared infranqueable.
   - 3.3 `HILO`: parte del camino que ya fue recorrida.

Programemos un algoritmo con el siguiente contrato:

- Entrada: un laberinto y una posición (i, j) dentro del laberinto.
- Salida: un booleano que indica si es posible llegar a la salida desde la posición (i, j). Además, se modifica el laberinto dejando un rastro de "hilo" desde la posición (i, j) hasta la salida.

Ejemplo — Suma de subconjuntos

Problema: dada una lista A de enteros y un entero k, encontrar una subsecuencia B que sume k.

Por ejemplo:

$$A = [8, 11, 11, 8, 12, 7] \quad k = 29 \quad B = [11, 11, 7]$$

Programemos un algoritmo con el siguiente contrato.

- Entrada: una lista A de enteros y un entero k.
- Salida: una subsecuencia B de A que sume k, en caso de que exista. Si no existe, devuelve `None`.

Backtracking

Ejemplo — Sudoku

1. Un sudoku es una matriz de 9 filas por 9 columnas.
2. Cada celda puede estar vacía o contener un dígito entre 1 y 9.
3. El problema consiste en completar todas las celdas:
   - 3.1 No debe haber dígitos repetidos en ninguna fila.
   - 3.2 No debe haber dígitos repetidos en ninguna columna.
   - 3.3 No debe haber dígitos repetidos en ningún cuadrante.

Programemos un algoritmo con el siguiente contrato.

- Entrada: un sudoku y una posición (i, j).
  Todas las filas anteriores a la fila i deben estar ya completas.
  Las celdas de la fila i anteriores a la columna j deben estar ya completas.
- Salida: en caso de que exista solución, devuelve el sudoku completo. Si no existe, devuelve `None`.

Enumeraciones combinatorias

Backtracking y podas

Método minimax

Minimax

El método MINIMAX sirve para tomar decisiones que maximicen el beneficio obtenido por un jugador en el contexto de un *juego*.

Vamos a enfocarnos en juegos:

- De dos jugadores.
- De información perfecta.
- De suma cero.

Ejemplos: ta-te-ti, ajedrez, damas, go, reversi, ...

Para empezar, supondremos además que:

- El juego termina al cabo de un número finito de movidas.
- No hay empates.

Hay versiones más generales.

Minimax

Dada una posición P de un juego:

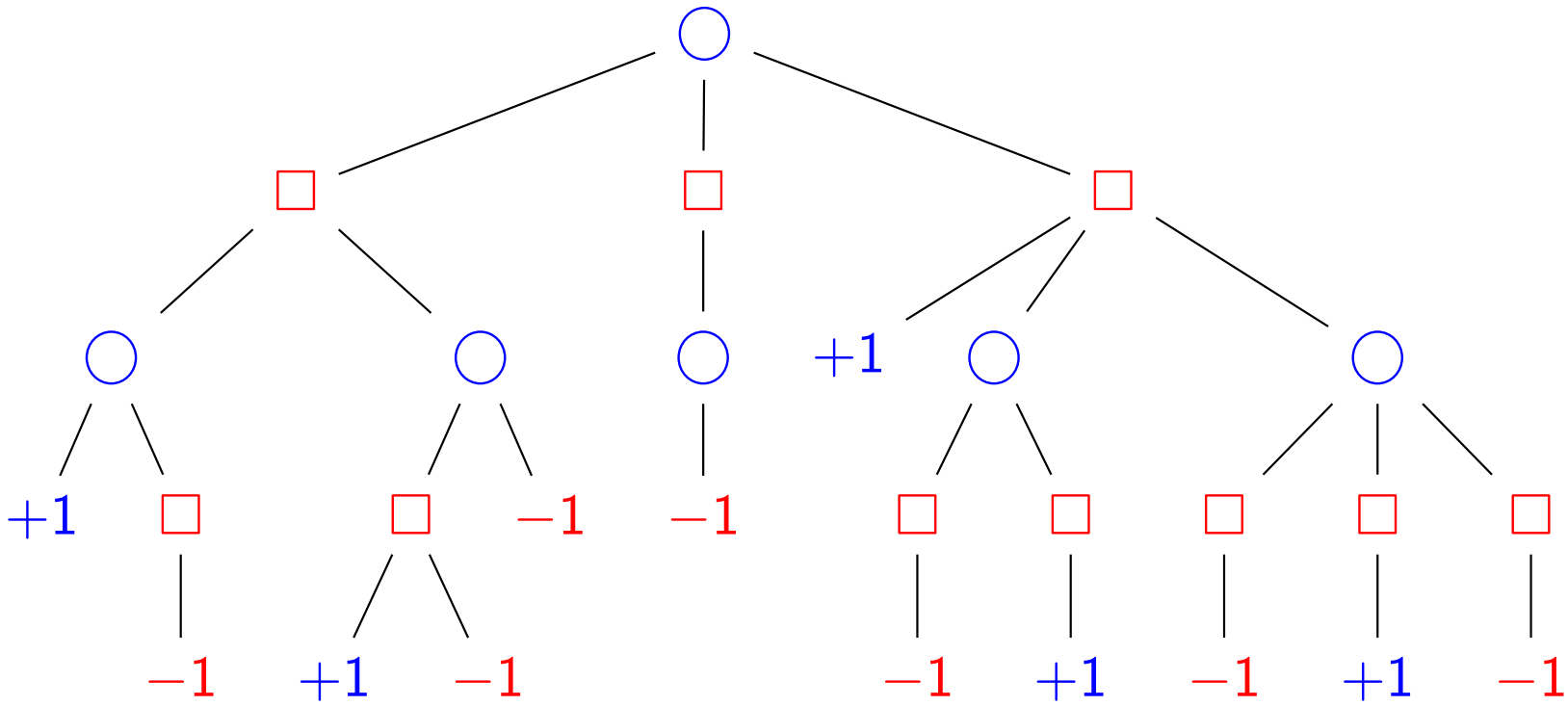
- $M(P)$ es el conjunto de posiciones después de un movimiento.
- Si $M(P) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el jugador tiene n opciones.
- En cada posición P_i le toca jugar al oponente.
- A su vez, $M(P_i) = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ son opciones del oponente.

Nota. Por convención, suponemos que $M(P) \neq \emptyset$. Cuando el juego termina, el jugador tiene sólo una opción.

Minimax

◯ = turno del jugador
+1 = gana el jugador

□ = turno del oponente
−1 = gana el oponente



Al jugador le conviene elegir la opción que maximiza el resultado, asumiendo que el oponente elige la opción que lo minimiza.

Minimax

Algoritmo MINIMAX

Entrada: una posición P del juego.
Salida:

- $+1$ si P es una posición ganadora para el jugador.
- -1 si P es una posición ganadora para el oponente.

Procedimiento:

- Si P es una posición terminal: (Ej. "jaque mate").
  - Devolver $+1$ si gana el jugador.
  - Devolver -1 si gana el oponente.
- En caso contrario:
  - Devolver $\max_{P' \in M(P)} \min_{P'' \in M(P')} \text{MINIMAX}(P'')$.

Idea: el jugador puede **forzar** al oponente a perder.

Minimax

- El método anterior es “perfecto”.
- Se vuelve inviable cuando el árbol de juego es grande.
  (P. ej. es viable para el ta-te-ti pero no para el ajedrez).
- El método se adapta para usar una **función de evaluación**.

Minimax

Algoritmo MINIMAX (con función de evaluación)

Entrada: una posición P del juego.
Salida: valor heurístico para la posición P
(positivo si favorece al jugador / negativo si favorece al oponente).

Procedimiento:

- Si P es una posición terminal o se alcanzó la profundidad máxima:
  - Devolver $+1$ si gana el jugador.
  - Devolver -1 si gana el oponente.
- Si se alcanzó la profundidad máxima de exploración:
  - Aplicar la función de evaluación heurística sobre P.
- En caso contrario:
  - Devolver $\max_{P' \in M(P)} \min_{P'' \in M(P')} \text{MINIMAX}(P'')$.