## 0.1. Матричные транспортные задачи (МТЗ)

Матричные транспортные задачи являются частным случаем сетевых транспортных задач — это задачи о минимальном потоке на простой сети, изображенной на рис. 1. Здесь множество узлов разбито на два непересекающихся подмножества — источники $I_1$ и стоки $I_2$, причем каждый источник соединен дорогами с каждым стоком: $U = \{(i_1, i_2), i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$. В силу специфики этих задач их решение осуществляется в другой по сравнению с СТЗ форме — в матричной форме.

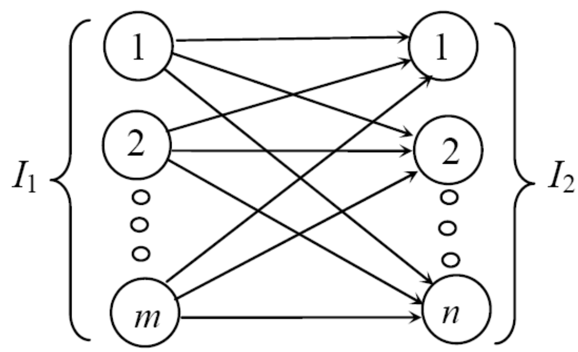


Рис. 1: Матричная транспортная задача — сетевая транспортная задача

Введем транспортную $m \times n$ таблицу, в которой строкам соответствуют пункты производства (источники) $A_i$, $i \in I_1$, а столбцам — пункты потребления (стоки) $B_j$, $j \in I_2$. Объем производства запишем справа от строки, объем потребления — снизу столбца. Клетка $(i, j)$ соответствует дороге из $A_i$ в $B_j$. Клетку разделим на шесть частей как указано на рис. 2, где $c_{ij}$ — стоимость перевозки, $d_{ij}$ — пропускная способность дороги (верхнее ограничение на поток: $0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$), $x_{ij}$ — величина перевозки, $\Delta_{ij}$ — оценка перевозки, $l_{ij}$ — направление (в клетку будем записывать или $+$ или $-$ в зависимости от того, равен шаг $1$ или $-1$), $\theta_{ij}$ — шаг.

Условия баланса в узлах сводятся к следующим равенствам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n},$$

а условие общего баланса имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

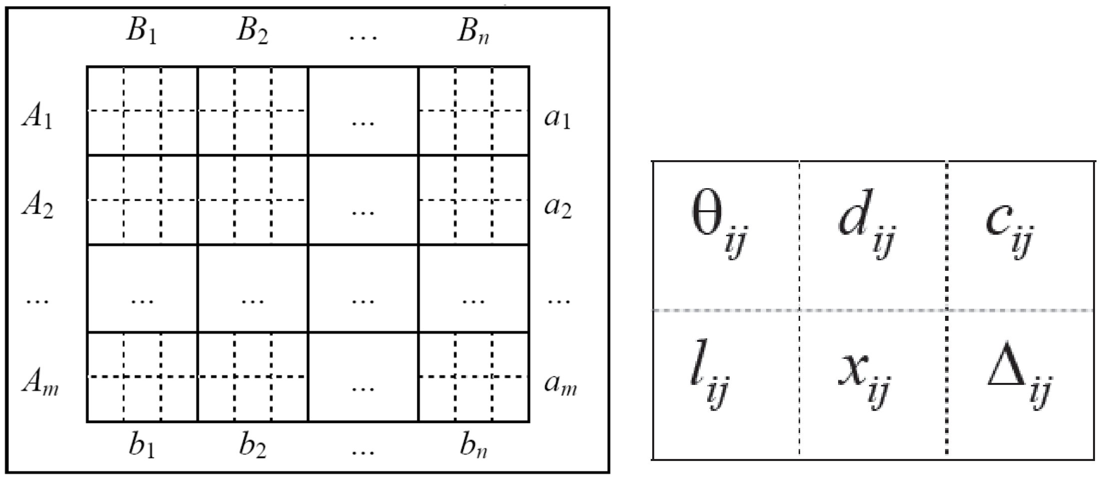


Рис. 2: Матричная транспортная задача: Клетка и ее данные

**Определение 0.1.** Множество клеток называется базисным, если оно состоит из $m+n-1$ клетки, и из его элементов невозможно составить ни одного цикла. Остальные клетки таблицы — небазисные.

**Определение 0.2.** План перевозок называется базисным, если его небазисные компоненты принимают граничные значения: $x_{ij} = 0 \bigvee d_{ij}$.

### 0.2. Построение начального базисного потока

В классической задаче без ограничений на перевозки существует несколько правил построения начального базисного плана перевозок: северо-западного угла, минимального элемента, Фогеля, двойного предпочтения и др. Отметим, что как показывает практика, более близкий к оптимальному первоначальный план получается по правилу Фогеля, затем двойного предпочтения, минимального элемента и, наконец, по правилу северо-западного угла, хотя это и необязательно, о чем свидетельствуют приведенные ниже примеры.

*Правило северо-западного угла.* Заполняем клетку $(1,1)$, в которую помещаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Если $x_{11} = a_1$, тогда вычеркиваем первую строку и рассматриваем уменьшенную транспортную таблицу, в которой вместо $b_1$ полагаем $\bar{b}_1 = b_1 - a_1$. Если $x_{11} = b_1$, тогда вычеркиваем первый столбец, а в уменьшенной транспортной таблице полагаем

$\bar{a}_1 = a_1 - b_1$. В обоих случаях в уменьшенной матричной таблице опять по тому же правилу заполняем клетку в левом верхнем углу (северо-западный угол) и т.д. Поскольку на каждом шаге вычеркивается либо одна строка, либо один столбец, то через $n+m-1$ шагов останется не вычеркнутой либо строка, либо столбец, но заполненными будут $n+m-1$ клеток. Они и образуют базисное множество клеток. В незаполненных клетках полагаем $x_{ij} = 0$. Построенный вектор $x = (x_{ij}, (i,j) \in U_Б)$ и будет базисным планом перевозок. Если на каком-то шаге окажется, что минимум достигается одновременно на обоих элементах ($x_{ij} = a_i = b_j$), тогда вычеркивается либо только $i$-я строка, либо только $j$-й столбец. В результате на следующем шаге базисная перевозка будет нулевой, т.е. построенный базисный план перевозок будет вырожденным.

Пример построения начального базисного плана перевозок по методу северо-западного угла приведен на рис. 3.

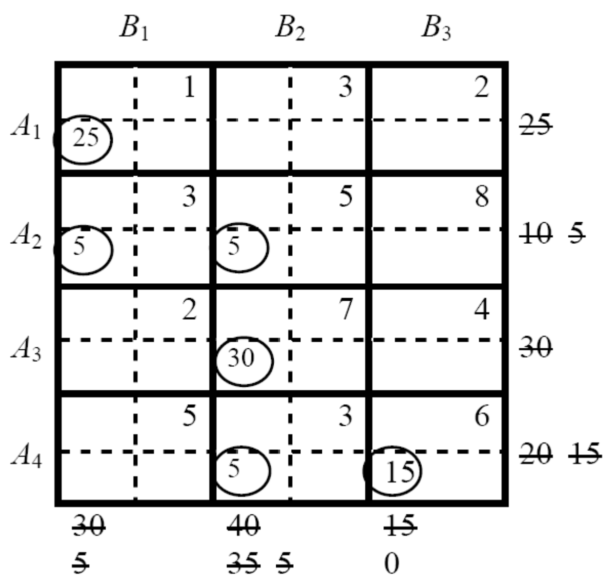


Рис. 3: Пример 1: Метод северо-западного угла

*Правило минимального элемента (минимальной стоимости).* Отличается от предыдущего правила только выбором клетки заполнения. Если в предыдущем случае на каждом шаге выбиралась клетка в левом верхнем углу таблицы, то теперь каждый раз выбираем из всех клеток уменьшенной по тем же правилам транспортной таблицы клетку с минимальной стоимостью перевозок.

Пример построения начального базисного плана перевозок по методу минимального элемента приведен на рис. 4.

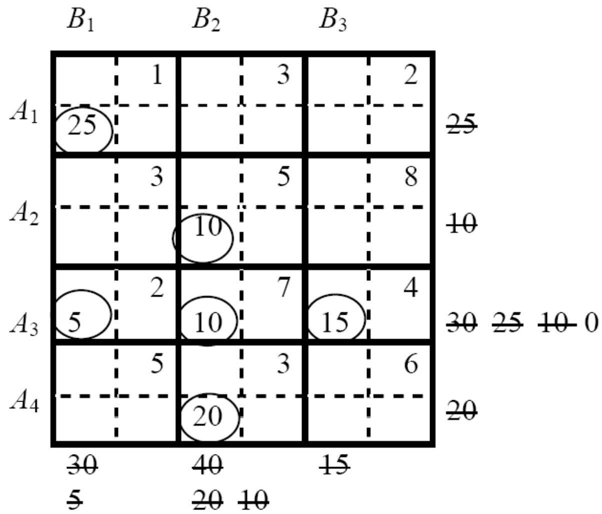


Рис. 4: Пример 1: Метод минимального элемента

*Правило двойного предпочтения.* Если транспортная таблица велика, то правило минимального элемента вызывает определенные затруднения с выбором клетки с минимальным тарифом. В этом случае более предпочтительно следующее правило построения начального базисного плана перевозок.

В каждой строке и в каждом столбце помечаем клетки с минимальной стоимостью. В результате получим некоторые клетки, которые помечены дважды. Это означает, что в них минимальная стоимость как по строке, так и по столбцу. На практике будем помечать эти клетки знаком . По тому же правилу, что и в предыдущих случаях, заполняем сначала клетки, помеченные дваж-ды, вычеркивая каждый раз строку или столбец. Затем заполняем клетки, помеченные один раз. Наконец, в уменьшенной таблице по правилу минимального элемента заполняем недостающие клетки.

Пример построения начального базисного плана перевозок по методу двойного предпочтения приведен на рис. 5.

### 0.3. * Построение начального базисного потока в задаче с ограничеными на перевозки методом проб и ошибок

В задаче с ограничениями начальный базисный план строится по одному из перечисленных правил, однако при заполнении клетки (i, j) теперь минимум берется не из величин $a_i$, $b_j$, а из трех величин $a_i$, $b_j$, $d_{ij}$:

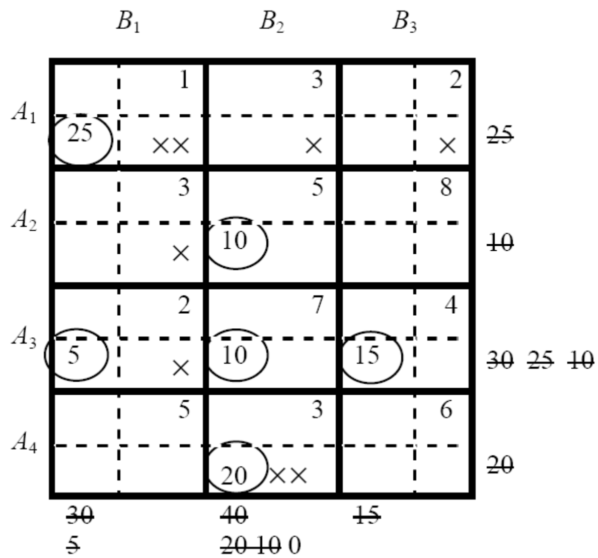


Рис. 5: Пример 1: Метод двойного предпочтения

$x_{ij} = \min\{a_i, b_j, d_{ij}\}$. Если $x_{ij} = d_{ij}$, то вычеркивается только эта клетка, причем она будет небазисной (обведем $d_{ij}$ в клетке в квадрат), а на следующем шаге значения $a_i$, $b_j$ уменьшаются на величину $d_{ij}$. Если же $x_{ij} = a_i \bigvee b_j$, то вычеркивается либо $i$-я строка, либо $j$-й столбец, как и для задач с односторонними прямыми ограничениями. В последних случаях заполненная клетка будет базисной. Во всех остальных незаполненных клетках стоят небазисные нулевые перевозки.

При построении начального базисного плана перевозок на последнем шаге возможна ситуация: $\alpha = a_{i_1} = b_{j_1} \neq 0$, но клетка $(i_1, j_1)$ либо уже заполнена (небазисная), либо $d_{i_1 j_1} < \alpha$ (в последнем случае полагаем $x_{i_1 j_1} = d_{i_1 j_1}$, т.е. клетка становится небазисной, заполненной, как в первом случае, и обозначаем $\alpha := \alpha - d_{i_1 j_1}$).

Тогда в столбце $B_{j_1}$ (или строке $A_{i_1}$) находим

— либо незаполненную клетку $(i_2, j_1)$ (или $(i_1, j_2)$) такую, чтобы ограничение было больше $\alpha$: $d_{i_1 j_1} > \alpha$,

— либо базисную, в которой перевозка не на границе.

Рассмотрим оба случая.

Если клетка не заполнена, то помещаем в нее перевозку $\alpha$ и вычеркиваем соответственно столбец или строку. Клетку считаем базисной. Если при этом образовался цикл, то в нем отыскиваем базисную клетку с граничной перевозкой (она всегда существует) и выводим ее из базиса. На одном из по-

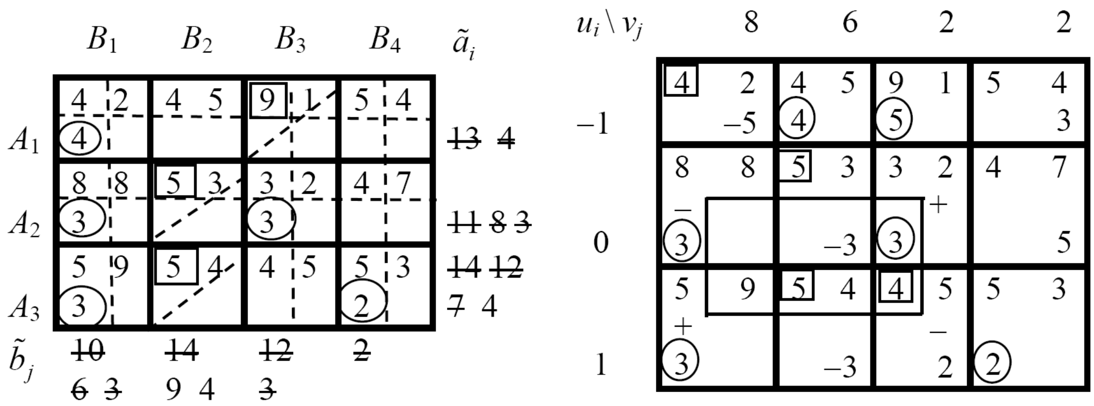

Рис. 6: Пример 2: Метод минимального элемента

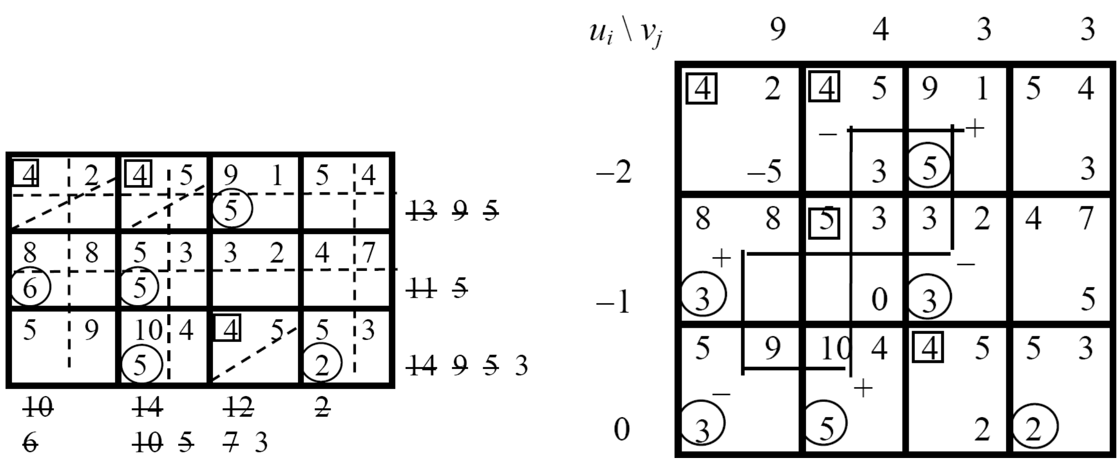

Рис. 7: Пример 2: Метод северо-западного угла

следующих шагов обязательно добавляем базисную клетку. Поскольку для строки $A_{i_2}$ нарушилось условие баланса, то необходимо из какой-либо из заполненных в этой строке клеток вычесть значение $\alpha$. Лучше всего взять клетку $(i_2, j_2)$ такую, что клетка $(i_1, j_2)$ является незаполненной. В этом случае будем иметь $\bar{x}_{i_2 j_2} = x_{i_2 j_2} - \alpha$, $x_{i_1 j_2} = \alpha$. Если клетка $(i_2, j_2)$ была небазисной и $\bar{x}_{i_2 j_2}$, то она становится базисной. Если при этом образовался цикл, поступаем, как и выше.

Если клетка $(i_2, j_1)$ была базисной, то увеличиваем в ней перевозку и поступаем дальше, как и в первом случае. Иногда приходится сделать больше шагов для окончательного построения начального базисного плана перевозок.

## 0.4. Метод потенциалов решения матричных транспортных задач

Пусть найден начальный базисный план перевозок.

**Алгоритм метода потенциалов:**

1) Строкам поставим в соответствие потенциалы $u_i$, $i=\overline{1,m}$, столбцам — $v_j$, $j=\overline{1,n}$, (на рисунках записываем слева от строк и над столбцами). Общая формула для вычисления потенциалов имеет вид (по книге):
$$u_i+v_j=-c_{ij},\quad (i,j)\in U_Б,$$
а на практике поступают следующим образом: для некоторой строки или столбца (как правило, с наибольшим числом базисных клеток) полагают потенциал равным $0$.

*Замечание* 0.1. Возможно, в Лекциях потока ПМ другой знак:
$$u_i+v_j=c_{ij},\ (i,j)\in U_Б.$$

2) Подсчитываем оценки (записываем их в клетку):
$$\Delta_{ij}=-c_{ij}-(u_i+v_j),\quad (i,j)\in U_H.$$

*Замечание* 0.2. Возможно, в Лекциях потока ПМ другой знак:
$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j),\ (i,j)\in U_H.$$

3) Проверяем условия оптимальности:
$$\Delta_{ij}\le 0 \text{ при } x_{ij}=0,$$
$$\Delta_{ij}\ge 0 \text{ при } x_{ij}=d_{ij},\quad (i,j)\in U_H.$$
При их выполнении сетевой поток $x$ оптимален, решение прекращаем. Иначе переходим к следующему шагу.

4) Выберем клетку $(i_0, j_0)$:

$$|\Delta_{i_0 j_0}| = \max |\Delta_{ij}|,$$

где максимум берется по всем небазисным клетках, на которых нарушаются условия оптимальности.

Эту клетку будем добавлять в базис. Вместе с другими базисными клетками получится ровно один цикл.

Этой клетке припишем знак $+$, если $x_{i_0 j_0} = 0$, и знак $-$, если $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$. Начиная с этой клетки, обойдем цикл, чередуя знаки $+$ и $-$.

5) Для клеток цикла подсчитаем шаги

$$\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & \text{если } (i,j) - \text{клетка со знаком}+; \\ x_{ij}, & \text{если } (i,j) - \text{клетка со знаком}-, \end{cases}$$

и минимальный шаг

$$\theta^0 = \min_{(i,j) \in \text{циклу}} \theta_{ij}.$$

6) Построим новый базисный план перевозок:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & \text{если } (i,j) - \text{клетка со знаком}+; \\ x_{ij} - \theta^0, & \text{если } (i,j) - \text{клетка со знаком}-; \quad (i,j) \in U. \\ x_{ij} & \text{если } (i,j) - \text{не из цикла}, \end{cases}$$

7) Отметим новое базисное множество клеток: если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, то $\bar{U}_Б = U_Б$, если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, то

$$\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_* j_*)) \cup (i_0, j_0).$$

### 0.5. Пример: задача с ограничениями на потоки, прямой метод

Решим пример 2, взяв в качестве начального потока построенный по методу минимального элемента. Ниже в таблице представлена первая итерация, переход к новому базису (план остается прежним), и доказательство оптимальности полученного плана (потенциалы и оценки подсчитаны как на лекциях групп ПМ, смю задачник).

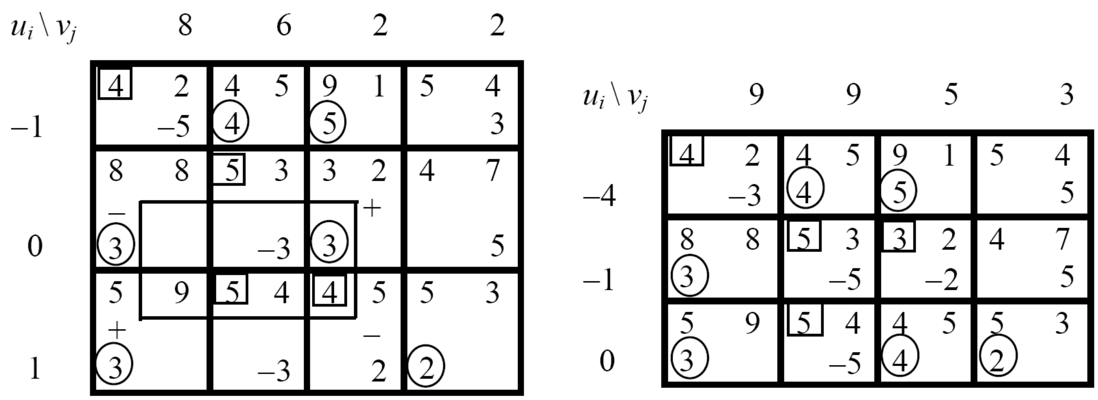


Рис. 8: Пример 2

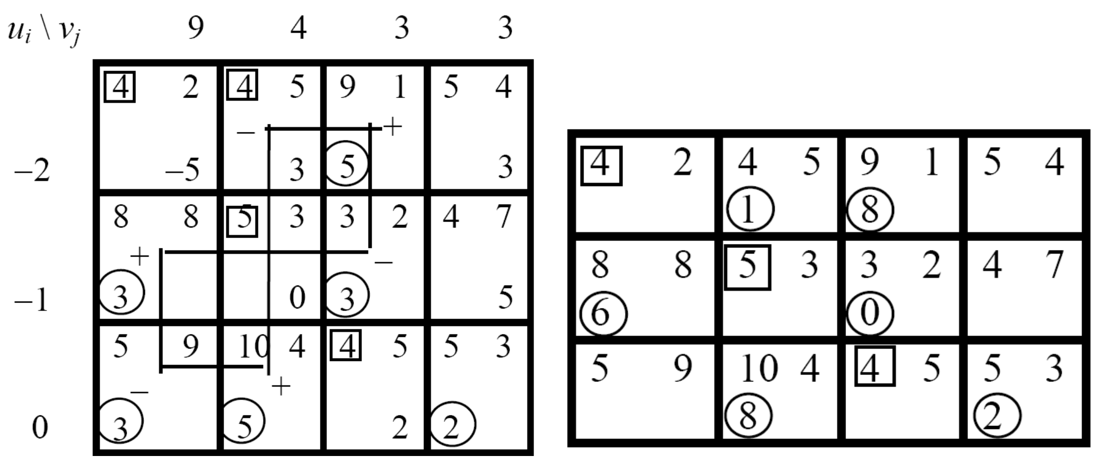


Рис. 9: Пример 2

Решим пример 2, взяв в качестве начального потока построенный по методу северо-западного угла. Ниже в таблице представлена первая итерация и переход к новому базису.

### 0.6. Первая фаза для матричной транспортной задачи

Для построения начального базисного плана перевозок используется **первая фаза** метода потенциалов, которая состоит в следующем.

Добавляется искусственный пункт производства $A_{m+1}$ (искусственная строка) $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ и искусственный пункт потребления $B_{n+1}$ (искусственный столбец) с интенсивностью $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Стоимость перевозок

$= 0$ для клеток исходной таблицы и клетки $(m+1, n+1)$ (она не считается искусственной);

$= 1$ для искусственных клеток.

Начальный базис — все искусственные клетки. Начальный поток:
$x_{ij} = 0$ для клеток исходной таблицы и клетки $(m+1, n+1)$;
$x_{m+1,j} = b_j$ для искусственной строки;
$x_{i,n+1} = a_i$ для искусственного столбца.

Задача первой фазы решается методом потенциалов.

В результате решения задачи первой фазы получим оптимальный план перевозок $x^*$ с базисным множеством клеток $U_Б^*$, который обладает одним из следующих свойств:

1) существует клетка $(i_*, j_*) \in U_И$, что $x_{i_*, j_*} \neq 0$;

2) $x_{ij}^0 = 0$, $(i,j) \in U_И$; среди базисных клеток имеется лишь одна искусственная;

3) $x_{ij}^0 = 0$, $(i,j) \in U_И$; среди базисных клеток имеется больше одной искусственной.

В случае 1 исходная задача не имеет решения.

В случае 2 отбрасываем искусственные строку и столбец. Получим начальный базисный поток исходной задачи.

В случае 3 возьмем среди небазисных клеток исходной таблицы клетку $(i_*, j_*)$, которая с базисными клетками образует цикл. Выведем искусственную из базиса, заменив ее клеткой $(i_*, j_*)$. Через конечное число шагов придем к случаю 2.

Составим и решим задачу первой фазы для следующего примера 3 (пособие).

| | $B_1$ | | | $B_2$ | | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | 3 | 1 | | 15 | 3 | 12 |
| $A_2$ | | 9 | 4 | | 7 | 5 | 11 |
| $A_3$ | | 11 | 2 | | 17 | 1 | 23 |
| $b_j$ | 10 | | | 36 | | | |

Рис. 10: Пример 3

Итерации первой фазы приведены в таблицах на рис. 11. В последней таблице получено решение задачи первой фазы, все искусственные переменные равны нулю. Удалим третий столбец и четвертую строку, переходим к решению задачи второй фазы (см. таблицы на рис. 12)

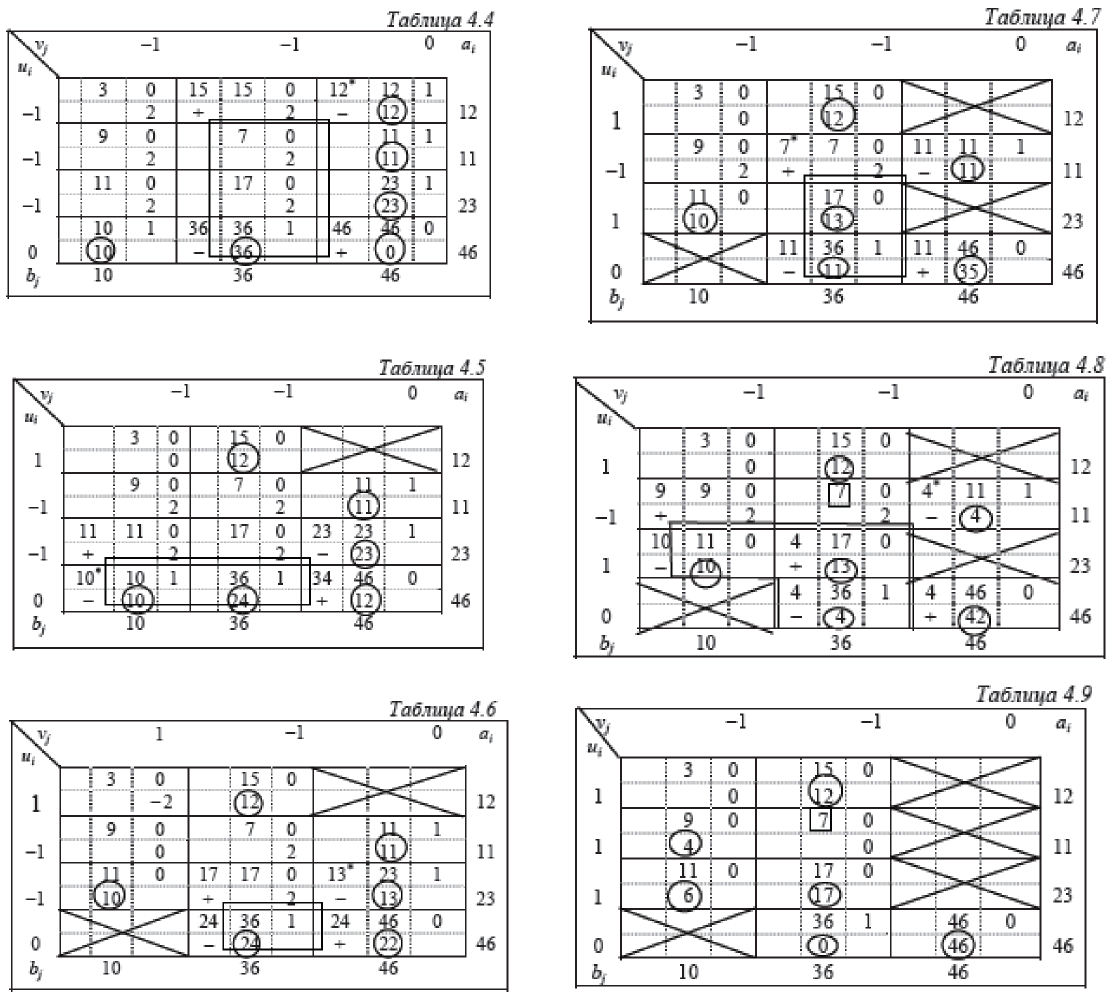


Рис. 11: Пример 3: Итерации первой фазы

### 0.7. Пример: задача без ограничений на потоки

Модификации, которые необходимо внести для задач без ограничений на потоки состоят в следующим:

3) Проверяем условия оптимальности:

$$\Delta_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in U_H.$$

*Таблица 4.10*

| $u_i$ \ $v_j$ | | | −1 | | | 0 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 3 | 1 | 12 | 15 | 3 | |
| −3 | + | | 3 | – | 12 | | 12 |
| | | 9 | 4 | | 7 | 5 | |
| −3 | | 4 | | | | −2 | 11 |
| | 6 | 11 | 2 | $0^*$ | 17 | 1 | |
| −1 | – | 6 | | + | 17 | | 23 |
| $b_j$ | | 10 | | | 36 | | |

*Таблица 4.11*

| $u_i$ \ $v_j$ | | | 0 | | | −2 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 1 | | 15 | 3 | |
| −1 | | 0 | | | 12 | | 12 |
| | | 9 | 4 | | 7 | 5 | |
| −4 | | 4 | | | | 1 | 11 |
| | | 11 | 2 | | 17 | 1 | |
| −2 | | 6 | | | | 3 | 23 |
| $b_j$ | | 10 | | | 36 | | |

Рис. 12: Пример 3: Итерации второй фазы

При их выполнении сетевой поток $x$ оптимален, решение прекращаем. Иначе переходим к следующему шагу.

4) Выберем клетку $(i_0, j_0)$, этой клетке припишем знак $+$, обойдем цикл, чередуя знаки $+$ и $-$.

5) Только для клеток цикла со знаком $-$ подсчитаем шаги

$$\theta_{ij} = x_{ij}.$$

и найдем минимальный шаг в клетке $(i_*, j_*)$.

6) Построим новый базисный план перевозок по тем же правилам

7) Отметим новое базисное множество клеток:

$$\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0).$$

Пример см. на стр. 156 задачника.