Universidad de los Andes

Departamento de Física

Ondas y Fluidos : Taller Semana 3

Superposición y Oscilador Armónico Amortiguado

Profesor : Luis Aníbal García

Entrega : 21 de agosto 2013

I Principio de Superposición

El objetivo principal de este problema es acercarlos al uso de herramientas computacionales para graficar el comportamiento de sistemas físicos oscilantes superpuestos. Pueden escoger qué programa usar para realizar las gráficas, como por ejemplo *Mathematica*, *MatLab*, *Maple*, entre otros.

Si usan *Mathematica* para realizar figuras de Lissajous, la función

```
ParametricPlot[{fx,  fy},{t,tmin,tmax}],
```

es de gran utilidad. Aquí, fx y fy son funciones en términos del parámetro temporal t que corre de tmin hasta tmax. La sintaxis para este tipo de gráficas en programas similares no varía mucho.

1. Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son $x = 4\sin(\omega t)$ e $y = 3\sin(\omega t + \alpha)$. Hacer un gráfico de la trayectoria de la partícula cuando $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ y π, y señalar el sentido en el cual viaja la partícula.

2. Encontrar la ecuación de la trayectoria resultante de una partícula sometida a dos movimientos armónicos simples perpendiculares 1 y 2 de igual amplitud y fase relativa δ, si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$. Representar gráficamente la trayectoria encontrada y mostrar el sentido en el cual es recorrida, para $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$. Para estas mismas fases, graficar también los casos $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$.

II Energía en Osciladores Amortiguados

Analizaremos el oscilador armónico amortiguado desde el punto de vista energético. Debido a la presencia de una fuerza disipativa, la energía mecánica total del sistema no es constante en el tiempo, sino que se transfiere continuamente al medio amortiguante y se disipa en forma de calor (o como radiación, según el sistema considerado).

Consideremos un sistema amortiguado de masa m cuya posición en función del tiempo está dada por

$$x = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \delta),$$

donde δ en este caso se fija tal que su amplitud inicial sea A. En la ecuación, $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$, para movimiento subamortiguado, donde ω_0 es la frecuencia de oscilación del sistema sin disipación y γ es el parámetro de amortiguamiento. Además, el factor de calidad para amortiguamiento débil es $Q \approx \frac{\omega_0}{\gamma} \gg 1$, que usaremos de ahora en adelante.

1. Derive una expresión para la energía total en función del tiempo $E(t) = K(t) + U(t)$[1], en términos de ω, Q y $E_0 \equiv \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$. Como estudiamos el caso de amortiguamiento débil, $\omega \approx \omega_0$ y por lo tanto términos de orden igual o superior a $O(1/Q^2)$ se pueden despreciar. Muestre que bajo esta aproximación, la energía mecánica está dada por

$$E(t) \approx E_0 e^{-\omega t/Q}\left[1 + \frac{1}{2Q}\sin(2\omega t)\right]$$

2. Ahora calcule la rata de pérdida de energía del oscilador $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ bajo esta misma aproximación en términos de ω, E_0 y Q. Grafique en una misma gráfica E vs. ωt para $Q = 4$, 8 y 16. Grafique también en una misma gráfica la rata de pérdida de energía $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ vs. ωt, para los mismos tres valores de Q. Analice el significado físico (NO matemático) de las gráficas obtenidas.

3. Calcule la pérdida porcentual promedio de energía mecánica por ciclo[2] y demuestre que para $Q \gg 1$, está dada por la expresión

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{2\pi}{Q}.$$

¿Qué quiere decir este resultado?

4. De acuerdo a la teoría electromagnética clásica, un electrón acelerado radía energía a una razón de $2k_e e^2 a^2/3c^3$, donde k_e es la constande de Coulomb, e es la carga del electrón, a es la aceleración instantánea, y c es la velocidad de la luz. Si un electrón oscila sobre una línea recta con frecuencia f y amplitud A, ¿cuánta energía radía durante un ciclo? (Asuma que el movimiento está descrito adecuadamente por $x = A\cos(2\pi f t)$ durante cualquier ciclo). Usando esto y lo encontrado en el numeral anterior, muestre que el factor de calidad de este electrón oscilante estará dado por

$$Q = \frac{3m_e c^3}{4\pi k_e e^2 f}$$

donde m_e es la masa del electrón. Tomando f como una frecuencia óptica típica (como de luz visible), estime numéricamente el valor de Q. Analice físicamente sus resultados.

[1] Recordemos que para un oscilador armónico la energía potencial se puede escribir en general como $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

[2] El cambio promedio de una función $f(t)$ arbitraria en un ciclo completo se calcula mediante la integral

$$\Delta f = \int_t^{t+T} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$