ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ЦИКЛОВ ПОСЛЕ АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(дополнение к разделу 1.4)

Утверждение 1. *Пусть аффинное преобразование гнезда тесно вложенных циклов задают векторные таймирующие функции* $(t_1^{(\beta)}(J),\ldots,t_n^{(\beta)}(J))$, $1\leq\beta\leq K$ (*K – число выполняемых операторов тела циклов*). *Если для любой зависимости* $S_\alpha(I)\to S_\beta(J)$ *выполняется либо* $t_1^{(\beta)}(J)>t_1^{(\alpha)}(I)$, *либо* $(t_1^{(\beta)}(J),\ldots,t_n^{(\beta)}(J))=(t_1^{(\alpha)}(I),\ldots,t_n^{(\alpha)}(I))$, *то* n–1 *внутренних циклов преобразованного гнезда циклов являются параллельными.*

Утверждение 2. *Пусть* $t_1^{(\beta)}(J), t_2^{(\beta)}(J), \ldots, t_n^{(\beta)}(J)$ *– таймирующие функции, т.е. для любой зависимости* $S_\alpha(I)\to S_\beta(J)$ *выполняется* $t_1^{(\beta)}(J)\geq t_1^{(\alpha)}(I)$, $t_2^{(\beta)}(J)\geq t_2^{(\alpha)}(I)$,…, $t_n^{(\beta)}(J)\geq t_n^{(\alpha)}(I)$. *Если функции* $t_1^{(\beta)}(J), t_2^{(\beta)}(J), \ldots, t_n^{(\beta)}(J)$ *независимы* (*для фиксированных* β), *то функции* $(t_1^{(\beta)}(J)+t_2^{(\beta)}(J)+\ldots+t_n^{(\beta)}(J),$ $t_2^{(\beta)}(J), \ldots, t_n^{(\beta)}(J))$ *являются векторными таймирующими и задают преобразование гнезда тесно вложенных циклов, приводящее к* n–1 *параллельным внутренним циклам.*

Следствие. *Если для любой зависимости* $S_\alpha(I(i_1,\ldots,i_n))\to S_\beta(J(j_1,\ldots,j_n))$ *выполняется* $j_1\geq i_1$, … , $j_n\geq i_n$, *то векторная функция* $(j_1+\ldots+j_n,\ j_2,\ldots,j_n)$ *является таймирующей* (*для операций всех K операторов*) *и задает преобразование гнезда тесно вложенных циклов, приводящее к* n–1 *параллельным внутренним циклам.*

Утверждение 3. *Пусть преобразование гнезда тесно вложенных циклов задают векторные таймирующие функции* $(t_1^{(\beta)}(J),\ldots,t_n^{(\beta)}(J))$. *Если для любой зависимости* $S_\alpha(I)\to S_\beta(J)$ *выполняется* $t_1^{(\beta)}(J)=t_1^{(\alpha)}(I)$, *то самый внешний цикл преобразованного гнезда циклов является параллельным.*

Способы показать, что векторные функции $(t_1^{(\beta)}(i,j),t_2^{(\beta)}(i,j))$ являются таймирующими:

1. Воспользоваться определением векторной таймирующих функций. Для этого надо: 1) доказать независимость функций $t_1^{(\beta)}(i,j)$ и $t_2^{(\beta)}(i,j)$ (невырожденность матрицы *T*, фигурирующий в определении); 2) показать, что для любой зависимости $S_\alpha(I)\to S_\beta(J)$ имеет место $(t_1^{(\beta)}(J),t_2^{(\beta)}(J))\geq_{lex}(t_1^{(\alpha)}(I),t_2^{(\alpha)}(I))$, т.е. выполняется либо $t_1^{(\beta)}(J)>t_1^{(\alpha)}(I)$, либо $t_1^{(\beta)}(J)=t_1^{(\alpha)}(I)$, $t_2^{(\beta)}(J)\geq t_2^{(\alpha)}(I)$.

2. Воспользоваться (раздел 2.2) теорией получения таймирующих функций: рассмотреть подходящие строки матрицы $(P|B)$.

Способы обосновать параллельность внутреннего цикла после применения к алгоритму аффинного преобразования, задаваемого векторными таймирующими функциями $(t_1^{(\beta)}(i,j), t_2^{(\beta)}(i,j))$:

1. Воспользоваться утверждением 1: показать, что для любой зависимости $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$ выполняется либо $t_1^{(\beta)}(J) > t_1^{(\alpha)}(I)$, либо $t_1^{(\beta)}(J) = t_1^{(\alpha)}(I)$, $t_2^{(\beta)}(J) = t_2^{(\alpha)}(I)$. Если предварительно показывалось, что векторные функции $(t_1^{(\beta)}(i,j), t_2^{(\beta)}(i,j))$ являются таймирующими, то во многом можно сослаться на уже показанное.

2. Воспользоваться утверждением 2: указать таймирующие функции $t_{\mathrm{I}}^{(\beta)}(i,j)$ и $t_{\mathrm{II}}^{(\beta)}(i,j)$ такие, что $t_1^{(\beta)}(i,j) = t_{\mathrm{I}}^{(\beta)}(i,j) + t_{\mathrm{II}}^{(\beta)}(i,j)$, $t_2^{(\beta)}(i,j) = t_{\mathrm{II}}^{(\beta)}(i,j)$.

3. Воспользоваться теорией получения таймирующих функций: получить подходящие строки матрицы $(P|B)$, т.е. получить таймирующие функции, указанные в первом или втором способе.

Способы обосновать параллельность внешнего цикла после применения к алгоритму аффинного преобразования, задаваемого векторными таймирующими функциями $(t_1^{(\beta)}(i,j), t_2^{(\beta)}(i,j))$:

1. Воспользоваться утверждением 3: показать, что для любой зависимости $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$ выполняется $t_1^{(\beta)}(J) = t_1^{(\alpha)}(I)$. Если предварительно показывалось, что векторные функции $(t_1^{(\beta)}(i,j), t_2^{(\beta)}(i,j))$ являются таймирующими, то во многом можно сослаться на показанное.

2. Воспользоваться теорией получения таймирующих функций: получить подходящую строку матрицы $(P|B)$, т.е. получить таймирующую функцию, указанную в первом способе.