HW2:机制设计与信息设计基础

姓名： 学号： 日期：

2.1.N人一价拍卖均衡

假设有N个竞拍者，并且N个竞拍者的估计是独立的，且都服从$[0,1]$上的均匀分布。N个竞拍者的真实估值记为$t_1, ..., t_n$。
1. 求解博弈的递增对称纯策略贝叶斯纳什均衡β(注意$\beta(0) = 0$)；
2. 从上述结果中你能获得什么启示？

Solution:

1.在一个对称的均衡中，所有竞拍者都使用相同的竞价函数$\beta(t)$。我们假设这个函数是严格递增的。考虑竞拍者i，其真实估值为t_i。他的目标是选择一个出价b_i来最大化自己的期望效用。
- 如果他赢了（即b_i是最高出价），效用为$t_i - b_i$。
- 如果他输了，效用为 0。

因此，竞拍者i的期望效用$\mathbb{E}[U_i]$是：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i \mid t_i)] = (t_i - b_i) \times P(\text{用}b_i\text{获胜})$$

由于所有其他竞拍者$j(j \neq i)$都使用策略$\beta(t_j)$，竞拍者i以出价b_i获胜的条件是他的出价高于所有其他人的出价：$b_i > \beta(t_j)$对所有$j \neq i$成立。

因为我们假设$\beta(\cdot)$是严格递增的，所以它存在一个反函数$\beta^{-1}(\cdot)$。条件$b_i > \beta(t_j)$等价于$\beta^{-1}(b_i) > t_j$。

竞拍者i获胜的概率就是其他所有$N-1$个竞拍者的估值都小于$\beta^{-1}(b_i)$的概率。

$$P(\text{获胜}) = P\left(t_j < \beta^{-1}(b_i) \quad \text{for all } j \neq i\right)$$

由于所有t_j都是独立的，并且服从$[0,1]$上的均匀分布（即$P(t_j < x) = x$），这个概率为：

$$P(\text{获胜}) = \left[P\left(t_j < \beta^{-1}(b_i)\right)\right]^{N-1} = \left[\beta^{-1}(b_i)\right]^{N-1}$$

将获胜概率代入期望效用函数，竞拍者i的目标是选择b_i来最大化：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i \mid t_i)] = (t_i - b_i)\left[\beta^{-1}(b_i)\right]^{N-1}$$

在均衡状态下，竞拍者i的最优选择必须是遵循策略，即出价$b_i = \beta(t_i)$。这意味着，如果一个估值为t_i的人假装自己的估值是$\hat{t}$并出价$\beta(\hat{t})$，他的效用在$\hat{t} = t_i$时达到最大。

我们令一个估值为t_i的竞拍者选择一个“声明的估值”$\hat{t}$，从而其出价为$b = \beta(\hat{t})$。他的期望效用为：

$$U(\hat{t}, t_i) = \left(t_i - \beta(\hat{t})\right) \cdot P\left(\beta(\hat{t})\text{获胜}\right)$$

获胜的概率是其他所有人的真实估值都小于$\hat{t}$的概率，即$\left(\hat{t}\right)^{N-1}$。

$$U(\hat{t}, t_i) = \left(t_i - \beta(\hat{t})\right)\left(\hat{t}\right)^{N-1}$$

为了让$\beta(\cdot)$成为一个均衡策略，对于任何$t_i, \hat{t} = t_i$都必须是最大化上述效用函数的选择。我们使用一阶条件（FOC），对$\hat{t}$求导并令其为 0：

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{t}} = -\beta'\left(\hat{t}\right)\left(\hat{t}\right)^{N-1} + \left(t_i - \beta\left(\hat{t}\right)\right)(N-1)\left(\hat{t}\right)^{N-2} = 0$$

在均衡时，我们必须有$\hat{t} = t_i$。将此条件代入一阶条件中：

$$-\beta'(t_i)(t_i)^{N-1} + (t_i - \beta(t_i))(N-1)(t_i)^{N-2} = 0$$

这是一个一阶常微分方程。为了求解$\beta(t_i)$，我们整理方程（假设$t_i > 0$）：

$$\beta'(t_i)t_i - (N-1)(t_i - \beta(t_i)) = 0$$

$$t_i\beta'(t_i) + (N-1)\beta(t_i) = (N-1)t_i$$

积分因子$I(t_i)$为：

$$I(t_i) = e^{\int \frac{N-1}{t_i} dt_i} = e^{(N-1)\ln(t_i)} = t_i^{N-1}$$

将方程两边乘以积分因子t_i^{N-1}：

$$t_i^{N-1}\beta'(t_i) + (N-1)t_i^{N-2}\beta(t_i) = (N-1)t_i^{N-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt_i}\left[t_i^{N-1}\beta(t_i)\right] = (N-1)t_i^{N-1}$$

积分得到：

$$t_i^{N-1}\beta(t_i) = \int (N-1)t_i^{N-1} dt_i = (N-1)\frac{t_i^N}{N} + C$$

解得：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i + \frac{C}{t_i^{N-1}}$$

由$\beta(0) = 0$得到$C = 0$，否则$t_i \to 0$时，该项会趋近于无穷。 即，唯一解是：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$$

2.从均衡竞价策略$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$中，我们可以得到以下几个重要的经济学启示：

1. 出价折让 (Bid Shading)：均衡策略表明，理性的竞拍者不会出价其真实估值t_i，而是会出一个打了折扣的价格。折扣因子是$\frac{N-1}{N}$。这种行为被称为“出价折让”。其根本原因在于第一价格拍卖的支付规则：如果你赢了，你支付的是你自己的出价。为了在获胜时能获得正的收益（即$t_i - b_i > 0$），你的出价b_i必须严格小于你的真实估值t_i。出价太高会减少你的潜在利润，而出价太低会降低你的获胜概率。这个公式给出了在这两者之间权衡的最优解。
2. 竞争的影响：竞价函数明确地依赖于竞拍者的总数N
   - 当竞拍者数量N增加时，比率$\frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$会趋近于 1。
   - 这意味着，随着竞争变得越来越激烈，每个竞拍者的出价会越来越接近其真实估值。例如，在只有两个竞拍者($N = 2$)的情况下，出价是$\beta(t_i) = \frac{1}{2}t_i$，折让幅度很大。但当有 10 个竞拍者 ($N = 10$)，出价是$\beta(t_i) = \frac{9}{10}t_i$，已经相当接近真实估值了。
   - 直觉解释：当有更多竞争对手时，你为了获胜所需要击败的对手就越多。为了不被别人轻易超越，你必须更积极地出价。对失去拍卖的恐惧超过了对赢得拍卖时支付过多的担忧，从而推高了整体的出价水平。
3. 收益等价性原理的体现 (Revenue Equivalence Theorem)：我们可以计算一下在此拍卖中卖家的期望收益。卖家的收益是最高出价$\max(b_1, ..., b_N)$。因为出价函数是递增的，拥有最高估值$t_{(N)}$的人会给出最高出价$\beta\left(t_{(N)}\right) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$。卖家的期望收益为$\mathbb{E}[\text{Revenue}] =$

$\mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_N\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$。对于$N$个从$[0,1]$均匀分布中抽取的独立样本，最大值统计量$t_{(N)}$的期望值为$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right] = \frac{N}{N+1}$。因此，卖家的期望收益为：

$$\mathbb{E}[\text{Revenue}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

2.2.收入等价原理

有N个竞拍者，并且N个竞拍者的估值是独立的，且都服从$[0,1]$上的均匀分布。考虑如下规则的全 支付拍卖：每个竞拍者提交一个报价，报价最高的竞拍者赢得物品，但所有竞拍者无论是否获得物品都 要支付自己的报价。注意，以下讨论只考虑考虑估价为 0 的竞拍者的期望支付为 0 的递增对称均衡。

1. 求 2.1 题的均衡下一个估值为x的竞拍者的均衡期望支付$m(x)$；
2. 求 2.1 题的均衡下卖家的期望收入；
3. 根据收入等价原理证明：全支付拍卖的递增对称均衡就是$\beta(x) = m(x)$。

Solution:

1. 在问题 2.1 中，我们已经求出第一价格拍卖（First-Price Auction）的均衡竞价策略为$\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$。一个估值为$x$的竞拍者的期望支付（Expected Payment）是指他每次参与拍卖平均需要支付的金额。在第一价格拍卖中，只有获胜时才需要支付，所以期望支付等于其出价乘以获胜的概率。

出价: 对于估值为x的竞拍者，他的出价是$b = \beta_{FP}(x) = \frac{N-1}{N}x$。

获胜的概率: 该竞拍者获胜，当且仅当他的估值x高于其他所有$N-1$个竞拍者的估值。

$$P(\text{获胜}) = P\left(t_j < x \ \text{ for all } j \neq i\right)$$

由于所有估值t_j独立服从$[0,1]$均匀分布，因此$P\left(t_j < x\right) = x$。

$$P(\text{获胜}) = x^{N-1}$$

$$m(x) = \left(\frac{N-1}{N}x\right) \cdot \left(x^{N-1}\right) = \frac{N-1}{N}x^N$$

2.在第一价格拍卖中，卖家的收入等于获胜者的出价，也就是所有出价中的最高价。由于竞价函数$\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$是严格递增的，拥有最高估值的竞拍者将会提交最高的出价。设所有N个竞拍者中的最高估值为$t_{(N)}$。

最高出价: 获胜者的出价为$\beta_{FP}\left(t_{(N)}\right) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$

卖家的期望收入: 卖家的期望收入就是对这个最高出价求期望值。

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \mathbb{E}\left[\beta_{FP}\left(t_{(N)}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_{(N)}\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$$

最高估值的期望: 对于N个从$[0,1]$均匀分布中独立抽取的样本，其最大值的期望值$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$一个标准统计学结论：

$$\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right] = \frac{N}{N+1}$$

计算结果：

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

3. 我们可以应用收入等价原理。该原理指出，对于任何给定的估值x，竞拍者在两种拍卖机制下的期望支付必须是相等的。

- 第一价格拍卖的期望支付: 我们在第 1 问中已经求出，对于估值为x的竞拍者，其期望支付为$m(x) = \frac{N-1}{N} x^N$
- 全支付拍卖的期望支付: 在全支付拍卖中，根据规则，竞拍者无论输赢都必须支付其出价。因此，如果一个竞拍者遵循某个竞价策略$\beta_{AP}(x)$，那么他的支付额是确定的，就是他出的价钱$\beta_{AP}(x)$。他的期望支付就等于他的出价本身。

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = \beta_{AP}(x)$$

- 根据收入等价原理，两种机制下的期望支付必须相等:

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = m(x)$$

$$\beta_{AP} = \frac{N-1}{N} x^N$$

根据收入等价原理，我们证明了在满足所述条件的设定下，全支付拍卖的递增对称均衡竞价函数就是 $\beta(x) = m(x) = \frac{N-1}{N} x^N$。

这揭示了一个深刻的联系：一种拍卖机制下的均衡竞价函数（全支付拍卖），可能等于另一种拍卖机制下的均衡期望支付函数（第一价格拍卖）。

2.3.反向拍卖的迈尔森引理

在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购产品的卖家。每位竞拍者i报出自己产品的成本c_i，买家收到所有竞拍者报告的成本向量后决定分配规则x和支付规则p，其中$x_i(c_i)$表示竞拍者i报告成本c_i时购买竞拍者i产品的概率，$p_i(c_i)$表示竞拍者i报告成本c_i且竞拍者i的产品被购买时给竞拍者i的支付。

假设竞拍者的产品没有被卖出时的效用为 0，因此竞拍者i报出任意的c_i'时的期望效用可以表达为

$$u_i(c_i') = x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i)$$

1. 根据 DSIC 的定义写出反向拍卖机制(x, p)满足 DSIC 时竞拍者效用应当满足的条件;
2. 根据课上给出的迈尔森引理，给出并证明反向拍卖机制是 DSIC 的充要条件（假设$c \to \infty$时，$c \cdot x_i(c) \to 0$且$p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$）。

Solution:

1. DSIC 定义

DSIC 是“占优策略激励相容”（Dominant Strategy Incentive Compatible）的缩写。其定义是：对于任何一个参与者，无论其他参与者采取什么策略，其最优策略都是“诚实汇报”，即报告其真实的类型。

在当前的反向拍卖场景中，参与者（卖家）的类型是他的真实成本c_i。“诚实汇报”意味着他报告的成本c_i'就等于他的真实成本c_i。

因此，一个反向拍卖机制(x, p)满足 DSIC，当且仅当对于任意一个卖家i，其真实成本为c_i，诚实汇报所带来的期望效用不低于谎报任意其他成本c_i'所带来的期望效用。

用数学公式表达，该条件是：对任意卖家i，任意真实成本c_i，以及任意可能的谎报成本c_i'，都必须满足以下不等式：

$$u_i(c_i) \geq u_i(c_i')$$

将效用函数的具体形式代入，得到 DSIC 的条件为：

$$x_i(c_i) \cdot (p_i(c_i) - c_i) \geq x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i)$$

这个不等式必须对所有的c_i和c_i'都成立。它构成了后续分析的基础。

2.常该引理用于正向拍卖（买家竞价），但我们可以将其思想应用到反向拍卖（卖家竞价）中。一个机制(x, p)是 DSIC 的充要条件如下：

一个反向拍卖机制(x, p)是 DSIC 的，当且仅当它同时满足以下两个条件：

1. 分配规则的单调性 (Monotonicity)：对于任意卖家i，其被选中的概率$x_i(c)$必须是其报告成本c的非增函数。也就是说，如果$c_1 < c_2$，则必须有$x_i(c_1) \geq x_i(c_2)$。
2. 支付规则 (Payment Rule)：对于任意卖家i，如果他被选中$(x_i(c_i) > 0)$，支付给他的款项$p_i(c_i)$必须满足：

$$p_i(c_i) = v_i + \frac{1}{x_i(c_i)} \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

或者更通用地描述其期望支付$P_i(c_i) = x_i(c_i) p_i(c_i)$:

$$P_i(c_i) = c_i x_i(c_i) + \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

证明：我们将分别证明这两个条件的必要性（DSIC $\Rightarrow$条件）和充分性（条件$\Rightarrow$ DSIC）。

设卖家i的均衡期望效用为$U_i(c_i) = u_i(c_i) = x_i(c_i)(p_i(c_i) - c_i)$。

从第 1 问的 DSIC 条件出发，我们有两个不等式：

(a)真实成本为c_1的卖家谎报为c_2不会获益：$x_1(p_1 - c_1) \geq x_2(p_2 - c_1)$

(b)真实成本为c_2的卖家谎报为c_1不会获益：$x_2(p_2 - c_2) \geq x_1(p_1 - c_2)$

整理得到：

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 \geq c_1(x_1 - x_2), x_1 p_1 - x_2 p_2 \leq c_2(x_1 - x_2)$$

合并得到：

$$c_2(x_1 - x_2) \geq x_1 p_1 - x_2 p_2 \geq c_1(x_1 - x_2)$$

得到

$$(c_2 - c_1)(x_1 - x_2) \geq 0$$

如果我们取$c_2 > c_1$，那么$c_2 - c_1 > 0$，因此必须有$x_1 - x_2 \geq 0$，即$x_i(c_1) \geq x_i(c_2)$。这证明了$x_i(c)$必须是c的非增函数。

根据 DSIC，卖家会选择c'来最大化其效用$u_i(c' \mid c_i) = x_i(c')(p_i(c') - c_i)$。在均衡状态下，最优选择是$c' = c_i$。

根据包络定理，均衡效用 $U_i(c_i)$对其类型（真实成本c_i）的导数为：

$$\frac{dU_i(c_i)}{dc_i} = \frac{\partial u_i(c' \mid c_i)}{\partial c_i} \mid_{c'=c_i} = \frac{\partial [x_i(c')(p_i(c') - c_i)]}{\partial c_i} \mid_{c'=c_i} = -x_i(c_i)$$

我们对上式从c_i到∞进行积分得到：

$$\int_{c_i}^{\infty} \frac{dU_i(z)}{dz} dz = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

$$[U_i(z)]_{c_i}^{\infty} = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

$$\lim_{z\to\infty} U_i(z) - U_i(c_i) = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

根据题设的边界条件，当$c \to \infty$时，$c \cdot x_i(c) \to 0$且$p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$。这意味着$\lim_{c\to\infty} U_i(c) = \lim_{c\to\infty}[x_i(c)p_i(c) - cx_i(c)] = 0$。因此我们得到：

$$-U_i(c_i) = -\int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

$$U_i(c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

将$U_i(c_i)$的定义代回，即$x_i(c_i)(p_i(c_i) - c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$。整理后即得到期望支付规则：

$$x_i(c_i)p_i(c_i) = c_i x_i(c_i) + \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

下面证明充分性，现在我们假设单调性和支付规则都成立，需要证明卖家诚实汇报是最优策略。即证明对于任意c_i, c_i'，都有$U_i(c_i) \geq u_i(c_i' \mid c_i)$。 根据支付规则，我们有

$$U_i(c_i) = \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz$$

而谎报的效用为

$$u_i(c_i' \mid c_i) = x_i(c_i')p_i(c_i') - c_i x_i(c_i')$$

将支付规则代入谎报的效用中：

$$u_i(c_i' \mid c_i) = \left(c_i' x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\infty} x_i(z)dz\right) - c_i x_i(c_i')$$

$$u_i(c_i' \mid c_i) = (c_i' - c_i)x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\int} x_i(z)dz$$

我们要证明的是$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$。

$$\begin{aligned} U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) &= \int_{c_i}^{\infty} x_i(z)dz - \left((c_i' - c_i)x_i(c_i') + \int_{c_i'}^{\infty} x_i(z)dz\right) \\ &= \int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz - (c_i' - c_i)x_i(c_i') \end{aligned}$$

现在我们分情况讨论：

- 情况 1：$c_i' > c_i$。 由于$x_i(z)$是非增函数（单调性条件），对于任意$z \in [c_i, c_i']$，都有$x_i(z) \geq x_i(c_i')$。因此，

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz \geq \int_{c_i}^{c_i'} dz = x_i(c_i')(c_i' - c_i)$$

所以$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$。

- 情况 2：在这种情况下，积分区间是反的：

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz = -\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz$$

由于$x_i(z)$非增，对于任意$z \in [c_i', c_i]$，都有$x_i(z) \leq x_i(c_i')$。因此，

$$\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz \leq \int_{c_i'}^{c_i} x_i(c_i')dz = x_i(c_i')(c_i - c_i')$$

两边乘以 -1，不等号反向：

$$-\int_{c_i'}^{c_i} x_i(z)dz \geq -x_i(c_i')(c_i - c_i') = x_i(c_i')(c_i' - c_i)$$

即

$$\int_{c_i}^{c_i'} x_i(z)dz \geq (c_i' - c_i)x_i(c_i')$$

所以

$$U_i(c_i) - u_i(c_i' \mid c_i) \geq 0$$

两种情况都证明了不等式成立，因此充分性得证。 综上，我们已经证明了这两个条件是机制(x, p)为 DSIC 的充要条件。

■

2.4.虚拟估值和正则性条件

本题将推导出对于虚拟估值$c(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$和正则化条件的有趣描述。考虑$[0, v_{\max}]$上严格单调递增的分布函数$F$，其概率密度函数$f$为正，其中$v_{\max} < +\infty$。对于估值服从分布$F$的竞拍者，当交易成功概率为$q \in [0,1]$时，定义$V(q) = F^{-1}(1-q)$为物品的“价格”，进而可以定义$R(q) = q \cdot V(q)$为从竞拍者处获得的期望收益。称$R(q)$为$F$的收益曲线函数，注意$R(0) = R(1) = 0$。

1. 请解释为什么$V(q)$可以被视为物品的价格；
2. $[0,1]$上的均匀分布的收益曲线函数是什么？
3. 证明收益曲线在q点的斜率（即$R'(q)$）是$c(V(q))$，其中c是虚拟估值函数；
4. 证明当且仅当收益曲线是凹的时候，概率分布是正则的。

Solution:

1. $V(q)$以被视为为了实现特定的交易概率q所需要设定的“市场价格”。我们可以通过以下逻辑来理解：

假设拍卖师（或卖家）设定了一个“买断”价格（posted price）为p。一个理性的竞拍者，其真实估值为v，只有当他的估值不低于价格时（即 $v \geq p$），他才会选择购买。

那么，对于一个从分布F中随机抽取的竞拍者，他愿意以价格p购买该物品的概率是多少呢？这个概率等于他的估值大于或等于p的概率：

$$P(\text{购买}) = P(v \geq p) = 1 - P(v < p)$$

由于估值v是连续的，$P(v < p) = P(v \leq p) = F(p)$。因此：

$$P(\text{购买}) = 1 - F(p)$$

现在，我们将这个购买概率与题目中定义的“交易概率”q等同起来，即$q = P(\text{购买})$。于是我们有：

$$q = 1 - F(p)$$

我们可以从这个方程中反解出价格p是交易概率q的函数：

$$F(p) = 1 - q$$

$$p = F^{-1}(1 - q)$$

这正是题目中给出的函数$V(q)$的定义。因此，$V(q)$可以被解释为：若要使一个随机抽取的竞拍者愿意购买此物品的概率恰好为q，那么需要设定的价格就是$V(q)$。它建立了目标交易概率和所需价格之间的对应关系，所以可以被视为物品的一种“价格”。

2. 对于$[0, 1]$上的均匀分布，我们有：

- 分布函数: $F(v) = v$, for $v \in [0, 1]$
- 概率密度函数: $f(v) = 1$, for $v \in [0, 1]$
- 估值上界:$v_{\max} = 1$

根据定义，$V(q) = F^{-1}(1 - q)$。我们需要先求$F(v)$的反函数F^{-1}。设$y = F(v) = v$。显然，其反函数为$F^{-1}(y) = y$。将$y = 1 - q$代入，得到：

$$V(q) = F^{-1}(1 - q) = 1 - q$$

根据定义，$R(q) = q \cdot V(q)$。代入得到：

$$R(q) = q(1 - q) = q - q^2$$

3. 我们的目标是证明$R'(q) = c(V(q))$

式子$R(q) = q \cdot V(q)$。我们对q求导得到：

$$R'(q) = \frac{d}{dq}(q \cdot V(q)) = 1 \cdot V(q) + q \cdot V'(q)$$

其中$V'(q) = \frac{dV(q)}{dq}$。

我们有$V(q) = F^{-1}(1 - q)$。为了求其导数，我们利用反函数求导法则。令$v = V(q)$，则由定义可得$F(v) = 1 - q$。将上式两边对q求导：

$$\frac{d}{dq}F(v) = \frac{d}{dq}(1 - q)$$

$$\frac{dF(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dq} = -1$$

根据定义，$\frac{dF(v)}{dv} = f(v)$并且$\frac{dv}{dq} = V'(q)$。所以，

$$f(v) \cdot V'(q) = -1$$

$$V'(q) = -\frac{1}{f(v)} = -\frac{1}{f(V(q))}$$

将$V'(q)$代回$R'(q)$的表达式：

$$R'(q) = V(q) + q \cdot \left(-\frac{1}{f(V(q))}\right) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

虚拟估值函数的定义是$c(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$。将$v = V(q)$代入：

$$c(V(q)) = V(q) - \frac{1 - F(V(q))}{f(V(q))}$$

从$V(q)$的定义我们知道$F(V(q)) = 1 - q$，因此$q = 1 - F(V(q))$。将此关系代入$c(V(q))$的表达式中：

$$c(V(q)) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

通过比较第三步和第四步的结果，我们发现：

$$R'(q) = V(q) - \frac{q}{f(V(q))} = c(V(q))$$

这就完成了证明。证毕！

4. 在第 3 问中，我们已经证明了$R'(q) = c(V(q))$。 我们再次求导，得到：

$$R''(q) = \frac{d}{dq}c(V(q))$$

即，

$$R''(q) = \frac{dc(V(q))}{dV} \cdot \frac{dV(q)}{dq} = c'(V(q)) \cdot V'(q)$$

现在我们分析$R''(q)$的符号：

(1) $c'(V(q))$的符号: 根据正则性的定义，分布F是正则的当且仅当$c'(v) > 0$对于所有v成立。因此，F是正则的$\iff c'(V(q)) > 0$

(2)$V'(q)$的符号: 在第 3 问的证明中，我们已经推导出$V'(q) = -\frac{1}{f(V(q))}$。由于概率密度函数$f(v)$总是正的（$f(v) > 0$），所以$V'(q)$永远是负的，即$V'(q) < 0$。

将这两点结合起来分析$R''(q) = (\text{符号由正则性决定}) \cdot (\text{恒为负})$

($\Longrightarrow$)如果分布是正则的，则收益曲线是凹的：如果F是正则的，则$c'(V(q)) > 0$。那么

$$R''(q) = c'(V(q)) \cdot V'(q) = (> 0) \cdot (< 0) < 0$$

。因为二阶导数小于零，所以收益曲线$R(q)$是（严格）凹函数。

($\Longleftarrow$)如果收益曲线是凹的，则分布是正则的：如果$R(q)$是凹的，则$R'' \leq 0$。我们有

$$R''(q) = c'(V(q)) \cdot V'(q) < 0$$

由于我们知道$V'(q) < 0$，为了使整个表达式非正，必须有$c'(V(q)) \geq 0$。如果$R(q)$是严格凹的($R''(q) < 0$)，则必须有$c'(V(q)) > 0$。由于函数$V(q) = F^{-1}(1-q)$是一个从$[0,1]$到$[v_{\max}, 0]$的严格单调递减的连续映射，它覆盖了整个估值范围。因此，如果$c'(V(q)) > 0$对所有$q \in (0,1)$，就等价于$c'(v) > 0$对所有$q \in (0,1)$成立，就等价于$c'(v) > 0$对所有$v \in (0, v_{\max})$成立。

这就证明了分布F是正则的。

我们已经证明了$R''(q)$的符号与$-c'(V(q))$的符号相同。因此，$R(q)$是凹函数当且仅当$c(v)$是递增函数，即当且仅当分布F是正则的。证明完毕。

2.5.贝叶斯劝说：检察官与法官

考虑检察官劝说法官判决的例子：假设法官（信号接收者）对于一个被告人，必须做出以下两种决策之一：判决有罪（convict）或无罪释放（acquit）。

- 被告人有两种类型：有罪（guilty）或无罪（innocent）；
- 法官在公正判决下获得的效用为 1：如果有罪被判有罪，无罪被判无罪，否则效用为 0；
- 检察官（信号发送者）为法官提供有关被告的证据（发送信号），如果被告人判有罪，检察官获得效用 1，否则效用为 0；
- 法官和检察官对被告人的类型有相同的先验概率分布：$\mu_0(\text{guilty}) = 0.3, \mu_0(\text{innocent}) = 0.7$。

检察官进行调查收集有关被告人的证据，因此检察官的策略是选择一个提供证据的策略，希望改变法官 的判决，使得被判有罪的越多越好（检查官效用最大化）。形式化地说，提供证据就是一个$\pi(\cdot \mid \text{guilty})$和$\pi(\cdot \mid \text{innocent})$的信号机制，并且这一信号机制在博弈前是公开给法官的（或者说可验证的）。

1. 根据信息设计的显示原理，给出下面需要考虑的信号机制的形式；
2. 求检察官使用完全诚实的信号机制的情况下，检察官和法官的效用；
3. 求检察官最优信号机制下检察官的效用，以及最优信号机制下法官后验概率分布的分布；
4. 求检察官的最优信号机制。

Solution:

1.根据信息设计中的显示原理，我们总可以不失一般性地将信号机制简化为直接向接收方推荐一个行动。发送方设计的机制使得接收方总是愿意遵循其推荐。

在这个问题中，法官的行动是“判决有罪”或“无罪释放”。因此，我们可以将检察官的信号集简化为两个直接的“建议”：

- 信号s_c：“建议判决有罪”
- 信号s_a：“建议无罪释放”

一个信号机制因此可以被一个条件概率矩阵完全定义，该矩阵描述了在不同真实状态下，发送每个建议信号的概率。我们设：

- $p = P(s_c \mid \omega = G)$：当被告有罪时，检察官提供“建议有罪”的证据的概率。
- $q = P(s_c \mid \omega = I)$：当被告无罪时，检察官提供“建议有罪”的证据的概率。

那么，提供“建议无罪”的证据的概率就是：

- $P(s_a \mid \omega = G) = 1 - p$
- $P(s_a \mid \omega = I) = 1 - q$

因此，需要考虑的信号机制的形式可以由一个二维向量(p, q)来刻画，其中$p, q \in [0, 1]$。检察官的目标就是选择最优的(p, q)。

2. 一个完全诚实或完全揭示的信号机制会完美地揭示被告的真实类型。

- 如果被告有罪，检察官 100% 提供定罪证据。
- 如果被告无罪，检察官 100% 提供脱罪证据。

在这种机制下：

- 当被告有罪时$(\omega = G)$，法官收到的后验信念$\mu = P(G \mid s_G) = 1$。
- 当被告无罪时$(\omega = I)$，法官收到的后验信念$\mu = P(G \mid s_I) = 0$。

法官的决策与效用:

- 当后验信念$\mu = 1$时，因为$1 \geq 0.5$，法官会判决有罪。这是正确的判决。
- 当后验信念$\mu = 0$时，因为$0 < 0.5$，法官会无罪释放。这也是正确的判决。

- 由于法官在任何情况下都做出了正确的判决，其效用始终为 1。因此，法官的期望效用为 1。

检察官的效用:
- 检察官只有在被告被判决有罪时才获得效用 1。
- 在完全诚实的机制下，只有当被告真实为有罪时，他才会被判有罪。
- 这种情况发生的概率等于被告有罪的先验概率，即$P(\text{有罪}) = \mu_0 = 0.3$。
- 因此，检察官的期望效用为$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$。

3. 要找到最优机制，我们可以使用凹化的方法。检察官的期望效用可以被看作是法官后验信念μ的函数。

定义检察官的价值函数$v(\mu)$，该函数表示当法官的后验信念为μ时，检察官能获得的效用。

$$v(\mu) = \begin{cases} 1 \text{ if } \mu \geq 0.5(\text{法官判有罪}) \\ 0 \text{ if } \mu < 0.5(\text{法官无罪释放}) \end{cases}$$

这是一个在$\mu = 0.5$处跳跃的阶梯函数。

寻找价值函数的凹化包络$\hat{v}(\mu)$，检察官能获得的最大期望效用，等于其价值函数$v(\mu)$的最小凹包络在先验信念$\mu_0 = 0.3$处的值。对于所有$\mu < 0.5$，这个凹包络是一条连接点$(0, v(0)) = (0, 0)$和点$(0.5, v(0.5)) = (0.5, 1)$的直线。该直线的方程为

$$y = \frac{1-0}{0.5-0}x = 2x$$

计算检察官的最优效用:在先验$\mu_0 = 0.3$处，检察官的最优期望效用为:

$$\mathbb{E}[U_P]^* = \hat{v}(0.3) = 2 \times 0.3 = 0.6$$

所以，检察官在最优信号机制下的效用为 0.6。

推导后验概率的分布，最优机制会将先验信念μ_0分裂成支持凹包络的几个后验信念点。在本例中，先验$\mu_0 = 0.3$位于连接点$\mu_L = 0$和$\mu_H = 0.5$的线段上。因此，最优机制只会产生两个后验信念:$\mu = 0$和$\mu = 0.5$。根据信念鞅性，期望的后验信念必须等于先验信念:

$$\mathbb{E}[\mu] = \mu_0$$

设$P(\mu = 0.5)$为机制产生 0.5 后验信念的概率，则$P(\mu = 0) = 1 - P(\mu = 0.5)$。

$$P(\mu = 0.5) \cdot 0.5 + P(\mu = 0) \cdot 0 = 0.3$$

$$P(\mu = 0.5) \cdot 0.5 = 0.3 \Longrightarrow P(\mu = 0.5) = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

因此，$P(\mu = 0) = 1 - 0.6 = 0.4$。

所以，最优信号机制下法官后验概率的分布为：以 0.6 的概率形成后验信念$\mu = 0.5$，以 0.4 的概率形成后验信念$\mu = 0$。

4. 现在我们来求解产生上述后验分布的具体信号机制(p, q)。
- 信号s_c导致后验信念$\mu = 0.5$。
- 信号s_a导致后验信念$\mu = 0$。

利用后验信念$\mu(s_c) = 0.5$，根据贝叶斯法则:

$$\mu(s_c) = P(G \mid s_c) = \frac{P(s_c \mid G)P(G)}{P(s_c \mid G)P(G) + P(s_c \mid I)P(I)} = 0.5$$

代入$P(s_c \mid G)=p, P(s_c \mid I)=q, P(G)=0.3, P(I)=0.7$:

$$\frac{p\cdot 0.3}{p\cdot 0.3+q\cdot 0.7}=0.5$$

$$\Longrightarrow 3p=7q$$

利用后验信念$\mu(s_a)=0$:

$$\mu(s_a)=P(G|\ s_a)=\frac{P(s_a \mid G)P(G)}{P(s_a \mid G)P(G)+P(s_a \mid I)P(I)}=0$$

代入$P(s_a \mid G)=1-p, P(s_a \mid I)=1-q$:

$$\frac{(1-p)\cdot 0.3}{(1-p)\cdot 0.3+(1-q)\cdot 0.7}=0$$

要使该分数为 0，分子必须为 0。因此：

$$(1-p)\cdot 0.3=0 \Longrightarrow p=1$$

解得：

$$q=\frac{3}{7}$$

检察官的最优信号机制为:该机制由概率$(p,q)=\left(1,\frac{3}{7}\right)$定义，其含义是：
- 当被告确实有罪时，检察官总是提供“建议有罪”的证据($p=P(s_c \mid G)=1$)。
- 当被告是无罪的时，检察官以$\frac{3}{7}$的概率提供“建议有罪”的证据，以$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$的概率提供“建议无罪”的证据$\left(q=P(s_c \mid I)=\frac{3}{7}\right)$。

这个机制通过在被告无罪时进行策略性的信息模糊，成功地将法官的先验信念（0.3，不足以定罪）分裂成一个可以定罪的后验信念（0.5）和一个不能定罪的后验信念（0)，从而最大化了检察官的期望效用。

■

2.6.信息的价值

设自然的状态集合为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，买家的先验分布为$\mu_0(\omega_1)=0.7, \mu_0(\omega_2)=0.3$。设买家的行动集合为$A=\{a_1,a_2\}$，效用函数为

$$u(a_1,\omega_1)=2, u(a_1,\omega_2)=0$$

$$u(a_2,\omega_1)=0, u(a_2,\omega_2)=3$$

记$\mu_0(\omega_1)=\theta$，则$\mu_0(\omega_2)=1-\theta$。假设有一个数据卖家提供如下信号机制：$S=\{s_1,s_2\}$，且

$$\pi(s_1 \mid \omega_1)=0.9, \pi(s_2 \mid \omega_1)=0.1$$

$$\pi(s_1 \mid \omega_2)=0.7, \pi(s_2 \mid \omega_2)=0.3$$

求卖家信号机制对买家的价值。