Lecture 7 & 8 整合复习：拍卖与机制设计

第一部分：拍卖理论基础 (Lecture 7)

这部分内容介绍常见的拍卖形式，并分析在这些固定规则下，竞拍者的最优策略和拍卖结果。

1. 拍卖的基本要素与分类

- **核心要素**:
  - **参与者**: 卖家 (Seller) 和 多个竞拍者 (Bidders)。
  - **物品**: 单个物品或多个物品。
  - **估值 (Valuation)**: 竞拍者 `i` 对物品的心理价位，记为 `tᵢ`，这是他的私人信息。
  - **出价/投标 (Bid)**: 竞拍者公开或私下报出的价格，记为 `bᵢ`。
- **常见拍卖形式**:
  - **英式拍卖 (English Auction)**: 公开升价拍卖。价格从低到高不断攀升，竞拍者相继退出，直到只剩最后一人，该人以略高于第二高出价的价格赢得物品。
  - **荷式拍卖 (Dutch Auction)**: 公开降价拍卖。价格从一个非常高的水平开始下降，第一个应价的竞拍者赢得物品，并支付当前价格。
  - **一价密封拍卖 (First-Price Sealed-Bid Auction)**: 竞拍者各自独立、秘密地提交出价，出价最高者赢得物品，并支付**自己的出价**。
  - **二价密封拍卖 (Second-Price Sealed-Bid Auction / Vickrey Auction)**: 竞拍者各自独立、秘密地提交出价，出价最高者赢得物品，但只需支付**第二高的出价**。

2. 四大经典拍卖形式的策略等价性

- **核心结论**: 在独立私人估值 (IPV) 模型下：
  - **英式拍卖**在策略上等价于**二价密封拍卖**。
  - **荷式拍卖**在策略上等价于**一价密封拍卖**。
- **直觉**:
  - 在英式拍卖中，你的最优策略是持续跟价，直到价格超过你的真实估值。最终，你会以（约等于）第二高估值者的退出价格赢得拍卖，这与二价拍卖的结果一致。
  - 在荷式拍卖中，你需要在价格下降到某个点时果断应价。这个决策和你对其他人会何时应价的预期有关，类似于在一价拍卖中你需要猜测其他人出价来决定自己的最优出价。

3. 二价密封拍卖的均衡分析

- **核心结论**: 在二价密封拍卖中，每个竞拍者的**占优策略 (Dominant Strategy) 是诚实出价**，即出价等于自己的真实估值 ($b_i = t_i$)。
- **证明思路 (必考)**: 考虑竞拍者 `i` 的真实估值为 `tᵢ`，其他人中的最高出价为 `pᵢ`。
  1. **情况一: $t_i > p_i$ (估值高于对手)**
     - 若诚实出价 $b_i = t_i$，则 $b_i > p_i$，赢得拍卖，支付 `pᵢ`，效用为 $t_i - p_i > 0$。
     - 若出价 $b_i' > t_i$，结果不变，效用仍为 $t_i - p_i$。
     - 若出价 $p_i < b_i' < t_i$，结果不变，效用仍为 $t_i - p_i$。

    - 若出价 $b_i' \le p_i$，则会输掉拍卖（或平局），效用为 0。
    - **结论**: 此时，诚实出价是最优的（或同样好）。
2. **情况二: $t_i < p_i$ (估值低于对手)**
    - 若诚实出价 $b_i = t_i$，则 $b_i < p_i$，输掉拍卖，效用为 0。
    - 若出价 $b_i' < t_i$，结果不变，效用仍为 0。
    - 若出价 $t_i < b_i' < p_i$，结果不变，效用仍为 0。
    - 若出价 $b_i' \ge p_i$，则会赢得拍卖，但需支付 `pᵢ`，效用为 $t_i - p_i < 0$。
    - **结论**: 此时，诚实出价是最优的。
- **总结**: 无论其他人如何出价，诚实出价总能为竞拍者带来最高（或并列最高）的效用。

4. 一价密封拍卖的均衡分析 (计算题高频考点)

在一价拍卖中，诚实出价不是最优策略，因为效用会是 $t_i - t_i = 0$。理性的竞拍者会选择一个低于自己估值的出价，这种行为称为**出价折让 (Bid Shading)**。

- **问题设定 (常见考题)**: N 个竞拍者，估值 `tᵢ` 独立同分布于 `[0, 1]` 上的均匀分布。求解对称的贝叶斯纳什均衡出价函数 $\beta(t)$。
- **求解步骤 (通用方法)**:
    1. **建立期望效用函数**: 考虑竞拍者 `i`，真实估值为 `tᵢ`，他选择出价 `bᵢ`。他的期望效用 = (获胜概率) × (获胜后的效用)。
    $E[U_i(b_i|t_i)] = P(\text{用 } b_i \text{ 获胜}) \times (t_i - b_i)$
    2. **计算获胜概率**: 获胜意味着 `bᵢ` 高于其他所有人的出价。在对称均衡中，所有人都使用出价函数 $\beta(t)$。所以 $b_i > \beta(t_j)$ 对所有 $j \neq i$ 成立。由于 β 是增函数，这等价于 $\beta^{-1}(b_i) > t_j$。
    $P(\text{获胜}) = P(t_j < \beta^{-1}(b_i) \text{ for all } j \neq i) = [\beta^{-1}(b_i)]^{N-1}$
    3. **最大化期望效用**: 将获胜概率代回，得到期望效用函数。在均衡时，竞拍者会选择 $b_i = \beta(t_i)$。但为了求解，我们假设他“假装”自己的估值是 $\hat{t}$，从而选择出价 $b_i = \beta(\hat{t})$。他的期望效用为：
    $U(\hat{t}, t_i) = (t_i - \beta(\hat{t})) \cdot [\hat{t}]^{N-1}$
    4. **使用一阶条件 (FOC)**: 在均衡时，当 $\hat{t} = t_i$ 时，上述效用函数对 $\hat{t}$ 的导数必须为 0。
    $\frac{\partial U}{\partial \hat{t}}\Big|_{\hat{t}=t_i} = -\beta'(t_i) \cdot [t_i]^{N-1} + (t_i - \beta(t_i)) \cdot (N-1)[t_i]^{N-2} = 0$
    5. **求解微分方程**: 上式是一个一阶线性常微分方程。整理后，利用积分因子法求解，并结合边界条件 $\beta(0) = 0$。
- **通解 (必记)**:

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N} t_i$$

- **经济学启示**:
    - **出价折让**: 竞拍者不会报出真实估值，而是按比例折让。
    - **竞争影响**: 竞争越激烈（N越大），折让因子 $\frac{N-1}{N}$ 越接近1，出价越接近真实估值。

5. 收入等价原理 (Revenue Equivalence Theorem)

- **核心结论**: 在某些特定条件下（独立私人估值、风险中性、对称性等），任何能产生相同分配结果（即总是将物品分配给估值最高者）的拍卖机制，给卖家带来的**期望收入**都是相同的。
- **应用**: 这解释了为什么在一价和二价拍卖中，尽管支付规则不同，但卖家的期望收入是相等的（对于上述均匀分布的例子，均为 $\frac{N-1}{N+1}$）。

第二部分：机制设计 (Lecture 8)

这部分内容从“逆向工程”的角度出发，不再分析给定规则，而是设计规则来实现特定目标。

1. 机制设计基本概念

- **机制 (Mechanism)**: 一个定义了参与者策略空间和结果函数（如何根据参与者的策略决定最终分配和支付）的系统。
- **直接显示机制 (Direct Revelation Mechanism)**: 一种特殊的机制，其中参与者的策略空间就是其所有可能的“类型”(私人信息，如估值）的集合。参与者只需直接报告自己的类型。
- **激励相容 (Incentive Compatible, IC)**: 一个机制的性质，指在该机制下，所有参与者的最优策略都是**诚实地报告**自己的类型。
    - **占优策略激励相容 (DSIC)**: 无论其他人如何报告，诚实报告都是最优策略。
    - **贝叶斯激励相容 (BIC)**: 在对他人类型的信念下，诚实报告是最大化期望效用的策略。
- **显示原理 (Revelation Principle)**: 机制设计中的基石。它指出，对于任何一个（间接）机制的任意一个（贝叶斯）纳什均衡，都存在一个等价的、激励相容的直接显示机制，能实现完全相同的结果。
- **意义**: 显示原理极大地简化了机制设计问题。我们只需在所有**激励相容的直接机制**中寻找最优机制即可，无需考虑无穷无尽的复杂间接机制。

2. 迈尔森引理：拍卖机制的 DSIC 条件 (通用框架)

迈尔森引理给出了一个（直接）拍卖机制是 DSIC 的充要条件。

- **设定**:
    - $x_i(b_i)$: 竞拍者 `i` 报告估值 `bᵢ` 后，赢得物品的概率。
    - $p_i(b_i)$: 竞拍者 `i` 报告估值 `bᵢ` 后，需要支付的金额。
- **迈尔森引理 (DSIC 版本)**: 一个拍卖机制 `(x, p)` 是 DSIC 的，当且仅当满足：
    1. **单调性 (Monotonicity)**: 分配规则 $x_i(b_i)$ 必须是关于报告估值 b_i 的**单调不减函数**。即，报告的估值越高，赢得物品的概率不能越低。
    2. **支付规则 (Payment Rule)**: 支付 $p_i(b_i)$ 必须由一个特定的积分公式决定：

    $$p_i(b_i) = p_i(0) + b_i x_i(b_i) - \int_0^{b_i} x_i(s) ds$$

    其中 $p_i(0)$ 是报告估值为0时的支付（通常为0）。
- **几何解释**: 支付额 $p_i(b_i)$ 等于图中矩形面积 ($b_i x_i(b_i)$) 减去分配概率曲线下方的面积 ($\int_0^{b_i} x_i(s) ds$)。
- **意义**: 这意味着一旦我们设计了一个满足单调性的分配规则 x_i，为了保证激励相容，支付规则 p_i 就被唯一地确定了。设计问题被简化为**只设计分配规则**。

3. 最优机制设计：虚拟估值方法

我们现在来解决如何设计机制以**最大化卖家期望收入**。

- **目标**: 设计一个合理的（IC + IR）机制来最大化卖家的期望收入 $E[U_0]$。
- **关键转化**: 利用迈尔森引理，卖家的期望收入可以被转化为一个只与分配规则 `x` 和竞拍者估值分布有关的表达式，即**虚拟福利 (Virtual Welfare)** 的期望值。
- **虚拟估值 (Virtual Valuation)**:
  - **定义**: 竞拍者 `i` 的虚拟估值 $c_i(t_i)$ 定义为：

    $$c_i(t_i) = t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)}$$

    其中 F_i 和 f_i 分别是其估值的累积分布函数和概率密度函数。
  - **意义**: 它反映了竞拍者真实估值 `tᵢ` 在考虑了其“信息租金”后的“真实”价值。分母 `fᵢ(tᵢ)` 越小（即该估值点越稀有），信息租金越高，虚拟估值越低。
- **迈尔森最优拍卖机制**:
  - **核心结论**: 在正则性条件下，最大化卖家收入的最优机制具有以下简单的形式：
    1. 向所有竞拍者 `i` 询问其估值 `tᵢ`，并计算出每个人的虚拟估值 $c_i(t_i)$。
    2. 将物品分配给那个**拥有最高正虚拟估值**的竞拍者 `j`。
    3. 如果所有竞拍者的虚拟估值都为负，则不卖出物品（相当于有一个**保留价**）。
    4. 向获胜者 `j` 收取一个**门槛价格**，该价格恰好是让他“勉强”获胜的最低出价。
- **例题：均匀分布下的最优拍卖 (常见考题)**
  - **设定**: N 个竞拍者，估值 `tᵢ` 独立同分布于 `[0, 1]` 均匀分布。
  - **虚拟估值**: $F(t) = t, f(t) = 1 \implies c(t) = t - \frac{1-t}{1} = 2t - 1$。
  - **最优机制**:
    1. 计算每个人的虚拟估值 $2t_i - 1$。
    2. 找出虚拟估值最高的竞拍者 `j`。
    3. 如果 $2t_j - 1 > 0$ (即 $t_j > 1/2$)，则将物品卖给他。否则不卖。
    4. 这个机制等价于一个**设置了保留价为 1/2 的二价拍卖**。
- **为什么最优机制能打破收入等价原理?**
  - 收入等价原理要求分配结果相同（总是卖给估值最高者）。但最优机制在某些情况下（当最高估值低于保留价时）选择**不分配物品**，改变了分配结果，因此不再受收入等价原理的约束，可以获得更高的期望收入。