Ejercicio 1. Recordemos que, dado un grafo no dirigido G, un *cubrimiento por k vértices* es un conjunto C de k vértices del grafo, tal que todo vértice es adyacente a alguno de los vértices de C. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el siguiente lenguaje:

$$\mathsf{VERTEX\text{-}COVER}_k = \{\langle G \rangle \mid G \text{ tiene un cubrimiento por } k\text{-vértices}\}$$

1. Demostrar que $\mathsf{VERTEX\text{-}COVER}_k \in \mathsf{P}$.
2. Demostrar que existe una familia de lenguajes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tales que $A_i \in \mathsf{P}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, mientras que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathsf{NP}$-completo.

Ejercicio 2. Decimos que un grafo no dirigido G es *k-coloreable* si se pueden pintar los vértices del grafo usando como mucho k colores, de tal manera que dos vértices adyacentes no estén pintados del mismo color.

$$\mathsf{COL} = \{\langle k, G \rangle \mid G \text{ es } k\text{-coloreable}\}$$

Elegir **exactamente una** de las tres siguientes afirmaciones y demostrarla:

1. **Opción 1:** $\mathsf{COL} \in \mathsf{P}$.
2. **Opción 2:** $\mathsf{COL} \in \mathsf{NP}$.
3. **Opción 3:** $\mathsf{COL} \in \mathsf{NP}$-hard.

Sugerencia: elegir la opción que sea más fácil de demostrar.

Ejercicio 3. Dadas dos fórmulas (φ, ψ), decimos que una asignación de variables las *separa* si la asignación de variables hace verdadera φ y falsa a ψ o viceversa (es decir, hace falsa a φ y verdadera a ψ). Consideremos el siguiente lenguaje:

$$\mathsf{SEP} = \{\langle \varphi, \psi \rangle \mid \text{existe una asignación de variables que separa a } \varphi \text{ de } \psi\}$$

1. Dar una reducción polinomial $\mathsf{SAT} \leq_p \mathsf{SEP}$.
2. Demostrar que SEP es NP-completo.

Ejercicio 4. Sea A un arreglo de n números naturales, todos ellos comprendidos entre 0 y n. Los elementos del arreglo se indexan desde 1, es decir, son $A[1], \ldots, A[n]$. Decimos que hay un *salto* desde a hasta b si $a \geq 1$ y $A[a] = b$, y en ese caso escribimos $a \curvearrowright b$. Decimos que hay un *ciclo* si hay una secuencia de índices $a_1, \ldots, a_k$ tales que $a_i \curvearrowright a_{i+1}$ para cada $i < k$, y además $a_k \curvearrowright a_1$:

$$a_1 \curvearrowright a_2 \curvearrowright a_3 \ldots \curvearrowright a_k \curvearrowright a_1$$

Por ejemplo, el arreglo $[5, 2, 0, 1, 4]$ tiene un ciclo $2 \curvearrowright 2$ y otro ciclo $1 \curvearrowright 5 \curvearrowright 4 \curvearrowright 1$, mientras que el arreglo $[5, 1, 0, 0, 0]$ no tiene ciclos. Considerar el lenguaje:

$$\mathsf{CYC} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ es un arreglo que tiene un ciclo}\}$$

Demostrar que $\mathsf{CYC} \in \mathsf{L}$.

Justificar todas las respuestas.