Lecture 4:非合作博弈论基础（二）

一、混合策略纳什均衡

1.混合策略的引入

纳什均衡是求解博弈的强大工具。然而很可惜的是，仍然存在相当一部分博弈无法找到纳什均衡，甚至是非常常见的博弈，例如石头剪刀布博弈:

	石头	剪刀	布
石头	0,0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0

不难验证这个博弈没有纳什均衡——这也符合预期，毕竟石头剪刀布的游戏从来没有一个稳定的策略;

- 考虑简单的情况，例如一个参与人永远出石头，那么另一个人只要观察到这一点，就可以永远出布，这样的情况显然无法构成均衡;
- 所以可以猜想，稳定的策略必定带有随机性，各个参与人要让自己的行为不可捉摸，这就引入了混合策略（mixed strategy）的概念。

2.混合策略

定义：令$G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$为一个策略型博弈。一个混合策略(mixed strategy)是S_i上的概率分布，参与人i的混合策略集记为

$$\sum_i = \left\{\sigma_i : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\right\}$$

其中$\sigma_i(s_i)$表示参与人i在该混合策略下选择策略s_i的概率。

- 因此混合策略就是给每个S_i中的策略（称之为纯策略（pure strategy））一个概率，然后按照这个概率随机选择策略。
- 例如在石头剪刀布博弈中，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$就是一种混合策略，表示每个纯策略（出石头、剪刀和布）被选择的概率都是$\frac{1}{3}$。
- 纯策略是混合策略特例：只有一个策略概率为 1，其余为 0。
- 还有一个记号：对每个参与人i，令$\Delta(S_i)$为S_i上的概率分布集合，即

$$\Delta(S_i) = \left\{p : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i\in S_i} p(s_i) = 1\right\}$$

  则显然有$\sum_i = \Delta(S_i)$;
- 当S_i是连续策略空间时，求和需要替换为积分，当然本课程不讨论连续策略空间下的混合策略;
- 有混合策略后，博弈中参与人的效用函数也需要做相应的调整，需要适应有混合策略的情况。

3.博弈的混合扩展

定义：令$G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$为一个策略型博弈。$G$的混合扩展（mixed extension）是一个博弈

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$$

其中$\Sigma_i = \Delta(S_i)$是参与人i的混合策略集，他的收益函数$U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$将每个混合策略向量$\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$映射到一个实数

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s\in S}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j)u_i(s_1, ..., s_n)$$

- 这里使用了冯诺伊曼-摩根斯坦恩效用函数：每个纯策略$(s_1, ..., s_n)$出现的概率为$\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j)$，因此效用的本质是参与人$i$在混合策略向量$\sigma$下的期望收益；
- 这里还蕴含一个假定：每个参与人的行动相互独立。

4.混合策略纳什均衡

类似于纯策略纳什均衡，可以给出混合策略纳什均衡的定义：

定义：给定一个博弈的混合扩展$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$，一个混合策略向量$\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$是一个混合策略纳什均衡，若对每个参与人$i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

例如，两个参与人都选择混合策略$\sigma_1^* = \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$时，$(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$构成混合策略纳什均衡；

- 可以尝试根据定义验证这一结果；
- 然而一旦开始验证就会发现上述定义不适合于验证这一结果：因为需要对任意的混合策略σ_i都进行验证，展开后的表达式非常复杂。

因此引入一个更为方便的等价条件方便判断：

混合策略纳什均衡等价条件：令$G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$为一个策略型博弈，$\Gamma$为$G$的混合扩展。一个混合策略向量$\sigma^*$是$\Gamma$的混合策略纳什均衡，当且仅当对于每个参与人$i$和每一个纯策略$s_i \in S_i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

证明: 正向推导只需要注意到纯策略也是特殊的混合策略即可。反过来，对于参与人i的每个混合策略σ_i，

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \leq \sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)U_i(\sigma^*) = U_i(\sigma^*)$$

5.混合策略纳什均衡计算：最优反应

考虑如下性别大战：一对夫妻要安排他们周末的活动，可选择的活动有看足球赛（F）和听音乐会（C）。丈夫更喜欢看足球赛，而妻子更喜欢听音乐会。如果他们选择的活动不同，那么他们都不会高兴，如果他们选择的活动相同，那么他们都会高兴，只是高兴程度略有不同：

妻子

丈夫		F	C
	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

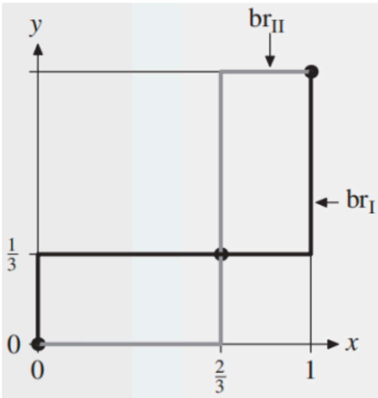
显然 (F,F) 和 (C,C) 是纯策略纳什均衡，但是否存在非纯策略纳什均衡的混合策略纳什均衡呢？

首先展示如何使用最优反应法计算混合策略纳什均衡。记丈夫的混合策略为$(x,1-x)$（表示以x的概率选择F，$1-x$的概率选择C），妻子的混合策略为$(y,1-y)$。对于丈夫的每个混合策略$(x,1-x)$，妻子的最优反应集合为

$$\begin{aligned}\mathrm{br}_2(x) &= \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x,y)\\ &= \{y\in[0,1] : u_2(x,y)\geq u_2(x,z), \forall z\in[0,1]\}\end{aligned}$$

而$u_2(x,y)=xy\cdot 1+(1-x)(1-y)\cdot 2=2-2x-2y+3xy$，将$x$视为定 值，对$y$求导得到$3x-2$，因此可以得到最优反应集合为（丈夫同理）：

$$\mathrm{br}_2(x)=\begin{cases}\{0\} & x\in[0,\frac{2}{3})\\ [0,1] & x\in\{\frac{2}{3}\}\\ \{1\} & x\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}, \mathrm{br}_1(y)=\begin{cases}\{0\} & y\in[0,\frac{1}{3})\\ [0,1] & y\in\{\frac{1}{3}\}\\ \{1\} & y\in(\frac{1}{3},1]\end{cases}$$



三个交点：$(x^*,y^*)=(0,0),(x^*,y^*)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(x^*,y^*)=(1,1)$，第 1 个 和第 3 个是纯策略纳什均衡，第 2 个是混合策略纳什均衡。

- 求混合策略纳什均衡下双方的对应的收益，你能从中得到什么启示？
- 从上面的图形能看出混合策略纳什均衡具有什么特点？

6.无差异原则

从上述例子中可以看出，混合策略纳什均衡下双方选择策略F和C的效用是相等的，这一结论可以一般化：

无差异原则：令σ^*为一个混合策略纳什均衡，s_i和s_i'为参与人i的两个纯策略，若$\sigma_i(s_i),\sigma_i^*(s_i')>0$，则$U_i(s_i,\sigma_{-i}^*)=U_i(s_i',\sigma_{-i}^*)$。

定理成立的原因很简单：如果$U_i(s_i,\sigma_{-i}^*)>U_i(s_i',\sigma_{-i}^*)$，那么参与人$i$应该增加$s_i$的概率，这样可以提高自己的收益。

- 被赋予正概率的集合称为混合策略的支撑集合；
- 问题：被严格占优的策略有可能属于混合策略的支撑集合吗；
- 问题：为什么混合策略支撑集的策略无差异，不能只选择其中一个行动或任意选取概率分布？

7.混合策略纳什均衡计算：无差异原则

接下来使用无差异原则计算性别大战的混合策略纳什均衡。使用无差异原 则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略 纳什均衡显然是(F,F)和(C,C)。

考虑丈夫的混合策略$\sigma_1=(x,1-x)$和妻子的混合策略$\sigma_2=(y,1-y)$，且 $0<x<1,0<y<1$（称为完全混合的均衡）。根据无差异原则必有丈夫选择F和C的效用相等：

$$U_1(F,\sigma_2)=2y=1-y=U_1(C,\sigma_2)$$

解得$y=\frac{1}{3}$，同理可以解得$x=\frac{2}{3}$。因此用无差异原则可以更简便地得到 混合策略纳什均衡。

注意，无差异原则只是取得混合策略纳什均衡的必要条件，并非充分条件，因此求出结果后需要验证。然而本例无需检验，因为本例只有两个策略，两个策略的效用都一致，不存在其他策略得到更高的效用。

8.混合策略纳什均衡的存在性与计算复杂性

尽管并非所有博弈都有纳什均衡，但是下面的纳什定理告诉我们，每个有限的策略型博弈都有至少一个混合策略纳什均衡：

纳什定理：每一个策略型博弈G，如果参与人的个数有限，每个参与人的纯策略数目有限，那么G至少有一个混合策略纳什均衡。

关于混合策略纳什均衡的计算，根据定义可以转化为线性可行性问题，有指数时间的求解方式（实验要求实现），自然的问题是，是否存在多项式时间的通用解法？答案是，不知道是否存在：

定理：双人博弈纳什均衡的计算是 PPAD 完全问题。

二、完全信息动态博弈

三、不完全信息博弈