Выпуклое программирование

Основная задача выпуклого программирования имеет вид

$$f(x) \to \min, \quad g(x) \le 0, \quad x \in Q, \qquad (1)$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ $\left(g(x) = \left(g_1(x), \ldots, g_m(x)\right)\right)$ – выпуклые функции, $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество.

Заметим, что основной задачей выпуклого программирования называют и задачу $f(x) \to \max,\ g(x) \ge 0,\ x \in Q,$ где $f(x)$, $g(x)$ – вогнутые функции, Q – выпуклое множество.

Вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (6.1), называется ***планом***, множество $X = \{x : g(x) \le 0, x \in Q\}$ – ***множеством планов*** задачи (1). В силу свойств выпуклых множеств и выпуклых функций, $X \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество. Аналогично множество $X = \{\ x : g(x) \ge 0,\ x \in Q\}$ – выпуклое множество для задачи на максимум.

План x^0, для которого $f(x^0) = \min f(x),\ x \in X$, называется ***оптимальным планом*** задачи (1). Если целевая функция $f(x)$, $x \in X$, – строго выпуклая функция, то оптимальный план единственный.

Говорят, что множество планов X задачи (6.1) ***регулярно*** (удовлетворяет ***условию Слейтера***), если на некотором плане x^* выполняется неравенство $g(x^*) < 0$.

Решение задачи выпуклого программирования сводится к нахождению седловых точек функции Лагранжа $F(x,\lambda) = f(x) + \lambda' g(x)$, $x \in Q$, $\lambda \ge 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ ($\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – вектор множителей Лагранжа).

Пара $\{x^*, \lambda^*\}$, $x^* \in Q$, $\lambda^* \ge 0$, – ***седловая точка функции Лагранжа***, если для любых $x \in Q, \lambda \ge 0$ выполняются неравенства $F(x^*, \lambda) \le \le F(x^*, \lambda^*) \le F(x, \lambda^*)$.

Теоремы о существовании седловых точек функции Лагранжа называют теоремами Куна-Таккера, по имени ученых, получивших первые результаты для гладких задач.

Для гладкой задачи выпуклого программирования с регулярным множеством планов (задача (6.1) с гладкими выпуклыми функциями $f(x)$, $g(x)$ и множеством $Q = \{x \in \mathbf{R}^n : x \ge 0\}$) справедлива следующая

Теорема 1 (Куна-Таккера). *Для оптимальности плана x^0 в гладкой задаче* (1) *с регулярным множеством планов необходимо и достаточно существования такого m-вектора $\lambda^0 \ge 0$, что выполняются условия: стационарности*

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = 0$$

и дополняющей нежесткости

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0$$

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для существования оптимального плана x^0 задачи выпуклого программирования* (6.1) *с регулярным множеством планов необходимо и* *достаточно существования m-вектора* $\lambda^0 \ge 0$ *такого, что пара* $\{x^0, \lambda^0\}$ *является седловой точкой функции Лагранжа. При этом выполняется условие дополняющей нежесткости* $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.

Пример Рассмотрим задачу

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0,$$
$$g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0,$$
$$x \in Q = \{x:\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\}.$$

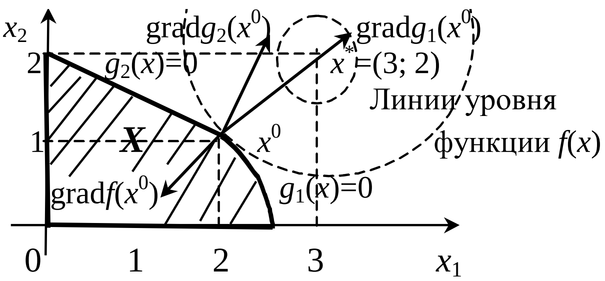

Рис. 6.1

Множество планов задачи и ее геометрическое решение представлено на рис. 6.1. Точка $x^0 =$ =(2; 1) — оптимальный план задачи, $F(x,\lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 -$ $-2)^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \lambda_2(x_1 +$ $+ x_2 - 4) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$ — функция Лагранжа. Проверим выполнение условий теоремы Куна — Таккера:

$$\frac{\partial F(x^0,\, \lambda^0)}{\partial x_1} = 2(x_1^0 - 3) + 2\lambda_1^0 x_1^0 + \lambda_2^0 - \lambda_3 = 0,$$
$$\frac{\partial F(x^0,\, \lambda^0)}{\partial x_2} = 2(x_2^0 - 2) + 2\lambda_1^0 x_2^0 + 2\lambda_2^0 - \lambda_4 = 0,$$

$$g_1(x^0) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 5 \le 0,$$
$$g_1(x^0) = x_1^0 + 2x_2^0 - 4 \le 0,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$\lambda_1^0 g_1\left(x^0\right) = \lambda_1^0\left((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 5\right) = 0$$
$$\lambda_2^0 g_2\left(x^0\right) = \lambda_2^0\left(x_1^0 + 2x_2^0 - 4\right) = 0.$$

$$\lambda_3 x_1 = 0,\ \lambda_4 x_2 = 0.$$

Легко видеть, что эти условия выполняются на плане $x^0=(2;\ 1)$ при $\lambda^0=(1/3;\ 2/3, 0, 0)$.