ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные методы решения нелинейных уравнений: дихотомии, простой итерации, Ньютона, секущих.

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x)=0,$$

где f – некоторая заданная функция, x – неизвестная численная величина.

Только для сравнительно несложных уравнений его корни можно найти точно. Поэтому при решении уравнений $f(x)=0$ приходится применять итерационные методы. Предварительным этапом этих методов является процедура отделения корней.

Об отделения корней

Отделение (или локализация) корней – это отыскание таких достаточно малых интервалов, в которых находится один и только один корень уравнения $f(x)=0$. Укажем на некоторые способы отделения корней.

1. Применение следующей теоремы из математического анализа:

Функция $f(x)$, *непрерывная и монотонная на отрезке* $[a, b]$, *имеет внутри этого отрезка один нуль при разных по знаку значениях* $f(a)$ *и* $f(b)$ *и не имеет нулей при одинаковых по знаку значениях* $f(a)$ *и* $f(b)$.

2. Графический способ отделения корней.

Корни уравнения можно найти как абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox (т.е. с прямой $y=0$). Визуально найденные точки пересечения порождают промежутки, которые следует проверить, например, с помощью сформулированной выше теоремы.

Иногда при графическом решении задачи об отделении корней оказывается более удобным представить исходное уравнение $f(x)=0$ в виде $f_1(x)=f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ более простые, чем $f(x)$. Тогда корни можно найти как абсциссы точек пересечения графиков $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. Например, корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ есть абсциссы точек пересечения кубической параболы $y=x^3$ и функции $y=-ax^2-bx-c$.

3. Поиск точек перемены знака посредством вычисления таблицы значений функции $f(x)$ в заданном числе точек x_k отрезка $[a, b]$.

4. Использование конкретных свойств конкретной функции, задающей данное уравнение. Так, например, для алгебраических уравнений существуют аналитические методы, позволяющие установить количество вещественных корней того или иного знака, а также их границы.

Метод деления отрезка пополам

Пусть получен интервал (a, b), содержащий единственный корень x_∞ уравнения $f(x)=0$. Процесс уточнения корня состоит в построении числовой последовательности приближенных значений

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$$

сходящейся к x_∞. Тогда значение x_k, удовлетворяющее условию $|x_k - x_\infty| \le \varepsilon$, где ε – заданная величина, можно принять за приближенное значение корня с точностью, не превышающей ε (т.е. с предельной абсолютной погрешностью ε).

Опишем метод деления отрезка пополам (метод половинного деления, дихотомии), который является простейшей итерационной процедурой решения задачи о вычислении корней с требуемой точностью.

Пусть мы нашли такие точки x_0 и x_1, что выполняется условие $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ существования решения. Найдем середину отрезка $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$ и вычислим $f(x_2)$. Если $f(x_2)=0$, то $x_\infty = x_2$ и вычисления заканчиваются. Если $f(x_2) \neq 0$, то выберем из двух половин отрезка ту, для которой $f(x_2) \cdot f(x_{гран}) < 0$, где $x_{гран} = x_0$ или $x_{гран} = x_1$. Затем новый отрезок опять делим пополам и выбираем ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков, и так далее.

Если требуется найти корень с точностью ε, то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к единственному на выделенном отрезке корню она сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых; при этом она устойчива к ошибкам округления.

Скорость сходимости сравнительно невелика: за одну итерацию точность гарантированно увеличивается примерно вдвое, что означает сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным 1/2.

Дихотомию применяют либо тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малосущественна, либо тогда, когда требуется уточнить начальную локализацию корня перед применением других, быстрее сходящихся итерационных алгоритмов.

Метод простой итерации

Пусть уравнение $f(x)=0$ каким-либо способом приведена к виду, пригодному для итераций:

$$x = \varphi(x).$$

Если указано некоторое начальное приближение x_0. то вычислительный процесс метода простой итерации задает формула

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k=0,1,\ldots$$

Пусть корень x_∞ локализован на отрезке Δ, x_0 выбрано произвольно из отрезка Δ. Достаточное условие сходимости метода простой итерации:

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \quad x \in \Delta.$$

Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

На практике задача определения номера итерации, на которой достигается заданная точность ε решается следующим образом: процесс вычислений прерывается, если выполняется неравенство

$$|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon.$$

Если справедливо неравенство

$$-1<\varphi'(x_\infty)\le\frac{1}{2},$$

то из оценки $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$ *следует оценка*

$$|x_\infty-x_{k+1}|\le\varepsilon.$$

Если метод простой итерации сходится, то оценка $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$ не гарантирует оценки $|x_\infty-x_{k+1}|\le\varepsilon$ только в случае $\frac{1}{2}<\varphi'(x_\infty)<1$. При $q=\varphi'(x_\infty)>\frac{1}{2}$ лучше использовать дихотомию.

Некоторые приемы приведения уравнений к виду, пригодному для итераций:

1. Выразить x каким-либо образом из исходного уравнения.
2. Записать уравнение $f(x)=0$ в виде $x=x+Cf(x)$; тогда $\varphi(x)=x+Cf(x)$, $\varphi'(x)=1+Cf'(x)$. Для выбора ненулевой константы C решить неравенство $-1<1+Cf'(x)<1$. При решении в окрестности точки x_∞ производная $f'(x)$ должна сохранять знак и быть ограничена: $0<f'(x)<M$, либо $M<f'(x)<0$.

Метод Ньютона, метод секущих

Вычислительный процесс метода Ньютона решения нелинейных уравнений $f(x)=0$ задает формула

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\ \dots$$

Если корень x_∞ *локализован внутри достаточно малого отрезка, функция* f *дважды непрерывно дифференцируема и монотонна на этом отрезке,* $f'(x_\infty)\ne0$, *то метод Ньютона сходится, причем с квадратичной скоростью:*

$$|x_{k+1}-x_k|\le\alpha|x_k-x_{k-1}|^2,$$

где α *– некоторое число.*

Заметим, что для метода простых итераций имеет место оценка

$$|x_{k+1}-x_k|\le q|x_k-x_{k-1}|,$$

что означает линейную скорость сходимости.

Точность вычислений метода Ньютона гарантированно обеспечивается сравнением двух соседних итераций: если $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$, то $|x_\infty-x_{k+1}|\le\varepsilon$.

В методе Ньютона мы приближаемся к корню по последовательности касательных прямых. Эта геометрическая интерпретация дала еще одно название метода: метод касательных.

Основным достоинством метода Ньютона является высокая скорость сходимости. Недостатком – необходимость вычисления производной на каждом шаге итераций. Второй недостаток – сильная зависимость результативности метода от начального приближения: если взять x_0 недостаточно близко к x_∞, то метод расходится.

Первый недостаток может быть в какой-то мере преодолен. Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})},\ k{=}0,1,\ \ldots$$

Здесь чтобы найти x_{k+1} нужно знать x_k и x_{k-1}. Мы приближаемся к корню по секущей, проходящей через точки двух предыдущих приближений. Эта геометрическая интерпретация и дала название метода: метод секущих.

Для метода секущих имеет место оценка

$$|x_{k+1}-x_k|\le\alpha|x_k-x_{k-1}|^{\nu},$$

где $\nu=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1{,}62$. Скорость сходимости превосходит линейную (линейная скорость, напомним у метода простых итераций), но меньше, чем у метода Ньютона.