
PRÁCTICA 1: COMPLEJIDAD, CONTRATOS E INVARIANTES

Ejercitación básica

Ejercicio 1. Dar algoritmos para resolver los siguientes problemas y determinar su complejidad temporal y espacial en peor caso:

- Hallar el máximo de un arreglo de n enteros.
- Hallar los k números más grandes de un arreglo de n enteros.
- Dados dos arreglos de enteros A y B , determinar cuál es más largo.
- Dados dos arreglos de enteros A y B , determinar cuántos elementos de A aparecen también en B .
- Dado un arreglo A de enteros, producir un arreglo B de enteros tal que $B[i]$ contenga el número $A[i]^2$.
- Dado un arreglo A de enteros, producir un arreglo B de enteros que resulte de borrar todos los números negativos de A .
- Dado un arreglo A de enteros cuyos valores están entre 0 y $k - 1$, producir un arreglo B de tamaño k tal que $B[i]$ contenga el número de veces que aparece el entero i en A .
- Dada una cadena de caracteres S de longitud n , determinar si S es un palíndromo, es decir, si la inversa de S es igual a S . Por ejemplo, la cadena “abcbcbca” es un palíndromo.
- Dada una cadena de caracteres S de longitud n y una cadena de caracteres T de longitud m , determinar si T aparece como *subcadena* de S . Por ejemplo, la cadena “abc” aparece como subcadena de “ababc” pero no de “abacb”.
- Dada una cadena de caracteres S de longitud n , determinar cuántas de sus subcadenas son palíndromos. Por ejemplo, la cadena “abcb” tiene 5 subcadenas palíndromas: “a”, “b”, “c”, “b” y “bcb”.

Ejercicio 2. Usamos las letras f, g, h para denotar funciones $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

- Mostrar que si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$, entonces $f \in O(h)$.
- Sean $b, c > 1$ dos números reales. Mostrar que $O(\log_b n) = O(\log_c n)$. Recordar que $\log_b n = \frac{\log_c n}{\log_c b}$.
- Sea $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ el factorial de n . Mostrar que $2^n \in O(n!)$.
- Mostrar que $n \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluir que $n \in O(2^n)$.
- Notamos $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. Sean $n, p \in \mathbb{N}$. Como resultado del ítem anterior, observemos que $\frac{n}{p} \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 \leq 2^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1} \leq 2^{\frac{n}{p} + 1}$. Usando este hecho, demostrar que $n^p \in O(2^n)$.
- Mostrar que $f(n) + g(n) = O(\max\{f(n), g(n)\})$ y que $\max\{f(n), g(n)\} \in O(f(n) + g(n))$.

Ejercicio 3. Diseñar un tipo de datos `VectorSumable` con la siguiente interfaz, respetando las complejidades temporales en peor caso indicadas:

- `inicializar(A)` — crea una estructura que representa el arreglo A recibido. Precondición: se asume que los elementos de A son números enteros. Complejidad: $O(n)$, asumiendo que $|A| = n$.
- `valor(i)` — devuelve el elemento en la posición i del arreglo A . Precondición: se asume que $0 \leq i \leq n$. Complejidad: $O(1)$.
- `suma(i, j)` — devuelve la suma de los elementos del arreglo A en el intervalo $[i, j]$.¹ Es decir, devuelve $A[i] + A[i + 1] + \dots + A[j - 1]$. Precondición: se asume que $0 \leq i \leq j \leq n$. Complejidad: $O(1)$.

¿Cuál es el invariante de la estructura de datos?

¹Usamos $[i, j]$ para referirnos al intervalo desde i inclusive hasta j exclusive.

Ejercitación adicional

Ejercicio 4. Diseñar un tipo de datos **VectorConUndo** con la siguiente interfaz, respetando las complejidades temporales en peor caso indicadas:

- **inicializar**(n) — crea un vector de tamaño n , cuyos elementos son todos 0.
Precondición: se asume que $n \geq 0$. Complejidad: $O(n)$.
- **leer**(i) — devuelve el valor en la posición i .
Precondición: se asume que $0 \leq i < n$. Complejidad: $O(1)$.
- **escribir**(i, x) — sobrescribe el elemento en la posición i con el valor x .
Precondición: se asume que $0 \leq i < n$. Complejidad: $O(1)$.
- **ctrlZ**() — deshace la última operación de escritura. Si no hubo escrituras, esta operación no tiene efecto.
Complejidad: $O(1)$.

¿Cuál es el invariante de la estructura de datos?

Ejercicio 5. Sea A un arreglo de tamaño n que contiene los elementos $0, 1, \dots, n-1$ sin repeticiones. Recordemos que los índices de los elementos de A van de 0 a $n-1$.

- Diseñar un algoritmo que reciba A como entrada y construya un arreglo B de tamaño n , de tal modo que $B[i]$ contenga la posición del elemento i en A . Por ejemplo, si $A = [4, 0, 1, 2, 3]$ entonces $B = [1, 2, 3, 4, 0]$, ya que (por ejemplo) el valor 0 aparece en la posición 1 de A .
- Determinar la complejidad temporal en peor caso del algoritmo diseñado.
- Si el algoritmo no es $O(n)$ —es decir, *lineal*— modificarlo para que sí lo sea.

¿Cuál es el invariante que cumplen los ciclos del algoritmo?

Ejercicio 6. Sea M una matriz de $n \times n$ entradas, cada una de las cuales es un número entero entre 0 y 10. Diseñar un algoritmo para determinar si hay dos filas que suman lo mismo en tiempo $O(n^2)$ en peor caso.

Ejercicio 7. Sean A y B arreglos de enteros ordenados crecientemente, sin repetidos.

- La *unión* de A y B es un arreglo $A \cup B$ ordenado crecientemente que contiene a un entero x si y sólo si x aparece en A o x aparece en B . Por ejemplo, $[1, 3, 5, 7] \cup [1, 2, 3, 4, 5] = [1, 2, 3, 4, 5, 7]$.
- La *intersección* de A y B es un arreglo $A \cap B$ que contiene a un entero x si y sólo si x aparece en A y x aparece en B . Por ejemplo, $[1, 3, 5, 7] \cap [1, 2, 3, 4, 5] = [1, 3, 5]$.

Asumiendo que los tamaños de los arreglos son $|A| = n$ y $|B| = m$:

- Diseñar un algoritmo para calcular $A \cup B$ en tiempo $O(\max\{n, m\})$ en peor caso.
- Diseñar un algoritmo para calcular $A \cap B$ en tiempo $O(\max\{n, m\})$ en peor caso.

Ejercicio 8. Sea A un arreglo de n números enteros. Decimos que el elemento en la posición i está *fuera de lugar* si el arreglo A no está ordenado pero queda ordenado si se elimina el elemento en la posición i . Por ejemplo, el arreglo $[1, 3, 5, 6, 8, 4, 9]$ no está ordenado. El 4 se encuentra fuera de lugar, porque si se lo borra resulta el arreglo $[1, 3, 5, 6, 8, 9]$, que sí está ordenado. Diseñar un algoritmo que recibe un arreglo A con un elemento fuera de lugar y lo ordena en tiempo lineal. ¿Cuáles son los invariantes?

Ejercicio 9. Sea A un arreglo de tamaño n que contiene los elementos $0, 1, \dots, n-1$ sin repeticiones. Notamos $A^k[i]$ al resultado de hacer $\underbrace{A[A[\dots A[i]]]}_{k \text{ veces}}$. Por ejemplo, en el arreglo $[5, 3, 2, 4, 1, 0]$ tenemos:

$$A^1[1] = A[1] = 3 \qquad A^2[1] = A[A[1]] = A[3] = 4 \qquad A^3[1] = A[A[A[1]]] = A[4] = 1$$

en tal caso decimos que tenemos un *ciclo* $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ de largo 3. En general un ciclo de largo n está dado por un número i tal que $i \rightarrow A^1[i] \rightarrow A^2[i] \rightarrow \dots \rightarrow A^n[i]$ siempre y cuando el último elemento sea i (es decir, $A^n[i] = i$)

pero i no aparezca antes en la secuencia (es decir, $A^k[i] \neq i$ cuando k es tal que $1 \leq k < n$). Diseñar un algoritmo para calcular el tamaño del ciclo más largo en tiempo lineal.

Ejercicio 10. Sea A un arreglo de n números enteros, y sean p y q dos números enteros tales que $p \leq q$. Se quiere reordenar el arreglo A en tres partes, de tal modo que aparezcan primero todos los números menores que p , a continuación los números en el intervalo $[p, q]$ y a continuación los números mayores que q . Por ejemplo, si $A = [12, 2, -1, 1, -2, 5, 3, 11, 13]$, $p = 0$ y $q = 10$, la salida podría ser:

$$\underbrace{[-1, -2]}_{<p} \underbrace{[2, 1, 5, 3]}_{[p,q]} \underbrace{[12, 11, 13]}_{>q}$$

Es importante respetar el orden relativo de las tres partes, pero **no** es necesario respetar el orden de los números dentro de cada una de las partes. Por ejemplo, otra salida válida posible podría ser:

$$\underbrace{[-2, -1]}_{<p} \underbrace{[1, 2, 3, 5]}_{[p,q]} \underbrace{[13, 12, 11]}_{>q}$$

Diseñar un algoritmo para resolver este problema en tiempo lineal, usando sólo $O(1)$ de espacio extra. Por simplicidad, se puede asumir que p, q no aparecen en el arreglo A . *Sugerencia:* mantener como invariante la siguiente configuración:

elementos $< p$	elementos en $[p, q]$	elementos aún no procesados	elementos $> q$
-----------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------