# SIMULAZIONE DI COMPITO 1

## ESERCIZIO 1 - CONICHE

Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

1. Si discuta il tipo affine della conica $\mathcal{C}$
2. Si dica se la conica è a centro e, nel caso in cui lo sia, si calcolino le coordinate del centro
3. Si trasli ora il centro della conica nell'origine e si caratterizzi lo stabilizzatore della nuova conica (ovvero si dica quali sono le affinità che mandano la nuova conica in sè stessa)

## ESERCIZIO 2 - DOMANDINE

1. Sia $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$. Sappiamo che $f$ è diretta e con almeno un punto fisso. Che tipo di isometria può essere?
2. Possono esistere due matrici $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ tali che $AB - BA = I$ ?
3. $\phi \in \mathrm{PS}\,(V)$ definito positivo. $(V, \phi)$ euclideo. $f \in \mathrm{End}\,(V)$. $\Psi(x, y) := \phi(f(x), f(y))$. Calcolare la segnatura di $\Psi$.

## ESERCIZIO 3 - APPLICAZIONI LINEARI

Sia $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ una matrice fissata e sia $S : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ la funzione lineare così definita:

$$S_A(X) = {}^tXA - {}^tAX$$

1. Si dica per quali $A$, $S_A$ è diagonalizzabile
2. Si calcolino polinomio minimo e caratteristico di $S_A$

## ESERCIZIO 4 - PRODOTTI SCALARI

Sia $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ e sia $V = \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k, v \neq 0$, si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $b(f, g) = \langle f(v) \mid g(v) \rangle$.
Verificare che $b$ è un prodotto scalare su $V$ e determinarne la segnatura.

# Simulazione di Compito 2

## Esercizio 1 - Conti e Prodotti Scalari

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice reale

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Determinare, al variare degli $\alpha$, gli indici di positività, negatività e nullità del prodotto scalare $\varphi_\alpha$ su $\mathbb{R}^3$ associato ad $A_\alpha$ rispetto alla base canonica

## Esercizio 2 - Applicazioni Lineari

Per ogni $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ si consideri il sottoinsieme $W_f = \{g \in \text{End}(\mathbb{R}^n) \mid \quad g \circ f = f \circ g\}$.

1. Verificare che $W_f$ è un sottospazio di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$
2. Dimostrare che se $f' = h \circ f \circ h^{-1}$ per qualche $h \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, allora $\dim W_f = \dim W_{f'}$
3. Supponiamo che $f$ sia diagonalizzabile. Dimostrare che $\dim W_f = n$ se e solo se $f$ ha $n$ autovalori distinti

## Esercizio 3 - Misto Mare

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione $n$ ed $m$ rispettivamente. Siano inoltre $V_1$ e $V_2$ sottospazi di $V$ di dimensione $n_1$ ed $n_2$ rispettivamente, con $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Sia infine $W_1 \subseteq W$ un sottospazio di dimensione $m_1$.
Supponiamo che $W$ sia dotato di un prodotto scalare $\phi$ definito positivo. Dimostrare che l'insieme

$$\{f : V \to W \text{ lineari} \mid \quad f(V_1) \subseteq W_1, f(V_2) \subseteq W_1^\perp\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(V, W)$ e calcolarne la dimensione.

## Esercizio 4 - Morte

Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio affine euclideo con il prodotto scalare standard.

1. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2\}$. Si calcoli il luogo dei punti equidistanti dai due insiemi $S$ e $P$ e se ne determini il tipo affine (come quadrica).
2. Si consideri il fascio di coniche $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ dove la conica $\mathcal{C}_t$ ha equazione $(x^2 - y) + t(xy - 2)$. Si dimostri che date due qualsiasi coniche distinte $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta$ appartenenti al fascio, la loro intersezione consiste sempre degli stessi punti (cioè non dipendono dalle coniche scelte).

# Simulazione di Compito 3

## Esercizio 1 - Matrici

Siano $A, B$ due matrici reali simmetriche $n \times n$. Dimostrare che

1. $AB$ è simmetrica se e solo se $AB = BA$
2. Se $AB$ è simmetrica, allora esiste un autovettore comune per $A$ e per $B$
3. Se $AB$ è simmetrica, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare ordinario) formata da autovettori comuni per $A$ e per $B$

## Esercizio 2 - Applicazioni Lineari

Sia $L_k : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$L_k(p(t)) = p(0) + p(k)t + p(1)t^2$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, $L_k$ è diagonalizzabile
2. Detta $G_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

   $$G_k(x, y, z) = 2kx + ky + (y - 2z)t + (kx - y + 3z)t^2$$

   determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

   $$\mathbb{R}_2[t] = \text{Im } G_k \oplus \text{Ker } L_k$$

## Esercizio 3 - Prodotti Scalari

Si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico. Sia $F$ lo spazio vettoriale

$$F = \{A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad Av \in v^\perp\}$$

Dimostrare che $F$ coincide con l'insieme delle matrici antisimmetriche.

## Esercizio 4 - Vero o Falso

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, producendo un controesempio nel caso in cui siano false e dimostrandole se sono vere.

1. Tutte le quadriche degeneri di $\mathbb{R}^3$ sono a centro
2. Sia $m < n$ e si consideri $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ come spazi euclidei con il prodotto scalare standard. Si consideri un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di rango massimo. Allora nessuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ viene mandata in una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$
3. Date due matrici ortogonali reali $M, N \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^k)$ esiste sempre una applicazione lineare $f : \mathfrak{M}(k, \mathbb{R}) \to \mathfrak{M}(k, \mathbb{R})$ tale che $f(M) = N$ e tale che $\exists \mathcal{B}$ base di $\mathfrak{M}(k, \mathbb{R})$ in cui $f$ è ortogonale, ovvero $[f]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^{k^2})$

# SIMULAZIONE DI COMPITO 4

## ESERCIZIO 1 - ENDOMORFISMI

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Dato uno spazio vettoriale $T$ di dimensione $n$, si consideri l'endomorfismo $\boldsymbol{\beta} : \text{Hom}\,(T, V) \to \text{Hom}\,(T, V)$ definito da $\boldsymbol{\beta}(\xi) = \phi \circ \xi$.

1. Si dica se $\boldsymbol{\beta}$ è diagonalizzabile e se ne discutano lo spettro, le molteplicità e le nullità in funzione dello spettro di $\phi$
2. Si considerino le analoghe domande a proposito dell'endomorfismo $\boldsymbol{\Psi} : \text{Hom}\,(V, T) \to \text{Hom}\,(V, T)$ definito da $\boldsymbol{\Psi}(\xi) = \xi \circ \phi$

## ESERCIZIO 2 - PRODOTTI SCALARI

Sia $V = \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ e sia $\varphi$ il prodotto scalare su $V$ dato da $\varphi(B, C) = \text{tr}\,({}^tBC)$ per ogni $B, C$ in $V$. Fissata $A \in V$, sia $f_A : V \to V$ l'endomorfismo tale che $f_A(X) = AX$ per ogni $X \in V$.

1. Calcolare la segnatura di $\varphi$
2. Provare che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di $A \Leftrightarrow \lambda$ è autovalore di $f_A$
3. Provare che se $A$ è simmetrica allora $f_A$ è $\varphi$-autoaggiunta

## ESERCIZIO 3 - CONICHE

Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : \qquad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Trovare le coniche degeneri della famiglia
2. Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali

## ESERCIZIO 4 - ENDOMORFISMI

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{C}$ e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo con autovalori $c_1, \dots, c_r$.

1. Si mostri, che dato un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, $P(c_1), \dots, P(c_r)$ sono autovalori dell'endomorfismo $P(\phi)$
2. Si mostri che se $\phi$ è diagonalizzabile, anche $P(\phi)$ è diagonalizzabile.
3. Vale anche il viceversa?

# Simulazione di Compito 5

## Esercizio 1 - Costruzione di Prodotti Scalari

Siano $v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,2,3), v_3 = (1,-1,-1), v_4 = (1,0,0), U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad z = x+y\}$. Costruire, se esiste, un prodotto scalare $\Phi$ su $\mathbb{R}^3$ tale che Span $(v_1, v_2)^\perp = U$, $v_3$ è ortogonale a $v_4$ e $\Phi(v_1, v_1) = 4$. Tale prodotto scalare è unico?

## Esercizio 2 - Matrici

Sia $V = \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ e, dato $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo $F_v : V \to \mathbb{R}^n$ tramite la formula $F_v(A) = Av$ per ogni $A \in V$. Sia $W = \{A \in V \mid \quad {}^tAA \in \text{Span}\,(I)\}$

1. Verificare che $W$ è un sottospazio di $V$
2. Verificare che $F_v$ è lineare per ogni $v \in \mathbb{R}^n$
3. Per quali $v \in \mathbb{R}^n$ l'applicazione $F_v$ è surgettiva?
4. Per quali $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, $W$ è isomorfo a Ker $(F_v)$ ?

## Esercizio 3 - Miscellanea

1. Sia $D \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$ una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ se e solo se gli autovalori di $D$ sono a due a due distinti.
2. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$. Siano poi $\Phi$ un automorfismo di $V$, $N$ un endomorfismo di $V$ e $\lambda$ una costante di modulo minore di 1, legati dalla relazione: $\Phi N = \lambda N \Phi$. Si mostri che, sotto tali ipotesi, $N$ è un endomorfismo nilpotente.

## Esercizio 4 - Vero e Falso

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, producendo un controesempio nel caso in cui siano false e dimostrandole se sono vere.

1. Sia $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ tale che tr $A =$ tr $A^2 =$ tr $A^3 = \ldots =$ tr $A^n = 0$. Si può dire che $A = 0$?
2. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che esista un intero $k_0$ con $0 < k_0 < n$ tale che tutti i sottospazi di $V$ di dimensione $k_0$ sono $f$-invarianti. è necessariamente vero che allora tutti i sottospazi di $V$ (indipendentemente dalla loro dimensione) sono $f$-invarianti?

# Simulazione di Compito 6

## Esercizio 1 - Cose

Data una matrice $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$, si indichi con $\mathcal{C}_A$ il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{C}_A = \{X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C}) \mid \quad XA = AX\}$$

1. Si mostri che dim $\mathcal{C}_A =$ dim $\mathcal{C}_B$ quando $A$ e $B$ sono simili
2. Si mostri che $\mathcal{C}_A =$ Span $(1, A, \ldots, A^{n-1})$ quando il polinomio caratteristico di $A$ è prodotto di $n$ fattori lineari distinti

## Esercizio 2 - Prodotti Scalari

Sia $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica tale che $A^3 = A$. Si consideri il prodotto scalare $\phi(x, y) = {}^t xAy$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Si può calcolare la segnatura di $\phi$ sapendo solo che tr $A^5 = k$ e tr $A^2 = r$?
In caso positivo esprimere $\sigma(\phi)$ come funzione di $r$, $k$, $n$. In caso negativo trovare due matrici simmetriche che soddisfino le condizioni date ma che inducano due diversi prodotti scalari.

## Esercizio 3 - Vero o Falso

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, producendo un controesempio nel caso in cui siano false e dimostrandole se sono vere.

1. Se una matrice quadrata $A$ è simile ad una matrice triangolare superiore ed è simile anche ad una matrice triangolare inferiore, allora $A$ è diagonalizzabile
2. Sia $V$ uno spazio vettoriale. Sia $E$ il sottoinsieme di Hom $(V, V)$ definito nel seguente modo:

$$E = \{f : V \to V \mid \quad m_f(0) = 0\}$$

dove $m_f$ è il polinomio minimo di $f$. Allora $E$ è un sottospazio vettoriale di Hom $(V, V)$

## Esercizio 4 - Conti e Coniche

Si consideri la conica $\mathcal{C}$, di equazione

$$\mathcal{C}: \quad 4x^2 + y^2 - 4xy + 10x - 4 = 0$$

Se ne determini il tipo affine, si calcolino gli eventuali centri e si produca inoltre la matrice di una affinità che porta l'equazione della conica nella sua forma canonica

# SIMULAZIONE DI COMPITO 7

## ESERCIZIO 1 - PRODOTTI SCALARI

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano $W_1$ e $W_2$ due sottospazi di $V$ tali che $V = W_1 + W_2$. Siano $\phi_1$ e $\phi_2$ due prodotti scalari, rispettivamente su $W_1$ e $W_2$, tali che $\phi_1 \mid_{W_1 \cap W_2} = \phi_2 \mid_{W_1 \cap W_2}$

1. Mostrare che esiste un prodotto scalare $\phi$ su $V$ le cui restrizioni su $W_1$ e $W_2$ coincidono rispettivamente con $\phi_1$ e $\phi_2$
2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo che $\phi_1$ sia definito positivo e che $\phi_2$ sia non degenere con indice di positività $i_+(\phi_2) = \dim\,(W_1 \cap W_2)$. Sia $\phi$ un prodotto scalare su $V$ che estende $\phi_1$ e $\phi_2$ (nel senso del punto precedente). Calcolare la segnatura di $\phi$

## ESERCIZIO 2 - APPLICAZIONI LINEARI

Sia $V$ uno spazio vettoriale complesso e siano $f, g : V \to V$ due applicazioni lineari. Si supponga $f$ nilpotente e che $f \circ g - g \circ f = f$

1. Provare che Ker $f$ è invariante per $g$
2. Provare che esiste un autovettore comune $v_0$ ad $f$ e $g$
3. Sia $W$ sottospazio di $V$ tale che $V = \text{Span}\,(v_0) \oplus W$ e sia $p_W : V \to W$ la proiezione indotta dalla somma diretta. Se $f' = p_W \circ f \mid_W$, $g' = p_W \circ g \mid_W$, provare che
$$f' \circ g' - g' \circ f' = f'$$
4. Provare che esiste una base a bandiera comune ad $f$ e $g$

## ESERCIZIO 3 - MATRICI

Per ogni coppia di matrici $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ si consideri il sottoinsieme

$$E = \{X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \quad AX = B\}$$

1. Provare che $E$ è non vuoto se e solo se Im $B \subseteq$ Im $A$
2. Determinare le coppie $(A, B)$ per cui l'insieme $E$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ e, in tal caso, calcolarne la dimensione

## ESERCIZIO 4 - VERO O FALSO

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, producendo un controesempio nel caso in cui siano false e dimostrandole se sono vere.

1. Sia $P \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. è vero che $I + P^2$ è invertibile?
2. Per ogni coppia di matrici $A$ e $B$ in $\mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$ esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Av$ e $Bv$ sono linearmente dipendenti
3. Il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ (Isom($\mathbb{R}^3$)) è generato dagli avvitamenti (o twist)
4. Sia $V = \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$. Allora il sottospazio vettoriale generato dalle matrici di rango 3 è tutto $V$ (ovvero, $\forall A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \quad \exists \beta_1, \ldots, \beta_k \quad \exists B_1, \ldots, B_k \quad \text{rk } B_i = 3$ t.c. $\qquad A = \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_k B_k$)

# Esercitazione sulle Coniche

## Conica per cinque Punti

Si consideri una generica conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

1. Si imponga il passaggio della conica per cinque punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)$, che siano a tre a tre non allineati
   Ovvero tali che
   $$\det \begin{pmatrix} \frac{x_j}{x_i} & \frac{x_k}{x_i} \\ \frac{y_j}{y_i} & \frac{y_k}{y_i} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall i, j, k \text{ tutti distinti}$$

2. Dimostrare ora con opportune considerazioni che per cinque punti, a tre a tre non allineati, passa una ed una sola conica non degenere (si ricordi che le coniche sono classi di proporzionalità di polinomi)

## Fasci di coniche

Chiamiamo fascio di coniche generato da due coniche $\gamma_1$ e $\gamma_2$, che si incontrano in quattro punti (reali o no, propri o all'infinito) l'insieme $\mathcal{F}$ di tutte le coniche la cui equazione di ottiene come combinazione lineare non banale delle equazioni $\gamma_1$ e $\gamma_2$

1. Chiamiamo punti base del fascio i quattro punti comuni a $\gamma_1$ e $\gamma_2$. Verificare che *tutte e sole* le coniche di $\mathcal{F}$ passano per tutti e quattro i punti base

2. Osservare inoltre che per quattro punti a tre a tre non allineati passano sei rette che, opportunamente considerate a due a due, formano le uniche tre coniche degeneri di $\mathcal{F}$