**Lemma: Unione finita di sottospazi** Sia $\mathbb{K}$ un campo con infiniti elementi e $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Supponiamo che si possa scrivere $V = W_1 \cup \ldots \cup W_n$, allora $\exists i \quad W_i = V$.

Dimostrazione: Supponiamo la minimalità dell'unione, ovvero se $\exists j$ t.c. $W_j \subseteq W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{j-1} \cup W_{j+1} \cup \ldots \cup W_n$ allora riconsideriamo $V = W_1 \cup \ldots \cup W_{j-1} \cup W_{j+1} \cup \ldots \cup W_n$ (cioè se un sottospazio è interamente contenuto nell'unione degli altri lo togliamo).
Per la minimalità abbiamo $W_n \nsubseteq W_1 \cup \ldots \cup W_{n-1}$.
Sia ora $u \notin W_n$ $(u \in V)$ e $v \in W_n \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_{n-1})$ e definiamo $S = \{v + tu \mid t \in \mathbb{K}\}$.
Siccome $u$ non è il vettore nullo ed il campo $\mathbb{K}$ è infinito, allora anche l'insieme $S$ è infinito. Inoltre, poiché $S \subseteq V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$, uno dei $W_i$ deve contenere infiniti vettori di $S$.
Ma, se $W_n$ contenesse un'altro vettore di $S$ oltre a $v$, allora esisterebbe $t \in \mathbb{K}$ tale che $v + tu \in W_n$, ma allora $tu = (v + tu) - v \in W_n$ e quindi avremmo $u \in W_n$, assurdo per come avevamo scelto $u$. Quindi $W_n$ non può contenere infiniti elementi di $S$.
Poi, se quale $W_i$ $(1 \geq i < n)$ contenesse due vettori distinti di $S$, allora esisterebbero $t_1 \neq t_2 \in \mathbb{K}$ tali che $v + t_1 u, v + t_2 u \in W_i$. Ma allora $(t_2 - t_1)v = t_2(v + t_1 u) - t_1(v + t_2 u) \in W_i$ e dovremmo avere $v \in W_i$, assurdo per come avevamo scelto $v$.
Quindi per $1 \geq i < n$, nessun $W_i$ può contenere infiniti elementi di $S$. Ma questa è chiaramente una contraddizione, il che ci dice che $\exists i$ t.c. $W_i = V$ (questo infatti ci impedirebbe di dire che $W_n \nsubseteq W_1 \cup \ldots \cup W_{n-1}$ oppure che $\exists u \notin W_n$)