Алгебраические подгруппы комплексного тора

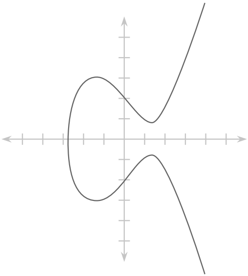
Мишко Николай

Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики

15 апреля 2024 года

Понятие алгебраической группы

Под **алгебраическим многообразием** H понимаем множество решений системы полиномиальных уравнений.
Говорим, что H является **алгебраической группой**, если на H определена структура группы.
Известным примером являются эллиптические кривые.



Рассмотрим подробнее алгебраические подгруппы $(\mathbb{C}^{\times})^n$.

Теорема Артина

G — группа, K — поле, а $K^\times$ — его мультипликативная группа. Гомоморфизм $f : G \to K^\times$ называют **характером.**
Характеры $f_1, f_2, \ldots, f_n$ **линейно независимы,** если для всех $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ выполнено:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Теорема (Артин)

Любые n попарно различных характеров линейно независимы.

Теорема Шмидта

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $z = (z_1, \dots, z_n) \in G^n$ пишем

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$$

Отображение $z \mapsto z^\alpha$ определяет характер $\chi_\alpha : (K^\times)^n \to K^\times$.
Всякий многочлен распадается в сумму ($I \subseteq \mathbb{Z}^n$ конечно):

$$P = \sum_{i \in I} a_i \chi_i$$

Теорема (Шмидт)

Пусть K — поле. Всякая алгебраическая подгруппа H группы $(K^\times)^n$ задаётся системой некоторого числа N биномиальных уравнений, а именно, существуют N показателей $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}^n$, что $H = \{z \in (K^\times)^n \mid \forall 1 \leq i \leq N\colon z^{\alpha_i} = z^{\beta_i}\}$.

Мономиальные параметризации

Обозначим $\phi_\alpha(t) = (t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_n})$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^k$.

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1^{\alpha_1^1} \cdot t_2^{\alpha_1^2} \cdot \ldots \cdot t_k^{\alpha_1^k} \\ t_1^{\alpha_2^1} \cdot t_2^{\alpha_2^2} \cdot \ldots \cdot t_k^{\alpha_2^k} \\ \vdots \\ t_1^{\alpha_n^1} \cdot t_2^{\alpha_n^2} \cdot \ldots \cdot t_k^{\alpha_n^k} \end{pmatrix}$$

$\alpha \mapsto \phi_\alpha$ определяет строгий функтор $\mathrm{Matr}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Grp}$ в полях нулевой характеристики.

Нормальная форма Смита

Теорема (о существовании нормальной формы Смита)

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ — матрица. Тогда существуют такие матрицы $\beta_1 \in \mathrm{GL}^m(\mathbb{Z})$ и $\beta_2 \in \mathrm{GL}^n(\mathbb{Z})$, что

$$\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\colon \beta_1 \alpha \beta_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \varepsilon_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon,$$

причём $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \ldots \mid \varepsilon_r$ и $r = \mathrm{rank}(\alpha)$.

Инъективность мономиальной параметризации

ϕ_α распадается в композицию: $\phi_{\beta_1^{-1}} \circ \phi_\varepsilon \circ \phi_{\beta_2^{-1}}$.
$\phi_{\beta_1^{-1}}$ и $\phi_{\beta_2^{-1}}$ — биекции, поэтому инъективность ϕ_α определяется инъективностью ϕ_ε.

Теорема

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^{n\times k}$ — матрица.

$$\phi_\alpha : (\mathbb{C}^\times)^k \to (\mathbb{C}^\times)^n \text{ инъективно}$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_r = \ldots = 1 \wedge r = k$$
$$\Leftrightarrow \alpha_i \text{ порождают всю решётку } \mathbb{Z}^k$$

Существование мономиальной параметризации

Биномиальные уравнения можно переписать в виде $\ker(\phi_\beta)$.

Теорема

$\mathrm{Im}(\phi_\alpha)$ — алгебраическая подгруппа тора.

$\omega_K(n)$ — группа корней из единицы степени n над полем K. Определим $\Pi(\beta) = |\omega_K(\varepsilon_1)| \cdot \ldots \cdot |\omega_K(\varepsilon_r)|$.

Теорема

Если $\ker(\phi_\beta) = \ker(\phi_{\beta'})$, то $\Pi(\beta) = \Pi(\beta')$.

Теорема

Если $\Pi(H) = 1$, то для H существует мономиальная параметризация.

Существование мономиальной параметризации

Теорема

$H \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ имеет $\Pi(H)$ компонент связности.

Следствие

Для $H \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ существует мономиальная параметризация тогда и только тогда, когда H связно.

Для алгебраической подгруппы тора $H \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ рассмотрим компоненту связности H°, содержащую единицу.

Следствие

Для $H^\circ \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$ существует мономиальная параметризация.

Спасибо за внимание