

## HW2:机制设计与信息设计基础

姓名： 学号： 日期：

### 2.1.N人一价拍卖均衡

假设有 $N$ 个竞拍者，并且 $N$ 个竞拍者的估计是独立的，且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。 $N$ 个竞拍者的真实估值记为 $t_1, \dots, t_n$ 。

1. 求解博弈的递增对称纯策略贝叶斯纳什均衡 $\beta$ (注意 $\beta(0) = 0$ )；
2. 从上述结果中你能获得什么启示？

**Solution:**

1. 在一个对称的均衡中，所有竞拍者都使用相同的竞价函数 $\beta(t)$ 。我们假设这个函数是严格递增的。考虑竞拍者 $i$ ，其真实估值为 $t_i$ 。他的目标是选择一个出价 $b_i$ 来最大化自己的期望效用。

- 如果他赢了（即 $b_i$ 是最高出价），效用为 $t_i - b_i$ 。
- 如果他输了，效用为 0。

因此，竞拍者 $i$ 的期望效用 $\mathbb{E}[U_i]$ 是：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i | t_i)] = (t_i - b_i) \times P(\text{用 } b_i \text{ 获胜})$$

由于所有其他竞拍者 $j(j \neq i)$ 都使用策略 $\beta(t_j)$ ，竞拍者 $i$ 以出价 $b_i$ 获胜的条件是他的出价高于所有其他人的出价： $b_i > \beta(t_j)$ 对所有 $j \neq i$ 成立。

因为我们假设 $\beta(\cdot)$ 是严格递增的，所以它存在一个反函数 $\beta^{-1}(\cdot)$ 。条件 $b_i > \beta(t_j)$ 等价于 $\beta^{-1}(b_i) > t_j$ 。

竞拍者 $i$ 获胜的概率就是其他所有 $N - 1$ 个竞拍者的估值都小于 $\beta^{-1}(b_i)$ 的概率。

$$P(\text{获胜}) = P(t_j < \beta^{-1}(b_i) \text{ for all } j \neq i)$$

由于所有 $t_j$ 都是独立的，并且服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布（即 $P(t_j < x) = x$ ），这个概率为：

$$P(\text{获胜}) = [P(t_j < \beta^{-1}(b_i))]^{N-1} = [\beta^{-1}(b_i)]^{N-1}$$

将获胜概率代入期望效用函数，竞拍者 $i$ 的目标是选择 $b_i$ 来最大化：

$$\mathbb{E}[U_i(b_i | t_i)] = (t_i - b_i) [\beta^{-1}(b_i)]^{N-1}$$

在均衡状态下，竞拍者 $i$ 的最优选择必须是遵循策略，即出价 $b_i = \beta(t_i)$ 。这意味着，如果一个估值为 $t_i$ 的人假装自己的估值是 $\hat{t}$ 并出价 $\beta(\hat{t})$ ，他的效用在 $\hat{t} = t_i$ 时达到最大。

我们令一个估值为 $t_i$ 的竞拍者选择一个“声明的估值” $\hat{t}$ ，从而其出价为 $b = \beta(\hat{t})$ 。他的期望效用为：

$$U(\hat{t}, t_i) = (t_i - \beta(\hat{t})) \cdot P(\beta(\hat{t}) \text{ 获胜})$$

获胜的概率是其他所有人的真实估值都小于 $\hat{t}$ 的概率，即 $(\hat{t})^{N-1}$ 。

$$U(\hat{t}, t_i) = (t_i - \beta(\hat{t})) (\hat{t})^{N-1}$$

为了让 $\beta(\cdot)$ 成为一个均衡策略，对于任何 $t_i$ ， $\hat{t} = t_i$ 都必须是最大化上述效用函数的选择。我们使用一阶条件（FOC），对 $\hat{t}$ 求导并令其为 0：

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{t}} = -\beta'(\hat{t})(\hat{t})^{N-1} + (t_i - \beta(\hat{t}))(N-1)(\hat{t})^{N-2} = 0$$

在均衡时，我们必须有 $\hat{t} = t_i$ 。将此条件代入一阶条件中：

$$-\beta'(t_i)(t_i)^{N-1} + (t_i - \beta(t_i))(N-1)(t_i)^{N-2} = 0$$

这是一个一阶常微分方程。为了求解 $\beta(t_i)$ ，我们整理方程（假设 $t_i > 0$ ）：

$$\beta'(t_i)t_i - (N-1)(t_i - \beta(t_i)) = 0$$

$$t_i\beta'(t_i) + (N-1)\beta(t_i) = (N-1)t_i$$

积分因子 $I(t_i)$ 为：

$$I(t_i) = e^{\int \frac{N-1}{t_i} dt_i} = e^{(N-1)\ln(t_i)} = t_i^{N-1}$$

将方程两边乘以积分因子 $t_i^{N-1}$ ：

$$t_i^{N-1}\beta'(t_i) + (N-1)t_i^{N-2}\beta(t_i) = (N-1)t_i^{N-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt_i} [t_i^{N-1}\beta(t_i)] = (N-1)t_i^{N-1}$$

积分得到：

$$t_i^{N-1}\beta(t_i) = \int (N-1)t_i^{N-1} dt_i = (N-1)\frac{t_i^N}{N} + C$$

解得：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i + \frac{C}{t_i^{N-1}}$$

由 $\beta(0) = 0$ 得到 $C = 0$ ，否则 $t_i \rightarrow 0$ 时，该项会趋近于无穷。即，唯一解是：

$$\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$$

2. 从均衡竞价策略 $\beta(t_i) = \frac{N-1}{N}t_i$ 中，我们可以得到以下几个重要的经济学启示：

1. 出价折让 (Bid Shading)：均衡策略表明，理性的竞拍者不会出价其真实估值 $t_i$ ，而是会出一个打了折扣的价格。折扣因子是 $\frac{N-1}{N}$ 。这种行为被称为“出价折让”。其根本原因在于第一价格拍卖的支付规则：如果你赢了，你支付的是你自己的出价。为了在获胜时能获得正的收益（即 $t_i - b_i > 0$ ），你的出价 $b_i$ 必须严格小于你的真实估值 $t_i$ 。出价太高会减少你的潜在利润，而出价太低会降低你的获胜概率。这个公式给出了在这两者之间权衡的最优解。
2. 竞争的影响：竞价函数明确地依赖于竞拍者的总数 $N$ 
  - 当竞拍者数量 $N$ 增加时，比率 $\frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$ 会趋近于1。
  - 这意味着，随着竞争变得越来越激烈，每个竞拍者的出价会越来越接近其真实估值。例如，在只有两个竞拍者( $N=2$ )的情况下，出价是 $\beta(t_i) = \frac{1}{2}t_i$ ，折让幅度很大。但当有10个竞拍者( $N=10$ )，出价是 $\beta(t_i) = \frac{9}{10}t_i$ ，已经相当接近真实估值了。
  - 直觉解释：当有更多竞争对手时，你为了获胜所需要击败的对手就越多。为了不被别人轻易超越，你必须更积极地出价。对失去拍卖的恐惧超过了对赢得拍卖时支付过多的担忧，从而推高了整体的出价水平。
3. 收益等价性原理的体现 (Revenue Equivalence Theorem)：我们可以计算一下在此拍卖中卖家的期望收益。卖家的收益是最高出价 $\max(b_1, \dots, b_N)$ 。因为出价函数是递增的，拥有最高估值 $t_{(N)}$ 的人会给最高出价 $\beta(t_{(N)}) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$ 。卖家的期望收益为 $\mathbb{E}[\text{Revenue}] =$

$\mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_N\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right]$ 。对于 $N$ 个从 $[0, 1]$ 均匀分布中抽取的独立样本，最大值统计量 $t_{(N)}$ 的期望值为 $\mathbb{E}\left[t_{(N)}\right] = \frac{N}{N+1}$ 。因此，卖家的期望收益为：

$$\mathbb{E}[\text{Revenue}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

## 2.2. 收入等价原理

有 $N$ 个竞拍者，并且 $N$ 个竞拍者的估值是独立的，且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。考虑如下规则的全支付拍卖：每个竞拍者提交一个报价，报价最高的竞拍者赢得物品，但所有竞拍者无论是否获得物品都要支付自己的报价。注意，以下讨论只考虑考虑估价为0的竞拍者的期望支付为0的递增对称均衡。

1. 求 2.1 题的均衡下一个估值为 $x$ 的竞拍者的均衡期望支付 $m(x)$ ；
2. 求 2.1 题的均衡下卖家的期望收入；
3. 根据收入等价原理证明：全支付拍卖的递增对称均衡就是 $\beta(x) = m(x)$ 。

**Solution:**

1. 在问题 2.1 中，我们已经求出第一价格拍卖（First-Price Auction）的均衡竞价策略为 $\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$ 。一个估值为 $x$ 的竞拍者的期望支付（Expected Payment）是指他每次参与拍卖平均需要支付的金额。在第一价格拍卖中，只有获胜时才需要支付，所以期望支付等于其出价乘以获胜的概率。

出价：对于估值为 $x$ 的竞拍者，他的出价是 $b = \beta_{FP}(x) = \frac{N-1}{N}x$ 。

获胜的概率：该竞拍者获胜，当且仅当他的估值 $x$ 高于其他所有 $N-1$ 个竞拍者的估值。

$$P(\text{获胜}) = P(t_j < x \text{ for all } j \neq i)$$

由于所有估值 $t_j$ 独立服从 $[0, 1]$ 均匀分布，因此 $P(t_j < x) = x$ 。

$$P(\text{获胜}) = x^{N-1}$$

$$m(x) = \left(\frac{N-1}{N}x\right) \cdot (x^{N-1}) = \frac{N-1}{N}x^N$$

2. 在第一价格拍卖中，卖家的收入等于获胜者的出价，也就是所有出价中的最高价。由于竞价函数 $\beta_{FP}(t) = \frac{N-1}{N}t$ 是严格递增的，拥有最高估值的竞拍者将会提交最高的出价。设所有 $N$ 个竞拍者中的最高估值为 $t_{(N)}$ 。

最高出价：获胜者的出价为 $\beta_{FP}(t_{(N)}) = \frac{N-1}{N}t_{(N)}$

卖家的期望收入：卖家的期望收入就是对这个最高出价求期望值。

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \mathbb{E}\left[\beta_{FP}(t_{(N)})\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N-1}{N}t_{(N)}\right] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}[t_{(N)}]$$

最高估值的期望：对于 $N$ 个从 $[0, 1]$ 均匀分布中独立抽取的样本，其最大值的期望值 $\mathbb{E}[t_{(N)}]$ 一个标准统计学结论：

$$\mathbb{E}[t_{(N)}] = \frac{N}{N+1}$$

计算结果：

$$\mathbb{E}[\text{收入}] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

3. 我们可以应用收入等价原理。该原理指出，对于任何给定的估值 $x$ ，竞拍者在两种拍卖机制下的期望支付必须是相等的。

- 第一价格拍卖的期望支付: 我们在第 1 问中已经求出，对于估值为 $x$ 的竞拍者，其期望支付为 $m(x) = \frac{N-1}{N}x^N$
- 全支付拍卖的期望支付: 在全支付拍卖中，根据规则，竞拍者无论输赢都必须支付其出价。因此，如果一个竞拍者遵循某个竞价策略 $\beta_{AP}(x)$ ，那么他的支付额是确定的，就是他出的价钱 $\beta_{AP}(x)$ 。他的期望支付就等于他的出价本身。

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = \beta_{AP}(x)$$

- 根据收入等价原理，两种机制下的期望支付必须相等：

$$\mathbb{E}[\text{支付}_{AP}] = m(x)$$

$$\beta_{AP} = \frac{N-1}{N}x^N$$

根据收入等价原理，我们证明了在满足所述条件的设定下，全支付拍卖的递增对称均衡竞价函数就是  $\beta(x) = m(x) = \frac{N-1}{N}x^N$ 。

这揭示了一个深刻的联系：一种拍卖机制下的均衡竞价函数（全支付拍卖），可能等于另一种拍卖机制下的均衡期望支付函数（第一价格拍卖）。

### 2.3. 反向拍卖的迈尔森引理

在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购产品的卖家。每位竞拍者 $i$ 报出自己产品的成本 $c_i$ ，买家收到所有竞拍者报告的成本向量后决定分配规则 $x$ 和支付规则 $p$ ，其中 $x_i(c_i)$ 表示竞拍者 $i$ 报告成本 $c_i$ 时购买竞拍者 $i$ 产品的概率， $p_i(c_i)$ 表示竞拍者 $i$ 报告成本 $c_i$ 且竞拍者 $i$ 的产品被购买时给竞拍者 $i$ 的支付。

假设竞拍者的产品没有被卖出时的效用为 0，因此竞拍者 $i$ 报出任意的 $c'_i$ 时的期望效用可以表达为

$$u_i(c'_i) = x_i(c'_i) \cdot (p_i(c'_i) - c_i)$$

1. 根据 DSIC 的定义写出反向拍卖机制 $(x, p)$ 满足 DSIC 时竞拍者效用应当满足的条件；
2. 根据课上给出的迈尔森引理，给出并证明反向拍卖机制是 DSIC 的充要条件（假设 $c \rightarrow \infty$ 时， $c \cdot x_i(c) \rightarrow 0$ 且 $p_i(c) \cdot x_i(c) \rightarrow 0$ ）。

**Solution:**

#### 1. DSIC 定义

DSIC 是“占优策略激励相容”（Dominant Strategy Incentive Compatible）的缩写。其定义是：对于任何一个参与者，无论其他参与者采取什么策略，其最优策略都是“诚实汇报”，即报告其真实的类型。

在当前的反向拍卖场景中，参与者（卖家）的类型是他的真实成本 $c_i$ 。“诚实汇报”意味着他报告的成本 $c'_i$ 就等于他的真实成本 $c_i$ 。

因此，一个反向拍卖机制 $(x, p)$ 满足 DSIC，当且仅当对于任意一个卖家 $i$ ，其真实成本为 $c_i$ ，诚实汇报所带来的期望效用不低于谎报任意其他成本 $c'_i$ 所带来的期望效用。

用数学公式表达，该条件是：对任意卖家 $i$ ，任意真实成本 $c_i$ ，以及任意可能的谎报成本 $c'_i$ ，都必须满足以下不等式：

$$u_i(c_i) \geq u_i(c'_i)$$

将效用函数的具体形式代入，得到 DSIC 的条件为：

$$x_i(c_i) \cdot (p_i(c_i) - c_i) \geq x_i(c'_i) \cdot (p_i(c'_i) - c_i)$$

这个不等式必须对所有的  $c_i$  和  $c'_i$  都成立。它构成了后续分析的基础。

2. 常该引理用于正向拍卖（买家竞价），但我们可以将其思想应用到反向拍卖（卖家竞价）中。一个机制  $(x, p)$  是 DSIC 的充要条件如下：

一个反向拍卖机制  $(x, p)$  是 DSIC 的，当且仅当它同时满足以下两个条件：

1. 分配规则的单调性 (Monotonicity)：对于任意卖家  $i$ ，其被选中的概率  $x_i(c)$  必须是其报告成本  $c$  的非增函数。也就是说，如果  $c_1 < c_2$ ，则必须有  $x_i(c_1) \geq x_i(c_2)$ 。
2. 支付规则 (Payment Rule)：对于任意卖家  $i$ ，如果他选中 ( $x_i(c_i) > 0$ )，支付给他的款项  $p_i(c_i)$  必须满足：

$$p_i(c_i) = v_i + \frac{1}{x_i(c_i)} \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

或者更通用地描述其期望支付  $P_i(c_i) = x_i(c_i)p_i(c_i)$ ：

$$P_i(c_i) = c_i x_i(c_i) + \int_{c_i}^{\infty} x_i(z) dz$$

证明：我们将分别证明这两个条件的必要性 (DSIC  $\Rightarrow$  条件) 和充分性 (条件  $\Rightarrow$  DSIC)。

设卖家  $i$  的均衡期望效用为  $U_i(c_i) = u_i(c_i) = x_i(c_i)(p_i(c_i) - c_i)$ 。

## 2.4. 虚拟估值和正则性条件

本题将推导出对于虚拟估值  $c(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$  和正则化条件的有趣描述。考虑  $[0, v_{\max}]$  上严格单调递增的分布函数  $F$ ，其概率密度函数  $f$  为正，其中  $v_{\max} < +\infty$ 。对于估值服从分布  $F$  的竞拍者，当交易成功概率为  $q \in [0, 1]$  时，定义  $V(q) = F^{-1}(1 - q)$  为物品的“价格”，进而可以定义  $R(q) = q \cdot V(q)$  为从竞拍者处获得的期望收益。称  $R(q)$  为  $F$  的收益曲线函数，注意  $R(0) = R(1) = 0$ 。

1. 请解释为什么  $V(q)$  可以被视为物品的价格；
2.  $[0, 1]$  上的均匀分布的收益曲线函数是什么？
3. 证明收益曲线在  $q$  点的斜率（即  $R'(q)$ ）是  $c(V(q))$ ，其中  $c$  是虚拟估值函数；
4. 证明当且仅当收益曲线是凹的时候，概率分布是正则的。

## 2.5. 贝叶斯劝说：检察官与法官

考虑检察官劝说法官判决的例子：假设法官（信号接收者）对于一个被告人，必须做出以下两种决策之一：判决有罪 (convict) 或无罪释放 (acquit)。

- 被告人有两种类型：有罪 (guilty) 或无罪 (innocent)；
- 法官在公正判决下获得的效用为 1：如果有罪被判有罪，无罪被判无罪，否则效用为 0；
- 检察官（信号发送者）为法官提供有关被告的证据（发送信号），如果被告人判有罪，检察官获得效用 1，否则效用为 0；
- 法官和检察官对被告人的类型有相同的先验概率分布： $\mu_0(\text{guilty}) = 0.3, \mu_0(\text{innocent}) = 0.7$ 。

检察官进行调查收集有关被告人的证据，因此检察官的策略是选择一个提供证据的策略，希望改变法官的判决，使得被判有罪的越多越好（检查官效用最大化）。形式化地说，提供证据就是一个  $\pi(\cdot | \text{guilty})$  和  $\pi(\cdot | \text{innocent})$  的信号机制，并且这一信号机制在博弈前是公开给法官的（或者说可验证的）。

1. 根据信息设计的显示原理，给出下面需要考虑的信号机制的形式；
2. 求检察官使用完全诚实的信号机制的情况下，检察官和法官的效用；
3. 求检察官最优信号机制下检察官的效用，以及最优信号机制下法官后验概率分布的分布；
4. 求检察官的最优信号机制。



## 2.6. 信息的价值

设自然的状态集合为  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ，买家的先验分布为  $\mu_0(\omega_1) = 0.7, \mu_0(\omega_2) = 0.3$ 。设买家的行动集合为  $A = \{a_1, a_2\}$ ，效用函数为

$$u(a_1, \omega_1) = 2, u(a_1, \omega_2) = 0$$

$$u(a_2, \omega_1) = 0, u(a_2, \omega_2) = 3$$

记  $\mu_0(\omega_1) = \theta$ ，则  $\mu_0(\omega_2) = 1 - \theta$ 。假设有一个数据卖家提供如下信号机制：  $S = \{s_1, s_2\}$ ，且

$$\pi(s_1 | \omega_1) = 0.9, \pi(s_2 | \omega_1) = 0.1$$

$$\pi(s_1 | \omega_2) = 0.7, \pi(s_2 | \omega_2) = 0.3$$

求卖家信号机制对买家的价值。