ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min(\max), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

в предположении, что скалярная функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ вместе со всеми частными производными по $x_1, \ldots, x_n$, т. е. $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. Задача (1) называется ***задачей на безусловный минимум*** (***максимум***).

Классический метод поиска безусловного экстремума основан на следующих утверждениях.

Теорема 1 (необходимое условие первого порядка). *Если* x^0 *— локально оптимальный план задачи* (1), *то* x^0 *является решением уравнения*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Решения векторного уравнения (2) называются ***стационарными планами*** (точками) задачи (1) (функции $f(x)$).

Теорема 2 (необходимое условие второго порядка). *Пусть* $f \in \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$. Тогда:

а) *если* x^0 *— локально оптимальный план задачи* $f(x) \to \min$, $x \in \mathbf{R}^n$, *то*

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \geq 0;$$

б) *если* x^0 *— локально оптимальный план задачи* $f(x) \to \max$, $x \in \mathbf{R}^n$, *то*

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \leq 0.$$

Теорема 8.3 (достаточное условие второго порядка). *Пусть* $f \in \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$. *Если на стационарном плане* x^* *выполняется условие*

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} > 0 \quad \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} < 0 \right),$$

то $x^* = x^0$ *— локально оптимальный план задачи* (1).

Замечание 8.1. Если $x^0 \in \mathrm{int} X$, $X \subset \mathbf{R}^n$, то все сформулированные утверждения справедливы для задачи $f(x) \to \min(\max)$, $x \in X$.

Замечание 8.2. При исследовании на знакоопределенность матриц вторых производных функции $f(x)$ используются критерии Сильвестра

Схема поиска оптимальных планов задачи (1):

1) решается система алгебраических уравнений (2) и находятся стационарные планы x^i, $i = \overline{1, l}$;

2) на стационарных планах исследуется знакоопределенность матриц вторых производных целевой функции (стационарные планы, на которых

матрица $\partial^2 f/\partial x^2$ положительно (отрицательно) определена, — локально оптимальные планы задачи (1));

3) анализируются те стационарные планы, на которых матрица вторых производных не является строго знакоопределенной $\partial^2 f/\partial x^2 \geq 0$ (≤ 0);

4) среди найденных локально оптимальных планов (путем сравнения на них значений целевой функции) находят глобально оптимальные планы.

Пример 8.1. Решить задачу

$$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^3 - x_1 x_2 \to \min\ (\max), \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

Составляем систему уравнений (2):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = x_1 - x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 6x_2^2 - x_1 = 0.$$

Стационарные планы: $x_1^{(1)} = 0$, $x_2^{(1)} = 0$; $x_1^{(2)} = 1/6$, $x_2^{(2)} = 1/6$. Подсчитаем матрицу вторых производных в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$:

$$\frac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 f(x^{(2)})}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Применяя критерии Сильвестра, заключаем, что $\dfrac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2}$ не является знакоопределенной, т. е. стационарный план x^1 не локально оптимальный. Поскольку матрица $\dfrac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2}$ положительно определена, то $x^{(2)} = \, = x^0$ — локально оптимальный план ($f(x^0) = \min f(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$), $f(x^0) = \, = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{36} + 2\dfrac{1}{6 \cdot 36} - \dfrac{1}{36} = -\dfrac{1}{216}$. Глобальных оптимальных планов нет, поскольку, например, $f(x^0) = -\dfrac{1}{216} > f(0;\ -1) = -2.$