

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Основные прямые и итерационные методы решения СЛАУ: Гаусса и его разновидности, отражений, вращений, простой итерации, Якоби, Зейделя, Гаусса-Зейделя, релаксации.

Рассмотрим задачу решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax=b,$$

где  $A$  является матрицей порядка  $n$ , векторы  $x$  и  $b$  являются  $n$ -мерными векторами. Предполагается, что определитель матрицы  $A$  отличен от нуля, так что решение  $x$  существует и единственно.

К решению СЛАУ сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики. Методы решения СЛАУ принято разделять на прямые (другое название – точные) и итерационные.

Метод решения СЛАУ относят к классу прямых, если он позволяет получить решение в точном виде после конечного числа операций, выполняемых без округлений (т.е. фактически речь идет об отсутствии погрешности метода). В случае итерационных методов точное решение можно получить лишь в пределе некоторого бесконечного процесса. В настоящее время можно говорить о том, что точные методы применяются при решении систем до порядка  $10^6$ , итерационные – до порядка  $10^{10}$ . При большем порядке используются вероятностные методы типа Монте-Карло.

В качестве основных прямых методов назовем метод Гаусса, метод на основе разложения симметричных матриц, метод прогонки, метод отражений, метод вращений. В качестве основных итерационных методов назовем метод простой итерации, метод Якоби, Зейделя, Гаусса-Зейделя, метод релаксации.

### Основные прямые методы решения СЛАУ

Метод Гаусса без выбора ведущего элемента состоит в том, что сначала система уравнений приводится к треугольному виду элементарными строчными преобразованиями без использования перестановки строк и/или столбцов (прямой ход), а затем неизвестные выражаются из полученной системы (обратный ход). Такая вычислительная схема накладывает некоторые ограничения на СЛАУ: для допустимости вычислений необходимо и достаточно отличие от нуля всех угловых миноров матрицы.

Метод Гаусса тесно связан с так называемым LU-разложением матрицы системы. LU-разложением матрицы  $A$  называется её представление в виде  $A=LU$ , где  $L$  – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю,  $U$  – верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами.

Теорема об LU-разложении: Для того чтобы существовало LU-разложение матрицы  $A$  необходимо и достаточно отличие от нуля всех её угловых миноров. LU-разложение единственно.

Применение метода Гаусса к системе  $Ax=b$  допускает следующую реализацию: получение LU-разложения  $A=LU$ , решение системы  $Ly=b$  с нижней треугольной матрицей, решение системы  $Ux=y$  с верхней треугольной матрицей.

Алгоритм исключений Гаусса является неустойчивым: в случае относительной малости ведущего элемента (диагонального элемента преобразуемой матрицы, ниже которого обнуляются элементы столбца) процесс вычислений приводит к накоплению погрешностей.

Преодолеть этот недостаток в значительной мере можно путем включения в алгоритм метода исключений схемы выбора ведущего элемента по строке, по столбцу или по всей преобразуемой подматрице. В качестве главного выбирается наибольший по модулю элемент. Наиболее используемым на практике является вариант с выбором главного элемента по столбцу. Схемы выбора ведущего элемента не гарантируют устойчивость (т.е. низкую чувствительность к погрешностям вычислений) метода Гаусса, но в значительной степени уменьшают влияние вычислительной погрешности на отклонение полученного результата от настоящего решения задачи.

Вычислительная сложность (требуемое для выполнения алгоритма число арифметических операций умножения и деления) метода Гаусса составляет величину порядка  $\frac{1}{3}n^3$ .

Если рассмотреть симметричную ( $A=A^T$ ) матрицу, то можно осуществлять LU-разложение (так называемое  $LDL^T$ -разложение) и решать системы  $Ax=b$  с меньшими, чем в общем случае, вычислительными затратами: требует порядка  $\frac{1}{6}n^3$  операций (умножения и деления).

Этапы получения решения для случая  $LDL^T$ -разложения: получение разложения  $A=LDL^T$ , решение системы  $Ly=b$  с нижней треугольной матрицей; решение системы  $Dz=y$  с диагональной матрицей; решение системы  $L^Tx=z$  с верхней треугольной матрицей.

Ещё одна из важнейших для приложений разновидность метода Гаусса – метод прогонки. Метод прогонки есть метод Гаусса без выбора ведущего элемента, примененный к системе уравнений с трехдиагональной матрицей.

Алгоритм метода прогонки для решения СЛАУ состоит из двух этапов: прямая прогонка – вычисление прогоночных коэффициентов, обратная прогонка – вычисление решения. Прогонка относится к алгоритмам с линейной сложностью

Метод прогонки применяется, если матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания по строкам. Диагональное преобладание означает, что в каждой строке сумма абсолютных значений всех элементов вне главной диагонали меньше (строгое преобладание) или равна абсолютной величины диагонального элемента. На практике часто (например, при решении сеточных задач) матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания. Для применимости метода прогонки хотя бы в одной строке преобладание должно быть строгим.

Метод отражений, называемый также методом Хаусхолдера, используется для получения так называемого QR-разложения квадратной матрицы порядка  $n$  и для решения систем линейных алгебраических уравнений. QR-разложением (или ортогональным разложением) матрицы  $A$  называется её представление в виде  $A=QR$ , где  $Q$  – ортогональная матрица,  $R$  – верхняя треугольная матрица.

Метод отражений, как и метод Гаусса, состоит в том, что сначала система уравнений приводится к треугольному виду, а затем неизвестные выражаются из полученной системы. В отличие от метода Гаусса, система уравнений приводится к треугольному виду посредством ортогональных преобразований, задаваемых так называемыми матрицами отражений.

Метод отражений требует порядка  $\frac{2}{3}n^3$  операций умножения и деления; вычислительная сложность при больших  $n$  примерно в 2 раза больше, чем вычислительная сложность метода Гаусса. Тем не менее, методы решения СЛАУ, основанные на ортогональных преобразованиях, также используются на практике, так как обладают важным достоинством: преобразования посредством ортогональных матриц не увеличивают число обусловленности  $\nu(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$  исходной системы, а чем меньше число обусловленности, тем вычисления более устойчивы. Прямой ход метода Гаусса приводит к ухудшению обусловленности исходной системы и обратный ход может сопровождаться большой потерей точности.

Метод вращений, называемый также методом Гивенса, используется, как и метод отражений, для получения QR-разложения квадратной матрицы порядка  $n$  и для решения систем линейных алгебраических уравнений. Преобразуемая матрица приводится, столбец за столбцом, к треугольному виду с помощью ортогональных матриц, которые носят название матриц вращения. Решение СЛАУ сводится к следующим этапам: преобразовать исходную систему  $Ax=f$  и получить систему с верхней треугольной матрицей; решить систему с верхней треугольной матрицей, т.е. выполнить обратный ход, аналогичный обратному ходу метода Гаусса. Метод вращений, как и метод отражений, обладает важным достоинством: преобразования матрицы, осуществляемые при реализации метода, не увеличивают число обусловленности матрицы.

Метод вращений требует порядка  $\frac{4}{3}n^3$  операций умножения и деления. Вычислительная сложность при больших  $n$  примерно в 2 раза больше, чем вычислительная сложность метода Хаусхолдера (и в 4 раза больше, чем вычислительная сложность метода Гаусса). Тем не менее, метод Гивенса также используется на практике.

### **Основные итерационные методы решения СЛАУ**

Пусть система  $Ax=f$  каким-либо способом приведена к так называемому виду, пригодному (говорят ещё удобному, подходящему) для итераций:

$$x=Bx+b.$$

Метод простой итерации состоит в следующем: выбирается вектор  $x^{(0)}$  (например,  $x^{(0)}=0$  или  $x^{(0)}=b$ ) и строится последовательность векторов по формуле

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+b.$$

Если эта последовательность сходится, т.е.  $x^{(k)} \rightarrow x^{(\infty)}$  при  $k \rightarrow \infty$ , то это предельное значение  $x^{(\infty)}$  будет решением нашей системы. Действительно, переходя к пределу в равенстве  $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+b$ , получим  $x^{(\infty)}=Bx^{(\infty)}+b$ .

*Критерий сходимости: Для того чтобы метод простой итерации сходиллся при любом начальном приближении  $x^{(0)}$ , необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $B$  были по модулю меньше единицы.*

Этот критерий не очень удобен для практического применения, так как требует информации о собственных значениях матрицы  $B$ . Можно сформулировать более простой достаточный признак сходимости:

*Для того чтобы метод простой итерации сходиллся при любом начальном приближении  $x^{(0)}$ , достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы  $B$  была меньше единицы.*

Скорость сходимости:

*Если  $\|B\|<1$ , метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным  $\|B\|$ .*

Самым известным и применяемым на практике частным случаем метода простой итерации является метод Якоби:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для того чтобы привести матрицу  $A$  к виду, пригодному итераций, каждое уравнение следует разрешить относительно неизвестного, стоящего при диагональном элементе.

*Если матрица  $A$  обладает свойством строгого диагонального преобладания, то метод Якоби сходится со скоростью геометрической прогрессии, причем чем строже диагональное преобладание, тем быстрее сходимость.*

Как уже отмечалось, на практике часто матрица  $A$  обладает свойством строгого диагонального преобладания.

В методе Зейделя вычисления похожи на вычисления метода простой итерации, но, в отличие от метода простой итерации, каждая координата  $(k+1)$ -го приближения сразу после получения (т.е. уже «уточненная») используется для вычисления («уточнения») следующих координат. Для применения метода Зейделя, как и для применения метода простой итерации, система  $Ax=f$  должна быть приведена к виду, пригодному для итераций  $x=Bx+b$ .

Пусть матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания по строкам. Применим тот же способ получения матрицы  $B$  и вектора  $b$ , который

приводит метод простой итерации к методу Якоби. Метод Зейделя с такой матрицей  $B$  и таким вектором  $b$  называется методом Гаусса-Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод Гаусса-Зейделя является аналогом метода Якоби. В отличие от метода Якоби, каждая координата  $(k+1)$ -го приближения сразу после получения используется для вычисления следующих координат.

*Пусть диагональное преобладание в каждой строке матрицы  $A$  строгое. Тогда метод Гаусса-Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии, причем чем строже диагональное преобладание, тем быстрее сходимость.*

Рассмотрим взвешенную сумму текущего приближения и приближения, построенного по методу Гаусса-Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Это алгоритм, который в литературе называют методом последовательной верхней релаксации, SOR-методом (SOR – successive over relaxation). Метод последовательной верхней релаксации является одним из наиболее широко используемых на практике методов решения СЛАУ.

При  $\omega=1$  метод релаксации есть метод Гаусса-Зейделя. На практике обычно  $1 < \omega < 2$ , так как часто именно в таких пределах находится оптимальное значение  $\omega$ , обеспечивающее наиболее быструю сходимость.

На практике окончание итераций при использовании итерационных методов определяется либо максимальным заданным числом итераций  $k_{\max}$ , либо условием

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  – заданное число.