Lecture 8：最优机制

一、虚拟福利最大值

1.基本模型

考虑单物品情况，即一个卖家有一个不可分割的物品待出售；

- 与此前单物品讨论一致，有n个潜在买家（竞拍者）$N = \{1, 2, ..., n\}$；
- 每个买家i对物品有一个心理价位t_i是不完全信息；
  - 其连续先验概率密度$f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^+$是共同知识，且$f_i(t_i) > 0$对所有$t_i \in [a_i, b_i]$成立；
  - 记T为所有参与人可能的估值组合，即

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

- 假定不同买家的估值分布是相互独立的（但不需要同分布）；
  - 故在T上估值的联合密度函数是$f(t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)$
  - 按照惯例记$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{j \in N, j \neq i} f_j(t_j)$
- 此外，为了讨论方便，卖家对物品的估值$t_0 = 0$是共同知识。

2.BIC 迈尔森引理

根据显示原理，只需要考虑激励相容的直接机制，即所有买家如实报告自己的估值的机制。在最优机制的讨论中，如实报告类型不一定是占优策略均衡，而是贝叶斯纳什均衡，等价条件与 DSIC 时不一定相同，故需要给出 BIC 版本的迈尔森引理。

为给出 BIC 迈尔森引理，需要一些准备工作。假定拍卖机制的分配规则和支付规则为(x, p)，考虑事中阶段，即参与人知道自己的估值，对他人估值是不完全信息的阶段。为了讨论 BIC 的条件，应首先写出效用函数。

由于考虑的是贝叶斯纳什均衡，因此应当考虑其他参与人都如实报告自己估值时，即$b_{-i} = t_{-i}$时，估值为t_i的竞拍者i报告t_i'的期望效用

$$U_i(t_i') = \int_{T_{-i}} (t_i \cdot x_i(t_i', t_{-i})) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

理解这一表达式：买家效用为他的估值t_i乘以物品分配概率$x_i(t_i', t_{-i})$，减去支付$p_i(t_i', t_{-i})$，然而买家不能确定其他买家真实估值，因此还需要根据先验分布对其他人的估值求期望。因此 BIC 的条件就是$U_i(t_i) \geq U_i(t_i')$对所有$i \in N$和$t_i' \in [a_i, b_i]$成立。

然而这一U_i的表达式的确看起来非常不友好，因此尝试简化。定义

$$Q_i(t_i') = \int_{T_{-i}} x_i(t_i', t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

则$Q_i(t_i')$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t_i'时，他获得物品的概率。定义

$$M_i(t_i') = \int_{T_{-i}} p_i(t_i', t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

则$M_i(t_i)$的含义为，当其他买家诚实报价，买家i报价t_i'时，他的期望支付。因此，$U_i(t_i')$可以简化为

$$U_i(t_i') = t_i Q_i(t_i') - M_i(t_i')$$

这就与 DSIC 情况下的$u_i(t_i') = t_i \cdot x_i(t_i') - p_i(t_i')$形式上一致了，只是获得物品的概率和支付都求了期望，并且假定了其他买家如实报价。

因此仿照 DSIC 迈尔森引理可以给出 BIC 版本的迈尔森引理，并且证明过程完全类似，因此不再赘述，除了需要注意积分下界因为显示机制要求报价集合$T_i = [a_i, b_i]$而变为了a_i：

二、最优机制

三、拍卖与数据定价