Lecture 8：最优机制

一、虚拟福利最大值

1.基本模型

考虑单物品情况，即一个卖家有一个不可分割的物品待出售；

- 与此前单物品讨论一致，有n个潜在买家（竞拍者）$N = \{1, 2, ..., n\}$；
- 每个买家i对物品有一个心理价位t_i是不完全信息；
  - 其连续先验概率密度$f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^+$是共同知识，且$f_i(t_i) > 0$对所有$t_i \in [a_i, b_i]$成立；
  - 记T为所有参与人可能的估值组合，即

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

- 假定不同买家的估值分布是相互独立的（但不需要同分布）；
  - 故在T上估值的联合密度函数是$f(t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)$
  - 按照惯例记$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{j \in N, j \neq i} f_j(t_j)$
- 此外，为了讨论方便，卖家对物品的估值$t_0 = 0$是共同知识。

2.BIC 迈尔森引理

根据显示原理，只需要考虑激励相容的直接机制，即所有买家如实报告自己的估值的机制。在最优机制的讨论中，如实报告类型不一定是占优策略均衡，而是贝叶斯纳什均衡，等价条件与 DSIC 时不一定相同，故需要给出 BIC 版本的迈尔森引理。

为给出 BIC 迈尔森引理，需要一些准备工作。假定拍卖机制的分配规则和支付规则为(x, p)，考虑事中阶段，即参与人知道自己的估值，对他人估值是不完全信息的阶段。为了讨论 BIC 的条件，应首先写出效用函数。

由于考虑的是贝叶斯纳什均衡，因此应当考虑其他参与人都如实报告自己估值时，即$b_{-i} = t_{-i}$时，估值为t_i的竞拍者i报告t'_i的期望效用

$$U_i(t'_i) = \int_{T_{-i}} (t_i \cdot x_i(t'_i, t_{-i})) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

理解这一表达式：买家效用为他的估值t_i乘以物品分配概率$x_i(t'_i, t_{-i})$，减去支付$p_i(t'_i, t_{-i})$，然而买家不能确定其他买家真实估值，因此还需要根据先验分布对其他人的估值求期望。因此 BIC 的条件就是$U_i(t_i) \geq U_i(t'_i)$对所有$i \in N$和$t'_i \in [a_i, b_i]$成立。

然而这一U_i的表达式的确看起来非常不友好，因此尝试简化。定义

$$Q_i(t'_i) = \int_{T_{-i}} x_i(t'_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

则$Q_i(t'_i)$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t'_i时，他获得物品的概率。定义

$$M_i(t'_i) = \int_{T_{-i}} p_i(t'_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

则$M_i(t_i)$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t'_i时，他的期望支付。因此，$U_i(t'_i)$可以简化为

$$U_i(t'_i) = t_i Q_i(t'_i) - M_i(t'_i)$$

这就与 DSIC 情况下的$u_i(t_i') = t_i \cdot x_i(t_i') - p_i(t_i')$形式上一致了，只是获得物品的概率和支付都求了期望，并且假定了其他买家如实报价。

因此仿照 DSIC 迈尔森引理可以给出 BIC 版本的迈尔森引理，并且证明过程完全类似，因此不再赘述，除了需要注意积分下界因为显示机制要求报价集合$T_i = [a_i, b_i]$而变为了a_i：

BIC 迈尔森引理：一个拍卖机制是 BIC（即贝叶斯激励相容）的，当且仅当其分配规则和支付规则(x, p)满足：
- $Q_i(t_i)$是单调不减函数；
- 对任意的$i \in N$和$b \in [a_i, b_i]$，有

$$M_i(b) = M_i(a_i) + bQ_i(b) - \int_{a_i}^{b} Q_i(s)ds$$

3.合理的机制
由此得到了 BIC 的充要条件。然而现在还不能转入最大化卖家收益的讨论，因为仅满足 BIC 的机制是不够合理（feasible）的。合理的机制除了满足 BIC 外，还应当满足如下两个条件：
- 第一个条件是分配规范性，因为只有一个物品在分配，故对于所有$t \in T$，有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq 1$$

  并且$x_i(t) \geq 0$对所有$i \in N$和$t \in T$成立；
- 第二个条件是，对所有$i \in N$和$t_i \in [a_i, b_i]$，有$U_i(t_i) \geq 0$，即需要满足（事中阶段的）个人理性，否则竞拍者在得知自己的类型后会选择退出拍卖。

下面的定理给出了在 BIC 的基础上满足个人理性的充要条件：

定理：一个 BIC 的拍卖机制是 IR（个人理性）的，当且仅当对于每个$i \in N$都满足$M_i(a_i) \leq 0$

即要求当竞拍者估值为最低值时的期望支付小于等于 0。

证明: 根据 BIC 的条件，不难写出

$$U_i(t_i) = t_i Q_i(t_i) - M_i(t_i) = \int_{a_i}^{t_i} Q_i(s)ds - M_i(a_i)$$

个人理性要求对任意的$t_i \in [a_i, b_i]$，都有$U_i(t_i) \geq 0$，因为等式右侧当$t_i = a_i$时取最小值$-M_i(a_i)$，故个人理性成立当且仅当$M_i(a_i) \leq 0$。

总结：给出了合理机制的三个条件，即 BIC、分配规范性和 IR，以及 BIC 和 IR 的等价条件。基于上述讨论可以开始考虑如何设计最优机制。

4.转化为虚拟福利最大化问题
首先当所有买家如实报告自己的类型时，投标结果为$t = (t_1, ..., t_n)$，卖家期望收入是（注意卖家对物品估值为 0，故只有卖出才能产生收益）

$$U_0 = \int_T \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \right) f(t)dt$$

下面这一引理给出了最大化卖家收入U_0的合理的最优机制的一个简洁明了的条件：

引理：假设分配规则x最大化

$$\int_T \left(\sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) x_i(t) \right) f(t)dt$$

支付规则p使得$M_i(a_i)=0$对所有$i\in N$成立，且(x,p)满足 BIC、分配规范性和 IR，则(x,p)是合理的最优机制。

引理的具体证明因为技术性较强不展开描述，下面描述大致步骤：

1. 根据 BIC 迈尔森引理和展开U_0的表达式，然后利用积分变换技巧得到

$$U_0=\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}\right)x_i(t)\right)f(t)dt+\sum_{i=1}^{n}M_i(a_i)$$

2. 从而目标转化为在满足 BIC、分配规范性和 IR 的情况下最大化上式。其加号前的部分只与分配规则x有关，加号后的部分展开后只与支付规则p有关，因此可以分别考虑这两个部分：
   - 对于加号前的部分，目标就是找到分配机制x使其最大化；
   - 对于加号后的部分，根据个人理性等价条件有$M_i(a_i)\leq 0$，因此要最大化U_0就要选择支付规则p使得$M_i(a_i)=0$对所有$i\in N$成立。

由此，这一引理的结论得证。

有了这一引理，接下来的任务就是找到一个分配机制x使得

$$\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}\right)x_i(t)\right)f(t)dt$$

最大化，而支付规则在x确定后直接根据迈尔森引理以及$M_i(a_i)=0$的条件确定即可。

令

$$c_i(t_i)=t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}$$

称其为竞拍者i的虚拟估值（virtual valuation），则目标就是找到一个分配机制x使得

$$\int_T\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)\right)f(t)dt$$

最大化。

如果对任意的t，都能找到一个x使得

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$$

最大化，自然也能满足最大化要求。

- 因此，目标进一步转化为找到一个分配机制x使得对任意的t，都能找到一个x使得$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$最大化；
- 如果$c_i(t_i)$是竞拍者i的真实估值，那么最大化$\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i)x_i(t)$就是最

大化竞拍者福利，然而$c_i(t_i)$并不是真实估值，只是虚拟估值，因此这一问题称为虚拟福利最大化问题。

5.整体研究思路总结

总而言之，经过一系列的积分变换和问题转化，最大化卖家收益的问题被转化为了虚拟福利最大化问题。下面可以总结研究这一问题的完整思路：

(1)利用显示原理将机制设计空间限制在直接显示机制，因此只需要设计竞拍者如实报告估值的机制，因此卖家收益最大化问题可以写为如下数学规划问题：

$\max_{x,p}$

$$U_0 = \int_T \sum_{i=1}^{n} p_{i(t)} f(t) dt$$

s.t.

$$(x, p)$$

满足 BIC,

$$(x, p)$$

满足个人理性,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \leq 1.$$

(2)利用 BIC 迈尔森引理将 BIC 转化为两个等价条件，其一是期望分配概率Q_i的单调性，其二是期望支付M_i可由Q_i和$M_i(a_i)$唯一表达；

(3)将个人理性条件转化为等价条件$M_i(a_i) \leq 0$;

(4)将目标函数利用积分变换等将目标问题转化为虚拟福利最大化问题。

第 2 - 4 步实际上就是将数学规划的约束和目标函数变得更加清晰，从而可以在下一节中给出显示的最大化解。

二、最优机制

1.虚拟福利最大化的解

下面的任务是决定最优的分配机制x使得虚拟福利最大化。事实上不难看出如何做到这一点：

- 因为最大化目标函数是$\sum_{i=1}^{n} c_i(t_i) x_i(t)$，且要求$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq 1$，故而实际上要最大化的就是$c_i(t_i)$的一个加权平均，其中权重和不大于 1;
- 显然只需要给$c_i(t_i)$最大的一项或多项赋予和为 1 的权重即可，并且这一最大值必须要大于等于 0，否则不如全部权重都为 0 的情况。即只允许同时满足
  - 最大化$c_i(t_i) = t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)}$
  - $c_i(t_i) \geq 0$

两个条件的参与人i有获得物品的概率，并且如果有这样的参与人，他们获得物品的概率和为 1。换一种说法，即

$$p_i(t) > 0 \Rightarrow c_i(t_i) = \max_{j \in N} c_j(t_j) \geq 0$$

2.正则化条件

然而时刻要记住，我们设计的机制必须是合理的，即满足 BIC、分配规范性和 IR;

- 显然上述解已经满足了分配规范性，IR 与分配机制的选择无关，因此只需要考虑 BIC;
  - 根据 BIC 迈尔森引理，其中第二条与支付机制的选择有关，因此只需要检验第一条$Q_i(t_i)$单调不减是否满足；
  - 这一条件并非一定成立，例如当c_i为递减函数时，反而最低的估值会获得物品；
- 因此引入一个充分条件（称为正则化条件）来保证这一要求的成立：称这一问题符合正则化条件，如果对于任意的$i \in N$，都有$c_i(t_i)$关于t_i是单调递增的；
  - 这显然是Q_i关于t_i单调递增的充分条件，因为如果$c_i(t_i)$关于t_i单调递增，那么根据之前x_i的选择，当参与人i提高报价时，他得到物品的概率不会降低，从而Q_i关于t_i单调递增也成立；
  - 因此当满足正则化条件时，上面给出的解的确是合理的最优机制。

3.正则化条件下的解

对于大部分熟知的分布，正则化条件都是满足的；

- 例如 $[0,1]$ 上的均匀分布，对应的$c_i(t_i)=2t_i-1$是单调递增的；
- 当然从理论层面上讲，仍需考虑正则化条件不满足的情况（例如分布是双峰分布），这一情况的解略为复杂，因此不在此展开（但很经典）。

现在继续考虑正则化条件满足的情况，已有正则化条件下的最优机制的分配规则x，接下来需要确定支付规则p。不难理解分配规则仍然是一个阶梯函数，令

$$z_i(t_{-i})=\inf\{s_i \mid c_i(s_i)\geq 0\text{且}c_i(s_i)\geq c_j(t_j),\forall j\neq i\}$$

即$z_i(t_{-i})$是使得参与人i刚好能有机会获得物品的最低报价，也就是阶 梯函数的间断点。那么根据支付公式

$$p_i(b,t_{-i})=b\cdot x_i(b,t_{-i})-\int_{a_i}^{b_i}x_i(s,t_{-i})ds$$

可以解出分配规则对应的支付规则p为（回忆阶梯函数的直观）

$$p_i(t)=\begin{cases}z_i(t_{-i})x_i(t)\\ c_i(z_i(t_{-i}))\geq t_0\text{且}c_i(z_i(t_{-i}))\geq c_j(t_j)\forall j\neq i\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

更简单的，如果只有一个满足$c_i(z_i(t_{-i}))\geq t_0$和$c_i(z_i(t_{-i}))\geq c_j(t_j),\forall j\neq i$的$i$，则$x_i(t)=1$且

$$p_i(t)=\begin{cases}z_i(t_{-i}),x_i(t)=1\\ 0,\ x_i(t)=0\end{cases}$$

4.买家估值独立同分布情形

考虑一种最简单的情况来具象化前面给出的结论。考虑一个所有买家估值独立同分布的情形（即对称模型），并且符合正则化条件，不难得到

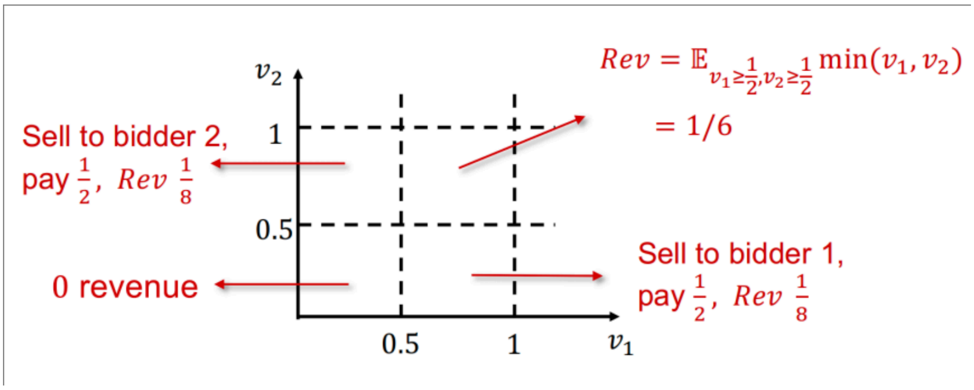
$$z_{-i}=\max\left\{c^{-1}(t_0),\max_{j\neq i}t_j\right\}$$

- 结合前面得到的(x,p)，此时的最优机制其实就是一个含保留价格的二价拍卖机制，其中保留价格为$c^{-1}(t_0)$
- 因为此时所有买家估值同分布，因此虚拟估值函数也相同，故具有最高估值（最高报价）的赢得物品，并且支付第二高报价和保留价格之间的较高者，并且如果最高报价低于保留价格，则不分配物品。

更具体而言，当所有买家估值独立且服从$[0,1]$上的均匀分布时，虚拟估值函数为$c_i(t_i)=2t_i-1$，因此保留价格为$\frac{1}{2}$，此时的最优机制就是保留价格为 $\frac{1}{2}$ 的第二价格拍卖。

5.最大的利润

当所有买家估值独立且服从$[0,1]$上的均匀分布时，求最优机制下卖家的收益。



问题：为什么最优机制能打破收入等价原理的限制，获得更高的收益？

尽管最优机制可以使得买家获得最大的期望效用，但是这一机制存在一些天然的缺陷：

1. 卖家很难准确估计每一个买家的估值分布，因此这一机制很难完美实现，特别是应用于数据拍卖场景时，数据买家的估值不确定性更大，因此之后会讨论在无先验分布下的机制设计；
2. 非对称模型（即买家的估值不同分布）下，报价最高的买家可能并不是最有可能获得物品的买家。这一点非常显然，因为不同的分布下c的形态会有所不同；
   - 若$f_i(t_i) = \frac{1}{b_i - a_i}$，即买家的估值均匀分布，不难计算得到$c_i(t_i) = 2t_i - b_i$，这关于$t_i$是单调递增的，因此符合正则化条件；
   - 但是此时的最优机制是选出$2t_i - b_i$最大的i，如果$b_i < b_j$，那么可能存在$t_i < t_j$但是$2t_i - b_i > 2t_j - b_j$的情况，即报价更低的买家可能获得物品；
3. 最优机制不是事后有效率的，例如我们考虑对称模型下，卖家估值等于 0 且买家估值都大 0 的情况，此时显然物品要售出才是福利最大化（也是帕累托最优或事后有效率）的，但是如果所有买家的报价都

低于$c_i^{-1}(0)$，那么物品就不会被售出，这显然不是事后有效率的。

三、拍卖与数据定价