Двойственный симплекс-метод

Приведем алгоритм решения задачи ЛП двойственным симплекс-методом. Заметим, что в отличие от прямого симплекс-метода не обязательно знание начального базисного плана (ни прямого, ни двойственного) – достаточно знать лишь какую-либо невырожденную $m\times m$-матрицу $A_Б$ (или, что то же самое, $J_Б$).

Сначала опишем алгоритм двойственного симплекс-метода для двойственно невырожденных задач.

Пусть $\mathrm{rank} A = m$ и задана базисная $m\times m$-матрица $A_Б$ (или, что то же самое, множество $J_Б \subset J$, $|J_Б| = m$).

Шаг 1. Решаем систему уравнений относительно потенциалов: $a'_j u = c_j$, $j\in J_Б$
.

Шаг 2. Подсчитываем небазисные компоненты коплана $\delta_{uj} = c_j - a'_j u$, $j \in J_Н$.

Шаг 3. Определяем базисный псевдоплан $æ_u = (æ_{uБ}, æ_{uН})$ из системы

$$æ_j = \begin{cases} d_{*j}, & \text{если } \delta_{uj} < 0, \\ d^*_j, & \text{если } \delta_{uj} > 0, \ j \in J_Н; \end{cases}$$

$$A_Б æ_{uБ} = b - A_Н æ_{uН} \quad (æ_{uБ} = A_Б^{-1}(b - A_Н æ_{uН})) .$$

Шаг 4. Проверяем условия оптимальности: $d_{*Б} \le æ_{uБ} \le d^*_Б$. Если они выполняются, то $æ_u = x^0$. Решение завершаем. Если не выполняются, переходим к следующему шагу.

Шаг 5. Определяем индекс j_*, для которого $\rho_{j_*} > 0$. Где

$$\rho_j = \rho(æ_j, [d_{*j}, d^*_j]) = \min_{x_j \in [d_{*j},\, d^*_j]} |æ_j - x_j| = |æ_j - \bar{x}_j|$$

– расстояние от $æ_j$ до отрезка $[d_{*j}, d^*_j]$, $\bar{x}_j$ – ближайшая к $æ_j$ точка отрезка $[d_{*j}, d^*_j]$. Его можно взять произвольным из $J_Б^1 = \{ j \in J_Б : \rho_j > 0\}$, либо из условия $\rho_{j_*} = \max\limits_{j \in J_Б^1} \rho_j$.

Шаг 6. Решаем линейную систему уравнений относительно l_u:

$$a'_{j_*} l_u = -\mathrm{sign}(æ_{j_*} - \bar{x}_{j_*}),$$

$$a'_j l_u = 0, \ j \in J_Б \setminus j_*.$$

Шаг 7. Подсчитываем компоненты вектора $l_{\delta_Н}$: $l_{\delta_j} = -a'_j l_u$, $j \in J_Н$.

Шаг 8. Определяем числа

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{\delta_{uj}}{l_{\delta_j}}, & \text{если } l_{\delta_j}\delta_{uj} < 0, \\ \infty, & \text{если } l_{\delta_j}\delta_{uj} \ge 0 \ (\delta_{uj} \ne 0), \quad j \in J_{\text{Н}}. \end{cases}$$

Шаг 9. Находим $\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min\limits_{j \in J_{\text{Н}}} \sigma_j$. Если $\sigma^1 = \infty$, решение задачи прекращаем, поскольку у прямой задачи ограничения несовместны. В противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг 10. Формируем множество $\bar{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \setminus j_*) \bigcup j_1$ и переходим к шагу 1.

Значение двойственной целевой функции уменьшается на величину $\sigma^1 |æ_{j_*} - \bar{x}_{j_*}| > 0$, так что скорость изменения двойственной целевой функции на отрезке $[0, \sigma^1]$ равна $\alpha^1 = -|æ_{j_*} - \bar{x}_{j_*}| < 0$.

Рассмотрим вырожденный случай. Пусть $J_{\text{Н}0} = \{ j \in J_{\text{Н}} : \delta_{uj} = 0\} \ne \varnothing$. *Разобьем множество* $J_{\text{Н}0}$ *произвольным образом на два подмножества:* $J_{\text{Н}0} = J^{+}_{\text{Н}0} \bigcup J^{-}_{\text{Н}0}$, $J^{+}_{\text{Н}0} \bigcap J^{-}_{\text{Н}0} = \varnothing$. *Введем множества* $J^{+}=\{j \in J_H\text{:}\ \delta_{uj} > 0\}$, $J^{-}=\{j \in J_H\text{:}\ \delta_{uj} < 0\}$. *Тогда в приведенный выше алгоритм следует внести следующие изменения.*

Шаг 3. Псевдоплан построим следующим образом:

$$æ_j = \begin{cases} d_{*j}, & j \in J^{-} \bigcup J^{-}_{\text{Н}0}, \\ d^{*}_{j}, & j \in J^{+} \bigcup J^{+}_{\text{Н}0}, \end{cases} \quad A_{\text{Б}}æ_{u\text{Б}} = b - A_{\text{Н}}æ_{u\text{Н}} \quad (æ_{u\text{Б}} = A^{-1}_{\text{Б}}(b - A_{\text{Н}}æ_{u\text{Н}})).$$

Шаг 9. Находим

$$\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J^{+} \bigcup J^{-}} \sigma_j. \qquad (2.12)$$

Определяем суммарный скачок скорости двойственной целевой функции $\Delta\alpha^0 = \sum\limits_{j \in J^0} (d^{*}_{j} - d_{*j}) |p_{\delta_j}|$, *где*

$$J^0 = \{ j \in J^{+}_{\text{Н}0} : p_{\delta_j} < 0\} \bigcup \{ j \in J^{-}_{\text{Н}0} : p_{\delta_j} > 0\},$$

и новую скорость изменения двойственной целевой функции на отрезке $[0, \sigma^1]$ *:* $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 + \Delta\alpha^0$.

Шаг 10. Если $\bar{\alpha}^1 < 0$, *то шаг равен* $\sigma^1 > 0$. *Если* $\bar{\alpha}^1 \ge 0$, *тогда шаг равен нулю. Формируем множество* $\bar{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \setminus j_*) \bigcup j_1$ *и переходим к шагу 1. В первом случае в качестве* j_1 *выбираем индекс, полученный согласно (2.12), во втором – любой индекс из множества* J^0.

1.2.7. Первая фаза

Как и для прямого симплекс-метода, процедуру построения начального базисного двойственного плана опишем для двух типов задач.

Пусть каноническая задача получена из нормальной, т. е. имеем

$$c'x \to \max,\ Ax + x_{\text{СВ}} = b,$$
$$d_* \le x \le d^*,\ 0 \le x_{\text{СВ}} \le d^*_{\text{СВ}}.$$

Для нее начальный базисный двойственный план строится легко. Возьмем $A_{\text{Б}} = (a_{n+i} = e_i,\ i \in I) = E$. Тогда $u = 0,\ \delta_{uj} = c_j,\ j \in J_{\text{Н}} = J$, $v_j,\ w_j$, $j \in J \bigcup J_{\text{СВ}}$, строятся по обычным правилам базисного двойственного плана, $J_{\text{Б}} = J_{\text{СВ}} = \{n+i,\ i = \overline{1,m}\}$.

Рассмотрим теперь каноническую задачу (2.1):

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ d_* \le x \le d^*.$$

Никаких предположений относительно параметров этой задачи не делаем.

Введем вспомогательную (“буферную”) задачу

$$\begin{gathered} c'x \to \max,\ Ax + A_{\text{буф}}x_{\text{буф}} = b, \\ d_* \le x \le d^*,\ 0 \le x_{\text{буф}} \le 0, \end{gathered} \tag{2.13}$$

где $\overline{A} = (A,\ A_{\text{буф}}),\ A_{\text{буф}} = (a_{n+i} = e_i,\ i \in I)$. Начальный базисный двойственный план для нее строим с базисной матрицей $A_{\text{буф}} = E$. Тогда $u = 0,\ \delta_{uj} = c_j,\ j \in J$, $v_j,\ w_j,\ j \in J$, строятся по тем же правилам, что и выше. Задачу (2.13) решаем двойственным симплекс-методом, последовательно заменяя столбцы матрицы $A_{\text{буф}}$ на столбцы матрицы A, и удаляя из задачи (2.13) соответствующие фиктивные переменные.