

**Пример 2D\_1.** Пусть транспонированная матрица смежности имеет следующий вид (заранее введена одна фиктивная вершина):

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим параллельный Алгоритм 2.

Пусть  $v_s=6$ , 4 процесса составляют двумерный массив размера  $2 \times 2$ .

Имеем:  $n_{adj}=8$ ,  $R=2$ ,  $C=2$ ,  $\frac{n_{adj}}{R \cdot C}=2$ . Разбиение опишем схемой:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Pr}_{1,1} & \text{Pr}_{2,1} \\ \boxed{0 \ 1} & \boxed{2 \ 3} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{Pr}_{1,2} & \text{Pr}_{2,2} \\ \boxed{4 \ 5} & \boxed{6 \ 7} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Pr}_{1,1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{Pr}_{2,1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \text{Pr}_{1,2} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \text{Pr}_{2,2} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array} \left( \begin{array}{cc} A_{1,1}^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{1,2}^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{2,1}^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{2,2}^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{1,1}^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & A_{1,2}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{2,1}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{2,2}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

Транспонированная матрица смежности  $A^T$  разбивается на четыре блочные строки и два блочных столбца; блоки  $A_{i,j}^{(1)}$  и  $A_{i,j}^{(2)}$  принадлежат процессу  $\text{Pr}_{i,j}$ . В каждом блоке 2 строки и 4 столбца. Один процесс владеет двумя блоками, т.е. владеет информацией о ребрах, которые соответствуют ненулевым элементам (если такие элементы есть) этих блоков транспонированной матрицы смежности. Распределение вершин: процесс  $\text{Pr}_{i,j}$  владеет вершинами, соответствующими блочной строке с номером  $(j-1)2+i$ .

Инициализация:

$$\text{Pr}_{1,1}: L(0)=\infty, L(1)=\infty,$$

$$\text{Pr}_{2,1}: L(2)=\infty, L(3)=\infty,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: L(4)=\infty, L(5)=\infty,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: L(v_s)=L(6)=0, L(7)=\infty.$$

Итерация  $l = 0$ :

Множества  $F$ :

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}, \text{Pr}_{1,2}: F = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: F = \{6\}.$$

Результаты обмена множествами  $F$ :

между процессами столбца 1:

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}: \overline{F} = \emptyset,$$

между процессами столбца 2:

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: \overline{F} = \{6\}.$$

Множества  $N$  ( $N$  формируем из пар  $(v,u)$ , где  $u$  – родитель  $v$ ),

$N_q$  ( $N_q$  указаны только не пустые):

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}: N = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: N = \{(1,6)\}, N_{1,1} = \{(1,6)\},$$

$$\text{Pr}_{2,2}: N = \{(3,6)\}, N_{2,1} = \{(3,6)\}.$$

Результаты обмена множествами  $N_q$ :

между процессами строки 1:

$$\text{Pr}_{1,1}: \overline{N}_{1,2} = \{(1,6)\}, \overline{N} = \{(1,6)\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}: \overline{N} = \emptyset,$$

между процессами строки 2:

$$\text{Pr}_{2,1}: \overline{N}_{2,2} = \{(3,6)\}, \overline{N} = \{(3,6)\},$$

$$\text{Pr}_{2,2}: \overline{N} = \emptyset.$$

Метки  $L(v)$  и  $P(v)$  для  $v \in \overline{N}$  (если  $L(v) = \infty$ ):

$$\text{Pr}_{1,1}: L(1)=1, P(1)=6,$$

$$\text{Pr}_{2,1}: L(3)=1, P(3)=6,$$

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: -.$$

Итерация  $l = 1$ :

Множества  $F$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: F = \{1\},$$

$$\text{Pr}_{2,1}: F = \{3\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: F = \emptyset.$$

Результаты обмена множествами  $F$ :

между процессами столбца 1:

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}: \overline{F} = \{1, 3\},$$

между процессами столбца 2:

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: \bar{F} = \emptyset.$$

Множества  $N, N_q$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: N = \{(0,1), (4,1), (5,3)\} \text{ } ((v,u)=(0,3) \text{ в } N \text{ не вошло, так как } v=0$$

присутствует в паре  $(v,u)=(0,1))$ ,

$$N_{1,1} = \{(0,1)\}, N_{1,2} = \{(4,1), (5,3)\},$$

$$\text{Pr}_{2,1}: N = \{(6,3)\}, N_{2,2} = \{(6,3)\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: N = \emptyset.$$

Результаты обмена множествами  $N_q$ :

между процессами строки 1:

$$\text{Pr}_{1,1}: \bar{N}_{1,1} = \{(0,1)\}, \bar{N} = \{(0,1)\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}: \bar{N}_{1,1} = \{(4,1), (5,3)\}, \bar{N} = \{(4,1), (5,3)\},$$

между процессами строки 2:

$$\text{Pr}_{2,1}: \bar{N} = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: \bar{N}_{2,1} = \{(6,3)\}, \bar{N} = \{(6,3)\}.$$

Метки  $L(v)$  и  $P(v)$  для  $v \in \bar{N}$  (если  $L(v) = \infty$ ):

$$\text{Pr}_{1,1}: L(0)=2, P(0)=1,$$

$$\text{Pr}_{2,1}: -,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: L(4)=2, P(4)=1, L(5)=2, P(5)=3,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: - \text{ (вершина 6 уже помечена: } L(6)=0).$$

Итерация  $l = 2$ :

Множества  $F$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: F = \{0\},$$

$$\text{Pr}_{2,1}: F = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: F = \{4, 5\},$$

$$\text{Pr}_{2,2}: F = \emptyset.$$

Результаты обмена множествами  $F$ :

между процессами столбца 1:

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}: \bar{F} = \{0\},$$

между процессами столбца 2:

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: \bar{F} = \{4, 5\}.$$

Множества  $N, N_q$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: N = \{(4,0)\}, N_{1,2} = \{(4,0)\},$$

$$\text{Pr}_{2,1}: N = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: N = \{(0,5)\}, N_{1,1} = \{(0,5)\},$$

$$\text{Pr}_{2,2}: N = \{(2,4)\} \text{ } ((v,u)=(2,5) \text{ в } N \text{ не вошло, так как } v=2 \\ \text{присутствует в паре } (v,u)=(2,4)), N_{2,1} = \{(2,4)\}.$$

Результаты обмена множествами  $N_q$ :

между процессами строки 1:

$$\text{Pr}_{1,1}: \bar{N}_{1,2} = \{(0,5)\}, \bar{N} = \{(0,5)\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}: \bar{N}_{1,1} = \{(4,0)\}, \bar{N} = \{(4,0)\},$$

между процессами строки 2:

$$\text{Pr}_{2,1}: \bar{N}_{2,2} = \{(2,4)\}, \bar{N} = \{(2,4)\},$$

$$\text{Pr}_{2,2}: \bar{N} = \emptyset.$$

Метки  $L(v)$  и  $P(v)$  для  $v \in \bar{N}$  (если  $L(v) = \infty$ ):

$$\text{Pr}_{1,1}: - \text{ (вершина 0 уже помечена),}$$

$$\text{Pr}_{2,1}: L(2)=3, P(2)=5,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: - \text{ (вершина 4 уже помечена),}$$

$$\text{Pr}_{2,2}: -.$$

Итерация  $l = 3$ :

Множества  $F$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: F = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,1}: F = \{2\},$$

$$\text{Pr}_{1,2}: F = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: F = \emptyset.$$

Результаты обмена множествами  $F$ :

между процессами столбца 1:

$$\text{Pr}_{1,1}, \text{Pr}_{2,1}: \bar{F} = \{2\},$$

между процессами столбца 2:

$$\text{Pr}_{1,2}, \text{Pr}_{2,2}: \bar{F} = \emptyset.$$

Множества  $N, N_q$ :

$$\text{Pr}_{1,1}: N = \{(5,2)\}, N_{1,2} = \{(5,2)\},$$

$$\text{Pr}_{2,1}: N = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: N = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: N = \emptyset.$$

Результаты обмена множествами  $N_q$ :

между процессами строки 1:

$$\text{Pr}_{1,1}: \bar{N} = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: \quad \overline{N}_{2,2} = \{(5,2)\}, \quad \overline{N} = \{(5,2)\},$$

между процессами строки 2:

$$\text{Pr}_{2,1}: \quad \overline{N} = \emptyset,$$

$$\text{Pr}_{2,2}: \quad \overline{N} = \emptyset.$$

Метки  $L(v)$  и  $P(v)$  для  $v \in \overline{N}$  (если  $L(v) = \infty$ ):

$$\text{Pr}_{1,1}: \quad -,$$

$$\text{Pr}_{2,1}: \quad -,$$

$$\text{Pr}_{1,2}: \quad - \text{ (вершина 5 уже помечена),}$$

$$\text{Pr}_{2,2}: \quad -.$$

Итерация  $l = 4$ :

Множества  $F$ : для всех процессов  $F = \emptyset$ ,

все вычислительные процессы завершаются.