**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ**

Основные прямые и итерационные методы решения СЛАУ: Гаусса и его разновидности, отражений, вращений, простой итерации, Якоби, Зейделя, Гаусса-Зейделя, релаксации.

Рассмотрим задачу решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

*Ax=b,*

где *A* является матрицей порядка *n*, векторы *x* и *b* являются *n*-мерными векторами. Предполагается, что определитель матрицы *А* отличен от нуля, так что решение *х* существует и единственно.

К решению СЛАУ сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики. Методы решения СЛАУ принято разделять на прямые (другое название – точные) и итерационные.

Метод решения СЛАУ относят к классу прямых, если он позволяет получить решение в точномвиде после конечного числа операций, выполняемых без округлений (т.е. фактически речь идет об отсутствии погрешности метода). В случае итерационных методов точное решение можно получить лишь в пределе некоторого бесконечного процесса. В настоящее время можно говорить о том, что точные методы применяются при решении систем до порядка 106, итерационные – до порядка 1010. При большем порядке используются вероятностные методы типа Монте-Карло.

В качестве основных прямых методов назовем метод Гаусса, метод на основе разложения симметричных матриц, метод прогонки, метод отражений метод вращений. В качестве основных итерационных методов назовем метод простой итерации, метод Якоби, Зейделя, Гаусса-Зейделя, метод релаксации.

**Основные прямые методы решения СЛАУ**

Метод Гаусса без выбора ведущего элемента состоит в том, что сначала система уравнений приводится к треугольному виду элементарными строчными преобразованиями без использования перестановки строк и/или столбцов (прямой ход), а затем неизвестные выражаются из полученной системы (обратный ход). Такая вычислительная схема накладывает некоторые ограничения на СЛАУ: для допустимости вычислений необходимо и достаточно отличие от нуля всех угловых миноров матрицы.

Метод Гаусса тесно связан с так называемым LU-разложением матрицы системы. LU-разложением матрицы *A* называется её представление в виде *A=LU*, где *L* – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, *U* – верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами.

Теорема об LU-разложении:Для того чтобы существовало LU-разложение матрицы *A* необходимо и достаточно отличие от нуля всех её угловых миноров. LU-разложение единственно.

Применение метода Гаусса к системе *Ax=b* допускает следующую реализацию: получение LU-разложения *A=LU*, решение системы *Ly=b* с нижней треугольной матрицей, решение системы *Ux=y* с верхней треугольной матрицей.

Алгоритм исключений Гаусса является неустойчивым: в случае относительной малости ведущего элемента (диагонального элемента преобразуемой матрицы, ниже которого обнуляются элементы столбца) процесс вычислений приводит к накоплению погрешностей.

Преодолеть этот недостаток в значительной мере можно путем включения в алгоритм метода исключений схемы выбора ведущего элемента по строке, по столбцу или по всей преобразуемой подматрице. В качестве главного выбирается наибольший по модулю элемент. Наиболее используемым на практике является вариант с выбором главного элемента по столбцу. Схемы выбора ведущего элемента не гарантируют устойчивость (т.е. низкую чувствительностью к погрешностям вычислений) метода Гаусса, но в значительной степени уменьшают влияние вычислительной погрешности на отклонение полученного результата от настоящего решения задачи.

Вычислительная сложность (требуемое для выполнения алгоритма число арифметических операций умножения и деления) метода Гаусса составляет величину порядка *n*3.

Если рассмотреть симметричную (*A=AT*) матрицу, то можно осуществлять LU-разложение (так называемое LDLT-разложение) и решать системы *Ax=b* с меньшими, чем в общем случае, вычислительными затратами: требует порядка *n*3 операций (умножения и деления).

Этапы получения решения для случая LDLT-разложения: получение разложения *A=LDLT*, решение системы *Ly=b* с нижней треугольной матрицей; решение системы *Dz=y* с диагональной матрицей; решение системы *LTx=z* с верхней треугольной матрицей.

Ещё одна из важнейших для приложений разновидность метод Гаусса – метод прогонки. Метод прогонки есть метод Гаусса без выбора ведущего элемента, примененный к системе уравнений с трехдиагональной матрицей.

Алгоритм метода прогонки для решения СЛАУ состоит из двух этапов: прямая прогонка – вычисление прогоночных коэффициентов, обратная прогонка – вычисление решения. Прогонка относится к алгоритмам с линейной сложностью

Метод прогонки применяется, если матрица *A* обладает свойством диагонального преобладания по строкам. Диагональное преобладание означает, что в каждой строке сумма абсолютных значений всех элементов вне главной диагонали меньше (строгое преобладание) или равна абсолютной величины диагонального элемента. На практике часто (например, при решении сеточных задач) матрица *A* обладает свойством диагонального преобладания. Для применимости метода прогонки хотя бы в одной строке преобладание должно быть строгим.

Метод отражений, называемый также методом Хаусхолдера, используется для получения так называемого QR-разложения квадратной матрицы порядка *n* и для решения систем линейных алгебраических уравнений. QR-разложением (или ортогональным разложением) матрицы *A* называется её представление в виде *A=QR*, где *Q* – ортогональная матрица, *R* – верхняя треугольная матрица.

Метод отражений, как и метод Гаусса, состоит в том, что сначала система уравнений приводится к треугольному виду, а затем неизвестные выражаются из полученной системы. В отличие от метода Гаусса, система уравнений приводится к треугольному виду посредством ортогональных преобразований, задаваемых так называемыми матрицами отражений.

Метод отражений требует порядка *n*3 операций умножения и деления; вычислительная сложность при больших *n* примерно в 2 раза больше, чем вычислительная сложность метода Гаусса. Тем не менее, методы решения СЛАУ, основанные на ортогональных преобразованиях, также используются на практике, так как обладают важным достоинством: преобразования посредством ортогональных матриц не увеличивают число обусловленности ν(*A*)*=*||*A*||·||*A*−1|| исходной системы, а чем меньше число обусловленности, тем вычисления более устойчивы. Прямой ход метода Гаусса приводит к ухудшению обусловленности исходной системы и обратный ход может сопровождаться большой потерей точности.

Метод вращений, называемый также методом Гивенса, используется, как и метод отражений, для получения QR-разложения квадратной матрицы порядка *n* и для решения систем линейных алгебраических уравнений. Преобразуемая матрица приводится, столбец за столбцом, к треугольному виду с помощью ортогональных матриц, которые носят название матриц вращения. Решение СЛАУ сводится к следующим этапам: преобразовать исходную систему *Ax=f* и получить систему с верхней треугольной матрицей; решить систему с верхней треугольной матрицей, т.е. выполнить обратный ход, аналогичный обратному ходу метода Гаусса. Метод вращений, как и метод отражений, обладает важным достоинством: преобразования матрицы, осуществляемые при реализации метода, не увеличивают число обусловленности матрицы.

Метод вращений требует порядка *n*3 операций умножения и деления. Вычислительная сложность при больших *n* примерно в 2 раза больше, чем вычислительная сложность метода Хаусхолдера (и в 4 раза больше, чем вычислительная сложность метода Гаусса). Тем не менее, метод Гивенса также используется на практике.

**Основные итерационные методы решения СЛАУ**

Пусть система *Ax=f* каким-либо способом приведена к так называемому виду, пригодному (говорят ещё удобному, подходящему) для итераций:

*x=Bx+b*.

Метод простой итерации состоит в следующем: выбирается вектор *x*(0) (например, *x*(0)*=*0 или *x*(0)*=b*) и строится последовательность векторов по формуле

*x*(*k+*1)*=Bx*(*k*)*+b*.

Если эта последовательность сходится, т.е. *x*(*k*)→*x*(∞) при *k*→∞, то это предельное значение *x*(∞) будет решением нашей системы. Действительно, переходя к пределу в равенстве *x*(*k+*1)*=Bx*(*k*)*+b*, получим *x*(∞)*=Bx*(∞)+*b*.

Критерий сходимости: *Для того чтобы метод простой итерации сходился при любом начальном приближении x*(0)*, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.*

Этот критерий не очень удобен для практического применения, так как требует информации о собственных значениях матрицы *B*. Можно сформулировать более простой достаточный признак сходимости:

*Для того чтобы метод простой итерации сходился при любом начальном приближении x*(0)*, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы.*

Скорость сходимости:

*Если* ||*B*||*<*1, *метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным* ||*B*||*.*

Самым известным и применяемым на практике частным случаем метода простой итерации является метод Якоби:

*, i=* 1*,* 2, …, *n*, *k =* 0, 1, 2, …

Для того чтобы привести матрицу *A* к виду, пригодному итераций, каждое уравнение следует разрешить относительно неизвестного, стоящего при диагональном элементе.

*Если матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания, то метод Якоби сходится со скоростью геометрической прогрессии, причем чем строже диагональное преобладание, тем быстрее сходимость.*

Как уже отмечалось, на практике часто матрица *A* обладает свойством строгого диагонального преобладания.

В методе Зейделя вычисления похожи на вычисления метода простой итерации, но, в отличие от метода простой итерации, каждая координата (*k+*1)-го приближения сразу после получения (т.е. уже «уточненная») используется для вычисления («уточнения») следующих координат. Для применения метода Зейделя, как и для применения метода простой итерации, система *Ax=f* должна быть приведена к виду, пригодному для итераций *x=Bx+b*.

Пусть матрица *A* обладает свойством диагонального преобладания по строкам. Применим тот же способ получения матрицы *B* и вектора *b*, который приводит метод простой итерации к методу Якоби. Метод Зейделя с такой матрицей *B* и таким вектором *b* называется методом Гаусса-Зейделя:

*, i=* 1*,* 2, …, *n*, *k =* 0, 1, 2, …

Метод Гаусса-Зейделя является аналогом метода Якоби. В отличие от метода Якоби, каждая координата (*k+*1)-го приближения сразу после получения используется для вычисления следующих координат.

*Пусть диагональное преобладание в каждой строке матрицы A строгое.*

*Тогда метод Гаусса-Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии, причем чем строже диагональное преобладание, тем быстрее сходимость.*

Рассмотрим взвешенную сумму текущего приближения и приближения, построенного по методу Гаусса–Зейделя:

*,*

*i=* 1*,* 2, …, *n*, *k =* 0, 1, 2, …

Это алгоритм, который в литературе называют методом последовательной верхней релаксации, SOR-методом (SOR – successive over relaxation). Метод последовательной верхней релаксации является одним из наиболее широко используемых на практике методов решения СЛАУ.

При ω*=*1 метод релаксации есть метод Гаусса–Зейделя. На практике обычно 1<ω<2, так как часто именно в таких пределах находится оптимальное значение ω, обеспечивающее наиболее быструю сходимость.

На практике окончание итераций при использовании итерационных методов определяется либо максимальным заданным числом итераций *k*max,либо условием

*<*ε,

где ε >0 –заданное число.