

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ Фроленков И. В.
подпись фамилия, инициалы
« _____ » _____ 20__ г.

**Отчёт о практике
по получению профессиональных умений
и опыта профессиональной деятельности**

Место прохождения практики:
Институт математики и фундаментальной информатики

Тема практики:
**Последовательность с произвольно заданным
замкнутым множеством предельных точек**

Руководитель: _____
подпись, дата должность, учёная степень фамилия, инициалы

Студент: _____
номер группы номер зачётной книжки подпись, дата фамилия, инициалы

Красноярск, 2022

Содержание

1 Основные определения	1
2 Вспомогательные утверждения	1
3 Вспомогательные конструкции	3
4 Построение искомой последовательности	5

1 Основные определения

Будем работать в произвольной достаточно общей теории множеств с аксиомой выбора. Определим \mathbb{R} как некоторое непрерывное линейно упорядоченное поле, без доказательств ссылаясь на утверждения о том, что такое поле единственно с точностью до изоморфизма и существует [1].

Всюду будем использовать стандартные логические и теоретико-множественные обозначения ($\forall, \exists, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \cup, \cap, \setminus, \emptyset$ и так далее) и, также стандартно, $f \circ g$ для композиции функций (то есть для функции $x \mapsto f(g(x))$), $f(A)$ для образа (множества $\{f(x) \mid x \in A\}$), $f^{-1}(B)$ для прообраза (множества $\{x \mid f(x) \in B\}$) и $\text{card}(X)$ для мощности множества.

Множество **счётно**, если его мощность не превышает мощность множества натуральных чисел \mathbb{N} . Сопоставим каждому счётному множеству A некоторую биекцию его с \mathbb{N} и обозначим её $\kappa_A : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Точку $x \in \mathbb{R}$ назовём **предельной точкой** множества $A \subseteq \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки существует хотя бы одна точка из A , не совпадающая с x . Множество всех предельных точек обозначим как $\text{Lim}(A)$.

Объединение множества A со множеством всех его предельных точек называется **замыканием** и обозначается \bar{A} .

Множество назовём **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Если даны подмножества $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ такие, что $\bar{A} = B$, то говорят, что множество A **плотно в B** .

Числовой последовательностью назовём всякую функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Будем говорить, что число $A \in \mathbb{R}$ является **пределом последовательности f** , если выполняется

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n) - A| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$.

Последовательность, у которой существует предел, назовём **сходящейся**.

Если $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — строго возрастающая последовательность, то есть для неё выполняется

$$\forall n, m : n < m \Rightarrow g(n) < g(m),$$

то последовательность $f \circ g$ называется **подпоследовательностью** последовательности f .

Предельной точкой последовательности называется предел любой её подпоследовательности, если таковой существует. По аналогии со множествами, множество предельных точек последовательности f обозначим как $\text{Lim}(f)$.

Обратите внимание на то, что, в общем случае, $\text{Lim}(f) \neq \text{Lim}(f(\mathbb{N}))$ (например, если $f = (n \mapsto c)$ для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$).

2 Вспомогательные утверждения

Приведём без доказательства несколько известных утверждений [1, 3].

Утверждение. \mathbb{Q} счётно.

Утверждение. Декартово произведение счётных множеств счётно.

Утверждение. Образ счётного множества не более чем счётен.

Утверждение. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

Теорема 1. Если последовательность сходится, то все её подпоследовательности сходятся к тому же пределу.

Доказательство. Пусть выполнено $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |f(n) - A| < \varepsilon$. Зафиксируем некоторую подпоследовательность $f \circ g$ и $\varepsilon > 0$.

Пусть $M_\varepsilon = \min\{m \in \mathbb{N} \mid g(m) \geq N_\varepsilon\}$ (оно существует в силу того, что g строго возрастает). Тогда для всех $n \geq M_\varepsilon$ выполняется $g(n) \geq g(M_\varepsilon) \geq N_\varepsilon$, следовательно $|f(g(n)) - A| < \varepsilon$. \square

Теорема 2. Пусть даны две сходящиеся последовательности f и g такие, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = A$, а также последовательность $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Если для всех n верно, что $f(n) \leq h(n) \leq g(n)$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = A$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |f(n) - A| < \varepsilon$ и $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq M_\varepsilon : |g(n) - A| < \varepsilon$.

Обозначим $K_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ и возьмём некоторое $n \geq K_\varepsilon$. По заданию K_ε , $n \geq K_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ и $n \geq K_\varepsilon \geq M_\varepsilon$.

Известно, что $|h(n) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < h(n) < A + \varepsilon$. Поскольку $n \geq N_\varepsilon$ и $n \geq M_\varepsilon$, также верно, что $A - \varepsilon < f(n) < A + \varepsilon$ и $A - \varepsilon < g(n) < A + \varepsilon$.

Объединяя это с условием $f(n) \leq h(n) \leq g(n)$, получим $A - \varepsilon < f(n) \leq h(n) \leq g(n) < A + \varepsilon$. \square

Лемма 1. Для всяких $A, B \subseteq \mathbb{R}$ верно $A \subseteq B \Rightarrow \text{Lim}(A) \subseteq \text{Lim}(B)$.

Доказательство. Вытекает напрямую из определения. \square

Теорема. Во всяком замкнутом $A \subseteq \mathbb{R}$ можно выделить не более чем счётное плотное подмножество.

Доказательство. Обозначим $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$.

Рассмотрим множество $\Delta = \{(q, r) \mid q, r \in \mathbb{Q} \wedge B(q, r) \cap A \neq \emptyset\}$. Заметим, что оно не более чем счётно, поскольку является подмножеством $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Для каждой пары $(q, r) \in \Delta$ выберем некоторый элемент $\sigma(q, r) \in B(q, r) \cap A$.

Обозначим $D(A) = \sigma(\Delta) \subseteq A$. Поскольку Δ либо конечно, либо счётно, то $D(A)$ не более чем счётно как образ конечного или счётного множества.

Докажем сначала, что $\text{Lim}(D(A)) \subseteq A$. Действительно, поскольку $D(A) \subseteq A$, то из леммы 1 и того, что A замкнуто, получаем $\text{Lim}(D(A)) \subseteq \text{Lim}(A) \subseteq A$.

Теперь докажем, что $A \subseteq \overline{D(A)}$. Пусть $c \in A$. Если $c \in D(A)$, то утверждение, очевидно, выполнено; поэтому считаем, что $c \notin D(A)$, и докажем $c \in \text{Lim}(D(A))$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , существует $q \in \mathbb{Q}$ ($c \neq q$) такое, что $|c - q| < \varepsilon/3$. В силу аксиомы Архимеда существует $r \in \mathbb{Q}$ такое, что $\varepsilon/3 < r < 2\varepsilon/3$. Следовательно, $|c - q| < \varepsilon/3 < r$, то есть $c \in B(q, r)$ и $(q, r) \in \Delta$, потому определено $\sigma(q, r)$.

Так как $\sigma(q, r) \in B(q, r)$, то $|\sigma(q, r) - q| < r < 2\varepsilon/3$. Соединяя, получаем: $|c - \sigma(q, r)| = |c - q + q - \sigma(q, r)| \leq |c - q| + |\sigma(q, r) - q| < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$.

Поскольку $\sigma(q, r) \in D(A)$ и $c \notin D(A)$, выполнено $c \neq \sigma(q, r)$, что и требовалось. \square

Лемма 2. Если $A \subseteq \mathbb{R}$ конечно, то $\overline{A} = A$.

Доказательство. Докажем, что $\text{Lim}(A) = \emptyset$. Пусть $r \in \text{Lim}(A)$ и $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$.

Возьмём $E = \min\{|r - a_i| \mid 0 \leq i \leq m\}$ и $\varepsilon = E/2$. Тогда, по определению, существует некоторый a_i такой, что $|r - a_i| < \varepsilon = E/2$ и $r \neq a_i$. Однако из задания E следует, что $E \leq |r - a_i| < E/2$, — противоречие.

Следовательно, $\text{Lim}(A) \subseteq \emptyset$, но $\emptyset \subseteq \text{Lim}(A)$ очевидно; поэтому $\text{Lim}(A) = \emptyset$.

Откуда получаем, что $\overline{A} = A \cup \text{Lim}(A) = A \cup \emptyset = A$. \square

Лемма 3. Если A бесконечно, то $D(A)$ также бесконечно.

Доказательство. Действительно, если $D(A)$ конечно, то в силу леммы 2 имеем $\overline{D(A)} = D(A)$, но, с другой стороны, $\overline{D(A)} = A$. Соединяя, $D(A) = A$, то есть A конечно.

Контрапозицией получаем необходимое утверждение. \square

Теорема 3. Для любой $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ верно $\text{Lim}(f) \subseteq \overline{A}$.

Доказательство. Возьмём $r \in \text{Lim}(f)$. По определению, существует подпоследовательность $f \circ g$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g(n)) = r$.

По определению предела, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(g(n)) - r| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём n такое, что $f(g(n)) \neq r$.

Тогда $|r - f(g(n))| < \varepsilon$, $f(g(n)) \in A$ и $f(g(n)) \neq r$, но это означает, что r — предельная точка в A . Следовательно, $r \in \text{Lim}(A) \in \overline{A}$. \square

Теорема. Множество всех предельных точек последовательности замкнуто.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Докажем, что $\text{Lim}(\text{Lim}(f)) \subseteq \text{Lim}(f)$.

Действительно, пусть $r \in \text{Lim}(\text{Lim}(f))$. Рассмотрим окрестность $(r - 1; r + 1)$. По определению предельной точки, в этой окрестности существует некоторое $r_0 \in \text{Lim}(f)$ такое, что $r \neq r_0$. По определению предельной точки последовательности, существует некоторая подпоследовательность $f \circ g_0$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g_0(n)) = r_0$.

Зафиксируем $\varepsilon = |r - r_0|$, выберем некоторый номер $n_0 \geq N_\varepsilon$ и обозначим $k_0 = g_0(n_0)$. По определению предела последовательности, $|f(k_0) - r_0| < \varepsilon = |r - r_0|$.

Откуда $|f(k_0) - r| = |f(k_0) - r_0 + r_0 - r| \leq |f(k_0) - r_0| + |r_0 - r| < 2|r - r_0| = 2\varepsilon$.

Далее, рассмотрим окрестность $(r - 1/2; r + 1/2)$. Аналогично, возьмём $r_1 \in \text{Lim}(f)$ в этой окрестности и $f \circ g_1$ такое, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g_1(n)) = r_1$.

Зафиксируем $\varepsilon = |r - r_0|$, выберем некоторый номер $n_1 \geq N_\varepsilon$ такой, что $k_1 = g_1(n_1) > k_0$ (он существует в силу того, что g_1 строго возрастает).

Аналогично получаем, что $|f(k_1) - r| < 2|r - r_1| = 1$.

Продолжая, получим строго возрастающую последовательность $(n \mapsto k_n)$ такую, что $|f(k_n) - r| < 2/(n + 1)$, то есть, $r - 2/(n + 1) < f(k_n) < r + 2/(n + 1)$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow +\infty} (r - 2/(n + 1)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (r + 2/(n + 1)) = r$, то, по теореме 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(k_n) = r$, но это и означает, что $r \in \text{Lim}(f)$. \square

Из последнего утверждения следует, что множеством предельных точек последовательности не может быть произвольное множество. Однако мы докажем, что таким множеством может быть произвольное замкнутое множество.

3 Вспомогательные конструкции

Обозначим $\text{id} = (n \mapsto n)$.

Теорема 4. $\text{Lim}(\text{id}) = \emptyset$

Доказательство. Пусть $r \in \text{Lim}(\text{id})$, то есть существует подпоследовательность $\text{id} \circ f$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{id}(f(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = r$, где f строго возрастает.

Зафиксируем $\varepsilon = 1/2$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n) - r| < 1/2$. В частности, $r - 1/2 < f(N)$ и $f(N + 1) < r + 1/2$. Поскольку f строго возрастает, верно, что $f(N) < f(N + 1)$.

$f(N), f(N + 1) \in \mathbb{N}$, поэтому $f(N + 1) - f(N) \geq 1$. Однако тогда $1 \leq f(N + 1) - f(N) < r + 1/2 - r + 1/2 = 1$ — противоречие. \square

Пусть даны m различных вещественных чисел a_0, a_1, \dots, a_m . Обозначим

$$\omega(a_0, a_1, \dots, a_m) = (n \mapsto a_{n \bmod (m+1)})$$

Теорема 5. $\text{Lim}(\omega(a_0, a_1, \dots, a_m)) = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$

Доказательство. Из леммы 2 и теоремы 3 следует, что

$$\text{Lim}(\omega(a_0, a_1, \dots, a_m)) \subseteq \overline{\{a_0, a_1, \dots, a_m\}} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$$

Докажем $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subseteq \text{Lim}(\omega(a_0, a_1, \dots, a_m))$. Возьмём некоторое a_i , тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega(n(m+1) + i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_i = a_i$$

Следовательно, $\omega \circ (n \mapsto n(m+1) + i)$ — искомая подпоследовательность. \square

Обозначим последовательность $\{0, 0, 1, 0, 1, 2, \dots, 0, 1, \dots, n, 0, 1, \dots, n, n+1, \dots\}$ как $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Заметим, что если $j \leq i$, то

$$\phi\left(j + \frac{i(i+1)}{2}\right) = \phi(0 + 1 + 2 + \dots + i + j) = j$$

Теорема 6. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ — некоторое счётное множество. Тогда $\text{Lim}(\kappa_A \circ \phi) = \overline{A}$

Доказательство. Поскольку $\kappa_A(\phi(n)) \in A$, из теоремы 3 получаем, что $\text{Lim}(\kappa_A \circ \phi) \subseteq \overline{A}$.

Обратно, пусть $r \in \overline{A} = A \cup \text{Lim}(A)$.

Если $r \in A$, обозначим $k = \kappa_A^{-1}(r)$. Тогда:

$$\begin{aligned} & \kappa_A \circ \phi \circ (n \mapsto k + (n+k)(n+k+1)/2) \\ &= (n \mapsto \kappa_A(\phi(k + (n+k)(n+k+1)/2))) \\ &= (n \mapsto \kappa_A(k)) \text{ (поскольку } k \leq n+k) \\ &= (n \mapsto \kappa_A(\kappa_A^{-1}(r))) \\ &= (n \mapsto r) \end{aligned}$$

Получили постоянную последовательность с пределом r .

Пусть $r \in \text{Lim}(A)$. Тогда существует последовательность $g : \mathbb{N} \rightarrow A$, сходящаяся к r . Обозначим $k_n = \kappa_A^{-1}(g(n))$ и $k'_n = k_0 + k_1 + \dots + k_n$. Заметим, что $k'_n \geq k_n$.

Если $k_n = 0$ для бесконечного числа номеров n , то существует строго возрастающая $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $k_{f(n)} = 0$. Но тогда $g(f(n)) = \kappa_A(k_{f(n)}) = \kappa_A(0)$. Из теоремы 1 следует, что $r = \kappa_A(0) \in A$, но этот случай сводится к предыдущему.

Пусть теперь $k_n = 0$ лишь для конечного числа номеров. Возьмём наибольший такой номер k и обозначим $g' = g \circ (n \mapsto n + k + 1)$. Снова из теоремы 1 получаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = r$.

Пусть также $h = (n \mapsto k_n + k'_n(k'_n + 1)/2) \circ (n \mapsto n + k + 1)$. Докажем сначала, что h строго монотонна.

Действительно, пусть $i = n + k + 1$ для некоторого индекса n . Тогда, по заданию k , $k_i > 0$ и $k_{i+1} > 0$. Следовательно:

$$\begin{aligned} & h(n+1) \\ &= k_{i+1} + k'_{i+1}(k'_{i+1} + 1)/2 \\ &= k_{i+1} + (k'_i + k_{i+1})(k'_i + k_{i+1} + 1)/2 \\ &= k_{i+1} + ((k'_i)^2 + 2k'_i k_{i+1} + k_{i+1}^2 + k'_i + k_{i+1})/2 \\ &> k_{i+1} + ((k'_i)^2 + 2k'_i k_{i+1} + k'_i)/2 \\ &= k_{i+1} + k'_i k_{i+1} + ((k'_i)^2 + k'_i)/2 \\ &> k'_i + ((k'_i)^2 + k'_i)/2 \\ &\geq k_i + ((k'_i)^2 + k'_i)/2 \\ &= k_i + k'_i(k'_i + 1)/2 \\ &= h(n) \end{aligned}$$

Итак, $\kappa_A \circ \phi \circ h$ — некоторая подпоследовательность. Далее:

$$\begin{aligned}
& \kappa_A \circ \phi \circ h \\
&= \kappa_A \circ \phi \circ (n \mapsto k_n + k'_n(k'_n + 1)/2) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(\phi(k_n + k'_n(k'_n + 1)/2))) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(k_n)) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto \kappa_A(\kappa_A^{-1}(g(n)))) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= (n \mapsto g(n)) \circ (n \mapsto n + k + 1) \\
&= g'
\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_A(\phi(h(n))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = r$, что и требовалось. \square

4 Построение искомой последовательности

Пусть дано некоторое замкнутое множество $A \subseteq \mathbb{R}$. Построим искомую последовательность $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$c = \begin{cases} \text{id}, & A = \emptyset, \\ \omega(a_0, a_1, \dots, a_m), & A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, \\ \kappa_{D(A)} \circ \phi, & A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

$\kappa_{D(A)}$ в последней строке всегда определено в силу леммы 3.

Заметим, что если $A \neq \emptyset$, то, по построению, $c(\mathbb{N}) \subseteq A$.

Теорема. $\text{Lim}(c) = A$

Доказательство. Следует из теорем 4, 5, 6 и того, что $D(A)$ плотно в A . \square

Список литературы

- [1] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — Дрофа, 2003. — 703 с. — ISBN 5-7107-4119-1, 5-7107-5004-2.
- [2] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Том 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. — Дрофа, 2004. — 720 с. — ISBN 5-7107-5003-4, 5-7107-5004-2.
- [3] Введение в специальность «Математика»: Учеб. пособие / А. К. Цих; Краснояр. гос. ун-т. — Красноярск: КГУ, 1997. — 159 с. — ISBN 5-7638-0057-5.
- [4] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе / Пер. с англ. Б. И. Голубова. — Москва: Издательство ЛКИ, 2010. — 248 с. — ISBN 978-5-382-01039-7.
- [5] Mathematics Stack Exchange [Электронный ресурс] / Prove that a subset of a separable set is itself separable. — Режим доступа: <https://math.stackexchange.com/questions/516886/prove-that-a-subset-of-a-separable-set-is-itself-separable>. — Яз. англ.