Моделирование СС

Математические модели сложных систем и принципы их построения

Основные определения

В различных областях материального производства, научных исследований, социально-экономического прогнозирования приходится постоянно оперировать с многочисленными объектами, которые принято называть сложными системами. К основным отличительным характеристикам таких объектов относят следующие:

1) наличие большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов системы;

2) целевая функция, на оптимизацию которой направлено функционирование системы, не совпадает с целевыми функциями элементов, составляющих систему;

3) наличие управления и разветвленной информационной сети, осуществляющей многочисленные связи системы как внутри ее элементной базы, так и по ее взаимодействию с внешней средой.

Элементом s назовем некоторый объект (материальный, энергетический, информационный), обладающий рядом свойств, обеспечивающих выполнение некоторых функций, внутреннее строение (содержание) которого для целей исследования не представляет интереса.

Связью l между элементами назовем процесс их взаимодействия важный для целей исследования.

Системой **S** называется совокупность элементов со связями и целью функционирования, отличной от целей функционирования составляющих ее элементов.

Сложной системой называется система **S**, состоящая из разнотипных элементов с разнотипными связями.

Большой системой называется система **S**, состоящая из большого числа однотипных элементов с однотипными связями.

В соответствии с определением под сложной системой **S** будем понимать тройку множеств:

$$\mathbf{S} = \{\{s\}, \{l\}, F\},$$

где:

$\{s\}$ — множество априорно выделенных элементов системы;

$\{l\}$ — комплекс как взаимных связей между элементами, так и связей между элементами и внешней средой;

F — функция, описывающая цель функционирования системы.

Автоматизированной системой $\mathbf{S}_A$ называется сложная система с определяющей ролью элементов двух типов:

1) в виде технических средств;
2) в виде действий человека.

Тогда

$$\mathbf{S}_A = \{\{s_{\text{Т}}\}, \{s_{\text{Ч}}\}, \{s_{\text{В}}\}, \{l\}, F\},$$

где:

$s_{\text{Т}}$ — технические средства (прежде всего ЭВМ);

$s_{\text{Ч}}$ — принятие решений или другая человеческая активность, полезная для функционирования системы;

$s_{\text{В}}$ — остальные (вспомогательные) элементы системы.

Структурой системы называется ее расчленение (декомпозиция) на элементы или группы элементов с указанием связей между ними, неизменное в течение времени исследования и дающее точное представление о системе.

Структура системы характеризуется по имеющимся в ней связям, простейшими из которых являются последовательное, параллельное соединения элементов и обратная связь, являющаяся важным регулятором функционирования системы и неотъемлемым ее атрибутом.

Различают структуру с равноправно входящими в нее элементами и иерархическую структуру.

Иерархией называется структура с наличием подчиненности одних элементов другим, когда воздействия в одном из направлений оказывают гораздо большее влияние на элемент, чем в другом.

Для любой сложной системы характерно функционирование во времени, поэтому целесообразно определить ее динамические характеристики.

Состоянием системы называется множество характеристик элементов системы, изменяющихся во времени и важных для целей ее функционирования.

Процессом (динамикой) системы назовем множество значений состояний системы, изменяющихся во времени.

В заключение определим понятия, связанные с постановкой цели функционирования системы.

Целью функционирования системы называется задача получения желаемого состояния системы.

Заметим, что определение цели влечет:

1) необходимость постановки локальных целей для ее элементов;

2) целенаправленное вмешательство в процесс функционирования системы, называемое *управлением*.

Среди множества *задач исследования сложных систем* можно выделить два больших класса:

1) задачи анализа, направленные на изучение свойств функционирования системы в зависимости от ее структуры;

2) задачи синтеза, связанные с выбором структуры и значений параметров по заданным свойствам системы.

Математическая модель

Введем обозначения: $\mathcal{T} = [t_0, T]$ — временной интервал моделирования системы **S** (интервал модельного времени), где:

t_0 — время начала моделирования (обычно полагают $t_0 = 0$);

T — время окончания моделирования;

$t \in \mathcal{T}$ — текущее значение модельного времени.

... в разделе 1.1 пример ГПС (рис.1.1).

Параметры системы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ — это характеристики системы, остающиеся постоянными на всем интервале моделирования $\mathcal{T}$.

Если значения $\{\theta_i\}$ определены на некотором множестве Θ, т.е.

$$\theta = (\theta_1 \ldots \theta_m) \in \Theta \subset \mathbf{R}^m,$$

то говорят, что имеется параметрическое семейство систем.

К независимым переменным отнесем следующие характеристики.

Входные воздействия на систему (сигналы): $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}$.

Входные воздействия в момент $t \in \mathcal{T}$ характеризуются вектором

$$u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_{n_1}(t)) \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^{n_1}.$$

Среди $\{u_i\}$ могут быть *управляющие* воздействия, например, $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1'}$ $(n_1' \le n_1)$, а остальные $n_1 - n_1'$ воздействий — неуправляющие.

Воздействия внешней среды:. Среди них могут быть *контролируемые (наблюдаемые)* и *неконтролируемые (ненаблюдаемые)*, *детерминированные* и *случайные* воздействия. В момент $t \in \mathcal{T}$ они характеризуются вектором

$$v = v(t) = (v_1(t), \ldots, v_{n_2}(t)) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R}^{n_2}.$$

Переменные, характеризующие состояние системы x_1, x_2, …, x_{n_3}. В отличие от $\{\theta_i\}$ состояния $\{x_i\}$ характеризуют свойства системы, изменяющиеся во времени. Состояние системы в момент $t \in \mathcal{T}$ описывается вектором

$$x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n_3}(t)) \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^{n_3}.$$

где $\mathbf{X}$ — *пространство состояний* или *фазовое пространство* системы (множество возможных значений вектора x). Если $t_1 < t_2 < \ldots$ — моменты изменения состояния системы, то последовательность $x(t_1)$, $x(t_2)$, … называется *фазовой траекторией* системы.

К зависимым переменным отнесем следующие характеристики.

Выходные характеристики (сигналы) системы $y_1, y_2, \ldots, y_{n_4}$, определяемые в момент $t \in \mathcal{T}$ вектором

$$y = y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n_4}(t)) \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^{n_4}.$$

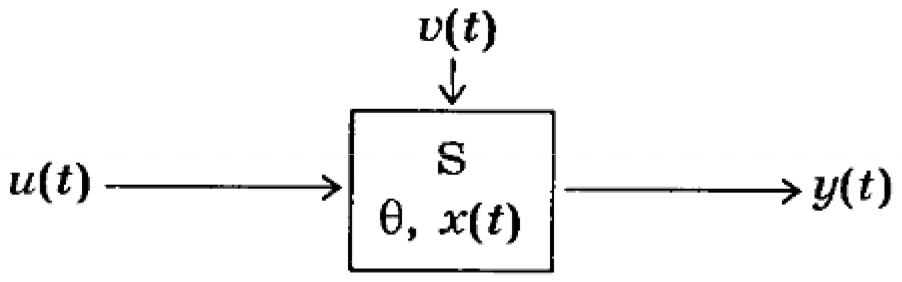

Рис.1.4

Показатели эффективности (ПЭ) функционирования системы w_1, w_2, ..., w_k характеризуют степень достижения системой ее цели, (т.е. характеризуют качество функционирования системы) и образуют вектор

$$w = w(t) = (w_1(t), \ldots, w_k(t)) \in \mathbf{W} \subset \mathbf{R}^k, \;\; t \in \mathcal{T}.$$

ПЭ представляются в виде некоторых *функционалов*

$$w_i = w_i(u(t), v(t), x(t), y(t), \theta, t), \;\; t \in \mathcal{T}, \; i = \overline{1, k}.$$

Процесс функционирования системы во времени описывается *операторными соотношениями* (заданными аналитически или алгоритмически) для состояний, выходных характеристик и ПЭ системы:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathbf{F}_1(u^{(t)}, v^{(t)}, \theta, t),\\
y(t) &= \mathbf{F}_2(u^{(t)}, v^{(t)}, x^{(t)}, \theta, t),\\
w(t) &= \mathbf{F}_3(u^{(t)}, v^{(t)}, x^{(t)}, y^{(t)}, \theta, t),\ t \in \mathcal{T},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $u^{(t)}$ обозначает реализацию процесса $u(t)$ на отрезке $[0,t]$, аналогично обозначены $x^{(t)}$, $y^{(t)}$.

Зависимости (1.1) называются *законами функционирования* системы $\mathbf{S}$; зависимость $y = y(t)$, $t \in \mathcal{T}$ называется *выходной траекторией* системы, а зависимость $x = x(t)$, $t \in \mathcal{T}$ — *фазовой траекторией*.

В выборе переменных $x(t)$, характеризующих состояние системы в момент времени $t \in T$, обычно имеется произвол, который используется так, чтобы упростить закон функционирования (1.1) и привести его к виду

$$x(t) = \mathbf{F}(x^{(0)}, u^{(t)}, v^{(t)}, \theta, t),$$
$$y(t) = \mathbf{G}_1(x^{(t)}, t), \qquad (1.2)$$
$$w(t) = \mathbf{G}_2(x^{(t)}, t),\ t \in \mathcal{T},$$

где $\mathbf{F}(\cdot)$, $\mathbf{G}_1(\cdot)$, $\mathbf{G}_2(\cdot)$ — некоторые операторы; $x^{(0)}$ — начальное состояние системы. Закон (1.2) отличается от (1.1) следующими особенностями:

1) состояние системы $\mathbf{S}$ в момент времени $t \in \mathcal{T}$ зависит от начального состояния системы $x^{(0)}$;

2) выходные характеристики и показатели эффективности системы в момент времени t зависят только от состояний $x^{(t)}$ и текущего времени.

Классификация моделей

- Способ задания
  - Аналитические
  - Алгоритмические
- Время
  - Непрерывные
  - Дискретные
- Содержание случайных элементов
  - Детерминированные
  - Вероятностные

НД, НВ, ДД, ДВ модели

НД модели

Пусть, например, подлежащей моделированию системой S является электрический колебательный контур с двумя параметрами: емкостью θ_1 и индуктивностью $1/\theta_2$. Состояние этой системы в момент t будем характеризовать величиной заряда конденсатора $x(t)$, которая измеряется прибором с некоторой ε-погрешностью $v(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Тогда, как известно из физики, математическая модель будет иметь вид

$$\theta_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{\theta_1} x(t) = u(t),\ y(t) = x(t) + v(t), \qquad (1.3)$$

где $u(t)$ — внешнее детерминированное электрическое воздействие на контур. Если $u(t) = 0$, $x(0) = A\cos\phi$, то решение однородного уравнения (1.3) имеет вид

$$x(t) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1\theta_2}} t + \phi\right),$$

где A — амплитуда, ϕ — фаза колебаний.

При построении НД-моделей системы автоматического управления приходится использовать дифференциальные уравнения высших порядков. Пусть **S** — одноканальная система автоматического управления [1], структура которой представлена на рис.1.5.

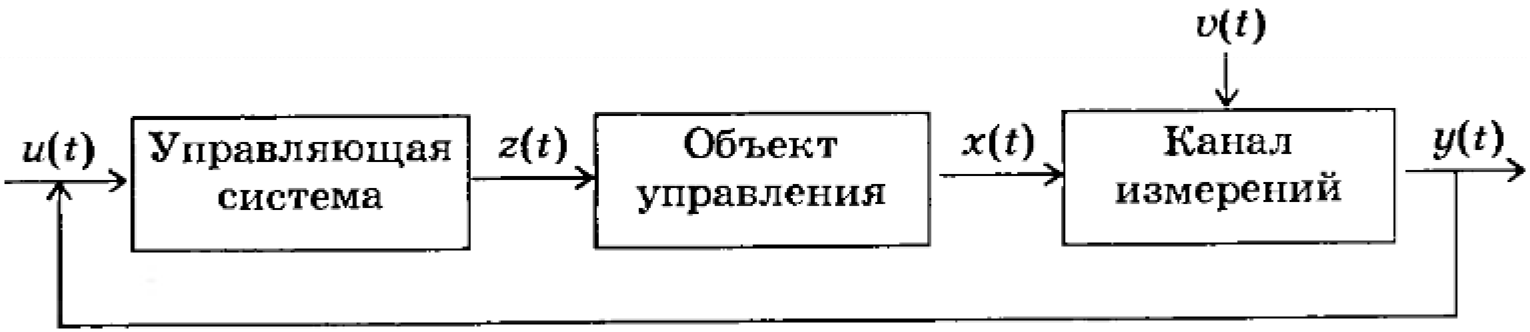

Рис.1.5

Объект управления описывается дифференциальным уравнением k-го порядка

$$\Psi\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}, \ldots, \frac{dx(t)}{dt}, x(t), \frac{d^l z(t)}{dt^k}, \ldots, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), \theta, t\right) = 0, \qquad (1.4)$$

где $\Psi(\cdot)$ — некоторая функция от $k + l + m + 3$ переменных; $x(t)$ — состояние объекта управления, измеряемое с некоторой ε-погрешностью в канале измерения

$$y(t) = x(t) + v(t), \ |v(t)| \le \varepsilon; \qquad (1.5)$$

$z(t)$ — воздействующий на объект управления сигнал, формируемый управляющей системой по заданному алгоритму

$$z(t) = \Phi(u(t), y(t)). \qquad (1.6)$$

Соотношения (1.4) - (1.6) и определяют НД-модель. Нередко используется частный случай (1.4) — линейное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого являются параметрами θ модели:

$$\theta_1 \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \ldots + \theta_k \frac{dx(t)}{dt} + \theta_{k+1} x(t) + \theta_{k+2} \frac{d^l z(t)}{dt^k} + \ldots + \theta_{k+l+2} z(t) = 0.$$

ДД модели

В отличие от НД-моделей в этих моделях время t является дискретной переменной: $t = \tau\Delta$, где Δ — шаг дискретизации; $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ — "дискретное время".

Основной математический аппарат, используемый при построении ДД-моделей, это теория разностных уравнений и аппарат дискретной математики, в частности — теория конечных автоматов [3].

Разностное уравнение — это уравнение, содержащее конечные разности искомой функции

$$\Phi(x_\tau, x_{\tau+1}, \ldots, x_{\tau+n}, u_\tau, u_{\tau+1}, \ldots, u_{\tau+m}, \theta, \tau) = 0, \qquad (1.7)$$

где $x_\tau = x(\tau\Delta)$, $u_\tau = u(\tau\Delta)$ — соответственно состояние системы и внешнее воздействие в "дискретный момент времени τ".

Отметим, что ДД-модели в виде (1.7) часто возникают как промежуточные при исследовании НД-моделей на ЭВМ, когда аналитическое решение дифференциального уравнения получить не удается и приходится применять разностные схемы.

Пример. Рассмотрим $x(t)$ — величину заряда конденсатора из примера (1.3), $i(t)$ — величину силы тока в дискретные моменты времени $t = \tau\Delta$. Для разностного приближения величины $i(t)$ используем формулу

$$i_\tau = (x_{\tau+1} - x_\tau)/\Delta.$$

Дискретную аппроксимацию уравнения

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

осуществим двумя следующими способами:

$$\text{а) } \frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{i_\tau - i_{\tau-1}}{\Delta} = \frac{x_{\tau+1} - 2x_\tau + x_{\tau-1}}{\Delta^2},$$

$$\text{б) } \frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{i_{\tau+1} - i_\tau}{\Delta} = \frac{x_{\tau+2} - 2x_{\tau+1} + x_\tau}{\Delta^2}.$$

Тогда однородную часть математической модели (1.3) можно описать двумя разностными уравнениями, соответствующими приближениям а) и б):

$$x_{\tau+1} - \left(2 - \frac{\Delta^2}{\theta_1\theta_2}\right)x_\tau + x_{\tau-1} = 0,$$

$$x_{\tau+2} - 2x_{\tau+1} + \left(1 + \frac{\Delta^2}{\theta_1\theta_2}\right)x_\tau = 0.$$

Решая разностные уравнения при заданных начальных значениях x_0, x_1 и x_{-1}, получим фазовые траектории $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ представленных выше разностных схем.

Анализ устойчивости разностных уравнений [2] позволяет заключить, что амплитуда колебаний фазовой траектории второго уравнения возрастает со скоростью, сравнимой с ростом функции

$$\left(1 + \frac{\Delta^2}{\theta_1\theta_2}\right)^{\tau/2},$$

что не соответствует предположению об ограниченности амплитуды непрерывной модели (1.3). Поэтому можно сделать вывод о неадекватности второго разностного уравнения аппроксимируемой модели (1.3). Первое же разностное уравнение оказывается хорошо согласованным с моделью (1.3). Следовательно, исследование устойчивости разностных схем является важной задачей при аппроксимации непрерывных моделей дискретными.

Другой математический аппарат для построения ДД-моделей представляет теория конечных автоматов [3]. *Конечный автомат* — это математическая модель дискретной системы **S**, которая под действием входных сигналов $u \in \mathbf{U}$ вырабатывает выходные сигналы $y \in \mathbf{Y}$, и которая может иметь некоторые изменяемые внутренние состояния $x \in \mathbf{X}$; при этом **U**, **Y**, **X** — конечные множества.

Конечный автомат **S** характеризуется шестью элементами:

— входным алфавитом **U**;

— выходным алфавитом **Y**;

— внутренним алфавитом состояний **X**;

— начальным состоянием $x_0 \in \mathbf{X}$;

— функцией переходов $x' = \Phi(x, u) : \mathbf{XU} \to \mathbf{X}$;

— функцией выходов $y = \psi(x, u) : \mathbf{XU} \to \mathbf{Y}$.

В τ-м такте ($\tau = 0,1, \ldots$) на вход автомата, находящегося в состоянии $x_\tau \in \mathbf{X}$, поступает входной сигнал $u_\tau \in \mathbf{U}$, на который автомат реагирует переходом на $\tau+1$-м такте в состояние $x_{\tau+1} \in \mathbf{X}$ и выдачей выходного сигнала $y_\tau \in \mathbf{Y}$. Например, *конечный автомат Мили* описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$x_{\tau+1} = \Phi(x_\tau, u_\tau),\ x(0) = x_0,$$
$$y_\tau = \psi(x_\tau, u_\tau),\ \tau = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

На рис.1.6 изображен граф, описывающий булевский автомат Мили с $x_0 = 0$ и алфавитами: $\mathbf{U} = \mathbf{Y} = \{0, 1\}$, $\mathbf{X} = \{0, 1, 2\}$. Вершины графа соответствуют внутренним состояниям автомата, а дуги — соответствующим переходам. Каждая дуга "из x в x'" помечается парой (u, y), где u, y — входной и выходной сигналы соответственно, при которых осуществляется переход из x в x'.

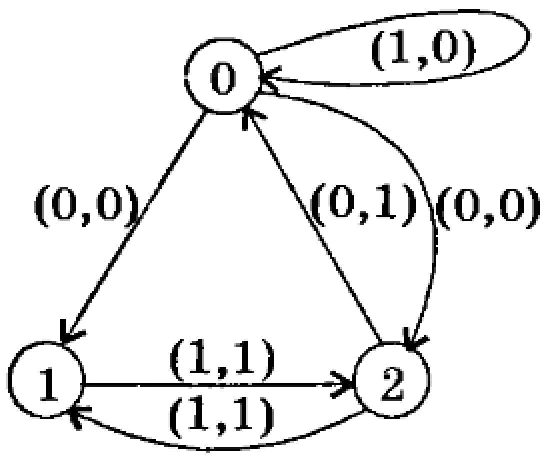

Рис.1.6

В заключение отметим, что конечные автоматы являются адекватной математической моделью элементов и узлов ЭВМ, устройств контроля, регулирования, управления систем коммутации в технике передачи данных.

ДД-модели

Главное отличие этих моделей от ДД-моделей заключается в учете случайных элементов в математической модели исследуемой сложной системы S. Основной математический аппарат, используемый при построении и исследовании ДВ-моделей, это теория разностных стохастических уравнений и теория вероятностных автоматов [3].

Разностное стохастическое уравнение — это такое уравнение, которое содержит случайные параметры θ или (и) случайные входные воздействия $\{u_\tau\}$.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) определены случайный M-вектор параметров

$$\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{M-1}) \in \mathbf{R}^M$$

и случайная последовательность входных воздействий

$$\ldots, u_0, u_1, u_2, \ldots \in \mathbf{U}.$$

Нелинейное разностное стохастическое уравнение порядка (n, m) имеет вид

$$\Phi(x_\tau, x_{\tau-1}, \ldots, x_{\tau-n}, u_\tau, u_{\tau-1}, \ldots, u_{\tau-m}, \theta, \tau) = 0, \qquad (1.9)$$

где $\tau = n, n + 1, \ldots$; $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ — заданные начальные состояния системы; $\Phi(\cdot)$ — заданная функция $n + m + M + 3$ переменных.

Решением этого уравнения является определенная на (Ω, F, P) случайная последовательность состояний моделируемой системы:

$$x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots \in \mathbf{X}.$$

Если $\Phi(\cdot)$ линейна по $\{x_\tau, u_\tau\}$, то (1.9) примет вид:

$$\sum_{i=0}^{n}\theta_i x_{\tau-i} + \sum_{j=0}^{m}\theta_{j+n+1}u_{\tau-j} = u_\tau, \tau = n+1, n+2, \ldots, \qquad (1.10)$$

где $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{n+m+1})$ — вектор $M = n + m + 2$ параметров. Уравнение (1.10) в математической статистике известно [3] как уравнение авторегрессии и скользящего среднего порядка (n, m) (АРСС (n, m)). Частными случаями (1.10) являются модель авторегрессии АР(n) порядка n:

$$\sum_{i=0}^{n}\theta_i x_{\tau-i} + u_\tau = 0$$

и модель скользящего среднего порядка m СС(m):

$$x_\tau = \sum_{i=0}^{m}\theta_j u_{\tau-j}\,.$$

В качестве примера приведем ДВ-модель электрического колебательного контура из 1.3.1, находящегося под влиянием случайных внешних воздействий $\{u_\tau\}$:

$$x_\tau - 2x_{\tau-1} + \left(1 + \frac{\Delta^2}{\theta_1\theta_2}\right)x_{\tau-1} - \frac{\Delta}{\theta_2}u_{\tau-2} = 0,$$

$$y_\tau = x_\tau + u_\tau, \quad \tau = 2, 3, \ldots,$$

где ошибка измерения $\{u_\tau\}$ представляет собой стационарную случайную последовательность с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ^2:

$$\mathbf{E}\{v_t\} = 0, \quad \mathbf{D}\{v_t\} = \delta^2.$$

Другой математический аппарат построения ДВ-моделей сложных систем представляет теория вероятностных автоматов.

Вероятностный автомат, определенный на (Ω, F, P), есть конечный автомат (см. п.1.3.2), в котором функция переходов $x' = \Phi(x, u, w)$, $w \in \Omega$ и функция выхода $y = \psi(x, u, w)$ являются случайными функциями, имеющими некоторые вероятностные распределения.

Примем обозначения для вероятностных распределений $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$:

$$\pi_{(i,k)} = \mathbf{P}\{x_0 = k \mid u_0 = i\},\ \pi = (\pi_{(i,k)}) \text{ —}$$

начальное распределение вероятностей, $i \in \mathbf{S(I)} = \{0,\ 1,\ \ldots,\ \mathbf{I}\}$, $k \in \mathbf{S(K)}$;

$$\mathbf{P} = (p_{(j,l)|(i,k)}),$$

$$p_{(j,l)|(i,k)} = \mathbf{P}\{x_{\tau+1} = l,\ y_\tau = j \mid x_\tau = k,\ u_\tau = i\}\ (j \in S(\tau),\ l \in S(k)) \text{ —}$$

вероятность события, состоящего в том, что находящийся в τ-м такте в состоянии $x_\tau = k$ автомат под воздействием входного сигнала $u_\tau = j$ выдаст выходной сигнал $y_\tau = j$ и перейдет на $\tau + 1$-м такте в состояние $x_{\tau+1} = l$;

$$a_{l|(i,k)} = \mathbf{P}\{x_{\tau+1} = l \mid x_\tau = k,\ u_\tau = i\},$$

$$b_{j|(i,k)} = \mathbf{P}\{y_\tau = j \mid x_\tau = k,\ u_\tau = i\}.$$

Математическая модель вероятностного автомата полностью определяется пятью элементами: $\mathbf{U}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$, π.

НВ модели

При построении и исследовании НВ-моделей используется теория стохастических дифференциальных уравнений и теория массового обслуживания [3].

Стохастическое дифференциальное уравнение (в форме Ито) имеет вид:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t),$$

где $x(t)$ — случайный процесс, определяющий состояние системы в момент времени t; $w(t)$ — стандартный винеровский случайный процесс; $b(\cdot)$, $a(\cdot)$ — коэффициенты диффузии и переноса. При некоторых условиях гладкости на коэффициенты $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ решение этого стохастического дифференциального уравнения является марковским диффузионным процессом. Распределение вероятностей процесса удовлетворяет уравнениям Колмогорова. Такая НВ-модель часто используется при моделировании стохастических систем управления, процессов тепло- и массообмена.

Теория массового обслуживания применяется для построения математических моделей таких сложных систем, для которых характерно: 1) наличие потока многих заявок на выполнение определенных операций (заявок на обслуживание); 2) наличие многократно повторяемых операций (выходной поток).

Теория массового обслуживания разрабатывает и исследует математические модели различных по своей природе процессов функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: поставок сырья и комплектующих изделий некоторому предприятию; заданий, поступающих на ЭВМ от удаленных терминалов; вызовов в телефонных станциях и т.д. При этом для функционирования таких систем характерна стохастичность: случайность моментов времени появления заявок на обслуживание и т.д.

Сложная система S, описываемая как система массового обслуживания (СМО), состоит из $L \geq 1$ взаимосвязанных и взаимодействующих элементов-приборов обслуживания $П_1$, ..., $П_l$. Прибор обслуживания $П_i$ состоит из накопителя заявок $Н_i$, в котором могут одновременно находиться l_i заявок ($0 \leq l_i \leq m_i$) и канала $К_i$ обслуживания заявок; m_i ($0 \leq m_i \leq \infty$) — емкость накопителя $Н_i$, т.е. число мест в очереди для ожидания начала обслуживания в канале $К_i$ ($i = \overline{1, L}$). На каждый элемент прибора $П_i$ поступают потоки событий; в накопитель $Н_i$ — поток заявок $\{v_i\}$, на канал $К_i$ — поток "обслуживаний" $\{u_i\}$. Поток заявок $\{v_i\}$ представляет последовательность времени между моментами появления заявок на входе СМО и образует подмножество неуправляемых переменных СМО. Поток $\{u_i\}$ представляет собой последовательность интервалов времени между моментами начала и окончания обслуживания заявок и образует подмножество управляемых переменных. Заявки, обслуженные каналом $К_i$, и заявки, покинувшие прибор $П_i$ по различным причинам необслуженными (например, из-за конечности m_i), образуют выходной поток $\{y_i\}$ — последовательность интервалов времени между моментами выхода заявок; это и есть выходной сигнал СМО.

Процесс функционирования прибора $П_i$ можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени $x_i = x_i(t) \in \mathbf{X} \subset \mathrm{R}^2$, где $x_{i1}(t)$ — число заявок, находящихся в накопителе в момент времени t; $x_{i2}(t)$ — состояние канала обслуживания $К_i$ ($x_{i2}(t) = 0$, если канал свободен, $x_{i2}(t) = 1$, если канал занят).

Приборы обслуживания $П_1, \ldots, П_L$ связаны и взаимодействуют между собой. Если каналы $\{К_i\}$ различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание. Если же приборы $\{П_i\}$ или их параллельные блоки соединены последовательно, то имеет место многофазное обслуживание.

Модельное время

Существуют два способа формирования конечного множества моментов времени $\mathcal{T}$, известных как принципы организации изменения модельного времени "Δt" и "Δx".

"*Принцип* Δt" заключается в изменении МВ с фиксированным шагом Δt.

"*Принцип* Δx" заключается в изменении МВ при скачкообразном изменении вектора состояния x системы $\mathbf{S}$ на некоторую величину Δx ($\Delta x \neq 0$).

На практике отдается предпочтение принципу "Δx". Принцип "Δt" используется лишь в случаях, когда:

1) события $\{A_j^{(i)}\}$ таковы, что $t_j^{(i)} - t_{j-1}^{(i)} \cong \text{const}$ на всем интервале моделирования $\mathcal{T}$, и, следовательно, можно подобрать интервал Δt изменения МВ, обеспечивающий минимальную погрешность аппроксимации (например, для разностных уравнений);

2) событий очень много и они появляются группами. В этом случае за счет групповой обработки событий $\{A_j^{(i)}\}$, попавших внутрь очередного шага изменения Δt, удается уменьшить затраты машинного времени.