HW2:机制设计与信息设计基础

姓名： 学号： 日期：

2.1.N人一价拍卖均衡

假设有N个竞拍者，并且N个竞拍者的估计是独立的，且都服从$[0,1]$上的均匀分布。N个竞拍者的真实估值记为$t_1, ..., t_n$。

1. 求解博弈的递增对称纯策略贝叶斯纳什均衡β(注意$\beta(0) = 0$)；
2. 从上述结果中你能获得什么启示？

Solution:

1.在一个对称的均衡中，所有竞拍者都使用相同的竞价函数$\beta(t)$。我们假设这个函数是严格递增的。考虑竞拍者i，其真实估值为t_i。他的目标是选择一个出价b_i来最大化自己的期望效用。

- 如果他赢了（即b_i是最高出价），效用为$t_i - b_i$。
- 如果他输了，效用为 0。

因此，竞拍者i的期望效用$\mathbb{E}[U_i]$是：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i \mid t_i)] = (t_i - b_i) \times P(\text{用}b_i\text{获胜})$$

由于所有其他竞拍者$j(j \neq i)$都使用策略$\beta(t_j)$，竞拍者i以出价b_i获胜的条件是他的出价高于所有其他人的出价：$b_i > \beta(t_j)$对所有$j \neq i$成立。

因为我们假设$\beta(\cdot)$是严格递增的，所以它存在一个反函数$\beta^{-1}(\cdot)$。条件$b_i > \beta(t_j)$等价于$\beta^{-1}(b_i) > t_j$。

竞拍者i获胜的概率就是其他所有$N-1$个竞拍者的估值都小于$\beta^{-1}(b_i)$的概率。

$$P(\text{获胜}) = P\left(t_j < \beta^{-1}(b_i) \quad \text{for all } j \neq i\right)$$

由于所有t_j都是独立的，并且服从$[0,1]$上的均匀分布（即$P(t_j < x) = x$），这个概率为：

$$P(\text{获胜}) = \left[P\left(t_j < \beta^{-1}(b_i)\right)\right]^{N-1} = \left[\beta^{-1}(b_i)\right]^{N-1}$$

将获胜概率代入期望效用函数，竞拍者i的目标是选择b_i来最大化：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i \mid t_i)] = (t_i - b_i)\left[\beta^{-1}(b_i)\right]^{N-1}$$

在均衡状态下，竞拍者i的最优选择必须是遵循策略，即出价$b_i = \beta(t_i)$。这意味着，如果一个估值为t_i的人假装自己的估值是$\hat{t}$并出价$\beta(\hat{t})$，他的效用在$\hat{t} = t_i$时达到最大。

我们令一个估值为t_i的竞拍者选择一个“声明的估值”$\hat{t}$，从而其出价为$b = \beta(\hat{t})$。他的期望效用为：

$$U(\hat{t}, t_i) = \left(t_i - \beta(\hat{t})\right) \cdot P\left(\beta(\hat{t})\text{获胜}\right)$$

获胜的概率是其他所有人的真实估值都小于$\hat{t}$的概率，即$\left(\hat{t}\right)^{N-1}$。

$$U(\hat{t}, t_i) = \left(t_i - \beta(\hat{t})\right)\left(\hat{t}\right)^{N-1}$$

为了让$\beta(\cdot)$成为一个均衡策略，对于任何t_i, $\hat{t} = t_i$都必须是最大化上述效用函数的选择。我们使用一阶条件（FOC），对$\hat{t}$求导并令其为 0：

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{t}} = -\beta'\left(\hat{t}\right)\left(\hat{t}\right)^{N-1} + \left(t_i - \beta\left(\hat{t}\right)\right)(N-1)\left(\hat{t}\right)^{N-2} = 0$$

在均衡时，我们必须有$\hat{t} = t_i$。将此条件代入一阶条件中：

$$-\beta'(t_i)(t_i)^{N-1} + (t_i - \beta(t_i))(N-1)(t_i)^{N-2} = 0$$

这是一个一阶常微分方程。为了求解$\beta(t_i)$，我们整理方程（假设$t_i > 0$）：

$$\beta'(t_i)t_i - (N-1)(t_i - \beta(t_i)) = 0$$

$$t_i\beta'(t_i) + (N-1)\beta(t_i) = (N-1)t_i$$

积分因子$I(t_i)$为：

$$I(t_i) = e^{\int \frac{N-1}{t_i} dt_i} = e^{(N-1)\ln(t_i)} = t_i^{N-1}$$

将方程两边乘以积分因子t_i^{N-1}：

$$t_i^{N-1}\beta'(t_i) + (N-1)t_i^{N-2}\beta(t_i) = (N-1)t_i^{N-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt_i}[t_i^{N-1}\beta(t_i)] = (N-1)t_i^{N-1}$$

积分得到：

$$t_i^{N-1}\beta(t_i) = \int (N-1)t_i^{N-1} dt_i = (N-1)\frac{t_i^N}{N} + C$$

解得：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i + \frac{C}{t_i^{N-1}}$$

由$\beta(0) = 0$得到$C = 0$，否则$t_i \to 0$时，该项会趋近于无穷。 即，唯一解是：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$$

2.从均衡竞价策略$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$中，我们可以得到以下几个重要的经济学启示：

1. 出价折让 (Bid Shading)：均衡策略表明，理性的竞拍者不会出价其真实估值t_i，而是会出一个打了折扣的价格。折扣因子是$\frac{N-1}{N}$。这种行为被称为“出价折让”。其根本原因在于第一价格拍卖的支付规则：如果你赢了，你支付的是你自己的出价。为了在获胜时能获得正的收益（即$t_i - b_i > 0$），你的出价b_i必须严格小于你的真实估值t_i。出价太高会减少你的潜在利润，而出价太低会降低你的获胜概率。这个公式给出了在这两者之间权衡的最优解。
2. 竞争的影响：竞价函数明确地依赖于竞拍者的总数N
   - 当竞拍者数量N增加时，比率$\frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$会趋近于 1。
   - 这意味着，随着竞争变得越来越激烈，每个竞拍者的出价会越来越接近其真实估值。例如，在只有两个竞拍者($N = 2$)的情况下，出价是$\beta(t_i) = \frac{1}{2}t_i$，折让幅度很大。但当有 10 个竞拍者 ($N = 10$)，出价是$\beta(t_i) = \frac{9}{10}t_i$，已经相当接近真实估值了。
   - 直觉解释：当有更多竞争对手时，你为了获胜所需要击败的对手就越多。为了不被别人轻易超越，你必须更积极地出价。对失去拍卖的恐惧超过了对赢得拍卖时支付过多的担忧，从而推高了整体的出价水平。
3. 收益等价性原理的体现 (Revenue Equivalence Theorem)：我们可以计算一下在此拍卖中卖家的期望收益。卖家的收益是最高出价$\max(b_1, ..., b_N)$。因为出价函数是递增的，拥有最高估值$t_{(N)}$的人会给出最高出价$\beta\left(t_{(N)}\right) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$。卖家的期望收益为$\mathbb{E}[\text{Revenue}] =$

$\mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_N\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$。对于$N$个从$[0,1]$均匀分布中抽取的独立样本，最大值统计量$t_{(N)}$的期望值为$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right] = \frac{N}{N+1}$。因此，卖家的期望收益为：

$$\mathbb{E}[\text{Revenue}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

2.2.收入等价原理

有N个竞拍者，并且N个竞拍者的估值是独立的，且都服从$[0,1]$上的均匀分布。考虑如下规则的全 支付拍卖：每个竞拍者提交一个报价，报价最高的竞拍者赢得物品，但所有竞拍者无论是否获得物品都 要支付自己的报价。注意，以下讨论只考虑考虑估价为 0 的竞拍者的期望支付为 0 的递增对称均衡。

1. 求 2.1 题的均衡下一个估值为x的竞拍者的均衡期望支付$m(x)$;
2. 求 2.1 题的均衡下卖家的期望收入;
3. 根据收入等价原理证明：全支付拍卖的递增对称均衡就是$\beta(x) = m(x)$。

Solution:

1. 在问题 2.1 中，我们已经求出第一价格拍卖（First-Price Auction）的均衡竞价策略为$\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$。一个估值为$x$的竞拍者的期望支付（Expected Payment）是指他每次参与拍卖平均需要支付的金额。在第一价格拍卖中，只有获胜时才需要支付，所以期望支付等于其出价乘以获胜的概率。

出价: 对于估值为x的竞拍者，他的出价是$b = \beta_{FP}(x) = \frac{N-1}{N}x$。

获胜的概率: 该竞拍者获胜，当且仅当他的估值x高于其他所有$N-1$个竞拍者的估值。

$$P(\text{获胜}) = P\left(t_j < x \quad \text{for all } j \neq i\right)$$

由于所有估值t_j独立服从$[0,1]$均匀分布，因此$P\left(t_j < x\right) = x$。

$$P(\text{获胜}) = x^{N-1}$$

$$m(x) = \left(\frac{N-1}{N}x\right) \cdot \left(x^{N-1}\right) = \frac{N-1}{N}x^N$$

2.在第一价格拍卖中，卖家的收入等于获胜者的出价，也就是所有出价中的最高价。由于竞价函数$\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$是严格递增的，拥有最高估值的竞拍者将会提交最高的出价。设所有N个竞拍者中的最高估值为$t_{(N)}$。

最高出价: 获胜者的出价为$\beta_{FP}\left(t_{(N)}\right) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$

卖家的期望收入: 卖家的期望收入就是对这个最高出价求期望值。

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \mathbb{E}\left[\beta_{FP}\left(t_{(N)}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_{(N)}\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$$

最高估值的期望: 对于N个从$[0,1]$均匀分布中独立抽取的样本，其最大值的期望值$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$一个标准统计学结论：

$$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right] = \frac{N}{N+1}$$

计算结果：

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

3. 我们可以应用收入等价原理。该原理指出，对于任何给定的估值x，竞拍者在两种拍卖机制下的期望支付必须是相等的。

- 第一价格拍卖的期望支付: 我们在第 1 问中已经求出，对于估值为x的竞拍者，其期望支付为$m(x) = \frac{N-1}{N} x^N$
- 全支付拍卖的期望支付: 在全支付拍卖中，根据规则，竞拍者无论输赢都必须支付其出价。因此，如果一个竞拍者遵循某个竞价策略$\beta_{AP}(x)$，那么他的支付额是确定的，就是他出的价钱$\beta_{AP}(x)$。他的期望支付就等于他的出价本身。

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = \beta_{AP}(x)$$

- 根据收入等价原理，两种机制下的期望支付必须相等：

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = m(x)$$

$$\beta_{AP} = \frac{N-1}{N} x^N$$

根据收入等价原理，我们证明了在满足所述条件的设定下，全支付拍卖的递增对称均衡竞价函数就是 $\beta(x) = m(x) = \frac{N-1}{N} x^N$。

这揭示了一个深刻的联系：一种拍卖机制下的均衡竞价函数（全支付拍卖），可能等于另一种拍卖机制下的均衡期望支付函数（第一价格拍卖）。

2.3.反向拍卖的迈尔森引理

在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购产品的卖家。每位竞拍者i报出自己产品的成本c_i，买家收到所有竞拍者报告的成本向量后决定分配规则x和支付规则p，其中$x_i(c_i)$表示竞拍者i报告成本c_i时购买竞拍者i产品的概率，$p_i(c_i)$表示竞拍者i报告成本c_i且竞拍者i的产品被购买时给竞拍者i的支付。

假设竞拍者的产品没有被卖出时的效用为 0，因此竞拍者i报出任意的c_i'时的期望效用可以表达为

$$u_i(c_i') = x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i)$$

1. 根据 DSIC 的定义写出反向拍卖机制(x, p)满足 DSIC 时竞拍者效用应当满足的条件；
2. 根据课上给出的迈尔森引理，给出并证明反向拍卖机制是 DSIC 的充要条件（假设$c \to \infty$时，$c \cdot x_i(c) \to 0$且$p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$）。

Solution:

1. DSIC 定义

DSIC 是"占优策略激励相容"（Dominant Strategy Incentive Compatible）的缩写。其定义是：对于任何一个参与者，无论其他参与者采取什么策略，其最优策略都是"诚实汇报"，即报告其真实的类型。

在当前的反向拍卖场景中，参与者（卖家）的类型是他的真实成本c_i。"诚实汇报"意味着他报告的成本c_i'就等于他的真实成本c_i。

因此，一个反向拍卖机制(x, p)满足 DSIC，当且仅当对于任意一个卖家i，其真实成本为c_i，诚实汇报所带来的期望效用不低于谎报任意其他成本c_i'所带来的期望效用。

用数学公式表达，该条件是：对任意卖家i，任意真实成本c_i，以及任意可能的谎报成本c_i'，都必须满足以下不等式：

$$u_i(c_i) \geq u_i(c_i')$$

将效用函数的具体形式代入，得到 DSIC 的条件为：

$$x_i(c_i) \cdot (p_i(c_i) - c_i) \geq x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i)$$

这个不等式必须对所有的c_i和c_i'都成立。它构成了后续分析的基础。

2.常该引理用于正向拍卖（买家竞价），但我们可以将其思想应用到反向拍卖（卖家竞价）中。一个机制(x, p)是 DSIC 的充要条件如下：

一个反向拍卖机制(x, p)是 DSIC 的，当且仅当它同时满足以下两个条件：
1. 分配规则的单调性 (Monotonicity)：对于任意卖家i，其被选中的概率$x_i(c)$必须是其报告成本c的非增函数。也就是说，如果$c_1 < c_2$，则必须有$x_i(c_1) \geq x_i(c_2)$。
2. 支付规则 (Payment Rule)：对于任意卖家i，如果他被选中($x_i(c_i) > 0$)，支付给他的款项$p_i(c_i)$必须满足：

$$p_i(c_i) = v_i + \frac{1}{x_i(c_i)} \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

或者更通用地描述其期望支付$P_i(c_i) = x_i(c_i) p_i(c_i)$:

$$P_i(c_i) = c_i x_i(c_i) + \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

证明：我们将分别证明这两个条件的必要性（DSIC $\Rightarrow$条件）和充分性（条件$\Rightarrow$ DSIC）。

设卖家i的均衡期望效用为$U_i(c_i) = u_i(c_i) = x_i(c_i)(p_i(c_i) - c_i)$。

从第 1 问的 DSIC 条件出发，我们有两个不等式：

(a)真实成本为c_1的卖家谎报为c_2不会获益：$x_1(p_1 - c_1) \geq x_2(p_2 - c_1)$

(b)真实成本为c_2的卖家谎报为c_1不会获益：$x_2(p_2 - c_2) \geq x_1(p_1 - c_2)$

整理得到：

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 \geq c_1(x_1 - x_2), x_1 p_1 - x_2 p_2 \leq c_2(x_1 - x_2)$$

合并得到：

$$c_2(x_1 - x_2) \geq x_1 p_1 - x_2 p_2 \geq c_1(x_1 - x_2)$$

得到

$$(c_2 - c_1)(x_1 - x_2) \geq 0$$

如果我们取$c_2 > c_1$，那么$c_2 - c_1 > 0$，因此必须有$x_1 - x_2 \geq 0$，即$x_i(c_1) \geq x_i(c_2)$。这证明了$x_i(c)$必须是c的非增函数。

根据 DSIC，卖家会选择c'来最大化其效用$u_i(c' \mid c_i) = x_i(c')(p_i(c') - c_i)$。在均衡状态下，最优选择是$c' = c_i$。

根据包络定理，均衡效用 $U_i(c_i)$对其类型（真实成本c_i）的导数为：

$$\frac{dU_i(c_i)}{dc_i} = \frac{\partial u_i(c' \mid c_i)}{\partial c_i} \mid_{c'=c_i} = \frac{\partial [x_i(c')(p_i(c') - c_i)]}{\partial c_i} \mid_{c'=c_i} = -x_i(c_i)$$

我们对上式从c_i到∞进行积分得到：

$$\int_{c_i}^{\infty} \frac{dU_i(z)}{dz} dz = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

$$[U_i(z)]_{c_i}^{\infty} = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

$$\lim_{z\to\infty} U_i(z) - U_i(c_i) = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

根据题设的边界条件，当$c \to \infty$时，$c \cdot x_i(c) \to 0$且$p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$。这意味着 $\lim_{c\to\infty} U_i(c) = \lim_{c\to\infty}[x_i(c)p_i(c) - cx_i(c)] = 0$。因此我们得到：

$$-U_i(c_i) = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

$$U_i(c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

将$U_i(c_i)$的定义代回，即$x_i(c_i)(p_i(c_i) - c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$。整理后即得到期望支付规则：

$$x_i(c_i)p_i(c_i) = c_i x_i(c_i) + \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

下面证明充分性，现在我们假设单调性和支付规则都成立，需要证明卖家诚实汇报是最优策略。即证明对于任意c_i, c_i'，都有$U_i(c_i) \geq u_i(c_i' \mid c_i)$。根据支付规则，我们有

$$U_i(c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

而谎报的效用为

$$u_i(c_i' \mid c_i) = x_i(c_i')p_i(c_i') - c_i x_i(c_i')$$

将支付规则代入谎报的效用中：

$$u_i(c_i' \mid c_i) = \left(c_i' x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\infty} x_i(z)dz\right) - c_i x_i(c_i')$$

$$u_i(c_i' \mid c_i) = (c_i' - c_i)x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\int} x_i(z)dz$$

我们要证明的是$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$。

$$\begin{aligned} U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) &= \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz - \left((c_i' - c_i)x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\infty} x_i(z)dz\right) \\ &= \int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz - (c_i' - c_i)x_i(c_i') \end{aligned}$$

现在我们分情况讨论：

- 情况 1：$c_i' > c_i$。由于$x_i(z)$是非增函数（单调性条件），对于任意$z \in [c_i, c_i']$，都有$x_i(z) \geq x_i(c_i')$。因此，

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz \geq \int_{c_i}^{c_i'} dz = x_i(c_i')(c_i' - c_i)$$

所以$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$。

- 情况 2：在这种情况下，积分区间是反的：

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz = -\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz$$

由于$x_i(z)$非增，对于任意$z \in [c_i', c_i]$，都有$x_i(z) \leq x_i(c_i')$。因此，

$$\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz \leq \int_{c_i'}^{c_i} x_i(c_i')dz = x_i(c_i')(c_i - c_i')$$

两边乘以 -1，不等号反向：

$$-\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz \geq -x_i(c_i')(c_i - c_i') = x_i(c_i')(c_i' - c_i)$$

即

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz \geq (c_i' - c_i)x_i(c_i')$$

所以

$$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$$

两种情况都证明了不等式成立，因此充分性得证。 综上，我们已经证明了这两个条件是机制(x, p)为 DSIC 的充要条件。

■

2.4.虚拟估值和正则性条件

本题将推导出对于虚拟估值$c(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$和正则化条件的有趣描述。考虑$[0, v_{\max}]$上严格单调递增的分布函数$F$，其概率密度函数$f$为正，其中$v_{\max} < +\infty$。对于估值服从分布$F$的竞拍者，当交易成功概率为$q \in [0,1]$时，定义$V(q) = F^{-1}(1-q)$为物品的“价格”，进而可以定义$R(q) = q \cdot V(q)$为从竞拍者处获得的期望收益。称$R(q)$为$F$的收益曲线函数，注意$R(0) = R(1) = 0$。

1. 请解释为什么$V(q)$可以被视为物品的价格；
2. $[0,1]$上的均匀分布的收益曲线函数是什么？
3. 证明收益曲线在q点的斜率（即$R'(q)$）是$c(V(q))$，其中c是虚拟估值函数；
4. 证明当且仅当收益曲线是凹的时候，概率分布是正则的。

Solution:

1. $V(q)$以被视为为了实现特定的交易概率q所需要设定的“市场价格”。我们可以通过以下逻辑来理解：

假设拍卖师（或卖家）设定了一个“买断”价格（posted price）为p。一个理性的竞拍者，其真实估值为v，只有当他的估值不低于价格时（即 $v \geq p$），他才会选择购买。

那么，对于一个从分布F中随机抽取的竞拍者，他愿意以价格p购买该物品的概率是多少呢？这个概率等于他的估值大于或等于p的概率：

$$P(\text{购买}) = P(v \geq p) = 1 - P(v < p)$$

由于估值v是连续的，$P(v < p) = P(v \leq p) = F(p)$。因此：

$$P(\text{购买}) = 1 - F(p)$$

现在，我们将这个购买概率与题目中定义的“交易概率”q等同起来，即$q = P(\text{购买})$。于是我们有：

$$q = 1 - F(p)$$

我们可以从这个方程中反解出价格p是交易概率q的函数：

$$F(p) = 1 - q$$

$$p = F^{-1}(1 - q)$$

这正是题目中给出的函数$V(q)$的定义。因此，$V(q)$可以被解释为：若要使一个随机抽取的竞拍者愿意购买此物品的概率恰好为q，那么需要设定的价格就是$V(q)$。它建立了目标交易概率和所需价格之间的对应关系，所以可以被视为物品的一种“价格”。

2. 对于$[0, 1]$上的均匀分布，我们有：

- 分布函数: $F(v) = v$, for $v \in [0, 1]$
- 概率密度函数: $f(v) = 1$, for $v \in [0, 1]$
- 估值上界:$v_{\max} = 1$

根据定义，$V(q) = F^{-1}(1 - q)$。我们需要先求$F(v)$的反函数F^{-1}。设$y = F(v) = v$。显然，其反函数为$F^{-1}(y) = y$。将$y = 1 - q$代入，得到：

$$V(q) = F^{-1}(1 - q) = 1 - q$$

根据定义，$R(q) = q \cdot V(q)$。代入得到：

$$R(q) = q(1 - q) = q - q^2$$

3. 我们的目标是证明$R'(q) = c(V(q))$

式子$R(q) = q \cdot V(q)$。我们对q求导得到：

$$R'(q) = \frac{d}{dq}(q \cdot V(q)) = 1 \cdot V(q) + q \cdot V'(q)$$

其中$V'(q) = \frac{dV(q)}{dq}$。

我们有$V(q) = F^{-1}(1 - q)$。为了求其导数，我们利用反函数求导法则。令$v = V(q)$，则由定义可得$F(v) = 1 - q$。将上式两边对q求导：

$$\frac{d}{dq}F(v) = \frac{d}{dq}(1 - q)$$

$$\frac{dF(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dq} = -1$$

根据定义，$\frac{dF(v)}{dv} = f(v)$并且$\frac{dv}{dq} = V'(q)$。所以，

$$f(v) \cdot V'(q) = -1$$

$$V'(q) = -\frac{1}{f(v)} = -\frac{1}{f(V(q))}$$

将$V'(q)$代回$R'(q)$的表达式：

$$R'(q) = V(q) + q \cdot \left(-\frac{1}{f(V(q))}\right) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

虚拟估值函数的定义是$c(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$。将$v = V(q)$代入：

$$c(V(q)) = V(q) - \frac{1 - F(V(q))}{f(V(q))}$$

从$V(q)$的定义我们知道$F(V(q)) = 1 - q$，因此$q = 1 - F(V(q))$。将此关系代入$c(V(q))$的表达式中：

$$c(V(q)) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

通过比较第三步和第四步的结果，我们发现：

$$R'(q) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))} = c(V(q))$$

这就完成了证明。证毕！

4. 在第 3 问中，我们已经证明了$R'(q) = c(V(q))$。 我们再次求导，得到：

$$R''(q) = \frac{d}{dq}c(V(q))$$

即，

$$R''(q) = \frac{dc(V(q))}{dV} \cdot \frac{dV(q)}{dq} = c'(V(q)) \cdot V'(q)$$

现在我们分析$R''(q)$的符号：

(1) $c'(V(q))$的符号: 根据正则性的定义，分布F是正则的当且仅当$c'(v) > 0$对于所有v成立。因此，F是正则的$\Longleftrightarrow c'(V(q)) > 0$

(2)$V'(q)$的符号: 在第 3 问的证明中，我们已经推导出$V'(q) = -\frac{1}{f(V(q))}$。由于概率密度函数$f(v)$总是正的（$f(v) > 0$），所以$V'(q)$永远是负的，即$V'(q) < 0$。

将这两点结合起来分析$R''(q) = (\text{符号由正则性决定}) \cdot (\text{恒为负})$

($\Longrightarrow$)如果分布是正则的，则收益曲线是凹的：如果F是正则的，则$c'(V(q)) > 0$。那么

$$R''(q) = c'(V(q)) \cdot V'(q) = (>0) \cdot (<0) < 0$$

。因为二阶导数小于零，所以收益曲线$R(q)$是（严格）凹函数。

($\Longleftarrow$)如果收益曲线是凹的，则分布是正则的：如果$R(q)$是凹的，则$R'' \leq 0$。我们有

$$R''(q) = c'(V(q)) \cdot V'(q) < 0$$

由于我们知道$V'(q) < 0$，为了使整个表达式非正，必须有$c'(V(q)) \geq 0$。如果$R(q)$是严格凹的($R''(q) < 0$)，则必须有$c'(V(q)) > 0$。由于函数$V(q) = F^{-1}(1-q)$是一个从$[0,1]$到$[v_{\max}, 0]$的严格单调递减的连续映射，它覆盖了整个估值范围。因此，如果$c'(V(q)) > 0$对所有$q \in (0,1)$，就等价于$c'(v) > 0$对所有$q \in (0,1)$成立，就等价于$c'(v) > 0$对所有$v \in (0, v_{\max})$成立。

这就证明了分布F是正则的。

我们已经证明了$R''(q)$的符号与$-c'(V(q))$的符号相同。因此，$R(q)$是凹函数当且仅当$c(v)$是递增函数，即当且仅当分布F是正则的。证明完毕。

2.5.贝叶斯劝说：检察官与法官

考虑检察官劝说法官判决的例子：假设法官（信号接收者）对于一个被告人，必须做出以下两种决策之一：判决有罪（convict）或无罪释放（acquit）。

- 被告人有两种类型：有罪（guilty）或无罪（innocent）；
- 法官在公正判决下获得的效用为 1：如果有罪被判有罪，无罪被判无罪，否则效用为 0；
- 检察官（信号发送者）为法官提供有关被告的证据（发送信号），如果被告人判有罪，检察官获得效用 1，否则效用为 0；
- 法官和检察官对被告人的类型有相同的先验概率分布：$\mu_0(\text{guilty}) = 0.3, \mu_0(\text{innocent}) = 0.7$。

检察官进行调查收集有关被告人的证据，因此检察官的策略是选择一个提供证据的策略，希望改变法官 的判决，使得被判有罪的越多越好（检查官效用最大化）。形式化地说，提供证据就是一个$\pi(\cdot\ |\text{guilty})$和$\pi(\cdot \mid \text{innocent})$的信号机制，并且这一信号机制在博弈前是公开给法官的（或者说可验证的）。

1. 根据信息设计的显示原理，给出下面需要考虑的信号机制的形式；
2. 求检察官使用完全诚实的信号机制的情况下，检察官和法官的效用；
3. 求检察官最优信号机制下检察官的效用，以及最优信号机制下法官后验概率分布的分布；
4. 求检察官的最优信号机制。

2.6.信息的价值

设自然的状态集合为$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，买家的先验分布为$\mu_0(\omega_1) = 0.7, \mu_0(\omega_2) = 0.3$。设买家的行动集合为$A = \{a_1, a_2\}$，效用函数为

$$u(a_1, \omega_1) = 2, u(a_1, \omega_2) = 0$$

$$u(a_2, \omega_1) = 0, u(a_2, \omega_2) = 3$$

记$\mu_0(\omega_1) = \theta$，则$\mu_0(\omega_2) = 1 - \theta$。假设有一个数据卖家提供如下信号机制：$S = \{s_1, s_2\}$，且

$$\pi(s_1 \mid \omega_1) = 0.9, \pi(s_2 \mid \omega_1) = 0.1$$

$$\pi(s_1 \mid \omega_2) = 0.7, \pi(s_2 \mid \omega_2) = 0.3$$

求卖家信号机制对买家的价值。