Lecture 10 整合复习：贝叶斯劝说 (信息设计)

贝叶斯劝说，也称为信息设计 (Information Design)，是博弈论的一个前沿分支。它研究的是一个有信息优势的“发送者”如何通过策略性地设计和披露信息（发送“信号”），来影响一个理性“接收者”的信念，从而引导接收者采取对发送者最有利的行动。

第一部分：核心概念与模型框架

1. 贝叶斯劝说模型的核心要素

- **参与者**:
  - **信号发送者 (Sender)**: 拥有私人信息，并设计信息披露的规则。例如：导师、检察官、专家、新闻媒体。
  - **信号接收者 (Receiver)**: 根据接收到的信息做出决策。例如：企业、法官、消费者、公众。
- **状态 (State)**: 世界的真实情况，记为 $\omega \in \Omega$。接收者不知道真实状态，但有一个**先验信念 (Prior Belief)** μ_0 关于状态的概率分布。发送者知道真实状态 ω。
  - **例**: 学生的真实能力是“优秀”(ω_e)还是“一般”(ω_a)；被告是“有罪”(ω_G)还是“无罪”(ω_I)。
- **信号机制/信息结构 (Signal Mechanism / Information Structure)**: 这是由发送者设计的核心部分，记为 (S, π)。
  - S: **信号集 (Signal Set)**，即所有可能发送的信号的集合。例如：推荐信可以是“好”或“坏”；证据可以是“有罪证据”或“无罪证据”。
  - $\pi(s|\omega)$: **信号策略**，是一个条件概率分布，表示在真实状态为 ω 时，发送者发送信号 s 的概率。
- **行动 (Action)**: 接收者在收到信号后采取的决策，记为 $a \in A$。例如：企业“雇用”或“不雇用”；法官“判有罪”或“无罪”。
- **支付函数 (Payoff Function)**:
  - $u(a, \omega)$: 接收者在状态 ω 下采取行动 a 获得的效用。
  - $v(a, \omega)$: 发送者在状态 ω 下，接收者采取行动 a 后获得的效用。

2. 博弈的行动顺序

贝叶斯劝说是一个动态博弈，其顺序至关重要：

1. **承诺阶段**: 发送者**设计并公开承诺**一个信号机制 (S, π)。这个承诺是可信的，接收者知道这个规则。
2. **自然选择**: 自然根据先验分布 μ_0 选择一个真实状态 ω。发送者观察到 ω。
3. **信号发送**: 发送者根据已承诺的规则 $\pi(\cdot|\omega)$ 发送一个信号 s 给接收者。
4. **信念更新**: 接收者观察到信号 s 后，使用**贝叶斯法则**将自己的先验信念 μ_0 更新为**后验信念 (Posterior Belief)** μ_s。
5. **接收者行动**: 接收者选择一个行动 a^* 来最大化自己在后验信念 μ_s 下的期望效用。
6. **支付实现**: 双方根据行动 a^* 和真实状态 ω 获得各自的支付。

第二部分：核心计算与分析方法

1. 信念更新：贝叶斯法则 (计算题基础)

这是接收者进行理性决策的基础。当接收者收到信号 s 后，他认为真实状态是 ω 的后验概率为：

$$\mu_s(\omega) = P(\omega|s) = \frac{P(s|\omega)P(\omega)}{P(s)} = \frac{\pi(s|\omega)\mu_0(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \pi(s|\omega')\mu_0(\omega')}$$

- **分子**: 在状态 ω 为真时，观察到信号 s 的联合概率。
- **分母**: 信号 s 出现的边缘概率 (通过对所有可能状态求和得到)。

2. 接收者的最优行动

在后验信念 μ_s 下，理性的接收者会选择行动 a_s^* 来最大化其期望效用：

$$a_s^* = \arg\max_{a \in A} E_{\mu_s}[u(a, \omega)] = \arg\max_{a \in A} \sum_{\omega \in \Omega} u(a, \omega)\mu_s(\omega)$$

- **重要性质**: 如果接收者在多个行动之间无差异，我们通常假设他会选择**对发送者最有利**的那个行动。

3. 发送者的期望效用

发送者的目标是设计一个信号机制 (S, π) 来最大化自己的**事前期望效用 (Ex-ante Expected Utility)**。其期望效用等于所有可能信号带来的效用，按信号出现的概率进行加权平均。

$$E[v] = \sum_{s \in S} P(s) \cdot v(a_s^*, \mu_s)$$

其中 $v(a_s^*, \mu_s) = E_{\mu_s}[v(a_s^*, \omega)]$ 是在后验 μ_s 下，发送者的期望效用。

第三部分：从信号机制到信念分布的转化

直接优化信号机制 (S, π) 非常复杂，因为信号集 S 的选择是无限的。因此，我们需要一个强大的简化工具。

1. 贝叶斯可行性 (Bayesian Plausibility)

- **概念**: 一个关于**后验信念的分布** $\tau \in \Delta(\Delta(\Omega))$ 是贝叶斯可行的，如果它可以通过某个信号机制从先验信念 μ_0 中产生。
- **核心结论/条件**: 一个后验信念的分布 τ 是贝叶斯可行的，**当且仅当**后验信念的期望等于先验信念。这个性质也被称为**信念鞅性 (Beliefs as a Martingale)**。

$$E_\tau[\mu] = \sum_{\mu \in \mathrm{Supp}(\tau)} \tau(\mu) \cdot \mu = \mu_0$$

- **意义**: 这个结论将"设计一个复杂的信号机制"问题，转化为了"设计一个满足期望约束的后验信念分布"问题，大大简化了分析。

2. 显示原理 (Revelation Principle) 在贝叶斯劝说中的应用

- **核心结论**: 要想实现某个效用水平，我们只需要考虑那些**信号直接推荐一个行动**的**直接机制 (Direct Mechanism)** 即可。即信号集 S 和行动集 A 相同， $S \subseteq A$。
- **意义**: 这意味着我们最多只需要设计和接收者行动数量一样多的信号就足够了，进一步缩小了需要考虑的信号机制范围。

第四部分：最优劝说的求解：凹化方法 (几何解法)

结合贝叶斯可行性和显示原理，我们可以用一种直观的几何方法来求解最优劝说问题。

1. 构造发送者的间接效用函数 $\hat{v}(\mu)$

- **定义**: 首先，定义一个函数 $\hat{v}(\mu)$，它表示当接收者的后验信念为 μ 时，发送者能获得的**最大期望效用**。

  $$\hat{v}(\mu) = v(a_\mu^*, \mu) = E_\mu[v(a_\mu^*, \omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} v(a_\mu^*, \omega)\mu(\omega)$$

  其中 a_μ^* 是接收者在信念为 μ 时的最优行动。

2. 求解最优期望效用：凹包络 (Concave Envelope)

- **核心定理**: 发送者能获得的最大期望效用，等于其间接效用函数 $\hat{v}(\mu)$ 的**凹包络 (Concave Envelope)** 在先验信念 μ_0 处的值。这个凹包络记为 $V(\mu)$ 或 $\text{co}(\hat{v})(\mu)$。
- **凹包络的定义**: $V(\mu)$ 是所有大于等于 $\hat{v}(\mu)$ 的凹函数中最小的那个。从几何上看，就是用一根"橡皮筋"从上方把函数 $\hat{v}(\mu)$ 的图像"绷紧"所形成的曲线。

3. 求解步骤 (通用解法)

1. **确定状态空间 Ω、行动空间 A 和支付函数 u, v**。
2. **确定接收者的决策规则**: 分析在什么样的后验信念 μ 下，接收者会选择哪个行动 a。这通常会把信念空间（一个单纯形）分割成几个区域，每个区域对应一个最优行动。
3. **画出发送者的间接效用函数 $\hat{v}(\mu)$**: 根据第2步的决策区域，画出 $\hat{v}(\mu)$ 的图像。这个图像通常是一个分段函数，可能不连续或不凹。
4. **画出凹包络 $V(\mu)$**: 对 $\hat{v}(\mu)$ 的图像进行"凹化"，即找到其最小的凹包络。
5. **计算最优效用**: 在图中找到先验信念 μ_0 对应的位置，其在凹包络 $V(\mu)$ 上的函数值 $V(\mu_0)$ 就是发送者能获得的最大期望效用。

4. 判断劝说是否有效

- **结论**: 只有当 $V(\mu_0) > \hat{v}(\mu_0)$ 时，发送者通过设计信息结构才能严格地提升自己的效用。如果 $V(\mu_0) = \hat{v}(\mu_0)$（即 μ_0 位于 $\hat{v}$ 的凹区域），那么发送者最好的策略就是**不披露任何信息**，让接收者基于先验信念决策。

5. 构造最优信号机制 (通解)

1. **找到支撑点**: 在凹包络 $V(\mu)$ 上，找到能通过凸组合（线性组合）表示点 $(\mu_0, V(\mu_0))$ 的那些支撑点 $(\mu_1, V(\mu_1)), (\mu_2, V(\mu_2)), \ldots$。这些点就是最优信号机制会产生的**后验信念**。
2. **计算后验概率**: 根据贝叶斯可行性条件 $E_\tau[\mu] = \mu_0$，解一个线性方程组，求出每个后验信念 μ_i 出现的概率 $\tau(\mu_i)$。

   $$\tau(\mu_1) \cdot \mu_1 + \tau(\mu_2) \cdot \mu_2 + \ldots = \mu_0$$

   以及 $\sum \tau(\mu_i) = 1$。
3. **构造信号策略 $\pi(s|\omega)$**: 对于每个产生的后验信念 μ_s，其对应的信号策略可以通过以下公式反解出来：

   $$\pi(s|\omega) = \frac{\tau(\mu_s)\mu_s(\omega)}{\mu_0(\omega)}$$

6. 信息的价值

- **对接收者的价值**: 信号机制给接收者带来的期望效用提升。
    - **计算**: (有信息时的期望效用) - (无信息时的期望效用)。
    - **重要结论**: 接收者的期望效用**永远不会因为获取更多信息而降低**。即信息的价值对接收者总是非负的。
- **对发送者的价值**: 信号机制给发送者带来的期望效用提升。
    - **计算**: $V(\mu_0) - \hat{v}(\mu_0)$。