Lecture 4:非合作博弈论基础（二）

一、混合策略纳什均衡

1.混合策略的引入

纳什均衡是求解博弈的强大工具。然而很可惜的是，仍然存在相当一部分博弈无法找到纳什均衡，甚至是非常常见的博弈，例如石头剪刀布博弈:

	石头	剪刀	布
石头	0,0	1,-1	−1,1
剪刀	−1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	−1,1	0,0

不难验证这个博弈没有纳什均衡——这也符合预期，毕竟石头剪刀布的游戏从来没有一个稳定的策略；

- 考虑简单的情况，例如一个参与人永远出石头，那么另一个人只要观察到这一点，就可以永远出布，这样的情况显然无法构成均衡；
- 所以可以猜想，稳定的策略必定带有随机性，各个参与人要让自己的行为不可捉摸，这就引入了混合策略（mixed strategy）的概念。

2.混合策略

定义：令$G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$为一个策略型博弈。一个混合策略(mixed strategy)是S_i上的概率分布，参与人i的混合策略集记为

$$\sum_i=\left\{\sigma_i:S_i\to[0,1]:\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)=1\right\}$$

其中$\sigma_i(s_i)$表示参与人i在该混合策略下选择策略s_i的概率。

- 因此混合策略就是给每个S_i中的策略（称之为纯策略（pure strategy））一个概率，然后按照这个概率随机选择策略。
- 例如在石头剪刀布博弈中，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$就是一种混合策略，表示每个纯策略（出石头、剪刀和布）被选择的概率都是$\frac{1}{3}$。
- 纯策略是混合策略特例：只有一个策略概率为 1，其余为 0。
- 还有一个记号：对每个参与人i，令$\Delta(S_i)$为S_i上的概率分布集合，即

$$\Delta(S_i)=\left\{p:S_i\to[0,1]:\sum_{s_i\in S_i}p(s_i)=1\right\}$$

  则显然有$\sum_i=\Delta(S_i)$；
- 当S_i是连续策略空间时，求和需要替换为积分，当然本课程不讨论连续策略空间下的混合策略；
- 有混合策略后，博弈中参与人的效用函数也需要做相应的调整，需要适应有混合策略的情况。

3.博弈的混合扩展

定义：令$G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$为一个策略型博弈。$G$的混合扩展（mixed extension）是一个博弈

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$$

其中$\Sigma_i = \Delta(S_i)$是参与人i的混合策略集，他的收益函数$U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$将每个混合策略向量$\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$映射到一个实数

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) u_i(s_1, ..., s_n)$$

- 这里使用了冯诺伊曼-摩根斯坦恩效用函数：每个纯策略$(s_1, ..., s_n)$出现的概率为$\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)$，因此效用的本质是参与人$i$在混合策略向量$\sigma$下的期望收益；
- 这里还蕴含一个假定：每个参与人的行动相互独立。

4.混合策略纳什均衡

类似于纯策略纳什均衡，可以给出混合策略纳什均衡的定义：

定义：给定一个博弈的混合扩展$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$，一个混合策略向量$\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$是一个混合策略纳什均衡，若对每个参与人$i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

例如，两个参与人都选择混合策略$\sigma_1^* = \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$时，$(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$构成混合策略纳什均衡；

- 可以尝试根据定义验证这一结果；
- 然而一旦开始验证就会发现上述定义不适合于验证这一结果：因为需要对任意的混合策略σ_i都进行验证，展开后的表达式非常复杂。

因此引入一个更为方便的等价条件方便判断：

混合策略纳什均衡等价条件：令$G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$为一个策略型博弈，$\Gamma$为$G$的混合扩展。一个混合策略向量$\sigma^*$是$\Gamma$的混合策略纳什均衡，当且仅当对于每个参与人$i$和每一个纯策略$s_i \in S_i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

证明: 正向推导只需要注意到纯策略也是特殊的混合策略即可。反过来，对于参与人i的每个混合策略σ_i，

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) = U_i(\sigma^*)$$

5.混合策略纳什均衡计算：最优反应

考虑如下性别大战：一对夫妻要安排他们周末的活动，可选择的活动有看足球赛（F）和听音乐会（C）。丈夫更喜欢看足球赛，而妻子更喜欢听音乐会。如果他们选择的活动不同，那么他们都不会高兴，如果他们选择的活动相同，那么他们都会高兴，只是高兴程度略有不同：

妻子

丈夫		F	C
	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

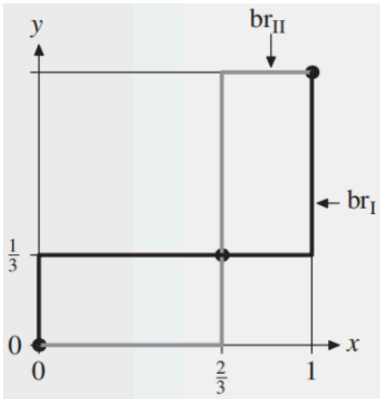
显然 (F,F) 和 (C,C) 是纯策略纳什均衡，但是否存在非纯策略纳什均衡的混合策略纳什均衡呢？

首先展示如何使用最优反应法计算混合策略纳什均衡。记丈夫的混合策略为$(x,1-x)$（表示以x的概率选择F，$1-x$的概率选择C），妻子的混合策略为$(y,1-y)$。对于丈夫的每个混合策略$(x,1-x)$，妻子的最优反应集合为

$$\begin{aligned}\mathrm{br}_2(x) &= \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x,y) \\ &= \{y\in[0,1]: u_2(x,y)\geq u_2(x,z), \forall z\in[0,1]\}\end{aligned}$$

而$u_2(x,y)=xy\cdot 1+(1-x)(1-y)\cdot 2=2-2x-2y+3xy$，将$x$视为定 值，对$y$求导得到$3x-2$，因此可以得到最优反应集合为（丈夫同理）：

$$\mathrm{br}_2(x)=\begin{cases}\{0\} & x\in[0,\frac{2}{3}) \\ [0,1] & x\in\{\frac{2}{3}\} \\ \{1\} & x\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}, \mathrm{br}_1(y)=\begin{cases}\{0\} & y\in[0,\frac{1}{3}) \\ [0,1] & y\in\{\frac{1}{3}\} \\ \{1\} & y\in(\frac{1}{3},1]\end{cases}$$



三个交点：$(x^*,y^*)=(0,0),(x^*,y^*)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(x^*,y^*)=(1,1)$，第 1 个 和第 3 个是纯策略纳什均衡，第 2 个是混合策略纳什均衡。

- 求混合策略纳什均衡下双方的对应的收益，你能从中得到什么启示？
- 从上面的图形能看出混合策略纳什均衡具有什么特点？

6.无差异原则

从上述例子中可以看出，混合策略纳什均衡下双方选择策略F和C的效用是相等的，这一结论可以一般化：

无差异原则：令σ^*为一个混合策略纳什均衡，s_i和s_i'为参与人i的两个纯策略，若$\sigma_i(s_i),\sigma_i^*(s_i')>0$，则$U_i(s_i,\sigma_{-i}^*)=U_i(s_i',\sigma_{-i}^*)$。

定理成立的原因很简单：如果$U_i(s_i,\sigma_{-i}^*)>U_i(s_i',\sigma_{-i}^*)$，那么参与人$i$应该增加$s_i$的概率，这样可以提高自己的收益。

- 被赋予正概率的集合称为混合策略的支撑集合；
- 问题：被严格占优的策略有可能属于混合策略的支撑集合吗；
- 问题：为什么混合策略支撑集的策略无差异，不能只选择其中一个行动或任意选取概率分布？

7.混合策略纳什均衡计算：无差异原则

接下来使用无差异原则计算性别大战的混合策略纳什均衡。使用无差异原 则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略 纳什均衡显然是(F,F)和(C,C)。

考虑丈夫的混合策略$\sigma_1=(x,1-x)$和妻子的混合策略$\sigma_2=(y,1-y)$，且 $0<x<1,0<y<1$（称为完全混合的均衡）。根据无差异原则必有丈夫选择F和C的效用相等：

$$U_1(F,\sigma_2)=2y=1-y=U_1(C,\sigma_2)$$

解得$y=\frac{1}{3}$，同理可以解得$x=\frac{2}{3}$。因此用无差异原则可以更简便地得到 混合策略纳什均衡。

注意，无差异原则只是取得混合策略纳什均衡的必要条件，并非充分条件，因此求出结果后需要验证。然而本例无需检验，因为本例只有两个策略，两个策略的效用都一致，不存在其他策略得到更高的效用。

8.混合策略纳什均衡的存在性与计算复杂性

尽管并非所有博弈都有纳什均衡，但是下面的纳什定理告诉我们，每个有限的策略型博弈都有至少一个混合策略纳什均衡：

纳什定理：每一个策略型博弈G，如果参与人的个数有限，每个参与人的纯策略数目有限，那么G至少有一个混合策略纳什均衡。

关于混合策略纳什均衡的计算，根据定义可以转化为线性可行性问题，有指数时间的求解方式（实验要求实现），自然的问题是，是否存在多项式时间的通用解法？答案是，不知道是否存在：

定理：双人博弈纳什均衡的计算是 PPAD 完全问题。

二、完全信息动态博弈

1.基本概念

整体博弈被表达为了一棵树，这一类博弈被称为扩展式博弈(extensive-form game)，其中

- 根节点表示博弈的开始，每个叶节点都标志博弈的一个结束点；
- 每个非叶节点上都需要标注这一步的行动者；
- 每个叶节点上需要标注博弈在这一终点下的参与人效用。

扩展式博弈每个参与人的策略是一个向量，表示其在所有可能行动的节点 上的行动。例如蜈蚣博弈中参与人 1 的策略可能是 $(C,C,S,C,...,S,C)$； 即使选定某一策略后博弈停止，也要将此后所有节点的策略都定义好。

一个扩展式博弈的子博弈（subgame）由一个节点x和所有该节点的后继 节点组成；实际上就是x为根的子树，记为$\Gamma(x)$。

2.完美信息博弈

如果每个参与人在选择行动时，都知道他位于博弈树的哪个节点上，那么这个博弈就是完美信息博弈（game with perfect information），例如蜈蚣博弈，国际象棋等；

但很多博弈不符合这一条件，例如德州扑克或者斗地主等扑克牌游戏，你不知道其他玩家的手牌。

3.子博弈完美均衡

下面介绍完全信息动态博弈的均衡概念，需要扩展普通的纳什均衡概念。

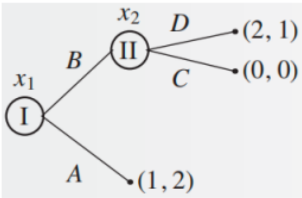
定义：在扩展式博弈Γ中，一个策略向量σ^*是子博弈完美均衡（subgame perfect equilibrium），如果对于博弈的任意子博弈$\Gamma(x)$，局限在那个子博弈的策略向量σ^*是$\Gamma(x)$的纳什均衡：对每个参与人i，每个策略σ_i和子博弈$\Gamma(x)$，

$$u_i(\sigma^* \mid x) \geq u_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i} \mid x)$$

这一定义是很直观的，因为如果某个子博弈$\Gamma(x)$上参与人存在有利可图的偏离，那么全局来看这也是一个有利可图的偏离。

当一个博弈存在不止一个均衡时，我们希望基于合理的选择标准选择一些均衡，而剔除另一些均衡，这样的一个选择叫做均衡精炼（equilibrium refinements）。子博弈完美均衡是否是纳什均衡的精炼？换言之，是否存在不是子博弈完美均衡的纳什均衡？

4.子博弈完美均衡的例子



		Player II C	Player II D
Player I	A	1, 2	1, 2
Player I	B	0, 0	2, 1

1. 这一博弈有两个纯策略纳什均衡：(A, C)和(B, D)，参与人 I 更偏好(B, D)，参与人 II 更偏好(A, C)；
2. (A, C)不是子博弈完美均衡，因为在x_2处参与人 II 存在有利可图的偏离：选择D而不是C（因此子博弈完美均衡的确是纳什均衡的精炼）；
3. 在 (A, C)下，I 不会偏离均衡，是因为 II 威胁 I：如果你选择B，我就选择C，然而这个威胁显然是不可置信的，因为如果 I 选择B，那么 II 还是选择D更有利。

5.子博弈完美均衡的充分条件

例子中(A, C)能作为均衡，或者说c这一被d占优的策略可以成为均衡，是因为(A, C)到不了真正要选择C, D 的x_2点。

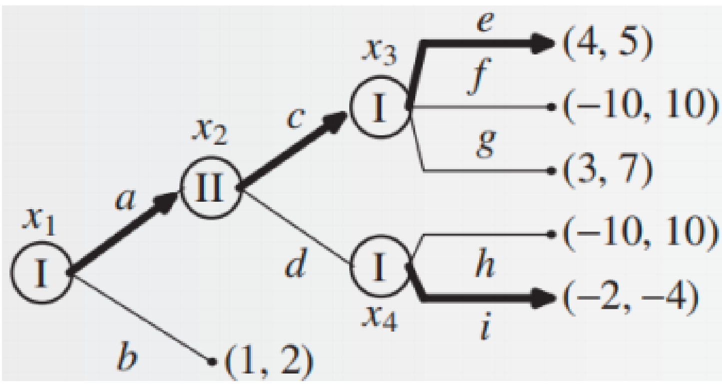
用$P_\sigma(x)$表示当实施策略向量σ时，博弈展开将造访节点x的概率。有如下定理：

定理：令σ^*是扩展式博弈Γ的纳什均衡，如果对所有x都有$P_{\sigma^*} > 0$，那么σ^*是子博弈完美均衡。

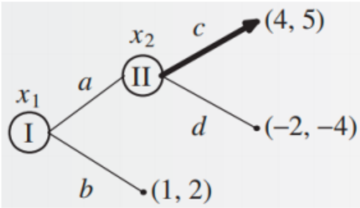
- 定理是显然的，因为如果σ^*不是子博弈完美均衡，那么在某个子博弈$\Gamma(x)$上存在有利可图的偏离，并且这个偏离产生的概率不为 0，因此也可以带来全局的有利可图的偏离；
- 推论：完全混合的纳什均衡是子博弈完美均衡。

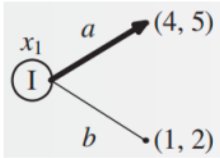
6.逆向归纳法

如何找到完美信息博弈的子博弈完美均衡？直观：要求每个子博弈都是均衡，可以从最小的子博弈出发求解：



从最小的子博弈出发，即$\Gamma(x_3)$和$\Gamma(x_4)$，选择图中加粗的策略（子博弈 的均衡），然后将均衡结果替代子博弈，逐步向上推导到根节点即可（因 此子博弈完美均衡是(ae, c)）





这一方法称为逆向归纳法（backward induction），该方法的应用保证了 每一个子博弈都使用了均衡策略，并且每一步都能做出选择，由此可得：

三、不完全信息博弈