Tipos $A ::= Prop \mid p \mid A \to B$

Términos - incluyen términos de tipo Prop que representan proposiciones

$$T ::= a \mid \underbrace{\lambda a{:}A.\,\underbrace{T}_{B}}_{A\to B} \mid \underbrace{\underbrace{T}_{A\to B}\ \underbrace{S}_{A}}_{B} \mid \underbrace{\underbrace{T}_{Prop} \Rightarrow \underbrace{S}_{Prop}}_{Prop} \mid \underbrace{\forall a{:}A.\,\underbrace{T}_{Prop}}_{Prop} \qquad \Gamma ::= () \mid \Gamma, a:A$$

Proof-terms - term assignment para ND sobre las proposiciones

$$t ::= x \mid \underbrace{\lambda x{:}T.\,\underbrace{t}_{S}}_{T\Rightarrow S} \mid \underbrace{\underbrace{t}_{T\Rightarrow S}\ \underbrace{s}_{T}}_{S} \mid \underbrace{\Lambda a{:}A.\,\underbrace{t}_{T}}_{\forall a:A.t} \mid \underbrace{\underbrace{t}_{\forall x:A.T}\ \underbrace{S}_{A}}_{T\{x/S\}} \qquad \Delta ::= () \mid \Delta, x:\underbrace{T}_{Prop}$$

Juicios:

$\Gamma \vdash T : A$

$\Gamma \vdash \Delta$

$\Gamma ; \Delta \vdash t : T$

Incluye una regla de conversión

$$\frac{\Gamma;\Delta \vdash t : T \qquad T =_{\beta} S}{\Gamma;\Delta \vdash t : S}$$

Ej. la fórmula de primer orden $\forall x.\,(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$

se codifica como

$$\forall x{:}\iota.\,(Px \Rightarrow P(fx))$$

donde $P : \iota \to Prop$, $f : \iota \to \iota$

La fórmula de 2do orden $\forall X.\,(X \Rightarrow X)$

se codifica como $\forall x{:}Prop.\,(x \Rightarrow x)$

Versión con términos tipados

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN \mid \Lambda a{:}A.M \mid M\overbrace{T}^{\text{tipado, de tipo } A} \mid \text{tt} \mid M \triangleright N$$
$$\mid \nu a{:}A.M \mid \clubsuit_T \mid [T]M$$

$\boxed{\Gamma \vdash M}$

$$\frac{}{\Gamma \vdash x} \qquad \frac{\Gamma \vdash M}{\Gamma \vdash \lambda x.M} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \quad \Gamma \vdash N}{\Gamma \vdash MN} \qquad \frac{\Gamma, a{:}A \vdash M}{\Gamma \vdash \Lambda a{:}A.M} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \quad \Gamma \vdash T : A}{\Gamma \vdash MT}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{tt}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \quad \Gamma \vdash N}{\Gamma \vdash M \triangleright N} \qquad \frac{\Gamma, a{:}A \vdash M}{\Gamma \vdash \nu a{:}A.M} \qquad \frac{\Gamma \vdash T : \text{Prop}}{\Gamma \vdash \clubsuit_T} \qquad \frac{\Gamma \vdash T : \text{Prop} \quad \Gamma \vdash M}{\Gamma \vdash [T]M}$$

¿Qué pasa con $\quad (\Lambda a{:}A.M)T \longrightarrow M\{a/T\}$

en el caso en el que T <u>no</u> es de tipo A?

Se podría restringir la reducción: (No me gusta, pero no veo alternativa).

$$(\Lambda a{:}A.M)T \xrightarrow{\Gamma} M\{a/T\} \quad \text{si} \quad \Gamma \vdash T : A$$

$F ::= \square M \mid \square T \mid \square \triangleright M \mid [T]M$ "fetas"

$F^* ::= \square \mid F[F^*]$

$W ::= \square \mid F[W] \mid \nu a{:}A.W$

La reducción está indexada por un typing environment \Gamma y es cerrada por contextos que extienden a \Gamma cuando se liga una variable.

Ej.:
$$\frac{M \xrightarrow{\Gamma, a:A} N}{\nu a{:}A.M \xrightarrow{\Gamma} \nu a{:}A.N}$$

Reglas de reducción: (bajo un \Gamma implícito)

$$F\langle \forall a : A . M \rangle \xrightarrow{\Gamma} \forall a : A . F\langle M \rangle$$

$$(\lambda x . M) N \xrightarrow{\Gamma} M\{x / N\}$$

$$(\Lambda a : A . M) T \xrightarrow{\Gamma} M\{a / T\} \quad \text{si } \Gamma \vdash T : A$$

$$tt \rhd M \xrightarrow{\Gamma} M$$

$$[a T_1 \ldots T_n] \circledast_{a T_1 \ldots T_n} \xrightarrow{\Gamma} tt$$

$$[T \Rightarrow S] M \xrightarrow{\Gamma} [S](M \circledast_T)$$

$$\circledast_{T \Rightarrow S} \xrightarrow{\Gamma} \lambda x . [T] x \rhd \circledast_S$$

$$[\forall a : A . T] M \xrightarrow{\Gamma} \forall a : A . [T](M a)$$

$$\circledast_{\forall a : A . T} \xrightarrow{\Gamma} \Lambda a : A . \circledast_T$$

obs. Usando esto siempre se puede hacer:

$$W[t] \longrightarrow \forall a_1 : A_1 \ldots \forall a_n : A_n . F^*[t].$$

No sé si será necesario usar esta observación en algún momento.

Lema. Si $\Gamma \vdash M$ y $M \xrightarrow{\Gamma} N$, $\Gamma \vdash N$.

Lema. Si $\Gamma \vdash T : Prop$ entonces $[T] \circledast_T \xrightarrow{\Gamma} tt$.

Def. Decimos que $\alpha \vDash \Gamma$ sii $\forall a : A \in \Gamma$, $\Gamma \vdash a^\alpha : A$
y dado $\Gamma \vdash \Delta$, decimos que $\alpha ; \sigma \vDash \Gamma ; \Delta$ sii $\alpha \vDash \Gamma$
y además
$$\forall x : T \in \Delta, \quad ([T] x^\sigma)^\alpha \xrightarrow{\Gamma} tt.$$

OBS. $A^\sigma = A^\alpha = A$
$T^\sigma = T$
$T^\alpha \neq T$.

Def. Notamos $\hat{\Delta}$ a la sust. que reemplaza $x : T \in \Delta$ por $\mathfrak{f}_T$.
y deja fijas a todas las variables de término $(a, b, c, \ldots)$.
Generalmente la notamos Δ.

Obs. Si $\alpha \vDash \Gamma$ y $\Gamma \vdash \Delta$ entonces $\alpha ; \Delta \vDash \Gamma ; \Delta$.
En efecto, si $x : T \in \Delta$, $([T] x^\Delta)^\alpha = ([T] \mathfrak{f}_T)^\alpha = [T^\alpha] \mathfrak{f}_{T^\alpha} \twoheadrightarrow tt$.

Notamos $M^{\sigma\alpha}$ para $(M^\sigma)^\alpha$.

Lema (Soundness).

Si $\Gamma \vdash \Delta$, $\alpha ; \sigma \vDash \Gamma ; \Delta$

y $M^{\Delta\alpha} \xrightarrow[W]{\Gamma} tt$ entonces $M^{\sigma\alpha} \xrightarrow{\Gamma} tt$.

Dem. Procedemos por ind. en el par lexicográfico $(|\Delta|, n)$
donde n es la long. de la red. $M^{\Delta\alpha} \xrightarrow[W]{\Gamma} tt$
y $|\Delta|$ es el máximo de los tamaños
de todos los tipos de Δ, (i.e.: $\Delta = x_1 : T_1, \ldots, x_n : T_n$
$\Rightarrow |\Delta| = \text{máx}\{|T_1|, \ldots, |T_n|\}$).

Como $M^{\Delta\alpha} \xrightarrow[W]{\Gamma} tt$,

(1) Una posibilidad es que $M = W_0[R_0]$ con R_0 un redex,
de tal modo que $R_0 \xrightarrow{\Gamma'} R_1$ donde $\Gamma' = \Gamma /\!/ W_0$

$$\therefore \quad M^{\Delta\alpha} = W_0^{\Delta\alpha}[R_0^{\Delta\alpha}] \xrightarrow[W]{\Gamma} W_0^{\Delta\alpha}[R_1^{\Delta\alpha}] \xrightarrow[W]{\Gamma} tt$$

$$\therefore \quad M^{\sigma\alpha} = W_0^{\sigma\alpha}[R_0^{\sigma\alpha}] \xrightarrow{\Gamma} W_0^{\sigma\alpha}[R_1^{\sigma\alpha}] \xrightarrow[HI]{\Gamma} tt \quad ✓$$

Las otras posibilidades son

② $M = W_0[[T]M]$ con $M^{\Delta\alpha} = \mathfrak{f}_{a T_1 \dots T_n}$ y $T^{\Delta\alpha} = a\, T_1 \dots T_n$

③ $M = W_0[(\Lambda a{:}A.M)\, T]$ de tal modo que T no tega tipo A bajo $\Gamma /\!/ W_0$

PERO $\underbrace{T^{\Delta\alpha}}_{=T^\alpha}$ sí tenga tipo $\underbrace{A^{\Delta\alpha}}_{=A}$ bajo $\Gamma /\!/ W_0$.

④ $M = W_0[x]$ con $x : T_1 \Rightarrow T_2 \in \Delta$, lo que vía "$\Delta$" crea $\mathfrak{f}_{T_1 \Rightarrow T_2}$.

⑤ $M = W_0[x]$ con $x : \forall a{:}A.T \in \Delta$, lo que vía "$\Delta$" crea $\mathfrak{f}_{\forall a:A.T}$

Veamos primero el caso ⑤, porque creo que puede ser más interesante.

5 Sabemos $M^{\Delta\alpha} = W_0^{\Delta\alpha}[x^{\Delta\alpha}] = W_0^{\Delta\alpha}[\mathfrak{f}_{\forall a:A.T^\alpha}] \xrightarrow[w]{\Gamma} tt.$ OBS: $A^\alpha = A$

$$\begin{tikzcd} W_0^{\Delta\alpha}[\mathfrak{f}_{\forall a:A.T^\alpha}] \arrow[r, "\Gamma", "w"'] \arrow[d, "\Gamma"', "w"] & tt \\ W_0^{\Delta}[\Lambda a{:}A.\, \mathfrak{f}_{T^\alpha}] \arrow[ur, "\Gamma", "w"'] & \end{tikzcd}$$

- Luego W_0 debe ser de la forma $W_1[\square\, S]$ donde $\Gamma \vdash S^\alpha : A$

y $\underbrace{W_1^{\Delta\alpha}[(\Lambda a{:}A.\, \mathfrak{f}_{T^\alpha})\, S^\alpha] \xrightarrow[w]{\Gamma} W_1^{\Delta\alpha}[\mathfrak{f}_{T^\alpha\{a := S^\alpha\}}] \xrightarrow[w]{\Gamma} tt}$

Esta reducción es más corta que la original. (✡2)

- Como $x : \forall a{:}A.T \in \Delta$ y $\alpha;\sigma \vDash \Gamma;\Delta$

sabemos que $[\forall a{:}A.T^\alpha]\, x^{\sigma\alpha} \xrightarrow{\Gamma} tt$,

es decir, $\forall a{:}A^\alpha.\ [T^{\sigma\alpha}](x^{\sigma\alpha} a) \xrightarrow{\Gamma} tt$

$\therefore\ [T^{\sigma\alpha}](x^{\sigma\alpha} a) \xrightarrow{\Gamma, a:A} tt$ ——— (✡1)

- Sea z una variable fresca y

Consideremos el término $W_1[z]$ bajo el ctx. $\Gamma, a{:}A; \Delta, z{:}T$

y las sustituciones $\alpha' = \alpha[a \mapsto S^\alpha]$

$\sigma' = \sigma[z \mapsto x^\sigma a]$

Notemos que: • $\alpha' \vDash \Gamma, a{:}A$ pues $\Gamma \vdash S^\alpha : A$

• $\alpha';\sigma' \vDash \Gamma, a{:}A; \Delta, z{:}T$ pues $([T]\, z^{\sigma'})^{\alpha'} = ([T](x^\sigma a))^{\alpha'}$

$T^{\alpha'} = T^\alpha$ porque a es fresca w.r.t. T $\longrightarrow$ $= [T^\alpha](x^{\sigma\alpha} S^\alpha) \xrightarrow{\Gamma} tt$

Por (✡1)

y usando un lema de sustitución:

Si $\Gamma \vdash t : A$ $\left\{ \dfrac{M \xrightarrow{\Gamma, a:A} tt}{M\{a/T\} \xrightarrow{\Gamma} tt} \right.$

Notemos que $|\Delta, z:T| = |\Delta|$ pues Δ contiene una asignación $x : \forall a : A . T$

$= \text{máx}\{ |\Delta|, |T| \}$

Sabemos que $W_1[z]^{(\Delta, z:T)\alpha'} \twoheadrightarrow tt$

pues $W_1[z]^{(\Delta, z:T)\alpha'} = W_1^{\Delta}[\circledast_T]^{\alpha'} = W_1^{\Delta\alpha'}[\circledast_{T\alpha'}] = W_1^{\Delta\alpha}[\circledast_{T^{\alpha}\{a := S^{\alpha}\}}] \twoheadrightarrow tt$

Por $\circledast_2$ que es una reducción estrictamente más corta que la original.

Luego estamos en condiciones de aplicar la HI y obtenemos: $W_1[z]^{\sigma'\alpha'} \twoheadrightarrow tt$

$$\therefore\ W_1^{\sigma\alpha}[z^{\sigma'\alpha'}] = W_1^{\sigma\alpha}[(x^{\sigma} a)^{\alpha'}] = W_1^{\sigma\alpha}[x^{\sigma\alpha} S^{\alpha}] \twoheadrightarrow tt.$$

Para concluir, qvq. $M^{\sigma\alpha} \xrightarrow{\Gamma} tt$.

En efecto,

$M^{\sigma\alpha} = W_1^{\sigma\alpha}[x^{\sigma\alpha} S^{\alpha}] \twoheadrightarrow tt$, que es lo que acabamos de ver.