```
            if (i%p[j]==0) break;
            else mu[i*p[j]]=-mu[i];
        }
    }
}
```

3、用法和性质(不会 qwq)

首先是简单性质：

n=sigma{phi(d)[d|n]} 将 phi 看作容斥系数

[n=1]=sigma{mu(d)[d|n]} 将 i/n 化为最简分数

1…n 的与 n 互质数和 n*phi(n)/2

然后，经过推导可能将某些式子化成简单形式就能做了 qwq 完全不会，智商不够没办法……

懒得写了放个图

2. 关于莫比乌斯函数和欧拉函数有两个经典的公式
    1. $[n=1]=\sum_{d|n}\mu(d)$，将$\mu(d)$看作是容斥的系数即可证明。
    2. $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$，将$\frac{i}{n}(1\le i\le n)$化为最简分数统计个数即可证明。
3. 若$f(n)$为积性函数，则对于正整数$n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{k_i}$有$f(n)=\prod_{i=1}^{t}f(p_i^{k_i})$；若$f(n)$为完全积性函数，则对于正整数$n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{k_i}$有$f(n)=\prod_{i=1}^{t}f(p_i)^{k_i}$。

狄利克雷卷积与莫比乌斯反演

1. 数论函数f和g狄利克雷卷积定义为$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)\cdot g(\frac{n}{d})$，狄利克雷卷积满足交换律、结合律，对加法满足分配律，存在单位元函数$e(n)=[n=1]$使得$f*e=f=e*f$，若f和g为积性函数则$f*g$也为积性函数。
2. 狄利克雷卷积的一个常用技巧是对于积性函数f与恒等函数I的卷积的处理，例如$n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{k_i},g(n)=\sum_{d|n}f(d)$，则有$g(n)=\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{k_i}f(p_i^j)$。
3. 莫比乌斯反演也是对于$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$的讨论，但是不要求f是积性函数，适用于已知$g(n)$求$f(n)$的情况，由于$I*\mu=e$，则$g*\mu=f*I*\mu=f*e=f$，即$f(n)=\sum_{d|n}g(d)\cdot\mu(\frac{n}{d})$，类似地有$g(n)=\sum_{n|d}f(d)\Rightarrow f(n)=\sum_{n|d}g(d)\cdot\mu(\frac{d}{n})$，二项式反演也是类似的技巧。有一个例子可以看出欧拉函数和莫比乌斯函数之间的关系，由于$\sum_{d|n}\varphi(d)=id(n)$，所以$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$，也即$\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$。

黑科技大概就是说把 phi，mu 或者其他的东西提到前面然后换元来做，根本不会 qwq

首先看一个简单的例子，求前n个正整数的约数之和，即$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)$，其中$n\le 10^{12}$。

显然不能直接做了，但是我们可以推导一番：

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[j|i]\cdot j=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\sum_{j=1}^{n}[i|j]=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$$

当$i\le\sqrt{n}$时，$\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$显然只有$O(\sqrt{n})$个取值；当$i>\sqrt{n}$时，$\lfloor\frac{n}{i}\rfloor<\sqrt{n}$显然也只有$O(\sqrt{n})$个取值；对于固定的$\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$，$i$的取值是一段连续的区间，这段区间是$[\left\lfloor\frac{n}{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor+1}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{n}{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\right\rfloor]$，因此可以$O(\sqrt{n})$计算所求。

同样地，求前n个正整数的约数个数之和也可以这样计算，留给读者练习。

另外需要说明的是，$\sum_{i=1}^{n}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor\cdot i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor\cdot(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor+1)}{2}$，这也是一种常见的表示形式。

超麻烦的类欧几里得

$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$$
$$g(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}i\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$$
$$h(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor^2$$
$$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor$$

$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[(ai+b)/c>=j+1]$$
$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[ai>=cj+c-b]$$
$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[ai>cj+c-b-1]$$
$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[i>(cj+c-b-1)/a]$$
$$f(a,b,c,n)=\sum_{j=0}^{m}(n-(cj+c-b-1)/a)$$
$$f(a,b,c,n)=nm-f(c,c-b-1,a,m-1)$$

a>=c或b>=c的时候，容易得到

$$g(a,b,c,n)=(a/c)*n*(n+1)*(2n+1)/6+(b/c)*n*(n+1)/2+g(a\%c,b\%c,c,n)$$

注意这里0到n的二次方和公式就是$n*(n+1)*(2n+1)/6$

接下来我们来推a和b均小于c的情况。

首先先和f一样把下取整那玩意变换一下

$$g(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}i\sum_{j=1}^{m}[(ai+b)/c>=j]$$
$$g(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}i\sum_{j=0}^{m-1}[i>(cj+c-b-1)/a]$$
$$g(a,b,c,n)=1/2*\sum_{j=0}^{m-1}(n+1+(cj+c-b-1)/a)*(n-(cj+c-b-1)/a)$$

这里看的有点难受，f的时候转化的其实是0次方和，而g是1次方和，所以这里用了个求和公式。

$$g(a,b,c,n)=1/2*\sum_{j=0}^{m-1}n(n+1)-(cj+c-b-1)/a-[(cj+c-b-1)/a]^2$$

拆出来了

$$g(a,b,c,n)=1/2*[n(n+1)m-f(c,c-b-1,a,m-1)-h(c,c-b-1,a,m-1)]$$

a>=c或b>=c的时候，h也是很麻烦的……

三项式的平方，拆出来大概是这样

$$h(a,b,c,n)=(a/c)^2*n(n+1)(2n+1)/6+(b/c)^2*(n+1)+(a/c)*(b/c)*n(n+1)$$
$$+h(a\%c,b\%c,c,n)+2*(a/c)*g(a\%c,b\%c,c,n)+2*(b/c)*f(a\%c,b\%c,c,n)$$

接下来a和b均小于c的情况，我们要转化一下思路了。

如何获得一个n^2?

$$n^2=2*\frac{n(n+1)}{2}-n=2\sum_{i=0}^{n}i-n$$

有了思路我们来推h

$$h(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}(2*\sum_{j=1}^{(ai+b)/c}j-(ai+b)/c)$$

可以想到交换主体。

$$h(a,b,c,n)=2*\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)*\sum_{i=0}^{n}[(ai+b)/c>=j+1]-f(a,b,c,n)$$
$$h(a,b,c,n)=2*\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)*\sum_{i=0}^{n}[i>(cj+c-b-1)/a]-f(a,b,c,n)$$
$$h(a,b,c,n)=2*\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)*(n-(cj+c-b-1)/a)-f(a,b,c,n)$$
$$h(a,b,c,n)=nm(m+1)-2g(c,c-b-1,a,m-1)-2f(c,c-b-1,a,m-1)$$
$$-f(a,b,c,n)$$