Тайлинг для алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей

Пусть A – левая треугольная матрица порядка n с диагональными элементами, равными единице, b – n-мерный вектор. Рассмотрим алгоритм решения системы $Ax=b$ методом обратной подстановки:

$$
\begin{array}{l}
S_1\!: \; x(1) = b(1) \\
\text{do } \; i = 2, n \\
\quad S_2\!: \; x(i) = b(i) \\
\quad \text{do } \; j = 1, i-1 \\
\quad\quad S_3\!: \; x(i) = x(i) - a(i,j)x(j) \\
\quad \text{enddo} \\
\text{enddo}
\end{array} \qquad (1)
$$

Сначала исследуем допустимость тайлинга (используются обозначения и теория лекции «Тайлинг»).

Пусть имеется некоторая зависимость $S_\alpha(I)\rightarrow S_\beta(J)$. Обозначим через $c_{\alpha,\beta}$ множество общих циклов в окружении операторов S_α и S_β. Если общих циклов не существует, то положим $c_{\alpha,\beta}=0$. Рассмотрим зависимости $S_\alpha(I(i_1,...,i_{n_\alpha})) \rightarrow S_\beta(J(j_1,...,j_{n_\beta}))$, для которых $c_{\alpha,\beta}\neq 0$. Тайлинг является допустимым, если для любой такой зависимости выполняются следующие условия:

$$j_\zeta \geq i_\zeta, \; 2\leq\zeta\leq c_{\alpha,\beta}, \qquad (2)$$

$$\beta\geq\alpha. \qquad (3)$$

Это достаточные условия допустимости тайлинга.

Зависимости алгоритма можно задать следующим образом (наглядно зависимости представлены на рисунке ниже, $n=7$):

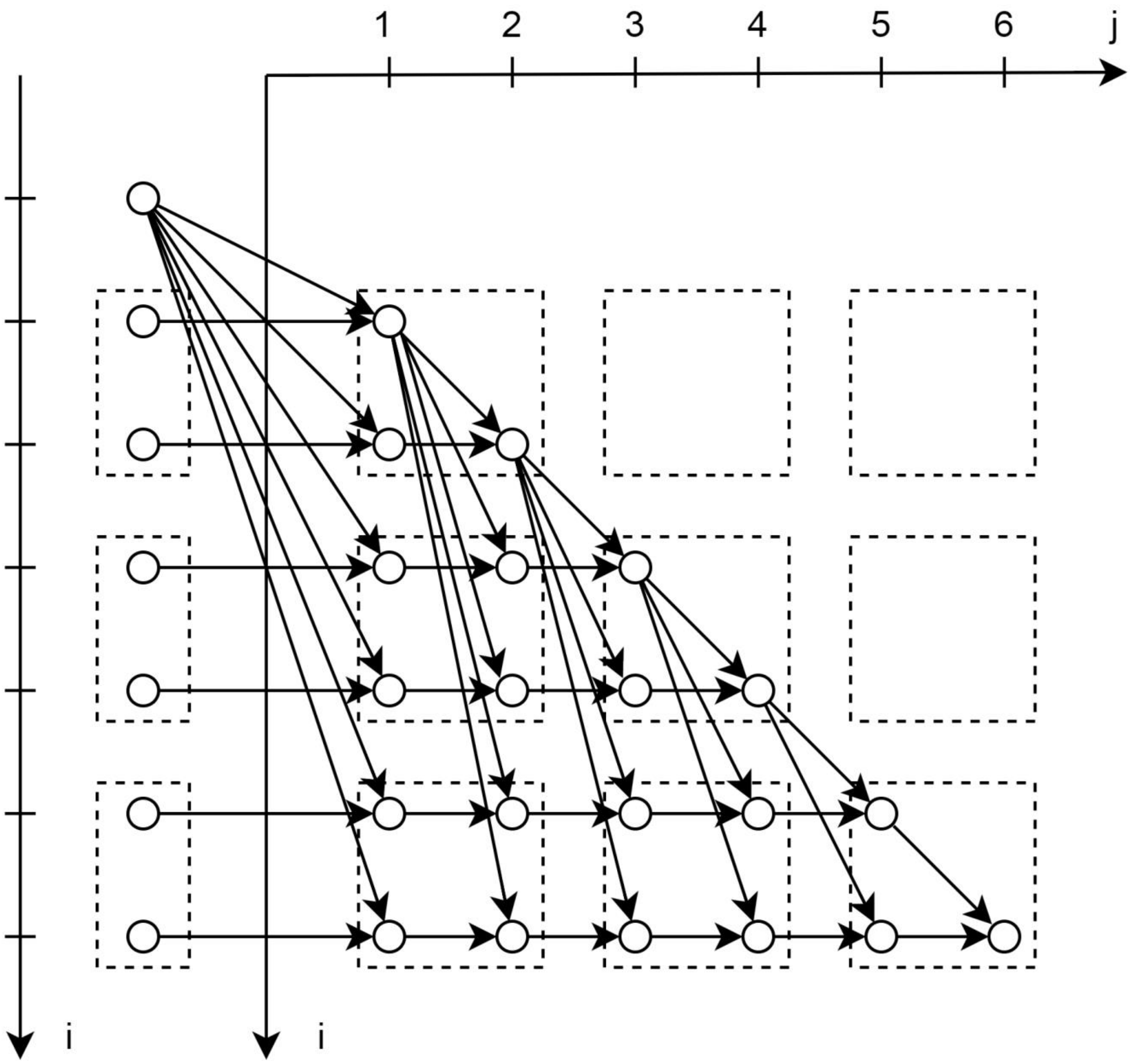
$$S_1(0)\rightarrow S_3(i,j), \;\; (i,j)\in V_{1,3}=\{(i,j)\in Z^2 \,|\, 2\leq i\leq n, \, j=1\},$$

$$S_2(i)\rightarrow S_3(i,j), \;\; (i,j)\in V_{2,3}=V_{1,3},$$

$$S_3(i,j-1)\rightarrow S_3(i,j), \;\; (i,j)\in V_{3,3}=\{(i,j)\in Z^2 \,|\, 3\leq i\leq n, \, 2\leq j\leq i-1\},$$

$$S_3(j,j-1)\rightarrow S_3(i,j), \;\; (i,j)\in V_{3,3}.$$

В рассматриваемом случае алгоритма (1) требуется проверить достаточные условия допустимости тайлинга для зависимостей $S_2(i)\rightarrow S_3(i,1)$, $S_3(i,j-1)\rightarrow S_3(i,j)$, $S_3(j,j-1)\rightarrow S_3(i,j)$. Зависимость $S_2(i)\rightarrow S_3(i,1)$: условие (2) не требуется ($c_{\alpha,\beta}=1$), условие (3) выполняется ($\alpha=2$, $\beta=3$). Зависимости $S_3(i,j-1)\rightarrow S_3(i,j)$ и $S_3(j,j-1)\rightarrow S_3(i,j)$: условие (2) выполняется ($c_{\alpha,\beta}=2$, $j_2=j$, $i_2=j-1$), условие (3) выполняется ($\alpha=3$, $\beta=3$). Таким образом, условия (2) и (3) для всех зависимостей выполняются, тайлинг корректен.



Теперь осуществим преобразование тайлинга. Имеется два оператора, окруженных циклами. Оператор $S_2(i)$ составляет первый ($\vartheta=1$) набор операторов, а оператор $S_3(i,j)$ – второй набор ($\vartheta=2$). Имеем: $V^1=\{(i)\in \mathrm{Z}^1 | \ 2\le i\le n\}$, $n^1=1$, $m^1=2$, $M^1=n$. $V^2=\{(i,j)\in \mathrm{Z}^2 | \ 2\le i\le n,\ 2\le j\le i-1\}$, $n^2=2$, $m^2=(2,1)$, $M^2=(n,n-1)$. Разобьем циклы с параметрами i и j; через Q_1 и Q_2 обозначим число итераций в глобальных циклах, а через r_1 и r_2 обозначим число итераций в локальных циклах; $Q_1=\left\lceil \frac{n-1}{r_1} \right\rceil$, $Q_2=\left\lceil \frac{n-1}{r_2} \right\rceil$; на рисунке r_1=2, r_2=2.

S_1: $x(1)= b(1)$
do $i^{gl} = 0, Q_1-1$
  do $i = 2+i^{gl} r_2, \min(1+(i^{gl}+1)r_2, n)$
  S_2: $x(i)= b(i)$
  do $j^{gl} = 0, Q_2-1$
    do $j = 1+j^{gl} r_2, \min((j^{gl}+1)\, r_2, i-1)$
    S_3: $x(i) = x(i) - a(i,j)x(j)$
    enddo
  enddo

```
    enddo
enddo
```

После распределения цикла с параметром i и перестановки циклов с параметрами i и j^{gl} получим

```
S1:  x(1)= b(1)
do  igl = 0, Q1 –1 //  Одна итерация цикла – «обработка» r1 строк A
    //  Начало тайла Tile1(igl)
    do  i = 2+ igl r1, min(1+(igl+1)r1, n)
        S2:  x(i)= b(i)
    enddo
    //  Конец тайла Tile1(igl)
    do  jgl = 0, Q2 –1 //  Одна итерация цикла – «обработка» r2 столбцов A
        //  Начало тайла Tile2(igl,jgl)
        do  i = 2+ igl r1, min(1+( igl +1)r1, n)
            do  j = 1+jglr2, min((jgl+1)r2, i–1)
                S3:  x(i) = x(i) – a(i,j)x(j)
            enddo
        enddo
        //  Конец тайла Tile2(igl,jgl)
    enddo
enddo
```

Таким образом, получили

```
S1:  x(1)= b(1)
do  igl = 0, Q1 –1
    Tile1(igl)
    do  jgl = 0, Q2 –1
        Tile2(igl,jgl)
    enddo
enddo
```