$b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a}$

رابطه‌ی دوستانه بین توان و رادیکال

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

ویژگی‌های ریشه‌گیری:

«برهان حذف»

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و n و m دو عدد طبیعی باشند. (اگر n و m فرد باشند a و b نامنفی‌اند)

$m, n \geq 2$

الف) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

در این صورت: $\left(\sqrt[20]{0/2}\right)^{20} = 0/2$ معکوس

ب) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8 \times 64} = \sqrt[3]{512} = 8$

$\sqrt[n]{a} = p \Rightarrow p^n = a$

$\sqrt[n]{b} = q \Rightarrow q^n = b$

$\Rightarrow ab = p^n \times q^n \Rightarrow ab = (pq)^n$

$pq = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

پ) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$ در حالت کلی

$\sqrt{11} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$

$5 + 3 \neq 8$

$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} \neq \sqrt[3]{35}$

$2 + 3 \neq \sqrt[3]{35}$

$\sqrt[3]{125} \neq \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{100}$

$\times$

ت) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

مثال:

$\dfrac{\sqrt[3]{8000}}{\sqrt[3]{1000}} = \sqrt[3]{8} = 2$

اثبات:

$\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[n]{a} = p \Rightarrow p^n = a$

$\sqrt[n]{b} = q \Rightarrow q^n = b$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{p^n}{q^n} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^n \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^n \Rightarrow \dfrac{p}{q} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$

ث) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{m \text{ بار}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ بار}}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{4096} = 8$

ج) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\sqrt{9} = 3$

چ) اگر n عددی فرد باشد و $\sqrt[n]{a^n} = a$ آنگاه n عددی زوج باشد و $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

$\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

$\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$

ح) اگر n عددی فرد باشد و $\sqrt[n]{ab} = a\sqrt[n]{b}$ آنگاه n عددی زوج باشد و $\sqrt[n]{ab} = |a|\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[3]{-24} = \sqrt[3]{3^3 \times (-2)^3} = -2\sqrt[3]{3}$

$-2\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \times 5} = -\sqrt[4]{80}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

خ) اگر a عددی مثبت و n عددی زوج باشد $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

۱۱) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$

$\sqrt[5]{2} \times \sqrt[20]{2^{16}} = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

$\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^{1+4}} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

د) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

$\sqrt[5]{5} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[20]{5^9}$

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

۱۵) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[3]{\sqrt[15]{12^{15}}} = \sqrt[15]{12^{15}} = 12$