Задание 5

37. $F(X) = 3X_1^2 + 2X_1 + 2X_2^2 + 4X_2X_3 \to extr$

$g_1(X) = X_1^2 + 2X_2^2 - 19 \le 0$

$h_1(X) = X_1 + X_2X_3 - 11 = 0$

$F(X, \lambda, \mu) = \lambda_0 (3X_1^2 + 2X_1 + 2X_2^2 + 4X_2X_3) +$
$+ \lambda_1 (X_1^2 + 2X_2^2 - 19) + \mu_1 (X_1 + X_2X_3 - 11)$

$\frac{\partial F}{\partial X_1} = \lambda_0 (6X_1 + 2) + \lambda_1 (2X_1) + \mu_1 \cancel{X_1}$

$\frac{\partial F}{\partial X_2} = \lambda_0 (4X_2 + 4X_3) + \lambda_1 (4X_2) +$
$+ \mu_1 (X_3)$

$\frac{\partial F}{\partial X_3} = \lambda_0 (4X_2) + \mu_1 (X_2)$

$\lambda_0 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 (2X_1) + \mu_1 \cancel{(X_1)} = 0 \\ \lambda_1 (4X_2) + \mu_1 (X_3) = 0 \\ \mu_1 (X_2) = 0 \\ \lambda_1 (X_1^2 + 2X_2^2 - 19) = 0 \\ X_1 + X_2X_3 - 11 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \end{cases}$$

~~• $g_1(x)$ – активно:~~

~~$\left(0, -\sqrt{\frac{19}{2}}, -11\sqrt{\frac{2}{19}}, 0, 0\right)$~~

~~$\left(0, \sqrt{\frac{19}{2}}, 11\sqrt{\frac{2}{19}}, 0, 0\right)$~~

действительных нет решений

~~• $g_1(x)$ – пассивно~~

~~$(11, 0, 0, 0, 0)$~~

$\lambda_0 = 1$:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2 + \lambda_1(2x_1) + \mu_1 = 0 \\ 4x_2 + 4x_3 + \lambda_1(4x_2) + \mu_1(x_3) = 0 \\ 4x_2 + \mu_1(x_2) = 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 19) = 0 \\ x_1 + x_2x_3 - 11 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \text{ для min}, \ \lambda_1 \leq 0 \text{ – для max} \end{cases}$$

• $g_1(x)$ – активно:

$x_1^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}, -\frac{7\sqrt{6}}{5}, -1, -4\right)$ – возможный max

$x_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{7\sqrt{6}}{5}, -1, -4\right)$

<0

• $g_1(x)$ – пассивно

$x_3^* = (11, 0, 0, 0, -68)$ – ?

$\frac{\partial h_1(x_3^*)}{\partial x} = (1, x_3, x_2)$ – вектор в x_3^* – ненулевой =>

=> условие регулярности выполняется

$$\frac{\partial g_1(X)}{\partial X} = (2X_1, 4X_2, 0)$$

$$\frac{\partial g_1(X_1^*)}{\partial X} = \left(1, -10\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \quad \frac{\partial h_1(X_1^*)}{\partial X} = \left(1, -\frac{7\sqrt{6}}{5}, -\frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \cdot \left(-10\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \beta\left(-\frac{7\sqrt{6}}{5}\right) = 0 \\ \beta \cdot \left(-\frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{линейно независимы}$$

$$\frac{\partial g_1(X_2^*)}{\partial \cancel{X}} = \left(1, 10\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \quad \frac{\partial h_1(X_2^*)}{\partial X} = \left(1, \frac{7\sqrt{6}}{5}, \frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ линейно независимы

$$\frac{\partial F}{\partial^2 X^2} = \begin{pmatrix} 6+2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+4\lambda_1 & 4+\mu_1 \\ 0 & 4+\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F(X_1^*)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F(X_2^*)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F(X_3^*)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -64 \\ 0 & -64 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(l_1, l_2, l_3) \frac{\partial F(X_1^*)}{\partial X^2} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \cancel{(4l_1 \; 0 \; 0)} \cancel{\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}} =$$

$= 4l_1^2 \Rightarrow$ ~~ВО на $\mathbb{R}^3$ - условия для max~~

$(l_1 \; l_2 \; l_3) \dfrac{\partial F(X_3^*)}{\partial X^2} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = (6l_1 \;\; 4l_2 - 64l_3 \;\; -64l_2) \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = 6l_1^2 + 4l_2^2 - 64l_2l_3 - 64l_2l_3 =$

$= 6l_1^2 + 4l_2^2 - 128l_2l_3$

X_1^*: $4l_1^2 \le 0$

$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(X_1^*)}{\partial X} l = l_1 - 10\sqrt{\frac{3}{2}}\, l_2 \le 0 \\ \dfrac{\partial h_1(X_1^*)}{\partial X} l = l_1 - 7\dfrac{\sqrt{6}}{5} l_2 - \dfrac{5\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} l_3 = 0 \end{cases}$

$(l_1 \; l_2 \; l_3) = \left(1 \;\; 1 \;\; \dfrac{5-7\sqrt{6}}{5} \cdot \dfrac{2}{5\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$ - удов. условию

$4 \le 0$ - не удовлетворяет условию max

X_2^*: -//- аналогично

X_3^*: $6l_1^2 + 4l_2^2 - 128l_2l_3 \ge 0$

$\dfrac{\partial h_1(X_3^*)}{\partial X} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = l_1 = 0$

$(0, 1, 1)$ - удовлетворяет системе

$0 + 4 - 128 \ge 0$ - не выполняется

Ответ: нет точек min/max.