一、问题回顾与基础概念

首先，我们回顾一下问题背景和 Shapley 值的核心概念。

1. 问题背景：分摊美元博弈

在 Lecture 5 中，我们有三个合作商 A, B, C。他们各自以及两两合作、三方合作能产生的年收入（价值）如下，这构成了合作博弈的**特征函数** `v(S)`：

- **单个成员联盟的价值**:
  - $v(\{A\}) = 17$
  - $v(\{B\}) = 15$
  - $v(\{C\}) = 18$
- **两个成员联盟的价值**:
  - $v(\{A, B\}) = 35$
  - $v(\{A, C\}) = 38$
  - $v(\{B, C\}) = 36$
- **大联盟的价值**:
  - $v(\{A, B, C\}) = 56$
- **空联盟的价值**:
  - $v(\Phi) = 0$

2. Shapley 值核心思想

Shapley 值旨在为每位参与者分配一个“公平”的收益，这个公平性体现在该收益等于该参与者在所有可能加入联盟的**次序**下，为其所加入的联盟带来的**边际贡献**的期望值。

3. Shapley 值计算公式

我们主要使用基于排列的直观公式来计算：

$$SV_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\sigma \in S_N} [v(P_i(\sigma) \cup \{i\}) - v(P_i(\sigma))]$$

其中:

- N 是全体参与者的集合，这里 $N = \{A, B, C\}$, 所以 $|N|! = 3! = 6$。
- S_N 是 N 中所有成员的所有可能排列的集合。
- σ 是 S_N 中的一个具体排列。
- $P_i(\sigma)$ 是在排列 σ 中，位于参与者 i **之前**的所有参与者的集合。
- $v(P_i(\sigma) \cup \{i\}) - v(P_i(\sigma))$ 就是参与者 i 在该排列下的边际贡献。

二、详细计算过程

我们来计算 $N = \{A, B, C\}$ 的所有 $3! = 6$ 种排列，并计算每位合作商在每种排列下的边际贡献。

所有可能的排列 (σ):

1. (A, B, C)
2. (A, C, B)
3. (B, A, C)
4. (B, C, A)
5. (C, A, B)
6. (C, B, A)

---

1. 计算合作商 A 的 Shapley 值 (SV_A)

我们逐一分析 A 在 6 种排列中的边际贡献：

- **排列 (A, B, C)**: A 排在第一位。
  - A 前面的成员集合 $P_A(\sigma) = \Phi$ (空集)。
  - 边际贡献 = $v(P_A(\sigma) \cup \{A\}) - v(P_A(\sigma)) = v(\{A\}) - v(\Phi) = 17 - 0 = 17$。
- **排列 (A, C, B)**: A 排在第一位。
  - $P_A(\sigma) = \Phi$。
  - 边际贡献 = $v(\{A\}) - v(\Phi) = 17 - 0 = 17$。
- **排列 (B, A, C)**: A 排在第二位。
  - A 前面的成员集合 $P_A(\sigma) = \{B\}$。
  - 边际贡献 = $v(\{B\} \cup \{A\}) - v(\{B\}) = v(\{A, B\}) - v(\{B\}) = 35 - 15 = 20$。
- **排列 (C, A, B)**: A 排在第二位。
  - $P_A(\sigma) = \{C\}$。
  - 边际贡献 = $v(\{C\} \cup \{A\}) - v(\{C\}) = v(\{A, C\}) - v(\{C\}) = 38 - 18 = 20$。
- **排列 (B, C, A)**: A 排在第三位。
  - $P_A(\sigma) = \{B, C\}$。
  - 边际贡献 = $v(\{B, C\} \cup \{A\}) - v(\{B, C\}) = v(\{A, B, C\}) - v(\{B, C\}) = 56 - 36 = 20$。
- **排列 (C, B, A)**: A 排在第三位。
  - $P_A(\sigma) = \{C, B\}$。
  - 边际贡献 = $v(\{C, B\} \cup \{A\}) - v(\{C, B\}) = v(\{A, B, C\}) - v(\{B, C\}) = 56 - 36 = 20$。

A 的总边际贡献: $17 + 17 + 20 + 20 + 20 + 20 = 114$
A 的 Shapley 值:

$$SV_A = \frac{1}{6} \times 114 = 19$$

---

2. 计算合作商 B 的 Shapley 值 (SV_B)

- **排列 (A, B, C)**: 边际贡献 = $v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 35 - 17 = 18$。
- **排列 (A, C, B)**: 边际贡献 = $v(\{A,C,B\}) - v(\{A,C\}) = 56 - 38 = 18$。
- **排列 (B, A, C)**: 边际贡献 = $v(\{B\}) - v(\Phi) = 15 - 0 = 15$。
- **排列 (B, C, A)**: 边际贡献 = $v(\{B\}) - v(\Phi) = 15 - 0 = 15$。
- **排列 (C, A, B)**: 边际贡献 = $v(\{C,A,B\}) - v(\{C,A\}) = 56 - 38 = 18$。
- **排列 (C, B, A)**: 边际贡献 = $v(\{C,B\}) - v(\{C\}) = 36 - 18 = 18$。

B 的总边际贡献: $18 + 18 + 15 + 15 + 18 + 18 = 102$
B 的 Shapley 值:

$$SV_B = \frac{1}{6} \times 102 = 17$$

---

3. 计算合作商 C 的 Shapley 值 (SV_C)

- **排列 (A, B, C)**: 边际贡献 = $v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) = 56 - 35 = 21$。
- **排列 (A, C, B)**: 边际贡献 = $v(\{A,C\}) - v(\{A\}) = 38 - 17 = 21$。
- **排列 (B, A, C)**: 边际贡献 = $v(\{B,A,C\}) - v(\{B,A\}) = 56 - 35 = 21$。
- **排列 (B, C, A)**: 边际贡献 = $v(\{B,C\}) - v(\{B\}) = 36 - 15 = 21$。
- **排列 (C, A, B)**: 边际贡献 = $v(\{C\}) - v(\Phi) = 18 - 0 = 18$。
- **排列 (C, B, A)**: 边际贡献 = $v(\{C\}) - v(\Phi) = 18 - 0 = 18$。

C 的总边际贡献: $21 + 21 + 21 + 21 + 18 + 18 = 120$
C 的 Shapley 值:

$$SV_C = \frac{1}{6} \times 120 = 20$$

---

4. 结果汇总与验证

- $SV_A = 19$
- $SV_B = 17$
- $SV_C = 20$

验证 (有效率性): 所有参与者的 Shapley 值之和应等于大联盟的总价值。

$$SV_A + SV_B + SV_C = 19 + 17 + 20 = 56$$

$v(\{A,B,C\}) = 56$
二者相等，计算正确。

三、三合作商 Shapley 值通解推导

现在，我们推导一个普遍适用于任意三个参与者合作博弈的 Shapley 值公式。设三位参与者为 1, 2, 3。

我们使用另一个等价的 Shapley 值公式（基于联盟的公式）进行推导，因为它更具代数性：

$$SV_i(N,v)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}[v(S\cup\{i\})-v(S)]$$

其中 $n=|N|=3$。

我们来推导参与者 **1** 的 Shapley 值 SV_1。此时 $N\setminus\{1\}=\{2,3\}$。我们需要考虑 $\{2,3\}$ 的所有子集 S:

1. **当 $S=\Phi$ (空集) 时**:
   - $|S|=0$。
   - 权重为 $\frac{0!(3-0-1)!}{3!}=\frac{1\times 2!}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。
   - 贡献项为 $v(\{1\})-v(\Phi)$。
2. **当 $S=\{2\}$ 时**:
   - $|S|=1$。
   - 权重为 $\frac{1!(3-1-1)!}{3!}=\frac{1\times 1!}{6}=\frac{1}{6}$。
   - 贡献项为 $v(\{1,2\})-v(\{2\})$。
3. **当 $S=\{3\}$ 时**:
   - $|S|=1$。
   - 权重为 $\frac{1!(3-1-1)!}{3!}=\frac{1\times 1!}{6}=\frac{1}{6}$。
   - 贡献项为 $v(\{1,3\})-v(\{3\})$。
4. **当 $S=\{2,3\}$ 时**:
   - $|S|=2$。
   - 权重为 $\frac{2!(3-2-1)!}{3!}=\frac{2\times 0!}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。
   - 贡献项为 $v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})$。

将以上所有项加权求和，得到参与者 **1** 的 Shapley 值通解：

$$SV_1=\frac{1}{3}[v(\{1\})-v(\Phi)]+\frac{1}{6}[v(\{1,2\})-v(\{2\})]+\frac{1}{6}[v(\{1,3\})-v(\{3\})]+\frac{1}{3}[v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})]$$

将系数 $\frac{1}{6}$ 提出，整理可得：

$$SV_1=\frac{1}{6}\Big(2[v(\{1\})-v(\Phi)]+[v(\{1,2\})-v(\{2\})]+[v(\{1,3\})-v(\{3\})]+2[v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})]\Big)$$

通过对称性，我们可以直接写出参与者 **2** 和 **3** 的 Shapley 值通解：

参与者 2 的通解 SV_2:

$$SV_2=\frac{1}{6}\Big(2[v(\{2\})-v(\Phi)]+[v(\{1,2\})-v(\{1\})]+[v(\{2,3\})-v(\{3\})]+2[v(\{1,2,3\})-v(\{1,3\})]\Big)$$

参与者 3 的通解 SV_3:

$$SV_3 = \frac{1}{6}\Big(2[v(\{3\}) - v(\Phi)] + [v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + [v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + 2[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})]\Big)$$

这些就是任意三参与者合作博弈中 Shapley 值的通用计算公式。你可以将“分摊美元博弈”的数值代入这些通解进行验证，会得到与前面分步计算完全相同的结果。