Задание 4

Сергиенко Лев

Вариант 25

Найти точки локального минимума (максимума) следующих функций:

25. $f(X) = (x_1 + x_2)(x_1 - a)(x_2 - b)$

$$f(x) = (x_1^2 - a x_1 + x_1 x_2 - a x_2)(x_2 - b) =$$
$$= x_1^2 x_2 - a x_1 x_2 + x_1 x_2^2 - a x_2^2 - b x_1^2 +$$
$$+ ab x_1 - b x_1 x_2 + ab x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - a x_2 + x_2^2 - 2b x_1 + ab - b x_2 =$$
$$= (x_2 - b)(2x_1 + x_2 - a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 - a x_1 + 2x_1 x_2 - 2a x_2 - b x_1 + ab =$$
$$= (x_1 - a)(2x_2 + x_1 - b)$$

$$\begin{cases} (x_2 - b)(2x_1 + x_2 - a) = 0 \\ (x_1 - a)(2x_2 + x_1 - b) = 0 \end{cases}$$

1: (a, b), 2: $(a, -a)$, 3: $(-b, b)$, 4: $\left(\frac{a - \frac{2b-a}{3}}{2}, \frac{2b-a}{3}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^2} = 2x_2 - 2b \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2x_1 - a + 2x_2 - b$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2^2} = 2x_1 - 2a$$

$$\begin{pmatrix} 2x_2-2b & 2x_1-a+2x_2-b \\ 2x_1-a+2x_2-b & 2x_1-2a \end{pmatrix}$$

$$1: \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -(a+b)^2 \end{matrix} \Rightarrow$$

план не локально оптимален, т.к. применяя критерий Сильвестра, матрица не знакоопределена

$$2: \begin{pmatrix} -2a-2b & -a-b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = -2(a+b) \\ \Delta_2 = -(a+b)^2 \end{matrix}$$

$a+b=0 \Rightarrow$ не знак.
$\Rightarrow a+b<0 \Rightarrow$ не знак.
$a+b>0 \Rightarrow$ не знакоопр.

$$3: \begin{pmatrix} 0 & -a-b \\ -a-b & -2b-2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -(a+b)^2 \end{matrix} \Rightarrow \text{не знакоопр.}$$

$$4: \begin{pmatrix} -\frac{2a+2b}{3} & -\frac{a+b}{3} \\ -\frac{a+b}{3} & -\frac{2a+2b}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = -2\cdot\frac{a+b}{3} \\ \Delta_2 = \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $a+b=0 \Rightarrow$ не знакоопр.
$a+b>0 \Rightarrow$ отрицательно определена
$a+b<0 \Rightarrow$ положительно определена

$$F\left(\frac{a-\frac{2b-a}{3}}{2}, \frac{2b-a}{3}\right) = \cancel{\frac{b(a+b)^2}{27}} \left(\frac{3a-2b+a}{6} + \frac{4b-2a}{6}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{3a-2b+a}{6} - \frac{6a}{6}\right)\left(\frac{2b-a}{3} - \frac{3b}{3}\right) = \frac{a+b}{3}\cdot\left(-\frac{a+b}{3}\right) \times$$

$$\times \left(-\frac{a+b}{3}\right) = \frac{(a+b)^3}{27}$$

Ответ: в точке $\left(\frac{a-\frac{2b-a}{3}}{2}, \frac{2b-a}{3}\right)$ локальный минимум, если $a+b<0$, локальный максимум, если $a+b>0$, равный $\frac{(a+b)^3}{27}$