Geometria Affine Euclidea in $\mathbb{R}^n$

$\forall S$ ssa di $\mathbb{R}^n$, denotiamo con W_S la giacitura di S.
$X \cdot Y$ prodotto scalare ordinario in $\mathbb{R}^n$

Definizione $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale al ssa S se $v \in W_S^\perp$

Esempio Se H è l'iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$, allora B è ortogonale ad H.

Definizione S, S' ssa di $\mathbb{R}^n$. Si dice che S e S' sono ortogonali (e scriviamo $S \perp S'$) $\Leftrightarrow W_S \subseteq W_{S'}^\perp$ ($\Leftrightarrow W_{S'} \subseteq W_S^\perp$)

Esempi

1. r retta di equazione parametrica $X = At + C$, r' retta di equazione parametrica $X = A't + C'$ hanno giacitura $W_r = \text{Span}\,(A)$, $W_{r'} = \text{Span}\,(A')$ quindi $r \perp r' \Leftrightarrow W_r \subseteq W_{r'}^\perp \Leftrightarrow A \in (\text{Span}\,(A'))^\perp \Leftrightarrow A \cdot A' = 0$

2. r retta di equazione $X = At+C$, H iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$. Allora $W_H = \{X \mid B \cdot X = 0\}$ e $W_H^\perp = \text{Span}\,(B)$ da cui segue che $r \perp H \Leftrightarrow A \parallel B$

Proposizione S ssa di $\mathbb{R}^n$, $\dim S = k$

1. Se S' è ortogonale ad S, $\dim S' \leq n - k$.

2. $\forall d \in \{0, \dots, n-k\} \quad \exists S'$ ssa di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\begin{cases} S' \perp S \\ \dim S' = d \end{cases}$

3. Tutti i ssa S' di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\begin{cases} S' \perp S \\ \dim S' = n-k \end{cases}$ sono paralleli tra loro e ciascuno di essi interseca S in uno ed un solo punto

4. $\forall P \in \mathbb{R}^n \quad \exists!$ ssa S' t.c. $\begin{cases} S' \perp S \\ \dim S' = n-k \\ P \in S' \end{cases}$

Dimostrazione

1. $W_S \subseteq W_{S'}^\perp$. Poiché $\dim W_S = k$, allora $\dim\,(W_{S'}^\perp) \geq k$ e quindi $\dim S' = \dim W_{S'} \leq n - k$

2. Basta prendere S' t.c. $\begin{cases} W_{S'} \subseteq W_S^\perp \\ \dim S' = \dim W_{S'} = d \end{cases}$

3. Sia $S = R + W_S$ e sia S' t.c. $\begin{cases} S' \perp S \\ \dim S' = n-k \end{cases}$. Allora $S' = Q + W_{S'}$ e $W_{S'} \subseteq W_S^\perp$. Poiché $\dim W_{S'} = n - k = \dim W_S^\perp$, allora $W_{S'} = W_S^\perp$ (cioè tutti questi ssa hanno giacitura $W_S^\perp$, dunque sono paralleli tra loro)
   Consideriamo uno di questi ssa $S' = Q + W_S^\perp$
   Osservazione: $\mathbb{R}^n = W_S \oplus W_S^\perp$ quindi $R - Q = \underset{\in W_S}{v} + \underset{\in W_S^\perp}{w} \implies \underset{\in R + W_S = S}{R - v} = \underset{\in Q + W_S^\perp = S'}{Q + w} \implies P_0 = R - v = Q + w \in S \cap S'$. Per l'unicità dello spezzamento, P_0 è unico.

4. Basta prendere $S' = P + W_S^\perp$

Caso particolare r retta in $\mathbb{R}^3$, $P \in \mathbb{R}^3$. Allora $\exists!$ piano H passante per P ed ortogonale ad r. Tale piano interseca r in uno ed un solo punto P_0

Osservazione Se r ha equazione parametrica $X = At + C$, allora $W_r = \text{Span}\,(A)$. Deve essere $W_r \subseteq W_H^\perp$ e quindi $W_r = W_H^\perp$ cioè $W_H^\perp = \text{Span}\,(A)$. Allora H ha equazione cartesiana $A \cdot X = A \cdot P$

Osservazione Si può estendere la nozione di ortogonalità a due iperpiani in $\mathbb{R}^n$. Se $H = \{X \mid B \cdot X + d = 0\}$ e $H' = \{X \mid B' \cdot X + d' = 0\}$ allora le giaciture $B \cdot X = 0$ e $B' \cdot X = 0$ sono ortogonali ai vettori B e B'. Diciamo che H e H' sono ortogonali $\Leftrightarrow B \perp B' \Leftrightarrow B \cdot B' = 0$

Esempio due piani in $\mathbb{R}^3$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UN SOTTOSPAZIO AFFINE

S ssa di $\mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$

Definizione $d(P, S) = \inf\{d(P, X) \mid X \in S\}$

Proposizione $\exists P_0 \in S$ t.c. $d(P, S) = \| P - P_0 \|$ (e quindi l'inf è un minimo)

Dimostrazione Sia dim $S = k$. Per la proposizione precedente, $\exists! S'$ ssa t.c. $\begin{cases} S' \perp S \\ \dim S' = n - k \\ P \in S' \end{cases}$.
Allora $S \cap S' = \{P_0\}$

Osservazione $(P - P_0) \perp S$

Voglio provare che $d(P, S) = \| P - P_0 \|$, ossia che $\forall x \in S, x \neq P_0$, si ha $d(P, X) > \| P - P_0 \|$. Infatti $d(P, X)^2 = \| P - X \|^2 = \| (P - P_0) + (P_0 - X) \|^2 = ((P - P_0) + (P_0 - X)) \cdot ((P - P_0) + (P_0 - X)) = d(P, P_0)^2 + \underbrace{d(P_0, X)^2}_{>0} + \underbrace{2(P_0 - X) \cdot (P - P_0)}_{=0 \text{ perché } (P-P_0)\perp s} > \| P - P_0 \|^2$

Caso Particolare: distanza punto-iperpiano H iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$. Allora $d(P, H) = \frac{|B \cdot P + d|}{\|B\|}$

Dimostrazione $d(P, H) = \| P - P_0 \|$ dove $P_0 = H \cap r$ con r la retta per P ortogonale ad H. r ha equazione $X = Bt + P$.
Calcolo $r \cap H$: $B \cdot (Bt + P) + d = 0$ cioè $t = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B}$ ossia $P_0 = r \cap H = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B} B + P$
$d(P, H) = \| P - P_0 \| = \| \frac{B \cdot P + d}{B \cdot B} B \| = \frac{|B \cdot P + d}{\|B\|^2} \| B \| = \frac{|B \cdot P + d}{\|B\|}$

Esercizio Calcolare la distanza di un punto P da una retta r di $\mathbb{R}^3$.

Definizione *(Distanza fra due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$)* $d(S, S') \underset{def}{=} \inf\{d(X, Y) \mid X \in S, Y \in S'\}$

CASI PARTICOLARI IN $\mathbb{R}^3$

Distanza di due piani H_1, H_2 di $\mathbb{R}^3$

- se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ $\quad d(H_1, H_2) = 0$
- se $H_1 \parallel H_2$, allora $d(H_1, H_2) = d(P, H_2) \forall P \in H_1$, che si può calcolare con la formula precedente

Distanza retta-piano

- Se $r \cap H \neq \emptyset \qquad d(r, H) = 0$
- Se $r \parallel H$, allora $d(r, H) = d(P, H) \forall P \in r$ che si calcola con la formula

Distanza retta-retta

- se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \qquad d(r_1, r_2) = 0$
- se $r_1 \parallel r_2 \implies d(r_1, r_2) = d(P, r_2) \forall P \in r_1$

Resta da esaminare il caso di due rette sghembe $r_1 \quad X = A_1 t + C_1$, $r_2 \quad X = A_2 t + C_2$. Poiché r_1 e r_2 non sono parallele, A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti.

Provo che $\exists!$ retta l t.c. $\begin{cases} l \cap r_1 \neq \emptyset \\ l \cap r_2 \neq \emptyset \\ l \perp r_1 \text{ e } l \perp r_2 \end{cases}$

In tal caso se $P_1 = l \cap r_1$ e $P_2 = l \cap r_2$ allora $d(r_1, r_2) = \parallel P_1 - P_2 \parallel$

Dimostrazione Il generico punto di r_1 è $P(t) = A_1 t + C_1$. Il generico punto di r_2 è $Q(\theta) = A_2\theta + C_2$. La retta l congiungente $P(t)$ e $Q(\theta)$ è ovviamente incidente sia a r_1 che ad r_2; provo che $\exists t \quad \exists \theta$ t.c. essa è ortogonale sia a r_1 che a r_2.

Poiché l è parallela al vettore $P(t) - Q(\theta) = A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2$, basta imporre

$$\begin{cases} (A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2) \cdot A_1 = 0 \\ (A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema lineare 2×2 è $M = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & -A_1 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_2 & -A_2 \cdot A_2 \end{pmatrix}$

$\det M = -(A_1 \cdot A_1)(A_2 \cdot A_2) + (A_1 \cdot A_2)^2$. Se $A_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad A_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ si ha $\det M = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 - (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2$.

Se fosse $\det M = 0$, la matrice $\begin{pmatrix} ---A_1--- \\ ---A_2--- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ avrebbe rango 1: assurdo perché A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti.

Quindi $\det M \neq 0$ e allora il sistema ammette un'unica soluzione (t_0, θ_0). I punti $P(t_0)$ e $Q(\theta_0)$ sono quelli cercati.