Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/ А. К. Цих
«____» ______ 2024 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ КОМПЛЕКСНОГО ТОРА

Руководитель	профессор, доктор физико-математических наук	А. К. Цих
Выпускник		Н. А. Мишко
Нормоконтролер		Т. Н. Шипина

Красноярск, 2024

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Алгебраические подгруппы комплексного тора» содержит 30 страниц текста, 1 приложение, 16 использованных источников.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТОР, ХАРАКТЕР, МОНОМИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ, ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ.

Целью работы является исследование параметрических заданий алгебраических подгрупп тора.

В результате исследований получены критерии инъективности, алгебраичности и существования особого вида — мономиальных — параметризаций такого рода групп.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **3**

1 Задание алгебраических подгрупп тора **3**

1.1 Теорема Артина 4

1.2 Доказательство теоремы Шмидта 5

2 Мономиальные параметризации и их свойства **7**

2.1 Инъективность мономиальных параметризаций 8

2.2 Алгебраичность и существование 10

3 Линейная независимость над абелевой группой **15**

4 Голоморфные характеры **21**

5 Дальнейшие перспективы **23**

5.1 Вычет Гротендика 24

5.2 Кобордизмы и теория Морса 25

Заключение **28**

Список использованных источников **29**

Приложение **31**

А.1 Основные понятия теории категорий 31

А.2 Категории с кобордизмами 37

А.3 Кобордизмы и слабые кобордизмы 40

ВВЕДЕНИЕ

Множество решений системы алгебраических уравнений и его обобщения — проективные и квазипроективные многообразия, схемы и абстрактные алгебраические многообразия — являются центральными объектами алгебраической геометрии. Особенный интерес представляют случаи, когда на алгебраическом многообразии имеется дополнительная алгебраическая структура, например, группы. Такие объекты называются алгебраическими группами.

Алгебраической подгруппой группы G называется подгруппа, также являющаяся алгебраическим многообразием, то есть задаваемая системой полиномиальных уравнений.

Наиболее известным примером являются кубики — плоские алгебраические кривые, задаваемые уравнением третьего порядка. Однако групповой закон на эллиптических кривых устроен крайне нетривиально. Кроме того, часто важно сохранить структуру из объемлющего пространства, к примеру, из алгебраического тора $(K^\times)^n$ для поля K.

В свете этого, другим естественным примером алгебраической группы служит множество решений системы биномиальных уравнений вида

$$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_n^{\beta_n},$$

исследование параметрических заданий (параметризаций) которых и составляет *цель* настоящей работы.

1. Задание алгебраических подгрупп тора

Как показывает следующая теорема [1], такие группы, на самом деле, исчерпывают все алгебраические многообразия, глобально наследующие групповую структуру тора $(K^\times)$.

Пусть G — некоторая группа. Целочисленная степень элемента группы $g \in G$ определяется стандартным образом:

$$g^k = \begin{cases} g \cdot g^{k-1}, & k > 0; \\ 1, & k = 0; \\ g^{-1} \cdot g^{k+1}, & k < 0. \end{cases}$$

Для векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $z = (z_1, \ldots, z_n) \in G^n$ (где G — группа) обозначим $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$.

Теорема (Шмидт). *Пусть K — поле. Всякая алгебраическая подгруппа H группы $(K^\times)^n$ задаётся системой некоторого числа N биномиальных уравнений, то есть существуют N таких показателей $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}^n$, что*

$$H = \{z \in (K^\times)^n \mid \forall 1 \le i \le N.\ z^{\alpha_i} = z^{\beta_i}\}.$$

Далее приведём замкнутое (не зависящее от других крупных теорем) доказательство этой теоремы. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение [2].

1.1. Теорема Артина

Обозначим как $\mathrm{Hom}(G, H)$ множество гомоморфизмов между группами G и H.

Пусть G — группа, K — поле, а $K^\times$ — его мультипликативная группа. В таком случае произвольный гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(G, K^\times)$ называют *характером.* Говорят, что характеры $f_1, \ldots, f_n$ *линейно независимы,* если

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.\ \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Теорема (Артин). *Любые n попарно различных характеров линейно независимы.*

Доказательство. Докажем индукцией по числу характеров n.

Возьмём произвольный характер f. Поскольку он является гомоморфизмом, то $f(1_G) = 1$, где 1_G — единица в группе G. Но тогда если $\alpha f = 0$, то и $\alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot f(1_G) = 0$, что доказывает базу индукции.

Пусть теперь утверждение теоремы верно для любых n различных характеров. Докажем его для $(n+1)$ характера. Пусть $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$. Зафиксируем произвольный $y \in G$. Тогда для любого $x \in G$ имеем:

$$\alpha_1 f_1(yx) + \alpha_2 f_2(yx) + \ldots + \alpha_n f_n(yx) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(yx) = 0.$$

Поскольку все f_i — гомоморфизмы, $f_i(yx) = f_i(y) f_i(x)$, а потому:

$$\alpha_1 f_1(y) f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(y) f_n(x) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(y) f_{n+1}(x) = 0. \qquad (1)$$

С другой стороны, для $x \in G$ также верно, что:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(x) = 0.$$

Умножим это равенство на $f_{n+1}(y)$:

$$\alpha_1 f_{n+1}(y) f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_{n+1}(y) f_n(x) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(y) f_{n+1}(x) = 0. \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), получаем:

$$\alpha_1 (f_{n+1}(y) - f_1(y)) f_1(x) + \ldots + \alpha_n (f_{n+1}(y) - f_n(y)) f_n(x) = 0.$$

Тогда, в силу произвольности x, получаем линейную комбинацию n характеров:

$$\alpha_1 (f_{n+1}(y) - f_1(y)) f_1 + \ldots + \alpha_n (f_{n+1}(y) - f_n(y)) f_n = 0.$$

Но в таком случае, по индуктивной гипотезе, $\alpha_i (f_{n+1}(y) - f_i(y)) = 0$. Теперь, выбрав для каждого $i = 1, \ldots, n$ такое y, что $f_{n+1}(y) \neq f_i(y)$ (это возможно, потому что, по условию теоремы, все f_i попарно различны), получим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Таким образом, с учётом вышесказанного, $\alpha_{n+1} f_{n+1} = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$. Согласно базе индукции, $\alpha_{n+1} = 0$. $\square$

1.2. Доказательство теоремы Шмидта

Многочленом Лорана над кольцом K называется функция $(K^\times)^k \to K$ вида

$$z \mapsto \sum_{i \in I} a_i z^{\alpha_i},$$

где $a_i \in K$ и $I \subseteq \mathbb{Z}^k$ — конечный набор индексов.

Доказательство. Пусть $I \subseteq \mathbb{Z}^n$ — множество индексов, а $P_j(z) = \sum_{i \in I} a_{ji} z^i$ — многочлены (k штук), задающие подгруппу:

$$H = \{z \in (K^\times)^n \mid \forall 1 \leq j \leq k.\ P_j(z) = 0\}.$$

Поскольку $z_1^i z_2^i = (z_1 z_2)^i$, отображение $z \mapsto z^i$ определяет характер $\chi_i \in \mathrm{Hom}(H, K^\times)$.

Рассмотрим на множестве I отношение эквивалентности $i \sim j \Leftrightarrow \chi_i = \chi_j$. Оно разбивает I на m классов I_1, I_2, $\ldots$, I_m. В таком случае, для всех

$i_1, i_2 \in I_j$ верно, что $\chi_{i_1} = \chi_{i_2}$. Обозначим этот характер, соответствующий каждому I_k, как $\chi_k = \chi_{i_1} = \chi_{i_2}$.

Собрав подобные слагаемые при каждом χ_k в многочленах P_j, получим:

$$P_j = \sum_{i \in I} a_{ji}\chi_i = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in I_k} a_{ji} \right) \chi_k.$$

Но P_j равны нулю на всём H, поэтому:

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in I_k} a_{ji} \right) \chi_k = 0.$$

Все χ_k попарно различны по их заданию, поэтому к ним применима теорема Артина. Из неё заключаем, что:

$$\sum_{i \in I_k} a_{ji} = 0.$$

Наконец, пусть N_k — мощность I_k, $N = \sum_{k=1}^{m}(N_k - 1)$ и $I_k = \{i_{k,1}, i_{k,2}, \ldots, i_{k,N_k}\}$. I_k были взяты так, что характеры $\chi_{i_{k,i}}$ и $\chi_{i_{k,j}}$ совпадают на H для фиксированного k и любых i и j. Другими словами, это означает, что всякий элемент $z \in H$ удовлетворяет для всех $1 \le i \le N_k$ и $1 \le j \le N_k$ уравнениям $z^{i_{k,i}} = z^{i_{k,j}}$.

Поскольку равенство рефлексивно, симметрично и транзитивно, система всех уравнений $z^{i_{k,i}} = z^{i_{k,j}}$ равносильна системе N уравнений, составленной из подряд идущих индексов:

$$z^{i_{1,1}} = z^{i_{1,2}}, z^{i_{1,2}} = z^{i_{1,3}}, \ldots, z^{i_{1,N_1-1}} = z^{i_{1,N_1}}, z^{i_{2,1}} = z^{i_{2,2}}, \ldots, z^{i_{m,N_m-1}} = z^{i_{m,N_m}}.$$

Множество решений этой системы обозначим как A.

Покажем, что A совпадает с H. Действительно, пусть $z \in H$. Тогда, как уже отмечалось выше, по построению I_k выполнено $z^{i_{k,j}} = \chi_k(z) = z^{i_{k,j+1}}$; то есть $z \in A$, и $H \subseteq A$.

Наоборот, пусть $z \in A$. Тогда, по заданию A, $z^{i_{k,j_1}} = z^{i_{k,j_1+1}} = \ldots = z^{i_{k,j_2-1}} = z^{i_{k,j_2}}$ для любых $1 \le j_1 \le j_2 \le N_k$. Выберем в каждом I_k по представителю $i_k \in I_k$ и соберём подобные слагаемые:

$$P_j(z) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in I_k} a_{ji} \right) z^{i_k} = \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot z^{i_k} = 0,$$

что означает $z \in H$, то есть $A \subseteq H$.

Таким образом, $H = A$, поэтому в качестве α_i и β_i достаточно взять подряд идущие индексы во всех I_k. $\square$

2. Мономиальные параметризации и их свойства

Для абелевой группы G и векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^k$ рассмотрим отображение $\phi_\alpha(t) = (t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_n})$ из G^k в G^n, где α — матрица со строками α_i. Поскольку $(t_1 \cdot t_2)^{\alpha_i} = t_1^{\alpha_i} \cdot t_2^{\alpha_i}$, ϕ_α — гомоморфизм.

Далее увидим, что если K — поле, то отображение ϕ_α для группы $G = K^\times$ задаёт *параметризацию* некоторой алгебраической группы, которую мы будем называть *мономиальной.*

Утверждение. *$\phi_E = 1_{G^n}$, где E — единичная матрица $n \times n$, 1_X — тождественная функция на множестве X.*

Утверждение. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^{k\times m}, \beta \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. $\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим $t \in G^n$. Тогда i-я компонента вектора $\phi_\alpha(\phi_\beta(t))$ равна $\phi_\beta^{\alpha_i}(t) = (t^{\beta_1})^{\alpha_i^1} \cdot \ldots \cdot (t^{\beta_m})^{\alpha_i^m} = t_1^{\beta_1^1\alpha_i^1 + \ldots + \beta_m^1\alpha_i^m} \cdot \ldots \cdot t_n^{\beta_1^n\alpha_i^1 + \ldots + \beta_m^n\alpha_i^m} = t^{(\alpha\beta)_i}$. $\square$

Вместе эти два утверждения составляют условие на функториальность. Более точно, рассмотрим категорию $\mathrm{Matr}(R)$ матриц над кольцом R, объектами которой являются натуральные числа, а стрелками между числами m и n — матрицы $R^{n\times m}$, и категорию Grp малых групп, объектами которой являются малые группы, а стрелками — гомоморфизмы между ними. Тогда определён функтор $\phi : \mathrm{Matr}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Grp}$:

$$\phi = \begin{cases} k \mapsto G^k; \\ \alpha \mapsto \phi_\alpha. \end{cases}$$

Как показывает лемма 2, в полях нулевой характеристики этот функтор — строгий (подробнее общее понятие функтора изложено в приложении).

Лемма 1. *Пусть K — поле, причём $\mathrm{char}(K) = 0$. Тогда $K^\times$ содержит элемент бесконечного порядка.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим $2 = 1+1 \in K^\times$. Тогда для всякого $n > 0$:

$$2^n - 1 = (1+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} C_k^n 1^k 1^{n-k} - 1 = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot 1 - 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^n\right) \cdot 1.$$

Справа имеем сумму $\sum_{k=1}^n C_k^n > 0$ единиц. Поскольку $\mathrm{char}(K) = 0$, она не равна нулю, то есть $2^n - 1 \neq 0$. $\square$

Как e_i обозначим *естественный базис* над $\mathbb{Z}^k$, то есть такой вектор, у которого на i-м месте единица, а на остальных — нули. j-ю компоненту вектора α_i обозначим как α_i^j, а вектор, состоящий из j-х компонент, как $\alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j)$.

Лемма 2 (строгость). $\mathrm{char}(K) = 0 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{n\times k}.\ \phi_\alpha = \phi_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$

Доказательство. Импликация справа налево очевидна.

Наоборот, пусть $\phi_\alpha = \phi_\beta$. По лемме 1 зафиксируем элемент $z \in K^\times$ бесконечного мультипликативного порядка. Тогда для всякого $1 \leq i \leq n$ верно, что

$$(z^{\alpha_1^i}, \ldots, z^{\alpha_k^i}) = \phi_\alpha(z \cdot e_i) = \phi_\beta(z \cdot e_i) = (z^{\beta_1^i}, \ldots, z^{\beta_k^i}).$$

Таким образом, $z^{\alpha_j^i} = z^{\beta_j^i}$, то есть $z^{\alpha_j^i - \beta_j^i} = 1$. z имеет бесконечный мультипликативный порядок, поэтому $\alpha_j^i - \beta_j^i = 0$. $\square$

2.1. Инъективность мономиальных параметризаций

Нетрудно получить необходимое условие инъективности отображения ϕ_α. Для этого заметим, что очевидно следующее утверждение.

Утверждение. $\mathrm{Span}_\mathbb{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{Z}^k \Leftrightarrow \forall i.\ e_i \in \mathrm{Span}_\mathbb{Z}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Лемма 3. *Если $\alpha_i \in \mathbb{Z}^k$ порождают всю решётку, то ϕ_α инъективно.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\ker(\phi_\alpha) = \{1\}$, поскольку ϕ_α — гомоморфизм. Возьмём $t \in G^k$ такой, что $\phi_\alpha(t) = 1$, и докажем, что $t = 1$.

Действительно, поскольку α_i порождают всю решётку, каждый e_j выражается как линейная комбинация векторов α_i:

$$e_j = b_1^j \alpha_1 + \ldots + b_n^j \alpha_n.$$

$\phi_\alpha(t) = 1$ означает, что $t^{\alpha_i} = 1$ для всех $1 \leq i \leq n$. Зафиксируем $1 \leq j \leq k$ и возведём это равенство в степень b_i^j: $t^{b_i^j \alpha_i} = (t^{\alpha_i})^{b_i^j} = 1^{b_i^j} = 1$. Наконец, перемножим полученные равенства:

$$t_j = t^{e_j} = t^{b_1^j \alpha_1 + \ldots + b_n^j \alpha_n} = t^{b_1^j \alpha_1} \ldots t^{b_n^j \alpha_n} = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1,$$

что и требовалось. □

Пример. $(t_1, t_2) \mapsto (t_1^2 t_2^3, t_1 t_2^2)$ инъективно над $\mathbb{C}$, поскольку $(1, 0) = 2 \cdot (2, 3) + (-3) \cdot (1, 2)$ и $(0, 1) = -1 \cdot (2, 3) + 2 \cdot (1, 2)$.

Теперь покажем, что полученное в лемме необходимое условие является также и достаточным для группы $G = \mathbb{C}^\times$.

Будем пользоваться существованием для целочисленных матриц *нормальной формы Смита* [3]. Пусть $\mathrm{diag}_r^{m \times n}(x_1, \ldots, x_r)$ — диагональная матрица $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$, дополненная (или обрезанная) справа снизу нулями до матрицы размера $m \times n$.

Теорема (о существовании нормальной формы Смита). *Для всякой матрицы $\alpha \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ существуют пара матриц $\beta_1 \in \mathrm{GL}^m(\mathbb{Z})$ и $\beta_2 \in \mathrm{GL}^n(\mathbb{Z})$, а также набор чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие, что:*

$$\beta_1 \alpha \beta_2 = \mathrm{diag}_r^{m \times n}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r),$$

причём $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \ldots \mid \varepsilon_r$ (так называемые инвариантные факторы) и $r = \mathrm{rank}(\alpha)$.

Поскольку числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ выбираются единственным образом с точностью до обратимого элемента, то есть в случае $\mathbb{Z}$ с точностью до ± 1, можем всегда выбрать их положительными. Для них матрицу $\mathrm{diag}_r^{m \times n}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ обозначим как $\mathrm{SNF}(\alpha)$.

Помимо этого, с учётом функториальности ϕ, ясно, что ϕ_β биективно, если $\beta \in \mathrm{GL}^n(\mathbb{Z})$. Действительно, $\phi_\beta \circ \phi_{\beta^{-1}} = \phi_{\beta\beta^{-1}} = \phi_E = 1_{(K^\times)^n}$ и $\phi_{\beta^{-1}} \circ \phi_\beta = \phi_{\beta^{-1}\beta} = \phi_E = 1_{(K^\times)^n}$. Поэтому имеет место следующая лемма.

Лемма 4. $\phi_\alpha : (\mathbb{C}^\times)^k \to (\mathbb{C}^\times)^n$ *инъективна тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{SNF}(\alpha) = \mathrm{diag}_k^{n \times k}(1, 1, \ldots, 1).$$

Доказательство. Пользуясь теоремой, возьмём матрицы $\beta_1 \in \mathrm{GL}^n(\mathbb{Z})$ и $\beta_2 \in \mathrm{GL}^k(\mathbb{Z})$ такие, что $\beta_1\alpha\beta_2 = \mathrm{SNF}(\alpha)$. В таком случае, $\alpha = \beta_1^{-1}\mathrm{SNF}(\alpha)\beta_2^{-1}$, и $\phi_\alpha = \phi_{\beta_1^{-1}\mathrm{SNF}(\alpha)\beta_2^{-1}} = \phi_{\beta_1^{-1}} \circ \phi_{\mathrm{SNF}(\alpha)} \circ \phi_{\beta_2^{-1}}$.

Поскольку, по замечанию выше, $\phi_{\beta_1^{-1}}$ и $\phi_{\beta_2^{-1}}$ биективны, то ϕ_α инъективно тогда и только тогда, когда инъективно $\phi_{\mathrm{SNF}(\alpha)}$.

$\phi_{\mathrm{SNF}(\alpha)}(t_1, \ldots, t_k) = (t_1^{\varepsilon_1}, \ldots, t_r^{\varepsilon_r}, 1, \ldots, 1)$, но $t \mapsto t^\varepsilon$ инъективно над $\mathbb{C}^\times$ только в случае $\varepsilon = \pm 1$ (иначе $t^\varepsilon = t^\varepsilon \cdot 1 = t^\varepsilon \cdot u^\varepsilon = (tu)^\varepsilon$, где $u \neq 1$ — нетривиальный корень из единицы степени ε). В силу выбора знаков, $\phi_{\mathrm{SNF}(\alpha)}$ инъективна лишь когда $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_r = 1$ и $r = k \leq n$, что и требовалось. □

Сформулируем ещё одну вспомогательную теорему [4]. *$\mathbb{Z}$-линейную оболочку* векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ обозначим как

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Если $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{Z}^k$, то говорим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *порождают всю решётку* $\mathbb{Z}^k$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^{n\times k}$. Следующие утверждения равносильны:*

1) Строки матрицы α порождают всю решётку $\mathbb{Z}^k$.

2) Миноры максимальной размерности матрицы α взаимно просты.

3) $\mathrm{SNF}(\alpha) = \mathrm{diag}_k^{n\times k}(1, \ldots, 1)$.

Таким образом, из леммы 4 и теоремы 1 получаем необходимое и достаточное условие инъективности ϕ_α.

Теорема 2. *ϕ_α инъективно над полем $K = \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда α_i порождают всю решётку $\mathbb{Z}^k$.*

2.2. Алгебраичность и существование

Как и в случае теории кривых и поверхностей, говорим, что подгруппа алгебраического тора *параметризуется,* если она представима как образ некоторого отображения. Аналогично, подгруппа *параметризуется мономиально,* если она представима как образ отображения ϕ_α для некоторой матрицы α.

Поскольку ϕ_α — гомоморфизм, его полный образ $\mathrm{Im}(\phi_\alpha)$ является подгруппой в $(K^\times)^n$. Изучим два вопроса: является ли $\mathrm{Im}(\phi_\alpha)$ алгебраической подгруппой (алгебраичность) и всякая ли алгебраическая подгруппа задаётся некоторым ϕ_α (существование).

Для этого, прежде всего, заметим, что система биномиальных уравнений $z^{\beta'_i} = z^{\beta''^i}$ эквивалентна системе $z^{\beta'_i - \beta''_i} = 1$, то есть в точности ядру оператора $\phi_{\beta'_i - \beta''_i}$; поэтому первый вопрос эквивалентен тому, можно ли данный гомоморфизм ϕ_α достроить до точной последовательности $(K^\times)^k \xrightarrow{\phi_\alpha} (K^\times)^n \xrightarrow{\phi_\beta} (K^\times)^m$.

Лемма 5. *Пусть G — группа, H — абелева группа, $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$, $g \in \mathrm{Hom}(H,G)$ и $g \circ f = 1_G$. Тогда последовательность $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{f\circ g - 1_H} H$ точна.*

Доказательство. Действительно, $(f \circ g - 1_H) \circ f = f \circ g \circ f - f = f - f = 0$, то есть $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f \circ g - 1_H)$. Обратно, пусть $h \in \ker(f \circ g - 1_H)$. Тогда $f(g(h)) - h = 0 \Leftrightarrow h = f(g(h))$, то есть $h \in \mathrm{Im}(f)$, и $\ker(f \circ g - 1_H) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. □

Лемма 6. *ϕ_α, где $\alpha \in \mathbb{Z}^{n\times k}$, представимо как некоторый образ $\mathrm{Im}(\phi_\beta)$, если отображения $g \mapsto g^{\varepsilon_i}$ сюръективны в G для всех ε_i из $\mathrm{SNF}(\alpha)$.*

Доказательство. Снова представим α в виде $\alpha = \beta_1^{-1} \varepsilon \beta_2^{-1}$, где

$$\varepsilon = \mathrm{SNF}(\alpha) = \mathrm{diag}_r^{n\times k}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r).$$

Рассмотрим $\delta = \mathrm{diag}_r^{n\times r}(1, \ldots, 1)$ и $\alpha' = \beta^{-1}\delta$. $\phi_{\alpha'}$ инъективна как композиция инъективных функций. С другой стороны, очевидно, что:

$$\mathrm{Im}(\phi_\alpha) = \phi_{\beta_1^{-1}}(\phi_\varepsilon(\phi_{\beta_2^{-1}}(G^k))) = \phi_{\beta_1^{-1}}(\phi_\varepsilon(G^k)) = \phi_{\beta_1^{-1}}(\phi_\delta(G^r)) = \mathrm{Im}(\phi_{\alpha'}).$$

Нетрудно видеть, что α' имеет левой обратной матрицу $\beta' = \delta^\top \beta$, а потому гомоморфизм $\phi_{\alpha'}$ имеет левым обратным гомоморфизм $\phi_{\beta'}$. Поскольку $(\phi_{\alpha'} \circ \phi_{\beta'})\phi_{-E} = \phi_{\alpha'\beta' - E}$, остаётся лишь применить лемму 5. □

Теорема 3. *Всякая параметризация ϕ_α, где $\alpha \in \mathbb{Z}^{n\times k}$, задаёт алгебраическую подгруппу $(K^\times)^n$, если поле K алгебраически замкнуто.*

Пример. Над алгебраически незамкнутым полем теорема не выполняется: образ $t \mapsto t^2$ над $\mathbb{R}$ представляет собой положительный луч $\mathbb{R}_{>0}$. Как известно, множество корней вещественного многочлена либо конечно, либо совпадает со всем $\mathbb{R}$, поэтому указанная параметризация не определяет алгебраическое множество.

Ответ на второй вопрос несколько сложнее. Например, уравнение $z^n = 1$ задаёт алгебраическую группу для любого $n \in \mathbb{Z}$, состоящую из n точек на $\mathbb{C}^\times$; но если $n \neq 0, \pm 1$, то легко видеть, что она не может быть параметризована никакой ϕ_α.

Действительно, ϕ_α — голоморфное отображение, $(\mathbb{C}^\times)^k$ — открытое множество, поэтому всякая проекция полного образа $\mathrm{Im}(\phi_\alpha) = \phi_\alpha((\mathbb{C}^\times)^k)$ либо, в силу открытости непостоянных голоморфных отображений, открыта, либо состоит из одной точки; но $z^n = 1$ открыто, только если $n = 0$, и состоит из одной точки, только если $n = \pm 1$.

Более того, из этих рассуждений видно, что по всякой системе биномиальных уравнений можно построить новую систему, которая гарантированно не параметризуется мономиально, возведя, например, произвольное уравнение в степень $n > 1$.

Чтобы понять, при каких условиях существует мономиальная параметризация, сначала заметим, что группа $\mathrm{Im}(\phi_\alpha)$ изоморфна группе $(\mathbb{C}^\times)^r$. Действительно, в доказательстве теоремы мы видели, что для всякого ϕ_α можно построить инъективный $\phi_{\alpha'} : (\mathbb{C}^\times)^r \to (\mathbb{C}^\times)^n$ такой, что $\mathrm{Im}(\phi_\alpha) = \mathrm{Im}(\phi_{\alpha'})$; но тогда $\phi_{\alpha'}$ и задаёт искомый изоморфизм. Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение. *Для любой матрицы $\alpha \in \mathbb{Z}^{n\times k}$ группа $\mathrm{Im}(\phi_\alpha)$ изоморфна алгебраическому тору размерности не более чем k.*

Кроме того, поскольку отображение $\phi_{\alpha'}$ полиномиально, оно, в частности, непрерывно в естественной топологии на $K = \mathbb{C}$. Множество $(\mathbb{C}^\times)^r$ связно, а, как известно, непрерывный образ связного множества связен, в силу чего верно ещё одно утверждение.

Утверждение. $\mathrm{Im}(\phi_\alpha) \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ *связно.*

Теперь отметим, что группа $z^n = 1$ связна в точности тогда, когда $n = 0, \pm 1$. Это соображение указывает на то, что критерием существования мономиальной параметризации для алгебраической подгруппы тора является связность.

Группу корней степени n из единицы, задаваемую уравнением $z^n = 1$ в поле K, обозначим как $\omega_K(n) \subseteq K^\times$. Для вектора $x \in \mathbb{Z}^k$ также обозначим

$\omega_K(x) = \omega_K(x_1) \times \ldots \times \omega_K(x_k) \subseteq (K^\times)^k$. Для краткости будем писать $\omega(x) = \omega_{\mathbb{C}}(x)$. Известно, что группа $\omega(x)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/x_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/x_k\mathbb{Z}$.

Чтобы доказать описанный выше критерий, рассмотрим число $\Pi(\alpha) = |\omega_K(\varepsilon)|$, где $|G|$ — порядок группы G. $|G \times H| = |G||H|$, поэтому $\Pi(\alpha) = |\omega_K(\varepsilon_1)| \cdot \ldots \cdot |\omega_K(\varepsilon_r)|$. Так как $\omega(n)$ изоморфно $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, в случае поля $K = \mathbb{C}$ выполняется равенство $\Pi(\alpha) = \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_r$.

Лемма 7. *Если* $\Pi(\beta) = 1$*, то существует такое* α*, что* $\ker(\phi_\beta) = \mathrm{Im}(\phi_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $H = \ker(\phi_\beta)$. Без потери общности считаем, что строки матрицы β линейно независимы над $\mathbb{Z}$ (ясно, что строки, выражающиеся как линейная комбинация остальных строк, можно убрать из матрицы β без изменения ядра).

Запишем для β нормальную форму Смита: $\beta = \beta_1^{-1}\varepsilon\beta_2^{-1}$. Поскольку, по замечанию выше, β имеет полный ранг, матрица ε не имеет нулевых строк. Кроме того, $\Pi(\beta) = 1$, поэтому $|\omega_K(\varepsilon_i)| = 1$, то есть уравнения $z^{\varepsilon_i} = 1$ имеют решением только $z = 1$.

Ядро ε задаётся векторами вида $(0, \ldots, 0, t_{k+1}, \ldots, t_n)$. Рассмотрим матрицу $\delta \in \mathbb{Z}^{n \times (n-k)}$, соответствующую линейному оператору

$$(t_1, \ldots, t_{n-k}) \mapsto (0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_{n-k}).$$

Пусть также $\alpha = \beta_2\delta$. Докажем, что $\mathrm{Im}(\phi_\alpha) = \ker(\phi_\beta)$.

Действительно, по заданию δ, $\varepsilon\delta = 0$, поэтому $\phi_\beta \circ \phi_\alpha = \phi_{\beta_1^{-1}\varepsilon\beta_2^{-1}\beta_2\delta} = \phi_{\beta_1^{-1}\varepsilon\delta} = \phi_0 = 1$, то есть $\mathrm{Im}(\phi_\alpha) \subseteq \ker(\phi_\beta)$.

Обратно, пусть $z \in \ker(\phi_\beta)$. Тогда $\phi_{\beta_1^{-1}}(\phi_{\varepsilon\beta_2^{-1}}(z)) = \phi_\beta(z) = 1$, откуда $\phi_\varepsilon(\phi_{\beta_2^{-1}}(z)) = \phi_{\varepsilon\beta_2^{-1}}(z) = \phi_{\beta_1}(1) = 1$. Из вида матрицы ε получаем, что $\phi_{\beta_2^{-1}}(z) = (1, \ldots, 1, t_{k+1}, \ldots, t_n) = \phi_\delta(t_{k+1}, \ldots, t_n)$; то есть для некоторых t_j выполнено $z = \phi_{\beta_2}(\phi_\delta(t_{k+1}, \ldots, t_n)) = \phi_\alpha(t_{k+1}, \ldots, t_n)$. Таким образом, $z \in \mathrm{Im}(\phi_\alpha)$, и $\ker(\phi_\beta) \subseteq \mathrm{Im}(\phi_\alpha)$. □

Теорема 4. *Число связных компонент* $\ker(\phi_\beta) \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ *равно* $\Pi(\beta)$.

Доказательство. Снова рассмотрим нормальную форму для β: $\beta = \beta_1^{-1}\varepsilon\beta_2^{-1}$. $\phi_{\beta_1^{-1}}$ — изоморфизм, поэтому $\ker(\phi_\beta) = \ker(\phi_{\varepsilon\beta_2^{-1}})$.

Строки матрицы β_2^{-1} обозначим как b_i. Для вектора $u \in \omega(\varepsilon)$ рассмотрим множество $H_u = \{z \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid \forall 1 \leq i \leq r.\ z^{b_i} = u_i\}$. Условие

$\phi_\varepsilon(\phi_{\beta_2^{-1}}(z)) = 1$, очевидно, эквивалентно условию $\exists u \in \omega(\varepsilon).\ z \in H_u$. Ясно, что множества H_u дизъюнктны, поэтому $\ker(\phi_\beta)$ распадается в дизъюнктное объединение:

$$\ker(\phi_\beta) = \bigsqcup_{u \in \omega(\varepsilon)} H_u.$$

Векторов $u \in \omega(\varepsilon)$ ровно $\Pi(\beta)$ штук, поэтому достаточно показать, что каждая компонента H_u связна.

Поскольку, по определению, $H_1 = \ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}})$, где $\delta = \mathrm{diag}_r^{k\times n}(1,\ldots,1)$, и $\Pi(\delta\beta_2^{-1}) = 1$, компонента H_1, по замечанию, связна.

Зафиксировав u, рассмотрим матрицу $\tau = \mathrm{diag}(1/u_1,\ldots,1/u_r,1,\ldots,1)$ и отображение $\psi = \phi_{\beta_2} \circ \phi_\tau \circ \phi_{\beta_2^{-1}}$. ψ — непрерывная биекция, причём $\psi^{-1} = \phi_{\beta_2} \circ \phi_{\tau^{-1}} \circ \phi_{\beta_2^{-1}}$. По определению ψ, $\phi_{\beta_2^{-1}}(\psi(z)) = \phi_{\tau\beta_2^{-1}}(z)$.

Если теперь $z \in H_u$, то $\psi(z)^{b_i} = z^{b_i}/u_i = u_i/u_i = 1$. Обратно, если $z \in H_1$, то $\psi^{-1}(z)^{b_i} = u_i z^{b_i} = u_i$. Таким образом, $\psi(H_u) = H_1$, то есть H_u гомеоморфно H_1, но H_1 связно. $\square$

Как мы видели ранее, всякая алгебраическая подгруппа H тора $(K^\times)^n$ представляется как $\ker(\phi_\beta)$ для некоторого β. Заметим, что $\Pi(\beta)$ не зависит от выбора β для группы H.

Теорема 5. *Если* $\mathrm{char}(K) = 0$ *и* $\ker(\phi_\beta) = \ker(\phi_{\beta'})$, *то* $\Pi(\beta) = \Pi(\beta')$.

Доказательство. Запишем нормальные формы Смита: $\beta = \beta_1^{-1}\varepsilon\beta_2^{-1}$ и $\beta' = {\beta'}_1^{-1}\varepsilon'{\beta'}_2^{-1}$. Тогда $\ker(\phi_{\varepsilon\beta_2^{-1}}) = \ker(\phi_\beta) = \ker(\phi_{\beta'}) = \ker(\phi_{\varepsilon'{\beta'}_2^{-1}})$.

Пусть $\varepsilon = \mathrm{diag}_r^{k\times n}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$ и $\varepsilon' = \mathrm{diag}_{r'}^{k'\times n}(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_r)$. Обозначим $\delta = \mathrm{diag}_r^{k\times n}(1,\ldots,1)$ и $\delta' = \mathrm{diag}_{r'}^{k'\times n}(1,\ldots,1)$.

Поскольку $\Pi(\delta\beta_2^{-1}) = \Pi(\delta'{\beta'}_2^{-1}) = 1$, обе подгруппы согласно лемме 7 параметризуются некоторыми ϕ_α и $\phi_{\alpha'}$ соответственно.

$\mathrm{Im}(\phi_\alpha) = \ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}}) \subseteq \ker(\phi_{\varepsilon\beta_2^{-1}}) = \ker(\phi_{\varepsilon'{\beta'}_2^{-1}})$, поэтому $\phi_{\varepsilon'{\beta'}_2^{-1}} \circ \phi_\alpha = 1$. В силу леммы 2, $\varepsilon'{\beta'}_2^{-1}\alpha = 0$. Умножив обе части равенства на матрицу $\mathrm{diag}(1/\varepsilon'_1,\ldots,1/\varepsilon'_r,1,\ldots,1)$, получим, что $\delta'{\beta'}_2^{-1}\alpha = 0$; но это значит, что

$$\ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}}) = \mathrm{Im}(\phi_\alpha) \subseteq \ker(\phi_{\delta'{\beta'}_2^{-1}}).$$

Совершенно аналогично получим обратное включение. В силу экстенсиональности, $\ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}}) = \ker(\phi_{\delta'{\beta'}_2^{-1}})$.

Рассмотрим фактор-группу $\ker(\phi_\beta)/\ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}}) = \ker(\phi_{\beta'})/\ker(\phi_{\delta'\beta'^{-1}_2})$, называемую также *группой компонент.* Отображение

$$\phi_{\delta\beta_2^{-1}} : \ker(\phi_\beta) \to \omega_K(\varepsilon) \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$$

индуцирует инъективный гомоморфизм из фактора. Помимо этого, в теореме 4 была построена биекция между компонентами H_u (которая обобщается без изменений на случай произвольного поля K), а потому все они непусты. Это означает, что $\phi_{\delta\beta_2^{-1}}$ сюръективно, а потому индуцированное отображение тоже сюръективно. Аналогично проводятся рассуждения для группы $\omega_K(\varepsilon')$. Таким образом, получаем цепочку изоморфизмов:

$$\omega(\varepsilon) \cong \ker(\phi_\beta)/\ker(\phi_{\delta\beta_2^{-1}}) = \ker(\phi_{\beta'})/\ker(\phi_{\delta'\beta'^{-1}_2}) \cong \omega(\varepsilon').$$

Окончательно, $\Pi(\beta) = |\omega_K(\varepsilon)| = |\omega_K(\varepsilon')| = \Pi(\beta')$, так как изоморфные группы имеют одинаковые порядки. □

Таким образом, для всякой алгебраической подгруппы H тора можно определить число $\Pi(H)$ равное $\Pi(\beta)$ для всякого β такого, что $H = \ker(\phi_\beta)$.

Теперь для всякой алгебраической подгруппы $H \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ определим *компоненту единицы* H° как компоненту связности, содержащую нейтральный элемент группы. Из теоремы 4 следует, что $\Pi(H^\circ) = 1$. Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 6. *Алгебраическая подгруппа H тора $(K^\times)^n$ параметризуема тогда и только тогда, когда $\Pi(H) = 1$.*

Следствие 1. *Алгебраическая подгруппа H тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ параметризуема тогда и только тогда, когда является связной.*

Следствие 2. *Всякая алгебраическая подгруппа H тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ содержит параметризуемую подгруппу H° той же размерности.*

Доказательство. Все связные компоненты H гомеоморфны, что немедленно доказывает теорему. □

3. Линейная независимость над абелевой группой

Во всякой абелевой группе G естественным образом определено умножение на целые числа. Для вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k$ и элемента $g \in G$

под $g\alpha$ понимаем вектор $(\alpha_1 g, \ldots, \alpha_k g) \in G^k$. Говорим, что набор векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^k$ *линейно независим над абелевой группой* G, если

$$\forall g_1, \ldots, g_n \in G.\ g_1\alpha_1 + \ldots + g_n\alpha_n = 0 \Rightarrow g_1 = \ldots = g_n = 0.$$

Видно, что линейная независимость векторов $\mathbb{Z}^k$ над аддитивной группой $\mathbb{R}$ эквивалентна линейной независимости в векторном пространстве $\mathbb{R}^k$. Однако, например, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, как известно, не обладает структурой кольца, поэтому и не имеет смысла говорить о модуле $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^k$ над $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, как и о линейной независимости в нём.

Сразу отметим, каким образом данное определение связано с изучаемыми параметризациями ϕ_α.

Теорема 7. *$\phi_\alpha : G^k \to G^n$ инъективно тогда и только тогда, когда α^j линейно независимы над группой G.*

Доказательство. Имеет место цепочка эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
&\phi_\alpha \text{ инъективно} \Leftrightarrow \ker(\phi_\alpha) = \{1\} \Leftrightarrow \ker(\phi_\alpha) \subseteq \{1\} \\
&\Leftrightarrow (\forall t \in G^k.\ t^{\alpha_1} = 1 \wedge \ldots \wedge t^{\alpha_n} = 1 \Rightarrow t = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall t_1, \ldots, t_k \in G.\ t_1^{\alpha^1} \ldots t_k^{\alpha^k} = 1 \Rightarrow t_1 = \ldots = t_k = 1).
\end{aligned}$$

Но последнее условие — это в точности определение линейной независимости над G. □

Далее нам понадобятся две общие леммы.

Лемма 8. *Пусть G и H — абелевы группы. $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^k$ линейно независимы над $G \times H$ тогда и только тогда, когда они же линейно независимы над G и над H.*

Доказательство. Элементы группа $G \times H$ представляются как пары (g, h), где $g \in G$ и $h \in H$, поэтому линейная независимость над $G \times H$ запишется как:

$$\begin{gathered}
\forall (g_1, h_1) \ldots, (g_n, h_n) \in G \times H. \\
(g_1, h_1)\mu_1 + \ldots + (g_n, h_n)\mu_n = 0 \Rightarrow (g_1, h_1) = \ldots = (g_n, h_n) = 0.
\end{gathered}$$

Кроме того, ясно, что

$$(g_1, h_1)\mu_1 + \ldots + (g_n, h_n)\mu_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$g_1\mu_1 + \ldots + g_n\mu_n = 0 \wedge h_1\mu_1 + \ldots + h_n\mu_n = 0,$$

а также

$$(g_1, h_1) = \ldots = (g_n, h_n) = 0 \Leftrightarrow g_1 = \ldots = g_n = 0 \wedge h_1 = \ldots = h_n = 0.$$

Зафиксировав поочерёдно $g_1 = \ldots = g_n = 0$ и $h_1 = \ldots = h_n = 0$, получим импликацию слева направо. Импликация справа налево очевидна в свете выше указанных эквивалентностей. $\square$

Лемма 9. *Пусть G и H — абелевы группы, $f : G \to H$ — изоморфизм. Тогда $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^k$ линейно независимы над G тогда и только тогда, когда они линейно независимы над H.*

Доказательство. Поскольку f — изоморфизм, получаем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
&\forall g_1, \ldots, g_n \in G.\ g_1\alpha_1 + \ldots + g_n\alpha_n = 0 \Rightarrow g_1 = \ldots = g_n = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\forall g_1, \ldots, g_n \in G.\ f(g_1\alpha_1 + \ldots + g_n\alpha_n) = 0 \Rightarrow g_1 = \ldots = g_n = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\forall g_1, \ldots, g_n \in G.\ f(g_1)\alpha_1 + \ldots + f(g_n)\alpha_n = 0 \Rightarrow f(g_1) = \ldots = f(g_n) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\forall h_1, \ldots, h_n \in H.\ h_1\alpha_1 + \ldots + h_n\alpha_n = 0 \Rightarrow h_1 = \ldots = h_n = 0.
\end{aligned}$$
$\square$

Применив леммы, получим критерий инъективности для случая $K = \mathbb{C}$.

Следствие. *ϕ_α инъективно тогда и только тогда, когда α^j линейно независимы над группами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — группа окружности, подгруппа в $\mathbb{C}^\times$. Посредством тригонометрического представления $z = re^{i\theta}$ группа $\mathbb{C}^\times$ изоморфна произведению $\mathbb{R}^\times_{>0} \times S^1$. Отображение $t \mapsto e^t$ определяет изоморфизм групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^\times_{>0}$, а отображение $\theta \mapsto e^{i\theta}$ — групп $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и S^1; что доказывает следствие в силу двух предыдущих лемм. $\square$

Следствие. *Если ϕ_α инъективно над $K = \mathbb{C}$, то* $\operatorname{rank}(\alpha) = k$.

Доказательство. Как отмечалось выше, линейная независимость над $\mathbb{R}$ эквивалентна стандартной линейно независимости в векторном пространстве $\mathbb{R}^k$ над $\mathbb{R}$, а она, в свою очередь, эквивалентна полноте ранга. $\square$

В частности, это означает, что параметризация с числом переменных $k > n$ заведомо неинъективна, чего и следовало ожидать.

Заметив, что $\mathbb{R}^\times_{>0} \cong \mathbb{R}^\times_{>0} \times \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{R}^\times_{>0} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{H}^\times \cong \mathbb{R}^\times_{>0} \times S^3$ (кватернионы), легко получить подобные условия для инъективности ϕ_α над группами $\mathbb{R}^\times_{>0}$, $\mathbb{R}^\times$ и $\mathbb{H}^\times$.

Естественным кажется, что, поскольку рассматриваемые вектора α^j целочисленные, их линейная независимость над $\mathbb{R}$ должна сводиться к линейной независимости над $\mathbb{Z}$. Докажем это.

Лемма [5]. *$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^k$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Импликация слева направо очевидна. Обратно, пусть μ_1, $\ldots, \mu_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим их линейную комбинацию: $r_1\mu_1 + \ldots + r_n\mu_n = 0$.

Как известно, $\mathbb{R}$ является (бесконечномерным) векторным пространством над $\mathbb{Q}$, а всякое векторное пространство при условии аксиомы выбора имеет базис (Гамеля) [6]. Пользуясь этим, зафиксируем базис Гамеля B для $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$. Разложим r_i по этому базису:

$$r_i = q_i^1 b_1 + \ldots + q_i^s b_s,$$

где $q_i^j \in \mathbb{Q}$ и $b_j \in B$. Векторов r_i конечное число, поэтому наборы базисных векторов b_j для них можно выбрать одинаковыми.

Подставим разложение в линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} r_1\mu_1 + \ldots + r_n\mu_n &= (q_1^1 b_1 + \ldots + q_1^s b_s)\mu_1 + \ldots + (q_n^1 b_1 + \ldots + q_n^s b_s)\mu_n \\ &= (q_1^1 \mu_1 + \ldots + q_n^1 \mu_n) b_1 + \ldots + (q_1^s \mu_1 + \ldots + q_n^s \mu_n) b_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

В каждой проекции получаем нулевую рациональную линейную комбинацию чисел b_j. В силу линейной независимости, все эти проекции равны нулю, поэтому равны нулю и составленные из них векторы: $q_1^j\mu_1 + \ldots + q_n^j\mu_n = 0$.

Однако все q_i^j рациональны, а μ_i линейно независимы над $\mathbb{Q}$, поэтому $q_i^j = 0$. Таким образом, $r_i = q_i^1 b_1 + \ldots + q_i^s b_s = 0 \cdot b_1 + \ldots + 0 \cdot b_s = 0$. □

Лемма. *$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда линейно независимы над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Импликация слева направо снова очевидна. Обратно, пусть $q_1\mu_1 + \ldots + q_n\mu_n = 0$, где $q_i \in \mathbb{Q}$. Выберем для дробей q_i общий знаменатель $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Числители обозначим как $p_i \in \mathbb{Z}$, то есть $q_i = p_i/q$.

В таком случае $(p_1\mu_1 + \ldots + p_n\mu_n)/q = 0$, откуда и $p_1\mu_1 + \ldots + p_n\mu_n = 0$. Все p_i — целые числа, поэтому по линейной независимости над $\mathbb{Z}$ получаем, что $p_1 = \ldots = p_n = 0$. Таким образом, $q_i = p_i/q = 0/q = 0$. $\square$

Следствие. *$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^k$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда линейно независимы над $\mathbb{Z}$.*

Изучим подробнее следствия из линейной независимости над $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Утверждение. *$\mu_1, \ldots, \mu_n$ линейно независимы над $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда они же линейно независимы над $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Следует из того, что группы $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ изоморфны. $\square$

Далее для числа $d \in \mathbb{Z}$ и вектора $x \in \mathbb{Z}^k$ под $d \mid x$ понимаем, что $d \mid x_i$ для всех $1 \leq i \leq k$ или, что эквивалентно, $d \mid \gcd(x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма. *Если $\mu_1, \ldots, \mu_n$ линейно независимы над $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то:*

$$\forall d \in \mathbb{Z}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^n.\ d \mid x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n \Rightarrow d \mid x.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим дроби $q_i = x_i/d \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Делимость $x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n$ на d означает, что в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ выполнено $(x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n)/d = 0$, то есть $q_1\mu_1 + \ldots + q_n\mu_n = 0$. Однако в силу линейной независимости верно, что $q_1 = \ldots = q_n = 0$, а это означает $d \mid x_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. $\square$

Из доказанного немедленно следует простой критерий для проверки неинъективности ϕ_α.

Лемма. *Если ϕ_α инъективно, то $\forall j.\ \gcd(\alpha^j) = 1$.*

Следствие. *Если $\exists j.\ \gcd(\alpha^j) \neq 1$, то ϕ_α не является инъективным отображением.*

Доказательство. Выбрав $x_j = 1$ и $x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_k = 0$, получим, что:

$$\begin{aligned}
&\forall d \in \mathbb{Z}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^k.\ d \mid x_1\alpha^1 + \ldots + x_k\alpha^k \Rightarrow d \mid x \\
\Rightarrow\ &\forall j.\ \forall d \in \mathbb{Z}.\ d \mid \alpha^j \Rightarrow d \mid 1 \\
\Leftrightarrow\ &\forall j.\ \gcd(\alpha^j) = 1.
\end{aligned}$$

□

Нетрудно видеть, что использование поля $\mathbb{C}$ в этой лемме *существенно;* поскольку, например, отображение $t \mapsto (t^3, t^2)$ инъективно над $\mathbb{R}$, но не над $\mathbb{C}$.

Множество простых чисел обозначим как $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$.

Лемма. *Для произвольных целочисленных векторов $\mu_1, \ldots, \mu_n$ верно, что:*

$$\begin{aligned}
&\forall d \in \mathbb{Z}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^n.\ d \mid x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n \Rightarrow d \mid x \\
\Leftrightarrow\ &\forall p \in \mathbb{P}.\ \forall \beta \in \mathbb{N}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^n.\ p^\beta \mid x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n \Rightarrow p^\beta \mid x \\
\Leftrightarrow\ &\forall p \in \mathbb{P}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^n.\ p \mid x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n \Rightarrow p \mid x.
\end{aligned}$$

Доказательство. Импликации слева направо очевидны. Докажем импликации справа налево.

Зафиксируем произвольное $d \in \mathbb{Z}$ и некоторый вектор $x \in \mathbb{Z}^k$. Разложим d на простые множители: $d = p_1^{\beta_1} \ldots p_m^{\beta_m}$.

Поскольку $x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n$ делится на d, то оно делится и на каждое $p_i^{\beta_i}$. Пользуясь предпосылкой, получаем, что $p_i^{\beta_i} \mid x$ для всех $1 \leq i \leq m$; но тогда и $d = p_1^{\beta_1} \ldots p_m^{\beta_m} \mid x$, что и требовалось.

Далее, зафиксируем степень $\beta \in \mathbb{N}$ и простое число p. Поскольку $x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n$ делится на p^β, то оно делится и на p, поэтому из предпосылки следует, что $p \mid x$.

Но это означает, что x_i/p — целые числа, а $(x_1/p)\mu_1 + \ldots + (x_n/p)\mu_n$ делится на $p^{\beta-1}$. Снова применив предпосылку, получим, что $p \mid x/p$. Повторив эту процедуру β раз, окончательно заключим, что $p \mid x/p^{\beta-1}$; но это эквивалентно $p^\beta \mid x$. □

Последнее условие можно переписать как линейную независимость векторов μ_i над полями $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для всех простых p, что эквивалентно условию на максимальность ранга матрицы μ.

Следствие. *Для произвольных целочисленных векторов $\mu_1, \ldots, \mu_n$ верно, что:*

$$\begin{aligned} &\forall d \in \mathbb{Z}.\ \forall x \in \mathbb{Z}^n.\ d \mid x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n \Rightarrow d \mid x \\ \Leftrightarrow\ &\forall p \in \mathbb{P}.\ \forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n.\ x_1\mu_1 + \ldots + x_n\mu_n = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall p \in \mathbb{P}.\ \mu_1, \ldots, \mu_n \text{ линейно независимы над полем } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ &\forall p \in \mathbb{P}.\ \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\mu) = \max(n, k). \end{aligned}$$

Наконец, мы можем передоказать уже упомянутое достаточное условие, используя разработанный инструментарий.

Лемма. *Если ϕ_α инъективно, то α_i порождают всю решётку.*

Доказательство. От противного. Пусть α_i не порождают решётку. Тогда миноры максимальной размерности матрицы α имеют общий делитель $d > 1$.

Возьмём некоторый простой делитель p числа d. Поскольку максимальные миноры делятся на d, то они делятся и на p; поэтому в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ все максимальные миноры α равны нулю, что означает $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\alpha) < \max(n, k)$ [6], но это противоречит заключению из следствия. $\square$

Следствие 3. *ϕ_α инъективно тогда и только тогда, когда α_i порождают всю решётку.*

4. Голоморфные характеры

Пусть K — поле. Для каждого многочлена Лорана $f(z) = \sum_{i \in I} a_i z^i$ и индекса $k \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим отображение

$$\operatorname{coeff}_k(f) = \begin{cases} a_k, & \text{если } k \in I; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие утверждения.

Лемма. *Для любых многочленов Лорана f и g и вектора $w \in K^n$ верно, что:*

1) $\operatorname{coeff}_k(0) = 0$.

2) $\operatorname{coeff}_k(f + g) = \operatorname{coeff}_k(f) + \operatorname{coeff}_k(g)$.

3) $\operatorname{coeff}_k(wf) = w \cdot \operatorname{coeff}_k(f)$.

4) $\operatorname{coeff}_k(f \circ (z \mapsto wz)) = w^k \cdot \operatorname{coeff}_k(f)$.

Теорема. *Всякий многочлен Лорана* $f \in \operatorname{Hom}((K^\times)^n, K^\times)$ *является мономом.*

Доказательство. Действительно, для произвольного $w \in K^n$ в силу того, что f — гомоморфизм, выполняется равенство $f \circ (z \mapsto wz) = f(w) \cdot f$. Откуда:

$$w^k \cdot \operatorname{coeff}_k(f) = \operatorname{coeff}_k(f \circ (z \mapsto wz)) = \operatorname{coeff}_k(f(w) \cdot f) = f(w) \cdot \operatorname{coeff}_k(f),$$

а значит $(f(w) - w^k) \cdot \operatorname{coeff}_k(f) = 0$. Поскольку f нигде не равен нулю, существует k_0 такой, что $\operatorname{coeff}_{k_0}(f) \neq 0$; но тогда $f(w) - w^{k_0} = 0$ для всех w. $\square$

Отдельно рассмотрим случай $K = \mathbb{C}$. Как известно, в этом случае коэффициенты можно представить как интегралы:

$$\operatorname{coeff}_k(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{T_\varepsilon} \frac{f(z)}{z^k} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n},$$

где $T_\varepsilon = \{z \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid |z_1| = \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge |z_n| = \varepsilon_n\}$ — вещественный тор, а $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — вектор положительных чисел.

Пусть теперь f — голоморфная на $(\mathbb{C}^\times)^n$ функция. Определим для неё числа $\operatorname{coeff}_k(f)$ интегралами выше. Тогда сформулированная лемма остаётся справедливой. Действительно, пункты 1—3 верны в силу линейности интеграла. Пункт 4 получим, сделав замену переменных $z \mapsto z \cdot w = \xi$ и пользуясь тем, что интегралы по гомотопным циклам от голоморфной функции равны.

$$\begin{aligned}
\operatorname{coeff}_k(f \circ (z \mapsto wz)) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{T_\varepsilon} \frac{(f \circ (z \mapsto wz))(z)}{z^k} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{T_\varepsilon} \frac{f(wz)}{z^k} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{T_{\varepsilon'}} \frac{f(\xi)}{(\xi/w)^k} \frac{d(\xi_1/w_1)}{\xi_1/w_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d(\xi_n/w_n)}{\xi_n/w_n} \\
&= \frac{w^k}{(2\pi i)^n} \oint_{T_{\varepsilon'}} \frac{f(\xi)}{\xi^k} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\xi_n}{\xi_n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{w^k}{(2\pi i)^n} \oint_{T_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi^k} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\xi_n}{\xi_n} \\
&= w^k \cdot \operatorname{coeff}_k(f),
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon' = (\varepsilon_1|w_1|, \ldots, \varepsilon_n|w_n|)$. Теперь аналогичная теорема доказывается без изменений.

Теорема. *Всякий голоморфный $f \in \operatorname{Hom}((\mathbb{C}^\times)^n, \mathbb{C}^\times)$ — моном, то есть:*

$$\exists \alpha \in \mathbb{Z}^n.\ \forall z.\ f(z) = z^\alpha.$$

5. Дальнейшие перспективы

Важнейшим инструментом в комплексном анализе является понятие *вычета* голоморфной функции. Напомним основные сведения из одномерной теории вычетов.

Множество функций, голоморфных в открытом множестве $D \subseteq \mathbb{C}$ (или, более общо, в $D \subseteq \mathbb{C}^n$), обозначим как $\operatorname{Hol}(D)$.

Теорема. *Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ — область. Если $f \in \operatorname{Hol}(D)$, а кусочно-гладкие кривые γ_1 и $\gamma_2 \subseteq D$ гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Рассмотрим область D и её подмножество $D' = D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq D$, где $z_i \in D$.

Из теоремы в частности следует, что для произвольной $f \in \operatorname{Hol}(D')$ и её изолированной особой точки $z_0 \in D \backslash D'$ интегралы $\oint_{\Gamma_\epsilon} f(z)dz$ по окружностям $\Gamma_\epsilon = \{z \in D \mid |z - z_0| = \epsilon\}$ не зависят от $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ при достаточно малом ϵ (конкретнее, таком, что в круг $\{z \in D \mid |z - z_0| < \epsilon\}$ не попадают никакие другие особые точки f, кроме выбранной z_0).

В таком случае *вычетом* f в точке $z = z_0$ называют интеграл

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\epsilon} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\epsilon_0}} f(z)dz,$$

где ϵ_0 достаточно мало в описанном выше смысле.

Следующая теорема позволяет сводить вычисление интеграла от голоморфной функции к вычислению вычетов в её особых точках, что вместе со сравнительной простотой вычисления обосновывает их практическое применение.

Теорема (основная о вычетах). *Рассмотрим односвязную область* $D \subseteq \mathbb{C}$, *замкнутую кусочно-гладкую кривую* $\gamma \subseteq D'$, *конечный набор точек* $z_i \in D$ *и функцию* $f \in \mathrm{Hol}(D')$, *где* $D' = D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. *Тогда:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k) \operatorname*{res}_{z_k} f,$$

где $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ — *индекс точки* z *относительно кривой* γ.

Для построения описанных конструкций существенным фактом было то, что одномерные голоморфные функции допускают существование *изолированных* особых точек. Однако, как показывает следующая теорема [7], в многомерном случае это допущение неверно.

Теорема (о стирании компактных особенностей). *Пусть* $D \subseteq \mathbb{C}^n$ — *область, причём* $n > 1$, $\overline{K} \subseteq D$, $D \setminus K$ *связно. Тогда всякая* $f \in \mathrm{Hol}(D \setminus K)$ *голоморфно продолжается в* D.

Таким образом, в случае $n > 1$ невозможно вокруг особой точки голоморфной функции выбрать малую сферу так, чтобы функция была голоморфна в окрестности этой сферы (в противном случае, функцию можно было бы продолжить внутрь сферы). Следовательно, любая такая сфера содержит особые точки, а потому интеграл по ней, в общем случае, не определён.

В отличие от многомерных голоморфных функций, голоморфные отображения, то есть функции $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *могут* иметь изолированные нули или особые точки. Этот факт приводит к построению так называемого *вычета Гротендика.*

5.1. Вычет Гротендика

Зафиксируем набор многочленов Лорана $g_1, \ldots, g_n$ над $\mathbb{C}$. Пусть $g(z) = g_1(z) \ldots g_n(z)$ и $\Gamma = \{z \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid g(z) = 0\}$. Также зафиксируем некоторое изолированное решение $z \in \Gamma$ системы $g_1(z) = \ldots = g_n(z) = 0$ и его окрестность $U \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$. Для всякого $\epsilon \in \mathbb{R}^n_+$ определим

$$\gamma_{z,\epsilon} = \{z \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid \forall i.\ |g_i(z)| = \epsilon_i\}.$$

Почти для всех ϵ множество $\gamma_{z,\epsilon}$ представляет собой гладкое вещественное подмногообразие многообразия U. Для достаточно малых ненулевых ϵ многообразие $\gamma_{z,\epsilon}$ является компактным подмногообразием $U \setminus \Gamma$. Определим на нём ориентацию с помощью дифференциальной формы $d(\mathrm{Arg}\ g_1) \wedge \ldots \wedge d(\mathrm{Arg}\ g_n)$.

Циклом Гротендика γ_z [8] изолированного корня z системы $g_1(z) = \ldots = g_n(z) = 0$ назовём многообразие $\gamma_{z,\epsilon}$ для достаточно малого ϵ. Класс цикла в n-мерной группе гомологий $U \setminus \Gamma$ не зависит от выбора ϵ, но, очевидно, зависит от порядка уравнений $g_1(z) = 0, \ldots, g_n(z) = 0$.

Зафиксируем также ещё один многочлен Лорана f. *Вычетом Гротендика* назовём следующий интеграл:

$$\operatorname*{res}_z \frac{f}{g_1 \ldots g_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_z} \frac{f}{g_1 \ldots g_n}.$$

Существенную трудность [9] при его вычислении представляет устройство цикла γ_z. В случае $g_i(z) = z$ цикл γ_z является просто n-мерным тором, и вычисление вычета сводится к вычислению коэффициента в ряде Лорана, как и одномерном случае; однако в общем случае нетривиальна даже топологическая структура γ_z. Выдвигаем гипотезу, что для изучения структуры этого цикла (например, с целью замены на гомологичную ему линейную комбинацию торов) можно использовать аппарат кобордизмов и теорию Морса.

5.2. Кобордизмы и теория Морса

Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. *$n$-мерным k-гладким многообразием* называем топологическое пространство (X, τ) вместе с *гладкой структурой* A, состоящей из пар (U, h), где $U \in \tau$ (называемое координатной окрестностью) и h — гомеоморфизм между U и открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) Координатные окрестности покрывают X.

2) Если $(U_1, h_1), (U_2, h_2) \in \tau$, то $h_1 \circ h_2^{-1} : h_2(U_1 \cup U_2) \to \mathbb{R}^n_+$ — k-гладкое отображение (называемое отображением перехода).

3) Набор A максимален по отношению к предыдущему условию; то есть если $(U, h) \notin A$, то это условие не выполняется для набора $A \cup \{(U, h)\}$.

Обычно под гладким (без указания класса гладкости) многообразием понимают ∞-гладкое многообразие.

Границей многообразия W, которую обозначают ∂W, называют множество точек, не имеющих окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$. *Триадой* гладких многообразий [10] называют тройку $(W; V_0, V_1)$, где W — компактное гладкое многообразие, причём $V_0 \cap V_1 = \varnothing$ и $\partial W = V_0 \cup V_1$.

Кобордизмом между гладкими многообразиями M_0 и M_1 называем пятёрку $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ такую, что $(W; V_0, V_1)$ — триада гладких многообразий, а $h_i : V_i \to M_i$ — диффеоморфизмы.

Так называемые *функции Морса* предоставляют один из наиболее важных инструментов в теории кобордизмов. Пусть зафиксированы гладкое многообразие W и гладкая функция $f \in C^\infty(W)$. Точка $p \in W$ называется *критической точкой* f, если $(\nabla f)(p) = 0$ в некоторой координатной окрестности. Такая точка называется *невырожденной,* если

$$\det \left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p \right)_{i,j} \neq 0.$$

Функцией Морса для триады $(W; V_0, V_1)$ называется гладкая функция $f : W \to [a; b]$ такая, что:

1) $f^{-1}(a) = V_0$ и $f^{-1}(b) = V_1$.

2) Все критические точки f невырожденные и лежат в $W \setminus \partial W$.

Функция Морса позволяет, в определённом смысле, разбить W на составные части. Так, например, если $0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ — критические точки функции Морса f, то для любых $t, t' \in (t_i;\ t_{i+1})$ множества $f^{-1}([0; t))$ и $f^{-1}([0; t'))$ являются диффеоморфными многообразиями; то есть топология $f^{-1}([0; t))$ при увеличении параметра t меняется только при переходе через критические точки, что позволяет исследовать структуру W через критические точки его функции Морса.

Локальное поведение критических точек регулируется леммой Морса.

Лемма (Морса). *Если p — невырожденная критическая точка f, то существует система координат в окрестности p такая, что* $f(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{const} - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2$ *для некоторого натурального λ между 0 и n.*

Число λ при этом называется *индексом* критической точки. В каноническом случае $n = 2$ и $\lambda = 1$ получаем представление $f(x_1, x_2) = C - x_1^2 + x_2^2$ для константы $C \in \mathbb{R}$. Тогда прообразы $f^{-1}(\varepsilon)$ задаются уравнением $x_1^2 - x_2^2 = C - \varepsilon = \varepsilon'$, то есть представляют собой семейство гипербол.

Поскольку это уравнение триномиальное, по теореме Шмидта, подгруппу тора оно не определяет. Однако если сделать замену переменных $x_1 \mapsto (u+v)\sqrt{\varepsilon'}/2$ и $x_2 \mapsto (u-v)\sqrt{\varepsilon'}/2$, мы получим:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= \frac{(u+v)^2\varepsilon'}{4} - \frac{(u-v)^2\varepsilon'}{4} \\ &= \frac{(u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2)\varepsilon'}{4} \\ &= uv\varepsilon'; \end{aligned}$$

то есть в новой системе координат $f^{-1}(\varepsilon)$ задаётся *биномиальным* уравнением $uv = 1$, а потому является алгебраической подгруппой тора, что позволяет нам использовать разработанную теорию, например, перейти в этой окрестности к мономиальной параметризации.

Кроме того, если кобордизм *элементарный* (f имеет ровно одну критическую точку), то, как доказывается в главе 3 в [10], гипербола для $\varepsilon = -1$ представляет порождающий элемент группы относительных гомологий $H_\lambda(W, V_0)$. Исследование групп относительных гомологий возвращает нас к интегралам, введённым в предыдущем подразделе. Выдвигаем гипотезу, что подобная процедура может быть проделана для случаев произвольных размерности n и индекса λ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работе были:

1) Для случая поля комплексных чисел получены условия инъективности мономиальных параметризаций (теорема 2).

2) Получено достаточное условие алгебраичности для образа мономиальной параметризации в случае алгебраического замкнутого поля (теорема 3).

3) Получен конструктивный критерий существования мономиальной параметризации в случае поля нулевой характеристики (теорема 6), а также, как следствие, топологический критерий для случая поля комплексных чисел (следствие 1).

4) Предложено понятие линейной независимости над абелевой группой, исследованы его базовые свойства и на этом основании получено альтернативное доказательство условия инъективности мономиальных параметризаций (следствие 3).

Результаты работы имеют преимущественно теоретическое значение. Полученный критерий существования, в силу наличия явного алгоритма, может иметь практическое значение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Schmidt, W. M. Heights of points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$ / W. M. Schmidt // London Mathematical Society Lecture Note Series. Issue 235: Number Theory. Séminaire de théorie des nombres de Paris 1993–94. — 1996. — P. 157—187.

2. Artin, E. Galois Theory / E. Artin; London : University of Notre Dame, 1942, 1944. — 96 p. — ISBN: 978-0-486-62342-9.

3. Smith, H.J.S. On systems of linear indeterminate equations and congruences. Philos. / H.J.S. Smith // Philosophical Transactions of the Royal Society. — 1861. — Vol. 151. — P. 293—326.

4. Садыков, Т. М. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных / Т. М. Садыков, А. К. Цих; Москва : Наука, 2014. — 408 с. — ISBN: 978-5-02-039082-9.

5. Linearly independent over $\mathbb{Z}$, also linearly independent over $\mathbb{R}$? / Y-S. Smyrlis // Mathematics Stack Exchange : [сайт]. — URL: https://math.stackexchange.com/a/3881619 (дата обращения: 18.03.2024).

6. Bourbaki, N. Algèbre: Chapitres 1 à 3. Éléments de mathématique / N. Bourbaki; Berlin : Springer, 2006. — 652 p. — ISBN: 978-3-540-33849-9.

7. Shabat, B. V. Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables / B. V. Shabat; Providence : American Mathematical Society, 1992. — 371 p. — ISBN: 978-0-8218-1975-3.

8. Gelfond, O. A. Toric geometry and Grothendieck residues / O. A. Gelfond, A. G. Khovanskii // Moscow Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 2. — P. 99—112.

9. Tsikh, A. K. Multidimensional Residues and Their Applications / A. K. Tsikh; Providence : American Mathematical Society, 1992. — 188 p. — ISBN: 978-0-8218-4560-8.

10. Milnor, J. Lectures on the H-Cobordism Theorem / J. Milnor; Princeton : Princeton University Press, 1965. — 124 p. — ISBN: 978-0-691-65113-2.

11. MacLane, S. Categories for the Working Mathematician / S. MacLane; New York : Springer-Verlag, 1971. — 262 p. — ISBN: 978-0-387-90035-3.

12. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics / The Univalent Foundations Program // The HoTT Book | Homotopy Type Theory : [сайт]. — URL: https://homotopytypetheory.org/book/ (дата обращения: 01.05.2024).

13. Stong, R. E. Notes on Cobordism Theory / R. E. Stong; Princeton : Princeton University Press, 1969. — 422 p. — ISBN: 978-0-691-62221-7.

14. Cobordism categories that don't involve manifolds / T. Trimble // MathOverflow : [сайт]. — URL: https://mathoverflow.net/a/59696 (дата обращения: 27.06.2022).

15. Weston T., An introduction to cobordism theory / T. Weston // Stanford University. School of Humanities and Sciences. The Department of Mathematics : [сайт]. — URL: https://math.stanford.edu/~ralph/morsecourse/cobordismintro%20.pdf (дата обращения: 23.08.2022).

16. Programming Language and Theorem Prover — Lean : [сайт]. — URL: https://lean-lang.org/ (дата обращения: 01.05.2024).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении формализуем общую концепцию «теории кобордизмов» в терминах «категорий с кобордизмами». Перед этим изложим основные сведения из теории категорий.

A.1. Основные понятия теории категорий

Стандартные двухместные функции будем писать в инфиксной записи; то есть $f \circ g$ или $f \circ_X g$, но не $\circ(f, g)$ или $\circ_X(f, g)$.

Под *ориентированным (или направленным) графом* [11] понимаем упорядоченную четвёртку $(O, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod})$, где A и O — множества, dom и cod — функции $A \to O$. Для графа определим множество *перемножаемых стрелок* как $A \times_O A = \{(g, f) \in A \times A \mid \mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)\}$.

Категорией называется граф вместе с парой функций $\mathrm{id} : O \to A$ и $\circ : A \times_O A \to A$ таких, что для всех $a, b \in O$ и $f, g, h \in A$ верно:

1) $\mathrm{dom}(\mathrm{id}(a)) = \mathrm{cod}(\mathrm{id}(a)) = a$.

2) $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(f)$, если $(f, g) \in A \times_O A$.

3) $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}(g)$, если $(f, g) \in A \times_O A$.

4) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, если $(f, g), (g, h) \in A \times_O A$ (ассоциативность).

5) $f \circ \mathrm{id}(a) = f$, если $\mathrm{dom}(f) = a$ (правая унитальность).

6) $\mathrm{id}(b) \circ f = f$, если $\mathrm{cod}(f) = b$ (левая унитальность).

Для категории $C = (O, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \circ)$ элементы множества O называются *объектами*, а элементы множества A — *стрелками* (или морфизмами) этой категории. Обозначим $\mathrm{Ob}(C) = O$ и $\mathrm{Arr}(C) = A$. Стрелки $\mathrm{id}(x)$ называются *единичными,* а стрелка $f \circ g$ — *композицией.* Для категории C также будем писать id_C и $\circ_C$. Для объектов $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ определим *множество стрелок*:

$$\hom_C(a, b) = \{f \in \mathrm{Arr}(C) \mid \mathrm{dom}(f) = a \wedge \mathrm{cod}(f) = b\}.$$

Функтором между категориями A и B называется упорядоченная пара $T = (T_1, T_2)$, где $T_1 : \mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(B)$ и $T_2 : \mathrm{Arr}(A) \to \mathrm{Arr}(B)$, такая, что для всяких объектов $a, b, c \in \mathrm{Ob}(A)$ и стрелок $f \in \hom_C(a, b)$ и $g \in \hom_C(b, c)$ выполняются следующие условия:

1) $T_2(f) \in \hom_C(T_1(a), T_1(b))$.

2) $T_2(\mathrm{id}(a)) = \mathrm{id}(T_1(a))$.

3) $T_2(g \circ f) = T_2(g) \circ T_2(f)$.

В этом случае пишем $T : A \to B$. T_1 называется *объектной функцией*, а T_2 — *стрелочной*. Всюду далее будем следовать общепринятому соглашению: объектную и стрелочную функции одного функтора обозначаем одной и той же буквой. Функтор категории в себя также называется *эндофунктором*.

Для всякой категории определён единичный функтор $1_C : C \to C$, объектная и стрелочная функции которого — тождественные. Для зафиксированных категорий A, B и объекта $b \in \mathrm{Ob}(B)$ определён *диагональный функтор* $\Delta_b : A \to B$ такой, что $\Delta_b(a) = b$ и $\Delta_b(f) = \mathrm{id}_B(b)$ для любых $a \in \mathrm{Ob}(A)$ и $f \in \mathrm{Arr}(A)$.

Если дана пара функтор $F = (F_1, F_2) : B \to C$ и $G = (G_1, G_2) : A \to B$, то определена их *композиция* $F \circ G = (F_1 \circ G_1, F_2 \circ G_2) : A \to C$.

Стрелка $f \in \hom_C(a, b)$ называется *изоморфизмом*, если существует стрелка $g \in \hom_C(b, a)$ такая, что $f \circ g = \mathrm{id}(b)$ и $g \circ f = \mathrm{id}(a)$. Тогда также пишем $f : a \cong b$. Нетрудно видеть, что функтор переводит изоморфизмы в изоморфизмы.

Подграфом ориентированного графа D называется граф D' такой, что $\mathrm{Ob}(D') \subseteq \mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Arr}(D') \subseteq \mathrm{Arr}(D)$, а также $\mathrm{dom}_{D'} = \mathrm{dom}_D|_{\mathrm{Arr}(D')}$ и $\mathrm{cod}_{D'} = \mathrm{cod}_D|_{\mathrm{Arr}(D')}$. Говорим, что граф D *содержит* (под)граф D'. Аналогично говорим, что C' — *подкатегория* в C, если C' в ней подграф, $\mathrm{id}_{C'} = \mathrm{id}_C|_{\mathrm{Ob}(C')}$ и $\circ_{C'} = \circ_C|_{\mathrm{Arr}(C') \times \mathrm{Arr}(C')}$. Если задан произвольный набор подкатегорий C_i для $i \in I$, то ясно, что определено их пересечение, которое тоже является подкатегорией:

$$\bigcap_{i \in I} C_i = \left(\bigcap_{i \in I} \mathrm{Ob}(C_i), \bigcap_{i \in I} \mathrm{Arr}(C_i), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \circ \right).$$

Диаграммой в категории называем любой (обычно конечный либо счётный) её подграф. Как и всякий ориентированный граф, диаграмма графически изображается с помощью вершин, в теории категорий обычно обозначаемых буквами без дополнительной обводки, и стрелок. Например:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & B \arrow[d, "h_2"] \\ C \arrow[r, "g"] & D. \end{tikzcd}$$

Для всякого подграфа D категории C пересечение всех содержащих его подкатегорий (то есть наименьшая подкатегория, содержащая данный подграф) назовём *пополнением* $\overline{D}$.

Категория C называется *тонкой,* если между любой парой объектов имеется не более одного морфизма, то есть

$$\forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ \forall f, g \in \hom_C(a, b).\ f = g.$$

Говорим, что *диаграмма коммутативна,* если её пополнение — тонкая категория.

Если даны функторы $F, G : A \to B$, то *естественным преобразованием* $\eta : F \Rightarrow G$ называется набор морфизмов $\eta_x : \hom_B(F(x), G(x))$ для каждого объекта $x \in \mathrm{Ob}(A)$ такой, что $G(f) \circ \eta_x = \eta_y \circ F(f)$ для всякой стрелки $f \in \hom_A(x, y)$; то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"] & G(y). \end{tikzcd}$$

Стрелки η_x называют *компонентами* преобразования. Если все компоненты естественного преобразования — изоморфизмы, то говорят, что определён *естественный изоморфизм.* Пишем $\eta : F \cong G$.

Для всякого функтора F также обозначим как 1_F тождественное естественное преобразование, все компоненты которого — единичные стрелки. Далее, если заданы естественные преобразования $\varepsilon : G \Rightarrow H$ и $\eta : F \Rightarrow G$, то определена их *вертикальная композиция* $\varepsilon \circ \eta : F \Rightarrow H$, где $(\varepsilon \circ \eta)_x = \varepsilon_x \circ \eta_x$.

Как и для объектов в категории, говорим, что категории A и B *изоморфны,* если существует пара функторов $F : A \to B$ и $G : B \to A$ такая, что $F \circ G = 1_B$ и $G \circ F = 1_A$. Изоморфизм категорий — слишком сильное требование, поэтому в теории категорий чаще используется более слабое условие эквивалентности категорий, которое, тем не менее, сохраняет все существенные категорные свойства. По аналогии с переходом от гомеоморфизма к гомотопической эквивалентности в топологии, для которого нужно ослабить равенство до существования гомотопии, в случае категорий равенство нужно ослабить до естественного изоморфизма. То есть, категории A и B эквивалентны, если существуют $F : A \to B$ и $G : B \to A$ такие, что $F \circ G \cong 1_B$ и $G \circ F \cong 1_A$.

Инициальным объектом в категории C называется такой объект $0 \in \mathrm{Ob}(C)$, что из него во всякой другой объект категории существует ровно одна стрелка:

$$\forall x \in \mathrm{Ob}(C).\ \exists! f \in \mathrm{Arr}(C).\ f \in \hom_C(0, x).$$

Эту единственную стрелку обозначаем $!_x \in \hom_C(0, x)$.

Копроизведением (или суммой) объектов a и $b \in \mathrm{Ob}(C)$ называется упорядоченная тройка $(c, \mathrm{inl}, \mathrm{inr})$, где $c \in \mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{inl} \in \hom_C(a, c)$ и $\mathrm{inr} \in \hom_C(b, c)$, такая, что выполнено следующее универсальное свойство: для любого объекта $x \in \mathrm{Ob}(C)$ и пары морфизмов $f \in \hom_C(a, x)$ и $g \in \hom_C(b, x)$ существует единственный (универсальный) морфизм $h \in \hom_C(c, x)$ такой, что $h \circ \mathrm{inl} = f$ и $h \circ \mathrm{inr} = g$; то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& x & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{inl}"'] & c \arrow[u, dashed, "h"] & y. \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\mathrm{inr}"]
\end{tikzcd}$$

Также пишем $c = a + b$, $\mathrm{inl} = \mathrm{inl}_{a,b}$, $\mathrm{inr} = \mathrm{inr}_{a,b}$ и $h = \mathrm{rec}_{a,b}(f, g)$.[1]

Наконец, функтор $T : A \to B$ *полуаддитивен,*[2] если для всякого копроизведения (c, i, j) объектов a и $b \in \mathrm{Ob}(A)$ тройка $(T(c), T(i), T(j))$ — копроизведение $T(a)$ и $T(b)$. Функтор T *аддитивен,* если он полуаддитивен и для всякого инициального объекта $o \in \mathrm{Ob}(A)$ объект $T(o)$ — инициальный в B.

Лемма (η-правило). *Если тройка (c, i, j) является копроизведением, $x \in \mathrm{Ob}(C)$ и $f \in \hom_C(c, x)$, то $\mathrm{rec}(f \circ i, f \circ j) = f$.*

[1] Подобные обозначения характерны прежде всего для работ в области теории типов, см., например, раздел 1.7 в [12].

[2] Нестандартный термин, не следует путать с полуаддитивной категорией.

Доказательство. Действительно, $\mathrm{rec}(f\circ i, f\circ j)\circ i = f\circ i$ и $\mathrm{rec}(f\circ i, f\circ j)\circ j = f\circ j$. В силу единственности такой стрелки получаем лемму. □

Лемма. *Пусть (c, i, j) — копроизведение, $x \in \mathrm{Ob}(C)$, $f, g \in \hom_C(c, x)$. Если $f\circ i = g\circ i$ и $f\circ j = g\circ j$, то $f = g$.*

Доказательство. По доказанному ранее, $\mathrm{rec}(f\circ i, f\circ j) = f$ и $\mathrm{rec}(g\circ i, g\circ j) = g$. Но тогда имеем: $f = \mathrm{rec}(f\circ i, f\circ j) = \mathrm{rec}(g\circ i, g\circ j) = g$. □

Лемма. *Пусть (c_1, i_1, j_1) и (c_2, i_2, j_2) — копроизведения a и b. Тогда существует $\phi : c_1 \cong c_2$, причём $\phi\circ i_1 = i_2$ и $\phi\circ j_1 = j_2$.*

Доказательство. Обозначим как rec_1 универсальную стрелку для первой тройки, а как rec_2 — для второй. Пусть $\phi = \mathrm{rec}_1(i_2, j_2)$ и $\psi = \mathrm{rec}_2(i_1, j_1)$. Тогда:

$$\phi\circ\psi\circ i_2 = \phi\circ\mathrm{rec}_2(i_1, j_1)\circ i_2 = \phi\circ i_1 = \mathrm{rec}_1(i_2, j_2)\circ i_1 = i_2 = \mathrm{id}_C(c_2)\circ i_2.$$

Аналогично, $\phi\circ\psi\circ j_2 = \mathrm{id}_C(c_2)\circ j_2$. В силу предыдущей леммы, $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_C(c_2)$. Точно так же получаем, что $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_C(c_1)$. Наконец, $\phi\circ i_1 = \mathrm{rec}_1(i_2, j_2)\circ i_1 = i_2$ и $\phi\circ j_1 = \mathrm{rec}_1(i_2, j_2)\circ j_1 = j_2$. □

Теорема (критерий полуаддитивности). *Пусть категории A и B содержат все копроизведения. Тогда функтор $T : A \to B$ полуаддитивен тогда и только тогда, когда:*

1) *Для всякой пары объектов $a, b \in \mathrm{Ob}(A)$ определён изоморфизм $\phi_{a,b} : T(a) + T(b) \cong T(a+b)$.*

2) *$\phi_{a,b}\circ\mathrm{inl}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inl}_{a,b})$.*

3) *$\phi_{a,b}\circ\mathrm{inr}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inr}_{a,b})$.*

Доказательство. Слева направо: пусть T полуаддитивен. Так как $(a+b, \mathrm{inl}_{a,b}, \mathrm{inr}_{a,b})$ — копроизведение, по полуаддитивности, $(T(a+b), T(\mathrm{inl}_{a,b}), T(\mathrm{inr}_{a,b}))$ — тоже. Копроизведение единственно, поэтому $\phi : T(a)+T(b) \cong T(a+b)$, причём $\phi\circ\mathrm{inl}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inl}_{a,b})$ и $\phi\circ\mathrm{inr}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inr}_{a,b})$.

Обратно, пусть (c, i, j) — некоторое копроизведение a и b. Докажем, что $(T(c), T(i), T(j))$ — копроизведение. Зафиксируем объект $x \in \mathrm{Ob}(B)$ и пару стрелок $f \in \hom_B(T(a), x)$ и $g \in \hom_B(T(b), x)$.

Снова в силу единственности имеем стрелку $\psi : c \cong a + b$. Тогда $h = \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\psi) \in \hom_B(T(c), x)$, причём:

$$\begin{aligned} h \circ T(i) &= \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\psi \circ i) \\ &= \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\mathrm{inl}_{a,b}) \\ &= \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)} \\ &= f. \end{aligned}$$

Аналогично $h \circ T(j) = g$. Наконец, пусть $h' \in \hom_B(T(c), x)$, $h' \circ T(i) = f$ и $h' \circ T(j) = g$.

$u = T(\psi^{-1}) \circ \phi_{a,b}$ — изоморфизм как композиция изоморфизмов, поэтому $h = h' \Leftrightarrow h \circ u = h' \circ u$. Далее,

$$\begin{aligned} h \circ u \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)} &= \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\psi \circ \psi^{-1}) \circ \phi_{a,b} \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)} \\ &= \mathrm{rec}_{T(a),T(b)}(f, g) \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)} \\ &= f \\ &= h' \circ T(i) \\ &= h' \circ u \circ u^{-1} \circ T(i) \\ &= h' \circ u \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\psi) \circ T(i) \\ &= h' \circ u \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\psi \circ i) \\ &= h' \circ u \circ \phi_{a,b}^{-1} \circ T(\mathrm{inl}_{a,b}) \\ &= h' \circ u \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)}. \end{aligned}$$

Аналогично, $h \circ u \circ \mathrm{inr}_{T(a),T(b)} = h' \circ u \circ \mathrm{inr}_{T(a),T(b)}$, поэтому $h \circ u = h' \circ u$. $\square$

Теорема (критерий аддитивности). *Пусть категории A и B содержат все копроизведения и инициальный объект. Тогда функтор $T : A \to B$ аддитивен тогда и только тогда, когда:*

1) Для всякой пары объектов $a, b \in \mathrm{Ob}(A)$ определён изоморфизм $\phi_{a,b} : T(a) + T(b) \cong T(a + b)$.

2) $\phi_{a,b} \circ \mathrm{inl}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inl}_{a,b})$.

3) $\phi_{a,b} \circ \mathrm{inr}_{T(a),T(b)} = T(\mathrm{inr}_{a,b})$.

4) $T(0_A) \cong 0_B$.

Доказательство. Немедленно следует из единственности инициального объекта и предыдущей теоремы. □

A.2. Категории с кобордизмами

Категорией с кобордизмами называем[3] упорядоченную тройку (C, ∂, i), где C — категория, ∂ — функтор $C \to C$, i — естественное преобразование $\partial \Rightarrow 1_C$, такую, что:

1) ∂ — аддитивный функтор.

2) $\partial(\partial(x))$ — инициальный объект в C для всех $x \in \mathrm{Ob}(C)$.

От определения, данного в [13], данное отличается тем, что не требует существования а) малой подкатегории C_0 такой, что всякий объект из C изоморфен некоторому из C_0 (это также эквивалентно тому, что скелет C — малая категория), и б) всех копроизведений в C.

Пример 1. Рассмотрим категорию компактных n-мерных C^p-гладких многообразий (с границей), где $1 \leq p \leq \infty$, стрелки в которой — C^p-отображения, переводящие границы в границы (то есть такие $f \in C^p(M, N)$, что $f(\partial M) \subseteq \partial N$). Тогда функция $M \mapsto \partial M$ задаёт эндофунктор, стрелочная функция которого — просто ограничение на границу: $f \mapsto f|_{\partial M}$.

Кроме того, поскольку $\partial M \subseteq M$, определены включения $C^p(\partial M, M)$, которые (очевидно) также определяют естественное преобразование. Таким образом, задана категория с кобордизмами.

Пример 2. Рассмотрим категорию компактных C^p-гладких многообразий произвольной размерности, стрелки в которой определены как в предыдущем случае. Ясно, что эту категорию можно наделить структурой категории с кобордизмами точно таким же образом.

[3]В английском языке «cobordism category» используется для обозначения как вводимого понятия, так и для категории, объекты которой — многообразия, а стрелки — кобордизмы между ними (последнюю ещё называют «category of cobordisms»). В русском языке нет устоявшихся переводов, поэтому во избежание путаницы первое предлагаем переводить как «категорию с кобордизмами», а второе — как «категорию кобордизмов».

Предыдущий пример входит в эту категорию как подкатегория, но, в отличие от него, в этой категории существуют *не все* копроизведения, поскольку дизъюнктная сумма многообразий различной размерности не является снова многообразием.

Пример 3 [14]. Зафиксируем пару категорий J (называемую индексной) и C. *Коконусом* называется упорядоченная тройка (F, c, ψ), где $F : J \to C$ — функтор, $c \in \mathrm{Ob}(C)$ — объект и $\psi_x \in \hom_C(F(x), c)$ — такое семейство морфизмов, что для любой пары объектов $i, j \in \mathrm{Ob}(J)$ и стрелки $f \in \hom_J(i, j)$ верно, что $\psi_j \circ F(f) = \psi_i$:

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j). \end{tikzcd}$$

Копределом называется такой коконус (F, c, ψ), что для всякого другого коконуса (F, x, ϕ) существует единственная стрелка $u \in \hom_C(c, x)$ такая, что для любого $j \in \mathrm{Ob}(J)$ верно, что $u \circ \psi_j = \phi_j$:

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[dr, "\phi_j"'] & c \arrow[d, "u"] \\ & x. \end{tikzcd}$$

Также пишем $c = \mathrm{colim}(F)$, $\psi = \mathrm{incl}(F)$ и $u = \mathrm{rec}(F, x, \phi)$.

Определим структуру категории $\mathrm{Cocone}(J, C)$ на всех коконусах между J и C. *Морфизмом коконусов* (F, x, ϕ) и (G, y, ψ) называется пара (u, ε), где $u \in \hom_C(x, y)$ и $\varepsilon : F \Rightarrow G$, такая, что для всякого $j \in \mathrm{Ob}(J)$ выполняется $u \circ \phi_j = \psi_j \circ \varepsilon_j$:

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "\varepsilon_j"] & x \arrow[d, "u"] \\ G(j) \arrow[r, "\psi_j"] & y. \end{tikzcd}$$

$(\mathrm{id}_C(x), 1_F)$ определяет тождественный морфизм для коконуса (F, x, ϕ).

Далее, пусть заданы морфизм (u, ε) между (G, y, ψ) и (H, z, ξ) и (v, η) между (F, x, ϕ) и (G, y, ψ). Композицию определим покомпонентно: $(u, \varepsilon) \circ (v, \eta) = (u \circ v, \varepsilon \circ \eta)$. При этом:

$$(u \circ v) \circ \phi_j = u \circ (v \circ \phi_j) = u \circ (\psi_j \circ \eta_j) = (u \circ \psi_j) \circ \eta_j = (\xi_j \circ \varepsilon_j) \circ \eta_j = \xi_j \circ (\varepsilon_j \circ \eta_j).$$

Наконец, поскольку композиция в категории C и вертикальная композиция функторов ассоциативны и унитальны, то такова и композиция морфизмов коконусов.

Пусть теперь категория C содержит все копределы из J и инициальный объект $0 \in \mathrm{Ob}(C)$. Определим граничный эндофунктор следующим образом:

$$\partial = \begin{cases} (F, x, \phi) \mapsto (\Delta_0, \mathrm{colim}(F), j \mapsto !_{\mathrm{colim}(F)}); \\ (u, \varepsilon) \mapsto (\mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(G), j \mapsto \mathrm{incl}_j(G) \circ \varepsilon_j), 1_{\Delta_0}). \end{cases}$$

$\partial(\mathrm{id}((F, x, \phi))) = \mathrm{id}(\partial((F, x, \phi)))$ верно в силу того, что

$$\mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(F), \mathrm{incl}(F)) = \mathrm{id}(\mathrm{colim}(F)).$$

$\partial((u, \varepsilon) \circ (v, \eta)) = \partial((u, \varepsilon)) \circ \partial((v, \eta))$ верно в силу того, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(H), j \mapsto \mathrm{incl}_j(H) \circ \varepsilon_j \circ \eta_j) \\ = &\ \mathrm{rec}(G, \mathrm{colim}(H), j \mapsto \mathrm{incl}_j(H) \circ \varepsilon_j) \circ \mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(G), j \mapsto \mathrm{incl}_j(G) \circ \eta_j). \end{aligned}$$

Также определим естественное преобразование $i : \partial \Rightarrow 1_C$:

$$i_{(F,x,\phi)} = (\mathrm{rec}(F, x, \phi), j \mapsto !_{F(j)}).$$

Видно, что:

$$\begin{aligned} &i_{(G,y,\psi)} \circ \partial((u, \varepsilon)) \\ &= (\mathrm{rec}(G, y, \psi), j \mapsto !_{G(j)}) \circ (\mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(G), j \mapsto \mathrm{incl}_j(G) \circ \varepsilon_j), 1_{\Delta_0}) \\ &= (\mathrm{rec}(G, y, \psi) \circ \mathrm{rec}(F, \mathrm{colim}(G), j \mapsto \mathrm{incl}_j(G) \circ \varepsilon_j), j \mapsto !_{G(j)} \circ \mathrm{id}(\Delta_0(j))) \\ &= (\mathrm{rec}(F, y, j \mapsto \psi_j \circ \varepsilon_j), j \mapsto !_{G(j)}) \\ &= (\mathrm{rec}(F, y, j \mapsto u \circ \phi_j), j \mapsto !_{G(j)}) \\ &= (u \circ \mathrm{rec}(F, x, \phi), j \mapsto \varepsilon_i \circ !_{F(j)}) \\ &= (u, \varepsilon) \circ i_{(F,x,\phi)}. \end{aligned}$$

Аддитивность ∂ следует из того, что копределы коммутируют с копроизведением, то есть существует естественный изоморфизм $\mathrm{colim}(F + G) \cong \mathrm{colim}(F) + \mathrm{colim}(G)$, и что $\mathrm{colim}(\Delta_0) \cong 0$.

Наконец, $\partial(\partial((F, x, \phi)))) = (\Delta_0, \mathrm{colim}(\Delta_0), j \mapsto !_{\mathrm{colim}(\Delta_0)}) \cong 0$, то есть $(\mathrm{Cocone}(J, C), \partial, i)$ — категория с кобордизмами.

Этот пример примечателен тем, что не требует для своего построения привлечения многообразий либо их обобщений.

A.3. Кобордизмы и слабые кобордизмы

Кобордизмом между парой объектов a и $b \in \mathrm{Ob}(C)$ называется тройка (c, i, j), где $c \in \mathrm{Ob}(C)$, $i \in \hom_C(a, \partial(c))$ и $j \in \hom_C(b, \partial(c))$, такая, что $(\partial(c), i, j)$ — копроизведение. *Морфизмом кобордизмов* $\epsilon_1 = (c_1, i_1, j_1)$ и $\epsilon_2 = (c_2, i_2, j_2)$ между объектами a и b называется стрелка $\phi \in \hom_C(c_1, c_2)$ такая, что $\partial(\phi) \circ i_1 = i_2$ и $\partial(\phi) \circ j_1 = j_2$. Также говорим, что объекты *кобордантны,* если между ними существует кобордизм. Множество всех кобордизмов между объектами a и b в категории с кобордизмами $\Gamma = (C, \partial, i)$ будем обозначать как $\mathbf{Cob}_\Gamma(a, b)$.

$\mathbf{Cob}_\Gamma(a, b)$ вместе со стрелками в определённом выше смысле образует категорию, изоморфизмы в которой соответствует эквивалентности кобордизмов, определённой в [10]. Отметим существование из неё забывающего функтора $|\cdot| : \mathbf{Cob}_\Gamma(a, b) \to C$:

$$|\cdot| = \begin{cases} (c, i, j) \mapsto c; \\ \phi \mapsto \phi. \end{cases}$$

Поэтому для любой пары кобордизмов $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{Cob}_\Gamma(a, b)$ имеет место собственная категория $\mathbf{Cob}_\Gamma(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$.

Утверждение. *Во всякой категории с кобордизмами (C, ∂, i):*

1) Если a и b кобордантны, то $\partial(a) \cong \partial(b) \cong 0$.

2) Для любого a объекты $\partial(a)$ и 0 кобордантны.

Доказательство. Пусть $(c, i, j) \in \mathbf{Cob}_\Gamma(a, b)$. Тогда $\partial(c) \cong a + b$, поэтому:

$$0 \cong \partial(\partial(c)) \cong \partial(a + b) \cong \partial(a) + \partial(b).$$

Нетрудно показать, что если $x + y \cong 0$, то $x \cong y \cong 0$. В частности, $\partial(a) \cong \partial(b) \cong 0$.

Далее, $\partial(a) \cong \partial(a) + 0$, поэтому само a задаёт кобордизм между a и 0. $\square$

Рассмотрим две категории с кобордизмами $\Gamma_1 = (C_1, \partial_1, i_1)$ и $\Gamma_2 = (C_2, \partial_2, i_2)$. Функтор $T : C_1 \to C_2$ называется *граничным,* если $T \circ \partial_1 = \partial_2 \circ T$.

Говорим, что объект $a \in \mathrm{Ob}(C)$ *замкнут,* если $\partial(a)$ — инициальный объект. Объект a *точен,* если $\exists b \in \mathrm{Ob}(C).\ a = \partial(b)$.

Утверждение. *Если a и b точны, то они кобордантны.*

Доказательство. Пусть $a = \partial(u)$ и $b = \partial(v)$. Тогда $\partial(u+v) \cong \partial(u) + \partial(v) = a + b$. $\square$

Утверждение. *Аддитивный граничный функтор T переводит замкнутые объекты в замкнутые, точные — в точные, а кобордизмы — в кобордизмы.*

Доказательство. Действительно:

1) Пусть $a \in \mathrm{Ob}(C_1)$ замкнут. $\partial(a)$ инициален, а потому, в силу аддитивности, инициален и $T(\partial(a)) = \partial(T(a))$.

2) Пусть $a = \partial(b)$. Тогда $T(a) = T(\partial(b)) = \partial(T(b))$.

3) Пусть (c, i, j) — кобордизм между a и $b \in \mathrm{Ob}(C_1)$. В силу того, что T — граничный, $T(i) \in \hom_{C_2}(T(a), T(\partial(c))) = \hom_{C_2}(T(a), \partial(T(c)))$ и $T(j) \in \hom_{C_2}(T(b), T(\partial(c))) = \hom_{C_2}(T(b), \partial(T(c)))$. По аддитивности, $(\partial(T(c)), T(i), T(j)) = (T(\partial(c)), T(i), T(j))$ — копроизведение, а потому $(T(c), T(i), T(j))$ — кобордизм. $\square$

Нетрудно видеть, что копроизведение симметрично (с точностью до изоморфизма).

Утверждение. *Если (c, i, j) — копроизведение a и b, то (c, j, i) — копроизведение b и a. В частности, в категории со всеми копроизведениями, $a + b \cong b + a$.*

Поэтому отношение кобордантности симметрично в любой категории с кобордизмами. Более того, отображение $(c, i, j) \mapsto (c, j, i)$ определяет изоморфизм между категориями $\mathbf{Cob}_\Gamma(a, b)$ и $\mathbf{Cob}_\Gamma(b, a)$. Однако не для всякой категории кобордантность транзитивна и даже рефлексивна.

Пример. Для любой категории C с инициальным объектом 0, очевидно, тройка $(C, \Delta_0, !)$ является категорией с кобордизмами. Если категория C не содержит (бинарных) копроизведений, то все категории $\mathbf{Cob}(a, b)$ пусты; в частности, пуста $\mathbf{Cob}(a, a)$. Подойдёт, например, категория $C = \mathbf{Field}_p$ полей характеристики p.

В более простом случае, когда категория C содержит все копроизведения, рассмотрим смежное понятие. Под *слабым кобордизмом*[4] между объектами a и b понимаем тройку (u, v, ϕ), где $u, v \in \mathrm{Ob}(C)$ и $\phi : a+\partial(u) \cong b+\partial(v)$.

Заметим, что $x \mapsto a + x$ определяет функтор. *Морфизмом* слабых кобордизмов (u_1, v_1, ϕ_1) и (u_2, v_2, ϕ_2) называем пару (f, g), где $f \in \hom_C(u_1, u_2)$ и $g \in \hom_C(v_1, v_2)$, такую, что $\phi_2 \circ (a + \partial(f)) = (b + \partial(g)) \circ \phi_1$; то есть такую, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} a + \partial(u_1) \arrow[r, "a+\partial(f)"] \arrow[d, "\phi_1"] & a + \partial(u_2) \arrow[d, "\phi_2"] \\ b + \partial(v_1) \arrow[r, "b+\partial(g)"] & b + \partial(u_2). \end{tikzcd}$$

С единицей $\mathrm{id}((u, v, f)) = (\mathrm{id}(u), \mathrm{id}(v))$ слабые кобордизмы между a и b образуют категорию, обозначаемую $\mathbf{Cob}^w(a, b)$. Аналогично, объекты a и b *слабо кобордантны,* если $\mathbf{Cob}^w(a, b)$ непусто.

Тогда видим, что в произвольной категории с кобордизмами:

1) Слабая кобордантность рефлексивна; более того, имеем включение из C в $\mathbf{Cob}^w(a, a)$:
$$R = \begin{cases} x \mapsto (x, x, \mathrm{id}(a + \partial(x))); \\ f \mapsto (f, f). \end{cases}$$

2) Слабая кобордантность симметрична; более того, определён изоморфизм между $\mathbf{Cob}^w(a, b)$ и $\mathbf{Cob}^w(b, a)$:
$$S = \begin{cases} (x, y, \phi) \mapsto (y, x, \phi^{-1}); \\ (f, g) \mapsto (g, f). \end{cases}$$

3) Слабая кобордантность транзитивна [15]: если $(u, v_1) \in \mathbf{Cob}^w(a, b)$ и $(v_2,$

[4] В [13] для этого понятия используется термин «кобордизм», поскольку, как мы далее увидим, в (каноническом для него) случае гладких многообразий существование слабого кобордизма логически эквивалентно существованию (определённого ранее) кобордизма. Однако чтобы избежать путаницы, мы добавляем прилагательное «слабый». Кроме того, структуры категории, которыми мы их оснастим, не эквивалентны.

$w) \in \mathbf{Cob}^w(b, c)$, то $(u + v_2, v_1 + w) \in \mathbf{Cob}^w(a, c)$:

$$\begin{aligned} a + \partial(u + v_2) &\cong a + \partial(u) + \partial(v_2) \\ &\cong b + \partial(v_1) + \partial(v_2) \\ &\cong \partial(v_1) + b + \partial(v_2) \\ &\cong \partial(v_1) + c + \partial(w) \\ &\cong c + \partial(v_1) + \partial(w) \\ &\cong c + \partial(v_1 + w). \end{aligned}$$

Наконец, в случае гладких многообразий без границы кобордантность эквивалентна слабой кобордантности.

Утверждение [15]. *Если a и b — гладкие многообразия, то a кобордантно b тогда и только тогда, когда a слабо кобордантно b.*

Доказательство. Пусть I — стандартный интервал $[0; 1]$. Как известно, если x — многообразие без границы, то имеется диффеоморфизм $\partial(x \times I) \cong x + x$.

Пусть $(c, i, j) \in \mathbf{Cob}(a, b)$. В таком случае, $a + \partial c \cong a + a + b \cong b + \partial(a \times I)$, то есть $(c, a \times I) \in \mathbf{Cob}^w(a, b)$. Обратно, пусть $(u, v, \phi) \in \mathbf{Cob}^w(a, b)$. Рассмотрим $c_1 = a \times I + u$ и $c_2 = b \times I + v$. Тогда $\partial c_1 \cong a + a + \partial u$ и $\partial c_2 \cong b + b + \partial v$. Поскольку $\phi : a + \partial u \cong b + \partial v$, можем склеить c_1 и c_2 по общей границе, получив c такой, что $\partial c \cong a + b$. $\square$

Части приложения, не касающиеся случая гладких многообразий, были формализованы с использованием средства автоматической проверки доказательств Lean Theorem Prover [16]. Исходный код доступен по ссылке: https://github.com/forked-from-1kasper/lean4-categories.