ESERCIZIO DIFFICILE

Sia $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e definiamo $\forall X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$,

$$S_A(X) = {}^tXA - {}^tAX$$

Dire per quali A, S_A è diagonalizzabile e per questi valori calcolare polinomio minimo e caratteristico.

1. (*Molto difficile*) Supponendo che S_A sia diagonalizzabile, ovvero che esista una base di autovettori tali che ${}^tXA - {}^tAX = \lambda X$, dimostrare che per $\lambda \neq 0$ deve necessariamente essere ${}^tX = -X$ (Se X è autovettore).
2. Dedurne quindi che $S_A \;|_{\text{Sym }(n,\mathbb{R})} \equiv\; 0$ (poiché le simmetriche devono essere tutte contenute nell'autospazio relativo a 0, cioè nel Kernel).
3. Mostrare ora che questa ipotesi implica che A sia simmetrica e che debba essere $AX = XA$ per ogni X simmetrica.
4. Dedurne che le uniche matrici possibili sono $A = \mu I$.
5. Dimostrare che per $A = \mu I$, S_A è effettivamente diagonalizzabile e calcolarne polinomio minimo e caratteristico.

SOLUZIONE

1. Supponiamo che esiste una base di autovettori e vediamo che proprietà devono avere gli autovettori X.
   ${}^tXA - {}^tAX = \lambda X \implies {}^tXA = ({}^tA + \lambda I)X \implies {}^tX = ({}^tA + \lambda I)XA^{-1}$
   Siccome ${}^tXA = ({}^tA + \lambda I)X$, trasponendo si ottiene ${}^tAX = {}^tX(A + \lambda I)$ e sostituendo ${}^tX$ si ha ${}^tAX = ({}^tA + \lambda I)XA^{-1}(A + \lambda I) \implies X = (I + \lambda {}^tA^{-1})X(I + \lambda A^{-1})$
   Ora sviluppando i conti a destra e semplificando le due X si ha $\lambda({}^tA^{-1}X + XA^{-1}) = -\lambda^{2t}A^{-1}XA^{-1}$ da cui moltiplicando per ${}^tA$ a sinistra e per A a destra, e (supponiamo $\lambda \neq 0$) dividendo per λ si ottiene $(XA + {}^tAX) = -\lambda X$
   Usando ora l'ipotesi di X autovettore si ha $(XA + {}^tAX) = -\lambda X = -({}^tXA - {}^tAX) = -{}^tXA + {}^tAX \implies XA = -{}^tXA$ e moltiplicando a destra per A^{-1} si ottiene $X = -{}^tX$, da cui si deduce che se X è autovettore per $\lambda \neq 0$, allora X è una matrice antisimmetrica
2. Ora possiamo dedurne che se X è un autovettore e sta nelle matrici simmetriche, allora è un autovettore relativo a 0 (Se fosse relativo a $\lambda \neq 0$ sarebbe anche antisimmetrica quindi X sarebbe la matrice nulla, che non è un autovettore).
   Mostriamo ora che Sym $(n, \mathbb{R}) \subseteq V_0$: per ipotesi ($S_A$ diagonalizzabile) $V = V_0 \oplus V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}$. Inoltre $V =$ Asym $(n, \mathbb{R}) \oplus$ Sym $(n, \mathbb{R})$. Allora, sia Y una matrice simmetrica. Usando $X \in V$, otteniamo che X si scrive in modo unico come $X = M_{0S} + M_{0A} + M_{\lambda_1} + \ldots + M_{\lambda_n}$ con $M_{0A} \in V_0 \cap$Asym $(n, \mathbb{R})$, $M_{0S} \in V_0 \cap$ Sym $(n, \mathbb{R})$, $M_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$.
   Inoltre sappiamo che $M_{\lambda_1} + \ldots + M_{\lambda_n} \in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_n} \subseteq$ Asym $(n, \mathbb{R})$ quindi $M_{0A} + M_{\lambda_1} + \ldots + M_{\lambda_n} = 0$ (perché le simmetriche e le antisimmetriche sono in somma diretta) $\implies X \in V_0$, quindi $S_A \;|_{\text{Sym }(n,\mathbb{R})} \equiv 0$.
3. Usando il fatto appena dimostrato, notiamo che I è simmetrica e che quindi deve valere $S_A(I) = 0$, ovvero $A - {}^tA = 0$, quindi A è simmetrica.
   Si può quindi scrivere, $\forall X \in$ Sym $\quad 0 = {}^tXA - {}^tAX = XA - AX$, ovvero A commuta con tutte le matrici simmetriche.
4. (Conti)
5. Se $A = \mu I$, abbiamo $S_\mu(X) = \mu({}^tX - X)$, $\mu \neq 0$ ($A = 0 \notin \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Si considerino ora le matrici simmetriche e quelle antisimmetriche.

Se $Y \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ si ha $S_\mu(Y) = \mu({}^tY - Y) = 0$, quindi $S_\mu \mid_{\mathrm{Sym}} \equiv 0$. Se $Y \in \mathrm{Asym}\,(n, \mathbb{R})$ si ha $S_\mu(Y) = \mu({}^tY - Y) = -2\mu Y$, quindi $S_\mu \mid_{\mathrm{Asym}} \equiv 2\mu\mathrm{id}$.
S_μ è quindi diagonalizzabile $\forall \mu$ e si ha quindi che:

$$\chi_{S_\mu}(t) = t^{\frac{n(n+1)}{2}}(t - 2\mu)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

,

$$m_{S_\mu}(t) = t(t - 2\mu)$$