Задача о рюкзаке

Задача о рюкзаке имеет следующую интерпретацию. Пусть имеется n неделимых предметов с номерами i, $i=\overline{1,n}$. Вес i-го предмета равен p_i, его ценность c_i. Требуется выбрать совокупность предметов с минимальным общим весом при условии, что общая ценность груза не меньше заданной величины c.

Построим математическую модель задачи. Введем переменные x_i, $i=\overline{1,n}$, которые принимают лишь два значения: $x_i=1$, если данный предмет укладывается в рюкзак, $x_i=0$ — в противном случае. Тогда математическая модель ***задачи о рюкзаке*** имеет вид

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min,\quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c,\quad x_i=0\vee 1,\quad i=\overline{1,n}. \qquad (1)$$

Применим к решению этой задачи метод ветвей и границ. Опишем алгоритм дробления и связанную с ним систему оценок дробления. Пусть X — множество планов задачи (10.6). Расширим его до “непрерывного” $\overline{X}=\{x:\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c,\ 0\le x_i\le 1,\ i=\overline{1,n}\}$, т. е. будем считать, что все предметы допускают произвольную делимость без потери ***относительной ценности*** (т. е. ценности на единицу веса). В качестве оценки множества X рассмотрим следующую величину

$$\xi(X)=\min f(x),\ x\in\overline{X}. \qquad (2)$$

Очевидно, $\xi(X)\le\min f(x),\ x\in X$, т. е. удовлетворяет первому свойству метода ветвей и границ.

Метод решения задачи (2) состоит в следующем. Подсчитаем ***относительные веса*** предметов, т. е. вес p_i/c_i i-го предмета на единицу ценности. Выберем предмет с номером i_1 с наименьшим относительным весом и будем загружать его (точнее, “засыпать” в раздробленном виде) в рюкзак до тех пор, пока не будет достигнута заданная ценность c или же не будет “засыпан” весь предмет. Первый случай имеет место, если $c_{i_1}\ge c$, и тогда $x_{i_1}^*=c/c_{i_1}$, $x_i^*=0$, $i=\overline{1,n}$, $i\ne i_1$, будет оптимальным планом задачи (2). Второй случай реализуется, если $c_{i_1}<c$. Полагаем $x_{i_1}^*=1$ и среди оставшихся предметов выбираем предмет i_2 с наименьшим относительным весом. С ним поступаем так же, как и с первым, только сейчас вместо c берем $c-c_{i_1}$. Продолжая этот процесс, либо построим оптимальный план $x^*=(x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*)$ задачи (2), либо не достигнем заданной ценности. Последнее реализуется, если

$\sum_{i=1}^{n} c_i < c$, а это означает, что задача не имеет решения из-за несовместности ограничений.

Пусть x^* — оптимальный план задачи (2). Если все его координаты целочисленные, т. е. равны 0 или 1, то этот план будет оптимальным и для исходной задачи (1). В противном случае разбиваем множество X на два множества $X_1 = \{x \in X: \ x_1 = 0\}$, $X_2 = \{x \in X: \ x_1 = 1\}$. В качестве оценок этих множеств берем следующие числа

$$\xi(X_1) = \min \sum_{i=2}^{n} p_i x_i, \ \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \geq c, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \ i = \overline{2,n}, \tag{3}$$

$$\xi(X_2) = \min \left(p_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \right), \ \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \geq c - c_1, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{2,n}. \tag{4}$$

Задачи (3), (4) решаются, как и задача (2). Если в задаче (3) $X_1 = \varnothing$, тогда полагают $\xi(X_1) = \infty$. Если в задаче (3) $c - c_1 \leq 0$, тогда $x_1^* = 1, \ x_i^* = 0, \ i = \overline{2,n}$, — оптимальный план задачи (3).

Замечание. Если оптимальный план x^* задачи (3) или (4) целочисленный, то соответствующее множество разбивается на два подмножества, одно из которых состоит из элемента x^*, а второе получается удалением x^* из исходного. В дальнейшем эти множества не подвергаются разбиению, а их оценки равны оценке множества, из которого они получены.

Дальнейшее решение задачи проводится в соответствии с выбранной схемой ветвления.

Пример. Решить задачу о рюкзаке с общей ценностью груза c=50 и данными, представленными в табл. 10.1.

Таблица 10.1

i	1	2	3	4	5	6
c_i	12	15	10	16	8	5
p_i	4	6	10	5	4	1

Математическая модель задачи

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \to \min,$$
$$12x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \geq 50,$$
$$x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,5}.$$

Оценка множества X

$$\xi(X) = \min(4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6),$$
$$12x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \geq 50,$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,5}.$$

Установим последовательность загрузки предметов, для чего подсчитаем относительные веса. В табл. 10.2 подсчитаны эти величины и в нижней строке указана последовательность загрузки.

Таблица 10.2

i	1	2	3	4	5	6
p_i/c_i	1/3	2/5	1	5/16	1/2	1/5
Последовательность загрузки	III	IV	VI	II	V	I

Согласно полученным данным, первым загружается шестой предмет. Поскольку $c_6 < c$ (5<50), то полагаем $x_6 = 1$. Вторым загружается четвертый предмет. Поскольку $c_4 = 10 < c - c_6 = 45$, то $x_4 = 1$ и т. д. В итоге получим: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_5 = 1/4$. Заданная ценность достигнута. Следовательно, $x_3 = 0$. Оценка множества равна $\xi(X) = 17$. Поскольку в оптимальном плане координата x_4 дробная, то разбиваем множество X на два: $X_1 = \{x \in X:\ x_1 = 0\}$, $X_2 = \{x \in X:\ x_1 = 1\}$ и решаем задачи

$$\begin{aligned} \xi(X_1) &= \min(6x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ & 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 50, \\ & 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{2,5}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \xi(X_2) &= \min(4 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ & 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 38, \\ & 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{2,5}. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи (5): $\bar{x}^1 = (1;\ 3/5;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\xi(X_1) = 22$; решение задачи (6): $\bar{x}^2 = (1;\ 0;\ 1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_2) = 17$. Для дальнейшего разбиения выбираем из списка $S_1 = \{X_1, X_2\}$ множество X_2 с меньшей оценкой: $X_2 = X_3 \bigcup X_4$, $X_3 = \{x \in X_2:\ x_2 = 0\}$, $X_4 = \{x \in X_2:\ x_2 = 1\}$. Решаем задачи

$$\begin{aligned} \xi(X_3) &= \min(4 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ & 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 38, \\ & 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{3,6}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \xi(X_4) &= \min(10 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ & 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 23, \\ & 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{3,6}. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение задачи (7): $\bar{x}^3 = (9/10;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\xi(X_3) = 23$; решение задачи (8): $\bar{x}^4 = (0;\ 1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_4) = 17$. Следуя схеме одностороннего ветвления, для дальнейшего разбиения выбираем множество не из всего списка $S_2 = \{X_1, X_3, X_4\}$, а только из вновь полученных $\{X_3,\ X_4\}$. Таким множеством является X_4. Разбиваем его на два подмножества $X_5 = \{x \in X_4:\ x_3 = 0\}$ и $X_6 = \{x \in X_4:\ x_3 = 1\}$. В итоге получаем задачи

$$\xi(X_5) = \min(10 + 5x_4 + 4x_5 + x_6),$$
$$16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \geq 23, \tag{9}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{4,6};$$

$$\xi(X_6) = \min(20 + 5x_4 + 4x_5 + x_6),$$
$$16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \geq 13, \tag{10}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{4,6}.$$

Решение задачи (9): $\overline{x}^5 = (1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_5) = 17$; решение задачи (10): $\overline{x}^6 = (1/2;\ 0;\ 1)$, $\xi(X_6) = 23\frac{1}{2}$. Новый список $S_3 = \{X_1,\ X_3,\ X_5,\ X_6\}$. Разбиваем множество X_5 на два: $X_7 = \{x \in X_5 : x_4 = 0\}$ и $X_8 = \ = \{x \in X_5 : x_4 = 1\}$. Получаем задачи

$$\xi(X_7) = \min(10 + 4x_5 + x_6),$$
$$8x_5 + 5x_6 \geq 23, \tag{11}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \ i = 5,6;$$
$$\xi(X_8) = \min(15 + 4x_5 + x_6),$$
$$8x_5 + 5x_6 \geq 7, \tag{12}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \ i = 5,6.$$

Поскольку в задаче (11) $c_5 + c_6 < 23$, то $X_7 = \varnothing$ и тогда $\xi(X_7) = \infty$. Решение задачи (12): $\overline{x}^7 = (1/4;\ 1)$, $\xi(X_8) = 17$. Разбиваем множество X_8: $X_9 = \{x \in X_8 :\ x_5 = 0\}$, $X_{10} = \{x \in X_8 :\ x_5 = 1\}$. Получаем задачи

$$\xi(X_9) = \min(15 + x_6), \quad 5x_6 \geq 7, \ 0 \leq x_6 \leq 1;$$

$$\xi(X_{10}) = \min(19 + x_6), \quad 5x_6 \geq -1, \quad 0 \leq x_6 \leq 1. \tag{13}$$

Поскольку $X_9 = \varnothing$ (не достигается заданная ценность), то $\xi(X_9) = \infty$. В задаче (13) оптимальной будет точка $x_6 = 0$, при этом $\xi(X_{10}) = 19$. План целочисленный: $x^* = (1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0)$. Множество X_{10} разбиваем на два: $X_{11} = \{x^*\}$, $X_{12} = X_{10} \backslash X_{11}$, при этом $\xi(X_{11}) = \xi(X_{12}) = \xi(X_{10}) = 19$. Следовательно, $r_1 = 19$. В списке остались множества X_1, X_3, X_6, X_{12} (X_7 и X_9 исключаются как пустые). Оценки оставшихся множеств не ниже числа r_1. Следовательно, согласно схеме одностороннего ветвления, они исключаются из списка для дальнейшего разбиения. В списке не осталось множеств. Фактически схема одностороннего ветвления совпала со схемой полного ветвления. Получили оптимальный план: оптимальный вес рюкзака равен 19 и в него должны быть загружены предметы с номерами 1, 2, 4, 5 (восстанавливается попятным движением от множества X_{11} к множеству X).

Все вычисления удобно изобразить графически (см. рис. 10.2). На рисунке рядом с множеством указано значение соответствующего x_i.

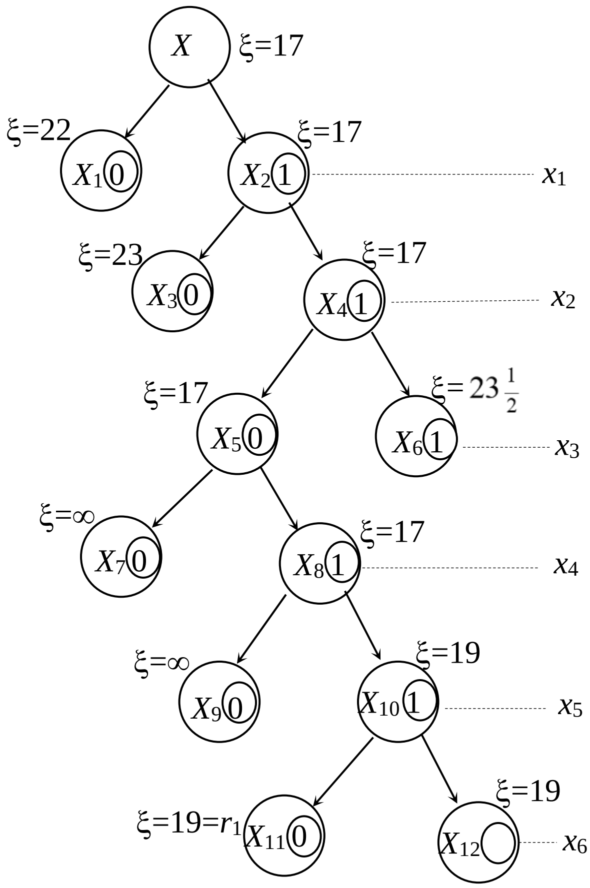
X
ξ=17
ξ=22
X1 0
ξ=17
X2 1
x1
ξ=23
X3 0
ξ=17
X4 1
x2
ξ=17
X5 0
ξ= 23 1/2
X6 1
x3
ξ=∞
X7 0
ξ=17
X8 1
x4
ξ=∞
X9 0
ξ=19
X10 1
x5
ξ=19=r1
X11 0
ξ=19
X12
x6

Рис. 10.2