目录

头文件

```
ll gcd(ll a,ll b){return b?gcd(b,a%b):a;}
template<typename T>inline T abs(T a) {return a>0?a:-a;}
template<class T> inline
void read(T& num) {
    bool start=false,neg=false;
    char c;
    num=0;
    while((c=getchar())!=EOF) {
        if(c=='-') start=neg=true;
        else if(c>='0' && c<='9') {
            start=true;
            num=num*10+c-'0';
        } else if(start) break;
    }
    if(neg) num=-num;
}
inline int powMM(int a,int b,int M){
    int ret=1;
    a%=M;
    while (b){
        if (b&1) ret=1LL*ret*a%M;
        b>>=1;
        a=1LL*a*a%M;
    }
    return ret;
}
inline int add(int x,int y){
    x%=MOD;y%=MOD;return (1LL*x+y)%MOD;}
inline int add(int x,int y){
x+=y;if(x>=MOD)x-=MOD;return x;}
inline void addi(int &x,int y)
{y%=MOD;x+=y;if(x>=MOD)x-=MOD;}
inline int mul(int x,int y){return 1LL*x*y%MOD;}
inline void addi(int &x,int y){
x%=MOD;y%=MOD;(x+=y)%=MOD;}
inline void muli(int &x,int y){
x%=MOD;y%=MOD;x=1LL*x*y%MOD;if(x<0)x+=MOD;}
inline void mod(int &x){if(x<0){
x%=MOD;x=(x+MOD)%MOD;}}

ll mul(ll a , ll b,ll Q){
```

```
    return (a * b - (ll) ((long double)a * b / Q) * Q) % Q;
}
#define debug
clock_t t1 = clock();
fprintf(stderr, "%ld ms\n", clock() - t1);
```

数学

波利亚定理

计算置换的循环数,是这一算法的瓶颈.如果能够快速计算出各置换的循环数,就可以大大提高程序的运行效率
旋转:n 个点顺时针(或逆时针)旋转 i 个位置的置换,循环数为 gcd(n,i)
翻转:
n 为偶数时,
对称轴不过顶点:循环数为 n/2
对称轴过顶点:循环数为 n/2+1
n 为奇数时,循环数为(n+1)/2

正方体棱 UVA10601
首先重要的是要弄清楚正方体的旋转，共 24 种变换。

1、静止不动，那么就是 12 个循环，每个循环节长度为 1

2、通过两个对立的顶点，分别旋转 120，240，有 4 组顶点，在每一次旋转当中，可以发现分为 4 个循环，每个循环节长度为 3, 直观的说, 就是有 3 条边是交换的，颜色必须一样。

3、通过两个对立面的中心，分别旋转 90，180，270 度。有 3 组面

在每次旋转 90 度和 270 度的时候，可以发现分为 3 个循环，每个循环节长度为 4

在每次旋转 180 度的时候，可以发现分为 6 个循环，每个循环节长度为 2

4、通过两条对立的棱的中心，分别旋转 180 度，有 6 组棱

在每次旋转的时候，分为 6 个循环，每个循环节长度为 2

正方体顶点

例 3　正方体的 8 个顶点各镶一颗钻石,有 m 种不同颜色的钻石可供选用,求不同的嵌法种数(假设 8 个顶点彼此是没有区别的).

解　如图 1－11, $N_8=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, N_8 上的群 $G=\{P_1,P_2,\cdots,P_{24}\}$, G 中置换可分为 5 类(图 1－12).

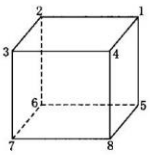


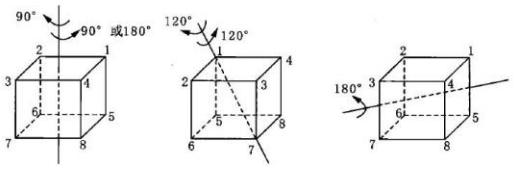
图 1－11

Ⅰ类.使正方体不动的置换 $P_1=I=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$,故 $C(P_1)=8$.

Ⅱ类.以正方体对面中心连线为轴旋转 $\pm 90°$,这类置换有 6 个: $P_2,P_3,\cdots,P_7$,每一个可写成 2 个 4 阶轮换之积.例如 $P_2=(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$,故 $C(P_i)=2(i=2,3,\cdots,7)$.

Ⅲ类.以正方体两个对面中心连线为轴旋转 $180°$,这类置换有 3 个: P_8,P_9,P_{10},其中每一个都能写成 4 个 2 阶轮换的乘积.例如 $P_8=(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$,故 $C(P_i)=4(i=8,9,3)$.

Ⅳ类.以正方体对角线为轴旋转 $\pm 120°$,这类置换有 8 个: $P_{11},P_{12},\cdots,P_{18}$,其中每一个都可写成 2 个 1 阶轮换与 2 个 3 阶轮换的乘积.例如 $P_{11}=(1)(7)(254)(368)$,故 $C(P_i)=4(i=11,12,\cdots,18)$.



Ⅴ类.以正方体的两条对棱中点为轴旋转 $180°$,这类置换有 6 个: $P_{19},P_{20},\cdots,P_{24}$,其中每个都是 4 个 2 阶轮换的乘积.例如 $P_{19}=(1\ 5)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)$,故 $C(P_i)=4(i=19,20,\cdots,124)$.

由定理(1),得不同的嵌入方法数为

$$M=\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}m^{C(P_i)}=\frac{1}{24}(m^8+6m^2+3m^4+8m^4+6m^4)$$
$$=\frac{1}{24}m^2(m^6+17m^2+6).$$

正方体面

例 4　给定正方体,对其表面染色,每面只染一种颜色,有 m 种颜色可供使用.问共有多少种不同的方法?

解　$N_6=\{1,2,\cdots,6\}$,这里,1,2,3,4,5,6 分别表示正方体的上、下及四周的 4 个面(图 1－13),同上例 N_6 的置换群 $G=\{P_1,P_2,\cdots,P_{24}\}$, G 中置换分为 5 类(图 1－12).

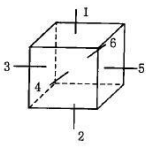


图 1－13

Ⅰ类.使正方体不动的置换 $P_1=I_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$,故 $C(P_1)=6$.

Ⅱ类.以正方体两个对面中心的连线为轴旋转 $\pm 90°$,这类置换有 6 个: $P_2,P_3,\cdots,P_7$,其中每一个都可看成 2 个 1 阶轮换与 1 个 4 阶轮换的乘积.例如 $P_2=(1)(2)(3456)$,故 $C(P_i)=3(i=2,3,\cdots,7)$.

Ⅲ类.以正方体两个对面的中心的连线为轴旋转 $180°$,这类置换有 3 个: P_8,P_9,P_{10},其中每一个都能看成 2 个 1 阶轮换与 2 个 2 阶轮换的乘积.例如 $P_{11}=(1)(2)(35)(46)$,故 $C(P_i)=4(i=8,9,10)$.

Ⅳ类.以正方体的一条对角线为轴旋转 $\pm 120°$,这类置换有 8 个: $P_{11},P_{12},\cdots,P_{18}$,其中每一个都可看成 2 个 3 阶轮换的乘积.例如 $P_{11}=(136)(254)$,故 $C(P_i)=2(i=11,12,\cdots,18)$.

Ⅴ类.以正方体的一组对棱中点的连线为轴旋转 $180°$,这类置换有 6 个: $P_{19},P_{20},\cdots,P_{24}$,其中每个都能看成 3 个 2 阶轮换的乘积.例如 $P_{19}=(12)(34)(56)$,故 $C(P_i)=3(i=19,20,\cdots,24)$.

于是,由定理(1)得不同的染色方法数为

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{24}m^{C(P_i)}=\frac{1}{24}(m^6+6m^3+3m^4+8m^2+6m^3)$$
$$=\frac{1}{24}m^2(m^4+3m^2+12m+8).$$

例1-　POJ1286-3 色染可旋转可翻转的项链

```
LL modxp(LL a,LL b){
    LL res=1;
    while(b!=0){
```

```
        if(b&1) res*=a;
        a=a*a;
        b>>=1;
    }
    return res;
}
int main() {
    LL n,i;
    LL ans;
    while(~scanf("%lld",&n)) {
        if(n==-1) break;
        if(!n){
            puts("0");
            continue;
        }//不要掉了这种情况
        ans=0;
        for(i=1; i<=n; i++)
            ans+=modxp(3,gcd(n,i));
        if(n&1) {
            ans+=modxp(3,n/2+1)*n;
        } else {
            ans+=modxp(3,n/2+1)*(n/2);
            ans+=modxp(3,n/2)*(n/2);
        }
        printf("%lld\n",ans/(n*2));
    }
    return 0;
}
```

例2- UVA 10601-立方体棱染色

```
int T;
int a[10], b[10];
ll C[20][20];

void init()
{
    C[0][0] = 1;
    for(int i = 1; i < 15; ++i) {
        C[i][0] = C[i][i] = 1;
        for(int j = 1; j < i; ++j) {
            C[i][j] = C[i - 1][j] + C[i - 1][j - 1];
        }
    }
}

ll work(int k)
{ //每 k 条边必须相同，分成 12/k 组(以对边中点为轴旋转 180°是分成 5 组)
    memcpy (b, a, sizeof(a));
    int sum = 0;
    for (int i = 1; i <= 6; ++i) {
        if(b[i] % k) return 0;
        b[i] /= k;
        sum += b[i];
    }
    ll res = 1;
    for (int i = 1; i <= 6; ++i) {
        res *= C[sum][b[i]];
        sum -= b[i];
    }
    return res;
}

ll solve()
{
    ll res = 0;
    //静止
    res += work(1);
    //以相对面中心为轴
    res += (ll)3 * 2 * work(4); //旋转 90°和 270°
    res += (ll)3 * work(2); //旋转 180°
    //  以对顶点为轴,可以旋转 120°或 240°
    res += (ll)4 * 2 * work(3);
    //  以对边种点为轴，只能旋转 180°
    for(int i = 1; i <= 6; ++i) {
        for(int j = 1; j <= 6; ++j) {
            if(a[i] == 0 || a[j] == 0) continue;
            a[i]--; a[j]--;   //将 a[i]和 a[j]设为选择的两条对边的颜色
            res += (ll)6 * work(2); //剩下的是 5 个循环长度为 2 的循环，6 代表对边选择情况
            a[i]++; a[j]++;
        }
    }
    return res;
}

int main()
{
```

```
    init();
    scanf("%d", &T);
    while (T--) {
        memset (a, 0, sizeof(a));
        for (int i = 0; i < 12; ++i) {
            int tmp;
            scanf ("%d", &tmp);
            a[tmp]++;
        }
        printf("%lld\n", solve() / 24); //  最后还要除以总的置换数:24
    }
    return 0;
}
```

例3- UVA11255-限制个数的染可旋转可翻转项链-burnside

```
int T;
LL C[MAXN][MAXN];
void getC(){
    for(int i=0;i<MAXN;i++){
        C[i][0]=C[i][i]=1;
        for(int j=1;j<i;j++) C[i][j]=C[i-1][j]+C[i-1][j-1];
    }
}
int gcd(int a,int b){
    return a%b?gcd(b,a%b):b;
}
LL cal(int a,int b,int c,int l,int m){
    if(a<0||b<0||c<0) return 0;
    if(a%l||b%l||c%l) return 0;
    a/=l;
    b/=l;
    return C[m][a]*C[m-a][b];    //从 m 个循环中选 a 个用颜色 a，从剩下的中选 b 个用颜色 b，再剩下的用颜色 c
}
int main(){
//    freopen("in.txt","r",stdin);
    getC();
    scanf("%d",&T);
    while(T--){
        int a,b,c;
        scanf("%d%d%d",&a,&b,&c);
        int n=a+b+c;
        LL ans=0;
        //旋转
        for(int i=0;i<n;i++){
            int l=gcd(i,n);
            ans+=cal(a,b,c,n/l,l);
        }
        //翻转
        //n 为奇数，分别选一种颜色的珠子穿过对称轴，这个珠子可以有 n 个位置
        if(n%2){
            ans+=cal(a-1,b,c,2,n/2)*n;
            ans+=cal(a,b-1,c,2,n/2)*n;
            ans+=cal(a,b,c-1,2,n/2)*n;
        }
        //n 为偶数
        else{
            ans+=cal(a,b,c,2,n/2)*(n/2);      //对称轴不穿过珠子，有 n/2 种对称轴
            //对称轴穿过 2 种颜色珠子，有 n 种对称轴
            ans+=cal(a-1,b-1,c,2,n/2-1)*n;
            ans+=cal(a-1,b,c-1,2,n/2-1)*n;
            ans+=cal(a,b-1,c-1,2,n/2-1)*n;
            //对称轴穿过 2 个同样颜色的珠子, 有 n/2 种对称轴
            ans+=cal(a-2,b,c,2,n/2-1)*(n/2);
            ans+=cal(a,b-2,c,2,n/2-1)*(n/2);
            ans+=cal(a,b,c-2,2,n/2-1)*(n/2);
        }
        printf("%lld\n",ans/(2*n));
    }
    return 0;
}
```

例4- HDU2865-k 种颜色染中心有一点的环相邻颜色不同可旋转的方案数

```
int n,k,f1,f2,f3,prime[MAX],phi[MAX],p[MAX];
void init(){
    phi[1]=1;
    for(int i=2;i<=100000;i++){
        if(!p[i]){
            prime[++prime[0]]=i;phi[i]=i-1;
        }
        for(int
```

```
j=1;j<=prime[0]&&i*prime[j]<=100000;j++){
                p[i*prime[j]]=1;
                if(i%prime[j]==0){
                    phi[i*prime[j]]=phi[i]*prime[j];break;
                }
                else phi[i*prime[j]]=phi[i]*phi[prime[j]];
            }
        }
}
ll getphi(int x){
    if(x<=100000)return phi[x];
    ll re=x;
    for(int
i=1;x>1&&i<=prime[0]&&prime[i]*prime[i]<=x;++i)
        if(x%prime[i]==0){
            re=re*(prime[i]-1)/prime[i];
            while(x%prime[i]==0)x/=prime[i];
        }
    if(x>1)re=re*(x-1)/x;
    return re%MOD;
}
const int m_num=10;
struct matrix{
    int e[m_num][m_num];
    int row,col;
    matrix(){}
    matrix(int                                    _r,int
_c):row(_r),col(_c){memset(e,0,sizeof(e));}
    matrix operator * (const matrix &tem)const{
        matrix ret=matrix(row,tem.col);
        for(int i=1;i<=ret.row;i++)
            for(int j=1;j<=ret.col;j++)
                for(int k=1;k<=ret.col;k++)

addi(ret.e[i][j],mul(e[i][k],tem.e[k][j]));
        return ret;
    }
    void getE(){
        for(int i=1;i<=row;i++)
            for(int j=1;j<=col;j++)e[i][j]=(i==j);
    }
}xi,an;
matrix m_qpow(matrix tem,int x){
    matrix ret=matrix(tem.row,tem.row);
    ret.getE();
    while(x){
        if(x&1)ret=ret*tem;
        x>>=1;tem=tem*tem;
    }
    return ret;
}
int getf(int d){
    if(d==1)return f1;
    else if(d==2)return f2;
    else if(d==3)return f3;
    else return (an*m_qpow(xi,d-3)).e[1][1];
}
int main(){
    init();
    xi.col=2;xi.row=2;
    an.col=2;an.row=1;
    while(~scanf("%d%d",&n,&k)){
        int ans=0;
        xi.e[1][1]=k-3;xi.e[1][2]=1;
        xi.e[2][1]=k-2;xi.e[2][2]=0;
        f2=mul(k-1,k-2);
        f1=k-1LL;
        f3=mul(f2,k-3);
        an.e[1][1]=f3;an.e[1][2]=f2;
        for(int i=1;i*i<=n;i++){
            if(n%i==0){
                addi(ans,mul(getphi(n/i),getf(i) ) );
                if(i*i!=n)
                    addi(ans,mul(getphi(i),getf(n/i)));
            }
        }
        addi(ans,MOD-mul(getphi(n),k-1) );
        muli(ans,mul(k,powMM(n,MOD-2,MOD ) ));
        printf("%d\n",ans);
    }
    return 0;
}
```

快速沃尔什变换

```
/*
```

以下的各个模板中 dwt 中的/2 结合具体情况转化为 2 的逆元

也可以不在过程中除以 2 转为在求完之后直接除以数组长度 (2^k)

并且有一个 trick 为 过程中取模就直接以

```
(2^k*MOD) 为模
    这样最后就可以直接除以 2^k 了
    不过这样乘法取模过程中可能会溢出 ll 需要使用常用模板文件夹下的防溢出乘法

*/

/*
    最速版 非递归 速度远超其他 DWT 只需加一个除 2 操作 这里 FWT 展示的是不取模的 DWT 展示的是取模的
    使用是 for(int i=0;i<n;i++)a[i]=a[i]*b[i] 这里也可以加取模操作 在模意义下不影响结果
*/
template<typename T>void FWT(T* a,int len)
{
    for (int hl = 1, l = 2; l <= len; hl = l, l <<= 1)
        for (T i = 0; i < len; i += l)
        for (register T t, j = 0, *x = a + i, *y = x + hl; j < hl; ++j, ++x, ++y) t = *x + *y, *y = *x - *y, *x = t; return;
}


template<typename T>void DWT(T* a,int len,int inv)
{
    for (int hl = 1, l = 2; l <= len; hl = l, l <<= 1)
        for (T i = 0; i < len; i += l)
        for (register T t, j = 0, *x = a + i, *y = x + hl; j < hl; ++j, ++x, ++y) t = mul(add(*x , *y),inv), *y = mul(inv,add(*x,MOD - *y)), *x = t; return;
}
/*
    不通过 DWT 直接 O(n)获取 某一下标的 DWT 后的结果 cnt[i]表示 i 的二进制 1 的个数 可以预处理出来
    addi(int &x,int y) 修改 x 的值 （模意义下）
    模可能会产生问题（毕竟是模意义的 hash 处理 但概率很小）可以多 hash 解决
*/
int cnt[MAX];
int get(int* a,int len,int pos){
    int re=0;
    for(int i=0;i<len;i++)
        if(cnt[i&pos]&1)addi(re,MOD-a[i]);
        else addi(re,a[i]);
    return re;
}

/*
    递归 n 稍大一点就很慢了
*/
template<typename T> void fwt(T *a,int l,int r)
{
    if(l==r)return;
    int n=(r-l+1)/2,mid=l+n-1;
    fwt(a,l,mid);fwt(a,mid+1,r);
    for(int i=1;i<=mid;i++)
    {
        T x=a[i],y=a[i+n];
        a[i]=x+y;a[i+n]=x-y;
    }
}
template<typename T> void dwt(T *a,int l,int r)
{
    if(l==r)return;
    int n=(r-l+1)/2,mid=l+n-1;
    dwt(a,l,mid);dwt(a,mid+1,r);
    for(int i=1;i<=mid;i++)
    {
        T x=a[i],y=a[i+n];
        a[i]=(x+y)/2;a[i+n]=(x-y)/2;
    }
}
/*
    以上为^运算

    &运算:  fwt(a)=(fwt(a0+a1), fwt(a1) )
            dwt(a)=(dwt(a0-a1), dwt(a1) )

    or 运算  fwt(a)=(fwt(a0), fwt(a0+a1) )
            dwt(a)=(dwt(a0), dwt(a1-a0) )

*/


/*
    非递归版
    其中 UFWT 仅适用于 a^k 这种 如果不是的话需要改一下
    只需要把 inv 设成 2^(MOD-2)即可 即 2 的逆元
*/
```

```
void FWT()
{
    for(int d=1;d<len;d<<=1)
        for(int i=0;i<len;i+=(d<<1))
            for(int j=0;j<d;j++)
            {
                int x=a[i+j],y=a[i+j+d];
                a[i+j]=(x+y)%p,a[i+j+d]=(x-y+p)%p;
            }
}

void UFWT()
{
    for(int d=1;d<len;d<<=1)
        for(int i=0;i<len;i+=(d<<1))
            for(int j=0;j<d;j++)
            {
                int x=a[i+j],y=a[i+j+d];

a[i+j]=1ll*(x+y)*inv%p,a[i+j+d]=(1ll*(x-y)*inv%p+p)%p;
            }
}




/*
    非递归 传数组版 注意这个区间是左闭右开的!
*/
void Transform(int l, int r, LL a[]) // [l, r)
{
    if(l == r - 1) return ;
    int len = (r - l) >> 1;
    int m = l + len;
    Transform(l, m, a);
    Transform(m, r, a);
    for(int i = l; i < m; i ++)
    {
        LL x1 = a[i], x2 = a[i + len];
        a[i] = (x1 - x2 + MOD) % MOD;
        a[i + len] = (x1 + x2) % MOD;
    }
}

void ReTranform(int l, int r, LL a[])
{
    if(l == r - 1) return ;
    int len = (r - l) >> 1;
    int m = l + len;
    for(int i = l; i < m; i ++)
    {
        LL y1 = a[i], y2 = a[i + len];
        a[i] = (y1 + y2) * Inv2 % MOD;
        a[i + len] = (y2 - y1 + MOD) * Inv2 % MOD;
    }
    ReTranform(l, m, a);
    ReTranform(m, r, a);
}
```

例1- hiho1230

```
/*
题意：有 2*n+1 个人，第一遍给每个人先发 [0,m]中任意值的钱，第二遍再给每个人发 x 元，
x 的范围为[L,R]。问有多少种第一遍发钱的方法使得：存在 x 使得这些人的钱的异或值在第二遍发完之后为 0。
解法：首先暴力打表发现如果某一方案可行，则第二遍发钱的值 x 一定唯一。（并不会证，但发现 2*n+1 为奇数时有该性质）
然后就可以转化为：先枚举 x，然后求给每个人发[x, x+m]元钱，使得他们异或值为 0 的方案数。
*/
ll inv;
int a[MAX];
void fwt(int *a,int l,int r)//左闭右闭
{
    if(l==r)return;
    int n=(r-l+1)/2,mid=l+n-1;
    fwt(a,l,mid);fwt(a,mid+1,r);
    for(int i=l;i<=mid;i++)
    {
        ll x=a[i],y=a[i+n];
        a[i]=(x+y)%MOD;a[i+n]=(x-y+MOD)%MOD;
    }
}
void dwt(int *a,int l,int r)
{
    if(l==r)return;
    int n=(r-l+1)/2,mid=l+n-1;
    dwt(a,l,mid);dwt(a,mid+1,r);
    for(int i=l;i<=mid;i++)
```

```
    {
        ll x=a[i],y=a[i+n];
        a[i]=(x+y)%MOD*inv%MOD;a[i+n]=(x-y+MOD)%MOD*inv%MOD;
    }
}
ll cal(int l,int r,int n)
{
    int N=1;
    while(N<=r)N<<=1;
    for(int i=0;i<N;i++)a[i]=(i<=r&&i>=l)?1:0;
    fwt(a,0,N-1);//左闭右闭 故需要-1
    for(int i=0;i<N;i++)a[i]=powMM(a[i],n,MOD);
    dwt(a,0,N-1);
    return (a[0]+MOD)%MOD;
}
int n,m,l,r;
int main()
{
    inv=powMM(2,MOD-2,MOD);
    while(~scanf("%d%d%d%d",&n,&m,&l,&r))
    {
        n=2*n+1;
        ll ans=0;
        for(int i=l;i<=r;i++)(ans+=cal(i,m+i,n))%=MOD;//枚举取的 k
        printf("%lld\n",ans);
    }
    return 0;
}
```

例 2-2018 牛客暑期多校第九场 A

```
template<typename T>void FWT(T* a,int len)
{
    for (int hl = 1, l = 2; l <= len; hl = l, l <<= 1)
        for (T i = 0; i < len; i += l)
        for (register T t, j = 0, *x = a + i, *y = x + hl; j < hl; ++j, ++x, ++y) t = add(*x , *y), *y = add(*x,MOD - *y), *x = t; return;
}
template<typename T>void DWT(T* a,int len,int inv)
{
    for (int hl = 1, l = 2; l <= len; hl = l, l <<= 1)
        for (T i = 0; i < len; i += l)
        for (register T t, j = 0, *x = a + i, *y = x + hl; j < hl; ++j, ++x, ++y) t = mul(add(*x , *y),inv), *y = mul(inv,add(*x,MOD - *y)), *x = t; return;
}
int a[MAX],b[MAX],inv,n;
int main()
{
    read(n);
    for(int i=0;i<n;i++)read(a[i]);
    for(int i=0;i<n;i++)read(b[i]);
    FWT(a,n);FWT(b,n);
    inv=powMM(2,MOD-2,MOD);
    for(int i=0;i<n;i++)a[i]=mul(powMM(a[i],MOD-2,MOD),b[i]);
    DWT(a,n,inv);
    for(int i=0;i<n;i++)printf("%d\n",a[i]);
    return 0;
}
```

类欧几里得

一定注意前面是 a,后面是 b,线段树一定要注意顺序

f(a,b,c,n)=sigma{(ai+b)/c}; (0->n)

g(a,b,c,n)=sigma{(ai+b)/c*i}; (0->n)

h(a,b,c,n)=sigma{((ai+b)/c)^2}; (0->n)

let m=(a*n+b)/c;

推导 f:

a=0:

return b/c*(n+1)

a>=c||b>=c:有一部分是规律的;

return (a/c)*n(n+1)/2+(b/c)*(n+1)+f(a%c,b%c,c,n)

else:直接算,这个东西是个梯形中的点数,反过来算就可以了

$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[(ai+b)/c>=j+1]$

$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[ai>=cj+c-b]$

$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[ai>cj+c-b-1]$

$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}[i>(cj+c-b-1)/a]$

$f(a,b,c,n)=\sum_{j=0}^{m}(n-(cj+c-b-1)/a)$

f(a,b,c,n)=n*m-f(c,c-b-1,a,m-1);

推导 g:

a=0:
return b/c*n(n+1)/2 (sigma 的是 i)
a>=c||b>=c:有一部分是规律的;
g(a,b,c,n)=(a/c)*n(n+1)(2n+1)/6+(b/c)*n(n+1)/2+g(a%c,b%c,c,n)
else:
g(a,b,c,n)=∑i=0->n i*∑j=0->m [(ai+b)/c>=j]

g(a,b,c,n)=∑i=0->n i*∑j=0->m-1 [i>(cj+c−b−1)/a]

然后把这个 i 放进去求和

g(a,b,c,n)=1/2*∑j=0->m-1 (n+1+(cj+c−b−1)/a)*(n−(cj+c−b−1)/a)

g(a,b,c,n)=1/2*∑j=0->m-1 n(n+1)−(cj+c−b−1)/a−[(cj+c−b−1)/a]^2

g(a,b,c,n)=1/2*[n(n+1)*m−f(c,c−b−1,a,m−1)−h(c,c−b−1,a,m−1)]

推导 h:
a=0:
return (b/c)^2*(n+1) (sigma 的是 i)
a>=c||b>=c:有一部分是规律的;
h(a,b,c,n)=(a/c)^2*n(n+1)(2n+1)/6+(b/c)^2*(n+1)+(a/c)*(b/c)*n(n+1)

+h(a%c,b%c,c,n)+2*(a/c)*g(a%c,b%c,c,n)+2*(b/c)*f(a%c,b%c,c,n)
else:

n^2=2*n(n+1)/2−n=2(∑i=0->n i)−n

有了思路我们来推 h

h(a,b,c,n)=∑i=0->n (2(∑j=1->(ai+b)/c j)−(ai+b)/c)

可以想到交换主体。
h(a,b,c,n)=∑j=0->m-1 (j+1)*∑i=0->n [(ai+b)/c>=j+1]−f(a,b,c,n)

h(a,b,c,n)=∑j=0->m-1 (j+1)*∑i=0->n [i>(cj+c−b−1)/a]−f(a,b,c,n)

h(a,b,c,n)=∑j=0->m-1 (j+1)*(n − (cj+c − b − 1)/a) − f(a,b,c,n)

h(a,b,c,n)=n*m(m+1)−2g(c,c−b−1,a,m−1)−2f(c,c−b−1,a,m−1)−f(a,b,c,n)

例1- BZOJ3817-无理数斜率的 f 函数求解

```
int T,t,n,r;
double R;
int calc(int a,int b,int c,int n){
    if(!n)return 0;
    int _gcd=gcd(a,gcd(b,c));
    a/=_gcd;b/=_gcd;c/=_gcd;//约分
    ll m=((ll)a*R+b)/c,sum=(ll)n*(n+1)/2*m;//a>=c 或 b>=c 的部分
    b-=m*c;//d-[d]
    m=((ll)a*R+b)/c*n;//矩形的右上角交点的 y 值（下取整）
    sum+=n*m;//加上矩形的
    return sum-calc(a*c,-b*c,a*a*r-b*b,m);//之前的总值减去上三角形（将其竖置）的
    //这里只考虑斜率为无理数的情况 因此不会有矩形对角线上的交点
}
int main()
{
    read(T);
    while(T--){
        read(n);read(r);
        R=sqrt(r);
        t=(int)R;
        if(t*t==r)printf("%d\n",t&1?(n&1?-1:0):n);
        else printf("%d\n",n-(((calc(1,0,1,n)-(calc(1,0,2,n)<<1))<<1)));
    }
    return 0;
}
```

例2- BZOJ2987-f 函数的变形-方法 1：转化为 f 函数

```
ll calc(ll n,ll a,ll b,ll c){
```

```
    ll re=0;
    if(n<0)return re;
    if(a>c||b>c){
        re+=n*(n+1)/2LL*(a/c);
        re+=(n+1)*(b/c);
        a%=c;b%=c;
    }
    ll new_n=(a*n+b)/c;
    re+=new_n*n-calc(new_n-1,c,c-b-1,a);
    return re;
}
ll a,b,c,ans;
int main()
{
    read(a);read(b);read(c);
    ll minn=(c-a)/b,tmp=(b+a-1)/a;
    ans-=tmp*(minn+1)*minn/2;
    ans+=c/a+c/b+1;//某个为 0 的情况 + 均为 0 的情况
    cout<<ans+calc(minn-1,tmp*a-b,c+tmp*a-b,a);
    return 0;
}
```

例3- BZOJ2987-f 函数的变形-方法 2：现推迭代式

```
ll calc(ll n,ll a,ll b,ll c){
    ll re=0;
    if(!n)return re;
    if(c<0){
        ll tem=(-c+a-1)/a;
        re-=tem*n;c+=tem*a;
    }
    if(c/a>0||b/a>0){
        re+=c/a*n;re+=b/a*n*(n+1)/2;
        c%=a;b%=a;
    }
    ll new_n=(b*n+c)/a;
    re+=new_n*(n+1)-calc(new_n,b,a,b-c-1);
    return re;
}
ll a,b,c,ans;
int main()
{
    read(a);read(b);read(c);
    ll minn=(c-a)/b,tmp=(b+a-1)/a;
    ans-=tmp*(minn+1)*minn/2;
    ans+=c/a+c/b+1;//某个为 0 的情况 + 均为 0 的情况
    cout<<ans+calc(minn,a,tmp*a-b,c);
    return 0;
}
```

例 4-BZOJ2187-非典型性类欧几里德

```
inline void simplify(ll &a,ll &b){
    ll g=gcd(a,b);a/=g;b/=g;
}
pll solve(ll p1,ll q1,ll p2,ll q2){
    simplify(p1,q1);simplify(p2,q2);
    ll a=p1/q1+1,b=(p2+q2-1)/q2-1;
    if(a<=b)return mp(a,1);
    if(p1==0)return mp(1,(ll)(q2/p2)+1);
    if(p1<=q1&&p2<=q2){
        pll re=solve(q2,p2,q1,p1);
        swap(re.first,re.second);
        return re;
    }
    ll t=p1/q1;
    pll re=solve(p1%q1,q1,p2-t*q2,q2);
    re.first+=re.second*t;
    return re;
}
ll a,b,c,d;
int main()
{
    while(~scanf("%lld%lld%lld%lld",&a,&b,&c,&d)){
        pll ans=solve(a,b,c,d);
        printf("%lld/%lld\n",ans.first,ans.second);
    }
    return 0;
}
```

欧拉函数、欧拉降幂

欧拉降幂-例 1-BZOJ3884

题目大意：求 2^(2^(2^(2^(2^...)))) mod p 的值

Solution

令 $p=2^k\cdot q$，其中 q 是一个奇数

那么我们有:

$$2^{2^{2^{2^{\cdots}}}} \bmod p$$

$$=2^k(2^{2^{2^{2^{\cdots}}}-k} \bmod q)$$

由于 q 是奇数，故 q 与 2 互质，可以套用欧拉定理

$$2^k(2^{2^{2^{2^{\cdots}}}-k} \bmod q)$$

$$=2^k(2^{(2^{2^{2^{\cdots}}}-k)\bmod\varphi(q)} \bmod q)$$

指数上是和一开始的式子同样的形式，可以递归做下去

容易发现除第一次外模数都是偶数，故每次递归模数都会至少除掉 2。因此在不超过 $\Theta(\log_2 p)$ 次递归之后，模数就会变成 1。

由于任何数 mod 1 的结果都是 0，故此时递归结束，回溯并计算结果即可。

如果使用线性筛计算欧拉函数，时间复杂度 $\Theta(p+T\log_2 p)$

如果每次 $\Theta(\sqrt{p})$ 计算欧拉函数，时间复杂度 $\Theta(T\log_2 p\sqrt{p})$

实践中后者速度完爆前者。

如果通过递推的方式依次计算 mod 1~mod 1000W 的值，时间复杂度为 $\Theta(p)$，由于常数太大实测 TLE。

```
int phi(int x){
	int ans=x;
	for(int i=2,lim=sqrt(x)+1;i<lim;i++)
	if(!(x%i)){
		ans-=ans/i;
		while(!(x%i))x/=i;
	}
	return x>1?ans-ans/x:ans;
}
int f(int x){
	if(x==1)return 0;
	int p=phi(x);
	return powMM(2,f(p)+p,x);
}
int t;
int main()
{
	read(t);
	while(t--){
		int x;read(x);
		printf("%d\n",f(x));
	}
	return 0;
}
```

数据结构

CDQ 分治

CDQ 分治-例 1-二维偏序问题-洛谷 P3374

```
/*
	给定一个 N 个元素的序列 a，初始值全部为 0，对这个序列进行以下两种操作:

	操作 1：格式为 1 x k，把位置 x 的元素加上 k（位置从 1 标号到 N）。

	操作 2：格式为 2 x y，求出区间[x,y]内所有元素的和。

说明:
	这是一个经典的树状数组问题，可以毫无压力地秒掉，现在，我们用 CDQ 分治解决它——带修改和查询的问题。

	我们把他转化成一个二维偏序问题，每个操作用一个有序对(a,b)表示，其中 a 表示操作到来的时间，b 表示操作的位置，
	时间是默认有序的，所以我们在合并子问题的过程中，就按照 b 从小到大的顺序合并。

	问题来了：如何表示修改与查询?

	具体细节请参见代码，这里对代码做一些解释，请配合代码来看。
	我们定义结构体 Query 包含 3 个元素：type，idx，val，其中 idx 表示操作的位置，type 为 1 表示修改，val 表示“加上的值”。
	而对于查询，我们用前缀和的思想把他分解成两个操作: sum[1,y]-sum[1,x-1], 即分解成两次前缀和的查询。
	在合并的过程中，type 为 2 表示遇到了一个查询的左端点 x-1，需要把该查询的结果减去当前“加上的值的前缀和”，
	type 为 3 表示遇到了一个查询的右端点 y，需要把查询的结果加上当前“加上的值的前缀和”，val 表示“是第几个查询”。
	这样，我们就把每个操作转换成了带有附加信息的有序对(时间，位置)，然后对整个序列进行 CDQ 分治。
```

有几点需要注意:

对于位置相同的操作，要先修改后查询。
代码中为了方便，使用左闭右开区间。
合并问题的时候统计“加上的值的前缀和”，只能统计左边区间内的修改操作，改动查询结果的时候，只能修改右边区间内的查询结果。因为只有左边区间内的修改值对右边区间内的查询结果的影响还没有统计。
代码中，给定的数组是有初始值的，可以把每个初始值变为一个修改操作。
*/

```
int n,m;
struct Query{
    int type,idx;
    ll val;
    bool operator<(const Query &rhs)const{//按照位置从小到大排序，修改优先于查询
        return idx==rhs.idx?type<rhs.type:idx<rhs.idx;
    }
}query[MAX];
int qidx,aidx;
ll ans[MAX];//答案数组
Query tmp[MAX];//归并用临时数组
void cdq(int L,int R){//左闭右开
    if(R-L<=1)return;
    int M=(L+R)>>1;cdq(L,M);cdq(M,R);
    ll sum=0;
    int p=L,q=M,o=0;//由左侧向右侧合并
    while(p<M &&q<R){
        if(query[p]<query[q]){//只统计左边区间内的修改值
            if(query[p].type==1)sum+=query[p].val;
            tmp[o++]=query[p++];
        }
        else{//只修改右边区间内的查询结果
            if(query[q].type==2)ans[query[q].val]-=sum;
            else if(query[q].type==3)ans[query[q].val]+=sum;
            tmp[o++]=query[q++];
        }
    }
    while(p<M)tmp[o++]=query[p++];
    while(q<R){
        if(query[q].type==2)ans[query[q].val]-=sum;
        else if(query[q].type==3)ans[query[q].val]+=sum;
        tmp[o++]=query[q++];
    }
    for(int i=0;i<o;++i)query[i+L]=tmp[i];//顺便把序排了?
}
int main()
{
    read(n);read(m);
    for(int i=1;i<=n;i++){
        query[qidx].idx=i;query[qidx].type=1;
        scanf("%lld",&query[qidx].val);++qidx;
    }
    for(int i=0;i<m;++i){
        int type;read(type);
        query[qidx].type=type;

        if(type==1)scanf("%d%lld",&query[qidx].idx,&query[qidx].val);
        else{//把查询操作分为两部分
            int l,r;read(l);read(r);
            query[qidx].idx=l-1;query[qidx].val=aidx;++qidx;

            query[qidx].type=3;query[qidx].idx=r;query[qidx].val=aidx;
            ++aidx;
        }
        ++qidx;
    }
    cdq(0,qidx);
    for(int i=0;i<aidx;++i)printf("%lld\n",ans[i]);
    return 0;
}
```

CDQ 分治-例 2-三维偏序问题

```
/*
平面上有 N 个点，每个点的横纵坐标在[0,1e7]之间，有 M 个询问，
每个询问为查询在指定矩形之内有多少个点，矩形用(x1,y1,x2,y2)的方式给出，其中(x1,y1)为左下角坐标，(x2,y2)为右上角坐标。
*/
```

```
struct Query{
    int type,x,y,w,aid;//w 表示对查询结果贡献（+还是-），aid 是“第几个查询”
    bool operator<(const Query &rhs)const{
        return x==rhs.x?type<rhs.type:x<rhs.x;
    }
}query[MAX];
int n,m,qidx,aidx,maxy;
void addq(int type,int x,int y,int w,int aid){
    query[qidx++]=(Query){type,x,y,w,aid};
}
int ans[MAX];
//尽管 BIT 查询会出现坐标为 0，而函数中都从 1 开始 or 结束 但无影响只要有 0 就返回 0 即可
namespace BIT{
    int arr[MAX];
    inline int lowbit(int num){return num&(-num);}
    void add(int idx,int val){
        while(idx<=maxy){
            arr[idx]+=val;idx+=lowbit(idx);
        }
    }
    int query(int idx){
        int ans=0;
        while(idx){
            ans+=arr[idx];
            idx-=lowbit(idx);
        }
        return ans;
    }
    void clear(int idx){
        while(idx<=maxy){
            if(arr[idx])arr[idx]=0;
            else break;
            idx+=lowbit(idx);
        }
    }
}
Query tmp[MAX];
void cdq(int L,int R){//左闭右开
    if(R-L<=1)return;
    int M=(R-L)>>1;cdq(L,M);cdq(M,R);
    int p=L,q=M,o=L;
    while(p<M&&q<R){
        if(query[p]<query[q]){
            if(query[p].type==0)BIT::add(query[p].y,1);
            tmp[o++]=query[p++];
        }
        else{

if(query[q].type==1&&query[q].w)ans[query[q].aid]+=query[q].w*BIT::query(query[q].y);
            tmp[o++]=query[q++];
        }
    }
    while(p<M)tmp[o++]=query[p++];
    while(q<R){

if(query[q].type==1&&query[q].w)ans[query[q].aid]+=query[q].w*BIT::query(query[q].y);
        tmp[o++]=query[q++];
    }
    for(int i=L;i<R;i++){
        BIT::clear(tmp[i].y);//清空树状数组
        query[i]=tmp[i];
    }
}
int main()
{
    read(n);read(m);
    while(n--){
        int x,y;
        read(x);read(y);++x;++y;//为了方便(防止出现负数)，把坐标转化为[1,1e7+1]
        addq(0,x,y,0,0);maxy=max(maxy,y);//修改操作无附加信息
    }
    while(m--){
        int xl,yl,xr,yr;
        read(xl);read(yl);read(xr);read(yr);
        ++xl;++yl;++xr;++yr;
        addq(1,xl-1,yl-1,1,aidx);
        addq(1,xl-1,yr,-1,aidx);
        addq(1,xr,yl-1,-1,aidx);
        addq(1,xr,yr,1,aidx);
        ++aidx;
        maxy=max(maxy,yr);
    }
    cdq(0,qidx);
    for(int i=0;i<aidx;i++)printf("%d\n",ans[i]);
```

```
    return 0;
}
```

CDQ 分治-例 3-动态逆序对-BZOJ3295

```
int n,m,cnt,qcnt;
int lo[MAX],id[MAX],val[MAX];
ll ans[MAX];
inline int lowbit(int x){return x&(-x);}
void add_suf(int lo,int v){
    while(lo<=n)val[lo]+=v,lo+=lowbit(lo);
}
void add_pre(int lo,int v){
    while(lo)val[lo]+=v,lo-=lowbit(lo);
}
int query_pre(int lo){
    --lo;int re=0;
    while(lo)re+=val[lo],lo-=lowbit(lo);
    return re;
}
int query_suf(int lo){
    ++lo;int re=0;
    while(lo<=n)re+=val[lo],lo+=lowbit(lo);
    return re;
}
void clear_suf(int lo){
    while(lo<=n&&val[lo])val[lo]=0,lo+=lowbit(lo);
}
void clear_pre(int lo){
    while(lo&&val[lo])val[lo]=0,lo-=lowbit(lo);
}
struct Query{
    int t,x,y,opt;
    bool operator<(const Query &q)const{
        return x<q.x;
    }
}qs[MAX],tmp[MAX];
bool cmp(const Query &a,const Query &b){
    return a.t<b.t;
}
void addq(int t,int x,int y,int opt){
    qs[++qcnt]=Query{t,x,y,opt};
}
void cdq(int l,int r){
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)/2;
    cdq(l,mid);cdq(mid+1,r);
    int lp=l,rp=mid+1,tp=l;
    while(lp<=mid&&rp<=r){
        if(qs[lp]<qs[rp]){
            add_pre(qs[lp].y,1);
            tmp[tp++]=qs[lp++];
        }
        else{
            if(qs[rp].opt)
                ans[qs[rp].opt]+=query_suf(qs[rp].y);
            tmp[tp++]=qs[rp++];
        }
    }

    while(lp<=mid)tmp[tp++]=qs[lp++];
    while(rp<=r){

if(qs[rp].opt)ans[qs[rp].opt]+=query_suf(qs[rp].y);
        tmp[tp++]=qs[rp++];
    }
    for(int i=l;i<=r;i++)clear_pre(tmp[i].y);
    for(int i=r;i>=l;i--){
        if(tmp[i].t<=mid)
            add_suf(tmp[i].y,1);
        else if(tmp[i].opt)
            ans[tmp[i].opt]+=query_pre(tmp[i].y);
    }
    for(int i=l;i<=r;i++)qs[i]=tmp[i],clear_suf(tmp[i].y);

}
int main(){
    read(n);read(m);
    for(int u,i=1;i<=n;i++)read(u),lo[u]=i;
    for(int u,i=0;i<m;i++)read(u),id[u]=n-i;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        int temt=id[i];if(!temt)temt=++cnt;
        addq(temt,lo[i],i,id[i]?id[i]:0);
    }
    sort(qs+1,qs+1+qcnt,cmp);
    ll tot=0;
    for(int i=1;i<=n-m;i++)
        tmp[i]=qs[i];
    sort(tmp+1,tmp+1+n-m);
    for(int i=1;i<=n-m;i++)
    {
        tot+=query_suf(tmp[i].y);
```

```
            add_pre(tmp[i].y,1);
        }
        for(int i=1;i<=n-m;i++)clear_pre(qs[i].y);
        cdq(1,qcnt);
        ans[n-m]=tot;
        for(int i=n-m+1;i<=n;i++)ans[i]+=ans[i-1];
        for(int i=n;i>n-m;i--)printf("%lld\n",ans[i]);
        return 0;
}
```

CDQ 分治-例 4-CDQ 斜率优化-BZOJ2726

```
int n,s;
ll t[MAX],f[MAX],dp[MAX],T[MAX],F[MAX];
struct node{
        ll k,x,y,pos,pd;//pd??
        node(ll pos=0):pos(pos){
            k=T[pos];
        }
        void get(){
            x=F[pos];y=dp[pos]-
F[n]*T[pos]+F[pos]*T[pos]-s*F[pos];
        }
        bool operator <(const node&rhs)const{
            return k<rhs.k;
        }
}q[MAX],now[MAX],sta[MAX];
bool cmp(const node &lhs,const node &rhs){
        return lhs.x<rhs.x||(lhs.x==rhs.x&&lhs.y<rhs.y);
}
ll dy(const node &a,const node &b){
        return a.y-b.y;
}
ll dx(const node &a,const node &b){
        return a.x-b.x;
}
void solve(int l,int r){
        if(l==r){
            q[l].get();return;
        }
        int mid=(l+r)/2,l1=l,l2=mid+1;
        for(int i=l;i<=r;i++)
            if(q[i].pos<=mid)now[l1++]=q[i];
            else now[l2++]=q[i];
        for(int i=l;i<=r;i++)q[i]=now[i];
        solve(l,mid);
        solve(mid+1,r);
        int top=0;
        for(int i=l;i<=mid;i++){//k is increasing   维护左侧
点的下凸包

while(top>=2&&dy(q[i],sta[top])*dx(sta[top],sta[top-
1])<dy(sta[top],sta[top-1])*dx(q[i],sta[top]))--top;
            sta[++top]=q[i];
        }
        int j=1;
        for(int i=mid+1;i<=r;i++){

while(j<top&&q[i].k*dx(sta[j],sta[j+1])<dy(sta[j],sta[j+1])
)++j;
            dp[q[i].pos]=min(dp[q[i].pos],sta[j].y-
sta[j].x*q[i].k+F[n]*(T[q[i].pos]+s));
        }

        l1=l,l2=mid+1;
        for(int i=l;i<=r;i++)

if((cmp(q[l1],q[l2])||(l2>r))&&l1<=mid)now[i]=q[l1++];
            else now[i]=q[l2++];
        for(int i=l;i<=r;i++)q[i]=now[i];
}
int main()
{
        read(n);read(s);
        for(int i=1;i<=n;i++)
            read(t[i]),read(f[i]),dp[i]=INFF;
        for(int i=1;i<=n;i++)T[i]=T[i-1]+t[i],F[i]=F[i-1]+f[i];
        for(int i=0;i<=n;i++)q[i]=node(i);
        sort(q,q+n+1);
        solve(0,n);
        printf("%lld\n",dp[n]);
        return 0;
}
```

CDQ 分治-例 5-CDQ 分治斜率优化-BZOJ1492

```
const int N=1e5+10;
const double inf=1e20;
//const double eps=1e-8;
struct Pt{
        double x,y,a,b,k,r;
        int id;
        bool operator <(const Pt &rhs)const{
            return k>rhs.k;
```

```
    }
}p[N],t[N];
double f[N];
int n,top,st[N];
double slop(int a,int b){
    if(!b)return -inf;
    if(fabs(p[a].x-p[b].x)<eps)return inf;
    return (p[b].y-p[a].y)/(p[b].x-p[a].x);
}
void solve(int l,int r){
    if(l==r){
        f[l]=max(f[l],f[l-1]);
        p[l].y=f[l]/(p[l].a*p[l].r+p[l].b);
        p[l].x=p[l].y*p[l].r;
        return ;
    }
    int mid=(l+r)>>1,j=1,l1=l,l2=mid+1;
    for(int i=l;i<=r;i++){
        if(p[i].id<=mid)t[l1++]=p[i];
        else t[l2++]=p[i];
    }
    for(int i=l;i<=r;i++)p[i]=t[i];
    solve(l,mid);
    top=0;
    for(int i=l;i<=mid;i++){
        while(top>1&&slop(st[top-
1],st[top])<slop(st[top-1],i)+eps)--top;
        st[++top]=i;
    }
    st[++top]=0;
    for(int i=mid+1;i<=r;i++){

while(j<top&&slop(st[j],st[j+1])+eps>p[i].k)++j;

f[p[i].id]=max(f[p[i].id],p[st[j]].x*p[i].a+p[st[j]].y*p[i].b);
    }
    solve(mid+1,r);
    l1=l,l2=mid+1;
    for(int i=l;i<=r;i++){
        if((((p[l1].x<p[l2].x)||(fabs(p[l1].x-
p[l2].x)<eps&&p[l1].y<p[l2].y ))||l2>r )&&l1<=mid)
            t[i]=p[l1++];
        else t[i]=p[l2++];
    }
    for(int i=l;i<=r;i++)p[i]=t[i];
}
int main()
{
    scanf("%d%lf",&n,&f[0]);
    for(int i=1;i<=n;i++){
        scanf("%lf%lf%lf",&p[i].a,&p[i].b,&p[i].r);
        p[i].k=-p[i].a/p[i].b;p[i].id=i;
    }
    sort(p+1,p+n+1);
    solve(1,n);
    printf("%.3f",f[n]);
    return 0;
}
```

CDQ 分治-例 7-分治 FFT-HDU5730

```
struct cpx {
    double x,y;
    cpx(double a=0,double b=0):x(a),y(b) {}
};

cpx operator + (cpx a,cpx b) {return cpx(a.x+b.x,a.y+b.y);}
cpx operator - (cpx a,cpx b) {return cpx(a.x-b.x,a.y-b.y);}
cpx operator * (cpx a,cpx b) {return cpx(a.x*b.x-
a.y*b.y,a.x*b.y+a.y*b.x);}

const int maxn=500005;

char buf[maxn];
int n;
cpx A[maxn],B[maxn];
int dp[MAX],cnt[MAX];
ll num[maxn];

void DFT(cpx* a,int n,int d=1) {
    for(int i=(n>>1),j=1;j<n;j++) {
        if(i<j) swap(a[i],a[j]);
        int k;for(k=(n>>1);i&k;i^=k,k>>=1);
        i^=k;
    }
    for(int m=2;m<=n;m<<=1) {
        cpx w=cpx(cos(pi*2/m*d),sin(pi*2/m*d));
        for(int i=0;i<n;i+=m) {
            cpx s=cpx(1,0);
            for(int j=i;j<(i+(m>>1));j++) {
                cpx u=a[j],v=s*a[j+(m>>1)];
                a[j]=u+v;a[j+(m>>1)]=u-v;
```

```
                s=s*w;
            }
        }
    }
    if(d==-1) for(int i=0;i<n;i++) a[i].x=a[i].x/n;
}
void cdq(int l,int r){
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)/2;
    cdq(l,mid);
    int n=1;while(n<r-l+1)n<<=1;
    for(int i=0;i<n;i++)A[i]=B[i]=cpx();
    for(int i=l;i<=mid;i++)A[i-l].x=dp[i];
    for(int i=0;i<=r-l;i++)B[i].x=cnt[i];
    DFT(A,n);DFT(B,n);
    for(int i=0;i<n;i++)A[i]=A[i]*B[i];
    DFT(A,n,-1);
    for(int i=mid+1;i<=r;i++)
        addi(dp[i],(int)trunc(A[i-l].x+0.5));
    cdq(mid+1,r);
}
int main()
{
    while(scanf("%d",&n)&&n){
        for(int
i=1;i<=n;i++)read(cnt[i]),cnt[i]%=MOD,dp[i]=cnt[i];
        cdq(1,n);
        printf("%d\n",dp[n]%MOD);
    }
    return 0;
}
```

CDQ 分治-例 8-图连通性 CDQ-BZOJ3237

```
struct node{
    int x,y,tim;
}a[MAX];
struct Query{
    int num,c[5];
}qs[MAX];

int tcnt,tp;
bool ans[MAX];
int fa[MAX],stk1[MAX<<2],stk2[MAX<<2];
int find(int x){
    if(fa[x]!=x){
        int y=fa[x];
        stk1[++tp]=x;stk2[tp]=y;
        fa[x]=find(fa[x]);
    }
    return fa[x];
}
void solve(int l,int r){
    int now=tp;
    if(l==r){
        bool re=1;
        for(int i=1;i<=qs[l].num;i++)

if(find(a[qs[l].c[i]].x)!=find(a[qs[l].c[i]].y)){re=0;break;}
        ans[l]=re;
        while(tp!=now)fa[stk1[tp]]=stk2[tp],--tp;
        return;
    }
    int mid=(l+r)>>1;
    ++tcnt;
    for(int i=l;i<=mid;i++)
        for(int j=1;j<=qs[i].num;j++)
            a[qs[i].c[j]].tim=tcnt;
    for(int i=mid+1;i<=r;i++)
        for(int j=1;j<=qs[i].num;j++)
            if(a[qs[i].c[j]].tim!=tcnt){
                int
f1=find(a[qs[i].c[j]].x),f2=find(a[qs[i].c[j]].y);
                if(f1!=f2){
                    stk1[++tp]=f1;stk2[tp]=fa[f1];
                    fa[f1]=f2;
                }
            }
    solve(l,mid);
    while(tp!=now)fa[stk1[tp]]=stk2[tp],tp--;
    tcnt++;
    for(int i=mid+1;i<=r;i++)
        for(int j=1;j<=qs[i].num;j++)
            a[qs[i].c[j]].tim=tcnt;
    for(int i=l;i<=mid;i++)
        for(int j=1;j<=qs[i].num;j++)
            if(a[qs[i].c[j]].tim!=tcnt){
                int
f1=find(a[qs[i].c[j]].x),f2=find(a[qs[i].c[j]].y);
                if(f1!=f2){
                    stk1[++tp]=f1;stk2[tp]=fa[f1];
```

```
                        fa[f1]=f2;
                    }
                }
        solve(mid+1,r);
}
int main()
{
        int n,m,k;
        read(n);read(m);
        for(int i=1;i<=n;i++)fa[i]=i;
        for(int
i=1;i<=m;i++){read(a[i].x);read(a[i].y);a[i].tim=0;}
        read(k);
        tcnt=1,tp=0;
        for(int i=1;i<=k;i++){
                read(qs[i].num);
                for(int j=1;j<=qs[i].num;j++){
                        read(qs[i].c[j]);
                        a[qs[i].c[j]].tim=tcnt;
                }
        }
        for(int i=1;i<=m;i++)
                if(a[i].tim!=tcnt){
                        int f1=find(a[i].x),f2=find(a[i].y);
                        if(f1!=f2)fa[f1]=f2;
                }
        solve(1,k);
        for(int i=1;i<=k;i++)
                puts(ans[i]?"Connected":"Disconnected");
        return 0;
}
```

CDQ 分治-例 9-CDQ 套 CDQ 四维偏序-COGS2479

```
int n;

struct Item {
        int d1,d2,d3,d4,part; // 分别表示每一维的数据，part 为第一维重标号之后的值
}a[MAXN];
const int LEFT = 0;
const int RIGHT = 1;

namespace BIT { // 树状数组相关
        int arr[MAXN];
        inline int lowbit( int num ) { return num&(-num); }
        void add( int idx ) {
                for( ; idx <= n; idx += lowbit(idx) ) arr[idx]++;
        }
        int query( int idx ) {
                int ans = 0;
                for( ; idx; idx -= lowbit(idx) ) ans += arr[idx];
                return ans;
        }
        void clear( int idx ) {
                for( ; idx <= n; idx += lowbit(idx) ) arr[idx] = 0;
        }
}

ll ans = 0;

Item tmp3d[MAXN];
Item tmp2d[MAXN];
void cdq3d( int L, int R ) { // 对第二维分治，按照第三维合并
        if( R-L <= 1 ) return;
        int M = (L+R)>>1; cdq3d(L,M); cdq3d(M,R);
        int p = L, q = M, o = L;
        while( p < M && q < R ) { // 因为第二维是“左边全都是 L，右边全都是 R”，所以略去第二维的标号
                if( tmp2d[p].d3 < tmp2d[q].d3 ) {
                        if( tmp2d[p].part == LEFT ) BIT::add( tmp2d[p].d4 );
                        tmp3d[o++] = tmp2d[p++];
                } else {
                        if( tmp2d[q].part == RIGHT ) ans += BIT::query( tmp2d[q].d4 );
                        tmp3d[o++] = tmp2d[q++];
                }
        }
        while( p < M ) tmp3d[o++] = tmp2d[p++];
        while( q < R ) {
                if( tmp2d[q].part == RIGHT ) ans += BIT::query( tmp2d[q].d4 );
                tmp3d[o++] = tmp2d[q++];
        }
        for( int i = L; i < R; ++i ) { // 清空树状数组
                if( tmp3d[i].part == LEFT ) BIT::clear( tmp3d[i].d4 );
                tmp2d[i] = tmp3d[i];
        }
```

```
}
void cdq2d( int L, int R ) { //  对第一维分治，按照第二维合并
    if( R-L <= 1 ) return;
    int M = (L+R)>>1; cdq2d(L,M); cdq2d(M,R);
    int p = L, q = M, o = L;
    while( p < M && q < R ) {
        if( a[p].d2 < a[q].d2 ) {
            a[p].part = LEFT; //  重标号
            tmp2d[o++] = a[p++];
        } else {
            a[q].part = RIGHT;
            tmp2d[o++] = a[q++];
        }
    }
    while( p < M ) {
        a[p].part = LEFT;
        tmp2d[o++] = a[p++];
    }
    while( q < R ) {
        a[q].part = RIGHT;
        tmp2d[o++] = a[q++];
    }
    for( int i = L; i < R; ++i ) a[i] = tmp2d[i]; // tmp2d 为“复制的那一份”
    cdq3d(L,R);
}

int main() {
    freopen( "partial_order.in", "r", stdin );
    freopen( "partial_order.out", "w", stdout );
    scanf( "%d", &n );
    for( int i = 0; i < n; ++i ) {
        a[i].d1 = i;
        scanf( "%d", &a[i].d2 );
    }
    for( int i = 0; i < n; ++i ) scanf( "%d", &a[i].d3 );
    for( int i = 0; i < n; ++i ) scanf( "%d", &a[i].d4 );
    cdq2d(0,n);
    printf( "%lld\n", ans );
    return 0;
}
```

CDQ 分治-例 10-带插入查询的四维偏序-HDU5126

```
int n;
struct node{
    int d1,d2,d3,d4,part,opt,val;
}a[MAX],tmp3d[MAX],tmp2d[MAX];
const int LEFT=0;
const int RIGHT=1;
namespace BIT{
    int arr[MAX];
    inline int lowbit(int x){return x&-x;}
    void add(int idx){
        for(;idx<=n;idx+=lowbit(idx))++arr[idx];
    }
    int query(int idx){
        int re=0;
        for(;idx;idx-=lowbit(idx))re+=arr[idx];
        return re;
    }
    void clear(int idx){

for(;idx<=n&&arr[idx];idx+=lowbit(idx))arr[idx]=0;
    }
}
int ans[MAX];
bool cmp1(int x,int y){
    return
tmp2d[x].d3<tmp2d[y].d3||(tmp2d[x].d3==tmp2d[y].d3
&&tmp2d[x].opt<tmp2d[y].opt);
}
bool cmp2(int x,int y){
    return
a[x].d2<a[y].d2||(a[x].d2==a[y].d2&&a[x].opt<a[y].opt);
}
void cdq3d(int l,int r){
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)/2;cdq3d(l,mid);cdq3d(mid+1,r);
    int p=l,q=mid+1,o=l;
    while(p<=mid&&q<=r){
        if(cmp1(p,q)){
            if(tmp2d[p].part==LEFT&&!tmp2d[p].opt)
                BIT::add(tmp2d[p].d4);
            tmp3d[o++]=tmp2d[p++];
        }
        else{

if(tmp2d[q].part==RIGHT&&tmp2d[q].opt)
```

```
ans[tmp2d[q].opt]+=tmp2d[q].val*BIT::query(tmp2d[q].
d4);
                tmp3d[o++]=tmp2d[q++];
            }
        }
        while(p<=mid)tmp3d[o++]=tmp2d[p++];
        while(q<=r){
            if(tmp2d[q].part==RIGHT&&tmp2d[q].opt)

ans[tmp2d[q].opt]+=tmp2d[q].val*BIT::query(tmp2d[q].
d4);
            tmp3d[o++]=tmp2d[q++];
        }
        for(int i=l;i<=r;i++)
        {
            if(tmp3d[i].part==LEFT&&!tmp3d[i].opt)
                BIT::clear(tmp3d[i].d4);
            tmp2d[i]=tmp3d[i];
        }
}
void cdq2d(int l,int r){
        if(l==r)return;
        int mid=(l+r)/2;
        cdq2d(l,mid);cdq2d(mid+1,r);
        int p=l,q=mid+1,o=l;
        while(p<=mid&&q<=r){
            if(cmp2(p,q)){
                a[p].part=LEFT;
                tmp2d[o++]=a[p++];
            }
            else{
                a[q].part=RIGHT;
                tmp2d[o++]=a[q++];
            }
        }
        while(p<=mid)
            a[p].part=LEFT,tmp2d[o++]=a[p++];
        while(q<=r)
            a[q].part=RIGHT,tmp2d[o++]=a[q++];
        for(int i=l;i<=r;i++)a[i]=tmp2d[i];
        cdq3d(l,r);
}
bool cmp(const node& lhs,const node& rhs){
        if(lhs.d1!=rhs.d1)return lhs.d1<rhs.d1;
        else if(lhs.d2!=rhs.d2)return lhs.d2<rhs.d2;
        else if(lhs.d3!=rhs.d3)return lhs.d3<rhs.d3;
        else if(lhs.d4!=rhs.d4)return lhs.d4<rhs.d4;
        else return lhs.opt<rhs.opt;
}
int t;
vector<int>v;
int cnt,opt,acnt;
int main()
{
        read(t);
        while(t--){
            read(n);cnt=acnt=0;
            v.clear();
            for(int i=0;i<n;i++){
                read(opt);
                if(opt==1){
                    a[cnt].d1=i;

read(a[cnt].d2);read(a[cnt].d3);read(a[cnt].d4);a[cnt].opt
=0;
                    v.pb(a[cnt].d4);++cnt;
                }
                else{
                    int sx,sy,sz,ex,ey,ez;

read(sx);read(sy);read(sz);read(ex);read(ey);read(ez);
                    v.pb(sz-1);v.pb(ez);++acnt;
                    a[cnt++]=node{i,ex,ey,ez,0,acnt,1};
                    a[cnt++]=node{i,sx-1,ey,ez,0,acnt,-
1};
                    a[cnt++]=node{i,ex,sy-1,ez,0,acnt,-
1};
                    a[cnt++]=node{i,ex,ey,sz-1,0,acnt,-
1};
                    a[cnt++]=node{i,sx-1,sy-
1,ez,0,acnt,1};
                    a[cnt++]=node{i,sx-1,ey,sz-
1,0,acnt,1};
                    a[cnt++]=node{i,ex,sy-1,sz-
1,0,acnt,1};
                    a[cnt++]=node{i,sx-1,sy-1,sz-
1,0,acnt,-1};
                }
            }
            sort(v.begin(),v.end());
```

```
        v.erase(unique(v.begin(),v.end()),v.end());
        for(int
i=0;i<cnt;i++)a[i].d4=lower_bound(v.begin(),v.end(),a[i].
d4)-v.begin()+1;
        sort(a,a+cnt,cmp);

        n=v.size();

        cdq2d(0,cnt-1);
        for(int
i=1;i<=acnt;i++)printf("%d\n",ans[i]),ans[i]=0;
    }
    return 0;
}
```

KD-TREE

例1-　BZOJ2648-插点查询最近曼哈顿距离

```
struct arr{
    int d[2],min[2],max[2],l,r;
};
int D,root,x,y,ans,n,m,tot,op;
inline int cmp(arr a,arr b){
    return
a.d[D]<b.d[D]||(a.d[D]==b.d[D]&&a.d[D^1]<b.d[D^1]);
}
arr a[MAX];
inline void up(int k,int s){//ÓÃs¸üÐÂk
    a[k].min[0]=min(a[k].min[0],a[s].min[0]);
    a[k].max[0]=max(a[k].max[0],a[s].max[0]);
    a[k].min[1]=min(a[k].min[1],a[s].min[1]);
    a[k].max[1]=max(a[k].max[1],a[s].max[1]);
}
int build(int l,int r,int dd){
    D=dd;int mid=(l+r)>>1;
    nth_element(a+l+1,a+mid+1,a+r+1,cmp);
    a[mid].min[0]=a[mid].max[0]=a[mid].d[0];
    a[mid].min[1]=a[mid].max[1]=a[mid].d[1];
    if(l!=mid)a[mid].l=build(l,mid-1,dd^1);
    if(mid!=r)a[mid].r=build(mid+1,r,dd^1);
    if(a[mid].l)up(mid,a[mid].l);
    if(a[mid].r)up(mid,a[mid].r);
    return mid;
}
void insert(int k){
    int p=root;D=0;
    while(1){
        up(p,k);
        if(a[k].d[D]<=a[p].d[D]){
            if(!a[p].l){a[p].l=k;return;}
            p=a[p].l;
        }
        else if(!a[p].r){
            a[p].r=k;return;
        }
        else p=a[p].r;
        D^=1;
    }
}
int getdis(int k){
    int res=0;
    if(x<a[k].min[0])res+=a[k].min[0]-x;
    if(x>a[k].max[0])res+=x-a[k].max[0];
    if(y<a[k].min[1])res+=a[k].min[1]-y;
    if(y>a[k].max[1])res+=y-a[k].max[1];
    return res;
}
void ask(int k){
    int d0=abs(a[k].d[0]-x)+abs(a[k].d[1]-y);
    if(d0<ans)ans=d0;
    int dl=(a[k].l)?getdis(a[k].l):INF;
    int dr=(a[k].r)?getdis(a[k].r):INF;
    if(dl<dr){
        if(dl<ans)ask(a[k].l);
        if(dr<ans)ask(a[k].r);
    }
    else{
        if(dr<ans)ask(a[k].r);
        if(dl<ans)ask(a[k].l);
    }
}

int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d%d",&a[i].d[0],&a[i].d[1]);
    if(n)root=build(1,n,0);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        scanf("%d",&op);
        if(op==1){
            ++n;
```

```
            scanf("%d%d",&a[n].d[0],&a[n].d[1]);
            a[n].min[0]=a[n].max[0]=a[n].d[0];
            a[n].min[1]=a[n].max[1]=a[n].d[1];
            insert(n);
        }
        else if(op==2){
            ans=INF;
            scanf("%d%d",&x,&y);
            ask(root);
            printf("%d\n",ans);
        }
    }
    return 0;
}
```

例2- BZOJ2850-多次询问 ax+by≤c 的点权值和

```
struct kd{
    int ls,rs,min[2],max[2],v[2];
    ll sum,s;
    kd(int a,int b,int c){ls=rs=0;min[0]=max[0]=v[0]=a;min[1]=max[1]=v[1]=b;s=sum=c;}
    kd(){}
}t[MAX];
int n,m,D,root,a,b,c;
ll A,B,C;
bool cmp(kd a,kd b){
    return (a.v[D]==b.v[D])?(a.v[D^1]<b.v[D^1]):(a.v[D]<b.v[D]);
}
void pushup(int x,int y){
    for(int i=0;i<=1;i++){
        t[x].max[i]=max(t[x].max[i],t[y].max[i]);
        t[x].min[i]=min(t[x].min[i],t[y].min[i]);
    }
    t[x].sum+=t[y].sum;
}
int build(int l,int r,int d){
    if(l>r)return 0;
    int mid=(l+r)>>1;
    D=d;
    nth_element(t+l,t+mid,t+r,cmp);
    t[mid].ls=build(l,mid-1,d^1);t[mid].rs=build(mid+1,r,d^1);
    if(t[mid].ls)pushup(mid,t[mid].ls);
    if(t[mid].rs)pushup(mid,t[mid].rs);
    return mid;
}
int check(int x){
    int re=0;
    re+=(A*t[x].min[0]+B*t[x].min[1]<C);
    re+=(A*t[x].min[0]+B*t[x].max[1]<C);
    re+=(A*t[x].max[0]+B*t[x].min[1]<C);
    re+=(A*t[x].max[0]+B*t[x].max[1]<C);
    return re;
}
ll query(int x){
    if(!x||!check(x))return 0;
    if(check(x)==4)return t[x].sum;
    ll re=0;
    if(A*t[x].v[0]+B*t[x].v[1]<C)re+=t[x].s;
    re+=query(t[x].ls)+query(t[x].rs);
    return re;
}
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++){
        scanf("%d%d%d",&a,&b,&c);
        t[i]=kd(a,b,c);
    }
    root=build(1,n,0);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        scanf("%lld%lld%lld",&A,&B,&C);
        printf("%lld\n",query(root));
    }
    return 0;
}
```

例3- BZOJ4066-强制在线询问矩形内点权值和

```
int opt,D,m=10000;
int sx,sy,ex,ey;
ll lastans;
struct node{
    int ls,rs,min[2],max[2],v[2];
    ll sum,s;
    node(int a,int b,int c){ls=rs=0;min[0]=max[0]=v[0]=a;min[1]=max[1]=v[1]=b;s=sum=c;}
    node(){}
    int &operator[](int x){
        return v[x];
    }
```

```
    friend bool operator==(node a,node b){
        return a[0]==b[0]&&a[1]==b[1];
    }
    friend bool operator<(node a,node b){
        return a[D]!=b[D]?a[D]<b[D]:a[D^1]<b[D^1];
    }
}tmp[MAX];
bool in(int X1,int Y1,int X2,int Y2)
{
    return sx<=X1&&X2<=ex&&sy<=Y1&&Y2<=ey;
}
bool out(int X1,int Y1,int X2,int Y2)
{
    return sx>X2||ex<X1||sy>Y2||ey<Y1;
}
struct kdt{
    node t[MAX],tem;
    int root,n;
    void pushup(int x){
        int l=t[x].ls,r=t[x].rs;
        for(int i=0;i<=1;i++){
            t[x].max[i]=t[x].min[i]=t[x][i];
            if(l){
                t[x].max[i]=max(t[x].max[i],t[l].max[i]);
                t[x].min[i]=min(t[x].min[i],t[l].min[i]);
            }
            if(r){
                t[x].max[i]=max(t[x].max[i],t[r].max[i]);
                t[x].min[i]=min(t[x].min[i],t[r].min[i]);
            }
        }
        t[x].sum=t[x].s+t[l].sum+t[r].sum;
    }
    int build(int l,int r,int d){
        if(l>r)return 0;
        int mid=(l+r)>>1;
        D=d;
        nth_element(t+l,t+mid,t+r);
        t[mid].ls=build(l,mid-1,d^1);
        t[mid].rs=build(mid+1,r,d^1);
        pushup(mid);
        return mid;
    }
    void insert(int &k,bool D){
        if(!k){
            k=++n;
            t[k][0]=t[k].min[0]=t[k].max[0]=tem[0];
            t[k][1]=t[k].min[1]=t[k].max[1]=tem[1];
        }
        if(tem==t[k]){
            t[k].s+=tem.s;t[k].sum+=tem.s;
            return;
        }
        if(tem[D]<t[k][D])insert(t[k].ls,D^1);
        else insert(t[k].rs,D^1);
        pushup(k);
    }
    ll query(int k){
        if(!k)return 0;
        ll re=0;

if(in(t[k].min[0],t[k].min[1],t[k].max[0],t[k].max[1]))
            return t[k].sum;

if(out(t[k].min[0],t[k].min[1],t[k].max[0],t[k].max[1]))
            return 0;
        if(in(t[k][0],t[k][1],t[k][0],t[k][1]))
            re+=t[k].s;
        re+=query(t[k].ls);
        re+=query(t[k].rs);
        return re;
    }

}a;

int main(){
    int ns;
    read(ns);
    while(1){
        read(opt);
        if(opt==3)break;
        read(sx);read(sy);
        sx^=lastans;sy^=lastans;
        if(opt==1){
            a.tem.min[0]=a.tem.max[0]=a.tem[0]=sx;
            a.tem.min[1]=a.tem.max[1]=a.tem[1]=sy;
            read(ex);
            ex^=lastans;
            a.tem.s=a.tem.sum=ex;
            a.insert(a.root,0);
```

```
            if(a.n==m){
                a.root=a.build(1,a.n,0);
                m+=10000;
            }
        }
        else if(opt==2){
            read(ex);read(ey);
            ex^=lastans;ey^=lastans;
            lastans=a.query(a.root);
            printf("%lld\n",lastans);
        }
    }
    return 0;
}
```

例4- HDU4347-m 维查询曼哈顿最近 k 个点（非自己写的）

```
const int N=50007;
const int K=6;

int n,m;

struct point{
    int a[K];
    int div;  // 按哪个维度划分
    bool lef;  // 是否是叶子节点
    ll dis;  // 离询问点的距离。注意这个在读入建树时不会用到，在进入队列时才用到
    void print(){
        printf("%d",a[0]);
        for (int i=1;i<m;i++)
            printf(" %d",a[i]);
        puts("");
    }
    bool operator < (const point &t) const{
        return dis<t.dis;
    }
    point(){}
    point(point &t,ll d){
        for (int i=0;i<m;i++) a[i]=t.a[i];
        dis=d;
    }
}p[N],tar;

int cmp_NO;
inline bool cmp(point x,point y){
    return x.a[cmp_NO]<y.a[cmp_NO];
}

inline ll dis(point x,point y){
    ll ret=0;
    for (int i=0;i<m;i++)
        ret+=(x.a[i]-y.a[i])*(x.a[i]-y.a[i]);
    return ret;
}

inline void bulid_kdt(int L,int R,int d){
    if (L>R) return;
    int mid=(L+R)>>1;
    cmp_NO=d;
    nth_element(p+L,p+mid,p+R+1,cmp);
    p[mid].div=d;
    if (L==R){
        p[L].lef=true;
        return;
    }
    bulid_kdt(L,mid-1,(d+1)%m);
    bulid_kdt(mid+1,R,(d+1)%m);
}

priority_queue<point> que;
int num,nownum;
ll ans;

inline void find_kd(int L,int R){
    if (L>R) return;

    int mid=(L+R)>>1;
    ll d=dis(p[mid],tar);
    if (p[mid].lef){//是叶子节点
        if (nownum<num){
            nownum++;
            que.push(point(p[mid],d));
            ans=max(ans,d);
        }
        else if (ans>d){
            que.pop();
            que.push(point(p[mid],d));
            ans=que.top().dis;
        }
        return;
```

```
    }

    int t=tar.a[p[mid].div]-p[mid].a[p[mid].div];
    if (t>0){//优先选这一侧的
        find_kd(mid+1,R);
        if (nownum<num){
            nownum++;
            que.push(point(p[mid],d));
            ans=max(ans,d);
            find_kd(L,mid-1);
        }
        else {
            if (ans>d){
                que.pop();
                que.push(point(p[mid],d));
                ans=que.top().dis;
            }
            if (ans>t*t)//可能有更小的
                find_kd(L,mid-1);
        }
    }
    else {
        find_kd(L,mid-1);
        if (nownum<num){
            nownum++;
            que.push(point(p[mid],d));
            ans=max(ans,d);
            find_kd(mid+1,R);
        }
        else{
            if (ans>d){
                que.pop();
                que.push(point(p[mid],d));
                ans=que.top().dis;
            }
            if (ans>t*t)
                find_kd(mid+1,R);
        }
    }
}

inline void put(){
    if (que.empty()) return;
    point pp=que.top();
    que.pop();
    put();
    pp.print();
}

int main(){
    while (~scanf("%d%d",&n,&m)){
        for (int i=0;i<n;i++){
            for (int j=0;j<m;j++)
                scanf("%d",&p[i].a[j]);
            p[i].lef=false;
        }

        bulid_kdt(0,n-1,0);  // 这一步相当于将原数组重新排了个序，先访问到的点放在中间

        int q;
        scanf("%d",&q);
        while (q--){
            for (int i=0;i<m;i++)
                scanf("%d",&tar.a[i]);
            while (!que.empty()) que.pop();
            scanf("%d",&num);
            nownum=0;
            ans=-1;
            find_kd(0,n-1);
            printf("the closest %d points are:\n",num);
            put();
        }
    }
    return 0;
}
```

笛卡尔树

例1-　HDU1506-最大子矩形

```
int n,top;
int a[MAX],stk[MAX],ls[MAX],rs[MAX],fa[MAX],siz[MAX];
ll ans;
void dfs(int now){
    siz[now]=1;
    if(ls[now])dfs(ls[now]),siz[now]+=siz[ls[now]];
    if(rs[now])dfs(rs[now]),siz[now]+=siz[rs[now]];
    ans=max(ans,1LL*siz[now]*a[now]);
}
int main(){
    while(scanf("%d",&n)&&n){
```

```
        for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%d",&a[i]);
        for(int i=1;i<=n;i++)ls[i]=rs[i]=fa[i]=0;
        top=0;ans=0;
        for(int i=1;i<=n;i++){
            if(!top||a[i]>=a[stk[top]]){
                rs[stk[top]]=i;
                fa[i]=stk[top];
                stk[++top]=i;
            }
            else{
                while(top>=1&&a[stk[top]]>a[i])--
top;
                rs[stk[top]]=i;fa[i]=stk[top];
                ls[i]=stk[top+1];fa[stk[top+1]]=i;
                rs[i]=0;
                stk[++top]=i;
            }
        }
        int rt=1;while(fa[rt])rt=fa[rt];
        dfs(rt);
        printf("%lld\n",ans);
    }
    return 0;
}
```

例2- HDU6044-给定作为最小的区间求合法排列数

```
namespace fastIO {
    #define BUF_SIZE 100000
    //fread -> read
    bool IOerror = 0;
    inline char nc() {
        static char buf[BUF_SIZE], *p1 = buf + BUF_SIZE,
*pend = buf + BUF_SIZE;
        if(p1 == pend) {
            p1 = buf;
            pend = buf + fread(buf, 1, BUF_SIZE, stdin);
            if(pend == p1) {
                IOerror = 1;
                return -1;
            }
        }
        return *p1++;
    }
    inline bool blank(char ch) {
        return ch == ' ' || ch == '\n' || ch == '\r' || ch ==
'\t';
    }
    inline void read(int &x) {
        char ch;
        while(blank(ch = nc()));
        if(IOerror)
        return;
        for(x = ch - '0'; (ch = nc()) >= '0' && ch <= '9';
x = x * 10 + ch - '0');
    }
    #undef BUF_SIZE
};
int fi[MAX],inv[MAX];
int Case,n,lo;
bool ava;
void init(){
    fi[0]=1;
    for(int i=1;i<MAX;i++)fi[i]=mul(fi[i-1],i);
    inv[MAX-1]=powMM(fi[MAX-1],MOD-2,MOD);
    for(int i=MAX-2;i>=0;i--)inv[i]=mul(inv[i+1],i+1);
}
int C(int a,int b){
    return mul(fi[a],mul(inv[b],inv[a-b]));
}
struct node{
    int l,r,id;
    bool operator<(const node &z)const{
        return l!=z.l?l<z.l:r>z.r;
    }
}a[MAX];
int dfs(int l,int r){
    if(!ava)return 0;
    if(l>r)return 1;
    if(a[lo].l!=l||a[lo].r!=r){ava=0;return 0;}
    int mid=a[lo++].id;
    int re=mul(C(r-l,mid-l),dfs(l,mid-1));
    muli(re,dfs(mid+1,r));
    return re;
}
int main(){
    init();
    while(1){
        fastIO::read(n);
        if(fastIO::IOerror)break;
        for(int i=1;i<=n;i++)fastIO::read(a[i].l);
```

```
        for(int i=1;i<=n;i++)fastIO::read(a[i].r),a[i].id=i;
        sort(a+1,a+1+n);
        ava=1;lo=1;
        printf("Case #%d: %d\n", ++Case, dfs(1,n));
    }
    return 0;
}
```

分块

例1-　ZOJ4053-nsqrtn 查询区间逆序对个数

```
int SIZ=150;
const int CNT=158;
int t,n,tot;
int a[MAX],bel[MAX],cnt[MAX],st[MAX],en[MAX];

int lim;
ll tp[MAX][CNT];
ll pre[MAX],bck[MAX];
ll dp[CNT][CNT];
ll ans;
int s1,s2;
ll q1[MAX],q2[MAX];
struct BIT{
    int a[MAX];
    inline int lowbit(int x){return x&-x;}

    inline void ins_bck(int x){//��  ��

        for(;x<=lim;x+=lowbit(x))++a[x];
    }
    inline void ins_pre(int x){
        for(;x>0;x-=lowbit(x))++a[x];
    }
    inline void del_pre(int x){
        for(;x>0;x-=lowbit(x))--a[x];
    }

    inline int find_pre(int x){//C�Ǐ���x�����..

        while (x&&!a[x]) x^=lowbit(x);
        if (!x) return 0;
        int t=lowbit(x)>>1,y=a[x];
        while (t){
            if (y-a[x-t]) y-=a[x-t];
            else{y=a[x-t];x=x-t;}
            t>>=1;
        }
        return x;
    }
    inline int find_bck(int x){//���Ǐ���x����C..

        while (x<=lim&&!a[x]) x+=lowbit(x);
        if (x>lim) return lim+1;
        int t=lowbit(x)>>1,y=a[x];
        while (t){
            if (y-a[x+t]) y-=a[x+t];
            else{y=a[x+t];x=x+t;}
            t>>=1;
        }
        return x;
    }
    inline int query_pre(int x){
        int ans=0;
        while(x){
            ans+=a[x];x-=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
    inline int query_bck(int x){
        int ans=0;
        while(x<=lim){
            ans+=a[x];x+=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
    void clear_bck(int x){
        while(x<=lim){
            if(a[x])a[x]=0;else break;
            x+=lowbit(x);
        }
    }
    void clear_pre(int x){
        while(x){
            if(a[x])a[x]=0;else break;
            x-=lowbit(x);
        }
    }
    void clear(){
        memset(a,0,sizeof(a));
    }
}pts,bit,pts2;//pts 为加的点
```

```
struct node{
    int val,id;
    bool operator<(const node &z)const{
        if(val!=z.val)return val<z.val;
        else return id<z.id;
    }
}c[MAX];
void cal1(){
    for(int j,i=1;i<=n;i=j){
        j=i;
        while(j<=n&&c[j].val==c[i].val){
            int who=c[j].id,st=bel[who]+1;
            while(st<=tot)tp[who][st]=cnt[st],++st;
            ++j;
        }
        for(int s=i;s<j;++s)++cnt[bel[c[s].id]];
    }
    for(int i=1;i<=tot;i++)cnt[i]=0;
}
void cal2(){
    for(int j,i=n;i>=1;i=j){
        j=i;
        while(j>=1&&c[j].val==c[i].val){
            int who=c[j].id,st=bel[who]-1;
            while(st>=1)tp[who][st]+=cnt[st],--st;
            --j;
        }
        for(int s=j+1;s<=i;++s)++cnt[bel[c[s].id]];
    }
    for(int i=1;i<=tot;i++)cnt[i]=0;
}
int qs(int id1,int id2){
    int
l1=st[id1],r1=min(n,en[id1]),l2=st[id2],r2=min(n,en[id2]);
    int lo1=l1,lo2=l2,re=0;
    while(lo1<=r1&&lo2<=r2){
        if(c[lo1].val<=c[lo2].val)++lo1;
        else{++lo2;re+=r1-lo1+1;}
    }
    return re;
}
void init(){
    for(int i=1;i<=tot;i++)
        for(int j=st[i]-1;j>=1;j--)
            if(j%SIZ)tp[j][i]+=tp[j+1][i];
    for(int i=1;i<=tot;i++)
        for(int j=en[i]+1;j<=n;j++)
            if(j%SIZ!=1)tp[j][i]+=tp[j-1][i];
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j=1;j<=tot;j++){
            tp[i][j]+=tp[i][j-1];
        }
    for(int i=1;i<=tot;i++){
        bit.clear();
        int l=0;
        for(int j=st[i];j<=n&&j<=en[i];j++){
            l+=bit.query_bck(a[j]+1);
            pre[j]=l;//sum 记录前比其大的
            bit.ins_pre(a[j]);
        }
        bit.clear();
        l=0;
        for(int j=min(n,en[i]);j>=st[i];j--){
            l+=bit.query_pre(a[j]-1);
            bck[j]=l;//sum2 记录后比其小的
            bit.ins_bck(a[j]);
        }
    }
    //每个块内排序
    for(int i=1;i<=tot;i++){
        int l=st[i],r=en[i]>n?n:en[i];
        for(int j=l;j<=r;j++){
            c[j].id=j;c[j].val=a[j];
        }
        sort(c+l,c+r+1);
    }
    for(int i=1;i<=tot;i++)dp[i][i]=pre[en[i]>n?n:en[i]];
    for(int i=1;i<=tot-1;i++)
        for(int j=i+1;j<=tot;j++)
            dp[i][j]=qs(i,j);
    for(int i=tot;i>=1;i--)
        for(int j=i+1;j<=tot;j++)
            dp[i][j]+=dp[i][j-1]+dp[i+1][j]-dp[i+1][j-
1];
}
ll eme(){
    int i=1,j=1;
    ll t=0;
    while(i<=s1&&j<=s2){
        if(q1[i]<=q2[j])++i;
```

```
            else{
                ++j;
                t+=s1-i+1;
            }
        }
        return t;
}
ll ask(int x,int l,int r){
        s1=s2=0;
        ll t=pre[r];
        if(l!=st[x])t-=pre[l-1];
        for(int i=st[x];i<=en[x]&&i<=n;i++)
            if (c[i].id<l)q1[++s1]=c[i].val;
        for(int i=st[x];i<=en[x]&&i<=n;i++)
            if (c[i].id>=l&&c[i].id<=r) q2[++s2]=c[i].val;
        t-=eme();
        return t;
}
ll query(int l,int r){
        if(l>r)return 0LL;
        s1=s2=0;
        int bl=bel[l],br=bel[r];
        if(bl==br)
            return ask(bl,l,r);
        ll re=dp[bl+1][br-1];
        re+=bck[l];re+=pre[r];
        for(int i=st[bl];i<=en[bl]&&i<=n;i++)
            if (c[i].id>=l) q1[++s1]=c[i].val;
        for(int i=st[br];i<=en[br]&&i<=n;i++)
            if (c[i].id<=r) q2[++s2]=c[i].val;
        re+=tp[l][br-1]-tp[l][bl]+tp[r][br-1]-tp[r][bl]+eme();
        return re;
}
multiset<ll>z;
multiset<ll>::iterator it;
int main(){
        read(t);
        while(t--){
            read(n);lim=n+1;
            SIZ=max(350,(n+CNT-2)/(CNT-1));
            for(int i=1;i<=CNT-1;i++)st[i]=(i-
1)*SIZ+1,en[i]=i*SIZ;
            z.clear();
            for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]),bel[i]=1+(i-
1)/SIZ,c[i].val=a[i],c[i].id=i;
            tot=1+(n-1)/SIZ;
            sort(c+1,c+1+n);
            cal1();cal2();
            init();
            pts.clear();pts2.clear();
            ans=query(1,n);
            printf("%lld",ans);
            z.insert(-ans);
            pts2.ins_pre(n+1);
            for(int q=1;q<=n;q++){
                printf(" ");
                ll tem;
                read(tem);
                if(q==n)break;
                tem^=ans;
                assert(tem>=1&&tem<=n);
                int
l=pts.find_pre(tem),r=pts2.find_bck(tem);
                ll lin=-query(l+1,r-1);
                it=lower_bound(z.begin(),z.end(),lin);
                z.erase(it);
                if(l+1<=tem-1)
                    z.insert(-query(l+1,tem-1));
                if(tem+1<=r-1)
                    z.insert(-query(tem+1,r-1));
                ans=-(*z.begin());
                printf("%lld",ans);
                pts.ins_bck(tem);pts2.ins_pre(tem);
            }
            printf("\n");
            for(int i=1;i<=n;i++)
                for(int j=1;j<=tot;j++)tp[i][j]=0;
            for(int i=1;i<=tot;i++)
                for(int j=1;j<=tot;j++)dp[i][j]=0;
            for(int i=1;i<=n;i++)pre[i]=bck[i]=0;
        }
        return 0;
}
```

莫队

例1- 求区间 mex

```
int n,m;
int a[MAX];
/*
    记录莫队中的每一个查询的结构体
```

```
*/
struct node
{
    int al,ar,bel,id;
}qs[MAX];
/*
    对查询排序
*/
bool cmp(node x,node z)
{
    return x.bel==z.bel?x.ar<z.ar:x.bel<z.bel;
}
int cnt[MAX],sum[MAX];
int ans[MAX];
/*
    莫队示例：
    求数组区间 mex
*/
int main()
{
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        scanf("%d",&a[i]);
        if(a[i]>n)a[i]=n;
    }
    int siz=sqrt(n);
    for(int i=1;i<=m;i++)
    {
        scanf("%d%d",&qs[i].al,&qs[i].ar);
        qs[i].bel=(qs[i].al-1)/siz;qs[i].id=i;
    }
    sort(qs+1,qs+1+m,cmp);
    /*
        对于下标从 1 开始的情况
        lol 初始设置为 1 lor 初始设置为 0
    */
    int lol=1,lor=0;siz=sqrt(n+1);
    /*
        每次莫队调整 l 和 r 的位置
    */
    for(int i=1;i<=m;i++)
    {
        while(lol>qs[i].al)--
lol,sum[a[lol]/siz]+=(!cnt[a[lol]]),++cnt[a[lol]];
        while(lor<qs[i].ar)++lor,sum[a[lor]/siz]+=(!cnt[a[lor]]),+
+cnt[a[lor]];
        while(lol<qs[i].al)--cnt[a[lol]],sum[a[lol]/siz]-
=(!cnt[a[lol]]),++lol;
        while(lor>qs[i].ar)--cnt[a[lor]],sum[a[lor]/siz]-
=(!cnt[a[lor]]),--lor;
        int st=0;
        for(int
i=0;i<=siz;i++,st+=siz)if(sum[i]<siz)break;
        while(cnt[st])++st;
        ans[qs[i].id]=st;
    }
    for(int i=1;i<=m;i++)
        printf("%d\n",ans[i]);
}
```

例2-　求区间的所有子区间 gcd 和-hdu5381

```
int rgcd[MAX][15],a[MAX];
vector<pii>vr[MAX],vl[MAX];
int t,n,m;
ll an[MAX];
struct node
{
    int al,ar,bel,id;
    bool operator <(const node &t)const
    {
        if(bel==t.bel)return ar<t.ar;
        else return bel<t.bel;
    }
}qs[MAX];
void init()
{
    for(int i=1;i<=n;i++)rgcd[i][0]=a[i];
    for(int i=1;(1<<i)<=n;i++)
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(j+(1<<i)-1<=n)rgcd[j][i]=gcd(rgcd[j][i-
1],rgcd[j+(1<<i-1)][i-1]);
}
int query(int l,int r)
{
    int k=(int)log2(r-l+1);
    return gcd(rgcd[l][k],rgcd[r-(1<<k)+1][k]);
}
//s 作为右端点  搜索向左 gcd 为 t 的最远位置
```

```
int Rsearch(int s,int l,int r,int t){
	int re,mid;
	while(l<=r)
	{
		mid=(l+r)/2;
		if(query(mid,s)==t){
			re=mid;r=mid-1;
		}
		else l=mid+1;
	}
	return re;
}
int Lsearch(int s,int l,int r,int t){
	int re,mid;
	while(l<=r)
	{
		mid=(l+r)/2;
		if(query(s,mid)==t){
			re=mid;l=mid+1;
		}
		else r=mid-1;
	}
	return re;
}
//计算 s 为右端点的贡献 t 为当前区间的左端点
ll rcal(int s,int t)
{
	ll re=0;
	int lo=s;
	for(int i=0;i<vr[s].size();i++){
		re+=1LL*(lo-
max(t,vr[s][i].second)+1)*(vr[s][i].first);
		lo=vr[s][i].second-1;
		if(lo<t)break;
	}
	return re;
}
ll lcal(int s,int t)
{
	ll re=0;
	int lo=s;
	for(int i=0;i<vl[s].size();i++){
		re+=1LL*(min(t,vl[s][i].second)-
lo+1)*vl[s][i].first;
		lo=vl[s][i].second+1;
		if(lo>t)break;
	}
	return re;
}
int main()
{
	read(t);
	while(t--){
		read(n);int siz=sqrt(n);
		for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]);
		init();
		for(int i=1;i<=n;i++){
			int r=i;
			vl[i].clear();
			while(r<=n){
				int who=query(i,r);
				r=Lsearch(i,r,n,who);
				vl[i].pb(mp(who,r));
				++r;
			}
		}
		for(int i=n;i>=1;i--)
		{
			int l=i;
			vr[i].clear();
			while(l>=1){
				int who=query(l,i);
				l=Rsearch(i,1,l,who);
				vr[i].pb(mp(who,l));--l;
			}
		}
		read(m);ll sum=0;
		for(int i=0;i<m;i++){
			read(qs[i].al);read(qs[i].ar);qs[i].id=i;
			qs[i].bel=(qs[i].al-1)/siz;
		}
		sort(qs,qs+m);
		int lol=1,lor=0;
		for(int i=0;i<m;i++){
			while(lol>qs[i].al)--lol,sum+=lcal(lol,lor);
			while(lor<qs[i].ar)++lor,sum+=rcal(lor,lol);
			while(lol<qs[i].al)sum-=lcal(lol,lor),++lol;
			while(lor>qs[i].ar)sum-=rcal(lor,lol),--lor;
			an[qs[i].id]=sum;
		}
```

```
            for(int i=0;i<m;i++)
                printf("%lld\n",an[i]);
        }
        return 0;
}
```

线段树

HDU6183-灵活运用线段树

```
int rt[100],l[MAX],r[MAX],v[MAX];
int tot,y1,y2,X,opt;
bool flag;
void ins(int &t,int L,int R,int y,int x)
{
        if(!t){
                t=++tot;
                v[t]=x;
        }
        if(v[t]>x)v[t]=x;
        if(L==R)return;
        int mid=(L+R)/2;
        if(y<=mid)ins(l[t],L,mid,y,x);
        else ins(r[t],mid+1,R,y,x);
}
void ask(int t,int L,int R)
{
        if(flag||!t)return;
        if(y1<=L&&R<=y2){
                if(v[t]<=X)flag=1;
                return;
        }
        int mid=(L+R)/2;
        if(y1<=mid)ask(l[t],L,mid);
        if(y2>mid)ask(r[t],mid+1,R);
}
int main()
{
        while(~scanf("%d",&opt))
        {
                if(opt==3)return 0;
                else if(opt==0){
                        for(int i=0;i<=50;i++)rt[i]=0;
                        for(int i=1;i<=tot;i++)l[i]=r[i]=0;
                        tot=0;
                }
                else if(opt==1){
                        int x,y,v;

read(x);read(y);read(v);ins(rt[v],1,1000000,y,x);
                }
                else if(opt==2){
                        read(X);read(y1);read(y2);
                        int ans=0;
                        for(int i=0;i<=50;i++){
                                flag=0;
                                ask(rt[i],1,1000000);
                                if(flag)++ans;
                        }
                        printf("%d\n",ans);
                }
        }
        return 0;
}
```

整体二分

整体二分-例 1-静态第 k 小-POJ2104

```
int n,m,ecnt;
int ans[MAX],ar[MAX];
inline int lowbit(int x){return x&(-x);}
void adds(int lo,int v){
        while(lo<=n)ar[lo]+=v,lo+=lowbit(lo);
}
int sum(int lo){
        int re=0;
        while(lo)re+=ar[lo],lo-=lowbit(lo);
        return re;
}
void clear(int lo){
        while(lo<=n&&ar[lo])ar[lo]=0,lo+=lowbit(lo);
}
struct Query{
        int x,y,k,id,opt;
}qs[MAX],ql[MAX],qr[MAX];
inline void addq(int x,int y,int k,int id,int opt){
        qs[++ecnt]=Query{x,y,k,id,opt};
}
void solve(int sl,int sr,int l,int r){
        if(sl>sr)return;
        if(l==r){
                for(int i=sl;i<=sr;i++)if(qs[i].opt)ans[qs[i].id]=l;
```

```
            return;
        }
        int mid=(l+r)>>1;
        int pl=0,pr=0;
        for(int i=sl;i<=sr;i++){
            if(!qs[i].opt){

if(qs[i].x<=mid)adds(qs[i].id,1),ql[pl++]=qs[i];
                else qr[pr++]=qs[i];
            }
            else{
                int cnt=sum(qs[i].y)-sum(qs[i].x-1);
                if(cnt>=qs[i].k)ql[pl++]=qs[i];
                else qs[i].k-=cnt,qr[pr++]=qs[i];
            }
        }
        for(int i=0;i<pl;i++)if(!ql[i].opt)clear(ql[i].id);
        for(int i=0;i<pl;i++)qs[sl+i]=ql[i];
        for(int i=0;i<pr;i++)qs[sl+pl+i]=qr[i];
        solve(sl,sl+pl-1,l,mid);solve(sl+pl,sr,mid+1,r);
}
int main(){
        read(n);read(m);
        for(int u,i=1;i<=n;i++){
            read(u);addq(u,-1,-1,i,0);
        }
        for(int l,r,k,i=1;i<=m;i++){
            read(l);read(r);read(k);
            addq(l,r,k,i,1);
        }
        solve(1,ecnt,-INF,INF);
        for(int i=1;i<=m;i++)
            printf("%d\n",ans[i]);
        return 0;
}
```

整体二分-例 2-动态第 k 小-ZOJ2112

```
int n,m,ecnt;
char op[20];
int ans[MAX],ar[MAX];
inline int lowbit(int x){return x&(-x);}
void adds(int lo,int v){
        while(lo<=n)ar[lo]+=v,lo+=lowbit(lo);
}
int sum(int lo){
        int re=0;
        while(lo)re+=ar[lo],lo-=lowbit(lo);
        return re;
}
//void clear(int lo){
//      while(lo<=n&&ar[lo])ar[lo]=0,lo+=lowbit(lo);
//}
struct Query{
        int x,y,k,id,opt;
}qs[MAX],ql[MAX],qr[MAX];
inline void addq(int x,int y,int k,int id,int opt){
        qs[++ecnt]=Query{x,y,k,id,opt};
}
void solve(int sl,int sr,int l,int r){
        if(sl>sr)return;
        if(l==r){
            for(int i=sl;i<=sr;i++)if(qs[i].opt)ans[qs[i].id]=l;
            return;
        }
        int mid=(l+r)>>1;
        int pl=0,pr=0;
        for(int i=sl;i<=sr;i++){
            if(!qs[i].opt){

if(qs[i].x<=mid)adds(qs[i].id,qs[i].y),ql[pl++]=qs[i];
                else qr[pr++]=qs[i];
            }
            else{
                int cnt=sum(qs[i].y)-sum(qs[i].x-1);
                if(cnt>=qs[i].k)ql[pl++]=qs[i];
                else qs[i].k-=cnt,qr[pr++]=qs[i];
            }
        }
        for(int i=0;i<pl;i++)if(!ql[i].opt)adds(ql[i].id,-ql[i].y);
        for(int i=0;i<pl;i++)qs[sl+i]=ql[i];
        for(int i=0;i<pr;i++)qs[sl+pl+i]=qr[i];
        solve(sl,sl+pl-1,l,mid);solve(sl+pl,sr,mid+1,r);
}
int a[MAX];
int t,aidx;
int main(){
        read(t);
        while(t--)
        {
            ecnt=aidx=0;
```

```
        read(n);read(m);
        for(int i=1;i<=n;i++){
            read(a[i]);addq(a[i],1,-1,i,0);
        }
        for(int l,r,k,i=1;i<=m;i++){
            scanf("%s",op);
            if(op[0]=='Q')
            {
                read(l);read(r);read(k);
                addq(l,r,k,++aidx,1);
            }
            else{
                read(l);read(r);
                addq(a[l],-1,-1,l,0);
                a[l]=r;
                addq(a[l],1,-1,l,0);
            }
        }
        solve(1,ecnt,0,INF);
        for(int i=1;i<=aidx;i++)
            printf("%d\n",ans[i]);
    }
    return 0;
}
```

字典树

可持久化字典树

```
int a[MAX],b[MAX],rt[MAX];
int bin[30];//2^i
struct trie{
    int cnt;//结点 id
    int ch[MAX*25][2],sum[MAX*25];
    int insert(int x,int val){//插入值 val x 为前版本的结点 返回新的根节点
        int re,y;re=y=++cnt;
        for(int i=23;i>=0;i--)//固定位数 保证位对齐
        {
            ch[y][0]=ch[x][0];ch[y][1]=ch[x][1];
            sum[y]=sum[x]+1;
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            x=ch[x][t];
            ch[y][t]=++cnt;
            y=ch[y][t];
        }
        sum[y]=sum[x]+1;
        return re;
    }
    int query(int l,int r,int val){//询问在 l、r 结点之间 与 val 异或最大的结果
        int re=0;
        for(int i=23;i>=0;i--){
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            if(sum[ch[r][t^1]]-sum[ch[l][t^1]])
                re+=bin[i],r=ch[r][t^1],l=ch[l][t^1];
            else r=ch[r][t],l=ch[l][t];
        }
        return re;
    }
}trie;
```

裸的字典树

```
/*极其容易 MLE 版本 */
struct Trie
{
    int ch[MAX_NODE][sigma_size];//点数、“字母”种数
    int val[MAX_NODE];
    int num;//结点总数
    Trie(){num=1;memset(ch[0],0,sizeof(ch[0]));}// 初 始时仅有根节点
    int idx(char c)//返回对应字符的编号
    {
        return c-'a';
    }
    /*
    clear 函数，初始化 trie
    */
    void clear() { num = 1; memset(ch[0], 0, sizeof(ch[0])); }
    /*
        插入字符串 s,附加信息为 v。注意 v 必须非 0，因为 0 代表：本结点不是单词结点
    */
    void insert(char *s,int v)
    {
        int u=0,len=strlen(s);
        for(int i=0;i<len;i++)
        {
            int c=idx(s[i]);
            if(!ch[u][c])//结点不存在
```

```
            {
                memset(ch[num],0,sizeof(ch[num]));
                val[num]=0;//中间节点的附加信息为0
                ch[u][c]=num++;//新建结点
            }
            u=ch[u][c];//往下走
        }
        val[u]=v;//字符串的最后一个字符的附加信息为 v
    }
    /*
     查询字符串的“附加信息”
     查询过程中间中断返回 0
    */
    int check(char *s)
    {
        int u=0,len=strlen(s);
        for(int i=0;i<len;i++)
        {
            int c=idx(s[i]);
            if(!ch[u][c])
                return 0;
            u=ch[u][c];
        }
        return val[u];
    }
    /*
    找字符串 s 的长度不超过 len 的前缀
    */
    void find_prefixes(const char *s,int len,vector <int> &ans)
    {
        int u=0;
        for(int i=0;i<len;i++)
        {
            if(s[i]=='\0')
                break;
            int c=idx(s[i]);
            if(!ch[u][c])
                break;
            u=ch[u][c];
            if(val[u]!=0)//过程中所有找到的全都push进去
                ans.push_back(val[u]);
        }
    }
};

/*不易 MLE 版本 */
struct Trie {
    bool isWord;
    Trie* child[26];
    Trie(bool isWord):isWord(isWord)
    {
        memset(child,0,sizeof(child));
    }
    void addWord(string &s)
    {
        Trie*cur =this;
        for(char c: s)
        {
            Trie* next=cur->child[c-'a'];
            if(next==nullptr)
                next=cur->child[c-'a']=new Trie(false);
            cur=next;
        }
        cur->isWord=true;
    }
    int checkstr(string s)//返回字符串在字典树中最长前缀
    {
        Trie*cur=this;int re=0;
        for(char c:s)
        {
            Trie* next=cur->child[c-'a'];
            if(next==nullptr)break;
            else{cur=next;++re;}
        }
        return re;
    }
    ~Trie()
    {
        for(int i=0;i<26;++i)
        {
            if(child[i])
                delete child[i];
        }
    }
```

```
};
//Trie *tri=new Trie(0);  以此来建 Trie
```

BZOJ3261-可持久化字典树例 1

```
/*
题意:
给定一个非负整数序列 {a}，初始长度为 N。
有  M 个操作，有以下两种操作类型:
1 、A x:添加操作，表示在序列末尾添加一个数 x，序列的长度 N+1。
2 、Q l r x:询问操作，你需要找到一个位置 p，满足 l<=p<=r，使得:
a[p] xor a[p+1] xor … xor a[N] xor x 最大，输出最大是多少。

每次加点将 trie 树的这条链的权都+1
修改当然是新建一个结点（类可持久化线段树）
然后查询的时候判断一个结点存在，只要做区间减法判权是否非 0
即若 sum[r]-sum[l-1]=0 则该结点不存在
实现的时候数列开始加入一个数 0 会比较好处理

*/
int bin[30];
int n,m;
int a[MAX],b[MAX],rt[MAX];
struct trie{
    int cnt;//结点 id
    int ch[MAX*25][2],sum[MAX*25];
    int insert(int x,int val){
        int re,y;re=y=++cnt;
        for(int i=23;i>=0;i--)//固定位数
        {
            ch[y][0]=ch[x][0];ch[y][1]=ch[x][1];
            sum[y]=sum[x]+1;
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            x=ch[x][t];
            ch[y][t]=++cnt;
            y=ch[y][t];
        }
        sum[y]=sum[x]+1;
        return re;
    }
    int query(int l,int r,int val){
        int tmp=0;
        for(int i=23;i>=0;i--){
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            if(sum[ch[r][t^1]]-sum[ch[l][t^1]])
                tmp+=bin[i],r=ch[r][t^1],l=ch[l][t^1];
            else r=ch[r][t],l=ch[l][t];
        }
        return tmp;
    }
}trie;
int main()
{
    bin[0]=1;
    for(int i=1;i<30;i++)bin[i]=bin[i-1]<<1;
    read(n);read(m);
    ++n;
    for(int i=2;i<=n;i++)read(a[i]);
    for(int i=1;i<=n;i++)b[i]=b[i-1]^a[i];
    for(int i=1;i<=n;i++)
        rt[i]=trie.insert(rt[i-1],b[i]);
    char ch[5];
    int l,r,x;
    while(m--)
    {
        scanf("%s",ch);
        if(ch[0]=='A'){
            ++n;
            read(a[n]);b[n]=b[n-1]^a[n];
            rt[n]=trie.insert(rt[n-1],b[n]);
        }
        else{
            read(l);read(r);read(x);
            printf("%d\n",trie.query(rt[l-1],rt[r],b[n]^x));
        }
    }
    return 0;
}
```

HDU4757-可持久化字典树例 2

```
/*
    题意: 给定树 每次问(u,v)路径上的点权值与 x 异或中的最大值
    做法就是按 dfs 序插点就好了
*/
struct node
{
```

```
    int to,nxt;
}edg[MAX<<2];
int n,m,ecnt;
int a[MAX],bin[25];
int fa[MAX][20],dep[MAX],rt[MAX];
int h[MAX];
void add_edge(int u,int v)
{
    edg[++ecnt]=node{v,h[u]};
    h[u]=ecnt;
}
struct trie{
    int cnt;
    int ch[MAX*20][2],sum[MAX*20];
    int insert(int pre,int val){
        int re,now;re=now=++cnt;
        for(int i=18;i>=0;i--){

ch[now][0]=ch[pre][0];ch[now][1]=ch[pre][1];
            sum[now]=sum[pre]+1;
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            pre=ch[pre][t];
            ch[now][t]=++cnt;
            now=ch[now][t];
        }
        sum[now]=sum[pre]+1;
        return re;
    }
    int query(int u,int v,int anc,int w,int val){
        int re=0;
        for(int i=18;i>=0;i--){
            int t=val&bin[i];t>>=i;
            if(sum[ch[u][t^1]]+sum[ch[v][t^1]]-
sum[ch[anc][!t]]-sum[ch[w][!t]]>0){

re+=bin[i];u=ch[u][!t];v=ch[v][!t];w=ch[w][!t];anc=ch[an
c][!t];
            }
            else{

u=ch[u][t];v=ch[v][t];anc=ch[anc][t];w=ch[w][t];
            }
        }
        return re;
    }
}trie;
void dfs(int u,int pre)
{
    fa[u][0]=pre;
    rt[u]=trie.insert(rt[pre],a[u]);
    for(int i=1;i<=18;i++)fa[u][i]=fa[fa[u][i-1]][i-1];
    for(int i=h[u];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        if(to==pre)continue;
        dep[to]=dep[u]+1;
        dfs(to,u);
    }
}
int lca(int u,int v)
{
    if(dep[u]<dep[v])swap(u,v);
    int cha=dep[u]-dep[v];
    for(int i=18;i>=0;i--)if(cha&(1<<i))u=fa[u][i];
    if(u==v)return u;
    for(int i=18;i>=0;i--)
        if(fa[u][i]!=fa[v][i])u=fa[u][i],v=fa[v][i];
    return fa[u][0];
}
int main()
{
    bin[0]=1;for(int i=1;i<=20;i++)bin[i]=bin[i-1]<<1;
    while(~scanf("%d%d",&n,&m))
    {
        trie.cnt=0;
        ecnt=0;memset(h,0,sizeof(h));
        for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]);
        for(int u,v,i=1;i<n;i++){

read(u);read(v);add_edge(u,v);add_edge(v,u);
        }
        dfs(1,0);
        for(int u,v,x,i=1;i<=m;i++){
            read(u);read(v);read(x);
            int c=lca(u,v),anc=fa[c][0];

printf("%d\n",trie.query(rt[u],rt[v],rt[c],rt[anc],x));
        }
    }
    return 0;
}
```

主席树

主席树——区间第 k 大值

```
const int maxn=1e5+5;
struct node
{
    int l,r,sum;
}T[maxn*40];
int rt[maxn];
int cnt;
int n,m;
void update(int l,int r,int &x,int y,int pos)
{
    T[++cnt]=T[y];++T[cnt].sum;x=cnt;
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)>>1;
    if(pos<=mid)update(l,mid,T[x].l,T[y].l,pos);
    else update(mid+1,r,T[x].r,T[y].r,pos);
}
int query(int l,int r,int x,int y,int k)
{
    if(l==r)return l;
    int mid=(l+r)>>1;
    int sum=T[T[y].l].sum-T[T[x].l].sum;
    if(sum>=k)return query(l,mid,T[x].l,T[y].l,k);
    else return query(mid+1,r,T[x].r,T[y].r,k-sum);
}
int a[maxn];
vector<int>v;
int getid(int x)//返回离散化后的排名（按值从小到大）
{
    return lower_bound(v.begin(),v.end(),x)-v.begin()+1;
}
int main()
{
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        scanf("%d",&a[i]);v.pb(a[i]);
    }

sort(v.begin(),v.end());v.erase(unique(v.begin(),v.end()),v.end());
    for(int i=1;i<=n;i++)
        update(1,n,rt[i],rt[i-1],getid(a[i]));
    for(int u,vs,k,i=1;i<=m;i++)
    {
        scanf("%d%d%d",&u,&vs,&k);
        printf("%d\n",v[query(1,n,rt[u-1],rt[vs],k)-1]);
    }
    return 0;
}
```

动态第 k 小

```
struct node
{
    int kind,x,y,z;
}query[MAX];
int ts,n,q,m,tot;
int a[MAX],od[MAX],t[MAX];
int T[MAX],lson[M],rson[M],s[M],bs[MAX];
int use[MAX];
char opt[10];
inline int lowbit(int x)
{
    return x&(-x);
}
int build(int l,int r)
{
    int rt=tot++;
    s[rt]=0;
    if(l!=r){
        int mid=(l+r)/2;
        //原本下一行没有 lson\rson 的赋值 感觉不对?
        lson[rt]=build(l,mid);rson[rt]=build(mid+1,r);
    }
    return rt;
}
int Insert(int rt,int pos,int val)
{
    int re=tot++,l=0,r=m-1,newrt=re;s[newrt]=s[rt]+val;
    while(l<r)
    {
        int mid=(l+r)/2;
        if(pos<=mid){
            lson[newrt]=tot++;rson[newrt]=rson[rt];
            newrt=lson[newrt];rt=lson[rt];r=mid;
        }
        else{
```

```
            lson[newrt]=lson[rt];rson[newrt]=tot++;
            newrt=rson[newrt];rt=rson[rt];l=mid+1;
        }
        s[newrt]=s[rt]+val;
    }
    return re;
}
int sum(int x)
{
    int re=0;
    for(int i=x;i>0;i-=lowbit(i))
    {
        re+=s[lson[use[i]]];
    }
    return re;
}
int Query(int ql,int qr,int k)
{
    int l=0,r=m-1,mid,rtl=T[ql-1],rtr=T[qr];
    for(int i=ql-1;i>0;i-=lowbit(i))use[i]=bs[i];
    for(int i=qr;i>0;i-=lowbit(i))use[i]=bs[i];
    while(l<r)
    {
        int mid=(l+r)/2;
        int tem=sum(qr)-sum(ql-1)+s[lson[rtr]]-
s[lson[rtl]];
        if(tem>=k){
            for(int i=ql-1;i>0;i-
=lowbit(i))use[i]=lson[use[i]];
            for(int i=qr;i>0;i-
=lowbit(i))use[i]=lson[use[i]];
            rtl=lson[rtl];rtr=lson[rtr];
            r=mid;
        }
        else{
            k-=tem;
            for(int i=ql-1;i>0;i-
=lowbit(i))use[i]=rson[use[i]];
            for(int i=qr;i>0;i-
=lowbit(i))use[i]=rson[use[i]];
            rtl=rson[rtl];rtr=rson[rtr];l=mid+1;
        }
    }
    return l;
}
void upd(int x,int who,int d)
{
    while(x<=n)
    {
        bs[x]=Insert(bs[x],who,d);
        x+=lowbit(x);
    }
}
inline int lo(int x){return lower_bound(t,t+m,x)-t;}
int main()
{
    scanf("%d",&ts);
    while(ts--)
    {
        scanf("%d%d",&n,&q);m=tot=0;
        for(int
i=1;i<=n;i++)scanf("%d",&a[i]),t[m++]=a[i];
        for(int i=1;i<=q;i++)
        {
            scanf("%s",opt);
            if(opt[0]=='Q'){

query[i].kind=1;scanf("%d%d%d",&query[i].x,&query[i].y,
&query[i].z);
            }
            else{

query[i].kind=0;scanf("%d%d",&query[i].x,&query[i].y);t[m
++]=query[i].y;
            }
        }
        sort(t,t+m);m=unique(t,t+m)-t;
        T[0]=build(0,m-1);
        for(int i=1;i<=n;i++){
            T[i]=Insert(T[i-1],lo(a[i]),1);
        }
        for(int i=1;i<=n;i++)bs[i]=T[0];
        for(int i=1;i<=q;i++)
        {

if(query[i].kind)printf("%d\n",t[Query(query[i].x,query[i].y,
query[i].z)]);
            else{
                upd(query[i].x,lo(a[query[i].x]),-1);
                upd(query[i].x,lo(query[i].y),1);
```

```
                    a[query[i].x]=query[i].y;
                }
            }
        }
        return 0;
}
```

可持久化动态区间和

```
int n,m,tot,TM;
int T[MAX<<2],lson[MAX*40],rson[MAX*40];
ll lazy[MAX*40],sum[MAX*40];
char opt[10];
int build(int l,int r)
{
        int re=tot++;lazy[re]=sum[re]=0;
        if(l==r){
                scanf("%lld",&sum[re]);return re;
        }
        int mid=(l+r)/2;
        lson[re]=build(l,mid);rson[re]=build(mid+1,r);
        sum[re]=sum[lson[re]]+sum[rson[re]];
        return re;
}
void pushup(int rt,int l,int r)
{
        int mid=(l+r)/2;
        sum[rt]=sum[lson[rt]]+sum[rson[rt]]+(1LL*mid-
l+1)*lazy[lson[rt]]+(1LL*r-mid)*lazy[rson[rt]];
        return ;
}
int Insert(int rt,int il,int ir,int l,int r,ll d)
{
        int ntr=tot++;lazy[ntr]=lazy[rt];
        if(l>=il&&r<=ir){

lazy[ntr]=lazy[rt]+d;sum[ntr]=sum[rt];lson[ntr]=lson[rt];r
son[ntr]=rson[rt];return ntr;
        }
        int mid=(l+r)/2;
        if(il<=mid)
                lson[ntr]=Insert(lson[rt],il,ir,l,mid,d);
        else lson[ntr]=lson[rt];
        if(ir>mid)
                rson[ntr]=Insert(rson[rt],il,ir,mid+1,r,d);
        else rson[ntr]=rson[rt];
        pushup(ntr,l,r);
        return ntr;
}
ll query(int rt,int ql,int qr,int l,int r,ll add)
{
        if(l>=ql&&r<=qr){
                return (add+lazy[rt])*(r-l+1LL)+sum[rt];
        }
        int mid=(l+r)/2;
        ll re=0;

if(ql<=mid)re+=query(lson[rt],ql,qr,l,mid,add+lazy[rt]);

if(qr>mid)re+=query(rson[rt],ql,qr,mid+1,r,add+lazy[rt]);
        return re;
}
bool st;
int main()
{
        while(~scanf("%d%d",&n,&m))
        {
                if(st)printf("\n");st=1;
                tot=TM=0;
                T[0]=build(1,n);
                while(m--){
                        scanf("%s",opt);
                        if(opt[0]=='C'){
                                int                                     l,r;ll
d;scanf("%d%d%lld",&l,&r,&d);T[TM+1]=Insert(T[TM],l,r,1,
n,d);++TM;
                        }
                        else if(opt[0]=='Q'){
                                int
l,r;scanf("%d%d",&l,&r);printf("%lld\n",query(T[TM],l,r,1,n,0
));
                        }
                        else if(opt[0]=='H'){
                                int
l,r,t;scanf("%d%d%d",&l,&r,&t);printf("%lld\n",query(T[t],l,r,
1,n,0));
                        }
                        else{
                                int
t;scanf("%d",&t);TM=t;tot=T[TM+1];
                        }
```

```
        }
    }
    return 0;
}
```

图论

2-SAT

2-SAT

```
/*
    2-SAT 问题是这样的：有 n 个布尔变量 xi,另有 m 个需要满足的条件，每个条件的形式都是
    “xi 为真/假或者 xj 为真/假”。比如“x1 为真或者 x3 为假”、“x7 为假或者 x2 为假”都是合法的条件。
    这里或指的是两个条件至少有一个是正确的
*/
const int maxn=1e5+5;
struct TwoSAT
{
    int n;
    vector<int>G[maxn*2];
    bool mark[maxn*2];
    int S[maxn*2],c;//s 数组存储当前被标记的点
    bool dfs(int x)
    {
        if(mark[x^1])return false;//真假同时被标记，逻辑矛盾
        if(mark[x])return true;//记忆化
        mark[x]=1;
        S[c++]=x;
        for(int i=0;i<G[x].size();i++)
            if(!dfs(G[x][i]))return false;//同一个强连通分量应该同一种颜色
        return true;
    }
    void init(int n)
    {
        this->n=n;
        for(int i=0;i<n*2;i++)G[i].clear();
        memset(mark,0,sizeof(mark));
    }
    //x=xval or y=yval
    /*
        x 为 xval 或者 y 为 yval 需要有一个满足
    */
    void add_clause(int x,int xval,int y,int yval)
    {
        x=x*2+xval;y=y*2+yval;
        G[x^1].push_back(y);
        G[y^1].push_back(x);
    }
    bool solve()
    {
        for(int i=0;i<n*2;i+=2)
        {
            if(!mark[i]&&!mark[i+1])//真假都没标记故需要 dfs
            {
                c=0;//清零
                if(!dfs(i))//尝试标记为 true
                {
                    while(c>0)mark[S[--c]]=false;
                    if(!dfs(i+1))return false;//尝试标记为 false
                }
            }
        }
        return true;
    }
};
```

2-SAT-例题 1-BZOJ3495 前缀优化建图（使用 Tarjan 判 2-SAT）

```
/*
有 n 个点， m 条边和 K 个国家（国家里的点已知）。每个国家只能选一个点作为首都，并且要保证最后所有边的两端至少有一个点是首都，问是否存在方案。

做法：
每个点是首都或不是首都，只有两个状态，所以是 2-SAT 问题。m 条边的限制很容易转化，就是每个国家只能选一个点为首都比较奇怪。
其实这是典型的前后缀优化建图，这里以前缀优化建图为例：
首先我们先增加 n 个点，令 i 的新增节点为 i+n 。然后对于一个国家，
假设有 w 个点，那么该国家中的第 i 个点（设为 A[i] ）的新增点 A[i]+n
```

表示该国家中 1~ i 的点是否有被选的节点，即代表前缀 i 中是否有被选的节点。
那么我们可以得到以下关系式：

1. A[i−1]+n 选了， A[i]+n 必定选了； A[i]+n 没选，

A[i−1]+n 必定没选（前缀之间的关系）。

2. A[i] 选了， A[i−1]+n 必定没选； A[i−1]+n 选了，

A[i] 必定没选（一个国家只能有一个首都）。

后缀优化建图原理是一样的，只不过这道题并不需要后缀优化。
最后刷 2-SAT 判断是否存在解即可。
*/

```
struct node{
    int to,nxt;
}edg[MAX<<1];

int n,m,k,dcnt,ecnt,top,scc_cnt;
int dfn[MAX],h[MAX],low[MAX],scc[MAX],stk[MAX];
bool instk[MAX];
void add_edge(int u,int v){
    edg[++ecnt]=node{v,h[u]};
    h[u]=ecnt;
}
void Tarjan(int x){
    dfn[x]=low[x]=++dcnt;stk[++top]=x;instk[x]=1;
    for(int i=h[x];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        if(!dfn[to])Tarjan(to),low[x]=min(low[x],low[to]);
        else if(instk[to])low[x]=min(low[x],dfn[to]);
    }
    if(dfn[x]==low[x]){
        ++scc_cnt;int y;
        do y=stk[top--],instk[y]=0,scc[y]=scc_cnt;while(y!=x);
    }
}
bool Two_SAT(){
    for(int i=0;i<4*n;i++)if(!dfn[i])Tarjan(i);
    for(int i=0;i<4*n;i+=2)
        if(scc[i]==scc[i^1])return false;
}
int main()
{
    read(n);read(m);read(k);
    for(int x,y,i=1;i<=m;i++){
        read(x);read(y);--x;--y;

add_edge(x<<1,y<<1^1);add_edge(y<<1,x<<1^1);
    }
    for(int i=0;i<n;i++)

add_edge(i<<1^1,i+n<<1^1),add_edge(i+n<<1,i<<1);
    for(int i=1;i<=k;i++){
        int w,x,lst;read(w);
        for(int j=0;j<w;j++,lst=x){
            read(x);--x;
            if(j){
                add_edge(x+n<<1,lst+n<<1);
                add_edge(lst+n<<1^1,x+n<<1^1);
                add_edge(x<<1^1,lst+n<<1);
                add_edge(lst+n<<1^1,x<<1);
            }
        }
    }
    if(Two_SAT())printf("TAK\n");
    else printf("NIE\n");
    return 0;
}
```

LCA

```
vector <int> G[N];

int seq[N], tin[N], fa[N], dep[N], top[N], son[N], sz[N], label;

void dfs1(int u, int father) {
    fa[u] = father;
    son[u] = 0; sz[u] = 1;
    for(auto v : G[u]) {
        if(v == father) continue;
        dep[v] = dep[u] + 1;
        dfs1(v, u);
        sz[u] += sz[v];
        if(sz[v] > sz[son[u]])
            son[u] = v;
    }
```

```
}

void dfs2(int u, int anc) {
    top[u] = anc; tin[u] = ++ label;
    seq[label] = u;
    if(son[u]) dfs2(son[u], anc);
    for(auto v : G[u]) {
        if(v == fa[u] || v == son[u])
            continue;
        dfs2(v, v);
    }
}

inline int lca(int u, int v) {
    while(top[u] ^ top[v]) {
        if(dep[top[u]] < dep[top[v]]) swap(u, v);
        u = fa[top[u]];
    }
    return dep[u] < dep[v] ? u : v;
}
```

点分治

点分治-例 1-POJ1987-树上两点距离小于等于 k 的对数

```
/*
    POJ 1741
    题意:
    多组测试数据，每次输入 n、m，和一棵 n 个点的有边权的树,
    问你满足 x 到 y 距离小于等于 m 的无序点对(x,y)的个数是多少。
    做法:
    如果我们已经知道了此时所有点到根的距离 a[i], a[x] + a[y] <= k 的(x, y)对数就是结果,
    这个可以通过排序之后 O(n)的复杂度求出。然后根据分治的思想，分别对所有的儿子求一遍即可,
    但是这会出现重复的——当前情况下两个点位于一颗子树中，那么应该将其减掉
    （显然这两个点是满足题意的，为什么减掉呢？因为在对子树进行求解的时候，会重新计算）。

    在进行分治时，为了避免树退化成一条链而导致时间复杂度变为 O(N^2)，每次都找树的重心，这样,
    所有的子树规模就会变的很小了。时间复杂度 O(Nlog^2N)。

    树的重心的算法可以线性求解。
*/
struct node
{
    int to,dis,nxt;
}edg[MAX<<2];
int n,ecnt,tot,rt,k;//tot 为某一时刻的树上总点数 rt 为重心
int h[MAX],siz[MAX],f[MAX];//f[i]记录当前状态 i 点最大子树的大小
int a[MAX],d[MAX];//d 数组记录某点到根节点的距离
bool vi[MAX];
int an;
void add_edge(int u,int v,int d)
{
    edg[++ecnt]=node{v,d,h[u]};
    h[u]=ecnt;
}
void dfs(int now,int fa)//找重心 计算 siz
{
    siz[now]=1;f[now]=0;
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]&&to!=fa){

dfs(to,now);siz[now]+=siz[to];f[now]=max(f[now],siz[to]);
        }
    }
    f[now]=max(tot-siz[now],f[now]);
    if(f[now]<f[rt])rt=now;
}
void pre(int now,int prre)//计算每一点到根节点距离
{
    a[++a[0]]=d[now];
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]&&to!=prre){
            d[to]=d[now]+edg[i].dis;pre(to,now);
        }
    }
}
```

```
//初始 d[now]=ds 以此为基准(保证每点深度不变)
int cal(int now,int ds)//计算以某一点为根 有多少 a[i]+a[j]<=k 的点对（可能在一条链上）
{
    int re=0;
    d[now]=ds;a[0]=0;pre(now,0);
    sort(a+1,a+a[0]+1);
    int l=1,r=a[0];
    while(l<r)
    {
        if(a[l]+a[r]<=k)re+=r-l,++l;
        else --r;
    }
    return re;
}
void solve(int x)//求解以 x 为根的个数
{
    an+=cal(x,0);vi[x]=1;//初始为所有个数（包含在一个子树内的） 标记 vi[x] 切断树
    for(int i=h[x];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]){
            an-=cal(to,edg[i].dis);tot=siz[to];rt=0;// 去掉在一个子树的
            dfs(to,0);solve(rt);
        }
    }
}
int main()
{
    #ifdef debug
        freopen("2.in","r",stdin);
    #endif // debug
    read(n);
    for(int u,v,w,i=1;i<n;i++)
    {
        read(u);read(v);read(w);
        add_edge(u,v,w);add_edge(v,u,w);
    }
    read(k);f[0]=n+1;
    tot=n;
    dfs(1,0);
    solve(rt);
    printf("%d\n",an);
    return 0;
}
```

点分治-例 2-POJ2114-树上两点距离恰等于 k 的个数

```
struct node
{
    int to,nxt,dis;
    node(){};
    node(int _to,int _nxt,int _dis):to(_to),nxt(_nxt),dis(_dis){};
}edg[MAX<<2];
int n,m,ecnt,k,rt,an,tot;
int h[MAX],siz[MAX],f[MAX],d[MAX],a[MAX];
bool vi[MAX];
void add_edge(int u,int v,int d)
{
    edg[++ecnt]=node(v,h[u],d);
    h[u]=ecnt;
}
void dfs(int now,int fa)//找重心
{
    siz[now]=1;f[now]=0;
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]&&to!=fa)

dfs(to,now),siz[now]+=siz[to],f[now]=max(f[now],siz[to]);
    }
    f[now]=max(f[now],tot-siz[now]);
    if(f[now]<f[rt])rt=now;
}
void cal_dis(int now,int fa)
{
    a[++a[0]]=d[now];
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]&&to!=fa)
            d[to]=d[now]+edg[i].dis,cal_dis(to,now);
    }
}
int cal_num(int now,int pred)
{
    int re=0;
```

```
    d[now]=pred;a[0]=0;cal_dis(now,0);
    sort(a+1,a+a[0]+1);
    int l=1,r=a[0];
    while(l<r)
    {
        if(a[l]+a[r]==k){//只统计和恰为 k 的
            if(a[l]==a[r]){
                re+=(r-l+1)*(r-l)/2;break;//深度相等
深度为此的个数设为 x 则有 C(x,2)对
            }
            int i=l,j=r;
            while(a[i]==a[l])++i;
            while(a[j]==a[r])--j;
            re+=(i-l)*(r-j);//深度不同 乘法原理 两种
个数的乘积
            l=i;r=j;
        }
        else if(a[l]+a[r]<k)++l;
        else --r;
    }

    return re;
}
void solve(int x)
{
    an+=cal_num(x,0);vi[x]=1;
    for(int i=h[x];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]){
            an-
=cal_num(to,edg[i].dis);tot=siz[to];rt=0;
            dfs(to,0);solve(rt);
        }
    }
}
int main()
{
    #ifdef debug
        freopen("2.in","r",stdin);
    #endif // debug
    while(scanf("%d",&n)&&n)
    {
        ecnt=0;memset(vi,0,sizeof(vi));
        memset(h,0,sizeof(h));
        for(int v,d,i=1;i<=n;i++)
        {
            while(scanf("%d",&v)&&v){
                scanf("%d",&d);
                add_edge(i,v,d);add_edge(v,i,d);
            }
        }
        while(scanf("%d",&k)&&k){
            an=0;rt=0;
            memset(vi,0,sizeof(vi));
            f[0]=n+1;tot=n;
            dfs(1,0);solve(rt);
            puts(an>0?"AYE":"NAY");
        }
        puts(".");
    }

    return 0;
}
```

点分治-例 3-字典序最小的两点使路径上点的积为 k

```
struct node
{
    int to,nxt;
}edg[MAX<<2];
int
inv[M],a[MAX],h[MAX],f[MAX],siz[MAX],id[MAX],temd[
MAX],d[MAX],mp[M];
int n,k,ecnt,rt,tot,an1,an2,dcnt;
bool vi[MAX];
void add_edge(int u,int v)
{
    edg[++ecnt]=node{v,h[u]};
    h[u]=ecnt;
}
void getrt(int now,int fa)
{
    f[now]=0;siz[now]=1;
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(!vi[to]&&to!=fa){

getrt(to,now);siz[now]+=siz[to];f[now]=max(f[now],siz[t
o]);
```

```
            }
        }
        f[now]=max(f[now],tot-siz[now]);
        if(f[now]<f[rt])rt=now;
}
void dfs(int now,int fa)
{
        temd[++dcnt]=d[now];id[dcnt]=now;
        for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
        {
                int to=edg[i].to;
                if(!vi[to]&&to!=fa)
                {
                        d[to]=(1LL*d[now]*a[to])%MOD;
                        dfs(to,now);
                }
        }
}
void query(int x,int ID)
{
        x=1LL*inv[x]*k%MOD;
        int y=mp[x];
        if(!y)return;
        if(y>ID)swap(y,ID);
        if(y<an1||(y==an1&&ID<an2))
                an1=y,an2=ID;
}
void solve(int now)
{
        vi[now]=1;mp[a[now]]=now;
        for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
        {
                int to=edg[i].to;
                if(!vi[to])
                {
                        dcnt=0;d[to]=a[to];//先只从该子树走 这样能与之前处理过的其他子树连接起来
                        dfs(to,now);
                        for(int j=1;j<=dcnt;j++)
                                query(temd[j],id[j]);
                        dcnt=0;d[to]=(1LL*a[now]*a[to])%MOD;
                        dfs(to,now);
                        for(int j=1;j<=dcnt;j++)//枚举该子树中每一个点
                        {
                                int now=mp[temd[j]];
                                if(!now||now>id[j])mp[temd[j]]=id[j];
                        }
                }
        }

        mp[a[now]]=0;//清空 map
        for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
        {
                int to=edg[i].to;
                if(!vi[to])
                {
                        dcnt=0;d[to]=(1LL*a[now]*a[to])%MOD;
                        dfs(to,now);
                        for(int j=1;j<=dcnt;j++)mp[temd[j]]=0;
                }
        }
        for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
        {
                int to=edg[i].to;
                if(!vi[to])
                {
                        rt=0;tot=siz[to];
                        getrt(to,0);
                        solve(rt);//开始去处理某个子树的重心
                }
        }

}
int main()
{
        inv[1]=1;
        for(int i=2;i<1000009;i++)
                inv[i]=1LL*(MOD-inv[MOD%i])*(MOD/i)%MOD;
        while(~scanf("%d%d",&n,&k))
        {
                memset(h,0,sizeof(h));ecnt=0;an1=an2=INF;
                memset(vi,0,sizeof(vi));
                for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]);
                for(int u,v,i=1;i<n;i++)
                {

read(u);read(v);add_edge(u,v);add_edge(v,u);
                }
                rt=0;f[0]=n+1;tot=n;
```

```
            getrt(1,0);solve(rt);
            if(an1==INF)printf("No solution\n");
            else printf("%d %d\n",an1,an2);
        }
        return 0;
}
```

三元环

nsqrtn 版

```
#include <bits/stdc++.h>
#define LL long long
using namespace std;
const int bas = 1e5+1;
const int maxn = 1e5+5;
vector<int> G[maxn];
int n, m;
//unordered_set<LL> _hash;
set<LL> _hash;
int deg[maxn], vis[maxn];
int bel[maxn];
void init()
{
    for(int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        deg[i] = bel[i] = vis[i] = 0;
        G[i].clear();
    }
}
void work()
{
    int x = sqrt(1.0*m);
    LL ans = 0;
    for(int a = 1; a <= n; ++a)
    {
        vis[a] = 1;
        //扫一遍与 a 相连的所有点，为下面提供 O(1)判两点是否存在连边
        for(int i = 0; i < G[a].size(); ++i)
        bel[G[a][i]] = a;
        for(int i = 0; i < G[a].size(); ++i)
        {
            int b = G[a][i];
            if(vis[b]) continue;
            if(deg[b] <= x)
            {
                //如果 b 度数<=sqrt(m)，则枚举 b 的所有边
                for(int j = 0; j < G[b].size(); ++j)
                {
                    int c = G[b][j];
                    if(bel[c] == a) ++ans;
                }
            }
            else
            {
                //如果 b 度数>sqrt(m)，则枚举 a 的所有边
                for(int j = 0; j < G[a].size(); ++j)
                {
                    int c = G[a][j];
                    if(_hash.find(1ll*b*bas+c)        !=
_hash.end())
                    ++ans;
                }
            }
        }
    }
    //统计后每个三元环的每条边都会被统计一次，所以应该/3
    printf("%lld\n", ans/3);
}
int main()
{
    int t, u, v;
    while(~scanf("%d %d", &n, &m))
    {
        init(); _hash.clear();
        for(int i = 1; i <= m; ++i)
        {
            scanf("%d %d", &u, &v);
            ++deg[u], ++deg[v];
            G[u].push_back(v);
            G[v].push_back(u);
            _hash.insert(1ll*u*bas+v);
            _hash.insert(1ll*v*bas+u);
        }
        work();
    }
    return 0;
}
```

树剖

树剖+LCA

```
vector <int> G[N];

int seq[N], tin[N], fa[N], dep[N], top[N], son[N], sz[N], label;

void dfs1(int u, int father) {
    fa[u] = father;
    son[u] = 0; sz[u] = 1;
    for(auto v : G[u]) {
        if(v == father) continue;
        dep[v] = dep[u] + 1;
        dfs1(v, u);
        sz[u] += sz[v];
        if(sz[v] > sz[son[u]])
            son[u] = v;
    }
}

void dfs2(int u, int anc) {
    top[u] = anc; tin[u] = ++ label;
    seq[label] = u;
    if(son[u]) dfs2(son[u], anc);
    for(auto v : G[u]) {
        if(v == fa[u] || v == son[u])
            continue;
        dfs2(v, v);
    }
}

inline int lca(int u, int v) {
    while(top[u] ^ top[v]) {
        if(dep[top[u]] < dep[top[v]]) swap(u, v);
        u = fa[top[u]];
    }
    return dep[u] < dep[v] ? u : v;
}
```

树剖-链修改查询

```
/*
    HDU 3966
    题意：给一棵树，并给定各个点权的值，然后有 3 种操作:

    I C1 C2 K: 把 C1 与 C2 的路径上的所有点权值加上 K

    D C1 C2 K：把 C1 与 C2 的路径上的所有点权值减去 K

    Q C：查询节点编号为 C 的权值

    线段树维护即可
*/
struct node
{
    int to,nxt;
}edg[MAX<<1];
int n,m,p,ecnt,dcnt;
int h[MAX],a[MAX],top[MAX],dep[MAX],son[MAX],fa[MAX],sz[MAX],dfn[MAX],who[MAX];
void add_edge(int u,int v)
{
    edg[++ecnt]=node{v,h[u]};
    h[u]=ecnt;
}
void dfs1(int u,int pre)
{
    fa[u]=pre;son[u]=0;sz[u]=1;
    for(int i=h[u];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;if(to==pre)continue;
        dep[to]=dep[u]+1;
        dfs1(to,u);
        sz[u]+=sz[to];
        if(sz[to]>sz[son[u]])
            son[u]=to;
    }
}
void dfs2(int u,int anc){
    top[u]=anc;dfn[u]=++dcnt;who[dcnt]=u;
    if(son[u])dfs2(son[u],anc);
    for(int i=h[u];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        if(to==fa[u]||to==son[u])continue;
        dfs2(to,to);
    }
}
```

```
int sum[MAX*4],lazy[MAX<<2];
void pushup(int x){
	sum[x]=sum[x<<1]+sum[x<<1|1];
}
void build(int x,int l,int r){
	lazy[x]=0;
	if (l==r){
		sum[x]=a[who[l]];
		return;
	}int mid=(l+r)/2;
	build(x<<1,l,mid);
	build(x<<1|1,mid+1,r);
	pushup(x);
}
void pushdown(int k,int l,int r)
{
	int mid=(l+r)/2;
	sum[k<<1]+=lazy[k]*(mid-
l+1);sum[k<<1|1]+=lazy[k]*(r-mid);
	lazy[k<<1]+=lazy[k];lazy[k<<1|1]+=lazy[k];
	lazy[k]=0;
}
void update(int x,int l,int r,int L,int R,int val){//negative
	if (l<=L&&R<=r){
		sum[x]+=val*(R-L+1);
		lazy[x]+=val;
		return;
	}
	if(lazy[x])pushdown(x,L,R);
	int mid=(L+R)/2;
	if (mid>=l) update(x<<1,l,r,L,mid,val);
	if (r>mid) update(x<<1|1,l,r,mid+1,R,val);
	pushup(x);
}
//int query(int x,int l,int r,int L,int R){
//	  if (!sum[x]) return 0;
//	if (l<=L&&R<=r) return sum[x];
//	int mid=(L+R)/2,ret=0;
//	if (mid>=l) ret+=query(x<<1,l,r,L,mid);
//	if (r>mid) ret+=query(x<<1|1,l,r,mid+1,R);
//	pushup(x);
//	return ret;
//}
int query(int x,int lo,int l,int r)
{
	if(l==r)return sum[x];
	if(lazy[x])pushdown(x,l,r);
	int mid=(l+r)/2,re;
	if(lo<=mid)re=query(x<<1,lo,l,mid);
	else re=query(x<<1|1,lo,mid+1,r);
	pushup(x);
	return re;
}
char opt[15];
int main()
{
	while(~scanf("%d%d%d",&n,&m,&p))
	{
		ecnt=dcnt=0;
		memset(h,0,sizeof(h));
		for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]);
		for(int u,v,i=1;i<n;i++){

read(u);read(v);add_edge(u,v);add_edge(v,u);
		}
		dfs1(1,0);dfs2(1,1);
		build(1,1,n);
		while(p--){
			scanf("%s",opt);
			if(opt[0]=='Q'){
				int w;read(w);w=dfn[w];
				printf("%d\n",query(1,w,1,n));
			}
			else{
				int u,v,val;
				read(u);read(v);read(val);
				if(opt[0]=='D')val=-val;
				while(top[u]!=top[v])
				{

if(dep[top[u]]<dep[top[v]])swap(u,v);

update(1,dfn[top[u]],dfn[u],1,n,val);
					u=fa[top[u]];
				}
				if(dep[u]>dep[v])swap(u,v);
				update(1,dfn[u],dfn[v],1,n,val);
			}
		}
	}
```

```
    return 0;
}
```

树剖-链最大值、修改、置负

```
struct node
{
    int to,nxt,val;
}edg[MAX<<1];

int t,ecnt,dcnt,n;
int
h[MAX],top[MAX],dep[MAX],son[MAX],fa[MAX],sz[MAX
],dfn[MAX],who[MAX];
int x[MAX],y[MAX],val[MAX],dis[MAX];
char opt[105];
void add_edge(int u,int v,int val)
{
    edg[++ecnt]=node{v,h[u],val};
    h[u]=ecnt;
}
void dfs1(int u,int pre)
{
    fa[u]=pre;son[u]=0;sz[u]=1;
    for(int i=h[u];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;if(to==pre)continue;
        dep[to]=dep[u]+1;
        dis[to]=edg[i].val;
        dfs1(to,u);
        sz[u]+=sz[to];
        if(sz[to]>sz[son[u]])
            son[u]=to;
    }
}
void dfs2(int u,int anc)
{
    top[u]=anc;dfn[u]=++dcnt;who[dcnt]=u;
    if(son[u])dfs2(son[u],anc);
    for(int i=h[u];i;i=edg[i].nxt)
    {
        int to=edg[i].to;
        if(to==fa[u]||to==son[u])continue;
        dfs2(to,to);
    }
}
inline int lca(int u,int v){
    while(top[u]!=top[v]){
        if(dep[top[u]]<dep[top[v]])swap(u,v);
        u=fa[top[u]];
    }
    return dep[u]<dep[v]?u:v;
}
int Max[MAX<<2],Min[MAX<<2],lazy[MAX<<2];
void push(int k)
{
    if(!lazy[k])return;
    lazy[k<<1]^=1;lazy[k<<1|1]^=1;lazy[k]=0;
    int da=Max[k<<1],xiao=Min[k<<1];
    Max[k<<1]=-xiao;Min[k<<1]=-da;
    da=Max[k<<1|1],xiao=Min[k<<1|1];
    Max[k<<1|1]=-xiao,Min[k<<1|1]=-da;
}
void build(int k,int l,int r)
{
    if(l==r){Max[k]=Min[k]=dis[who[l]];lazy[k]=0;return;}
    int mid=(l+r)/2;
    lazy[k]=0;
    build(k<<1,l,mid);build(k<<1|1,mid+1,r);
    Min[k]=min(Min[k<<1],Min[k<<1|1]);
    Max[k]=max(Max[k<<1],Max[k<<1|1]);
}
int query(int k,int l,int r,int ql,int qr)
{
    if(l>=ql&&r<=qr)return Max[k];
    int mid=(l+r)/2;
    int re=-INF;
    push(k);
    if(ql<=mid)re=max(re,query(k<<1,l,mid,ql,qr));
    if(qr>mid)re=max(re,query(k<<1|1,mid+1,r,ql,qr));
    return re;
}
int Query(int u,int v)
{
    int re=-INF;
    while(top[u]!=top[v])
    {
        re=max(re,query(1,2,n,dfn[top[u]],dfn[u]));
        u=fa[top[u]];
    }
    if(dfn[v]+1<=dfn[u])
```

```
        re=max(re,query(1,2,n,dfn[v]+1,dfn[u]));//同一条链上就是连续的!
    return re;
}
void change(int k,int lo,int l,int r)
{
    push(k);
    if(l==r){
        Max[k]=dis[who[l]];Min[k]=dis[who[l]];
        return;
    }
    int mid=(l+r)/2;
    if(lo<=mid)change(k<<1,lo,l,mid);
    else change(k<<1|1,lo,mid+1,r);
    Min[k]=min(Min[k<<1],Min[k<<1|1]);
    Max[k]=max(Max[k<<1],Max[k<<1|1]);
}
void update(int k,int l,int r,int ul,int ur)
{
    push(k);
    if(l>=ul&&r<=ur){
        lazy[k]^=1;
        int da=Max[k],xiao=Min[k];
        Max[k]=-xiao;Min[k]=-da;
        return ;
    }
    int mid=(l+r)/2;
    if(ul<=mid)update(k<<1,l,mid,ul,ur);
    if(ur>mid)update(k<<1|1,mid+1,r,ul,ur);
    Max[k]=max(Max[k<<1],Max[k<<1|1]);
    Min[k]=min(Min[k<<1],Min[k<<1|1]);
}
void Update(int u,int v)
{
    while(top[u]!=top[v])
    {
        if(dep[top[u]]<dep[top[v]])swap(u,v);
        update(1,2,n,dfn[top[u]],dfn[u]);
        u=fa[top[u]];
    }
    if(dfn[u]<dfn[v])swap(u,v);
    if(dfn[v]+1<=dfn[u])
        update(1,2,n,dfn[v]+1,dfn[u]);
}
int main()
{
    #ifdef debug
        freopen("in.txt","r",stdin);
        freopen("out.txt","w",stdout);
    #endif // debug
    read(t);
    while(t--){
        memset(h,0,sizeof(h));
        ecnt=dcnt=0;
        read(n);
        for(int i=1;i<n;i++){
            read(x[i]);read(y[i]);read(val[i]);
            add_edge(x[i],y[i],val[i]);
            add_edge(y[i],x[i],val[i]);
        }
        dfs1(1,0);dfs2(1,1);
        build(1,2,n);
        while(scanf("%s",opt)&&opt[0]!='D')
        {
            int u,v,c;read(u);read(v);
            if(opt[0]=='Q'){
                c=lca(u,v);
                #ifdef debug
                    printf("c=%d\n",c);
                #endif // debug

printf("%d\n",max(Query(u,c),Query(v,c)));
            }
            else if(opt[0]=='C'){
                u=(dfn[x[u]]>dfn[y[u]]?x[u]:y[u]);
                dis[u]=v;
                change(1,dfn[u],2,n);
            }
            else
                Update(u,v);

        }
    }
    return 0;
}
```

虚树

虚树 BZOJ2286

```
/*
```

```
	bzoj 2286
	题意：
	给定一棵树，每条边都有一定权值。若干次询问，每次给出 m 个点，要求去掉权值和最小的一些边，使得 1 与这些点不连通
*/
struct node
{
	node(){};
	node(int _to,int _dis,int _nxt):to(_to),dis(_dis),nxt(_nxt){};
	node(int _to,int _nxt):to(_to),nxt(_nxt){};
	int to,dis,nxt;
}edg[MAX<<1];
int n,ecnt,c,m,tot,top;
int x,y,z;
int h[MAX],hd[MAX];//val:根节点到某点路径上最短的边长
int dep[MAX],fa[MAX][20],dfn[MAX],que[MAX],stk[MAX];
ll f[MAX],val[MAX];
void add_edge(int u,int v,int cost)//原树的图
{
	edg[++ecnt]=node(v,cost,h[u]);
	h[u]=ecnt;
}
void dfs(int now,int pre)
{
	fa[now][0]=pre;dfn[now]=++ecnt;
	for(int i=1;i<=18;i++)fa[now][i]=fa[fa[now][i-1]][i-1];
	for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
	{
		int to=edg[i].to;
		if(to==pre)continue;

		val[to]=min(val[now],1LL*edg[i].dis);dep[to]=dep[now]+1;
		dfs(to,now);
	}
}
bool cmp(int a,int b){return dfn[a]<dfn[b];}
inline int lca(int x,int y)
{
	if(dep[x]<dep[y])swap(x,y);
	int cha=dep[x]-dep[y];
	for(int i=18;i>=0;i--)
		if(cha&(1<<i))x=fa[x][i];
	if(x==y)return x;
	for(int i=18;i>=0;i--)
		if(fa[x][i]!=fa[y][i])x=fa[x][i],y=fa[y][i];
	return x==y?x:fa[x][0];
}
inline void add(int u,int v){if(u==v)return ;edg[++ecnt]=node(v,hd[u]);hd[u]=ecnt;}
inline void dp(int x)
{
	ll tem=0;f[x]=val[x];
	for(int i=hd[x];i;i=edg[i].nxt){
		dp(edg[i].to);
		tem+=f[edg[i].to];
	}
	hd[x]=0;//退出时顺便清空
	if(!tem)f[x]=val[x];//叶子节点 val[x]就是将该点去掉的最小花费
	else if(tem<f[x])f[x]=tem;
}
void solve()//断绝根节点到 1 的路径？？
{
	read(m);
	for(int i=1;i<=m;i++)read(que[i]);
	sort(que+1,que+1+m,cmp);//按 dfs 序排序
	tot=0;que[++tot]=que[1];
	for(int i=2;i<=m;i++)if(lca(que[i],que[tot])!=que[tot])que[++tot]=que[i];
	//在下面的肯定不用计算 只要切断上部的即可
	top=0;stk[++top]=1;
	ecnt=0;//清空图
	int grand;//LCA
	for(int i=1;i<=tot;i++){
		grand=lca(stk[top],que[i]);
		while(1){
			if(dep[stk[top-1]]<=dep[grand]){
				add(grand,stk[top]);top--;
				if(stk[top]!=grand)stk[++top]=grand;
				break;
			}
			add(stk[top-1],stk[top]);--top;
		}
```

```
            if(stk[top]!=que[i])stk[++top]=que[i];// 在同一子树
        }
        --top;
        while(top)add(stk[top],stk[top+1]),--top;// 剩余的记得连上
        dp(1);
        printf("%lld\n",f[1]);
}
int main()
{
        read(n);
        for(int i=1;i<n;i++){
                read(x);read(y);read(z);
                add_edge(x,y,z);add_edge(y,x,z);
        }
        val[1]=INFF;ecnt=0;dep[1]=0;
        dfs(1,0);
        read(c);
        while(c--)solve();
        return 0;
}
```

虚树-例 2-BZOJ3572

```
struct node{
        int to,nxt;
}edg[MAX<<1],vtg[MAX<<1];
int n,q,ecnt,vcnt,dcnt,ccnt,top,tot,LCA;
int h[MAX],f[MAX],fa[MAX][20],siz[MAX],dfn[MAX],dep[MAX];
int bel[MAX],stk[MAX],a[MAX],b[MAX],g[MAX],c[MAX],ans[MAX];
void add_edge(int u,int v){//原树加边
        if(u==0||v==0||u==v)return;
        edg[++ecnt]=node{v,h[u]};
        h[u]=ecnt;
}
void addedge(int u,int v){//虚树加边
        if(u==0||v==0||u==v)return;
        vtg[++vcnt]=node{v,f[u]};
        f[u]=vcnt;
}
void dfs(int now,int pre){
        siz[now]=1;dfn[now]=++dcnt;
        for(int  i=1;i<=18;i++)fa[now][i]=fa[fa[now][i-1]][i-1];
        for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt){
                int to=edg[i].to;
                if(to==pre)continue;
                fa[to][0]=now;dep[to]=dep[now]+1;
                dfs(to,now);siz[now]+=siz[to];
        }
}
inline int lca(int u,int v){
        if(dep[u]<dep[v])swap(u,v);
        int cha=dep[u]-dep[v];
        for(int i=18;i>=0;i--)if(cha&(1<<i))u=fa[u][i];
        if(u==v)return u;
        for(int i=18;i>=0;i--)
                if(fa[u][i]!=fa[v][i])u=fa[u][i],v=fa[v][i];
        return fa[u][0];
}
inline int getdis(int x,int y){return dep[x]+dep[y]-2*dep[lca(x,y)]; }
//使用子树更新该点
void dfs1(int now,int pre){
        int d1,d2;g[now]=siz[now];
        c[++ccnt]=now;
        for(int i=f[now];i;i=vtg[i].nxt){
                int to=vtg[i].to;
                if(to==pre)continue;
                dfs1(to,now);
                if(bel[to]==0)continue;
                if(bel[now]==0){bel[now]=bel[to];continue;}

d1=getdis(bel[to],now);d2=getdis(bel[now],now);

if(d1<d2||(d1==d2&&bel[to]<bel[now]))bel[now]=bel[to];
        }
}
//使用父节点更新该点
void dfs2(int now,int pre){
        int d1,d2;
        for(int i=f[now];i;i=vtg[i].nxt){
                int to=vtg[i].to;
                if(to==pre)continue;
                if(bel[to]==0){bel[to]=bel[now];}
```

```
            else{

d1=getdis(bel[to],to);d2=getdis(bel[now],to);
                if(d1>d2||(d1==d2&&bel[to]>bel[now]))
                    bel[to]=bel[now];
            }
            dfs2(to,now);
        }
}
//处理每一条边
void solve(int pre,int now){
        int son=now,mid=now,d1,d2,nex;
        for(int i=18;i>=0;i--)
            if(dep[fa[son][i]]>dep[pre])son=fa[son][i];
        g[pre]-=siz[son];
        if(bel[pre]==bel[now]){
            ans[bel[pre]]+=siz[son]-siz[now];
            return;
        }
        for(int i=18;i>=0;i--){
            nex=fa[mid][i];
            if(dep[nex]<=dep[pre])continue;

d1=getdis(nex,bel[pre]);d2=getdis(nex,bel[now]);
            if(d1>d2||(d1==d2&&bel[now]<bel[pre]))
                mid=nex;
        }
        ans[bel[pre]]+=siz[son]-siz[mid];
        ans[bel[now]]+=siz[mid]-siz[now];
}
bool cmp(int x,int y){
        return dfn[x]<dfn[y];
}
//建虚树 前几行读入关键点
void build(){
        read(tot);
        for(int i=1;i<=tot;i++)read(a[i]),b[i]=a[i];
        for(int i=1;i<=tot;i++)bel[a[i]]=a[i];
        sort(a+1,a+1+tot,cmp);
        top=vcnt=0;
        if(bel[1]!=1)stk[++top]=1;
        for(int i=1;i<=tot;i++){
            if(top==0){stk[++top]=a[i];continue;}
            LCA=lca(stk[top],a[i]);
            while(1){
                if(dep[stk[top-1]]<=dep[LCA]){
                    addedge(LCA,stk[top]);--top;
                    if(stk[top]!=LCA)stk[++top]=LCA;
                    break;
                }
                addedge(stk[top-1],stk[top]);--top;
            }
            if(stk[top]!=a[i])stk[++top]=a[i];
        }
        while(top>1)addedge(stk[top-1],stk[top]),--top;
        top=ccnt=0;
        dfs1(1,0);dfs2(1,0);
        for(int i=1;i<=ccnt;i++)
            for(int j=f[c[i]];j;j=vtg[j].nxt)
                solve(c[i],vtg[j].to);
        for(int i=1;i<=ccnt;i++)
            ans[bel[c[i]]]+=g[c[i]];
        for(int i=1;i<=tot;i++)printf("%d ",ans[b[i]]);
        printf("\n");
        for(int i=1;i<=ccnt;i++)
            ans[c[i]]=f[c[i]]=g[c[i]]=bel[c[i]]=0;
}
int main()
{
        read(n);
        for(int u,v,i=1;i<n;++i){
            read(u);read(v);add_edge(u,v);add_edge(v,u);
        }
        dfs(1,0);
        read(q);
        while(q--)build();
        return 0;
}
```

树分块

```
/*
        树分块
        BZOJ 1086
        给出一棵树，求一种分块方案，使得每个块的大小size∈[B,3B]。
        每个块还要选一个省会，省会可以在块外，但是省会到块内任何一个点路径上的所有除了省会的点都必须属于这个块。n≤1000。
        注意：分完块以后每个块并不一定连通
```

```
*/

int n,b;
int tot;
struct node
{
	int to,nxt;
}edg[MAX];
int h[MAX],id[MAX],cap[MAX],cnt;
void add(int u,int v)
{
	edg[++tot]=node{v,h[u]};
	h[u]=tot;
}
int stk[MAX],top;
void dfs(int now,int fa,int bot)
{
	for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt)
	{
		int to=edg[i].to;
		if(to!=fa)
		{
			dfs(to,now,top);

			if(top-bot>=b)
			{
				cap[++cnt]=now;
				while(top!=bot)id[stk[top--]]=cnt;
			}
		}
	}
	stk[++top]=now;
}
int main()
{
	scanf("%d%d",&n,&b);
	if(n<b)return 0*printf("0\n");
	for(int i=1;i<n;i++)
	{
		int u,v;scanf("%d%d",&u,&v);add(u,v);add(v,u);
	}
	dfs(1,0,0);
	while(top)
		id[stk[top--]]=cnt;
	printf("%d\n",cnt);
	for(int i=1;i<=n;i++)printf("%d ",id[i]);printf("\n");
	for(int i=1;i<=cnt;i++)printf("%d ",cap[i]);
}
```

树分块莫队

```
int n,m;
int
bin[20],fa[MAX][20],bel[MAX],a[MAX],cnt[MAX],edg_cnt
,root,dep[MAX];
int dfn[MAX],dfs_id;
int sum;
int siz,block_cnt;
int stk[MAX],top;
bool vi[MAX];
struct node
{
	int to,nxt;
}edg[MAX<<1];
int head[MAX];
void add(int u,int v)
{
	edg[++edg_cnt]=node{v,head[u]};
	head[u]=edg_cnt;
}
void dfs(int now,int bot)
{
	dfn[now]=++dfs_id;
//	printf("now=%d\n",now);
//	system("pause");
	for(int
i=1;i<=16&&dep[now]>=bin[i];i++)fa[now][i]=fa[fa[no
w][i-1]][i-1];
	for(int i=head[now];i;i=edg[i].nxt)
	{
		int to=edg[i].to;
		if(to!=fa[now][0])
		{
			dep[to]=dep[now]+1;
			fa[to][0]=now;
			dfs(to,top);
			if(top-bot>=siz)
			{
				++block_cnt;
				while(top!=bot)
				{
```

```
                        bel[stk[top--]]=block_cnt;
                    }
                }
            }
        }
        stk[++top]=now;
}
int lca(int u,int v)
{
    if(dep[u]>dep[v])swap(u,v);
    int dif=dep[v]-dep[u];
    for(int i=0;bin[i]<=dif;i++)
        if(dif&bin[i])v=fa[v][i];
    for(int i=16;i>=0;i--)
        if(fa[u][i]!=fa[v][i])u=fa[u][i],v=fa[v][i];
    if(u!=v)return fa[v][0];
    return v;
}
int reverse(int u)
{
    if(!vi[u])vi[u]=1,++cnt[a[u]],sum+=(cnt[a[u]]==1);
    else vi[u]=0,--cnt[a[u]],sum-=(!cnt[a[u]]);
}
void solve(int u,int v)
{
    while(u!=v)
    {
//          printf("%d %d %d %d\n",u,v,dep[u],dep[v]);
        if(dep[u]>dep[v])reverse(u),u=fa[u][0];
        else reverse(v),v=fa[v][0];
    }
}
struct nod
{
    int u,v,a,b,id;
    bool operator<(const nod& z)const
    {
        if(bel[u]!=bel[z.u])return bel[u]<bel[z.u];
        else return dfn[v]<dfn[z.v];
    }
}qs[MAX];
int an[MAX];
/*
    BZOJ3757 求路径上不同颜色点个数 （a 被视为 b 除了 a=b=0）
*/
int main()
{
//      freopen("6.in","r",stdin);
//      freopen("out.txt","w",stdout);
    bin[0]=1;
    for(int i=1;i<20;i++)bin[i]=bin[i-1]<<1;
    scanf("%d%d",&n,&m);
    siz=sqrt(n);
    for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%d",&a[i]);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        int
u,v;scanf("%d%d",&u,&v);if(u&&v){add(u,v);add(v,u);}else
{if(!u)root=v;if(!v)root=u;}
    }
//      printf("root=%d\n",root);
//      system("pause");
    dfs(root,0);
//      printf("??\n");
    ++block_cnt;
    while(top)
        bel[stk[top--]]=block_cnt;
    for(int i=1;i<=m;i++)
    {

scanf("%d%d%d%d",&qs[i].u,&qs[i].v,&qs[i].a,&qs[i].b),qs[i]
.id=i;
        if(dfn[qs[i].u]>dfn[qs[i].v])swap(qs[i].u,qs[i].v);
    }
    sort(qs+1,qs+1+m);
    int t=lca(qs[1].u,qs[1].v);
//      printf("??\n");
    solve(qs[1].u,qs[1].v);
    reverse(t);
    an[qs[1].id]=sum-
(cnt[qs[1].a]&&cnt[qs[1].b]&&qs[1].a!=qs[1].b);
    reverse(t);
    for(int i=2;i<=m;i++)
    {
//          printf("i=%d\n",i);
        solve(qs[i-1].u,qs[i].u);
        solve(qs[i-1].v,qs[i].v);
        t=lca(qs[i].u,qs[i].v);
        reverse(t);
```

```
            an[qs[i].id]=sum-
(cnt[qs[i].a]&&cnt[qs[i].b]&&qs[i].a!=qs[i].b);
            reverse(t);
        }
        for(int i=1;i<=m;i++)
            printf("%d\n",an[i]);

}
```

字符串

后缀自动机

hiho 版

```
/*
    模版部分
*/
const int MAXL=2000005;
const int MAXCH=26;
char s[MAXL];
char CH='a';
int tot=0;//tot 为总结点数
int
maxlen[MAXL],minlen[MAXL],trans[MAXL][MAXCH],slin
k[MAXL];
/*
    一些非必要的功能属性
    若去掉 还需在函数中修改
*/
int ind[MAXL];//树中子节点个数
int edpts[MAXL];//结点的 endpos 个数
bool pre[MAXL];//是否为前缀所在结点
/*
    声明新结点的函数 未知初值的 值可用-1 代替 未
知初值的引用 可用 NULL 代替
*/
int new_state(int _maxlen,int _minlen,int *_trans,int _slink)
{
    maxlen[tot]=_maxlen;
    minlen[tot]=_minlen;
    for(int i=0;i<MAXCH;i++)
    {
        if(_trans==NULL)
            trans[tot][i]=-1;
        else trans[tot][i]=_trans[i];
    }
    slink[tot]=_slink;
    return tot++;
}
/*
    在 u 结点后加入字符 ch
*/
int add_char(char ch,int u)
{
    int c=ch-CH;
    /*
    建广义自动机即插完一个串后 回到 root（0）
    之后在这里下一行不做修改
    或加入（2018.8.3UPD:完全不用加这句话！）
    if(trans[u][c]!=-
1&&maxlen[trans[u][c]]==maxlen[u]+1)return
trans[u][c];
    若没有 if 成功则继续下述操作
    （以下是之前的错误认识：个人感觉加上判断会好
一些 不然会出现 maxlen<minlen 的奇怪的点（e.g. 加
入两次"a"这个串））
    */
    int z=new_state(maxlen[u]+1,-1,NULL,-1);
    pre[z]=true;//该结点必为包含原串前缀的结点
    int v=u;
    while(v!=-1&&trans[v][c]==-1)
    {
        trans[v][c]=z;
        v=slink[v];
    }
    if(v==-1)//最简单的情况，suffix-path(u->s)上都没
有对应字符 ch 的转移
    {
        minlen[z]=1;
        slink[z]=0;
        ++ind[0];
        return z;
    }
    int x=trans[v][c];
    if(maxlen[v]+1==maxlen[x])//较简单的情况，不用
拆分 x
    {
        minlen[z]=maxlen[x]+1;
        slink[z]=x;
        ++ind[x];
```

```
        return z;
    }
    int   y=new_state(maxlen[v]+1,-1,trans[x],slink[x]);//最复杂的情况，拆分 x
    slink[y]=slink[x];
    ind[y]+=2;
    minlen[x]=maxlen[y]+1;
    slink[x]=y;
    minlen[z]=maxlen[y]+1;
    slink[z]=y;
    int w=v;
    while(w!=-1&&trans[w][c]==x)//该部分字符串长度越来越短 一定都是要转移到 y 的 因为 y 保留的是 x 原本较短的部分
    {
        trans[w][c]=y;
        w=slink[w];
    }
    minlen[y]=maxlen[slink[y]]+1;
    return z;
}
/*
    拓扑排序
    获得每个结点的 endpos 个数
    该种 topsort 是从叶子结点往上的排序 下文有从根节点往下的例子
*/
void getEndPtCount() {
    queue<int> q;
    for(int i=1;i<tot;i++)
    if(!ind[i])
        q.push(i);
    while( !q.empty() ) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        if(pre[u])edpts[u]++;
        edpts[ slink[u]] += edpts[u];
        if( !--ind[slink[u]] ) q.push(slink[u]);
    }
}
/*
    另一种 toposort
*/
void toposort()
{
    for(int i=0;i<=n;i++)cnt[i]=0;
    for(int i=1;i<tot;i++)
        ++cnt[maxlen[i]];
    for(int i=1;i<=n;i++)
        cnt[i]+=cnt[i-1];
    for(int i=tot-1;i>0;--i)
        lo[cnt[maxlen[i]]--]=i;
}
/*
    使用示例:
    求解字符串中所有不同子串个数  hihocoder 1445
    & 求解字符串中每个长度子串出现最多的次数 hihocoder 1449
*/
int anlen[MAXL];
int n;
ll an;
int main()
{
    /*
        初始化部分
    */
    int pres=new_state(0,0,NULL,-1);
//    memset(trans,-1,sizeof(trans));
//    memset(slink,-1,sizeof(slink));
    /*
        通用过程代码部分
    */
    scanf("%s",s);
//    tot=1;//tot=0 的表示空串的结点 故需先设 tot=1 使得新结点从 1 开始编号
    n=strlen(s);
    for(int i=0;i<n;i++)
        pres=add_char(s[i],pres);//逐个加入结点

    /*
        求解字符串中所有不同子串个数
    */
    for(int i=1;i<tot;i++)//所有结点下标范围为 [0,tot) 0 为空串结点 故从 1 开始计算
        an+=1LL*maxlen[i]-minlen[i]+1;
    printf("%lld\n",an);

    /*
        求解字符串中每个长度子串出现最多的次数
```

```
    */
    getEndPtCount();
    for(int i=1;i<tot;i++)//所有结点下标范围为 [0,tot)
0 为空串结点 故从 1 开始计算

anlen[maxlen[i]]=max(anlen[maxlen[i]],edpts[i]);
    for(int i=n;i>=1;i--)
        anlen[i]=max(anlen[i],anlen[i+1]);
    for(int i=1;i<=n;i++)
        printf("%d\n",anlen[i]);
}




/*
    根节点向下 topsort 的例子
    hihocoder 1457
*/
const int MAXL=2000005;
const int MAXCH=11;
string s,tem;
char CH='0';
int tot=0;//tot 为总结点数
int
maxlen[MAXL],minlen[MAXL],trans[MAXL][MAXCH],slin
k[MAXL];
/*
    一些非必要的功能属性
    若去掉 还需在函数中修改
*/
int ind[MAXL];//树中子节点个数
int edpts[MAXL];//结点的 endpos 个数
bool pre[MAXL];//是否为前缀所在结点
/*
    声明新结点的函数 未知初值的 值可用-1 代替 未
知初值的引用 可用 NULL 代替
*/
int new_state(int _maxlen,int _minlen,int *_trans,int _slink)
{
    maxlen[tot]=_maxlen;
    minlen[tot]=_minlen;
    for(int i=0;i<MAXCH;i++)
    {
        if(_trans==NULL)
            trans[tot][i]=-1;
        else trans[tot][i]=_trans[i];
    }
    slink[tot]=_slink;
    return tot++;
}
/*
    在 u 结点后加入字符 ch
*/
int add_char(char ch,int u)
{
    int c=ch-CH;
    int z=new_state(maxlen[u]+1,-1,NULL,-1);
    pre[z]=true;//该结点必为包含原串前缀的结点
    int v=u;
    while(v!=-1&&trans[v][c]==-1)
    {
        trans[v][c]=z;
        v=slink[v];
    }
    if(v==-1)//最简单的情况，suffix-path(u->s)上都没
有对应字符 ch 的转移
    {
        minlen[z]=1;
        slink[z]=0;
        ++ind[0];
        return z;
    }
    int x=trans[v][c];
    if(maxlen[v]+1==maxlen[x])//较简单的情况，不用
拆分 x
    {
        minlen[z]=maxlen[x]+1;
        slink[z]=x;
        ++ind[x];
        return z;
    }
    int  y=new_state(maxlen[v]+1,-1,trans[x],slink[x]);//
最复杂的情况，拆分 x
    slink[y]=slink[x];
    ind[y]+=2;
    minlen[x]=maxlen[y]+1;
    slink[x]=y;
```

```
    minlen[z]=maxlen[y]+1;
    slink[z]=y;
    int w=v;
    while(w!=-1&&trans[w][c]==x)//该部分字符串长度越来越短 一定都是要转移到 y 的 因为 y 保留的是 x 原本较短的部分
    {
        trans[w][c]=y;
        w=slink[w];
    }
    minlen[y]=maxlen[slink[y]]+1;
    return z;
}
/*
    拓扑排序
    获得每个结点的 endpos 个数
*/
void getEndPtCount() {
    queue<int> q;
    for(int i=1;i<tot;i++)
    if(!ind[i])
        q.push(i);
    while( !q.empty() ) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        if(pre[u])edpts[u]++;
        edpts[ slink[u]] += edpts[u];
        if( !--ind[slink[u]] ) q.push(slink[u]);
    }
}
/*
    使用示例:
    求解字符串中所有不同子串个数
    & 求解字符串中每个长度子串出现最多的次数
*/

int cnt[MAXL];
ll val_num[MAXL];//到每个结点 valid 的个数
ll sum[MAXL];//每个结点的和
void init_dag()
{
    for(int i=0;i<=tot;i++)
        for(int j=0;j<11;j++)
            if(trans[i][j]>0)
                ++cnt[trans[i][j]];
}
void topsort()
{
    queue<int>q;
    for(int i=0;i<tot;i++)
    {
        if(cnt[i]==0)
        {
            q.push(i);
            val_num[i]=1;
            sum[i]=0;
        }
    }
    while(!q.empty())
    {
        int now=q.front();
        q.pop();

        for(int k=0;k<11;k++)
        {
            if(trans[now][k]>0)
            {
                int j=trans[now][k];
                if(k<10)
                {

val_num[j]=(val_num[j]+val_num[now])%MOD;

sum[j]=(sum[j]+sum[now]*10LL%MOD+k*val_num[now]%MOD)%MOD;
                }
                --cnt[j];
                if(!cnt[j])q.push(j);
            }
        }
    }
}
int n;
ll an;
int main()
{
    /*
        初始化部分
    */
    int pres=new_state(0,0,NULL,-1);
```

```
    /*
        通用过程代码部分
    */
    cin>>n;
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        cin>>tem;
        if(i)s+=":";
        s+=tem;
    }
    n=s.length();

    for(int i=0;i<n;i++)
        pres=add_char(s[i],pres);//逐个加入结点
    init_dag();
    topsort();

    /*
        求解字符串中所有不同子串个数
    */
    for(int i=1;i<tot;i++)
        an=(an+sum[i])%MOD;
    printf("%lld\n",an);

}
```

SAM(hiho-struct 版-无说明)

```
const int MAXL=2e6+5;
const int MAXCH=26;
const char CH='a';
struct SAM
{
    int maxlen[MAXL],minlen[MAXL],trans[MAXL][MAXCH],slink[MAXL];
    int ind[MAXL];//树中子节点个数
    int edpts[MAXL];//结点的 endpos 个数
    bool pre[MAXL];//是否为前缀所在结点
    int tot;
    int new_state(int _maxlen,int _minlen,int *_trans,int _slink)
    {
        maxlen[tot]=_maxlen;
        minlen[tot]=_minlen;
        for(int i=0;i<MAXCH;i++)
        {
            if(_trans==NULL)
                trans[tot][i]=-1;
            else trans[tot][i]=_trans[i];
        }
        slink[tot]=_slink;
        return tot++;
    }
    int add_char(char ch,int u)
    {

        int c=ch-CH;
        /*
            建广义自动机即插完一个串后 回到 root (0)
            在这里下一行不做修改
            或加入(2018.8.3UPD:完全不用加这句话!)
            if(trans[u][c]!=-1&&maxlen[trans[u][c]]==maxlen[u]+1)return trans[u][c];
            若没有 if 成功则继续下述操作
        */
        int z=new_state(maxlen[u]+1,-1,NULL,-1);
        pre[z]=true;//该结点必为包含原串前缀的结点
        int v=u;
        while(v!=-1&&trans[v][c]==-1)
        {
            trans[v][c]=z;
            v=slink[v];
        }
        if(v==-1)//最简单的情况，suffix-path(u->s)上都没有对应字符 ch 的转移
        {
            minlen[z]=1;
            slink[z]=0;
            ++ind[0];
            return z;
        }
        int x=trans[v][c];
        if(maxlen[v]+1==maxlen[x])//较简单的情况，不用拆分 x
        {
            minlen[z]=maxlen[x]+1;
            slink[z]=x;
```

```
            ++ind[x];
            return z;
        }
        int y=new_state(maxlen[v]+1,-1,trans[x],slink[x]);//最复杂的情况，拆分 x
        ind[y]+=2;
        minlen[x]=maxlen[y]+1;
        slink[x]=y;
        minlen[z]=maxlen[y]+1;
        slink[z]=y;
        int w=v;
        while(w!=-1&&trans[w][c]==x)// 该部分字符串长度越来越短 一定都是要转移到 y 的 因为 y 保留的是 x 原本较短的部分
        {
            trans[w][c]=y;
            w=slink[w];
        }
        minlen[y]=maxlen[slink[y]]+1;
        return z;
    }
};
```

后缀自动机-例 2（BZOJ3473）-onenote

```
int n,k;

const int MAXL=2e6+5;
string s[MAXL];
const int MAXCH=26;
const char CH='a';
struct SAM{
    int maxlen[MAXL],minlen[MAXL],trans[MAXL][MAXCH],slink[MAXL];
    int c[MAXL],a[MAXL];
    int last[MAXL],cnt[MAXL];
    ll dp[MAXL];
    int tot;
    int new_state(int _maxlen,int _minlen,int *_trans,int _slink){
        maxlen[tot]=_maxlen;
        minlen[tot]=_minlen;
        for(int i=0;i<MAXCH;i++){
            if(_trans==NULL)trans[tot][i]=-1;
            else trans[tot][i]=_trans[i];
        }
        slink[tot]=_slink;
        return tot++;
    }
    int add_char(char ch,int u){
        int c=ch-CH;
        int z=new_state(maxlen[u]+1,-1,NULL,-1);
        int v=u;
        while(v!=-1&&trans[v][c]==-1){
            trans[v][c]=z;
            v=slink[v];
        }
        if(v==-1){
            minlen[z]=1;
            slink[z]=0;
            return z;
        }
        int x=trans[v][c];
        if(maxlen[v]+1==maxlen[x]){
            minlen[z]=maxlen[x]+1;
            slink[z]=x;
            return z;
        }
        int y=new_state(maxlen[v]+1,-1,trans[x],slink[x]);
        minlen[x]=maxlen[y]+1;
        slink[x]=y;
        minlen[z]=maxlen[y]+1;
        slink[z]=y;
        int w=v;
        while(w!=-1&&trans[w][c]==x){
            trans[w][c]=y;
            w=slink[w];
        }
        minlen[y]=maxlen[slink[y]]+1;
        return z;
    }
    void toposort(){
        for(int i=1;i<tot;++i)++c[maxlen[i]];
        for(int i=1;i<tot;i++)c[i]+=c[i-1];
        for(int i=tot-1;i>=1;--i)a[c[maxlen[i]]--]=i;
    }
    void solve(){
        ll ans=0;int u;
        for(int i=1;i<=n;++i){
```

```
                u=0;
                for(int j=0;j<s[i].size();j++){
                    u=trans[u][s[i][j]-CH];
                    int now=u;
                    while(now!=-1&&last[now]!=i)

++cnt[now],last[now]=i,now=slink[now];
                }
            }
            toposort();
            cnt[0]=0;
            for(int i=1;i<tot;++i)

u=a[i],dp[u]=dp[slink[u]]+(cnt[u]>=k?maxlen[u]-
minlen[u]+1:0);
            for(int i=1;i<=n;++i){
                u=0;ans=0;
                for(int j=0;j<s[i].size();j++){
                    u=trans[u][s[i][j]-CH];
                    ans+=dp[u];
                }
                printf("%lld ",ans);
            }
        }
}sam;
int main()
{
    read(n);read(k);
    int pres=sam.new_state(0,0,NULL,-1);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cin>>s[i];
        pres=0;
        for(int j=0;j<s[i].size();j++)
            pres=sam.add_char(s[i][j],pres);
    }
    sam.solve();
    return 0;
}
```

DP

dp 套 dp

例1- HDU5548-麻将胡牌情况数

```
int t,n,m,tot;
int
id[(1<<18)|5],nxt[1008][8],val[1008],dp[207][207][78];//
dp[i][j][k] 看到第 i 种牌时 已选 j 张,状态集为 k
queue<int>que;
inline int encode(int n_2,int n_1,int have2){//start from n-
2 / n-1 /if have a pair
    int re=0;
    re=re*3+n_2;
    re=re*3+n_1;
    re=re*2+have2;
    return re;
}
inline void decode(int v,int &n_2,int &n_1,int &have2){
    have2=v%2;v>>=1;
    n_1=v%3;v/=3;
    n_2=v;
}
int get_nxt_st(int st,int cnt){//得到 从 st 该位选 cnt 个
能转移到的状态
    int nxt_st=0;
    int n_2,n_1,have2;
    int x_2,x_1,xave2;
    for(int n=0;n<18;n++){
        if(st&(1<<n)){
            decode(n,n_2,n_1,have2);
            x_2=n_1;x_1=cnt-n_2-n_1;xave2=have2;
            if(x_1>=0){
                int new_st=encode(x_2,x_1%3,xave2);
                nxt_st|=(1<<new_st);
                if(!have2&&x_1>=2){
                    new_st=encode(x_2,x_1-2,1);
                    nxt_st|=(1<<new_st);
                }
            }
        }
    }
    return nxt_st;
}
void initDP(){//初始化状态转移
    que.push(1);id[0]=++tot;
    while(!que.empty()){
        int st=que.front();que.pop();
        for(int cnt=0;cnt<=4;cnt++){
            int nxt_st=get_nxt_st(st,cnt);
```

```
if(!id[nxt_st])id[nxt_st]=++tot,val[tot]=nxt_st,que.push(nxt_st);
                nxt[id[st]][cnt]=id[nxt_st];
            }
        }
}
int solve(){
    memset(dp,0,sizeof(dp));
    dp[0][0][1<<id[0]]=1;//0 0 0 的状态 encode 结果就是 0  所以 id[0]
    for(int i=0;i<=n+2;i++){
        int lim=(i<n?4:0);//该位最多能取的数量
        for(int j=0;j<=m;j++)//已取的数量
            for(int t=1;t<=tot;t++)//所有的可能状态
                if(dp[i][j][t])
                    for(int k=0;k<=lim;k++)//枚举这一位具体取多少

addi(dp[i+1][j+k][nxt[t][k]],dp[i][j][t] );
    }
    int re=0;
    for(int i=1;i<=tot;i++)
        if(val[i]&2)//出现了对子
            addi(re,dp[n+3][m][i]);
    return re;
}
int main(){
    initDP();
//      cout<<tot<<endl;//总共只有 68 种状态
    read(t);
    for(int Case=1;Case<=t;Case++){
        read(n);read(m);
        printf("Case #%d: %d\n",Case,solve());
    }
    return 0;
}
```

例2-　HDU4899-LCS 为 m 的序列个数

```
int n,m,t;
char a[20],c[10]="AGCT";
int trans[(1<<15)|5][4],cnt[1<<15|5],dp[2][1<<15|5],ans[20],d[20],pre[20];

void init(){
    for(int i=0;i<(1<<n);i++){
        if(i)cnt[i]=cnt[i^(i&-i)]+1;
        for(int j=0;j<n;j++)d[j+1]=d[j]+(bool)(i&(1<<j));
        for(int k=0;k<4;k++){
            for(int j=1;j<=n;j++){
                pre[j]=max(pre[j-1],d[j]);
                if(c[k]==a[j])pre[j]=max(pre[j],d[j-1]+1);
            }
            trans[i][k]=0;
            for(int j=0;j<n;j++)if(pre[j+1]-pre[j])trans[i][k]|=(1<<j);
        }
    }
}
int main(){
    read(t);
    while(t--){
        scanf("%s",a+1);n=strlen(a+1);
        init();
        read(m);

memset(ans,0,sizeof(ans));memset(dp,0,sizeof(dp));
        dp[0][0]=1;int p=0;
        for(int i=1;i<=m;i++,p^=1){
            memset(dp[p^1],0,sizeof(dp[p^1]));
            for(int j=0;j<(1<<n);j++)
                for(int k=0;k<4;k++)
                    addi(dp[p^1][trans[j][k]],dp[p][j]);
        }
        for(int i=0;i<(1<<n);i++)
            addi(ans[cnt[i]],dp[p][i]);
        for(int i=0;i<=n;i++)
            printf("%d\n",ans[i]);
    }
    return 0;
}
```

决策单调性

决策单调性-例 1-BZOJ1010

```
int n,L;
int l[MAX],stk[MAX],st,en;
ll a[MAX],sum[MAX],dp[MAX];
```

```
//由 j 点 dp 更新 i 点
ll turn(int j,int i){
	ll x=i-j+sum[i]-sum[j]-1;
	return dp[j]+(x-L)*(x-L);
}
//确定某点 x 应该在哪个决策区间中
int find(int x)
{
	int left=st,right=en,mid,re=1;
	while(left<=right){
		mid=(left+right)/2;
		if(l[stk[mid]]==x)return mid;
		if(l[stk[mid]]<x)re=mid,left=mid+1;
		else right=mid-1;
	}
	return re;
}
int main()
{
	read(n);read(L);
	for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]),sum[i]=sum[i-1]+a[i];
	st=en=1;l[1]=1;
	for(int i=1;i<=n;i++){
		dp[i]=turn(stk[find(i)],i);//由对应的决策点确定该点
		while(st<=en&& l[stk[en]]>i &&turn(i,l[stk[en]])<turn(stk[en],l[stk[en]]) )--en;
//		if(!en)//栈中已没有确定的决策区间 整个区间均为此 可以去掉
//		{
//			stk[++en]=i;l[i]=i;continue;
//		}
		//不然二分最后一个决策 寻找更新的位置
		int left=max(i+1,l[stk[en]]),right=n;
		while(left<=right){
			int mid=(left+right)/2;

if(turn(i,mid)>turn(stk[en],mid))left=mid+1;
			else right=mid-1;
		}
		//如果 i 整体比前一个决策差
		if(turn(i,left)>turn(stk[en],left))continue;
		stk[++en]=i,l[i]=left;
	}
	printf("%lld\n",dp[n]);
	return 0;
}
```

树形依赖 DP

例1- P2014-树上过根的最大权连通块背包

```
#define SZ 5004
int n,m,dcnt,ecnt;
int h[SZ],siz[SZ],dp[SZ][SZ],fa[SZ],w[SZ],v[SZ];
int dfn[SZ],dwho[SZ];//dfsÐòµÄ±àºÅ
struct node{
	int to,nxt;
	node(){};
	node(int _to,int _nxt):to(_to),nxt(_nxt){};
}edg[SZ<<1];
void add_edge(int who){
	int f=fa[who];
//	if(!f)return;
	edg[++ecnt]=node(who,h[f]);
	h[f]=ecnt;
}
void dfs(int now){
	siz[now]=1;dfn[now]=++dcnt;dwho[dcnt]=now;
	for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt){
		int to=edg[i].to;
		dfs(to);siz[now]+=siz[to];
	}
}
int main(){
	read(n);read(m);
	for(int i=1;i<=n;i++)read(fa[i]),read(v[i]),w[i]=1,add_edge(i);
	dfs(0);
	for(int i=0;i<=m;i++)dp[dcnt+1][i]=dp[dcnt+2][i]=-1000000000;
	dp[dcnt+1][0]=0;
	for(int i=dcnt;i>=1;i--){
		int lo=dwho[i];
		for(int j=0;j<=m;j++){
			if(j<w[lo])dp[i][j]=max(dp[i+siz[lo]][j],0);
			else dp[i][j]=max(max(dp[i+siz[lo]][j],dp[i+1][j-w[lo]]+v[lo]),0);
		}
```

```
    }
    printf("%d\n",dp[1][m]);
    return 0;
}
```

例2-　树上过根的最大权连通块背包-原版

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <memory.h>
using namespace std;
//w=weight v=value
#define SZ 5004
int n,m,fa[SZ],w[SZ],v[SZ],fc[SZ],nc[SZ],siz[SZ],dp[SZ][SZ];
int st[SZ],t=0,dl[SZ];
void ass(int x) {int f=fa[x]; if(f) nc[x]=fc[f], fc[f]=x;}
void dfs(int p)
{
    siz[p]=1; st[p]=++t; dl[t]=p;
    for(int c=fc[p];c;c=nc[c])
    {
        dfs(c); siz[p]+=siz[c];
    }
}
#define FO(x) {freopen(#x".in","r",stdin);
freopen(#x".out","w",stdout);}
int main()
{
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%d%d%d",fa+i,w+i,v+i),
ass(i);
    dfs(1);
    for(int p=0;p<=m;p++) dp[n+1][p]=dp[n+2][p]=-
1000000000;
    dp[n+1][0]=0; //原来这里忘了写
    for(int i=n;i>=1;i--)
    {
        int x=dl[i];
        for(int p=0;p<=m;p++)
        {
            if(p<w[x]) dp[i][p]=max(dp[i+siz[x]][p],0);
            else
dp[i][p]=max(max(dp[i+siz[x]][p],dp[i+1][p-
w[x]]+v[x]),0);
        }
    }
    printf("%d\n",dp[1][m]);
}
```

例3-　树上过根的最大权连通块背包-复刻版

```
#define SZ 5004
int n,m,dcnt,ecnt;
int h[SZ],siz[SZ],dp[SZ][SZ],fa[SZ],w[SZ],v[SZ];
int dfn[SZ],dwho[SZ];//dfsÐòµÄ±à°Å
struct node{
    int to,nxt;
    node(){};
    node(int _to,int _nxt):to(_to),nxt(_nxt){};
}edg[SZ<<1];
void add_edge(int who){
    int f=fa[who];if(!f)return;
    edg[++ecnt]=node(who,h[f]);
    h[f]=ecnt;
}
void dfs(int now){
    siz[now]=1;dfn[now]=++dcnt;dwho[dcnt]=now;
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        dfs(to);siz[now]+=siz[to];
    }
}
int main(){
    read(n);read(m);
    for(int
i=1;i<=n;i++)read(fa[i]),read(w[i]),read(v[i]),add_edge(i);
    dfs(1);
    for(int i=0;i<=m;i++)dp[n+1][i]=dp[n+2][i]=-
1000000000;
    dp[n+1][0]=0;
    for(int i=n;i>=1;i--){
        int lo=dwho[i];
        for(int j=0;j<=m;j++){
            if(j<w[lo])dp[i][j]=max(dp[i+siz[lo]][j],0);
            else
dp[i][j]=max(max(dp[i+siz[lo]][j],dp[i+1][j-
w[lo]]+v[lo]),0);
        }
    }
    printf("%d\n",dp[1][m]);
    return 0;
```

```
}
```

斯坦纳树

例1- BZOJ2595-必须包含若干点的最小曼哈顿生成树

```
int n,m,k;
int a[10][10],f[10][10][1<<10];
struct tup{
    int first,second,thd;
    tup(int _fst=0,int _sec=0,int _thd=0):first(_fst),second(_sec),thd(_thd){}
}pre[10][10][1<<10],zero;
queue<pii>que;
int vis[10][10];
void spfa(int sta){
    const static int dx[4]={1,-1,0,0},dy[4]={0,0,1,-1};
    while(!que.empty()){
        pii u=que.front();que.pop();vis[u.first][u.second]=0;
        for(int k=0;k<4;k++){
            int x=dx[k]+u.first,y=dy[k]+u.second;
            if(x<0||y<0||x>=n||y>=m)continue;
            if(f[x][y][sta]>f[u.first][u.second][sta]+a[x][y]){
                f[x][y][sta]=f[u.first][u.second][sta]+a[x][y];
                pre[x][y][sta]=tup(u.first,u.second,sta);
                if(!vis[x][y])que.push(mp(x,y)),vis[x][y]=1;
            }
        }
    }
}
void dfs(int i,int j,int sta){
    if(i==INF||pre[i][j][sta].thd==0)return;
    vis[i][j]=1;tup tp=pre[i][j][sta];
    dfs(tp.first,tp.second,tp.thd);
    if(tp.first==i&&tp.second==j)dfs(i,j,sta-tp.thd);
}
int main(){
    read(n);read(m);
    memset(f,0x3f,sizeof(f));
//      fill(&f[0][0][0],&f[10][10][1<<10],INF);
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<m;j++){
            scanf("%d",&a[i][j]);
            if(!a[i][j])f[i][j][1<<(k++)]=0;
        }
    for(int sta=1;sta<(1<<k);sta++){
        for(int i=0;i<n;i++)
            for(int j=0;j<m;j++){
                for(int s=sta&(sta-1);s;s=sta&(s-1)){
                    if(f[i][j][sta]>f[i][j][s]+f[i][j][sta-s]-a[i][j]){
                        f[i][j][sta]=f[i][j][s]+f[i][j][sta-s]-a[i][j];
                        pre[i][j][sta]=tup(i,j,s);
                    }
                }
                if(f[i][j][sta]!=INF){
                    que.push(mp(i,j));vis[i][j]=1;
                }
            }
        spfa(sta);
    }
    int x,y;
    for(int i=0;i<n;i++)for(int j=0;j<m;j++)if(!a[i][j]){x=i;y=j;break;}
    printf("%d\n",f[x][y][(1<<k)-1]);
    dfs(x,y,(1<<k)-1);
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<m;j++){
            if(!a[i][j])putchar('x');//景点
            else if(vis[i][j])putchar('o');//有人
            else putchar('_');
            if(j==m-1)puts("");
        }
    return 0;
}
```

例2- BZOJ4774-给定图要求选边使得 i 与 n-i+1 连通(i≤d)

```
struct node{
    int to,nxt,weight;
    node(){};
    node(int _to,int _nxt,int _weight):to(_to),nxt(_nxt),weight(_weight){};
}edg[MAX<<1];
int n,m,d,ecnt,tot;
```

```
int h[MAX],dp[257][MAX],tp[20];
void add_edge(int u,int v,int w){
    edg[++ecnt]=node(v,h[u],w);
    h[u]=ecnt;
}
struct qs{
    int lo,val;
    qs(){};
    qs(int _lo,int _val):lo(_lo),val(_val){}
    bool operator<(const qs& z)const{return val>z.val;}
};
priority_queue<qs>que;
int main(){
    read(n);read(m);read(d);
    for(int u,v,w,i=1;i<=m;i++){
        read(u);read(v);read(w);
        add_edge(u,v,w);add_edge(v,u,w);
    }
    tot=(1<<d);
    memset(dp,0x3f,sizeof(dp));
    memset(tp,0x3f,sizeof(tp));
    for(int i=1;i<=d;i++)
        dp[1<<i-1][i]=dp[1<<i-1+d][n+1-i]=0;
    for(int i=1;i<tot*tot;i++){
        int *tem=dp[i];
        for(int j=(i-1)&i;j>(i^j);j=(j-1)&i){//中间的条件永远取不到等号
            for(int k=1,*l1=dp[j],*l2=dp[i^j];k<=n;++k)
                tem[k]=min(tem[k],l1[k]+l2[k]);
        }
        for(int k=1;k<=n;k++)
            if(tem[k]<INF)que.push(qs(k,tem[k]));
        while(!que.empty()){
            qs now=que.top();que.pop();
            int pos=now.lo;
            if(now.val>tem[pos])continue;
            for(int j=h[pos];j;j=edg[j].nxt){
                int to=edg[j].to,td=tem[pos]+edg[j].weight;

if(tem[to]>td)tem[to]=td,que.push(qs(to,tem[to]));
            }
        }
        if((i&(tot-1))==(i>>d)){
            int lin=INF;
            for(int j=1;j<=n;j++)lin=min(lin,tem[j]);
            tp[i>>d]=lin;
        }
    }
    for(int i=1;i<tot;i++)
        for(int j=(i-1)&i;j>(i^j);j=(j-1)&i)
            tp[i]=min(tp[i],tp[j]+tp[i^j]);
    printf("%d\n",tp[tot-1]!=INF?tp[tot-1]:-1);
    return 0;
}
```

四边形不等式

四边形不等式(HDU3516)

```
struct point{
    int x,y;
}a[MAX];
int dis(point a,point b,point c,point d){
    return (c.x-a.x)+(b.y-d.y);
}
int n;
int dp[MAX][MAX],s[MAX][MAX];
int main()
{
    while(~scanf("%d",&n)){
        for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i].x),read(a[i].y);
        for(int i=1;i<=n;i++)s[i][i]=i;
        memset(dp,0,sizeof(dp));
        for(int len=2;len<=n;len++)
            for(int st=1;st+len-1<=n;st++){
                int en=st+len-1;
                dp[st][en]=INF;
                for(int i=s[st][en-1];i<=s[st+1][en]&&i<en;i++){

if(dp[st][i]+dp[i+1][en]+dis(a[st],a[i],a[i+1],a[en])<dp[st][en]){

dp[st][en]=dp[st][i]+dp[i+1][en]+dis(a[st],a[i],a[i+1],a[en]);
//                    if(i==en)continue;
//                    cout<<st<<" "<<i<<" "<<i+1<<" "<<en<<endl;
                    s[st][en]=i;
```

```
                                }
                            }
                        }
                printf("%d\n",dp[1][n]);
        }
        return 0;
}
```

四边形不等式-例 2-POJ1160

```
int n,m;
int dp[32][303];
int a[305];
int w[303][303];
int s[32][303];
int getw(int i,int j){
        if(i>=j)return 0;
        if(w[i][j])return w[i][j];
        return w[i][j]=a[j]-a[i]+getw(i+1,j-1);
}
int main()
{
        while(~scanf("%d%d",&n,&m)){
                for(int i=1;i<=n;i++)read(a[i]);
                memset(dp,0x3f,sizeof(dp));
                for(int i=1;i<=n;i++)
                        dp[1][i]=getw(1,i),s[1][i]=1;//此 s 实际不是最后位置 而是用于循环中确定范围
                for(int i=2;i<=m;++i){
                        s[i][n+1]=n;//尽管无意义 但因为循环中出现 s[i][j+1] 为划定范围 加上此
                        for(int j=n;j>i;--j){
                                for(int k=s[i-1][j];k<=s[i][j+1];++k)
                                {
                                        if(dp[i-1][k]+getw(k+1,j)<dp[i][j]){
                                                dp[i][j]=dp[i-1][k]+getw(k+1,j);
                                                s[i][j]=k;
                                        }
                                }
                        }
                }
                printf("%d\n",dp[m][n]);
        }

        return 0;
}
```

斜率优化

斜率优化-例 1-HDU2829

```
int n,m;
int a[MAX],dp[MAX][2],cost[MAX],sum[MAX],q[MAX],st,en;
int now;
int getx(int i){return sum[i];}
int gety(int i){return dp[i][now^1]-cost[i]+sum[i]*sum[i];}
int main()
{
        now=0;
        while(scanf("%d%d",&n,&m)&&n)
        {
                for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%d",&a[i]),sum[i]=sum[i-1]+a[i];
                for(int i=1;i<=n;i++)cost[i]=cost[i-1]+sum[i-1]*a[i];
//                st=en=1;q[st]=0;
                for(int i=1;i<=n;i++)dp[i][now]=cost[i];
                for(int i=1;i<=m;i++)
                {
                        now^=1;
                        st=en=1;q[st]=0;
                        for(int j=1;j<=n;j++)
                        {
                                while(st<en&&(gety(q[st+1])-gety(q[st]))<=sum[j]*(getx(q[st+1])-getx(q[st]) ))++st;

dp[j][now]=dp[q[st]][now^1]+cost[j]-cost[q[st]]-sum[q[st]]*(sum[j]-sum[q[st]]);
//                                printf("%d!\n",dp[j][now]);
                                while(st<en&&( gety(j) -gety(q[en]) )*( getx(q[en])-getx(q[en-1]) )<=( gety(q[en])-gety(q[en-1]) ) *( getx(j)-getx(q[en]) ) )--en;
                                q[++en]=j;
                        }
                }
                printf("%d\n",dp[n][now]);
        }
        return 0;
}
```

斜率优化-例 2-POJ1180

```
int n,s,st,en;
int que[MAX],f[MAX],t[MAX];
ll sumt[MAX],sumf[MAX],dp[MAX];
int main()
{
    while(~scanf("%d%d",&n,&s)){
        for(int i=1;i<=n;++i){read(t[i]);read(f[i]);}
        sumt[n+1]=sumf[n+1]=dp[n+1]=0;
        for(int i=n;i>=1;--i){
            sumt[i]=sumt[i+1]+t[i];
            sumf[i]=sumf[i+1]+f[i];
        }
        st=1,en=1;que[st]=n+1;
        for(int i=n;i>=1;--i){
            while(st<en&& (dp[que[st+1]]-dp[que[st]])<=sumf[i]*(sumt[que[st+1]]-sumt[que[st]]))
                ++st;
            int j=que[st];
            dp[i]=dp[j]+(s+sumt[i]-sumt[j])*sumf[i];
            while(st<en&& (dp[i]-dp[que[en]])*(sumt[que[en]]-sumt[que[en-1]])<=(dp[que[en]]-dp[que[en-1]])*(sumt[i]-sumt[que[en]]))
                --en;
            que[++en]=i;
        }
        printf("%lld\n",dp[1]);

    }
    return 0;
}
```

随机化

图随机化

例1- 随机化边权判连通图去掉一些边后是否连通-BZOJ3569

```
int ecnt,n,m,q,k,cnt;
int dp[MAX],h[MAX],fa[MAX],eval[MAX],a[50];
bool v_vi[MAX],e_vi[MAX];//点是否使用过 边是否使用过
struct node{
    int to,nxt,val;
}edg[MAX<<1];
void add_edge(int u,int v){
    edg[++ecnt]=node{v,h[u],0};
    h[u]=ecnt;
}
void dfs(int now,int pre){
    v_vi[now]=1;
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        if(to==pre||v_vi[to])continue;
        fa[to]=now;e_vi[i>>1]=1;
        dfs(to,now);
    }
}
void dfs2(int now){
    for(int i=h[now];i;i=edg[i].nxt){
        int to=edg[i].to;
        if(fa[to]!=now)continue;
        dfs2(to);
        eval[i>>1]^=dp[to];
        dp[now]^=dp[to];
    }
}
int main()
{
    read(n);read(m);
    ecnt=1;
    for(int u,v,i=1;i<=m;i++){
        read(u);read(v);add_edge(u,v);add_edge(v,u);
    }
    dfs(1,0);
    srand(19260817);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        if(e_vi[i])continue;
        eval[i]=rand()%MOD+1;
        dp[edg[i<<1].to]^=eval[i];
        dp[edg[i<<1|1].to]^=eval[i];
    }
    dfs2(1);
    read(q);
    while(q--){
        read(k);
        bool ans=1;
        memset(a,0,sizeof(a));
        for(int u,i=1;i<=k;i++){
            read(u);u^=cnt;u=eval[u];
```

```
                for(int j=31;j>=0;j--){
                    if(!(u&(1<<j)))continue;
                    if(!a[j]){a[j]=u;break;}
                    u^=a[j];
                }
                ans&=(u!=0);
            }
            cnt+=ans;
            puts(ans?"Connected":"Disconnected");
        }
        return 0;
}
```

基础&常用

二分模拟乘法-用于乘起来会超 LL 的取模意义乘法运算

```
ll multmod(ll a,ll b){
    a%=MOD;b%=MOD;
    if(b<0)b+=MOD;
    if(a<0)a+=MOD;
    ll re=0;
    while(b){
        if(b&1LL){
            re+=a;if(re>=MOD)re-=MOD;
        }
        a=a<<1;
        if(a>=MOD)a-=MOD;
        b=b>>1;
    }
    return re;
}
```

二维单调队列-例：处理出所有 nn 方阵中最大值

```
int n,m,k;
int x[1005][1005];
int maxh[1005][1005],maxl[1005][1005];
int que[1005],st,en;
void getmax(int len,int z[1005][1005])//连续长度为 len 的区间
{
    for(int i=1;i<=n;i++){
        st=1,en=0;
        for(int j=1;j<=m;j++){
            while( st<=en&& que[st]+len-1<j ) ++st;
            while( st<=en&& que[en]<=z[i][j] ) --en;
            que[++en]=z[i][j];
            maxh[i][j]=que[st];
        }
    }
    for(int i=1;i<=m;i++){
        st=1,en=0;
        for(int j=1;j<=n;j++){
            while( st<=en&& que[st]+len-1<j ) ++st;
            while( st<=en&& que[en]<=maxh[j][i] )--en;
            que[++en]=maxh[j][i];
            maxl[j][i]=que[st];
        }
    }
}
int main()
{
    read(n);read(m);read(k);
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j=1;j<=m;j++)read(x[i][j]);
    getmax(k,x);
    int an=0;
    for(int i=k;i<=n;i++)
        for(int j=k;j<=n;j++)an=max(an,maxl[i][j]);
    printf("%d\n",an);
    return 0;
}
```

离散化

```
int n;
int a[MAX];

vector<int>v;
int getid(int x){return lower_bound(v.begin(),v.end(),x)-v.begin()+1;}

int main()
{
    for(int i=1;i<=n;i++)v.pb(a[i]);

sort(v.begin(),v.end());v.erase(unique(v.begin(),v.end()),v.
```

```
end());
}
```