Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский федеральный университет»

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Утверждаю
Заведующий кафедрой
_______ Фроленков И. В.
подпись фамилия, инициалы
«_______» _______ 20__ г.

Отчёт о практике по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности

Место прохождения практики:
Институт математики и фундаментальной информатики

Тема практики:
Последовательность с произвольно заданным замкнутым множеством предельных точек

Руководитель: ____________ подпись, дата ________________________ должность, учёная степень __________________ фамилия, инициалы

Студент: ____________ номер группы ______________ номер зачётной книжки ____________ подпись, дата __________________ фамилия, инициалы

Красноярск, 2022

Содержание

1 Основные определения

Будем работать в произвольной достаточно общей теории множеств с аксимой выбора. Определим $\mathbb{R}$ как некоторое непрерывное линейно упорядоченное поле, без доказательств ссылаясь на утверждения о том, что такое поле единственно с точностью до изоморфизма и существует.

Всюду будем использовать стандартные логические и теоретико-можественные обозначения ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\varnothing$ и так далее) и, также стандартно, $f \circ g$ для композиции функций (то есть для функции $x \mapsto f(g(x))$), $f(A)$ для образа (множества $\{f(x) \mid x \in A\}$), $f^{-1}(B)$ для прообраза (множества $\{x \mid f(x) \in B\}$) и $\operatorname{card}(X)$ для мощности множества.

Множество **счётно,** если его мощность не превышает мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Сопоставим каждому счётному множеству A некоторую биекцию его с $\mathbb{N}$ и обозначим её $\kappa_A : \mathbb{N} \to A$.

Точку $x \in \mathbb{R}$ назовём **предельной точкой** множества $A \subseteq \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки существует хотя бы одна точка из A, не совпадающая с x. Множество всех предельных точек обозначим как $\operatorname{Lim}(A)$.

Объединение множества A со множеством всех его предельных точек называется **замыканием** и обозначается $\overline{A}$.

Множество назовём **замкнутым,** если оно содержит все свои предельные точки.

Если даны подмножества $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ такие, что $\overline{A} = B$, то говорят, что множество A **плотно в** B.

Числовой последовательностью назовём всякую функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Будем говорить, что число $A \in \mathbb{R}$ является **пределом последовательности** f, если выполняется

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n) - A| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = A$.

Последовательность, у которой существует предел, назовём **сходящейся.**

Если $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — строго возрастающая последовательность, то есть для неё выполняется

$$\forall n, m : n < m \Rightarrow g(n) < g(m),$$

то последовательность $f \circ g$ называется **подпоследовательностью** последовательности f.

Предельной точкой последовательности называется предел любой её подпоследовательности, если таковой существует. По аналогии со множествами, множество предельных точек последовательности f обозначим как $\operatorname{Lim}(f)$.

Обратите внимание на то, что, в общем случае, $\operatorname{Lim}(f) \neq \operatorname{Lim}(f(\mathbb{N}))$ (например, если $f = (n \mapsto c)$ для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$).

2 Вспомогательные утверждения

Приведём без доказательства несколько известных утверждений.

Утверждение. $\mathbb{Q}$ *счётно.*

Утверждение. *Декартово произведение счётных множеств счётно.*

Утверждение. *Образ счётного множества не более чем счётен.*

Утверждение. $\mathbb{Q}$ *плотно в* $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если последовательность сходится, то все её подпоследовательности сходятся к тому же пределу.*

Доказательство. Пусть выполнено $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |f(n) - A| < \varepsilon$. Зафиксируем некоторую подпоследовательность $f \circ g$ и $\varepsilon > 0$.

Пусть $M_\varepsilon = \min\{m \in \mathbb{N} \mid g(m) \geq N_\varepsilon\}$ (оно существует в силу того, что g строго возрастает). Тогда для всех $n \geq M_\varepsilon$ выполняется $g(n) \geq g(M_\varepsilon) \geq N_\varepsilon$, следовательно $|f(g(n)) - A| < \varepsilon$. □

Теорема 2. *Пусть даны две сходящиеся последовательности f и g такие, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = A$, *а также последовательность* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Если для всех n верно, что $f(n) \leq h(n) \leq g(n)$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n) = A$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |f(n) - A| < \varepsilon$ и $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq M_\varepsilon : |g(n) - A| < \varepsilon$.

Обозначим $K_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ и возьмём некоторое $n \geq K_\varepsilon$. По заданию K_ε, $n \geq K_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ и $n \geq K_\varepsilon \geq M_\varepsilon$.

Известно, что $|h(n) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < h(n) < A + \varepsilon$. Поскольку $n \geq N_\varepsilon$ и $n \geq M_\varepsilon$, также верно, что $A - \varepsilon < f(n) < A + \varepsilon$ и $A - \varepsilon < g(n) < A + \varepsilon$.

Объединяя это с условием $f(n) \leq h(n) \leq g(n)$, получим $A - \varepsilon < f(n) \leq h(n) \leq g(n) < A + \varepsilon$. □

Лемма 1. *Для всяких $A, B \subseteq \mathbb{R}$ верно* $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Lim}(A) \subseteq \operatorname{Lim}(B)$.

Доказательство. Вытекает напрямую из определения. □

Теорема. *Во всяком замкнутом $A \subseteq \mathbb{R}$ можно выделить не более чем счётное плотное подмножество.*

Доказательство. Обозначим $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$.

Рассмотрим множество $\Delta = \{(q, r) \mid q, r \in \mathbb{Q} \wedge B(q, r) \cap A \neq \varnothing\}$. Заметим, что оно не более чем счётно, поскольку является подмножеством $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Для каждой пары $(q, r) \in \Delta$ выберем некоторый элемент $\sigma(q, r) \in B(q, r) \cap A$.

Обозначим $\mathrm{D}(A) = \sigma(\Delta) \subseteq A$. Поскольку Δ либо конечно, либо счётно, то $\mathrm{D}(A)$ не более чем счётно как образ конечного или счётного множества.

Докажем сначала, что $\operatorname{Lim}(\mathrm{D}(A)) \subseteq A$. Действительно, поскольку $\mathrm{D}(A) \subseteq A$, то из леммы 1 и того, что A замкнуто, получаем $\operatorname{Lim}(\mathrm{D}(A)) \subseteq \operatorname{Lim}(A) \subseteq A$.

Теперь докажем, что $A \subseteq \overline{\mathrm{D}(A)}$. Пусть $c \in A$. Если $c \in \mathrm{D}(A)$, то утверждение, очевидно, выполнено; поэтому считаем, что $c \notin \mathrm{D}(A)$, и докажем $c \in \operatorname{Lim}(\mathrm{D}(A))$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, существует $q \in \mathbb{Q}$ ($c \neq q$) такое, что $|c - q| < \varepsilon/3$. В силу аксиомы Архимеда существует $r \in \mathbb{Q}$ такое, что $\varepsilon/3 < r < 2\varepsilon/3$. Следовательно, $|c - q| < \varepsilon/3 < r$, то есть $c \in B(q, r)$ и $(q, r) \in \Delta$, потому определено $\sigma(q, r)$.

Так как $\sigma(q, r) \in B(q, r)$, то $|\sigma(q, r) - q| < r < 2\varepsilon/3$. Соединяя, получаем: $|c - \sigma(q, r)| = |c - q + q - \sigma(q, r)| \leq |c - q| + |\sigma(q, r) - q| < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$.

Поскольку $\sigma(q, r) \in \mathrm{D}(A)$ и $c \notin \mathrm{D}(A)$, выполнено $c \neq \sigma(q, r)$, что и требовалось. □

Лемма 2. *Если $A \subseteq \mathbb{R}$ конечно, то* $\overline{A} = A$.

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{Lim}(A) = \varnothing$. Пусть $r \in \operatorname{Lim}(A)$ и $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$.

Возьмём $E = \min\{|r - a_i| \mid 0 \leq i \leq m\}$ и $\varepsilon = E/2$. Тогда, по определению, существует некоторый a_i такой, что $|r - a_i| < \varepsilon = E/2$ и $r \neq a_i$. Однако из задания E следует, что $E \leq |r - a_i| < E/2$, — противоречие.

Следовательно, $\operatorname{Lim}(A) \subseteq \varnothing$, но $\varnothing \subseteq \operatorname{Lim}(A)$ очевидно; поэтому $\operatorname{Lim}(A) = \varnothing$.

Откуда получаем, что $\overline{A} = A \cup \operatorname{Lim}(A) = A \cup \varnothing = A$. □

Лемма 3. *Если A бесконечно, то* $\mathrm{D}(A)$ *также бесконечно.*

Доказательство. Действительно, если $\mathrm{D}(A)$ конечно, то в силу леммы 2 имеем $\overline{\mathrm{D}(A)} = \mathrm{D}(A)$, но, с другой стороны, $\overline{\mathrm{D}(A)} = A$. Соединяя, $\mathrm{D}(A) = A$, то есть A конечно.

Контрапозицией получаем необходимое утверждение. $\square$

Теорема 3. *Для любой* $f : \mathbb{N} \to A$ *верно* $\mathrm{Lim}(f) \subseteq \overline{A}$.

Доказательство. Возьмём $r \in \mathrm{Lim}(f)$. По определению, существует подпоследовательность $f \circ g$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(n)) = r$.

По определению предела, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(g(n)) - r| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём n такое, что $f(g(n)) \neq r$.

Тогда $|r - f(g(n))| < \varepsilon$, $f(g(n)) \in A$ и $f(g(n)) \neq r$, но это означает, что r — предельная точка в A. Следовательно, $r \in \mathrm{Lim}(A) \in \overline{A}$. $\square$

Теорема. *Множество всех предельных точек последовательности замкнуто.*

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Докажем, что $\mathrm{Lim}(\mathrm{Lim}(f)) \subseteq \mathrm{Lim}(f)$.

Действительно, пусть $r \in \mathrm{Lim}(\mathrm{Lim}(f))$. Рассмотрим окрестность $(r-1; r+1)$. По определению предельной точки, в этой окрестности существует некоторое $r_0 \in \mathrm{Lim}(f)$ такое, что $r \neq r_0$. По определению предельной точки последовательности, существует некоторая подпоследовательность $f \circ g_0$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g_0(n)) = r_0$.

Зафиксируем $\varepsilon = |r - r_0|$, выберем некоторый номер $n_0 \geq N_\varepsilon$ и обозначим $k_0 = g_0(n_0)$. По определению предела последовательности, $|f(k_0) - r_0| < \varepsilon = |r - r_0|$.

Откуда $|f(k_0) - r| = |f(k_0) - r_0 + r_0 - r| \leq |f(k_0) - r_0| + |r_0 - r| < 2|r - r_0| = 2$.

Далее, рассмотрим окрестность $(r - 1/2; r + 1/2)$. Аналогично, возьмём $r_1 \in \mathrm{Lim}(f)$ в этой окрестности и $f \circ g_1$ такое, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g_1(n)) = r_1$.

Зафиксируем $\varepsilon = |r - r_0|$, выберем некоторый номер $n_1 \geq N_\varepsilon$ такой, что $k_1 = g_1(n_1) > k_0$ (он существует в силу того, что g_1 строго возрастает).

Аналогично получаем, что $f(k_1) - r < 2|r - r_1| = 1$.

Продолжая, получим строго возрастающую последовательность $(n \mapsto k_n)$ такую, что $|f(k_n) - r| < 2/(n+1)$, то есть, $r - 2/(n+1) < f(k_n) < r + 2/(n+1)$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}(r - 2/(n+1)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(r + 2/(n+1)) = r$, то, по теореме 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(k_n) = r$, но это и означает, что $r \in \mathrm{Lim}(f)$. $\square$

Из последнего утверждения следует, что множеством предельных точек последовательности не может быть произвольное множество. Однако мы докажем, что таким множеством может быть произвольное *замкнутое* множество.

3 Вспомогательные конструкции

Обозначим $\mathrm{id} = (n \mapsto n)$.

Теорема 4. $\mathrm{Lim}(\mathrm{id}) = \varnothing$

Доказательство. Пусть $r \in \mathrm{Lim}(\mathrm{id})$, то есть существует подпоследовательность $\mathrm{id} \circ f$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{id}(f(n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = r$, где f строго возрастает.

Зафиксируем $\varepsilon = 1/2$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n) - r| < 1/2$. В частности, $r - 1/2 < f(N)$ и $f(N+1) < r + 1/2$. Поскольку f строго возрастает, верно, что $f(N) < f(N+1)$.

$f(N), f(N+1) \in \mathbb{N}$, поэтому $f(N+1) - f(N) \geq 1$. Однако тогда $1 \leq f(N+1) - f(N) < r + 1/2 - r + 1/2 = 1$ — противоречие. $\square$

Пусть даны m различных вещественных чисел $a_0, a_1, ..., a_m$. Обозначим

$$\omega(a_0, a_1, ..., a_m) = \big(n \mapsto a_{n \bmod (m+1)}\big)$$

Теорема 5. $\mathrm{Lim}(\omega(a_0, a_1, ..., a_m)) = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$

Доказательство. Из леммы 2 и теоремы 3 следует, что

$$\mathrm{Lim}(\omega(a_0, a_1, ..., a_m)) \subseteq \overline{\{a_0, a_1, ..., a_m\}} = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$$

Докажем $\{a_0, a_1, ..., a_m\} \subseteq \mathrm{Lim}(\omega(a_0, a_1, ..., a_m))$. Возьмём некоторое a_i, тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \omega(n(m+1)+i) = \lim_{n\to+\infty} a_i = a_i$$

Следовательно, $\omega \circ (n \mapsto n(m+1)+i)$ — искомая подпоследовательность. $\square$

Обозначим последовательность $\{0, 0, 1, 0, 1, 2, ..., 0, 1, ..., n, 0, 1, ..., n, n+1, ...\}$ как $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Заметим, что если $j \le i$, то

$$\phi\left(j + \frac{i(i+1)}{2}\right) = \phi(0+1+2+...+i+j) = j$$

Теорема 6. *Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ — некоторое счётное множество. Тогда* $\mathrm{Lim}(\kappa_A \circ \phi) = \overline{A}$

Доказательство. Поскольку $\kappa_A(\phi(n)) \in A$, из теоремы 3 получаем, что $\mathrm{Lim}(\kappa_A \circ \phi) \subseteq \overline{A}$.

Обратно, пусть $r \in \overline{A} = A \cup \mathrm{Lim}(A)$.

Если $r \in A$, обозначим $k = \kappa_A^{-1}(r)$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\kappa_A \circ \phi \circ (n \mapsto k + (n+k)(n+k+1)/2)\\
&= (n \mapsto \kappa_A(\phi(k + (n+k)(n+k+1)/2)))\\
&= (n \mapsto \kappa_A(k)) \text{ (поскольку } k \le n+k)\\
&= (n \mapsto \kappa_A(\kappa_A^{-1}(r)))\\
&= (n \mapsto r)
\end{aligned}$$

Получили постоянную последовательность с пределом r.

Пусть $r \in \mathrm{Lim}(A)$. Тогда существует последовательность $g : \mathbb{N} \to A$, сходящаяся к r. Обозначим $k_n = \kappa_A^{-1}(g(n))$ и $k'_n = k_0 + k_1 + ... + k_n$. Заметим, что $k'_n \ge k_n$.

Если $k_n = 0$ для бесконечного числа номеров n, то существует строго возрастающая $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $k_{f(n)} = 0$. Но тогда $g(f(n)) = \kappa_A(k_{f(n)}) = \kappa_A(0)$. Из теоремы 1 следует, что $r = \kappa_A(0) \in A$, но этот случай сводится к предыдущему.

Пусть теперь $k_n = 0$ лишь для конечного числа номеров. Возьмём наибольший такой номер k и обозначим $g' = g \circ (n \mapsto n+k+1)$. Снова из теоремы 1 получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} g'(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = r$.

Пусть также $h = (n \mapsto k_n + k'_n(k'_n+1)/2) \circ (n \mapsto n+k+1)$. Докажем сначала, что h строго монотонна.

Действительно, пусть $i = n+k+1$ для некоторого индекса n. Тогда, по заданию k, $k_i > 0$ и $k_{i+1} > 0$. Следовательно:

$$\begin{aligned}
&h(n+1)\\
&= k_{i+1} + k'_{i+1}(k'_{i+1}+1)/2\\
&= k_{i+1} + (k'_i + k_{i+1})(k'_i + k_{i+1} + 1)/2\\
&= k_{i+1} + ((k'_i)^2 + 2k'_i k_{i+1} + k_{i+1}^2 + k'_i + k_{i+1})/2\\
&> k_{i+1} + ((k'_i)^2 + 2k'_i k_{i+1} + k'_i)/2\\
&= k_{i+1} + k'_i k_{i+1} + ((k'_i)^2 + k'_i)/2\\
&> k'_i + ((k'_i)^2 + k'_i)/2\\
&\ge k_i + ((k'_i)^2 + k'_i)/2\\
&= k_i + k'_i(k'_i+1)/2\\
&= h(n)
\end{aligned}$$

Итак, $\kappa_A \circ \phi \circ h$ — некоторая подпоследовательность. Далее:

$$\begin{aligned}
&\kappa_A \circ \phi \circ h \\
&= \kappa_A \circ \phi \circ (n \mapsto k_n + k'_n(k'_n + 1)/2) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(\phi(k_n + k'_n(k'_n + 1)/2))) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(k_n)) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(\kappa_A^{-1}(g(n)))) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto g(n)) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= g'
\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \kappa_A(\phi(h(n))) = \lim\limits_{n\to+\infty} g'(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = r$, что и требовалось.

□

4 Построение искомой последовательности

Пусть дано некоторое замкнутое множество $A \subseteq \mathbb{R}$. Построим искомую последовательность $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$c = \begin{cases} \mathrm{id}, & A = \varnothing, \\ \omega(a_0, a_1, ..., a_m), & A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}, \\ \kappa_{\mathrm{D}(A)} \circ \phi, & \text{A бесконечно.} \end{cases}$$

$\kappa_{\mathrm{D}(A)}$ в последней строке всегда определено в силу леммы 3.

Заметим, что если $A \neq \varnothing$, то, по построению, $c(\mathbb{N}) \subseteq A$.

Теорема. $\mathrm{Lim}(c) = A$

Доказательство. Следует из теорем 4, 5, 6 и того, что $\mathrm{D}(A)$ плотно в A. □