Lecture 8：最优机制

一、虚拟福利最大值

1.基本模型

考虑单物品情况，即一个卖家有一个不可分割的物品待出售；

- 与此前单物品讨论一致，有n个潜在买家（竞拍者）$N = \{1, 2, ..., n\}$；
- 每个买家i对物品有一个心理价位t_i是不完全信息；
  - 其连续先验概率密度$f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^+$是共同知识，且$f_i(t_i) > 0$对所有$t_i \in [a_i, b_i]$成立；
  - 记T为所有参与人可能的估值组合，即

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

- 假定不同买家的估值分布是相互独立的（但不需要同分布）；
  - 故在T上估值的联合密度函数是$f(t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)$
  - 按照惯例记$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{j \in N, j \neq i} f_j(t_j)$
- 此外，为了讨论方便，卖家对物品的估值$t_0 = 0$是共同知识。

2.BIC 迈尔森引理

根据显示原理，只需要考虑激励相容的直接机制，即所有买家如实报告自己的估值的机制。在最优机制的讨论中，如实报告类型不一定是占优策略均衡，而是贝叶斯纳什均衡，等价条件与 DSIC 时不一定相同，故需要给出 BIC 版本的迈尔森引理。

为给出 BIC 迈尔森引理，需要一些准备工作。假定拍卖机制的分配规则和支付规则为(x, p)，考虑事中阶段，即参与人知道自己的估值，对他人估值是不完全信息的阶段。为了讨论 BIC 的条件，应首先写出效用函数。

由于考虑的是贝叶斯纳什均衡，因此应当考虑其他参与人都如实报告自己估值时，即$b_{-i} = t_{-i}$时，估值为t_i的竞拍者i报告t_i'的期望效用

$$U_i(t_i') = \int_{T_{-i}} (t_i \cdot x_i(t_i', t_{-i}))f_{-i}(t_{-i})dt_{-i}$$

理解这一表达式：买家效用为他的估值t_i乘以物品分配概率$x_i(t_i', t_{-i})$，减去支付$p_i(t_i', t_{-i})$，然而买家不能确定其他买家真实估值，因此还需要根据先验分布对其他人的估值求期望。因此 BIC 的条件就是$U_i(t_i) \geq U_i(t_i')$对所有$i \in N$和$t_i' \in [a_i, b_i]$成立。

然而这一U_i的表达式的确看起来非常不友好，因此尝试简化。定义

$$Q_i(t_i') = \int_{T_{-i}} x_i(t_i', t_{-i})f_{-i}(t_{-i})dt_{-i}$$

则$Q_i(t_i')$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t_i'时，他获得物品的概率。定义

$$M_i(t_i') = \int_{T_{-i}} p_i(t_i', t_{-i})f_{-i}(t_{-i})dt_{-i}$$

则$M_i(t_i)$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t_i'时，他的期望支付。因此，$U_i(t_i')$可以简化为

$$U_i(t_i') = t_i Q_i(t_i') - M_i(t_i')$$

这就与 DSIC 情况下的$u_i(t_i') = t_i \cdot x_i(t_i') - p_i(t_i')$形式上一致了，只是获得物品的概率和支付都求了期望，并且假定了其他买家如实报价。

因此仿照 DSIC 迈尔森引理可以给出 BIC 版本的迈尔森引理，并且证明过程完全类似，因此不再赘述，除了需要注意积分下界因为显示机制要求报价集合$T_i = [a_i, b_i]$而变为了a_i：

BIC 迈尔森引理：一个拍卖机制是 BIC（即贝叶斯激励相容）的，当且仅当其分配规则和支付规则(x, p)满足：
- $Q_i(t_i)$是单调不减函数；
- 对任意的$i \in N$和$b \in [a_i, b_i]$，有

$$M_i(b) = M_i(a_i) + bQ_i(b) - \int_{a_i}^{b} Q_i(s)ds$$

3.合理的机制

由此得到了 BIC 的充要条件。然而现在还不能转入最大化卖家收益的讨论，因为仅满足 BIC 的机制是不够合理（feasible）的。合理的机制除了满足 BIC 外，还应当满足如下两个条件：
- 第一个条件是分配规范性，因为只有一个物品在分配，故对于所有$t \in T$，有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq 1$$

  并且$x_i(t) \geq 0$对所有$i \in N$和$t \in T$成立；
- 第二个条件是，对所有$i \in N$和$t_i \in [a_i, b_i]$，有$U_i(t_i) \geq 0$，即需要满足（事中阶段的）个人理性，否则竞拍者在得知自己的类型后会选择退出拍卖。

下面的定理给出了在 BIC 的基础上满足个人理性的充要条件：

定理：一个 BIC 的拍卖机制是 IR（个人理性）的，当且仅当对于每个$i \in N$都满足$M_i(a_i) \leq 0$

即要求当竞拍者估值为最低值时的期望支付小于等于 0。

证明: 根据 BIC 的条件，不难写出

$$U_i(t_i) = t_iQ_i(t_i) - M_i(t_i) = \int_{a_i}^{t_i} Q_i(s)ds - M_i(a_i)$$

个人理性要求对任意的$t_i \in [a_i, b_i]$，都有$U_i(t_i) \geq 0$，因为等式右侧当$t_i = a_i$时取最小值$-M_i(a_i)$，故个人理性成立当且仅当$M_i(a_i) \leq 0$。

总结：给出了合理机制的三个条件，即 BIC、分配规范性和 IR，以及 BIC 和 IR 的等价条件。基于上述讨论可以开始考虑如何设计最优机制。

4.转化为虚拟福利最大化问题

首先当所有买家如实报告自己的类型时，投标结果为$t = (t_1, ..., t_n)$，卖家期望收入是（注意卖家对物品估值为 0，故只有卖出才能产生收益）

$$U_0 = \int_T \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \right) f(t)dt$$

下面这一引理给出了最大化卖家收入U_0的合理的最优机制的一个简洁明了的条件：

引理：假设分配规则x最大化

$$\int_T \left(\sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) x_i(t) \right) f(t)dt$$

支付规则p使得$M_i(a_i)=0$对所有$i\in N$成立，且(x,p)满足 BIC、分配规范性和 IR，则(x,p)是合理的最优机制。

引理的具体证明因为技术性较强不展开描述，下面描述大致步骤：

1. 根据 BIC 迈尔森引理和展开U_0的表达式，然后利用积分变换技巧得到

$$U_0=\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}\right)x_i(t)\right)f(t)dt+\sum_{i=1}^{n}M_i(a_i)$$

2. 从而目标转化为在满足 BIC、分配规范性和 IR 的情况下最大化上式。其加号前的部分只与分配规则x有关，加号后的部分展开后只与支付规则p有关，因此可以分别考虑这两个部分：
   - 对于加号前的部分，目标就是找到分配机制x使其最大化；
   - 对于加号后的部分，根据个人理性等价条件有$M_i(a_i)\le 0$，因此要最大化U_0就要选择支付规则p使得$M_i(a_i)=0$对所有$i\in N$成立。

由此，这一引理的结论得证。

有了这一引理，接下来的任务就是找到一个分配机制x使得

$$\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}\right)x_i(t)\right)f(t)dt$$

最大化，而支付规则在x确定后直接根据迈尔森引理以及$M_i(a_i)=0$的条件确定即可。

令

$$c_i(t_i)=t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}$$

称其为竞拍者i的虚拟估值（virtual valuation），则目标就是找到一个分配机制x使得

$$\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)\right)f(t)dt$$

最大化。

如果对任意的t，都能找到一个x使得

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$$

最大化，自然也能满足最大化要求。

- 因此，目标进一步转化为找到一个分配机制x使得对任意的t，都能找到一个x使得$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$最大化；
- 如果$c_i(t_i)$是竞拍者i的真实估值，那么最大化$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$就是最

大化竞拍者福利，然而$c_i(t_i)$并不是真实估值，只是虚拟估值，因此这一问题称为虚拟福利最大化问题。

二、最优机制

三、拍卖与数据定价