Derivatives

Seunghwan Park

April 5, 2020

Maximum and minimum

Theorem

If f is continuous on a closed interval $[a, b]$, then f attains an global maximum value $f(c)$ and global minimum value $f(d)$ at some numbers c and d in $[a, b]$.

Theorem

Suppose f is a differentiable on $[a, b]$. Every local maximum or minimum of f is either one of the end points of the interval, or else it is a stationary point for f.

Maximum and minimum

How to tell if a stationary point is a maximum, a minimum, or neither?

Theorem

If $f'(x) > 0$ for $x < c$ and $f'(x) < 0$ for $x > c$, where $x \in (c - \delta, c + \delta), \delta > 0$ then f has a local maximum at $x = c$.

Theorem

If $f'(x) < 0$ for $x < c$ and $f'(x) > 0$ for $x > c$, where $x \in (c - \delta, c + \delta), \delta > 0$ then f has a local minimum at $x = c$.

Ex) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2.$

Ex) $f(x) = |x - 2|.$

Ex) $f(x) = x^{2/3}.$

Definition

1. *A function f is* **convex** *on $[a,b]$ if for all x_1, x_2 satisfying $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, and all $\lambda \in [0,1]$, we have*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

2. *A function f is* **concave** *on $[a,b]$ if for all x_1, x_2 satisfying $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, and all $\lambda \in [0,1]$, we have*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

- Geometrically, the line segment connecting two points $(x_1, f(x_1)$ and $(x_2, f(x_2))$ must sit above the graoh of the convex function$f$.
- f is concave if f is convex.

ex) $x, x^2, e^x, -log(x), xlogx$?

cf) Strictly convex and strictlry concave.

cf) Inflection point

Convex and Concave

Ex) $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$

First and second order characterizations of convex functions

Theorem

Suppose f is twice differentiable on (a, b). Then the followings are equivalent:

1. *f is convex.*
2. *$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$, for all $x_1, x_2 \in (a, b)$.*
3. *$f''(x) \geq 0$ for all $x \in (a, b)$.*

Corollary

If f is convex and differentiable on (a, b) then a point x that satisfies $f'(x) = 0$ is a local minimum.

(1) 종이에 그림을 인쇄하려고 한다. 종이의 정중앙에 그림이 인쇄되고 그림의 크기는 60 cm^2이다. 좌우 여백은 각각 5cm, 상하 여백은 각각 3cm이다. 이 때, 그림을 인쇄하기 위한 종이의 최소 면적을 구하시오.

(2) 뚜껑이 없는 사각 상자의 부피가 4000이라고 한다. 이러한 상자 중 최소 겉넓이를 갖는 상자의 규격을 구하시오. (규격: 가로*세로*높이)

(3) 타원 $4x^2+y^2=4$위의 점 중 점 $(1,0)$과 가장 멀리 떨어져 있는 점을 찾으시오.

(4) 한 극장에서 표 한 장의 가격이 8000원 일 때, 한 공연 당 1000장의 표가 팔린다고 한다. 표 한 장의 가격을 100원 내리면 20장이 더 팔린다고 할 때 수입을 최대로 올릴 수 있는 표의 가격을 찾으시오.

Thank You !