Lecture 7 :拍卖与机制设计基础

一、拍卖理论基础

1.出售物品的方式

如何出售一个物品？除了最常见的摆在超市货架上以固定价格出售的方式，我们的脑海中不难浮现出菜市场中买卖双方讨价还价的场景，也隐约能想起与日常生活有些遥远的“100 万第三次，成交”的拍卖形式。通常而言，出售物品的方式可以分为以下两种方式：

- 公布价格（posted pricing）：指以在菜单/货架等上标明的固定价格出售物品的方式，餐厅吃饭、超市和互联网购物等都是这种方式的例子。
- 拍卖（auction）：指以买方出价、卖方出价或买卖双方互相出价决定最终物品的出售对象以及出售价格的方式，其中的出价称为投标（bid），通俗而言也可称报价；讨价还价可以建模为买卖双方互相投标的过程，因此也可以视为一类特殊的拍卖。

2.常见的拍卖形式

- 英式拍卖（English auction）或公开升价拍卖（open ascending price auction）：最广为人知的拍卖形式。拍卖师（auctioneer）（不一定是卖家本人，可能只是一个中介）从一个比较低的价格开始，只要还有至少两个感兴趣的竞拍者，就以一个较小的增量逐渐提高价格，直到只剩下唯一一个竞拍者为止。此时唯一的竞拍者赢得拍卖品并向拍卖师支付倒数第二个竞拍者退出时竞拍的价格；
- 荷式拍卖（Dutch auction）或公开降价拍卖（open descending price auction）与英式拍卖相反，拍卖师从一个足够高的价格开始（保证没有竞拍者感兴趣），然后逐渐降低价格，直到有竞拍者愿意接受价格为止。此时该竞拍者赢得拍卖品并向拍卖师支付这个价格。

英式拍卖最熟悉的场景或许就是古董拍卖，当然例如政府土地等的拍卖也是英式拍卖的典型应用。荷式拍卖则在一些特殊场景中有所应用，这一应用与“荷式”这一名字的由来有关：荷兰盛产郁金香，而花卉保质期短，因此拍卖需要尽快完成，显然降价拍卖比升价拍卖更具有时间效率。

英式和荷式拍卖都属于公开拍卖，即所有竞拍者都能看到其他竞拍者的出价。相对的一类场景拍卖称为密封拍卖（sealed-bid auction），即所有竞拍者以密封形式提交竞价，传统的以寄信封形式提交竞价的拍卖即属于这一类，更现代的例子则是在网页上直接提交报价（如 eBay）。

密封价格拍卖中最常见的两种为第一价格拍卖（first-price auction）和第二价格拍卖（second-price auction），简称一价拍卖和二价拍卖。

- 前者指报价最高的竞拍者赢得物品，并支付自己的报价（也就是所有报价中最高的报价）；
- 后者也是报价最高的竞拍者赢得物品，但只需要支付所有报价中第二高的报价。

有的拍卖中会设置保留价格（reserve price），指卖家在拍卖开始前设定的最低出售价格。如果所有报价都低于保留价格，卖家选择不卖出物品。当然有的拍卖也会设置入场费（entry fee），即所有参与者在拍卖开始前需要支付的费用，无论是否赢得拍卖。

在有的拍卖中，不一定只有单个物品待出售，这类拍卖称为多物品拍卖（multi-item auction），只出售一个物品的拍卖称为单物品拍卖（single-item auction）；

- 多物品拍卖中有的是拍卖多个相同物品，例如数据产品拍卖，因为可以数据零成本复制，因此可以在一场拍卖中出售完全一致的多份数据；
- 另一类是可以同时拍卖多个不同物品，例如著名的频谱拍卖，政府可以同时拍卖多个不同频段的无线电频谱。

有的拍卖只需买方一轮投标即可决定拍卖结果，如密封第一、第二价格拍卖，有的拍卖可能需要多轮逐次决定。还有一些拍卖场景需要卖家也提供投标，例如讨价还价（bargaining），或双向拍卖（double auction），一种基本的双向拍卖方式是取买卖双方报价均值为最后的售价。

还有一类拍卖称为反向拍卖（reverse auction）是卖家报价的，在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购商品的卖家，买家通过卖家的投标，结合其提供的商品质量决定选择哪些卖家的商品。不难发现，常见的招标就可以使用反向拍卖的方式进行。

总结而言，上面提到的拍卖都可以从三个角度进行分类：
1. 投标规则：只有买家投标，只有卖家投标，还是买卖双方投标？投标是针对单个物品，还是可以同时投标多个物品？是否投标低于某个价格无效？
2. 交易规则：拍卖结果是哪些竞拍者可以获得物品？获得物品的竞拍者需要支付多少？没有获得物品的竞拍者是否需要支付？
3. 信息规则：投标时是否公开其他投标者的报价？

3.单物品密封拍卖的一般框架
从最容易分析的单物品密封拍卖入手，引出拍卖的基本问题、分析方法和一些常用的基本结论。
- 一个卖家有一个不可分割的物品待出售；
- 有n个潜在的买家(竞拍者)$N = \{1, 2, ..., n\}$
  - 每个买家i对物品有一个心理价位(估值)t_i，但t_i对卖家以及其它买家而言是不完全信息(即t_i是买家的类型)；
  - 买家估值的先验概率密度$f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^+$是共同知识，其中$a_i$和$b_i$是买家$i$估值的下界和上界；
  - 假设f_i连续且$f_i(t_i) > 0$对所有$t_i \in [a_i, b_i]$成立，则t_i的分布函数

$$F_i(t_i) = \int_{a_i}^{t_i} f_i(s_i) ds_i$$

  分布函数在t_i处的值表示参与人i心理价位小于等于t_i的概率。
- 卖家对物品也有一个估值，代表这个物品没被卖出去仍被卖家持有时卖家的效用，记为t_0，这一信息是共同知识。为讨论方便，假定$t_0 = 0$。

用不完全信息静态博弈描述单物品拍卖：
- 每个买家对物品的估值是私人信息，但具有先验分布共同知识；
- 每个买家i的策略是选择一个报价b_i；
- 卖家没有策略，只需要按照给定的拍卖的规则（一价/二价），基于买家的报价$b = (b_1, ..., b_n)$，决定博弈的结果(x, p)；
  - 其中x是物品的分配规则，$x_i(b)$表示买家i在所有竞拍者投标为b下获得物品的概率；
  - p是支付规则，$p_i(b)$表示买家i在所有竞拍者投标为b下需要支付的价格。当然，在单物品拍卖中，要求

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(b) \leq 1$$

  即只有一个物品待出售。如果等于 1，代表物品总会卖出去，如果小于 1，代表有可能卖家选择不卖出物品。注意，$x_i(b)$不一定只取 0 和 1，也可能是一个概率。

给定一个分配结果(x, p)，每个买家 i 的效用以拟线性效用函数的形式表达为

$$u_i = x_i(b) t_i - p_i(b)$$

其中$x_i(b) t_i$表示买家i获得物品的期望收益（获得物品的概率乘以物品的效用），$p_i(b)$表示买家i需要支付的价格。

注意无论什么类型的拍卖，最终的结果都是由分配规则和支付规则决定。 接下来我们将分别讨论第二价格拍卖和第一价格拍卖的博弈结果。

4.单物品第二价格拍卖

首先根据上述讨论形式化第二价格拍卖。在第二价格拍卖中，假设买家投标为$b = (b_1, .., b_n)$，那么最终的分配规则(x, p)为

$$x_i(b) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } b_i = \max_{j \in N} b_j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$p_i(b) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b_j & \text{如果} b_i = \max_{j \in N} b_j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

即报价最高的买家赢得物品，但只需要支付第二高的报价。

有多个买家报出相同的最高报价时该如何处理？
- 一方面由于每个买家的估值服从连续分布，因此这种情况的概率为 0；
- 另一方面即使出现这种情况，卖家也可以随机选择一个报价最高的买家赢得物品打破平局；
- 如果没有特别说明，都忽略多个买家报出相同最高报价的情况。

5.二价拍卖是诚实占优的

我们刻意在首先介绍第二价格拍卖，而非按照自然的顺序首先介绍第一价 格拍卖，这是因为第二价格拍卖的博弈均衡非常简单且具有良好的性质：

二价拍卖诚实占优：在单物品第二价格拍卖中，即每个竞拍者将自身估值t_i作为报价b_i得到的$b = (t_1, ..., t_n)$是(弱)占优策略均衡。简而言之，所有竞拍者诚实报价是(弱)占优策略均衡。

诚实报价是占优策略是二价拍卖的一个非常重要的性质：
- 竞拍者参与二价拍卖时的策略非常简单：只需要将自己的估值作为报价即可，不需要考虑与其他竞拍者的复杂关系；
- 另一方面，诚实报价可以显示竞拍者的真实估值，从而打破信息不对称，卖家只需直接选出报价最高的竞拍者即可实现社会福利最大化；因为社会福利就等于拥有物品的人对物品的估值，因此最大化社会福

利就要将物品转移到对其估值最高的人手中。

证明：考虑任意的竞拍者i，设$p_i = \max_{j \neq i} t_j$，即$p_i$是除了$i$之外的所有竞拍者的最高报价。分三种情况讨论：
- 如果$t_i > p_i$，那么i如果报价$b_i = t_i$就会赢得拍卖并支付p_i，效用$t_i - p_i > 0$。考虑策略的偏离，如果选择报价提高至$b_i' > t_i$，结果没有任何改变；如果报价降到$t_i > b_i' \geq p_i$，结果仍然一致；但如果降低报价至$b_i' < t_i$，那么i将不再赢得拍卖，因此i的效用将变为 0，故$t_i > p_i$时i诚实报价是(弱)占优策略；
- 如果$t_i < p_i$，那么i如果报价$b_i = t_i$不会赢得拍卖，效用 0.考虑策略的偏离，如果报价降低至$b_i' < t_i$，结果没有任何改变；如果报价提高至$t_i < b_i' < p_i$，因此i的效用将变为$t_i - p_i < 0$，故$t_i < p_i$时i诚实报价是(弱)占优策略；
- 如果$t_i = p_i$，事实上拍卖的输赢带给i的效用都是 0，因此i无论报价多少都不会影响效用。

综上，对于任意的竞拍者i，诚实报价是（弱）占优策略均衡。

6.二价拍卖的缺陷

尽管第二价格拍卖具有如此好的性质，但在通常的印象中似乎并不如第一价格拍卖常见。一个重要的原因是，卖家可以操纵第二价格拍卖，通过向最高报价者谎称一个比较高的第二价格来提高自己的收益：

- 例如在第二价格拍卖中，你是最高价格的报价者，你的报价为 100 元，第二高报价为 80 元，因此你赢得拍卖并支付 80 元；
- 但因为是密封拍卖，你无法得知第二高报价的准确数值，如果卖家告诉你第二高报价是 90 元，你也无从得知 90 元是不是真的第二高报价，但卖家掌握这一信息，从而可以从信息操纵中获得更高的收益。

7.第一价格拍卖不是诚实占优的

我们自然希望一价拍卖能有二价拍卖那样简单的结果，但只需要稍作分析就会发现一价拍卖的博弈结果并不那么简单：

- 如果一价拍卖中竞拍者报出自己的估值，那么赢下拍卖后的支付就是自己的估值，因此效用为 0，与没有赢下拍卖一致，因此从直观上看一价拍卖的参与人有动机报出低于自己估值的报价。

严格来说，代入二价拍卖诚实报价占优的证明，一价拍卖在$t_i > p_i$时（报价高于第二高价格时），如果将报价从t_i下调到p_i和t_i之间，竞拍者i仍然可以赢下拍卖，但效用可以提高到大于 0 的值，因此一价拍卖并非诚实报价是占优策略，而是有动机报出低于自己估值的报价；由此可以看出二价拍卖诚实的关键：报价与自己的估值无直接关联；

8.第一价格拍卖的均衡

因此接下来尝试从贝叶斯纳什均衡的角度给出一价拍卖的不完全信息静态博弈结果。在一价拍卖中，假设买家投标为$b = (b_1, ..., b_n)$，那么最终的分配规则(x, p)为

$$x_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } b_i = \max_{j \in N} b_j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$p_i(b) = \begin{cases} b_i & \text{如果} b_i = \max_{j \in N} b_j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

下面计算一价拍卖的贝叶斯纳什均衡，一般的结论推导比较复杂，因此只考虑非常简单的情况的计算。

例：假设只有两个竞拍者，并且两个竞拍者的估值是独立的，且都服从$[0,1]$上的均匀分布。两个竞拍者的真实估值记为t_1, t_2，试求解博弈的纯策略贝叶斯纳什均衡。

这一博弈对应类型空间连续且策略空间连续的情况，因此比之前介绍的例子都要复杂。自然地，可以考虑具有如下性质的特殊均衡：

- 纯策略均衡；
- 由于两个竞拍者是对称的，因此考虑对称均衡，即二者的出价策略都是当自己的估值为t_i时出价$\beta(t_i)$；
- 假设β是增函数，即估值越大报价越高；
- $\beta(0) = 0$，即估值为 0 的竞拍者出价也为 0。

回忆纯策略均衡的求解是寻找对方策略的最优反应，因此首先写出当竞拍者 1 报价b_1，竞拍者 2 报价$\beta(t_2)$时竞拍者 1 的效用为：

$$(t_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \beta(t_2)) = (t_1 - b_1) \cdot \beta^{-1}(b_1)$$

对b_1求导有取极大值的必要条件为

$$-\beta^{-1}(b_1) + \frac{t_1 - b_1}{\beta'(\beta^{-1}(b_1))} = 0$$

已知考虑对称均衡，故均衡时$b_1 = \beta(t_1)$，代入上式有

$$t_1 = t_1\beta'(t_1) + \beta(t_1)$$

上式对任意的t_1都成立，可以改写为

$$t = (t\beta(t))'$$

不难解得$\beta(t_1) = \frac{t_1}{2}$，这就解出了一价拍卖的对称递增均衡。当然上述一阶条件只是极值的必要条件，还需要检验充分性，此处省略。

需要强调的是，这一均衡仅仅只是在竞拍者估值独立同分布（而且是最简单的均匀分布）下的递增对称均衡，即使如此求解过程也并不简单，可想而知非独立同分布情况下的均衡更难以求解。因此第一价格拍卖下竞拍者的策略决定就会更加复杂，远不及二价拍卖那样简单。

8.收入等价定理

二、机制设计基础

三、福利最大化机制设计