СЕТЕВЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ (СТЗ)

Постановка задачи. Основные определения

Рассмотрим задачу, сформулированную в предыдущем разделе, в общем виде.

Пусть $I = \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ – множество элементов, которые назовем ***узлами*** (в приведенной выше задаче это – пункты A_i, $i = \overline{1,m}$). Пусть некоторые пары узлов $i, j \in I$, упорядочены. Каждую такую пару будем обозначать через (i, j) и называть ***дугой с началом i и концом j*** (в приведенной выше задаче это – путь из A_i в A_j; предполагается, что существуют только пути с односторонним движением). Множество всех дуг обозначим через U.

Совокупность $S = \{I,\ U\}$ называется ***ориентированной сетью***. Графически будем обозначать узлы кружками с номером узла внутри, а дуги – линиями со стрелками в конце дуги. Каждому i-му узлу припишем число a_i – ***интенсивность узла***. Если $a_i > 0$, то узел называется ***источником***, если $a_i < 0$ – ***стоком*** (пункт потребления), если $a_i = 0$ – ***нейтральным узлом*** (***транзитным, промежуточным***). На рисунках источники и стоки будем отмечать стрелками, входящими в источник и выходящими из стока, а около них записывать величину $|a_i|$ – объем предложения или спроса соответственно.

Каждой дуге $(i,\ j)$ припишем три числа $x_{ij} \geq 0$ – ***дуговой поток***, d_{ij} – ***пропускную способность дуги*** и c_{ij} – ***стоимость единичного дугового потока***. Величины c_{ij}, d_{ij} будем на рисунке записывать над дугами или слева от них.

Графическая интерпретация данных без ограничения на пропускные способности приведена на рис. 3.1.

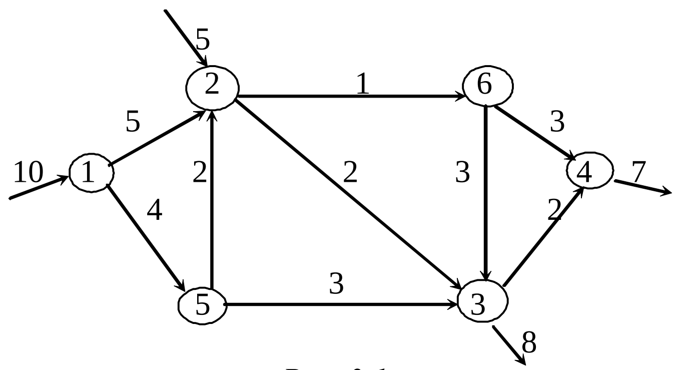

Рис. 3.1

Для каждого узла i обозначим через $I_i^+ = I_i^+(U) = \{j: \quad (i,j) \in U\}$ множество узлов, в которые идут дуги из узла i, а через $I_i^- = I_i^-(U)$ $= \{j: \quad (j,i) \in U\}$ – множество узлов, из которых идут дуги в узел i. Тогда ***условия баланса***, о которых шла речь в п. 3.1, для каждого узла имеют вид

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i,\ i \in I. \qquad (1)$$

Совокупность $x = (x_{ij},\ (i,\ j) \in U)$ дуговых потоков называется ***потоком на сети*** S (или ***сетевым потоком***), если она удовлетворяет ограничениям (1) и

$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, (i,j) \in U$. Тогда ***стоимость сетевого потока***, очевидно, равна $\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}$ (в примере 3.1 – это суммарные транспортные издержки).

Сетевая транспортная задача (СТЗ) (другие названия: ***транспортная задача в сетевой форме, задача о потоке минимальной стоимости***) имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$
$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \qquad i \in I, \qquad 0 \le x_{ij} \le d_{ij}, (i,j) \in U. \tag{2}$$

Сетевой поток x^0 – решение задачи (2) – называется ***оптимальным***. Обозначим через X множество всех сетевых потоков. Из условий баланса (1) следует, что если $X \ne \varnothing$, то

$$\sum_{i\in I} a_i = 0\,. \tag{3}$$

Для этого достаточно просуммировать по i все условия (1).

Условие (3) называется ***условием общего баланса***. Оно означает, что совокупный спрос равен совокупному предложению.

Рассмотрим сначала задачи, для которых выполняется условие общего баланса.

Базисный сетевой поток

Выделим некоторое множество дуг $U_Б \subset U$, причем $|U_Б| = m-1$. Можно показать, что частичная сеть $S_Б = \{I, U_Б\}$ является деревом сети. Обозначим $U_Н = U \setminus U_Б$.

Сетевой поток $x = \{x_{ij},\ (i,j)\in U\}$ называют ***базисным***, если $x_{ij} = = 0 \vee d_{ij},\ (i,j) \in U_Н$, а множество дуг $U_Б = U \setminus U_Н$, такое, что $S_Б = \{I, U_Б\}$ — дерево сети. ***Базисный сетевой поток не вырожден***, если $0 < x_{ij} < d_{ij},\ (i,j) \in U_Б$. Дуги $(i,j) \in U_Б$ и соответствующие им дуговые потоки x_{ij} назовем ***базисными***, x_{ij}, $(i,j) \in U_Н$, — ***небазисными***.

Совокупность $x = (x_{ij},\ (i,\ j) \in U)$, для которой выполняются условия баланса (3.10), называется ***псевдопотоком***. Если в псевдопотоке $0 \le x_{ij} \le d_{ij}, (i,j) \in U,$ то x – сетевой поток.

1.3.5. Критерий оптимальности базисного сетевого потока

Как и в симплекс-методе, вводятся потенциалы, которые в 1 вычислялись по базисной матрице $A_Б$ из векторного уравнения $A'_Б u = c_Б$. В задаче (3.11) $A_Б = (a_{ij}, (i, j)\in U_Б)$, $c'_Б = (c_{ij}, (i, j)\in U_Б)$. Поскольку у вектора a_{ij} на i-м месте стоит 1, на j-м -1, то получим систему уравнений для определения потенциалов (с точностью до знака вектора c по сравнению с симплекс-методом, поскольку задача на минимум)

$$u_i - u_j = -c_{ij},\ (i, j)\in U_Б. \tag{3.13}$$

Каждый потенциал u_i соответствует i-й строке основных ограничений, которая для задачи (3.11) представляет условие баланса для i-го узла. Следовательно, можно сказать, что каждому узлу приписывается потенциал. (На рисунках потенциалы узлов будем записывать рядом с узлами.) В системе (3.13) m неизвестных (по количеству узлов в сети) и $m-1$ уравнений (по количеству дуг $|U_Б| = m-1$). Следовательно, значение одного потенциала можно взять произвольно (чаще всего полагают равным нулю). Остальные потенциалы определяются однозначно, поскольку $\operatorname{rank} A_Б = m-1$, где $A_Б = (a_{ij}, (i, j)\in U_Б)$.

Далее, как и в симплекс-методе, подсчитываем оценки (см. формулы (1.15)), которые для задачи (3.11), если ее рассматривать на максимум, будут иметь вид

$$\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i - u_j),\ (i, j)\in U_Н. \tag{3.14}$$

Критерий оптимальности формулируется аналогично.

Теорема 3.1 (критерий оптимальности базисного сетевого потока). *Для оптимальности базисного сетевого потока x достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_{ij} \le 0,\ \textit{если}\ x_{ij} = 0;\quad \Delta_{ij} \ge 0,\ \textit{если}\ x_{ij} = d_{ij},\ (i, j)\in U_Н. \tag{3.15}$$

Заметим, что формула приращения стоимости сетевого потока имеет вид
$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U_Н} \Delta_{ij}\Delta x_{ij}.$$

Отсюда ясен ***физический смысл оценок***: *оценка Δ_{ij} — скорость изменения в точке x стоимости сетевого потока при увеличении небазисного дугового потока x_{ij}.*

1.3.6. Метод потенциалов для решения сетевой транспортной задачи. Итерация

Как видно из предыдущих разделов, этот метод является модификацией симплекс-метода. Поэтому в дальнейшем не будем приводить аналогию с соответствующими операциями симплекс-метода.

Пусть x — некоторый базисный сетевой поток, $U_Б$ — базисное множество дуг. ***Итерация метода потенциалов*** состоит из следующих шагов.

1. Решаем систему уравнений

$$u_i - u_j = -c_{ij},\ (i, j) \in U_Б$$

и находим потенциалы узлов. Каждый потенциал u_i соответствует i-й строке основных ограничений, которая для задачи (2) представляет условие баланса для i-го узла. Следовательно, можно сказать, что каждому узлу приписывается потенциал. (На рисунках потенциалы узлов будем записывать рядом с узлами.) В системе m неизвестных (по количеству узлов в сети) и m–1 уравнений (по количеству дуг $|U_Б| = m-1$). Следовательно, значение одного потенциала можно взять произвольно (чаще всего полагают равным нулю). Остальные потенциалы определяются однозначно, поскольку $\operatorname{rank} A_Б = m-1$, где $A_Б = (a_{ij}, (i, j) \in U_Б)$.

2. Подсчитываем оценки небазисных дуг по формулам

$$\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i - u_j),\ (i, j) \in U_Н.$$

3. Проверяем условия оптимальности

$$\Delta_{ij} \le 0,\ \textit{если}\ x_{ij} = 0; \quad \Delta_{ij} \ge 0,\ \textit{если}\ x_{ij} = d_{ij},\ (i, j) \in U_Н.$$

Если они выполняются, сетевой поток оптимален. Подсчитываем значение стоимости сетевого потока и решение задачи заканчиваем. В противном случае переходим к следующему шагу.

4. Выбираем дугу (i_0, j_0), для которой условия оптимальности не выполняются. Она может быть произвольной. Обычно ее выбирают из условия $|\Delta_{i_0 j_0}| = \max|\Delta_{ij}|$, где максимум берется по всем небазисным дугам, для которых не выполняются условия оптимальности.

Добавляем дугу (i_0, j_0) к базисному множеству дуг $U_Б$. Образуется ровно один цикл. Если $x_{i_0 j_0} = 0$, то обходим цикл в направлении $i_0 \to j_0$, если же $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$, то обход вдоль цикла совершаем в направлении $j_0 \to i_0$. Подсчитываем

$$\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & (i, j) \in U_Ц^+, \\ x_{ij}, & (i, j) \in U_Ц^-, \end{cases}$$

где $U_Ц^+$, $U_Ц^-$ – множества прямых и обратных дуг цикла соответственно.

5. Определяем $\theta^0 = \min\limits_{(i,j) \in U_Ц} \theta_{ij}$, где $U_Ц$ – множество всех дуг цикла.

Возможны две ситуации: *а*) $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, *б*) $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, $(i_*, j_*) \in U_Б$. Рассмотрим каждую из них.

а) Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, то базисное множество $U_Б$ оставляем прежним, меняем только базисный сетевой поток:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i, j) \in U_Ц^+; \\ x_{ij} - \theta^0, & (i, j) \in U_Ц^-; \\ x_{ij}, & (i, j) \in U \setminus U_Ц. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Поскольку в этом случае для дуги (i_0, j_0) условия оптимальности выполняются (небазисный дуговой поток $x_{i_0 j_0}$ перешел с одной границы на другую), то в случае отсутствия других дуг, для которых не выполняются условия оптимальности, решение заканчиваем: базисный поток (3.16) оптимален. В противном случае переходим к шагу 4.

б) Если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, тогда заменяем базисное множество дуг на новое $\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \bigcup (i_0, j_0)$, подсчитываем новый базисный поток по формулам (3.16) и переходим к шагу 1.

Метод решения задачи по описанным выше правилам называется ***методом потенциалов***.

Построение начального базисного сетевого потока. Первая фаза метода потенциалов

Как и для любого численного метода, для решения транспортной задачи необходим начальный базисный сетевой поток.

Метод построения начального базисного потока состоит в решении вспомогательной задачи, которая называется ***первой фазой метода потенциалов***. Ее суть состоит в следующем.

Возьмем любые дуговые потоки исходной задачи, лежащие на одной из границ $\tilde{x}_{ij} = 0 \vee d_{ij}$, $(i, j) \in U$. Подсчитываем невязки $\omega_i = a_i - \left(\sum_{j \in I_i^+} \tilde{x}_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \tilde{x}_{ji} \right)$. Вводим искусственный узел $m+1$ и соединяем его с узлом i искусственной дугой $(i,\ m+1)$, если $\omega_i \ge 0$, и искусственной дугой $(m+1,\ i)$, если $\omega_i < 0$.

Замечание. Если $\omega_i = 0$, искусственную дугу можно не вводить, дополнив искусственные дуги до базисного множества любой дугой (i, j) или (j, i) исходной задачи, чтобы только не образовался цикл.

Обозначим через $U_И$ множество искусственных дуг. ***Задача первой фазы***

$$\sum_{(i,j)\in U_И} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i,\ i=\overline{1,m+1},\ 0\le x_{ij}\le d_{ij},\ (i,j)\in U, \qquad (4)$$

$$0\le x_{ij}\le |\omega_i|,\ (i,j)\in U_И,$$

где $a_{m+1}=\sum_{i=1}^{m}\omega_i=0.$

Начальный базисный сетевой поток для задачи (4) имеет вид $\{\tilde{x},\ \ x_{ij}=|\omega_i|,\ \ (i,j)\in U_И\}$ с базисным множеством дуг $U_Б = U_И$.

Решение задачи (3.17) проводится по алгоритму, приведенному выше. Применение алгоритма приводит к решению $\{x^*,\ x_И^*\}$ с базисным множеством дуг $U_Б^*$.

Лемма 3.6. *Ограничения задачи* (3.11) *совместны тогда и только тогда, когда в решении* $\{x^*,\ x_И^*\}$ *задачи* (3.17) *искусственные дуговые потоки нулевые:* $x_{ij}^*=0,\ (i,j)\in U_И$.

Тогда если $x_И^*\ne 0$, то ограничения задачи (3.11) несовместны и решение заканчиваем. Если $x_И^*=0$ и в базисное множество дуг входит одна искусственная дуга, то отбрасываем искусственные дуги вместе с узлом $m+1$ и приступаем к решению исходной задачи (3.11) с построенным базисным сетевым потоком x^* и базисным множеством дуг $U_Б^*$ без удаленной искусственной дуги. Если $x_И^*=0$ и в базисное множество дуг входит более одной искусственной дуги, возьмем среди небазисных дуг исходной сети дугу (i_*, j_*), которая с базисными дугами образует цикл (см. лемму 3.5), причем в цикле будут две искусственные базисные дуги. Выведем одну из них из базиса, заменив ее дугой (i_*, j_*). Через конечное число шагов получим базисное множество, содержащее только одну искусственную дугу, т. е. придем к предыдущему случаю.

1.3.8. Открытая и закрытая модели СТЗ

Модель сетевой транспортной задачи называется ***закрытой***, если выполняется условие общего баланса (3), в противном случае – ***модель открытая***. Последнюю можно интерпретировать как задачу, в которой совокупный спрос не равен совокупному предложению. Если $a=\sum_{i=1}^{m}a_i<0$, спрос превышает предложение, если $a>0$ – предложение превышает спрос. Открытая модель легко сводится к закрытой. Пусть $a>0$. Добавим ***вспомогательный узел*** $m+1$ с интенсивностью $a_{m+1}=-a<0$, т. е. этот узел будет стоком. Соединим его с источниками дугами $(i,\ m+1)$ и положим $c_{i,m+1}=$

0. Если $a < 0$, то интенсивность $(m+1)$-го узла равна $a_{m+1} = |a|$, т. е. этот узел является источником. Соединяем его дугами $(m+1,\ i)$ со стоками и полагаем $c_{m+1,i} = 0$. Добавим ограничения на пропускные способности вспомогательных дуг. Обычно нижние ограничения полагают равными нулю, а верхние — числу a.

Далее применяем к расширенной задаче метод потенциалов, описанный ранее

Пусть x^0 – решение расширенной задачи. Тогда в первом случае значение $x^0_{i,m+1}$ означает оставшийся у i-го поставщика товар, во втором случае $x^0_{m+1,i}$ – недопоставка товара i-му потребителю.

Замечание. Для открытой модели можно избежать первой фазы. Для этого в обоих описанных выше случаях следует соединить вспомогательный узел со всеми остальными узлами сети дугами $(i,\ m+1)$ с источниками и нейтральными узлами и $(m+1,\ i)$ – со стоками, положив для всех этих дуг $c_{ij} = 0$. Все вспомогательные дуги образуют базисное множество дуг. Начальный базисный поток строится следующим образом: $x_{ij} = 0$ для всех дуг исходной сети, $x_{i,m+1} = a_i$, $x_{m+1,i} = |a_i|$ – для вспомогательных дуг.