МАТРИЧНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ (МТЗ)

Общая постановка задачи. Основные понятия

Рассматриваемая задача является частным случаем транспортных задач, когда отсутствуют промежуточные (нейтральные) пункты, а каждый поставщик продукции непосредственно связан с каждым потребителем единственным путем. Другими словами, все узлы в математической модели 3 разбиты на две непересекающиеся группы: $I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ – источники и $I_2 = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ – стоки (рис. 4.1). В остальном задача имеет тот же вид, что и сетевая. Однако математическая постановка рассматриваемой задачи

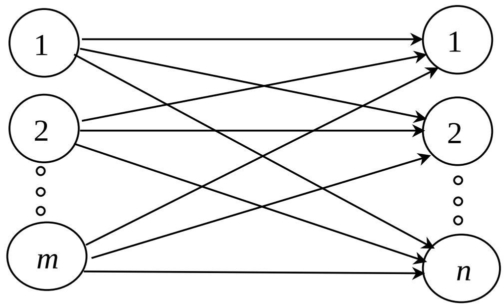


Рис 4.1

принимает несколько иную форму. Так, условия баланса здесь превращаются в следующие

$$\sum_{j \in I_2} x_{ij} = a_i,\ i \in I_1,$$
$$-\sum_{j \in I_1} x_{ij} = a_i,\ i \in I_2. \tag{1}$$

Если ввести обозначения $-a_i = b_i,\ i \in I_2$ (теперь $b_i \geq 0$), то ***условия баланса*** (1) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ \ j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Таким образом, общий вид задачи с учетом пропускных способностей дорог следующий

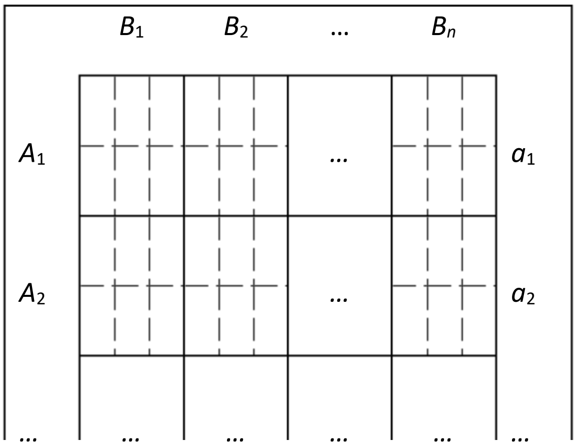
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Как видно из рис. 4.1, при больших m, n количество дуг сети становится очень большим (mn), что затрудняет сетевые операции метода потенциалов. В этих условиях удобна другая, ***матричная*** (или ***табличная***) ***модель*** транспортных задач. Введем ***транспортную*** $m \times n$–***таблицу*** (таблица 4). Строку $i \in I_1 = \{1, 2, ..., m\}$ припишем пункту производства A_i, столбец j – пункту потребления B_j. Клетка (i, j) таблицы соответствует дороге из A_i в B_j (дуге (i, j) в сетевой транспортной задаче). Объем производства $a_i \ge 0$ в A_i поместим справа от строки i, объем потребления $b_j = -a_j$ в B_j – снизу столбца j. Клетку (i, j) разделим на 6 частей (см. рис. 4.2) и поместим в них следующие параметры: $c_{ij} \ge 0$ – стоимость перевозки единицы продукции из A_i в B_j, x_{ij} – величину перевозки, d_{ij} – пропускную способность дороги, Δ_{ij} – оценку перевозки, θ_{ij} – шаг, $l_{ij} = \pm 1$ – величину направления (будем записывать только + или –).

Таблица 4. Матричная задача



θ_{ij}	d_{ij}	c_{ij}
l_{ij}	x_{ij}	Δ_{ij}

Рис. 4.2

Совокупность $x = (x_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ чисел x_{ij} (перевозок), удовлетворяющих условиям (3) называется ***планом перевозок***.

Заметим, что условие общего баланса $\sum_{i \in I} a_i = 0$ для сетевой транспортной задачи превращается теперь в условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4}$$

которое является ***необходимым условием существования плана перевозок***. Кроме того, очевидны еще ***необходимые условия существования плана перевозок***

$$a_i \le \sum_{j=1}^{n} d_{ij},\ i = \overline{1,m}, \quad b_j \le \sum_{i=1}^{m} d_{ij},\ j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Невыполнение хотя бы одного из условий (4), (5) является ***достаточным условием отсутствия плана перевозок***.

Базисный план перевозок

Цепью (***простой, элементарной***), соединяющей клетку (i_1, j_1) с клеткой (i_k, j_k), назовем последовательность клеток $\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$ или $\{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$, в которых каждые соседние две клетки лежат в одной строке или в одном столбце, но ни в одной строке и ни в одном столбце нет трех последовательных клеток. ***Цикл*** — это цепь, крайние клетки которой лежат в одной строке или в одном столбце.
Множество клеток $U_Б \subset U$ назовем ***базисным***, если $|U_Б| = m + n - 1$ и из его элементов невозможно составить ни одного цикла. Остальные клетки $(i, j) \in U_Н = U \setminus U_Б$ назовем ***небазисными***.

План перевозок $x = (x_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ называется ***базисным*** с базисным множеством клеток $U_Б$, если $x_{ij} = 0 \vee d_{ij}$, $(i, j) \in U_Н$.

Перевозки x_{ij}, $(i, j) \in U_Б$, назовем ***базисными***, x_{ij}, $(i, j) \in U_Н$, – ***небазисными***.

Базисный план перевозок называется ***невырожденным***, если $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U_Б$.

Метод потенциалов для МТЗ

Алгоритм решения задачи (3) состоит в следующем. Пусть x — базисный план перевозок, $U_Б$ — базисное множество клеток.

1. Припишем каждой i-й строке транспортной таблицы потенциал u_i, $i = \overline{1,m}$, а каждому j-му столбцу – потенциал v_j, $j = \overline{1,n}$. Тогда уравнения для потенциалов примут вид

$$u_i + v_j = -c_{ij}, \quad (i, j) \in U_Б, \tag{6}$$

2. Оценки небазисных клеток подсчитываются по формулам

$$\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in U_Н. \tag{7}$$

Поскольку $|U_Б| = m + n - 1$, а количество потенциалов равно $m+n$, то один из них можно положить равным любому числу (обычно полагают равным нулю потенциал той строки или того столбца, в которых больше всего базисных клеток). Остальные потенциалы определятся однозначно, поскольку $\mathrm{rank} A = m + n - 1$.

3. ***Критерий оптимальности.*** *Для оптимальности базисного плана перевозок x с базисным множеством клеток* $U_{\text{Б}}$ *в задаче* (3) *достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{aligned} &\Delta_{ij} \le 0 \;\; \textit{при} \;\; x_{ij} = 0, \\ &\Delta_{ij} \ge 0 \;\; \textit{при} \;\; x_{ij} = d_{ij}, \;\; (i,\, j) \in U_{\text{Н}}. \end{aligned} \qquad (8)$$

1

Если они выполняются, решение заканчиваем: план перевозок x оптимален. В противном случае переходим к следующему шагу.

4. Выбираем клетку $(i_0, j_0) \in U_{\text{Н}}^1$, где $U_{\text{Н}}^1$ — множество клеток, для которых не выполняются условия (8). В качестве этой клетки можно брать любую. Чтобы стоимость перевозок на данной итерации максимально убывала, рекомендуется брать эту клетку из условия $\left|\Delta_{i_0 j_0}\right| = \max\limits_{(i,j)\in U_{\text{Н}}^1} \left|\Delta_{ij}\right|$.

5. Помечаем клетку (i_0, j_0) знаком “+”, если $x_{i_0 j_0} = 0$, или знаком “–”, если $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$. Добавляем клетку к базисному множеству $U_{\text{Б}}$. Образуется ровно один цикл. Двигаясь от клетки (i_0, j_0) по циклу, помечаем клетки, чередуя знаки “+” и “–”. Обозначим множество клеток, помеченных знаком “+”, через $U_{\text{Ц}}^+$, знаком “–” – через $U_{\text{Ц}}^-$.

6. Подсчитываем числа $\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^+, \\ x_{ij}, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^-. \end{cases}$ Определяем $\theta^0 = \min\limits_{(i,j)\in U_{\text{Ц}}} \theta_{ij}$, где $U_{\text{Ц}}$ – множество клеток цикла.

7. *а*) Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, тогда пересчитываем новый план перевозок по формулам

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^+, \\ x_{ij} - \theta^0, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^-, \\ x_{ij}, & (i,j) \in U \setminus U_{\text{Ц}}. \end{cases} \qquad (9)$$

При этом базисное множество клеток $U_{\text{Б}}$ не поменяется, а небазисная перевозка $x_{i_0 j_0}$ перейдет с одной границы на другую, и для нее будут выполняться условия оптимальности (8). Если при этом $\bar{U}_{\text{Н}}^1 = U_{\text{Н}}^1 \setminus (i_0, \;\; j_0) = \varnothing$, то решение заканчиваем: построенный план перевозок (9) оптимален. Если же $\bar{U}_{\text{Н}}^1 \ne \varnothing$, то переходим к шагу 4, где $U_{\text{Н}}^1$ заменяем на $\bar{U}_{\text{Н}}^1$.

б) Если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, где $(i_*, j_*) \in U_{\text{Ц}} \cap U_{\text{Б}}$, тогда подсчитываем новый план перевозок по формулам (4.15), заменяем $U_{\text{Б}}$ на $\bar{U}_{\text{Б}} = \left(U_{\text{Б}} \setminus (i_*, j_*)\right) \cup (i_0, j_0)$ и переходим к шагу 1.

Замечание. Если базисный план перевозок невырожденный, то $\theta^0 > 0$ и стоимость перевозок уменьшится на величину $\theta^0 \left|\Delta_{i_0 j_0}\right|$.

Первая фаза метода потенциалов

Для построения начального базисного плана перевозок используем ***первую фазу метода потенциалов***, для чего введем дополнительный (искусственный) пункт производства A_{m+1} с объемом производства $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ и стоимостями перевозок $c_{m+1,j} = 1,\ j = \overline{1,n}$, а также искусственный пункт потребления B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ и стоимостями перевозок $c_{i,n+1} = 1,\ i = \overline{1,m}$.

Задача первой фазы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\ \ i = \overline{1,m+1},\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j,\ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{9}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n},\ \ 0 \le x_{i,n+1} \le a_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$0 \le x_{m+1,j} \le b_j,\ \ j = \overline{1,n}, \quad 0 \le x_{m+1,n+1} \le \alpha,$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. В задаче (9) существует план перевозок $(x = 0;\ x_{i,n+1} = a_i,\ i = \overline{1,m};\ x_{m+1,j} = b_j,\ j = \overline{1,n};\ x_{m+1,n+1} = 0)$, который возьмем в качестве начального базисного плана перевозок с базисным множеством клеток $U_{\text{Б}} = U_{\text{И}} \bigcup (m+1,\ n+1)$, где $U_{\text{И}} = \{(m+1,\ j),\ \ j = \overline{1,n};\ (i,\ n+1),\ \ i = \overline{1,m}\}$.

Решим задачу (9) описанным выше методом. Пусть $(x^*,\ x^*_{\text{И}},\ x^*_{m+1,n+1})$ – оптимальный план перевозок для задачи (4.16) с базисным множеством клеток $U^*_{\text{Б}}$, где $x_{\text{И}} = (x_{ij},\ (i,\ j) \in U_{\text{И}})$.

Необходимым и достаточным условием существования плана перевозок в задаче (4.8) *является условие* $x^*_{\text{И}} = 0$.

При условии, что на последней итерации клетка $(m+1,\ n+1)$ остается базисной (на всех предыдущих итерациях она всегда базисная), после решения задачи (4.16) будем иметь одну из возможных ситуаций:

1) $x^*_{\text{И}} \ne 0$;

2) $x^*_{\text{И}} = 0$ и множество $U^*_{\text{Б}} \bigcap U_{\text{И}}$ содержит одну клетку;

3) $x^*_{\text{И}} = 0$ и множество $U^*_{\text{Б}} \bigcap U_{\text{И}}$ содержит более одной клетки.

В первой ситуации исходная задача (3) не имеет планов перевозок. Во второй ситуации отбрасываем строку A_{m+1} и столбец B_{n+1} и переходим к решению задачи (3) с полученным после первой фазы базисным планом перевозок x^* и базисным множеством клеток $\bar{U}_Б^* = U_Б^* \setminus \big((i_*,\ j_*) \bigcup (m+1,\ n+1)\big)$, где $(i_*,\ j_*) \in U_Б^* \bigcap U_И$. В третьей ситуации из основной транспортной таблицы добавим к базисному множеству клеток какую-либо небазисную клетку $(i_0,\ j_0)$, чтобы образовался цикл, содержащий искусственную клетку $(i_*,\ j_*)$. Заменим в базисном множестве клеток $(i_*,\ j_*)$ на $(i_0,\ j_0)$. Проводим такую замену до тех пор, пока в $U_Б^* \bigcap U_И$ не останется только одна клетка, после чего поступаем, как во второй ситуации.

Замечание. Если искусственная клетка выводится из числа базисных, а соответствующая перевозка нулевая, то в дальнейшем эту клетку можно не рассматривать, другими словами, ее блокировать.

1.4.7. Открытая и закрытая модели

Матричная транспортная задача называется ***закрытой***, если выполняются условия общего баланса (4), т. е. когда совокупный спрос равен совокупному предложению. В противном случае задача называется ***открытой***. Открытую модель сводят к закрытой. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то это означает, что спрос превышает предложение. Введем дополнительного (***фиктивного***) ***поставщика*** A_{m+1} с объемом поставок $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и стоимостью перевозок $c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}$. Величина $x_{m+1,j}^0$ в оптимальном плане перевозок означает объем недопоставки потребителю B_j. В случае $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (предложение превышает спрос) вводим дополнительного (***фиктивного***) ***потребителя*** B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и стоимостью перевозок $c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}$. Величина $x_{i,n+1}^0$ в оптимальном плане перевозок означает объем продукции, оставшейся нереализованной (на складе) у поставщика A_i.

В случае отсутствия пропускных способностей дуг они полагаются равными бесконечности. И предложенный метод потенциалов работает. В этом случае первая фаза может быть упрощена.

Правило северо-западного угла. Заполняем клетку (1, 1), в которую помещаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1,\ b_1\}$. Если $x_{11} = a_1$, тогда вычеркиваем первую строку и рассматриваем уменьшенную транспортную таблицу, в которой вместо b_1 полагаем $\bar{b}_1 = b_1 - a_1$. Если $x_{11} = b_1$, тогда вычеркиваем первый столбец, а в уменьшенной транспортной таблице полагаем $\overline{a}_1 = a_1 - b_1$. В обоих случаях в уменьшенной матричной таблице опять по тому же правилу заполняем клетку в левом верхнем углу (северо-западный угол) и т. д. Поскольку на каждом шаге вычеркивается либо одна строка, либо один столбец, то через $m + n - 1$ шагов останется не вычеркнутой либо строка, либо столбец, но заполненными будут $m + n - 1$ клеток. Они и образуют базисное множество клеток $U_Б$. В незаполненных клетках полагаем $x_{ij} = 0$. Построенный вектор $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$ и будет базисным планом перевозок.

Если на каком-то шаге окажется, что минимум достигается одновременно на обоих элементах ($x_{ij} = a_i = b_j$), тогда вычеркивается либо только i-я строка, либо только j-й столбец. Если вычеркивается i-я строка, то полагаем $\overline{b}_j = 0$, если j-й столбец, то $\overline{a}_i = 0$. В результате на следующем шаге базисная перевозка будет нулевой, т. е. построенный базисный план перевозок будет вырожденным.

В таблице при решении задачи вручную будем помещать перевозки только в базисные клетки.

Пример 4.2. Рассмотрим задачу примера 4.1. Составим транспортную таблицу (табл. 4.3), исходя из данных табл. 4.1.

Таблица 4.3

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 25	3	2	~~25~~
A_2	3 5	5 5	8	~~10~~ ~~5~~
A_3	2	7 30	4	~~30~~
A_4	5	3 5	6 15	~~20~~ ~~15~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~35~~ ~~5~~	~~15~~ 0	

Заполняем клетку (1, 1), поместив в нее перевозку $x_{11} = \min\{25; 30\} = 25$ и вычеркиваем первую строку. В уменьшенной таблице заменяем $b_1 = 30$ на $\overline{b}_1 = 30 - 25 = 5$. Далее заполняем клетку (2, 1): $x_{21} = \min\{10; 5\} = 5$ и вычеркиваем первый столбец, заменив $a_2 = 10$ на $\overline{a}_2 = 10 - 5 = 5$. В уменьшенной таблице заполняем клетку (2, 2): $x_{22} = \min\{5; 40\} = 5$ и вычеркиваем вторую строку, заменив $b_2 = 40$ на $\overline{b}_2 = 40 - 5 = 35$, и т. д. В итоге получим базисный план перевозок с базисным множеством клеток $U_Б = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$. При этом стоимость перевозок равна $\varphi = 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 30 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 15 = 380$ (тыс. д. е.).

Правило минимального элемента (***минимальной стоимости***). Оно отличается от предыдущего правила только выбором клетки заполнения. Если в предыдущем случае на каждом шаге выбиралась клетка в левом верхнем углу таблицы, то теперь каждый раз выбираем из всех клеток уменьшенной по тем же правилам транспортной таблицы клетку с минимальной стоимостью перевозок.

Пример 4.3. Для задачи примера 4.1 построим начальный базисный план перевозок по правилу минимального элемента (табл. 4.4). Выбираем клетку с минимальной стоимостью $c_{i_1 j_1} = \min\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}$. Такой является клетка (1, 1). Помещаем в нее перевозку $x_{11} = \min\{25;\ 30\} = 25$ и вычеркиваем первую строку, уменьшив $b_1 = 30$ на $\bar{b}_1 = 30 - 25 = 5$. В уменьшенной таблице опять выбираем клетку с минимальной стоимостью. Такой будет клетка (3, 1). Заполняем ее: $x_{31} = \min\{30;\ 5\} = 5$. Затем заполняется клетка (4, 2): $x_{42} = \min\{20;\ 40\} = 20$ и т. д. Базисное множество клеток $U_Б = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)\}$ отличается от построенного в примере 4.2. Стоимость перевозок равна $\varphi = 1\cdot 25 + 5\cdot 10 + 2\cdot 5 + \ + 7\cdot 10 + 4\cdot 15 + 3\cdot 20 = 275$ (тыс. д. е.), т. е. построенный базисный план перевозок лучше, чем в предыдущем случае, когда построение проводилось по правилу северо-западного угла.

Таблица 4.4

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 25	3	2	~~25~~
A_2	3	5 10	8	~~10~~
A_3	2 5	7 10	4 15	~~30~~ ~~25~~ ~~10~~ 0
A_4	5	3 20	6	~~20~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~	~~15~~	

Правило двойного предпочтения. Если транспортная таблица велика, то правило минимального элемента вызывает определенные затруднения с выбором клетки с минимальным тарифом. В этом случае более предпочтительно следующее правило построения начального базисного плана перевозок. В каждой строке и в каждом столбце помечаем клетки с минимальной стоимостью. В результате получим некоторые клетки, которые помечены дважды. Это означает, что в них минимальная стоимость как по строке, так и по столбцу. На практике будем помечать эти клетки знаком ×. По тому же правилу, что и в предыдущих случаях, заполняем сначала клетки, помеченные дважды, вычеркивая каждый раз строку или столбец. Затем заполняем клетки, помеченные один раз. Наконец, в уменьшенной таблице по правилу минимального элемента заполняем недостающие клетки.

Пример 4.4. Построим начальный базисный план перевозок для примера 4.1 по правилу двойного предпочтения (табл. 4.5). В первой строке минимальный элемент (минимальная стоимость) расположена в клетке (1, 1), во второй — в клетке (2, 1), в третьей — в (3, 1), в четвертой — в (4, 2). Аналогично получаем, что в первом столбце минимальный элемент находится в клетке (1, 1), во втором столбце — в клетках (1, 2), (4, 2), в третьем — в (1, 3). Клетки (1, 1), (4, 2) оказались помеченными дважды. В них в первую очередь и помещаем перевозки: $x_{11} = \min\{25;\ 30\} = 25$, уменьшаем таблицу вычеркиванием первой строки и заменой $b_1 = 30$ на $\bar{b}_1 = 30 - 25 = 5$; $x_{42} = \min\{20;\ 40\} = 20$, уменьшаем таблицу вычеркиванием четвертой строки и заменой $b_2 = 40$ на $\bar{b}_2 = 40 - \ -5 = 35$. В уменьшенной таблице остались помеченными один раз клетки (2, 1), (3, 1). По очереди заполняем их, каждый раз выбирая клетку с минимальным элементом. В нашем случае сначала заполняем клетку (3, 1), где стоимость $c_{31} = 2 < c_{21} = 3$: $x_{31} = \min\{30;\ 5\} = 5$. Поскольку при этом вычеркивается первый столбец, то помеченная клетка (3, 1) остается незаполненной, как оказались незаполненными и помеченные клетки (1, 2), (1, 3). Оставшуюся часть таблицы заполняем по правилу минимального элемента. В итоге получаем $U_Б = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$.

Таблица 4.5

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 25 ××	3 ×	2 ×	~~25~~
A_2	3 ×	5 10	8	~~10~~
A_3	2 5 ×	7 10	4 15	~~30~~ ~~25~~ ~~10~~
A_4	5	3 20 ××	6	~~20~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~15~~	

В данном примере правило двойного предпочтения и правило минимального элемента сводятся к одному и тому же начальному базисному плану перевозок. Однако, как показывает следующий пример, это не обязательно.

Пример 4.5. Пусть имеются следующие данные:

a_i :   80, 200, 180, 280;
b_j :   180, 180, 100, 80, 200;

$$C = \begin{pmatrix} c_{ij},\ j = \overline{1,5} \\ i = \overline{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 7 & 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

Построим начальный базисный план перевозок по правилу минимального элемента (табл. 4.6) и правилу двойного предпочтения (табл. 4.7).

Таблица 4.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	6	3	1 80	3	~~80~~
A_2	2 180	6 20	9	5	10	~~200~~ ~~20~~
A_3	7	4	3	2 0	2 180	~~180~~
A_4	10	7 160	11 100	14	12 20	~~280~~ ~~120~~ ~~20~~
	~~180~~	~~180~~ ~~160~~	~~100~~	~~80~~ ~~0~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Таблица 4.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	6	3 ×	1 80 ××	3	~~80~~
A_2	2 180 ××	6	9 20	5 0	10	~~200~~ ~~20~~
A_3	7	4 ×	3 ×	2 ×	2 180 ××	~~180~~
A_4	10	7 180 ×	11 80	14	12 20	~~280~~ ~~100~~ ~~20~~
	~~180~~	~~180~~	~~100~~ ~~80~~	~~80~~ ~~0~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Как видим, в первом случае $U_Б = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$, во втором — $U_Б = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$. Они отличаются друг от друга. При этом стоимость перевозок в первом случае равна $\varphi = 3380$, во втором — $\varphi = 3360$, т. е. план перевозок, построенный по правилу двойного предпочтения, лучше, чем по правилу минимального элемента. Однако этот пример не гарантирует, что так будет всегда.

Отметим здесь одну особенность. При построении начального базисного плана перевозок в обоих случаях оказалось, что $x_{14} = a_1 = b_4 = 80$. При уменьшении таблицы вычеркиваем при этом лишь строку или столбец, но не одновременно (в таблицах удалена первая строка, а $b_4 = 80$ заменено на $\bar{b}_4 = 0$), чтобы потом заполнить нулем еще одну клетку (в нашем случае в табл. 4.6 — это $x_{34} = 0$, в табл. 4.7 — $x_{24} = 0$). В итоге получились вырожденные базисные планы перевозок.

Правило Фогеля. Для каждой строки и каждого столбца вычисляем штраф, для чего вычитаем минимальную стоимость (тариф) в данной строке или столбце из следующей по величине стоимости в этих же строке или столбце. Выделяем строку или столбец с максимальным штрафом. В выделенных строке или столбце заполняем клетку с минимальной стоимостью точно так же, как и в предыдущих правилах с последующим вычеркиванием соответствующих строки или столбца. Если в выбранной строке (столбце) имеются клетки с одинаковой минимальной стоимостью, то выбирают клетку из того столбца (строки), который (которая) имеет больший штраф. На последующих шагах в оставшейся части таблицы опять подсчитываются штрафы строк и столбцов, и заполнение таблицы проводится аналогично, как описано выше.

Пример 4.6. Используя правило Фогеля, построим начальный базисный план перевозок для задачи примера 4.5. Результаты представлены в табл. 4.8.

Таблица 4.8

	$10-2=\boxed{8}$	$7-6=1$	$11-9=2$		$12-10=2$
	$10-2=8$	$7-6=1$	$11-9=2$	$14-5=\boxed{9}$	$12-10=2$
	$7-2=5$	$6-4=2$	$9-3=6$	$5-2=3$	$10-2=\boxed{8}$
	$7-2=5$	$6-4=2$	$9-3=\boxed{6}$	$2-1=1$	$3-2=1$
$3-1=2$	9	6	3 80	1	3	~~80~~
$5-2=3$ $6-2=4$	2 120	6	9	5 80	10	~~200~~ ~~120~~
$3-2=1$	7	4	3	2	2 180	~~180~~
$10-7=3$ $10-7=3$	10 60	7 180	11 20	14	12 20	~~280~~ ~~100~~ ~~40~~ ~~20~~
	~~180~~ ~~60~~	~~180~~	~~100~~ ~~20~~	~~80~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Подсчитываем штрафы строк и столбцов. Для первой строки минимальный элемент $c_{14}=1$. Следующие за ним по возрастанию элементы $c_{13}=c_{15}=3$. Следовательно, штраф первой строки равен $3-1=2$. Штрафы записываем слева от строк и над столбцами. Аналогично для второй строки $c_{24}-c_{21}=5-2=3$ и т. д. Для столбцов имеем: для первого $c_{31}-c_{21}=7-2=5$, для второго $c_{12}-c_{32}=6-4=2$ и т. д. Максимальный штраф равен 6 (он помещен в прямоугольник) и соответствует третьему столбцу. В этом столбце выбираем минимальный элемент. Их два: $c_{13}=c_{33}=3$. Выбираем клетку (1, 3),стоящую в строке с большим штрафом. Полагаем, как и в предыдущих правилах, $x_{13}=\min\{a_1, b_3\}=80$. Вычеркиваем первую строку, уменьшая b_3 до величины $100-80=20$. Штрафы строк в оставшейся таблице остаются прежними. Штрафы четвертого и пятого столбцов изменятся. Пересчитываем их (на втором шаге новые штрафы записаны строкой выше). Максимальный штраф, равный 8, соответствует пятому столбцу. Выбираем в нем клетку с минимальным элементом $c_{35} = 2$ и полагаем $x_{35} = 180$. Вычеркиваем третью строку и т. д. В результате получим начальный базисный план перевозок, представленный в табл. 4.8. Новые штрафы строк записываем ниже прежних со сдвигом влево от прежних.

Стоимость перевозок равна $\varphi = 3560$. Как видим, план перевозок хуже, чем построенные по правилам минимального элемента и двойного предпочтения (см. пример 4.5). Однако, как показывает приведенный ниже пример 4.7, правило Фогеля приводит к лучшему результату.

Пример 4.7. Построим начальный базисный план перевозок для задачи примера 4.1 (табл. 4.9).

Таблица 4.9

	$3-1=2$	$5-3=2$		
	$2-1=\boxed{1}$	$5-3=2$	$4-2=\boxed{2}$	
$2-1=1$ $3-1=2$	1 ~~0~~	3 ~~10~~	2 ~~15~~	~~25~~ ~~10~~
$5-3=2$ $5-3=2$	3	5 ~~10~~	8	~~10~~
$4-2=2$ $7-2=\boxed{5}$	2 ~~30~~	7	4	~~30~~
$5-3=2$ $5-3=2$	5	3 ~~20~~	6	~~20~~
	~~30~~ ~~0~~	~~40~~ ~~30~~ ~~20~~ 0	~~15~~	

Полученный план перевозок лучше, чем построенный по правилам минимального элемента и двойного предпочтения, поскольку сейчас $\varphi = 230$, в то время как для тех планов имели $\varphi = 275$ (см. примеры 4.3, 4.4). Более того, как показывает решение данной задачи, полученный план перевозок оптимальный.

Замечание 4.1. Если штрафы всех строк и столбцов на каком-то шаге одинаковы, применяем правило минимального элемента.