**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Основные методы решения нелинейных уравнений: дихотомии, простой итерации, Ньютона, секущих.

Рассмотрим уравнение вида

*f*(*x*)*=*0,

где *f* – некоторая заданная функция, *x* – неизвестная численная величина.

Только для сравнительно несложных уравнений его корни можно найти точно. Поэтому при решении уравнений *f*(*x*)*=*0 приходится применять итерационные методы. Предварительным этапом этих методов является процедура отделения корней.

**Об отделения корней**

Отделение (или локализация) корней – это отыскание таких достаточно малых интервалов, в которых находится один и только один корень уравнения *f*(*x*)*=*0. Укажем на некоторые способы отделения корней.

1. Применение следующей теоремы из математического анализа:

*Функция f*(*x*), *непрерывная и монотонная на отрезке* [*a,* *b*], *имеет внутри этого отрезка один нуль при разных по знаку значениях f*(*a*) *и f*(*b*) *и не имеет нулей при одинаковых по знаку значениях f*(*a*) *и f*(*b*).

2. Графический способ отделения корней.

Корни уравнения можно найти как абсциссы точек пересечения графика функции *y=f*(*x*) с осью *Ox* (т.е. с прямой *y=*0)*.* Визуально найденные точки пересечения порождают промежутки, которые следует проверить, например, с помощью сформулированной выше теоремы.

Иногда при графическом решении задачи об отделении корней оказывается более удобным представить исходное уравнение *f*(*x*)*=*0 в виде *f*1(*x*)=*f*2(*x*), где функции *f*1(*x*) и *f*2(*x*) более простые, чем *f*(*x*). Тогда корни можно найти как абсциссы точек пересечения графиков *y=f*1(*x*) и *y=f*2(*x*). Например, корни уравнения *x*3*+ax*2*+bx+c=*0 есть абсциссы точек пересечения кубической параболы *y=x*3 и функции *y=−ax*2*−bx−c*.

3. Поиск точек перемены знака посредством вычисления таблицы значений функции *f*(*x*) в заданном числе точек *xk* отрезка [*a,* *b*].

4. Использование конкретных свойств конкретной функции, задающей данное уравнение. Так, например, для алгебраических уравнений существуют аналитические методы, позволяющие установить количество вещественных корней того или иного знака, а также их границы.

**Метод деления отрезка пополам**

Пусть получен интервал (*a,* *b*), содержащий единственный корень *x∞* уравнения *f*(*x*)*=*0. Процесс уточнения корня состоит в построении числовой последовательности приближенных значений

*x*0*, x*1*,…, xk,…*

сходящейся к *x∞.* Тогда значение *xk*, удовлетворяющее условию |*xk–x∞*|≤ε*,* где ε–заданная величина*,* можно принять за приближенное значение корня с точностью, не превышающей ε (т.е. с предельной абсолютной погрешностью ε).

Опишем метод деления отрезка пополам (метод половинного деления, дихотомии), который является простейшей итерационной процедурой решения задачи о вычислении корней с требуемой точностью.

Пусть мы нашли такие точки *x*0 и *x*1, что выполняется условие *f*(*x*0)⋅*f*(*x*1)<0 существования решения. Найдем середину отрезка *x*2*=* и вычислим *f*(*x*2). Если *f*(*x*2)*=*0, то *x∞=x*2 и вычисления заканчиваются. Если *f*(*x*2)*≠*0, то выберем из двух половин отрезка ту, для которой *f*(*x*2)⋅*f*(*xгран*)<0, где *xгран=x*0 или *xгран=x*1. Затем новый отрезок опять делим пополам и выбираем ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков, и так далее.

Если требуется найти корень с точностью ε, то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к единственному на выделенном отрезке корню она сходится для любых непрерывных функций *f*(*x*), в том числе недифференцируемых; при этом она устойчива к ошибкам округления.

Скорость сходимости сравнительно невелика: за одну итерацию точность гарантированно увеличивается примерно вдвое, что означает сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным 1/2.

Дихотомию применяют либо тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малосущественна, либо тогда, когда требуется уточнить начальную локализацию корня перед применением других, быстрее сходящихся итерационных алгоритмов.

**Метод простой итерации**

Пусть уравнение *f*(*x*)*=*0 каким-либо способом приведена к виду, пригодному для итераций:

*x=*φ(*x*).

Если указано некоторое начальное приближение *x*0. то вычислительный процесс метода простой итерации задает формула

*xk+*1*=*φ(*xk*), *k=*0,1,…

Пусть корень *x∞* локализован на отрезке Δ, *x*0 выбрано произвольно из отрезка Δ. Достаточное условие сходимости метода простой итерации:

|φ*'*(*x*)|≤*q*<1,  *x*Δ.

*Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.*

На практике задача определения номера итерации, на которой достигается заданная точность ε решается следующим образом: процесс вычислений прерывается, если выполняется неравенство

|*xk+*1*−xk*|*≤*ε.

*Если справедливо неравенство*

*−*1<φ*'*(*x∞*)*≤*,

*то из оценки* |*xk+*1*−xk*|*≤*ε *следует оценка*

|*x∞−xk+*1|*≤*ε.

Если метод простой итерации сходится, то оценка |*xk+*1*−xk*|*≤*εне гарантирует оценки|*x∞−xk+*1|*≤*εтолько в случае **<φ*'*(*x∞*)<1. При *q=*φ*'*(*x∞*)*>* лучше использовать дихотомию.

Некоторые приемы приведения уравнений к виду, пригодному для итераций:

1. Выразить *x* каким-либо образом из исходного уравнения.

2. Записать уравнение *f*(*x*)*=*0 в виде *x=x+Cf*(*x*); тогда φ(*x*)*=x+Cf*(*x*), φ*'*(*x*)*=*1*+Cf'*(*x*). Для выбора ненулевой константы *C* решить неравенство *−*1<1*+Cf'*(*x*)<1. При решении в окрестности точки *x∞* производная *f*′(*x*) должна сохранять знак и быть ограничена: 0<*f'*(*x*)<*M*, либо *M*<*f'*(*x*)<0.

**Метод Ньютона, метод секущих**

Вычислительный процесс метода Ньютона решения нелинейных уравнений *f*(*x*)*=*0 задает формула

**, *k=*0,1, …

*Если корень x∞* *локализован* *внутри достаточно малого отрезка, функция* *f* *дважды непрерывно дифференцируема и монотонна на этом отрезке, f'*(*x∞*)≠0, *то метод Ньютона сходится, причем с квадратичной скоростью:*

|*xk+*1*−xk*|*≤*α|*xk−xk–*1|2,

*где* α – *некоторое число.*

Заметим, что для метода простых итераций имеет место оценка

|*xk+*1*−xk*|*≤q*|*xk−xk–*1|,

что означает линейную скорость сходимости.

Точность вычислений метода Ньютона гарантированно обеспечивается сравнением двух соседних итераций: если |*xk+*1*−xk*|*≤*ε, то |*x∞−xk+*1|*≤*ε.

В методе Ньютона мы приближаемся к корню по последовательности касательных прямых. Эта геометрическая интерпретация дала еще одно название метода: метод касательных.

Основным достоинством метода Ньютона является высокая скорость сходимости. Недостатком – необходимость вычисления производной на каждом шаге итераций. Второй недостаток – сильная зависимость результативности метода от начального приближения: если взять *x*0 недостаточно близко к *x∞*, то метод расходится.

Первый недостаток может быть в какой-то мере преодолен. Рассмотрим итерационный процесс

**, *k=*0,1, …

Здесь чтобы найти *xk+*1нужно знать *xk* и *xk–*1. Мы приближаемся к корню по секущей, проходящей через точки двух предыдущих приближений. Эта геометрическая интерпретация и дала название метода: метод секущих.

Для метода секущих имеет место оценка

|*xk+*1*−xk*|*≤*α|*xk−xk–*1|ν,

где ν*=≈*1,62. Скорость сходимости превосходит линейную (линейная скорость, напомним у метода простых итераций), но меньше, чем у метода Ньютона.