

PRÁCTICA 5: CÁLCULO- λ SIMPLEMENTE TIPADO

Ejercicio 1. Demostrar que las siguientes fórmulas son válidas en lógica proposicional minimal usando el sistema de deducción natural:

1. $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$
2. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$

Decorar las derivaciones con λ -términos para obtener derivaciones de juicios de tipado en cálculo- λ simplemente tipado. ¿Qué interpretación computacional tienen estas demostraciones?

Ejercicio 2.

- a) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el numeral de Church $\underline{n} = \lambda f. \lambda z. f^n z$ es tipable.
- b) Probar que $Succ := \lambda n. \lambda f. \lambda z. f (n f z)$ es tipable.
- c) Probar que $Add := \lambda n. \lambda m. n Succ m$ es tipable.

Ejercicio 3.

- a) Demostrar que $I x (I y)$ es tipable bajo el contexto $\Gamma = \{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : \alpha\}$.
- b) Demostrar que $(\lambda f. f x (f y)) I$ no es tipable bajo Γ .
- c) Concluir que no vale la propiedad de *subject expansion* en el cálculo- λ simplemente tipado.

Ejercicio 4. (Debilitamiento). Demostrar que si el juicio de tipado $\Gamma \vdash t : A$ es válido y x no aparece en Γ entonces $\Gamma, x : Z \vdash t : A$ es válido.

Ejercicio 5. (Fortalecimiento). Demostrar que si el juicio de tipado $\Gamma, x : Z \vdash t : A$ es válido y $x \notin \text{fv}(t)$ entonces $\Gamma \vdash t : A$ es válido.

Ejercicio 6. (Reemplazo). Si A y B son tipos y α es un tipo base, escribimos $A\{\alpha := B\}$ para denotar el tipo que resulta de reemplazar todas las ocurrencias de α en A por B . Extendemos esta noción de sustitución a contextos, notando $\Gamma\{\alpha := \beta\}$ para la operación definida por $(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\{\alpha := \beta\} = (x_1 : A_1\{\alpha := \beta\}, \dots, x_n : A_n\{\alpha := \beta\})$. Demostrar que si $\Gamma \vdash t : A$ entonces $\Gamma\{\alpha := B\} \vdash t : A\{\alpha := B\}$.

Ejercicio 7. Decimos que un tipo A es una *instancia* de un tipo A_0 si existen tipos base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y tipos B_1, \dots, B_n tales que $A = A_0\{\alpha_1 := B_1\} \dots \{\alpha_n := B_n\}$. Decimos que A_0 es el *tipo principal* de t si y sólo si para todo juicio de tipado válido $\Gamma \vdash t : A$ se tiene que A es una instancia de A_0 .

1. Demostrar que $\alpha \rightarrow \alpha$ es el tipo principal de $I = \lambda x. x$.
2. Demostrar que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ es el tipo principal de $B = \lambda x y z. x (y z)$.

Comentario: el tipo principal es único salvo renombre de tipos atómicos. En cálculo- λ simplemente tipado, todo término tipable tiene un tipo principal.

Ejercicio 8. Notamos $|t|$ para el tamaño de un término $t \in \Lambda$ y $|A|$ para el tamaño de un tipo A .¹ El objetivo de este ejercicio es mostrar que en general el tamaño del tipo de un término puede ser exponencialmente más grande que el término. Para ello, exhibir una familia de términos $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de tal modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $|t_n| \in \Theta(n)$ y para todo juicio válido $\vdash t_n : A$ se tenga que $|A| \in \Omega(2^{|t_n|})$. Es decir, t_n debe ser de tamaño lineal en n mientras que sólo debe ser posible asignarle tipos de tamaño al menos exponencial.

Ejercicio 9.

- a) Demostrar que no existe un término $t \in \Lambda$ tal que $\vdash t : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ donde α es un tipo base.
- b) Demostrar que existen un tipo A y un término $t \in \Lambda$ tales que $\vdash t : (A \rightarrow A) \rightarrow A$.

¹A los efectos de este ejercicio, cualquier manera “razonable” de contabilizar el tamaño sirve. Por ejemplo, se puede tomar $|x| = 1$; $|\lambda x. t| = 1 + |t|$; $|t s| = 1 + |t| + |s|$; $|\alpha| = 1$; $|A \rightarrow B| = 1 + |A| + |B|$.

Ejercicio 10. (Propiedad del subtérmino). Decimos que un término $t \in \Lambda$ es *subtérmino* de $s \in \Lambda$ si se verifica $t \subseteq s$, de acuerdo con las siguientes reglas:

$$\frac{}{t \subseteq t} \subseteq\text{-refl} \quad \frac{t \subseteq s \quad s \subseteq u}{t \subseteq u} \subseteq\text{-trans} \quad \frac{(z = x) \vee (z \notin \text{fv}(t))}{t\{x := z\} \subseteq \lambda x. t} \subseteq\text{-abs} \quad \frac{}{t \subseteq ts} \subseteq\text{-app}_1 \quad \frac{}{s \subseteq ts} \subseteq\text{-app}_2$$

Decimos que un término t es *tipable* si existen Γ, A tales que $\Gamma \vdash t : A$. Demostrar que son equivalentes:

1. El término t es tipable.
2. Todos los subtérminos de t son tipables.

Ejercicio 11. Recordemos la regla de η -reducción:

$$\lambda x. tx \rightarrow_{\eta} t \quad \text{si } x \notin \text{fv}(t)$$

Demostrar que se cumple la propiedad de *subject reduction* para la $\rightarrow_{\beta\eta}$ -reducción.

Ejercicio 12. Se puede definir una variante simplemente tipada de la lógica combinatoria con las siguientes reglas:

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\text{CL}} K : A \rightarrow B \rightarrow A} \quad \frac{}{\Gamma \vdash_{\text{CL}} S : (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C}$$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash_{\text{CL}} x : A} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\text{CL}} a : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\text{CL}} b : A}{\Gamma \vdash_{\text{CL}} ab : B}$$

- a) Demostrar que se verifica la propiedad de *subject reduction*, es decir, si $\Gamma \vdash_{\text{CL}} a : A$ y $a \rightarrow_{\text{CL}} b$ entonces $\Gamma \vdash_{\text{CL}} b : A$.
- b) Demostrar que la traducción de la lógica combinatoria al cálculo- λ se puede adaptar al marco simplemente tipado, es decir, si $\Gamma \vdash_{\text{CL}} a : A$ entonces $\Gamma \vdash a_{\lambda} : A$.
- c) Demostrar que la traducción del cálculo- λ a la lógica combinatoria se puede adaptar al marco simplemente tipado, es decir, si $\Gamma \vdash t : A$ entonces $\Gamma \vdash_{\text{CL}} t_{\text{CL}} : A$.

Ejercicio 13. Sea $\mathbf{\Psi} \in \Lambda$ un término fijo del cálculo- λ , sobre el que no asumimos ninguna propiedad específica. Extendemos el cálculo- λ simplemente tipado con la siguiente regla de tipado:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{\Psi} : (A \rightarrow A) \rightarrow A}$$

Demostrar que el sistema se vuelve inconsistente desde el punto de vista lógico, es decir que para todo contexto Γ y para todo tipo A existe un término t tal que $\Gamma \vdash t : A$.

Ejercicio 14. Sea A un tipo arbitrario, y sean F, G términos tales que:

$$\vdash F : (A \rightarrow A) \rightarrow A \quad \vdash G : A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

Demostrar que no es posible que para todo término cerrado t tal que $\vdash t : A \rightarrow A$ se tenga que $G(Ft) \rightarrow_{\beta} t$.