



Colección

Esencial

Álgebra esencial



Yoniln Vilca Sánchez
Ricardo Mamani Suca



Lumbrales
Editores

ÍNDICE

1 Conjuntos numéricos

Lectura de motivación	13
Números naturales (\mathbb{N})	14
Números enteros (\mathbb{Z})	15
Números racionales (\mathbb{Q})	20
Números irracionales (\mathbb{I})	25
Números reales (\mathbb{R})	25
Resolvemos juntos	30
Practiquemos lo aprendido	41

2 Leyes de exponentes

Lectura de motivación	47
Concepto	48
Potenciación	48
Definiciones	49
Propiedades de la potenciación	51
Radicación en \mathbb{R}	54
Propiedades de la radicación	60
Resolvemos juntos	66
Practiquemos lo aprendido	78

3 Productos notables

Lectura de motivación	85
Concepto	86
Trinomio cuadrado perfecto	86
Identidades de Legendre	90
Multiplicación de binomios con un término común	91

Diferencia de cuadrados	93
Cubo de un binomio	96
Suma y diferencia de cubos	97
Resolvemos juntos	100
Practiquemos lo aprendido	116

4 Polinomios

Lectura de motivación	123
Definiciones previas	124
Valor numérico	125
Cambio de variable	127
Polinomio de una variable	130
Polinomios de más de una variable	137
Polinomios especiales	137
Resolvemos juntos	140
Practiquemos lo aprendido	156

5 División de polinomios

Lectura de motivación	163
Definición	164
Tipos de división	167
Propiedades	168
Método de división de Horner	172
Regla de Ruffini	177
Cálculo del resto	180
Cocientes notables	183
Resolvemos juntos	189
Practiquemos lo aprendido	202

PARIS
para
AMOR A SOFÍA

6 Factorización de polinomios

Lectura de motivación	207
Concepto	208
Factor de un polinomio	209
Polinomio primo	213
Factores primos	214
Métodos de factorización	217
Divisores binómicos	230
Resolvemos juntos	240
Practiquemos lo aprendido	256

8 Desigualdades

Lectura de motivación	307
Definición	308
Números reales	310
Propiedades fundamentales	313
Intervalos	316
Problemas sobre variaciones	323
Problemas sobre máximos y mínimos	331
Resolvemos juntos	338
Practiquemos lo aprendido	355

7 Ecuaciones

Lectura de motivación	261
Concepto	262
Solución de una ecuación	262
Conjunto solución (CS)	262
Ecuación lineal	263
Determinación de una variable en términos de las otras	264
Ecuaciones cuadráticas	265
El discriminante	271
Propiedades de las raíces (teorema de Cardano)	272
Ecuaciones de grado superior	275
Ecuación bicuadrada	278
Resolvemos juntos	282
Practiquemos lo aprendido	302

9 Inecuaciones

Lectura de motivación	361
Concepto	362
Inecuación lineal	368
Inecuación cuadrática	369
Inecuación polinomial de grado superior	381
Inecuación fraccionaria	385
Resolvemos juntos	389
Practiquemos lo aprendido	406

10 Valor absoluto

Lectura de motivación	411
Noción geométrica	412
Definición	413
Ecuaciones con valor absoluto	420
Inecuaciones con valor absoluto	423

Desigualdad triangular	426	Ecuación logarítmica	523
Método de zonas	428	Resolvemos juntos	527
Resolvemos juntos	432	Practiquemos lo aprendido	543
Practiquemos lo aprendido	450		
11 Teoría de funciones		13 Sistema de ecuaciones	
Lectura de motivación	455	Lectura de motivación	549
Concepto de función	456	Definición	550
Definición de función	458	Clasificación	552
Regla de correspondencia	460	Sistemas lineales	552
Funciones reales	462	Sistemas no lineales	565
Gráfica de una función real	465	Resolvemos juntos	569
Función como conjunto de pares ordenados	467	Practiquemos lo aprendido	585
Funciones como modelos matemáticos	468		
Funciones elementales	470	14 Programación lineal	
Resolvemos juntos	486	Lectura de motivación	591
Practiquemos lo aprendido	501	Inecuaciones lineales con dos variables	592
12 Logaritmos		Gráfica de una inecuación lineal con dos variables	592
Lectura de motivación	507	Sistema de inecuaciones lineales con dos variables	596
Definición	508	Programación lineal (bidimensional)	599
Teoremas	512	Resolvemos juntos	603
Cologaritmo	522	Practiquemos lo aprendido	622
Antilogaritmo	522	Glosario	630
		Bibliografía	631

CAPÍTULO 1



CONJUNTOS NUMÉRICOS



En la historia de las matemáticas, los números naturales aparecieron muy pronto. Como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema de la vida cotidiana. Los hombres antiguos necesitaban medir longitudes, determinar áreas, calcular tiempos, pesos y otros tipos de medida. Al enfrentarse a estas necesidades, se dieron cuenta de que no era suficiente contar con los números naturales para obtener estos datos de manera exacta, ya que eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma, pero que no involucraban a los números naturales, por lo que fue necesario ampliar este concepto surgiendo así los números racionales.

La mayor parte de nuestras actividades diarias implica hacer usos de los números. Por ejemplo, al comprar una docena de tarros de leche o dos manos de plátano, estamos usando números naturales; cuando compramos $\frac{3}{4}$ de arroz, $\frac{1}{2}$ kilo de harina o $\frac{1}{4}$ de huevos, estamos usando los números racionales.

Aprendizajes esperados

- Identificar los números enteros y racionales.
- Resolver problemas de las cuatro operaciones con números enteros.
- Resolver problemas de las cuatro operaciones con números racionales.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

El aprendizaje de este contenido es importante porque tiene relación con la gran mayoría de situaciones de la vida diaria como, por ejemplo, el hecho de contar, medir, pesar, etc. Además, realizar las operaciones básicas, (suma, resta, etc.) en conjuntos numéricos como \mathbb{Z} y \mathbb{Q} es prerequisito para los capítulos posteriores.

Conjuntos numéricos

1. NÚMEROS NATURALES (N)

Los números naturales surgen como respuesta a la necesidad de nuestros antepasados de contar los elementos de un conjunto (por ejemplo, los animales de un rebaño) y de asignar un símbolo a una determinada cantidad de objetos.

El primer conjunto numérico que se considera es el de los números naturales, el cual está representado por

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre será un número natural.

Ejemplos

- $8 + 7 = 15$
- $5 \cdot 9 = 45$

La suma 15 y el producto 45 son números naturales. En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre será un número natural.

Ejemplos

- $8 - 5 = 3$
- $12 \div 3 = 4$

Los resultados son números naturales, pero $5 - 8$ y $3 \div 12$ no son números naturales. Así, dentro del sistema de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

1.1. Sumas notables

1.1.1. Suma de los n primeros números naturales

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n \rightarrow$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 30 \rightarrow S = \frac{30(30+1)}{2} = 465$$

1.1.2. Suma de los n primeros números impares

$$S=1+3+5+7+\dots+2n-1 \rightarrow S=n^2$$

Ejemplo

$$S=1+3+5+7+\dots+39 \rightarrow S=20^2=400$$

$$\rightarrow 2n-1=39 \rightarrow n=20$$

1.1.3. Suma de los n primeros números pares

$$S=2+4+6+8+\dots+2n \rightarrow S=n(n+1)$$

Ejemplo

$$S=2+4+6+\dots+40 \rightarrow S=20(20+1)=420$$

2. NÚMEROS ENTEROS (\mathbb{Z})

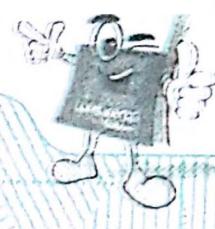
En la vida real hay situaciones en las que los números naturales no son suficientes.

Por ejemplo, si tienes \$10 y debes \$15, ¿de cuánto dinero dispones?

A continuación veremos otros ejemplos de situaciones en las que se necesitan números enteros.

- “Debe \$133” se escribe -133 .
- “Tiene \$113” se escribe $+113$.
- “El buzo está a 15 m de profundidad” se escribe -15 .
- “El globo está a 20 m de altura” se escribe $+20$.
- “Bajamos al sótano 4” se escribe -4 .
- “Nació en el año 234 antes de Cristo” se escribe -234 .
- “El avión vuela a 3225 m de altura” se escribe $+3225$.
- “El termómetro marcaba 5 °C bajo cero” se escribe -5 .

Dato curioso


El signo = apareció en el siglo XVI y parece que la idea surgió porque “no hay dos cosas más iguales que dos rectas paralelas”.

Reto al saber

Complete los siguientes cuadrados mágicos:

7			6
2	4	6	5
			4

De los ejemplos podemos deducir que los números enteros son una ampliación de los números naturales.

Dato curioso

A los números negativos en la Antigüedad los llamaban números ficticios, absurdos o raíces falsas.

Reto al saber

Descubra cuál de estos cuadrados es un cuadrado mágico. Indique, en el caso correcto, cuál es el valor de la suma de cada línea.

2	-1	-4
5	-16	8
-10	-14	-7

-3	-2	5
0	2	4
-1	6	1

Observación

- Los números naturales se consideran enteros positivos.
- Los números enteros negativos van antecedidos del signo $-$.
- El cero es un número entero, pero no es negativo ni positivo.

2.1. La recta numérica

Los números enteros pueden ordenarse de menor a mayor en la recta numérica.



números enteros negativos números enteros positivos o números naturales

Ejemplo

¿Cuál es el valor de M y de N ?

Valor de $M=1$

Valor de $N=-3$

No olvide

Cuanto más a la derecha está situado un número en la recta numérica, es mayor.

Cuanto más a la izquierda está situado, es menor.

Veamos los siguientes ejemplos dados en la recta numérica:

1.



Notemos que -1 está más a la izquierda que 3 , entonces -1 es menor que 3 . Se escribe $-1 < 3$.

2. Determinamos el número mayor y el número menor.



Notemos que -6 está a la izquierda de -2 , entonces -6 es menor que -2 .

Por lo tanto, el número mayor es -2 y el menor es -6 .

3. Hallamos el valor de A y de B .



El valor de $A = -4$ y de $B = 1$.



El valor de $A = -6$ y de $B = 3$.

APLICACIÓN 1

Escriba el signo $<$ o $>$ según convenga.

- a. $-3 \dots -7$ b. $-2 \dots 4$ c. $4 \dots -8$

RESOLUCIÓN

Escribimos el signo que corresponde.

- a. $-3 > -7$ b. $-2 < 4$ c. $4 > -8$

APLICACIÓN 2

Ordene de menor a mayor.

- a. $6; -5; -10; 12$ b. $4; -21; -6; -4; 6$

RESOLUCIÓN

a. Ubicamos los números en la recta numérica.



La respuesta es $-10; -5; 6; 12$.

b. Ubicamos los números en la recta numérica.



Por lo tanto, de menor a mayor, los números son $-21; -6; -4; 4; 6$.



Importante

Propiedades

$$(-1) \cdot a = -a$$

Ejemplos

- $\cdot (-1) \cdot 6 = -6$
- $\cdot (-1) \cdot 7 = -7$

$$-(-a) = a$$

Ejemplos

- $\cdot -(-2) = 2$
- $\cdot -(-12) = 12$

$$(-a)b = a(-b) = -(ab)$$

Ejemplos

- $\cdot (-2)5 = 2(-5) = -(2 \cdot 5) = -10$
- $\cdot (-4)3 = 4(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$

2.2. Operaciones con números enteros

2.2.1. Suma y diferencia de números enteros

Veamos los siguientes ejemplos:

- $+6+3=9$

Si tengo S/.6 y me dan S/.3, entonces tengo S/.9.

- $-7-8=-15$

Si debo S/.7 y gasto S/.8, entonces acumulo una deuda de S/.15.

- $-6+8=2$

Si tengo S/.8, pero debo S/.6, entonces tengo S/.2.

- $-5+3=-2$

Si debo S/.5 y tengo S/.3, entonces debo S/.2.

Por otro lado, para sumar 3 o más números enteros, tenemos dos métodos:

- a. Agrupar los dos primeros sumandos y sumar el resultado al tercer sumando, y así sucesivamente.

Ejemplo

$$+7-5+4 = +7-5+4 = +2+4 = 6$$

- b. Sumar los positivos por un lado y los negativos por el otro, y finalmente hallar el resultado.

Ejemplos

- $-8+9-4 = -8-4+9 = -12+9 = -3$
- $+6-4+9-5 = +6+9-4-5 = +15-9 = 6$

Observación

Si los dos signos son iguales, el resultado es positivo. Si los dos signos son diferentes, el resultado es negativo.

- $+(+a) = +a$

- $-(-a) = +a$

- $+(-a) = -a$

- $-(+a) = -a$

Ejemplos

$$+(+2) = 2$$

$$-(-7) = 7$$

$$+(-3) = -3$$

$$-(+5) = -5$$

Cuando se presentan algunos ejercicios del tipo $(-5)+(-2)$, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Eliminar los paréntesis: $-5-2$

Operar: -7

$$\therefore (-5)+(-2)=-7$$

Ejemplos

1. Hallamos los resultados de las siguientes operaciones:

- $(+4)+(-5)=+4-5=-1$
- $(-2)+(+4)=-2+4=2$
- $(+1)-(+9)=+1-9=-8$
- $(+3)-(-8)=+3+8=11$
- $(-1)-(+7)=-1-7=-8$
- $-(-5)+(+7)=+5+7=12$
- $-(+3)+(+1)-(+5)=-3+1-5=-2-5=-7$

2. Efectuamos las siguientes operaciones:

- $7+5=12$
- $-5-3=-8$
- $7-3=4$
- $-6+13=7$
- $-4+6-7=+2-7=-5$
- $4-6+8=-2+8=6$
- $-2+5-9=+3-9=-6$

2.2.2. Multiplicación y división de números enteros

Para multiplicar números enteros debemos seguir los siguientes pasos:

- Multiplicar los números sin signos.
- Aplicar la regla de signos.

$$(+)\cdot(+) = + \quad (+)\cdot(-) = -$$

$$(-)\cdot(-) = + \quad (-)\cdot(+) = -$$

Ejemplos

- $(+5)(+3)=15$
- $(-3)(-7)=21$
- $(+4)(-2)=-8$
- $(-5)(+3)=-15$

Para dividir números enteros debemos seguir los siguientes pasos:

- Dividir los números sin signos.
- Aplicar la regla de signos.

$$\begin{array}{ll} (+)\div(+)=+ & (+)\div(-)=- \\ (-)\div(-)=+ & (-)\div(+)=- \end{array}$$

Ejemplos

- $24\div(+6)=4$
- $-20\div(-4)=5$
- $+16\div(-8)=-2$
- $-32\div(+2)=-16$

2.2.3. Operaciones combinadas

Cuando se van a efectuar operaciones combinadas, hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

- Si no hay paréntesis, primero se efectúan todas las multiplicaciones y divisiones. Con los resultados obtenidos se hacen las sumas y restas.
- Si hay paréntesis, se efectúan primero las operaciones de los paréntesis de acuerdo con las reglas anteriores.

APLICACIÓN 3

Efectúe

$$5-(+4)\cdot(-2).$$

RESOLUCIÓN

Del dato

$$5-(+4)\cdot(-2)$$

$$5-(-8)$$

$$\therefore 5+8=13$$

APLICACIÓN 4

Efectúe

$$3 + (-6) \div (+4 - 7).$$

RESOLUCIÓN

Operamos

$$3 + (-6) \div (+4 - 7)$$

$$3 + (-6) \div (-3)$$

$$\therefore 3 + (+2) = +3 + 2 = 5$$

APLICACIÓN 5

Resuelva

$$-7 + [-2 - (-14) \div (+2)].$$

RESOLUCIÓN

Del dato

$$-7 + [-2 - (-14) \div (+2)]$$

$$-7 + [-2 - (-7)]$$

$$-7 + [-2 + 7]$$

$$\therefore -7 + (+5) = -7 + 5 = -2$$

3. NÚMEROS RACIONALES (\mathbb{Q})

Es claro que los números naturales también son números enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos números enteros cualesquiera, el resultado también será un número entero.

Por ejemplo, $-4 + 8 = 4$, $(-4)(6) = -24$ y $4 - 9 = -5$ son enteros, pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado. Por otro lado, vemos que $8 \div (-2) = -4$ es un número entero; pero $-8 \div 3$ no lo es.

Por tanto, dentro del sistema de los números enteros, podemos sumar, multiplicar y restar, pero no siempre podemos dividir.

Para superar la limitación de la división, extendemos el sistema de los números enteros (\mathbb{Z}) al sistema de los números racionales (\mathbb{Q}).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

donde a =numerador y b =denominador.

Ejemplos

$$\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}, \frac{46}{1}; 0,3 = \frac{3}{10}$$

$\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidos.

3.1. Adición y sustracción de fracciones

- a. Cuando dos fracciones tienen un común denominador, pueden sumarse simplemente sus numeradores.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Una regla similar se aplica a la sustracción.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Ejemplos

$$\bullet \quad \frac{5}{13} + \frac{11}{13} = \frac{5+11}{13} = \frac{16}{3}$$

$$\bullet \quad \frac{9}{7} + \frac{5}{7} = \frac{9+5}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\bullet \quad \frac{3}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{3-5}{2x} = \frac{-2}{2x} = \frac{-1}{x}$$

$$\bullet \quad \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\bullet \quad \frac{5}{a} - \frac{2}{a} = \frac{5-2}{a} = \frac{3}{a}$$

b. Cuando dos fracciones tienen denominadores diferentes, se procede de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Una regla similar se aplica a la sustracción.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Ejemplos

$$\bullet \quad \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{6 \cdot 2} = \frac{10+6}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 1 \cdot 6}{6 \cdot 4} = \frac{20-6}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\bullet \quad \frac{x}{6} + \frac{3y}{4} = \frac{4 \cdot x + 3y \cdot 6}{6 \cdot 4} = \frac{4x+18y}{24} = \frac{2x+9y}{12}$$

$$\bullet \quad 3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\bullet \quad \frac{4}{7} - 2 = \frac{4}{7} - \frac{2}{1} = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 7}{7 \cdot 1} = \frac{4-14}{7} = -\frac{10}{7}$$

c. Casos particulares

Suma de un número entero con una fracción

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

Ejemplos

$$\bullet \quad 3 + \frac{1}{5} = \frac{15+1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\bullet \quad 4 + \frac{2}{3} = \frac{12+2}{3} = \frac{14}{3}$$

Resta de un número entero con una fracción

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$$

Ejemplos

$$\bullet \quad 4 - \frac{2}{5} = \frac{20-2}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\bullet \quad 7 - \frac{3}{4} = \frac{28-3}{4} = \frac{25}{4}$$

APLICACIÓN 6

Determine el resultado de operar $\frac{13}{4} - \frac{16}{5}$

RESOLUCIÓN

Del dato

$$\frac{13}{4} - \frac{16}{5} = \frac{13 \cdot 5 - 16 \cdot 4}{4 \cdot 5}$$

$$\therefore \frac{65 - 64}{20} = \frac{1}{20}$$

APLICACIÓN 7

Indique el valor de la siguiente operación:

$$\left(4 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

RESOLUCIÓN

Operamos

$$\left(\frac{4}{1} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{1 \cdot 4}\right)\left(\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{5 \cdot 3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{16 - 1}{4}\right)\left(\frac{3 + 5}{15}\right) = \left(\frac{15}{4}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{8}{4} = 2$$

APLICACIÓN 8

Efectúe $2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{17}{5}$.

RESOLUCIÓN

Operamos

$$2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{17}{5}$$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{9}{10} - \frac{2}{3}\right) + \frac{17}{5} = \frac{3}{2} + \left(\frac{27 - 20}{30}\right) + \frac{17}{5}$$

$$\rightarrow \frac{15 \cdot 3}{15 \cdot 2} + \frac{7}{30} + \frac{17 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{45 + 7 + 102}{30}$$

$$\therefore \frac{154}{30} = \frac{77}{15}$$

**Reto al saber**

Establezca si cada una de las igualdades es válida o no. Luego reemplace cada proposición falsa por una verdadera.

a. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

b. $\frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{5}{7}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{3+9}$

d. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2+5}$

e. $\frac{2}{2+7} = \frac{1}{1+7}$

f. $\frac{x+y}{y} = x$

g. $\frac{2}{3} + \frac{5}{9} = \frac{7}{12}$

3.2. Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando en primer término los dos numeradores y luego los dos denominadores.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplos

- $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 11} = \frac{14}{33}$
- $\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$
- $\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{4}{y}\right) = \frac{2x \cdot 4}{3 \cdot y} = \frac{8x}{3y}$
- $3x\left(\frac{4}{5y}\right) = 3x\left(\frac{4}{1(5y)}\right) = \frac{3x \cdot 4}{1 \cdot 5y} = \frac{12x}{5y}$



3.3. División de fracciones

Para dividir una fracción con otra, la segunda fracción se invierte y después se multiplica por la primera.

$$\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos

- $\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{5}{11}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{11}{5}\right) = \frac{33}{35}$
- $\left(\frac{3x}{2}\right) + \left(\frac{4}{y}\right) = \left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \left(\frac{y}{4}\right) = \frac{3xy}{8}$
- $5 + \left(\frac{6}{5x}\right) = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{5x}{6}\right) = \frac{25x}{6}$
- $\left(\frac{3}{2x}\right) + 5 = \left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{5}{1}\right) = \left(\frac{3}{2x}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10x}$

Importante

Recuerde la siguiente propiedad:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos

- $\frac{6}{10} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$
- $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$
- $\frac{4a}{4 \cdot 3b} = \frac{a}{3b}$
- $\frac{2 \cdot 2x}{2 \cdot 7} = \frac{2x}{7}$
- $\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$
- $\frac{12x}{18x} = \frac{2}{3}$
- $\frac{7xy}{14xz} = \frac{y}{2z}$



Ahora repasemos los temas anteriores con otros ejemplos.

$$\bullet \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{2 - 6}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1 \cdot 15 + 1 \cdot 10}{10 \cdot 15} = \frac{15 + 10}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x + 2x}{2 \cdot 3} = \frac{5x}{6}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{6b} - \frac{a}{2b} = \frac{a}{6b} - \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 2b} = -\frac{2a}{3 \cdot 2b} = \frac{-2a}{6b} = \frac{-a}{3b}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{9}{12}\right) \cdot \left(\frac{28+10}{40}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{38}{40}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{19}{20}\right) = \frac{57}{80}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot x} + \frac{1}{2x} = \frac{2+1}{2x} = \frac{3}{2x}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{6b} - \frac{a}{b} = \frac{a}{6b} - \frac{a \cdot 6}{b \cdot 6} = \frac{a - 6a}{6b} = \frac{-5a}{6b}$$

$$\bullet \quad \frac{7}{6x} + \frac{3}{4x^2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot x}{2 \cdot 6x \cdot x} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4x^2}$$

$$\therefore \frac{14x}{12x^2} + \frac{9}{12x^2} = \frac{14x + 9}{12x^2}$$

$$\bullet \quad \frac{x^2}{3y} + 4y = \frac{x^2}{3y} + \frac{4y}{3y} \cdot 3y$$

$$\therefore \frac{x^2}{3y} + \frac{12y^2}{3y} = \frac{x^2 + 12y^2}{3y}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{3b} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right) = \frac{a}{3b} - \frac{3 \cdot 2a}{3 \cdot b} + \frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \frac{a-6a}{3b} + \frac{b}{a} = \frac{-5a \cdot a}{3b \cdot a} + \frac{b \cdot b \cdot 3}{a \cdot b \cdot 3} = \frac{-5a^2 + 3b^2}{3ab}$$

APLICACIÓN 9

Calcule el valor de la expresión M .

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{5}{3} \div 5 \right) + \frac{3}{4}$$

RESOLUCIÓN

Operamos

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{5}{3} \div 5 \right) + \frac{3}{4}$$

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} \right) + \frac{3}{4}$$

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4}$$

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{3+2}{6} \right) + \frac{3}{4}$$

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{3}{4} \rightarrow M = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\therefore M = 2$$

APLICACIÓN 10

Se tiene la siguiente fracción irreductible:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10} \right) \div \left(\frac{2}{3} + 3 \right) - \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \div 2 \right)$$

Halle el valor de $b - (3 + 4a)$.

RESOLUCIÓN

Operamos

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{3}{10} \right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{3 \cdot 3}{3} \right) - \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \div 2 \right)$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{8+3}{10} \right) \div \left(\frac{2+9}{3} \right) - \left(\frac{2}{9} \div 2 \right)$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{11}{10} \right) \div \left(\frac{11}{3} \right) - \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{11}{10} \cdot \frac{3}{11} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{10} - \frac{1}{9} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{27-10}{90}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{17}{90}$$

Entonces $a=17$ y $b=90$.

Nos piden

$$b - (3 + 4a) = 90 - (3 + 4 \cdot 17) = 90 - (71) = 19$$

4. NÚMEROS IRRACIONALES (I)

Debemos recordar que un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador diferente de cero.

Así $\frac{2}{3}; -\frac{3}{10}; \frac{0}{5}$ y $7 = \frac{7}{1}$ son ejemplos de números racionales.

Además, podemos sumar, multiplicar, restar y dividir dos números racionales (exceptuando la división entre cero) y el resultado siempre será un número racional. De esta manera, las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética (adición, sustracción, multiplicación y división) son posibles dentro de los números racionales.

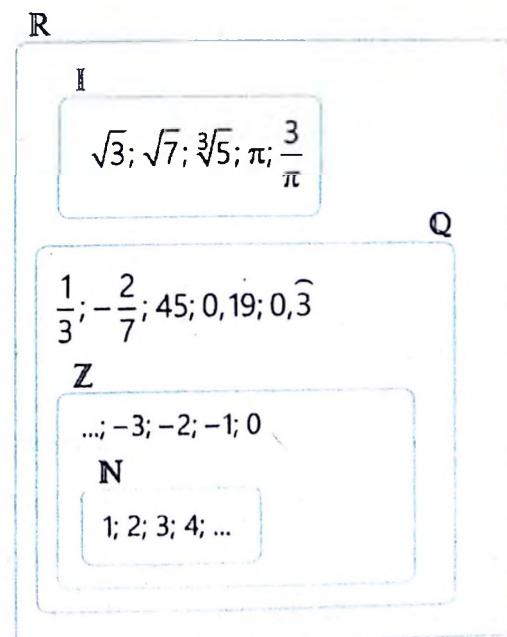
También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, no se pueden expresar como la razón de dos enteros); por ejemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y π no son números racionales, tales números se denominan números irracionales.

Ejemplos

$$\sqrt{7}; \sqrt{5}; \sqrt[3]{6}; e; \frac{3}{\pi^2}$$

5. NÚMEROS REALES (\mathbb{R})

La unión de los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales.



Ejemplo

Dado el siguiente conjunto:

$$\left\{ 2; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; \sqrt{11}; 1,2; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2} \right\}$$

- Los números naturales son 2 y 50.
- Los números enteros son 2; -10 y 50.
- Los números racionales son
 $2; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; 1,2$ y $-\frac{1}{3}$.
- Los números irracionales son $\sqrt{11}$ y $\sqrt[3]{2}$.

**5.1. Propiedades de los números reales**

Todos sabemos que $2+3=3+2$ y que $9+6=6+9$, y así sucesivamente. En álgebra expresamos estos hechos de la siguiente manera: $a+b=b+a$, donde a y b son dos números cualesquiera, es decir, $a+b=b+a$ es una manera concisa de decir “cuando se suman dos números, no importa el orden en el que se sumen”. Este hecho se conoce como la propiedad commutativa de la suma.

Ahora veamos algunas propiedades.

5.1.1. Propiedad commutativa

Si a y b son dos números cualesquiera, entonces

$$a+b=b+a \quad \text{Cuando se suman dos números, no importa el orden.}$$

$$ab=ba \quad \text{Cuando se multiplican dos números, no importa el orden.}$$

Ejemplos

- $3+7=7+3$
- $3+(-8)=(-8)+3$
- $3 \cdot 7=7 \cdot 3$
- $3(-8)=(-8)3$

5.1.2. Propiedad asociativa

Si a , b y c son tres números cualesquiera, entonces

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos se sumen primero.

$$(ab)c=a(bc)$$

Cuando se multiplican tres números, no importa cuáles dos se multipliquen primero.

Ejemplos

- $(2+3)+7=2+(3+7)$
- $(4+7)+11=4+(7+11)$
- $(3 \cdot 7) \cdot 8=3 \cdot (7 \cdot 8)$
- $(2 \cdot 3) \cdot 7=2 \cdot (3 \cdot 7)$

5.1.3. Propiedad distributiva

Si a , b y c son tres números cualesquiera, entonces cuando se multiplica un número por una suma de dos números se obtiene el mismo resultado al multiplicar el número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ba+ca$$

Ejemplos

- $2(3+7)=2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 6 + 14 = 20$
- $(-2)(3+(-8))=(-2)3+(-2)(-8)=-6+16=10$
- $x(y+3)=xy+x \cdot 3=xy+3x$
- $2x+3x=(2+3)x=5x$
- $2(3x)=(2 \cdot 3)x=6x$
- $(2x)(3x)=((2x) \cdot 3)x=(3 \cdot (2x))x=(6x)x=6(x \cdot x)=6x^2$

- $[5(3ab)]2a=(5 \cdot 3 \cdot 2)(a \cdot a) \cdot b=30a^2b$
- $5x+(4y+2x)=5x+(2x+4y)=(5x+2x)+4y=7x+4y$
- $3x(4y+5x)=(3x)(4y)+(3x)(5x)=12xy+15x^2$

5.1.4. Elementos identidad

Si a es un número real cualquiera, entonces $a+0=a$ y $a \cdot 1=a$.

Es decir, si 0 se suma a a , el resultado es a ; y si a se multiplica por 1, el resultado de nuevo es a . Por esta razón, los números 0 y 1 a menudo se conocen como elementos identidad para la adición y la multiplicación, respectivamente, porque no alteran número alguno bajo sus respectivas operaciones.

Inversos

Si a es un número real arbitrario, entonces existe un único número real denominado el negativo de a (denotado por $-a$), tal que

$$a+(-a)=0$$

Si a no es cero, entonces también existe un único número real denominado el recíproco de a (denotado por a^{-1}), tal que

$$a \cdot a^{-1}=1$$

Observe la similitud entre las dos definiciones: cuando $-a$ se suma a a , el resultado es el elemento identidad para la adición; y cuando a^{-1} se multiplica por a , el resultado es el elemento identidad para la multiplicación. A menudo nos referiremos a $-a$ como el inverso aditivo de a y a a^{-1} como el inverso multiplicativo de a . (Algunas veces a^{-1} se denomina simplemente inverso de a).

Ejemplos

- El inverso aditivo de 3 es -3 .
- El inverso multiplicativo de 3 es 3^{-1} .

APLICACIÓN 11

Reduzca la siguiente expresión:

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right)$$

RESOLUCIÓN

Operamos

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right)$$

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \left(\frac{10-6}{15} \right)$$

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{15}$$

$$\frac{2 \cdot 15}{1 \cdot 15} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{5}{15}$$

$$\therefore \frac{30-5-5}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

APLICACIÓN 12

Simplifique

$$6 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) \div \frac{2}{7}$$

RESOLUCIÓN

Operamos

$$6 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) \div \frac{2}{7}$$

$$6 \left(\frac{8-3}{12} \right) - \left(\frac{7+3}{21} \right) \div \frac{2}{7}$$

$$\rightarrow 6 \cdot \frac{5}{12} - \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{15-10}{6} = \frac{5}{6}$$

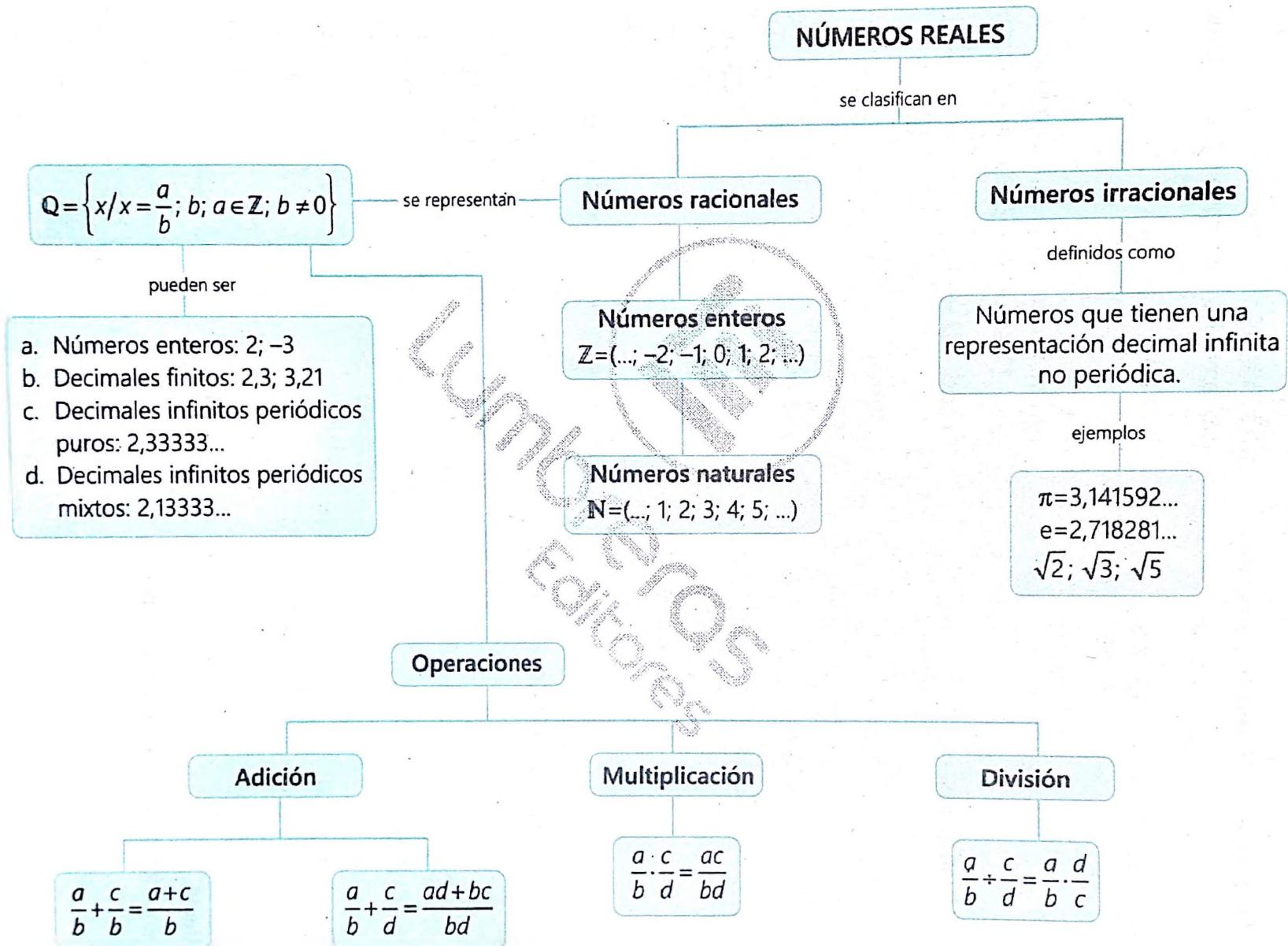


Actividad recreativa

El sudoku

El juego consiste en colocar en cada una de las 9 filas, columnas y cuadriculas de tres por tres los números del 1 al 9.

7			2		8	5		
			8	6		3	9	
4			9					
1			3	2				
8			2	3	9	1	5	4
						5	3	1
						1		8
3	8				1	4		
9		6		7				3



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Determine la suma de los 15 primeros números naturales.

- A) 15 B) 100 C) 120
D) 240 E) 16

Resolución

Nos piden

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 15$$

$$S = \frac{15(15+1)}{2}$$

$$S = \frac{15 \cdot 16}{2} \rightarrow S = 15 \cdot 8$$

$$\therefore S = 120$$



Problema N.º 2

¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas?

- I. $-7 < -10$
II. $(-8-9) > 3-25$
III. $(-8)(4) = (-16)(2)$

- A) solo I B) I y II C) I y III
D) solo III E) II y III

Resolución

- I. Incorrecta

Ubicamos los números en la recta numérica.



Notamos que -10 está más a la izquierda que -7 , entonces -10 es menor que -7 , es decir, $-10 < -7$.

- II. Correcta

Efectuamos $-17 > -22$.

Ubicamos los números en la recta numérica.



Notamos que -22 está más a la izquierda que -17 , entonces -22 es menor que -17 .

Luego, $-22 < -17$.

- III. Correcta

Efectuamos

$$-32 = -32$$

Clave

E

Problema N.º 3

Efectúe las siguientes operaciones:

$$35 - 24 - 12 + 45 - 22 + 6$$

- A) 24 B) 18 C) 40
D) 15 E) 28

Resolución

Del dato

Clave

E

Problema N.º 4

Indique el resultado de la siguiente operación:

$$A = \frac{(-6)(-3) + (8)(-2)}{(-5)(3) - (-7)(2)}$$

- A) 2 B) -1 C) 1
D) -2 E) -4

Resolución

$$\text{De } A = \frac{(-6)(-3) + (8)(-2)}{(-5)(3) - (-7)(2)}$$

primero efectuamos la multiplicación.

$$A = \frac{18 + (-16)}{-15 - (-14)}$$

$$A = \frac{18 - 16}{-15 + 14} \rightarrow A = \frac{2}{-1}$$

$$\therefore A = -2$$



Clave: D

Problema N.º 5

Indique el valor resultante de la expresión M .

$$M = 8 \div (-4) + (-6) \div 2 - 3$$

- A) -8 B) -3 C) -2
D) -1 E) 0

Resolución

Del dato

$$M = 8 \div (-4) + (-6) \div 2 - 3$$

primero efectuamos la división.

$$M = (-2) + (-3) - 3$$

$$M = -2 - 3 - 3$$

$$M = -5 - 3$$

$$\therefore M = -8$$

Clave: A

Problema N.º 5

Efectúe las siguientes operaciones:

$$6 \div (13 - 15) - [(8 - 4) \div (-2) - 6 \div (-3)]$$

- A) 7 B) -3 C) -2
D) 1 E) 0

Resolución

Del dato

$$\begin{aligned} & 6 \div (13 - 15) - [(8 - 4) \div (-2) - 6 \div (-3)] \\ & 6 \div (-2) - [4 \div (-2) - (-2)] \\ & 6 \div (-2) - [-2 + 2] \\ & 6 \div (-2) - 0 \\ & -3 \end{aligned}$$

Clave: B

Problema N.º 7

Efectúe las siguientes operaciones:

$$3 \cdot 8 + 5 \cdot (4+2) - (40 \div 5) \cdot 3 - 5 \cdot 4 \div 2$$

- A) 6 B) 5 C) 2
D) 3 E) 20

Resolución

Del dato

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 8 + 5 \cdot (4+2) - (40 \div 5) \cdot 3 - 5 \cdot 4 \div 2 \\ & 24 + 5 \cdot 6 - 8 \cdot 3 - 20 \div 2 \\ & 24 + 30 - 24 - 10 \\ & 30 - 10 \\ & 20 \end{aligned}$$

Clave: E

Problema N.º 8Reduzca la expresión N .

$$N = -[-(2+1)+3-\{(-2+1)+5\}+4]-6$$

- A) 0 B) -1 C) 1
D) 6 E) -6

Resolución

Del dato

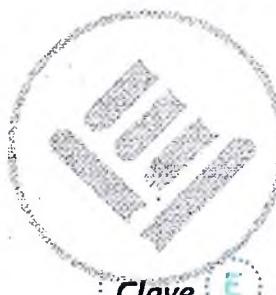
$$N = -[-(2+1)+3-\{(-2+1)+5\}+4]-6$$

$$N = -[-3+3-\{-1+5\}+4]-6$$

$$N = -[-4+4]-6$$

$$N = -[0]-6=0-6=-6$$

$$\therefore N = -[0]-6=0-6=-6$$



Clave

Problema N.º 9

Halle el resultado de la siguiente operación:

$$E = \frac{13}{6} - \frac{11}{6} + \frac{7}{6}$$

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{5}{6}$ E) 1

Resolución

Como las fracciones son homogéneas

$$E = \frac{13-11+7}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Clave

Problema N.º 10

Halle el inverso de la siguiente expresión:

$$3 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

- A) 4 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 2 E) $\frac{1}{5}$

Resolución

Operamos

$$3 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow 3 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 + 2 = 5$$

Por lo tanto, el inverso es $\frac{1}{5}$.

Clave

Problema N.º 11Reducza la expresión F .

$$F = \left(\frac{4}{3} - \frac{13}{15}\right) \cdot \left(\frac{4}{7} + 3\right) + \frac{10}{21}$$

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$
D) $-\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{2}$

Resolución

Operamos

$$F = \left(\frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 3} - \frac{13}{15} \right) \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{3 \cdot 7}{7} \right) \div \frac{10}{21}$$

$$F = \left(\frac{20 - 13}{15} \right) \cdot \left(\frac{4 + 21}{7} \right) \div \frac{10}{21}$$

$$F = \left(\frac{7}{15} \right) \cdot \left(\frac{25}{7} \right) \div \frac{10}{21}$$

$$F = \frac{5}{3} \div \frac{10}{21} \rightarrow F = \frac{5}{3} \cdot \frac{21}{10}$$

$$\therefore F = \frac{7}{2}$$

**Problema N.º 12**Halle el valor reducido de $E+M$.

$$E = 4 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$M = 55 \left(\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} \right)$$

- A) 2 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

ResoluciónPrimero hallamos el valor de E .

$$E = 4 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$E = 4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$E = 4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 4 \left(\frac{4 \cdot 1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$E = 4 \left(\frac{4 - 1}{4} \right)$$

$$\rightarrow E = 3$$

Ahora hallamos el valor de M .

$$M = 55 \left(\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} \right)$$

$$M = 55 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)$$

$$M = 55 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right)$$

$$M = 55 \left(\frac{11 - 5}{5 \cdot 11} \right)$$

$$M = 55 \left(\frac{6}{55} \right)$$

$$\rightarrow M = 6$$

$$\therefore E+M = 3+6 = 9$$

**Problema N.º 13**

$$\text{Si } M = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$$

halle el valor de $25M+1$.

- A) 91 B) 19 C) 28
D) -26 E) 0

Resolución

Operamos

$$M = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5-2}{10}}{\frac{4-3}{12}} \rightarrow M = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{12}}$$

$$M = \frac{3 \cdot 12}{10 \cdot 1} \rightarrow M = \frac{18}{5}$$

Nos piden

$$25M + 1 = 25 \cdot \frac{18}{5} + 1$$

$$\therefore 5 \cdot 18 + 1 = 91$$

**Problema N.º 14**

Halle el equivalente de la expresión S.

$$S = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

- A) $\frac{19}{2}$ B) 1 C) $\frac{11}{2}$
 D) $\frac{2}{11}$ E) $\frac{2}{19}$

Resolución

Del dato

$$S = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$S = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) \left(\frac{4+1}{4}\right) \cdots \left(\frac{10+1}{10}\right)$$

$$\therefore S = \frac{11}{2}$$

**Problema N.º 15**

Calcule el equivalente reducido de T.

$$T = \left(\frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x} - \frac{6}{2x}}{\frac{1}{x} + 2} \right) \cdot (2x+1)$$

- A) -3 B) 4 C) $-\frac{1}{3}$
 D) $x+3$ E) $\frac{1}{4}$

Resolución

Operamos

$$T = \left(\frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x} - \frac{6}{2x}}{\frac{1}{x} + 2} \right) \cdot (2x+1) \rightarrow T = \left(\frac{\frac{2+5-3}{x}}{\frac{1+2x}{x}} \right) \cdot (2x+1)$$

$$T = \left(\frac{4 \cdot x}{x(2x+1)} \right) \cdot (2x+1) \rightarrow T = \left(\frac{4}{2x+1} \right) \cdot (2x+1)$$

$$\therefore T = 4$$

**Problema N.º 16**

Reduzca la expresión

$$P = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}; a, b \in \mathbb{N}.$$

- A) $\frac{a-b}{a+b}$ B) $\frac{b-a}{a+b}$ C) $\frac{a+b}{a-b}$
 D) $\frac{a+b}{b-a}$ E) $\frac{1}{ab}$

Resolución

Operamos

$$P = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{b-a}{b+a}$$

$$P = \frac{(b-a)ab}{(b+a)ab}$$

$$\therefore P = \frac{b-a}{a+b}$$

Clave

B

Problema N.º 17

$$\text{Si } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{N}{abc}$$

halle $N-ac$.

- A) $ab+bc$ B) $ab-bc$ C) $ab-ac$
 D) $bc-ac$ E) $ac+ab$

Resolución

Por dato

$$\frac{1 \cdot bc}{a \cdot bc} + \frac{1 \cdot ac}{b \cdot ac} + \frac{1 \cdot ab}{c \cdot ab} = \frac{N}{abc}$$

$$\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{N}{abc}$$

$$bc+ac+ab=N$$

$$bc+ab=N-ac$$

$$\therefore N-ac=ab+bc$$

Clave

B

Problema N.º 18

Simplifique M .

$$M = \frac{4}{11} - \left[2 - \left(\frac{3}{22} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

- A) 1 B) -1 C) $\frac{5}{2}$
 D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{9}$

Resolución

Operamos

$$M = \frac{4}{11} - \left[2 - \left(\frac{3}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{11} \right) \right].$$

$$M = \frac{4}{11} - \left[2 - \left(\frac{3+11}{22} \right) \right]$$

$$M = \frac{4}{11} - \left[2 - \frac{14}{22} \right]$$

$$M = \frac{4}{11} - \left[\frac{2 \cdot 11}{11} - \frac{7}{11} \right]$$

$$M = \frac{4}{11} - \left[\frac{22-7}{11} \right] \rightarrow M = \frac{4}{11} - \frac{15}{11}$$

$$\therefore M = \frac{4-15}{11} = -\frac{11}{11} = -1$$

Clave

B

Problema N.º 19

Reduzca E .

$$E = \frac{12}{13} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{7} \right) - \frac{2}{5} \div \left(1 + \frac{2}{5} \right)$$

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{9}$

Resolución

Operamos

$$E = \frac{12}{13} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{7} \right) - \frac{2}{5} \div \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{5} \right)$$

$$E = \frac{12}{13} \left(\frac{21-8}{28} \right) - \frac{2}{5} \div \left(\frac{5+2}{5} \right)$$

$$E = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{28} - \frac{2}{5} \div \frac{7}{5} \rightarrow E = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\therefore E = \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

**Problema N.º 20**Calcule el valor de H .

$$H = 23 - 5(7-4) + 6(5 \cdot 2)$$

- A) -15 B) -1 C) 31
D) 34 E) 68

Resolución

Operamos

$$H = 23 - 5(7-4) + 6 \cdot (5 \cdot 2)$$

$$H = 23 - 5 \cdot 3 + 6 \cdot 10$$

$$H = 23 - 15 + 60$$

$$H = 8 + 60$$

$$\therefore H = 68$$

**Problema N.º 21**Calcule el valor de F .

$$F = 22 - 2[4 - 6 - (9-1) + 6 \div 2] + 8$$

- A) 1 B) 5 C) 7
D) 44 E) 55

Resolución

Operamos

$$F = 22 - 2 [4 - 6 - (9-1) + 6 \div 2] + 8$$

$$F = 22 - 2 [4 - 6 - 8 + 3] + 8$$

$$F = 22 - 2[7 - 14] + 8$$

$$F = 22 - 2(-7) + 8$$

$$F = 22 + 14 + 8$$

$$\therefore F = 44$$

**Problema N.º 22**

Calcule el valor de la siguiente suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

- A) $\frac{20}{21}$ B) $\frac{40}{42}$ C) $\frac{39}{40}$
D) $\frac{39}{42}$ E) $\frac{19}{22}$

Resolución

De la suma

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2}}_{\text{sumando}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{\text{sumando}} + \underbrace{\frac{1}{3 \cdot 4}}_{\text{sumando}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{20 \cdot 21}}_{\text{sumando}}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20} - \frac{1}{21}$$

$$\therefore \frac{1}{1} - \frac{1}{21} = \frac{21-1}{21} = \frac{20}{21}$$

Clave**Problema N.º 23**Determine el valor de la expresión J .

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left[\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} \right] + \frac{7}{3}$$

A) $\frac{27}{7}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{28}{7}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{172}{15}$

Resolución

Operamos

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left[\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} \right] + \frac{7}{3}$$

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left[\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{5} \right] + \frac{7}{3}$$

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left[\frac{11}{3} + \frac{4}{5} \right] + \frac{7}{3}$$

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left[\frac{55+12}{15} \right] + \frac{7}{3}$$

$$J = \frac{1}{5} + 2 \left(\frac{67}{15} \right) + \frac{7}{3}$$

$$J = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{134}{15} + \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{5} \rightarrow J = \frac{3+134+35}{15}$$

$$\therefore J = \frac{172}{15}$$

Clave**Problema N.º 24**

Simplifique las siguientes expresiones:

- $-2(-4-2)$
- $-6-2(-3-2)$
- $3(4z+2x)$
- $-(-x-3)$
- $-4(x-6)$
- $3y+4(x+2y)$
- $-4x-2(3z-2x)$
- $3(y-2x)-2(2x-2y)$
- $4(8z-2t)-3(-t-4z)$
- $2x+5-2(x+2)$
- $4[x(2-5)-2(1-2x)]$

Resolución

Simplificamos cada expresión.

a. $-2(-4-2)$

$-2(-6)=12$

b. $-6-2(-3-2)$

$-6-2(-5)$

$-6+10=4$

c. $3(4z+2x)=12z+6x$

d. $-(-x-3)=x+3$

e. $-4(x-6)=-4x+24$

f. $3y+4(x+2y)=3y+4x+8y=11y+4x$

g. $-4x-2(3z-2x)=-4x-6z+4x=-6z$

h. $3(y-2x)-2(2x-2y)$

$3y-6x-4x+4y$

$7y-10x$

i. $4(8z-2t)-3(-t-4z)$

$32z-8t+3t+12z$

$44z-5t$

j. $2x+5-2(x+2)$

$2x+5-2x-4$

$5-4=1$

k. $4[x(2-5)-2(1-2x)]$

$4[-3x-2+4x]$

$4[x-2]$

$4x-8$

Problema N.º 25

Dados los números

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} \quad y \quad B = 0,66\dots$$

determine el valor de $A \cdot B$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 2
 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

ResoluciónPrimero, hallamos el valor de A .

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

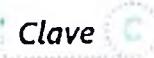
$$A = \frac{1}{\frac{1}{3}} \rightarrow A = 3$$

Ahora, hallamos el valor de B .

$$B = 0,666\dots \rightarrow B = \frac{6}{9} \rightarrow B = \frac{2}{3}$$

Nos piden

$$A \cdot B = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

**Problema N.º 26**Determine el valor de a si se sabe que

$$(a+1)+(a+2)+(a+3)+\dots=630+10a.$$

- A) 45 B) 44 C) 43
 D) 41 E) 42

Resolución

Del dato

$$(a+1) + (a+2) + (a+3) + \dots + (a+20) = 630 + 10a$$

1º
término 2º
término 3º
término 20º
término

$$\underbrace{a+a+\dots+a}_{20 \text{ veces}} + 1+2+3+\dots+20 = 630 + 10a$$

$$20a + 210 = 630 + 10a$$

$$20a - 10a = 630 - 210$$

$$10a = 420$$

$$\therefore a = 42$$

**Problema N.º 27**

En cierta parcela se cultivan $\frac{4}{5}$ partes de trigo y en el resto 200 m^2 de maíz. ¿Cuál es la superficie de la parcela?

- A) 50 m^2 B) 125 m^2 C) 250 m^2
 D) 500 m^2 E) 1000 m^2

Resolución

Tenemos

$$\text{trigo} \rightarrow \frac{4}{5} \text{ partes} \rightarrow \text{sobra } \frac{1}{5}$$

$$\text{maíz} \rightarrow \frac{1}{5} \text{ parte (que equivale a } 200 \text{ m}^2)$$

Por lo tanto, la superficie de la parcela es igual a $200 \cdot 5 = 1000 \text{ m}^2$.

**Problema N.º 28**

De una botella de $\frac{3}{4}$ de litro se ha consumido la quinta parte. ¿Qué fracción de litro queda?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$
 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución

Por dato, se ha consumido la quinta parte; entonces queda sin consumir $\frac{4}{5}$ de la botella.

$$\text{Luego, } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de litro} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto, $\frac{3}{5}$ de litro queda sin consumir.

**Problema N.º 29**

Las temperaturas medias que se alcanzan en un mismo mes, en distintas ciudades, son -5°C , 3°C , 10°C , -7°C , 0°C y 12°C .

Ordénelas de menor a mayor.

Resolución

Ordenamos de menor a mayor.

$$-7^\circ\text{C}, -5^\circ\text{C}, 0^\circ\text{C}, 3^\circ\text{C}, 10^\circ\text{C}, 12^\circ\text{C}$$

Problema N.º 30

Aristóteles murió en el año 322 a.n.e. y vivió 62 años. ¿En qué año nació?

- A) 384 a.n.e.
- B) 260 a.n.e.
- C) 128 a.n.e.
- D) 383 a.n.e.
- E) 420 a.n.e.

Resolución

$$\text{n.º de años vividos} = \left(\begin{array}{l} \text{año en} \\ \text{que murió} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{año en} \\ \text{que nació} \end{array} \right)$$

Reemplazamos los datos.

$$62 = -322 - \left(\begin{array}{l} \text{año en} \\ \text{que nació} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{año en} \\ \text{que nació} \end{array} \right) = -322 - 62$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{año en} \\ \text{que nació} \end{array} \right) = -384$$

Por lo tanto, Aristóteles nació en el año 384 a.n.e.

Clave**A****Problema N.º 31**

Lizet va al mercado y gasta en carne $\frac{1}{3}$ de lo que tiene; en cereales, $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba; y $\frac{3}{8}$ del resto, en verduras. Si todavía le queda S/.20, ¿cuánto gastó?

- A) S/.64
- B) S/.40
- C) S/.15
- D) S/.44
- E) S/.52

Resolución

Suponemos que Lizet tiene x soles. Gasta de la siguiente manera:

- En carne: $\frac{1}{3}x$, entonces le queda $\frac{2}{3}x$.
- En cereales: $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)$
entonces le queda $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)$.
- En verduras: $\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)$
entonces le queda $\frac{5}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)$.

Por dato

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} x = 20 \rightarrow x = 64$$

Por lo tanto, gastó $64 - 20 = \text{S/.}44$.

Clave**D**

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Si se cumple que

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$$

$$B = (-1) - (-1) - (-1) - (-1) - (-1)$$

determine $A + B$.

- A) -5 B) 3 C) 2
D) -2 E) -1

2. Reduzca la siguiente expresión:

$$(6 - 5) + (5 - 4) + (4 + 20) - (20 + 3) + (1 - 3)$$

- A) 20 B) 3 C) 16
D) 1 E) 0

3. Simplifique la siguiente expresión:

$$-[-(2 + 1) + 3 - \{(-2 + 1) + 5\} + 4] - 6$$

- A) 2 B) -1 C) 1
D) 6 E) -6

4. Reduzca la expresión D.

$$D = \frac{4 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 12}{4 + \frac{2}{3} + -\frac{2}{3}}$$

- A) 7 B) 5 C) 6
D) 8 E) 3

5. Reduzca la expresión K.

$$K = \frac{2}{3} \cdot (-6) + 4 \left(\frac{1}{8} \right) \cdot 6 - 3(2) + 1(-1)$$

- A) 8 B) 4 C) -4
D) -8 E) 0

6. Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes igualdades y elija la secuencia correcta.

I. $2 \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{2 \cdot 3}{4}$

II. $2 - \frac{3}{4} = \frac{2 - 3}{4}$

III. $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} = \frac{2}{-3}$

- A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVV E) VVF

7. Si se cumple que

$$M = 5 + \frac{3}{5}$$

$$N = 4 - \frac{1}{2}$$

indique el valor de

$$\frac{5M}{7} - \frac{2N}{7}$$

- A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 2

8. Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{5}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{25} \right) \right\} + 1$$

- A) 3 B) 2 C) 4
D) 1 E) 6

9. Si tenemos que

$$a = -2 + 3 - 4 + 5$$

$$b = 6 - 3 + 2 - 1$$

determine el valor de $a + b$.

- | | | |
|--------|--------|-------|
| A) 2 | B) 6 | C) 33 |
| D) -33 | E) -16 | |

10. Calcule el valor de P .

$$P = \frac{3 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} + \frac{7\left(-\frac{3}{5}\right)}{9\left(\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{3}$$

- | | | |
|-------------------|------------------|-------|
| A) 3 | B) $\frac{1}{3}$ | C) -3 |
| D) $-\frac{1}{3}$ | E) $\frac{2}{3}$ | |

11. Calcule la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 3}{3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{9}$$

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| A) $\frac{1}{3}$ | B) $\frac{5}{9}$ | C) $\frac{4}{9}$ |
| D) 1 | E) 0 | |

12. Calcule el valor de E .

$$E = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{3} \right) + \frac{3}{4}$$

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| A) $\frac{3}{4}$ | B) $\frac{1}{4}$ | C) $\frac{11}{4}$ |
| D) 2 | E) $\frac{35}{8}$ | |

13. Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1}{1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$$

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| A) $\frac{4}{11}$ | B) $\frac{7}{11}$ | C) $\frac{5}{6}$ |
| D) $\frac{4}{7}$ | E) 1 | |

14. Si

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots \quad (20 \text{ términos})$$

$$T = 1 + 3 + 5 + \dots \quad (20 \text{ términos})$$

halle el valor de $(S - T)$.

- | | | |
|--------|-------|-------|
| A) 20 | B) 0 | C) 10 |
| D) -20 | E) 40 | |

15. Halle el valor de S .

$$S = \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{30 \cdot 33}$$

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| A) $\frac{31}{33}$ | B) $\frac{10}{99}$ | C) $\frac{10}{33}$ |
| D) $\frac{11}{30}$ | E) $\frac{11}{90}$ | |

16. Simplifique la expresión J .

$$J = \left(1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \right) \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{8}{15} \right)$$

Luego dé como respuesta el valor numérico de $2J + 5$.

- | | | |
|------------------|------|------|
| A) $\frac{1}{2}$ | B) 5 | C) 6 |
| D) $\frac{3}{2}$ | E) 1 | |

17. Determine la raíz cuadrada de la siguiente expresión:

$$N = \frac{1}{\frac{1}{48} + \frac{1}{192} - \frac{1}{96}}$$

- A) -8 B) 8 C) -1
D) 1 E) 9

18. Si se cumple que

$$3+4+5+6+\dots+21=\overline{abc}$$

indique el valor de $a+b+c$.

- A) 381 B) 382 C) 383
D) 384 E) 12

19. Determine el valor de $\sqrt{42N+5}$ si

$$N = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{182}$$

- A) -4 B) 4 C) 2
D) -2 E) 1

20. Dadas las siguientes expresiones:

$$x = \frac{3}{20} + \frac{51}{60} - \left(\frac{18}{30} - \frac{12}{20} \right) \cdot \frac{27}{13}$$

$$y = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} + 3$$

halle el valor de $x+y$.

- A) 0 B) 1 C) 6
D) -1 E) -2

21. Simplifique la siguiente expresión:

$$\left(\frac{144}{125} \cdot \frac{25}{12} \right) \left(\frac{6 \cdot 15 \cdot 49}{14 \cdot 18} \right) \left(\frac{6+2}{6} \right)$$

Luego, determine el inverso multiplicativo del resultado.

- A) $\frac{1}{55}$ B) $\frac{3}{56}$ C) 56
D) $\frac{3}{55}$ E) $\frac{1}{56}$

22. Si tenemos que

$$x = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

halle el valor de $18x$.

- A) 1 B) 2 C) $\frac{13}{3}$
D) $\frac{13}{6}$ E) 13

23. Si sabemos que

$$A = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

$$B = 0,25 + 0,75 + \frac{1}{2}$$

determine el valor de $A+4B$.

- A) 9 B) 10 C) 11
D) 6 E) 7

24. Halle el valor de x .

$$x = 1 + 2 + 3 + \dots + 15$$

- A) 38 B) 39 C) 40
D) 41 E) 120

25. Halle el valor de n si se sabe que

$$1+3+5+7+\dots+n=2500.$$

- A) 99 B) 100 C) 80
D) 88 E) 90

26. Efectúe las siguientes operaciones:

a. $6 - \left[\frac{10}{3} - \left(1 + \frac{5}{6} \right) \right]$

b. $\frac{3}{2} - \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)$

c. $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{6} \right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{2} \right)$

d. $-\frac{7}{2} - \left[2 + \frac{2}{7} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right]$

27. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6}$

b. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2 \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1 \right)$

c. $\left(1 + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$

28. Calcule el equivalente de las siguientes expresiones:

a. $\left(-\frac{3}{4} \right) \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{-6}$

b. $\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) + \left(3 + \frac{1}{7} \right)$

c. $\frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right)}{\frac{1}{2} - \frac{3}{14}}$

29. Simplifique las siguientes expresiones:

- a. $6 - (-5)$ f. $-(2-7)$
b. $-9 - (-4)$ g. $-(-6-4)$
c. $5(-3)$ h. $2(-2-3)$
d. $(-3)(-7)$ i. $-5(2-7)$
e. $8 \div (-2)$

30. Simplifique las siguientes operaciones:

a. $\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{5}$

e. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

b. $\left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{21}{4} \right)$

f. $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

c. $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{4}$

g. $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$

d. $\frac{4}{9} \div \left(\frac{2}{3} \cdot 8 \right)$

h. $\frac{2 - \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{8}}$

31. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

- A) $\frac{30}{37}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{37}{30}$
D) $\frac{35}{36}$ E) $\frac{39}{30}$

32. Determine el valor de M .

$$M = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$$

- A) $\frac{29}{30}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{14}{15}$
 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{29}{31}$

33. Calcule el valor de S .

$$S = \left(3 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{6}{7}\right)$$

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{7}$

34. Efectúe F .

$$F = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}$$

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{7}$

35. Determine el valor de K .

$$K = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7}$$

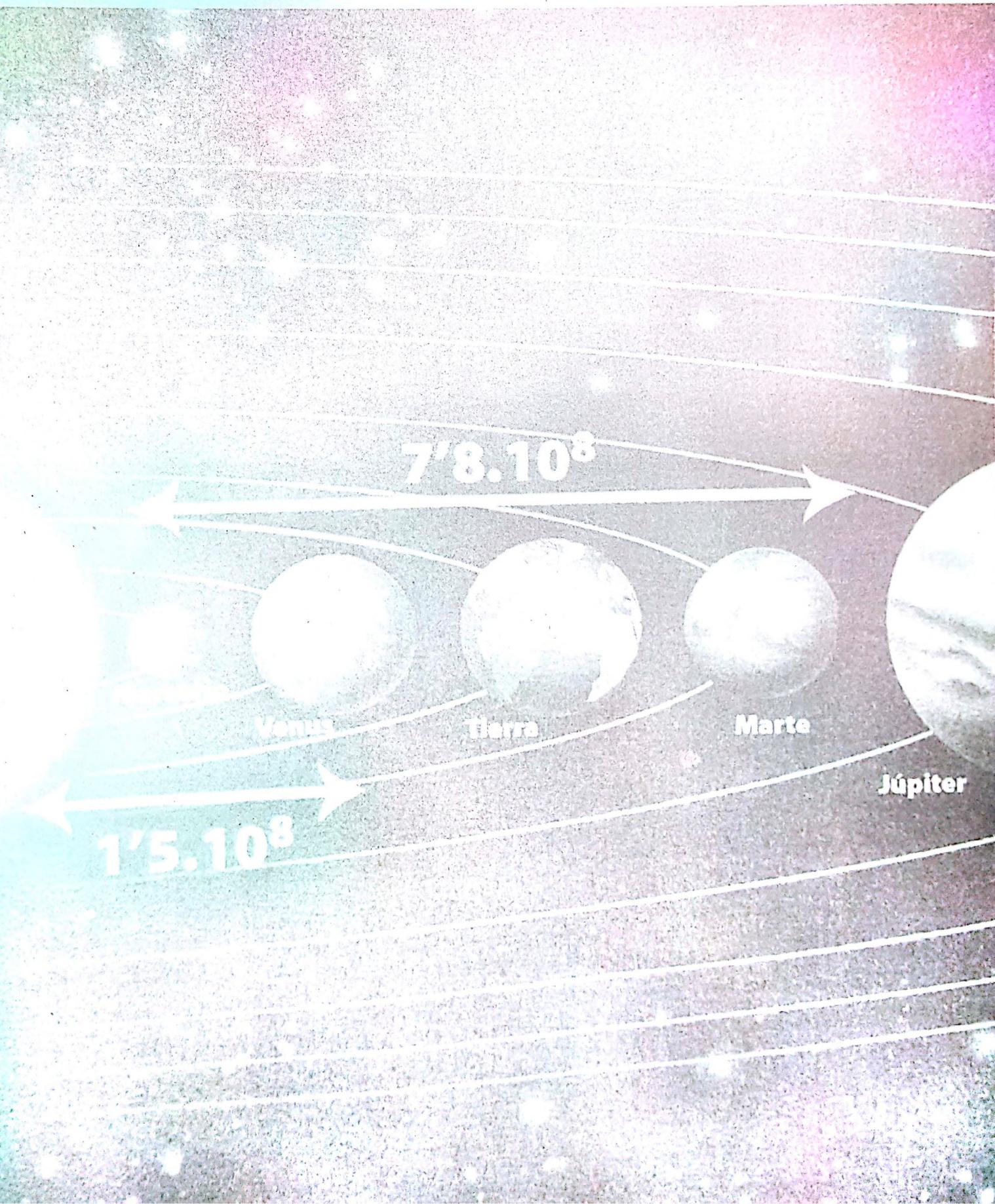
- A) $\frac{1}{26}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{28}$
 D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{6}{11}$

Claves

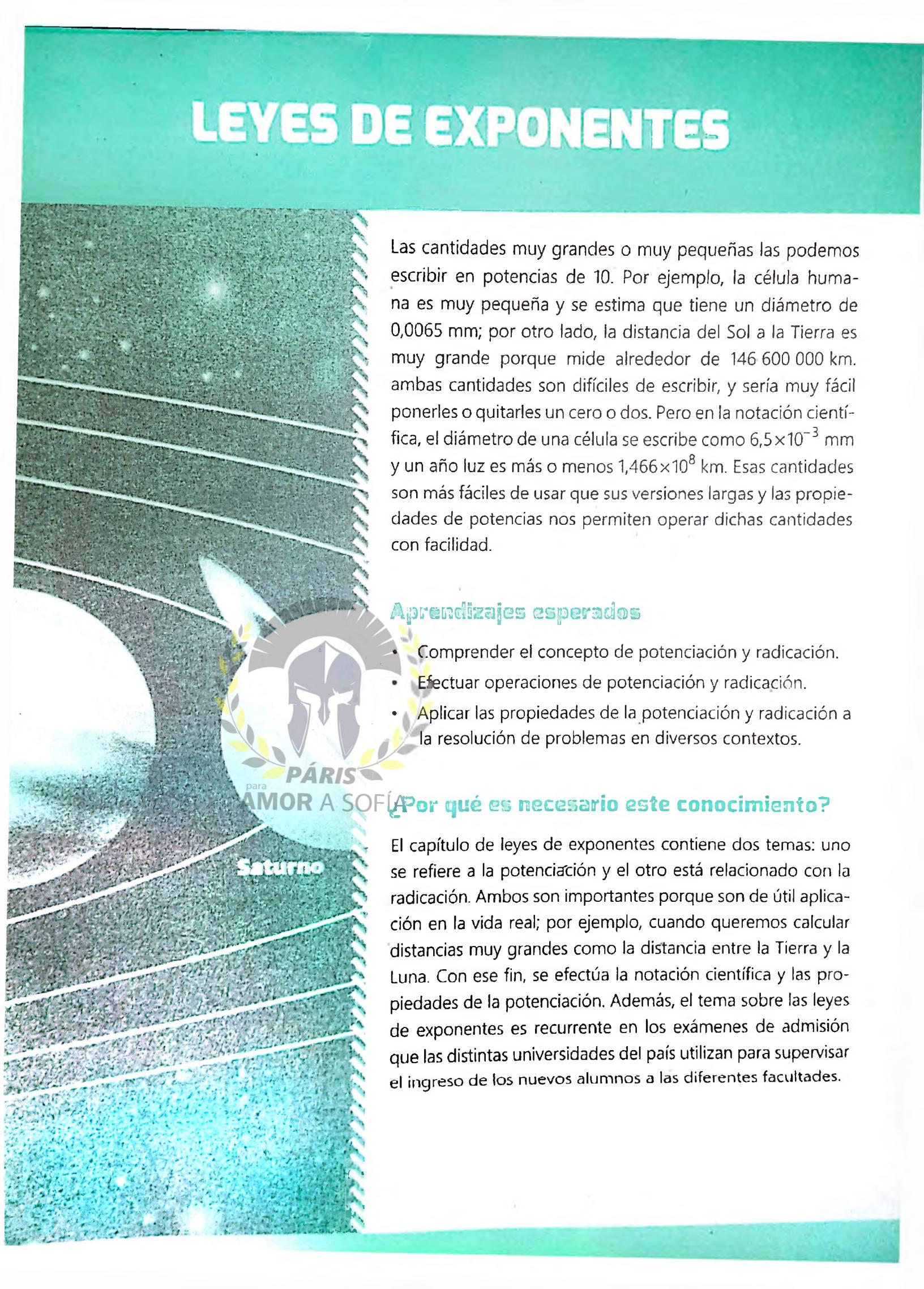
1	B	6	B	11	E	16	C	21	E	26	*	31	G
2	D	7	A	12	E	17	B	22	D	27	*	32	A
3	A	8	D	13	B	18	E	23	C	28	*	33	E
4	B	9	C	14	A	19	B	24	E	29	*	34	D
5	D	10	D	15	B	20	C	25	A	30	*	35	C

* Problema sin alternativas

CAPÍTULO 2



LEYES DE EXPONENTES



Las cantidades muy grandes o muy pequeñas las podemos escribir en potencias de 10. Por ejemplo, la célula humana es muy pequeña y se estima que tiene un diámetro de 0,0065 mm; por otro lado, la distancia del Sol a la Tierra es muy grande porque mide alrededor de 146 600 000 km. ambas cantidades son difíciles de escribir, y sería muy fácil ponerles o quitarles un cero o dos. Pero en la notación científica, el diámetro de una célula se escribe como $6,5 \times 10^{-3}$ mm y un año luz es más o menos $1,466 \times 10^8$ km. Esas cantidades son más fáciles de usar que sus versiones largas y las propiedades de potencias nos permiten operar dichas cantidades con facilidad.

Aprendizajes esperados

- Comprender el concepto de potenciación y radicación.
- Efectuar operaciones de potenciación y radicación.
- Aplicar las propiedades de la potenciación y radicación a la resolución de problemas en diversos contextos.

Por qué es necesario este conocimiento?

El capítulo de leyes de exponentes contiene dos temas: uno se refiere a la potenciación y el otro está relacionado con la radicación. Ambos son importantes porque son de útil aplicación en la vida real; por ejemplo, cuando queremos calcular distancias muy grandes como la distancia entre la Tierra y la Luna. Con ese fin, se efectúa la notación científica y las propiedades de la potenciación. Además, el tema sobre las leyes de exponentes es recurrente en los exámenes de admisión que las distintas universidades del país utilizan para supervisar el ingreso de los nuevos alumnos a las diferentes facultades.



Leyes de exponentes

1. CONCEPTO

Son las definiciones y teoremas que estudian a los exponentes por medio de las operaciones de potenciación y radicación.

2. POTENCIACIÓN

Observamos las siguientes multiplicaciones:

- El valor 3^4 se lee: "tres elevado a la cuarta".
- El valor 4^2 se lee: "cuatro elevado al cuadrado".
- El valor $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ se lee: "dos tercios elevado al cubo".

Importante

No olvide

IDENTIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA POTENCIA

EXPRESIÓN	$2^3=8$	$x^4=y$	3^x
BASE	2	x	3
EXPONENTE	3	4	x
POTENCIA	8	y	3^x



¿Qué es lo que tienen en común cada una de ellas?

En todas las multiplicaciones mostradas se repite un mismo factor; por ejemplo, en la primera prevalece el factor 3 y cada una de las expresiones anteriores puede ser escrita como una potencia.

Ejemplos

- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$
 - El factor 3 se repite cuatro veces y se escribe 3^4 .
- $4 \cdot 4 = 4^2$
 - El factor 4 se repite dos veces y se escribe 4^2 .
- $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3$
 - El factor $\frac{2}{3}$ se repite tres veces y se escribe $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Esta nueva forma de escribir una multiplicación, en la que se repiten los factores, se llama potencia.

Ejemplo

$$3^4 = 81$$

↓
Exponente
↓
1,2,3,4
Potencia

3. DEFINICIONES

3.1. Exponente natural

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplos

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

3.1.1. Base negativa y exponente natural par

$$(-)^{\text{par}} = +$$

Si la base es un número real negativo y el exponente es natural par, entonces la potencia es positiva.

Ejemplos

- $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
- $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$
- $(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$

3.1.2. Base negativa y exponente natural impar

$$(-)^{\text{ímpar}} = -$$

Si la base es un número real negativo y el exponente es impar, entonces la potencia es un número negativo.

Ejemplos

- $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
- $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$

¡Cuidado!

- $b=b^1$
- $5=5^1$
- $3=3^1$



Importante

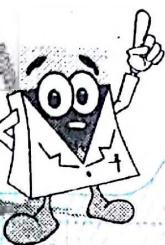
Ejemplos

- $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- $1^{20} = 1$
- $1^{30} = 1$



Además

- $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $0^{10} = 0$
- $0^{30} = 0$

**Importante****Ejemplos de potencia**

$2^0=1$	$3^0=1$	$4^0=1$
$2^1=2$	$3^1=3$	$4^1=4$
$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$
$2^5=32$	$3^5=243$	\vdots
$2^6=64$	$3^6=729$	
$2^7=128$	\vdots	
$2^8=256$		
$2^9=512$		
$2^{10}=1024$		

**No divide**

Si la base es una fracción y el exponente es negativo, procederemos de la siguiente manera:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n; \quad x \neq 0, y \neq 0$$

Ejemplo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

En los dos primeros ejemplos se diferenciará a $(-3)^4$ de -3^4 . En $(-3)^4$ el exponente se aplicará a -3 , pero en -3^4 el exponente se aplicará solo a 3 .

Ejemplos

- $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$
- $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$
- $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
- $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$

No divide

$\underbrace{3+3+3+\dots+3}_{10 \text{ veces}} = 3 \cdot 10$

$\underbrace{5+5+5+\dots+5}_{20 \text{ veces}} = 5 \cdot 20$

$\underbrace{a+a+a+\dots+a}_{15 \text{ veces}} = 15 \cdot a$

$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ veces}} = 3^{10}$

$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{20 \text{ veces}} = 5^{20}$

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{15 \text{ veces}} = a^{15}$

3.2. Exponente cero

$$b^0 = 1; \quad b \neq 0$$

Ejemplos

- $3^0 = 1$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
- $576^0 = 1$
- $5^0 = 1$
- $\left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1$
- $-5^0 = -1$

3.3. Exponente negativo

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}; b \neq 0$$

Ejemplos

• $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

opuesto
inverso

• $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

opuesto
inverso

• $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

opuesto
inverso

• $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{81}$

• $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

APLICACIÓN 1

Indique el resultado de $3^2 - (-2)^5 + (-12)^0$

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 3^2 - (-2)^5 + (-12)^0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 9 - (-32) + 1 \\ \therefore 9 + 32 + 1 = 42 \end{array}$$

4. PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

4.1. Multiplicación de bases iguales

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo

En la siguiente multiplicación indicaremos qué tienen en común cada uno de los factores.

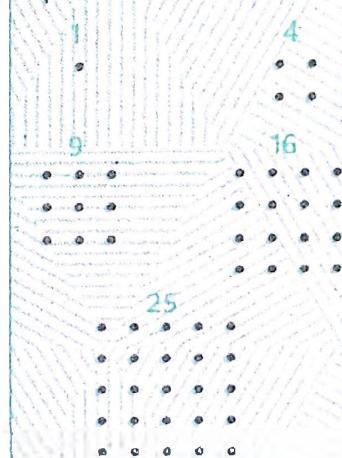
$$3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3$$



Dato curioso

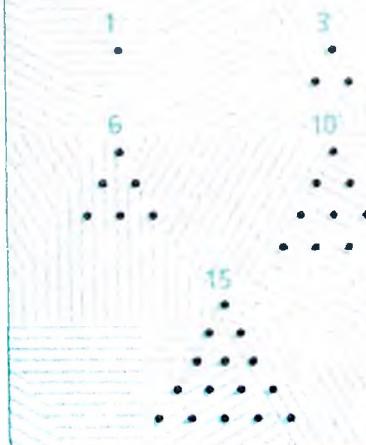
Números cuadrados

Con los números 1; 4; 9; 16 y 25 podemos formar cuadrados.



Números triangulares

Con los números 1; 3; 6; 10 y 15 podemos formar triángulos.



¡Cuidado!

$$x^2 + x^3 \neq x^5$$



Ahora lo representaremos como una multiplicación a los factores de la expresión dada.

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ veces}} \quad \underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ veces}} \quad \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ veces}}$$

Observamos que el conteo indica el número de factores que se han obtenido.

La multiplicación de nueve factores iguales a 3 también se puede escribir como la potencia 3^9 y luego sumamos los exponentes.

Entonces

$$3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 veces}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 veces}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{3 veces}} = 3^9$$

$$\therefore 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{4+2+3} = 3^9$$

Asimismo, si multiplicamos dos o más bases con diferentes (o iguales) exponentes, tendremos como resultado a la misma base elevada a la suma de exponentes.

Ejemplos

- $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$
- $x^5 \cdot x^2 \cdot x^4 = x^{5+2+4} = x^{11}$
- $x^9 \cdot x^{-3} \cdot x^7 = x^{9+(-3)+7} = x^{13}$

APLICACIÓN 2

Si $3^{x+2} = 45$, halle el valor de 3^x .

RESOLUCIÓN

Nos piden 3^x .

$$3^{x+2} = 45$$

$$3^x \cdot 3^2 = 45 \rightarrow 3^x \cdot 9 = 45$$

$$\therefore 3^x = 5$$

4.2. División de bases iguales

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad a \neq 0$$

Ejemplos

- Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ veces}} = 3^3$$

$$\therefore \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

$$\bullet \frac{5^{20}}{5^{18}} = 5^{20-18} = 5^2 = 25$$

$$\bullet \frac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$$

$$\bullet \frac{x^{15}}{x^{-3}} = x^{15-(-3)} = x^{18}$$

APLICACIÓN 3

Simplifique la expresión A.

$$A = \frac{3^{n+2} \cdot 3^{n-5} \cdot 3^{2n+3}}{3^{5n}}$$

RESOLUCIÓN

Nos piden simplificar A.

$$A = \frac{3^{n+2} \cdot 3^{n-5} \cdot 3^{2n+3}}{3^{5n}}$$

$$A = \frac{3^{n+2} \cdot 3^{n-5} \cdot 3^{2n+3}}{3^{5n}}$$

$$A = \frac{3^{4n}}{3^{5n}} \rightarrow A = 3^{4n-5n}$$

$$\therefore A = 3^{-n}$$

APLICACIÓN 4

Calcule el valor de E.

$$E = \frac{\overbrace{2+2+\dots+2}^{3^3 \text{ sumandos}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{3 \text{ factores}}} + \frac{\overbrace{3+3+\dots+3}^{2^3 \text{ sumandos}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{16 \text{ factores}}}$$

Importante

Ecuación exponencial

$$b^x = b^y \rightarrow x = y$$

donde $b > 0$ y $b \neq 1$

Ejemplos

- $3^{2x-4} = 9 \rightarrow 3^{2x-4} = 3^2$
 $2x-4=2$
 $\therefore x=3$
- $5^{2x-1} = 1 \rightarrow 5^{2x-1} = 5^0$
 $2x-1=0$
 $2x=1$
 $\therefore x=\frac{1}{2}$



RESOLUCIÓN

Nos piden E .

$$\underbrace{a+a+a+\dots+a}_{n \text{ veces}} = na; \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

En el problema, tenemos

$$E = \frac{2 \cdot 3^{10}}{3^9} + \frac{3 \cdot 2^{18}}{2^{16}}$$

$$E = 2 \cdot 3^{10-9} + 3 \cdot 2^{18-16} \rightarrow E = 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 2^2$$

$$\therefore E = 6 + 12 = 18$$

4.3. Potencia de potencia

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplos

- Halle la potencia de $(2^4)^3$
Expresamos como multiplicación a la potencia que está entre paréntesis.

$$(2^4)^3 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ veces}})^3$$

Luego

$$(2^4)^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ veces}} = 2^{12}$$

$$\therefore (2^4)^3 = 2^{12}$$

Si elevamos una potencia a otro exponente obtenemos la base de la potencia inicial elevada al producto de ambos exponentes.

- $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
- $((x^3)^2)^5 = x^{3 \cdot 2 \cdot 5} = x^{30}$
- $(x^5)^4 = x^{5 \cdot 4} = x^{20}$

Observación

Debemos recordar que el orden de los factores no altera el producto.

Importante

Exponente de exponente

Ejemplos

- $3^{2^2} = 3^{2^2} = 3^4 = 81$
- $4^{5^0} = 4^{5^0} = 4^1 = 4$

Cuidadito

Es importante saber diferenciar las siguientes situaciones:

$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$
$2^{3 \cdot 2} \quad 2^{3^2} \checkmark$
$2^6 \quad 2^9$
64 512

Los siguientes ejemplos poseen propiedades ya vistas anteriormente.

- $(x^2y^3)(x^3yz^3) = x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot yz^3 = x^5 \cdot y^4 \cdot z^3$

- $\frac{a^6b^2c^3}{a^4b^4} = a^{6-4} \cdot b^{2-4} \cdot c^3 = a^2 \cdot b^{-2} \cdot c^3 = \frac{a^2c^3}{b^2}$

- $(7ab^2)^3 = 7^3 a^3 (b^2)^3 = 343a^3b^6$

- $\left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = 1 \left(-\frac{1}{7}\right) \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{49}$

APLICACIÓN 5

Halle el resultado de T .

$$T = \frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3}$$

RESOLUCIÓN

Nos piden $\frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3}$.

$$T = \frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3} = \frac{(3 \cdot 2^2)^5 \cdot (2 \cdot 3^2)^4}{(2^6)^2 \cdot (3^4)^3}$$

$$T = \frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3} = \frac{3^5 \cdot (2^2)^5 \cdot 2^4 (3^2)^4}{2^{12} \cdot 3^{12}}$$

$$T = \frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3} = \frac{2^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}} = \frac{2^{14} \cdot 3^{13}}{2^{12} \cdot 3^{12}}$$

$$\therefore T = \frac{12^5 \cdot 18^4}{64^2 \cdot 81^3} = 2^{14-12} \cdot 3^{13-12} = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

¡Cuidado!

Potencia de potencia

Ejemplos

- $x^{5x} = (x^x)^5$
- $2^{3b} = (2^b)^3$

Reto al saber

Al simplificar

$$E = \frac{2^{3n+1} + 8^{n+2}}{2^{3n+1}}$$

¿qué se obtiene?



4.4. Potencia de una multiplicación

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Ejemplos

- $3^2 \cdot 5^2 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ veces}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ veces}} = (3 \cdot 5)(3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$
- $4^3 \cdot 7^3 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ veces}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ veces}} = (4 \cdot 7)(4 \cdot 7)(4 \cdot 7) = (4 \cdot 7)^3$

Notamos que la multiplicación de potencias con el mismo exponente es igual a otra potencia de igual exponente y cuya base equivale al producto de las bases.

- $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$
- $(xa^3)^4 = x^4 \cdot (a^3)^4 = x^4 \cdot a^{12}$
- $(7ab^2)^3 = 7^3 a^3 (b^2)^3 = 343a^3b^6$
- $6^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 = (6 \cdot 7 \cdot 2)^2 = 84^2$

4.5. Potencia de una división

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$$

Ejemplos

- $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}_{2 \text{ veces}} \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}_{2 \text{ veces}} \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}_{2 \text{ veces}} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3 \text{ veces}}}{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}^{3 \text{ veces}}} = \frac{2^3}{5^3}$
- $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)}_{2 \text{ veces}} \underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)}_{2 \text{ veces}} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5}^{2 \text{ veces}}}{\overbrace{4 \cdot 4}^{2 \text{ veces}}} = \frac{5^2}{4^2}$

Si elevamos una división indicada a un exponente, este afecta a cada número que interviene.

- $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
- $\frac{15^6}{3^6} = \left(\frac{15}{3}\right)^6 = 5^6$
- $\frac{(6^2)^4}{(-6)^{12}} = \frac{6^{2 \cdot 4}}{6^{12}} = \frac{6^8}{6^{12}} = 6^{8-12} = 6^{-4} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

APLICACIÓN 6

Calcule el valor de $x^{2x} - x^{-x}$ si se sabe que $x^x = 2$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $x^{2x} - x^{-x}$.

$$(x^x)^2 - \frac{1}{x^x}$$

Reemplazamos $x^x = 2$.

$$2^2 - \frac{1}{2}$$

$$4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore x^{2x} - x^{-x} = \frac{7}{2}$$

APLICACIÓN 7

Si la siguiente expresión se reduce a la unidad, ¿cuál es el valor de n ?

$$\left((5^2)^n\right)^3 \left[\underbrace{\frac{5^3}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}}_{\text{FACTORES}} \right] \cdot 5^{-\sqrt{169}}$$



Importante

$$\frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$$

Ejemplo

$$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$$

RESOLUCIÓN

De la expresión, tenemos

$$\left((5^2)^n \right)^3 \left[\underbrace{\frac{5^3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}}_{n \text{ veces}} \right] \cdot 5^{-\sqrt{169}}$$

$$\frac{5^{6n} \cdot 5^3 \cdot 5^{-13}}{5^n} \rightarrow \frac{5^{6n+3+(-13)}}{5^n} = \frac{5^{6n-10}}{5^n}$$

$$5^{6n-10-n} = 5^{5n-10}$$

Por dato, reducimos la expresión a la unidad.

$$5^{5n-10} = 1 = 5^0$$

$$5n-10=0$$

$$\therefore n=2$$

5. RADICACIÓN ENÉSIMA

Si n es un entero positivo, entonces la raíz enésima de a se define de la siguiente manera:



la expresión anterior quiere decir $b^n=a$, en caso de que el valor n sea par, entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplos

- $\sqrt{9}=3$, porque se cumple que $3^2=9$.
- $\sqrt[5]{32}=2$, porque se cumple que $2^5=32$.
- $\sqrt{16}=4$, porque se cumple que $4^2=16$.
- $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$, porque se cumple que $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.
- $\sqrt[3]{-8}=-2$, porque se cumple que $(-2)^3=-8$.
- $\sqrt[3]{-1}=-1$, porque se cumple que $(-1)^3=-1$.
- $\sqrt{-25}$, no existe en los números reales.

Importante

El valor $\sqrt[3]{5}$, se lee: "la raíz cúbica de 5".

5.1. Definición del exponente fraccionario

Sea $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ o en forma equivalente $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$;

donde $\frac{m}{n}$ es una fracción irreductible.

Ejemplos

- Escribimos los siguientes radicales como potencias de exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

- $\sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}}$

- $\sqrt[9]{4^{13}} = 4^{\frac{13}{9}}$

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

- $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

- $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

- Escribimos las siguientes potencias como radicales.

- $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

- $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$

- $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^1} = \sqrt[4]{3}$

- $5^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

- $4^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$



Cuidado!

Toda raíz de cero es igual a cero (independientemente del índice que tenga).

Ejemplos

• $\sqrt[5]{0} = 0$	• $\sqrt[7]{0} = 0$
• $\sqrt[3]{0} = 0$	• $\sqrt[4]{0} = 0$

Toda raíz de 1 es igual a 1 (independientemente del índice que tenga).

Ejemplos

• $\sqrt{1} = 1$	• $\sqrt[3]{1} = 1$
• $\sqrt[4]{1} = 1$	• $\sqrt[5]{1} = 1$

**Importante****Ejemplos de radicación**

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt[3]{0} = 0$
- $\sqrt[4]{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt[3]{1} = 1$
- $\sqrt[4]{1} = 1$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[4]{16} = 2$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[4]{81} = 3$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt[3]{64} = 4$
- $\sqrt[4]{256} = 4$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt[3]{125} = 5$
- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt[3]{216} = 6$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt[3]{343} = 7$
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$

**No olvide****Regla de signos**

par $\sqrt{+} = +$	ímpar $\sqrt{+} = +$
par $\sqrt{-} = \text{no existe}$	ímpar $\sqrt{-} = -$

Ejemplos

- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt{-9} = \text{no existe}$

6. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN**Propiedad 1**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

La multiplicación de dos raíces enésimas de igual índice es igual a la raíz enésima de la multiplicación de los radicandos.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{18}$
- $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{10}$
- $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{81}$
- $\sqrt{2x} \sqrt{3y} = \sqrt{2x \cdot 3y} = \sqrt{6xy}$
- $\sqrt{7 \cdot 3} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$
- $\sqrt{8 \cdot z} = \sqrt{8} \sqrt{z}$

Propiedad 2

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Para dividir radicales es necesario que tengan igual índice, así obtenemos un nuevo radical con el mismo índice y como radicando sería la división de los radicandos.

Ejemplos

- $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$
- $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{5y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{5y}}$
- $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b^7}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^7}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^4 \cdot b^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \cdot \frac{1}{b^{3/4}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b^{7/4}}$
- $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b^7}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^7}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^4 \cdot b^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \cdot \frac{1}{b^{3/4}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b^{7/4}}$
- $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Propiedad 3

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplos

- $\sqrt[3]{42} = \sqrt[2 \cdot 3]{42} = \sqrt[6]{42}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3y^2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{3y^2} = \sqrt[12]{3y^2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{2}{5}}} = \sqrt[2 \cdot 3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[6]{\frac{2}{5}}$
- $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[2 \cdot 2]{5} = \sqrt[4]{5}$

Propiedad 4

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$; si n es un par

$\sqrt[n]{|a^n|} = |a|$; si n es par

Ejemplos

- $\sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt[5]{2^5} = 2$

Caso particular

$$\sqrt[nk]{x^{mk}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos

- $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$
- $\sqrt[6]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^5}$
- $\sqrt[25]{x^{10}} = \sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[20]{x^{32}} = \sqrt[5]{x^8}$

Datos curiosos



La sexta operación, la radicación, se expresa con $\sqrt{}$. Este símbolo es una variante de la letra r, primera de la palabra latina *radix*, que significa raíz. Fue introducida por Christoph Rudolff en 1525.

Importante



- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

¡Cuidado!



$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Ejemplo

Si a es igual a 9 y b es igual a 16, entonces vemos el error.

$$\sqrt{9+16} ? = \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} ? = 3+4$$

$$5 \neq 7$$

**Importante**

Situaciones particulares:

Ejemplos

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^2} = 2$
- $\sqrt{2^3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{2^5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} = 2^2 \cdot \sqrt{2}$
 $\rightarrow 4\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^1} = 3\sqrt[3]{3}$

**No olvide**

Ejemplos de racionalizar

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
- $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$
 $2\sqrt{3}$

Observación

Con frecuencia es útil combinar radicales en una expresión.

Ejemplos

- $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100} \cdot \sqrt{2}$
 $\rightarrow 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$
- $\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25b} - \sqrt{b^2 \cdot b} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$

APLICACIÓN 8

Reduzca la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^5}}{x}; x > 0$$

RESOLUCIÓN

De la expresión, tenemos

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^5}}{x} = \frac{\sqrt{x \cdot x^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x \cdot x^5}}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^5}}{x} = \frac{\sqrt{x^4}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x^6}}{x} = \frac{x^2}{x^1} + \frac{x^2}{x^1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^5}}{x} = x^{2-1} + x^{2-1} = x^1 + x^1 = 2x$$

6.1. Otras propiedades

a. $a^{\frac{m}{n}}b = \sqrt[n]{a^m b}$

Ejemplos

- $3\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3^4 \cdot x} = \sqrt[4]{81x}$
- $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$
- $x\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{x^7 \cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{10}}$

b.

$$\sqrt[m]{x^a} \cdot \sqrt[n]{x^b} \cdot \sqrt[p]{x^c} = \sqrt[mnp]{(a+b)p+c}$$

Ejemplos

- $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3 \cdot 5 \cdot 3]{x^{(2+5+4)3+7}} = \sqrt[45]{x^{49}}$
- $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^{11}} = \sqrt[5 \cdot 3]{x^{2 \cdot 3 + 11}} = \sqrt[15]{x^{17}}$

c.

$$x^{x^n} = n \rightarrow x = \sqrt[n]{n}$$

Ejemplos

- $x^{x^5} = 5 \rightarrow x = \sqrt[5]{5}$
- $x^{x^6} = 6 \rightarrow x = \sqrt[6]{6}$
- $x^{x^x x^{12}} = 12 \rightarrow x = \sqrt[12]{12}$



Importante

Radicales semejantes

Igual índice

$$2\sqrt[3]{4} ; 7\sqrt[3]{4}$$

Igual radicando

Los siguientes radicales no son semejantes.

Diferentes índices

$$2\sqrt[3]{4} ; 2\sqrt[5]{4}$$

No olvide



Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales se necesita que estos sean semejantes.

Ejemplos

- $2\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} = 9\sqrt[3]{4}$
- $8\sqrt{2} + 17\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$
- $16\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$

APLICACIÓN 9

Se tiene la igualdad $\sqrt[3]{4^{2x-1}} = 16$.

Determine el valor de $\sqrt{4x-5}$.

RESOLUCIÓN

Debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$b^x = b^y \rightarrow x = y$$

De la expresión, tenemos

$$\sqrt[3]{4^{2x-1}} = 16$$

$$\sqrt[3]{(2^2)^{2x-1}} = 16$$

$$\sqrt[3]{2^{4x-2}} = 16$$

$$2^{\frac{4x-2}{3}} = 2^4 \rightarrow \frac{4x-2}{3} = 4$$

$$4x-2=12 \rightarrow 4x=14$$

Nos piden

$$\sqrt{4x-5} = \sqrt{14-5} \rightarrow \sqrt{4x-5} = \sqrt{9}$$

$$\therefore \sqrt{4x-5} = 3$$

**Actividad recreativa**

En el siguiente cuadrado mágico todos los números que aparecen son potencias de base 2. Escríbelos como potencia y comprueba que el producto de las filas, columnas y diagonales da lugar a un mismo número. ¿Cuál es el número? ¿Qué número debe aparecer en el lugar de la interrogación para que sea de verdad un cuadrado mágico multiplicativo?

16	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{8}$	2	?
4	8	$\frac{1}{4}$

APLICACIÓN 10

Si $x \in \mathbb{Z}$ y verifica $x^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$, calcule el mayor valor de x .

RESOLUCIÓN

Del dato, tenemos

$$x^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Elevamos a la $\frac{1}{2}$.

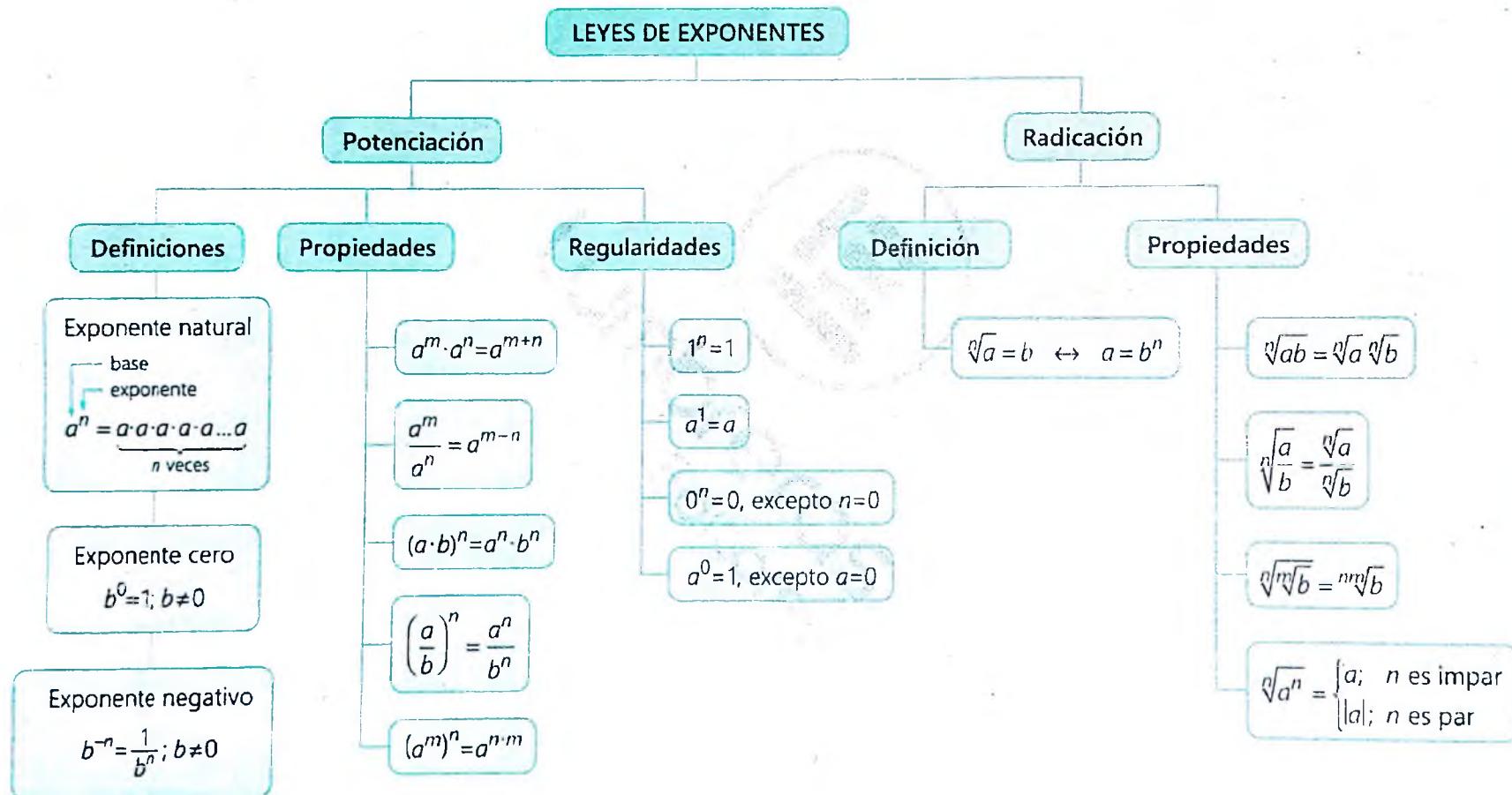
$$\left(x^{-\frac{2}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2$$



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Calcule los siguientes resultados:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. 3^3 | d. -2^4 | g. 8^0 |
| b. $(-5)^3$ | e. $(-2)^4$ | h. $(-5)^4$ |
| c. $(-1)^3$ | f. 1^2 | |

Resolución

- $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
- $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$
- $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$
- $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$
- $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = -16$
- $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
- $8^0 = 1$
- $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$

Problema N.º 2

Determine los siguientes resultados:

- | | |
|--|---|
| a. 1^{12} | d. $((-3)^2)^3$ |
| b. $(a^2b^4)^3$ | e. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)$ |
| c. $\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{3}{5}\right)^5$ | f. $\left(3 \cdot \frac{6}{4}\right)^2$ |

Resolución

- $1^{12} = 1$
- $(a^2b^4)^3 = (a^2)^3(b^4)^3 = a^6b^{12}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 3}\right)^5 = \left(\frac{5}{9}\right)^5$
- $((-3)^2)^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6 = 3^6$

$$\begin{aligned} e. \quad & \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \\ f. \quad & \left(3 \cdot \frac{6}{4}\right)^2 = \left(3 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \end{aligned}$$

Problema N.º 3

Efectúe las siguientes operaciones:

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| a. $(x^2y^3)(x^3yz^5)$ | c. $\frac{a^3b^5c^5}{a^2b^6}$ |
| b. $(xa^3)^5$ | d. $\frac{a^6b^2c^3}{a^4b^4}$ |

Resolución

IMPORTANTE

El orden de los factores no altera el producto.

$$\begin{aligned} a. \quad & (x^2y^3)(x^3 \cdot y \cdot z^5) = x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^1 z^5 \\ & (x^2y^3)(x^3 \cdot y \cdot z^5) = x^{2+3} \cdot y^{3+1} \cdot z^5 \\ \therefore \quad & (x^2y^3)(x^3 \cdot y \cdot z^5) = x^5 \cdot y^4 \cdot z^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad & (xa^3)^5 = x^5(a^3)^5 = x^5 \cdot a^{15} \\ \therefore \quad & (xa^3)^5 = x^5 \cdot a^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad & \frac{a^3b^5c^5}{a^2b^6} = a^{3-2} \cdot b^{5-6} \cdot c^5 \\ & \frac{a^3b^5c^5}{a^2b^6} = a^1 \cdot b^{-1} \cdot c^5 \\ \therefore \quad & \frac{a^3b^5c^5}{a^2b^6} = \frac{a \cdot c^5}{b} \end{aligned}$$

d. $\frac{a^6 b^2 c^3}{a^4 b^4} = a^{6-4} \cdot b^{2-4} \cdot c^3$

$$\frac{a^6 b^2 c^3}{a^4 b^4} = a^2 \cdot b^{-2} \cdot c^3$$

$$\therefore \frac{a^6 b^2 c^3}{a^4 b^4} = \frac{a^2 c^3}{b^2}$$

Problema N.º 4

Exprese en forma de potencia los siguientes radicales:

a. $\sqrt[3]{7^2}$

b. $\sqrt[5]{5^3}$

c. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

d. $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$

Resolución

a. $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt[5]{5^3} = 5^{\frac{3}{5}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

d. $\frac{1}{\sqrt{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^5}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^5} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$

Problema N.º 5

Exprese en forma de radical las siguientes potencias:

a. $5x^{\frac{1}{2}}$

c. $2^{-\frac{1}{3}}$

e. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$

b. $(2x)^{\frac{3}{5}}$

d. $11^{-\frac{3}{2}}$

Resolución

a. $5 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{x}$

b. $(2x)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2x^3}$

c. $2^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

d. $11^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{11}\right)^3}$

e. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Problema N.º 6

Simplifique las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

c. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

b. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

d. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

Resolución

a. $\sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2}$

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{32} + \sqrt{18} = 7\sqrt{2}$$

b. $\sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3}$

$$\sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} + \sqrt{48} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{75} + \sqrt{48} = 9\sqrt{3}$$

$$c. \sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} + \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} = 2 \cdot \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3}$$

$$\therefore \sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} = 3\sqrt[5]{3}$$

$$d. \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} - \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = 2 \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3}$$

$$\therefore \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$$

Problema N.º 7

Simplifique las siguientes expresiones:

$$a. \sqrt[4]{x^4}$$

$$c. \sqrt[3]{x^3 y^6}$$

$$e. \sqrt[3]{x^3 y^6}$$

$$b. \sqrt[4]{16x^8}$$

$$d. \sqrt[3]{a^2 b} \sqrt[3]{a^4 b^2}$$

Resolución

$$a. \sqrt[4]{x^4} = x$$

$$b. \sqrt[4]{16x^8} = \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{x^8}$$

$$\therefore \sqrt[4]{16x^8} = 2x^2$$

$$c. \sqrt[3]{x^3 y^6} = \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{y^6}$$

$$\therefore \sqrt[3]{x^3 y^6} = x \cdot y^2$$

$$d. \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^2} = \sqrt[3]{a^2 \cdot b \cdot a^4 b^2}$$

$$\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^2} = \sqrt[3]{a^2 \cdot a^4 \cdot b \cdot b^2}$$

$$\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^2} = \sqrt[3]{a^6 b^3}$$

$$\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^2} = \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{b^3}$$

$$\therefore \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^2} = a^2 \cdot b$$

$$e. \sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = \sqrt[3]{2^6 x^6}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = \sqrt[6]{64x^6}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{x^6}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{x^6}$$

$$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = 2x$$

Problema N.º 8

Simplifique las siguientes expresiones:

$$a. a^9 \cdot a^{-5}$$

$$c. (12x^2 y^4) \left(\frac{1}{2} x^5 y \right)$$

$$b. (12x^2 y^4) \left(\frac{1}{2} x^5 y \right)$$

$$d. (2x^2 y^3) (3x^3 y)^{-2}$$

Resolución

$$a. a^9 \cdot a^{-5} = a^{9+(-5)} = a^4$$

$$b. (12x^2 y^4) \left(\frac{1}{2} \cdot x^5 y \right)$$

$$(12x^2 y^4) \left(\frac{1}{2} \cdot x^5 y \right) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot y^4 \cdot y$$

$$\therefore (12x^2 y^4) \left(\frac{1}{2} \cdot x^5 y \right) = 6x^7 \cdot y^5$$

$$c. \frac{a^{-3} b^4}{a^{-5} b^5} = a^{-3-(-5)} \cdot b^{4-5}$$

$$\frac{a^{-3} b^4}{a^{-5} b^5} = a^2 \cdot b^{-1}$$

$$\therefore \frac{a^{-3} b^4}{a^{-5} b^5} = \frac{a^2}{b}$$

d. $(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2}$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = (2x^2y^3)\left(3^{-2}(x^3)^{-2}y^{-2}\right)$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = (2x^2y^3)\left(\frac{1}{9} \cdot x^{-6}y^{-2}\right)$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot x^{-6} \cdot y^3 \cdot y^{-2}$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = \frac{2}{9}x^{-4}y^1$$

$$\therefore (2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = \frac{2y}{9x^4}$$

Problema N.º 9

Halle el valor reducido de la siguiente expresión:

$$M = \frac{\overbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}^{23 \text{ veces}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{23 \text{ veces}}}$$

- A) 3 B) 9 C) 27
D) 1 E) 81

Resolución

Nos piden M .

$$M = \frac{\overbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}^{23 \text{ veces}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{23 \text{ veces}}} = \frac{9^{12}}{3^{23}}$$

$$M = \frac{(3^2)^{12}}{3^{23}} = \frac{3^{24}}{3^{23}} = 3^{24-23} = 3^1$$

$$\therefore M=3$$

Clave

Problema N.º 10

Halle el valor reducido de A .

$$A = \frac{(3^4)^6 \cdot (3^7)^3}{(3^6)^5 \cdot (3^8)^2}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 3
D) 9 E) $\frac{1}{9}$

Resolución

Nos piden A .

$$A = \frac{(3^4)^6 \cdot (3^7)^3}{(3^6)^5 \cdot (3^8)^2} \rightarrow A = \frac{3^{24} \cdot 3^{21}}{3^{30} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{45}}{3^{46}}$$

$$A = 3^{45-46} \rightarrow A = 3^{-1}$$

$$\therefore A = \frac{1}{3}$$

Clave

Problema N.º 11

Dada la igualdad $3^{2x-3}=27$, halle el valor de x^{-1} .

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{6}$ E) 1

Resolución

Nos piden $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

IMPORTANTE

$$b^x = b^y \rightarrow x=y$$

$$3^{2x-3}=27 \rightarrow 3^{2x-3}=3^3$$

$$2x-3=3 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

$$\therefore x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

Clave

Problema N.º 12

Si se cumple que $3^a=2$, halle el valor de 9^a-3^{a+1}

- A) 1 B) 2 C) 0
D) -1 E) -2

Resolución

Nos piden 9^a-3^{a+1} .

$$9^a-3^{a+1} = (3^2)^a - 3^a \cdot 3^1$$

$$9^a-3^{a+1} = (3^a)^2 - 3^a \cdot 3$$

Reemplazamos valores.

$$3^a=2$$

Luego

$$2^2-2 \cdot 3$$

$$\therefore 4-6=-2$$



Clave

Problema N.º 13

Halle la raíz cúbica de la siguiente expresión:

$$F = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{-1}.$$

- A) 3 B) 2 C) -3
D) 1 E) -2

Resolución

Nos piden F .

$$F = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{-1} \rightarrow F = 4 + 3 - (-1)$$

$$\rightarrow F=8$$

$$\therefore \sqrt[3]{8}=2$$

Clave

Problema N.º 14

Simplifique la siguiente expresión:

$$N = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[8]{128}.$$

- A) -1 B) -2 C) 1
D) 2 E) 0

Resolución

Nos piden N .

$$N = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[8]{128}$$

$$N = \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{2^7} \rightarrow N = \sqrt[8]{2 \cdot 2^7}$$

$$N = \sqrt[8]{2^8} \rightarrow N=2$$

$$\therefore N = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[8]{128} = 2$$

Clave

D

Problema N.º 15

Reduzca la siguiente expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{9}} + \sqrt{4\sqrt{16}} + \sqrt{5\sqrt{25}}.$$

- A) 7 B) 12 C) 2
D) -2 E) -7

Resolución

Efectuamos

$$\sqrt{3\sqrt{9}} + \sqrt{4\sqrt{16}} + \sqrt{5\sqrt{25}} = \sqrt{3 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 4} + \sqrt{5 \cdot 5}$$

$$\sqrt{3\sqrt{9}} + \sqrt{4\sqrt{16}} + \sqrt{5\sqrt{25}} = \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$$

$$\sqrt{3\sqrt{9}} + \sqrt{4\sqrt{16}} + \sqrt{5\sqrt{25}} = 3 + 4 + 5$$

$$\therefore \sqrt{3\sqrt{9}} + \sqrt{4\sqrt{16}} + \sqrt{5\sqrt{25}} = 12$$

Clave

B

d. $(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2}$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = (2x^2y^3)(3^{-2}(x^3)^{-2}y^{-2})$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = (2x^2y^3)\left(\frac{1}{9} \cdot x^{-6}y^{-2}\right)$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot x^{-6} \cdot y^3 \cdot y^{-2}$$

$$(2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = \frac{2}{9}x^{-4}y^1$$

$$\therefore (2x^2y^3)(3x^3y)^{-2} = \frac{2y}{9x^4}$$

Problema N.º 9

Halle el valor reducido de la siguiente expresión:

$$M = \frac{\overbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}^{12 \text{ veces}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{23 \text{ veces}}}$$

- A) 3 B) 9 C) 27
D) 1 E) 81

Resolución

Nos piden M .

$$M = \frac{\overbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}^{12 \text{ veces}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{23 \text{ veces}}} = \frac{9^{12}}{3^{23}}$$

$$M = \frac{(3^2)^{12}}{3^{23}} = \frac{3^{24}}{3^{23}} = 3^{24-23} = 3^1$$

$$\therefore M=3$$

Clave

Problema N.º 10

Halle el valor reducido de A .

$$A = \frac{(3^4)^6 \cdot (3^7)^3}{(3^6)^5 \cdot (3^8)^2}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 3
D) 9 E) $\frac{1}{9}$

Resolución

Nos piden A .

$$A = \frac{(3^4)^6 \cdot (3^7)^3}{(3^6)^5 \cdot (3^8)^2} \rightarrow A = \frac{3^{24} \cdot 3^{21}}{3^{30} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{45}}{3^{46}}$$

$$A = 3^{45-46} \rightarrow A = 3^{-1}$$

$$\therefore A = \frac{1}{3}$$

Clave

Problema N.º 11

Dada la igualdad $3^{2x-3}=27$, halle el valor de x^{-1} .

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{6}$ E) 1

Resolución

Nos piden $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

IMPORTANTE

$$b^x = b^y \rightarrow x=y$$

$$3^{2x-3}=27 \rightarrow 3^{2x-3}=3^3$$

$$2x-3=3 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

$$\therefore x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

Clave

Problema N.º 12

Si se cumple que $3^a=2$, halle el valor de 9^a-3^{a+1}

- | | | |
|-------|-------|------|
| A) 1 | B) 2 | C) 0 |
| D) -1 | E) -2 | |

Resolución

Nos piden 9^a-3^{a+1} .

$$9^a-3^{a+1}=(3^2)^a-3^a \cdot 3^1$$

$$9^a-3^{a+1}=(3^a)^2-3^a \cdot 3$$

Reemplazamos valores.

$$3^a=2$$

Luego

$$2^2-2 \cdot 3$$

$$\therefore 4-6=-2$$

Problema N.º 13

Halle la raíz cónica de la siguiente expresión:

$$F=\sqrt{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{-1}.$$

- | | | |
|------|-------|-------|
| A) 3 | B) 2 | C) -3 |
| D) 1 | E) -2 | |

Resolución

Nos piden F .

$$F=\sqrt{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{-1} \rightarrow F=4+3-(-1)$$

$$\rightarrow F=8$$

$$\therefore \sqrt[3]{8}=2$$

Clave A

Problema N.º 14

Simplifique la siguiente expresión:

$$N=\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{128}}.$$

- | | | |
|-------|-------|------|
| A) -1 | B) -2 | C) 1 |
| D) 2 | E) 0 | |

Resolución

Nos piden N .

$$N=\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{128}}$$

$$N=\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{2^7} \rightarrow N=\sqrt[8]{2 \cdot 2^7}$$

$$N=\sqrt[8]{2^8} \rightarrow N=2$$

$$\therefore N=\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{128}}=2$$

Clave D

Problema N.º 15

Reduzca la siguiente expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{9}}+\sqrt{4\sqrt{16}}+\sqrt{5\sqrt{25}}.$$

- | | | |
|-------|-------|------|
| A) 7 | B) 12 | C) 2 |
| D) -2 | E) -7 | |

Resolución

Efectuamos

$$\sqrt{3\sqrt{9}}+\sqrt{4\sqrt{16}}+\sqrt{5\sqrt{25}}=\sqrt{3 \cdot 3}+\sqrt{4 \cdot 4}+\sqrt{5 \cdot 5}$$

$$\sqrt{3\sqrt{9}}+\sqrt{4\sqrt{16}}+\sqrt{5\sqrt{25}}=\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}$$

$$\sqrt{3\sqrt{9}}+\sqrt{4\sqrt{16}}+\sqrt{5\sqrt{25}}=3+4+5$$

$$\therefore \sqrt{3\sqrt{9}}+\sqrt{4\sqrt{16}}+\sqrt{5\sqrt{25}}=12$$

Clave B

Problema N.º 16

Indique el valor de la expresión M .

$$M = \left(\frac{4}{27^3 - 4^2} \right)^{0,5}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 7 E) 5

Resolución

Nos piden M .

$$M = \left(\sqrt[3]{27^4} - \sqrt{4^5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M = (3^4 - 2^5)^{\frac{1}{2}} = (81 - 32)^{\frac{1}{2}}$$

$$M = \sqrt{49}$$

$$\therefore M = 7$$

PÁRIS
AMOR A SOFÍA

$$(4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0} = 4^6 - 4^6 + 4$$

$$\therefore (4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0} = 4$$

**Problema N.º 17**

Luego de efectuar la expresión

$$(4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0}$$

indique el valor que se obtiene.

- A) 1 B) 125 C) 27
D) 8 E) 4

Resolución

Nos piden el valor de la expresión.

$$(4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0} = 4^6 - 4^9 + 4^3 + 4^1$$

$$(4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0} = 4^6 - \frac{4^9}{4^3} + 4$$

$$(4^3)^2 - 4^{3^2} \div 4^3 + 4^{2^0} = 4^6 - 4^{9-3} + 4$$

Problema N.º 18

Simplifique la expresión A .

$$A = \frac{b^{4^2} \cdot (b^6)^3 \cdot b^{5^2^0}}{b \cdot b^2 \cdot b^3 \dots b^8}; b \neq 0$$

- A) b^2 B) b C) b^4
D) b^3 E) b^{-1}

Resolución

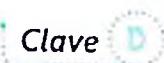
Nos piden A .

$$A = \frac{b^{16} \cdot b^{18} \cdot b^{5^1}}{b^{1+2+3+\dots+8}}$$

$$A = \frac{b^{16+18+5}}{b^{36}}$$

$$A = \frac{b^{39}}{b^{36}} \rightarrow A = b^{39-36}$$

$$\therefore A = b^3$$

**Problema N.º 19**

Indique el valor reducido de R .

$$R = \frac{128 \cdot 16 \cdot 8}{256 \cdot 64}$$

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 1 E) 16

Resolución

De la expresión, tenemos

$$R = \frac{128 \cdot 16 \cdot 8}{256 \cdot 64}$$

$$R = \frac{128 \cdot 16 \cdot 8}{256 \cdot 64} = \frac{2^7 \cdot 2^4 \cdot 2^3}{2^8 \cdot 2^6} = \frac{2^{7+4+3}}{2^{8+6}}$$

$$R = \frac{128 \cdot 16 \cdot 8}{256 \cdot 64} = \frac{2^{14}}{2^{14}} = 2^{14-14} = 2^0$$

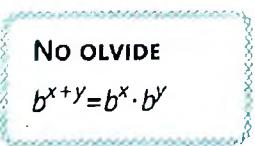
$$\therefore R=1$$


Problema N.º 20

Simplifique la expresión K .

$$K = \frac{5^{n+3} - 5^{n+2}}{5^{n-2} - 5^{n-3}}$$

- A) 25 B) $\frac{1}{5}$ C) 5^7
 D) 3125 E) 625

Resolución


No olvide
 $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$

De la expresión, tenemos

$$K = \frac{5^{n+3} - 5^{n+2}}{5^{n-2} - 5^{n-3}}$$

$$K = \frac{5^n \cdot 5^3 - 5^n \cdot 5^2}{5^n \cdot 5^{-2} - 5^n \cdot 5^{-3}}$$

$$K = \frac{5^n (5^3 - 5^2)}{5^n (5^{-2} - 5^{-3})}$$

$$K = \frac{125 - 25}{5 \cdot \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3}} \rightarrow K = \frac{100}{\frac{4}{5^3}}$$

$$K = \frac{100 \cdot 5^5}{4} \rightarrow K = 25 \cdot 5^5$$

$$K = 5^2 \cdot 5^5$$

$$\therefore K = 5^7$$


Problema N.º 21

Indique el valor de x en la siguiente ecuación:

$$9^{2x+1} = 27^{2-x}$$

- A) 0,333... B) 1,5 C) 1
 D) 0,5 E) $\frac{4}{7}$

Resolución**IMPORTANTE**

$$b^x = b^y \rightarrow x = y$$

De la expresión, tenemos

$$9^{2x+1} = 27^{2-x}$$

$$(3^2)^{2x+1} = (3^3)^{2-x} \rightarrow 3^{4x+2} = 3^{6-3x}$$

Entonces

$$4x + 2 = 6 - 3x$$

$$4x + 3x = 6 - 2 \rightarrow 7x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{7}$$



Problema N.º 22

Halle el valor reducido de la siguiente expresión:

$$A = \sqrt[n]{\frac{9^n \cdot 4^n}{6^{2n}}}$$

- A) 3 B) 9 C) 4 D) 36 E) 1

Resolución

De la expresión, tenemos

$$A = \sqrt[n]{\frac{9^n \cdot 4^n}{6^{2n}}}$$

$$A = \sqrt[n]{\frac{(9 \cdot 4)^n}{6^{2n}}}$$

Entonces

$$A = \sqrt[n]{\frac{36^n}{6^{2n}}} = \sqrt[n]{\frac{(6^2)^n}{6^{2n}}}$$

$$A = \sqrt[n]{\frac{6^{2n}}{6^{2n}}} \rightarrow A = \sqrt[n]{1}$$

$$\therefore A = 1$$

Clave E

Problema N.º 23

Halle el valor de la expresión J .

$$J = \frac{6^{10} \cdot 15^5 \cdot 10^7}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}}$$

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

Resolución

De la expresión, tenemos

$$J = \frac{6^{10} \cdot 15^5 \cdot 10^7}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}}$$

$$J = \frac{(3 \cdot 2)^{10} \cdot (3 \cdot 5)^5 \cdot (2 \cdot 5)^7}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}}$$

$$J = \frac{3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 2^7 \cdot 5^7}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}}$$

$$J = \frac{3^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{10} \cdot 2^7 \cdot 5^5 \cdot 5^7}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}}$$

$$J = \frac{3^{15} \cdot 2^{17} \cdot 5^{12}}{2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3^{15}} = 3^{15-15} \cdot 2^{17-15} \cdot 5^{12-12}$$

$$J = 3^0 \cdot 2^2 \cdot 5^0$$

$$J = 1 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\therefore J = 4$$

Clave A

Problema N.º 24

Simplifique la expresión

$$H = \frac{7^{2+n} - 7^{n+1}}{6 \cdot 7^{n-1}}$$

y dé como respuesta la suma de las cifras de H .

- A) 12 B) 13 C) 11 D) 16 E) 25

Resolución**No olvide**

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y \rightarrow b^x \cdot b^y$$

De la expresión, tenemos

$$H = \frac{7^{2+n} - 7^{n+1}}{6 \cdot 7^{n-1}}$$

$$H = \frac{7^2 \cdot 7^n - 7^n \cdot 7^1}{6 \cdot 7^n \cdot 7^{-1}}$$

$$H = \frac{7^n(7^2 - 7)}{6 \cdot 7^n \cdot \frac{1}{7}} \rightarrow H = \frac{49 - 7}{6}$$

$$H = \frac{42}{6} \rightarrow H = \frac{42 \cdot 7}{6} = 7 \cdot 7$$

$$H = 49$$

Por lo tanto, la suma de las cifras de H es igual a 13.**Clave****B****Problema N. 25**

Si se cumple que

$$(m^n)^{n^3} = m^{n \cdot n^3}; m \geq 12; n > 1,$$

determine el valor de n^{12} .

- A) 356 B) 365 C) 265
 D) 236 E) 256

Resolución

De la expresión, tenemos

$$(m^n)^{n^3} = m^{n \cdot n^3}$$

$$m^{n \cdot n^3} = m^{n^4} \rightarrow n^1 \cdot n^3 = n^4$$

$$n^4 = n^3 \rightarrow 4 = n^3$$

Nos piden

$$n^{12} = (n^3)^4$$

Reemplazamos

$$n^3 = 4$$

$$\therefore n^{12} = 4^4 = 256$$

Clave**E****Problema N. 26**Calcule el valor de E .

$$E = \frac{64 \cdot 6^3 \cdot 15^3}{10^3 \cdot 81^2}$$

- A) 4 B) 8 C) 24
 D) $\frac{64}{9}$ E) 30

ResoluciónNos piden el valor de E .

$$E = \frac{2^6 \cdot (2 \cdot 3)^3 \cdot (3 \cdot 5)^3}{(5 \cdot 2)^3 \cdot (3^4)^2}$$

$$E = \frac{2^6 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^3 \cdot 3^8}$$

$$E = \frac{2^6 \cdot 3^6}{3^8}$$

$$E = 2^6 \cdot 3^{-2} \rightarrow E = \frac{2^6}{3^2}$$

$$\therefore E = \frac{64}{9}$$

Clave

Problema N.º 27Simplifique la expresión F .

$$F = \frac{e^2 \cdot e^4 \cdot e^6 \cdot \dots \cdot e^{100}}{e^{99} \cdot e^{97} \cdot e^{95} \cdot \dots \cdot e}$$

Considere que e es igual a 2,718182...

- A) e
 B) e^{50}
 C) e^{100}
 D) $\frac{1}{e}$
 E) 1

Resolución

IMPORTANT
 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

En el problema, tenemos

$$F = \frac{e^2 \cdot e^4 \cdot e^6 \cdot \dots \cdot e^{100}}{e^{99} \cdot e^{97} \cdot e^{95} \cdot \dots \cdot e^1}$$

$$F = \frac{e^{2+4+6+\dots+100}}{e^{1+3+5+\dots+99}}$$

$$\therefore F = \frac{e^{50 \cdot 51}}{e^{50 \cdot 50}} = \frac{e^{2550}}{e^{2500}} = e^{50}$$

Clave

Problema N.º 28Considere que 3^x es equivalente a 2 y simplifique la siguiente expresión:

$$P = \frac{2 \cdot 3^{x+2} + 3 \cdot 2^{x+1} - 9^{x+1}}{2^{x+1}}$$

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) 5

Resolución

No OLVIDE

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

En el problema, tenemos

$$P = \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^x \cdot 2 - 9^x \cdot 9}{2^x \cdot 2}$$

Por dato: $3^x = 2$

$$P = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^x \cdot 2 - (3^x)^2 \cdot 3^2}{2^x \cdot 2}$$

$$P = \frac{4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^x \cdot 2 - 2^2 \cdot 3^2}{2^x \cdot 2}$$

$$\therefore P = \frac{3 \cdot 2^x \cdot 2}{2^x \cdot 2} = 3$$

Clave

Problema N.º 29Simplifique la expresión E .

$$E = \frac{3^{4+n} - 3^{2+n}}{18 \cdot 3^{n-2}}$$

- A) 18
 B) 72
 C) 36
 D) 81
 E) 27

Resolución

IMPORTANTE

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

En el problema, tenemos

$$E = \frac{3^4 \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 3^n}{18 \cdot 3^n \cdot 3^{-2}}$$

$$E = \frac{3^n (3^4 - 3^2)}{18 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^n}$$

$$E = \frac{81 - 9}{2} \rightarrow E = \frac{72}{2}$$

$$\therefore E = 36$$

Problema N.º 30

Si se cumple que $2^{4^{2x-1}} = 4^{2^{x-1}}$, calcule el valor de x .

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| A) $\frac{1}{3}$ | B) $\frac{3}{2}$ | C) $\frac{2}{3}$ |
| D) $\frac{5}{2}$ | E) $\frac{4}{3}$ | |

Resolución

Del dato, tenemos

$$2^{4^{2x-1}} = 4^{2^{x-1}}$$

$$2^{4^{2x-1}} = (2^2)^{2^{x-1}}$$

$$2^{4^{2x-1}} = 2^{2^x} \rightarrow 4^{2x-1} = 2^x$$

$$(2^2)^{2x-1} = 2^x$$

$$2^{4x-2} = 2^x \rightarrow 4x-2 = x$$

$$3x = 2$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

Clave**Problema N.º 31**Simplifique la expresión E .

$$E = \frac{2^{m+3} \cdot 4^{m+2n}}{8^{m-2} \cdot 16^{n+2}}$$

- | | | |
|---------|---------|--------|
| A) $2m$ | B) $4m$ | C) 2 |
| D) 4 | E) 6 | |

UNFV 2008

Resolución

En el problema, tenemos

$$E = \frac{2^m \cdot 2^3 \cdot (2^2)^{m+2n}}{(2^3)^{m-2} \cdot (2^4)^{n+2}} \rightarrow E = \frac{2^m \cdot 2^3 \cdot 2^{2m+4n}}{2^{3m-6} \cdot 2^{4n+8}}$$

$$E = \frac{2^{3m} \cdot 2^3 \cdot 2^{4n}}{2^{3m} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{4n} \cdot 2^8}$$

$$E = \frac{2^3}{2^2} \rightarrow E = 2^{3-2}$$

$$\therefore E = 2$$

Clave**Problema N.º 32**

Si se cumple que

$$(m^n)^{\frac{3}{n}} = m^{n \cdot \frac{3}{n}} ; m \geq 12 \wedge n \geq 1$$

determine el valor de n^{12} .

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) 356 | B) 365 | C) 265 |
| D) 236 | E) 256 | |

Resolución

Nos piden n^{12} .

Del dato, tenemos

$$(m^n)^{n^3} = m^{n \cdot n^3} \rightarrow m^{n^4} = m^{n \cdot n^3}$$

$$n^4 = n^{n^3} \rightarrow n^3 = 4 \rightarrow (n^3)^4 = 4^4$$

$$\therefore n^{12} = 256$$

Clave E

Problema N.º 33

Si se cumple que

$2^{3x-1} = 2^{27x}$, determine el valor de $(2x+3)^2$.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) 3
- C) 4
- D) 1
- E) $\frac{3}{2}$

Resolución

Nos piden $(2x+3)^2$.

Del dato, tenemos

$$2^{3x-1} = 2^{27x}$$

$$3^{x-1} = 27^x \rightarrow 3^{x-1} = (3^3)^x \rightarrow 3^{x-1} = 3^{3x}$$

$$x-1 = 3x \rightarrow -1 = 2x$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

Nos piden

$$(2x+3)^2 = \left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\right)^2$$

$$\therefore (2x+3)^2 = 4$$

Clave C

Problema N.º 34

Determine el valor de la expresión

$$a^{3x} - a^{2x} - a + 4^{\frac{1}{x}} \text{ si se sabe que } a^x = 4$$

- A) 64
- B) 52
- C) 48
- D) 32
- E) 44

Resolución

Efectuamos

$$a^{3x} - a^{2x} - a + 4^{\frac{1}{x}} = (a^x)^3 - (a^x)^2 - a + 4^{\frac{1}{x}}$$

$$a^{3x} - a^{2x} - a + 4^{\frac{1}{x}} = 4^3 - 4^2 - 4 + 4^{\frac{1}{x}}$$

$$a^{3x} - a^{2x} - a + 4^{\frac{1}{x}} = 64 - 16$$

$$\therefore a^{3x} - a^{2x} - a + 4^{\frac{1}{x}} = 48$$

Clave C

Problema N.º 35

Determine el valor de x en la expresión

$$\frac{x+1}{2^{x-2}} = 8.$$

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{8}{3}$
- C) $\frac{5}{2}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{7}{2}$

Resolución

Nos piden x .

$$\frac{x+1}{2^{x-2}} = 2^3$$

$$\frac{x+1}{x-2} = 3 \rightarrow x+1 = 3x-6$$

$$6+1 = 3x-x \rightarrow 7 = 2x$$

$$\therefore x = \frac{7}{2}$$

Clave E

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Halle el valor reducido de P .

$$P = -3^2 + (-3)^2 - (-3)^0 + (-1)^0$$

- A) 2 B) 0 C) -2
D) 1 E) -1

2. Simplifique la expresión R .

$$R = \frac{6^5 \cdot 15^6}{3^{11} \cdot 10^5}$$

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 1

3. Simplifique la expresión C .

$$C = (2^{2^2})^{-1} - (-2)^{-2} \cdot 2^{-2}$$

- A) 3 B) 4 C) 2
D) 8 E) 0

4. Si tenemos que

$$A = \frac{5^{n+2} - 5^{n+1}}{5^{n+1}}$$

halle la suma de cifras de A^2 .

- A) 5 B) 9 C) 11
D) 7 E) 8

5. Simplifique la expresión D .

$$D = \frac{3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}}{3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3}}$$

- A) 3^4 B) 3^5 C) 3^7
D) 3^6 E) 3^8

6. Determine el valor de A .

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + (-7)^8 - 7^8$$

- A) $\frac{13}{4}$ B) 12 C) 3
D) $\frac{1}{4}$ E) 7

7. Simplifique la expresión W .

$$W = \frac{20^5 \cdot 9^3 \cdot (-1)^6}{3^2 \cdot 60^5}$$

- A) 3 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

8. Si se tiene que

$$A = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \dots 2^2}_{(7 \text{ veces})}$$

$$B = 4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7$$

determine el valor de $A - B$.

- A) 1 B) 4^7 C) 2^7
D) 0 E) 2^3

9. Determine el valor reducido de T .

$$T = \frac{3^{n+2} - 3^{n+1}}{3^n} + \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^n}$$

- A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 2

10. Determine el valor de M .

$$M = \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{12}$$

- A) 8 B) 10 C) 12
D) 4 E) 18

11. Reduzca la expresión Q .

$$Q = \frac{1}{125^3} + 169^{0,5} + 625^{\frac{1}{4}}$$

- A) 28 B) 14 C) 16
D) 20 E) 23

12. Calcule $A \cdot B$.

$$A = \sqrt[2]{\sqrt[3]{9}} \quad \wedge \quad B = \sqrt[8]{\sqrt[3]{81}}$$

- A) 12 B) 11 C) 8
D) 6 E) 7

13. Calcule el valor reducido de V .

$$V = \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50}} + 1 \right)^{\sqrt{2}\sqrt{8}}$$

- A) 16 B) 9 C) 25
D) 11 E) 4

14. Determine el valor de C .

$$C = \left(\frac{1}{25} \right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1}{32} \right)^{-\left(\frac{1}{25}\right)\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-0,5}$$

- A) 5 B) 6 C) 1
D) -2 E) 7

15. Simplifique la expresión A .

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt[4]{\sqrt{9^4}} - \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{25}}}$$

- A) 4 B) 5 C) 3
D) 1 E) 0

16. Simplifique la expresión L y considere que 3^x es equivalente a 2.

$$L = \frac{2 \cdot 3^{x+2} + 3 \cdot 2^{x+1} - 9^{x+1}}{2^{x+1}}$$

- A) 2 B) -3 C) 1
D) 3 E) -2

17. Simplifique J .

$$J = \frac{3^{4+n} - 3^{2+n}}{18 \cdot 3^{n-2}}$$

- A) 18 B) 12 C) 36
D) 81 E) 27

18. Simplifique la expresión N .

$$N = \frac{2^{m+3} \cdot 4^{m+2n}}{8^{m-2} \cdot 16^{n+2}}$$

- A) $2m$ B) $4m$ C) 2
D) 4 E) 6

19. Si se cumple que

$$2^{4^{2x-1}} = 4^{2^{x-1}},$$

calcule el valor de x .

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

20. Si $x \in \mathbb{Z}$ y verifica que

$$x^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2},$$

calcule el mayor valor de x .

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 16

21. Determine el valor de $16(B^2+1)$, si se sabe que

$$B = \sqrt[n]{\frac{4^{-n} + 1}{4^n + 1}}$$

- A) 18 B) 2 C) 8
D) 17 E) 16

22. Luego de reducir la expresión

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x^{2n}}$$

- A) 4 B) 3 C) 7
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

23. Calcule el valor de n .

$$\sqrt[5^n]{16^n \cdot (2^4)^{1-n}} = 20$$

- A) 4 B) 2 C) 8
D) 6 E) 16

24. Halle el exponente final de x , luego de simplificar la siguiente expresión:

$$x^{2^3} \cdot x^{(-2)^4} \cdot x^{-2^4} \cdot x^{(-1)^4}$$

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

25. Reduzca la expresión V .

$$V = \frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} + 2^{-3}; n \in \mathbb{N}$$

- A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1
D) 7 E) $\frac{9}{8}$

26. Calcule el valor de

$$3^{2n} + 3^{-n} + 9^{-n}$$

- si se sabe que $3^n = 2$.
- A) $\frac{1}{4}$ B) 2 C) 3
D) $\frac{19}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

27. Halle la suma de cifras de la expresión J .

$$J = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-4} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right]^{(-5)^0}$$

- A) 59 B) 13 C) 47
D) 15 E) 11

28. Determine el valor de x^6 si se sabe que $3^{x^3} = 243^3$.

- A) 5^6 B) 225 C) 125
D) 625 E) 325

29. Dados los números

$$A = 5^{\frac{1}{2}}, B = \left(\frac{1}{64} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

indique el valor de AB^{-1} .

- A) $\left(\frac{5}{2} \right)^2$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\left(\frac{5}{2} \right)^3$
D) $\left(\frac{1}{2} \right)^3$ E) $\left(\frac{2}{5} \right)^3$

30. Determine el valor de $\frac{A}{B}$ si se sabe que

$$A = \frac{\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} \quad \wedge \quad B = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}}$$

- A) $\frac{b}{a}$
 B) $\frac{a}{b}$
 C) $\sqrt{\frac{b}{a}}$
 D) $\sqrt{\frac{a}{b}}$
 E) 1

31. Calcule el valor reducido de P .

$$P = \left(\sqrt[n]{n^{n-n^2}} \right) \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{n^{n^3}}} \right)$$

- A) $\frac{1}{n}$
 B) n
 C) n^2
 D) $\frac{1}{n^2}$
 E) 1

32. Simplifique la expresión L .

$$L = \sqrt[x]{\frac{4^{x+2} - 4^x}{15}}$$

- A) 1
 B) 2
 C) 4
 D) 8
 E) 15

33. Si $x=2015^5$, calcule el valor de

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[5]{x}}.$$

- A) $\sqrt[5]{2015}$
 B) $\sqrt{2015}$
 C) 1
 D) $\sqrt[3]{2015}$
 E) 2015

34. Sea x un número natural, de modo que $x^{2x} + 16 = 8x^x$.

Calcule el valor de $x + \frac{1}{x}$.

- A) 2
 B) $\frac{10}{3}$
 C) $\frac{5}{2}$
 D) $\frac{17}{4}$
 E) 3

35. Calcule el valor de $\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$.

- A) 1
 B) 2
 C) $\sqrt{2}$
 D) $\frac{1}{2}$
 E) 4

36. Indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $\underbrace{5+5+\dots+5}_{12 \text{ veces}} = 5^{12}$

II. $20^6 \cdot 8^{-3} \cdot 125 = 2^9 \cdot 5^3$

III. $\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{11}{6} \right)^0 = 1$

- A) FFF
 B) VFF
 C) FFV
 D) VFV
 E) VVV

37. Indique a qué exponente debemos elevar el resultado de

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} + \left(\frac{4}{11} \right)^{-1}$$

para que resulte 216.

- A) $\frac{2}{3}$
 B) $\frac{3}{2}$
 C) $\frac{1}{2}$
 D) 2
 E) 3

38. Simplifique la expresión J .

$$J = \frac{\pi^1 \cdot \pi^2 \cdot \pi^3 \cdot \dots \cdot \pi^{20}}{\pi^1 \cdot \pi^3 \cdot \pi^5 \cdot \dots \cdot \pi^{19}}$$

Consideré que $\pi=3,1415\dots$

- A) 1 B) π^{20} C) π^{420}
 D) π^{110} E) π^{10}

39. Simplifique la expresión H .

$$H = \frac{7^{2+n} - 7^{n+1}}{6 \cdot 7^{n-1}}$$

Dé como respuesta la suma de cifras de H .

- A) 12 B) 13 C) 11
 D) 16 E) 25

40. Reduzca la expresión P .

$$P = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^7}$$

Luego determine P^{10}

- A) a^2 B) a^{20} C) a^{10}
 D) a E) a^{30}

41. Reduzca la expresión D .

$$D = \frac{\sqrt[3]{125x} + \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{8x}}{\sqrt{81} + \sqrt{25}}$$

- A) $\sqrt[3]{x}$ B) $2\sqrt[3]{x}$ C) $\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$
 D) 1 E) x

42. Reduzca la expresión L .

$$L = \underbrace{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^{12}} \cdot \sqrt[5]{x^{20}} \dots}_{8 \text{ multiplicandos}}$$

- A) x B) x^{20} C) $\sqrt[36]{x}$
 D) x^{36} E) x^{10}

43. Se cumple que

$$\sqrt[3]{\sqrt{3^{3n+2}}} = 3$$

determine n^2+n+1 .

- A) 43 B) 36 C) 24
 D) 42 E) 32

44. Dada la igualdad

$$16^{8x-3} = 4^{4x-3}$$

determine la suma de cifras de la expresión $3x^2-x+5$.

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 2

45. Si $x \neq 0$, indique su exponente final si se simplifica la siguiente expresión:

$$S = \frac{(x^3)^2 \cdot x^{2^3} \cdot x^{(-3)^2} \cdot x^{(-2)^3}}{x^{-2^2} \cdot x^{-3^0} \cdot x^{2^0} \cdot x^{(-3)^0}}$$

- A) 15 B) 18 C) -3
 D) 12 E) 30

46. Si se cumple que

$$5^{x+y} = 625 \quad \wedge \quad 2^{x-y} = 64$$

determine el valor de $x^2 - y^2$.

- A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 24

47. Al hallar el valor de x en la igualdad

$$16^{3^{2x}} = 8^{4^{2x}}$$

se obtiene la fracción irreductible $\frac{m}{n}$.

Determine el valor de $m+n$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

48. Reduzca la expresión B .

$$B = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}$$

- A) $\sqrt[30]{2^{19}}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[19]{2^{30}}$
D) $\sqrt[25]{2^{19}}$ E) $\sqrt[19]{2^{25}}$

49. Simplifique la expresión G .

$$G = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$$

- A) 14 B) 13 C) 12
D) 11 E) 10

Claves

1	B	8	D	15	E	22	C	29	C	36	B	43	A
2	C	9	C	16	D	23	B	30	C	37	B	44	D
3	E	10	C	17	C	24	C	31	B	38	D	45	B
4	D	11	E	18	C	25	B	32	C	39	B	46	E
5	A	12	A	19	C	26	D	33	E	40	B	47	B
6	A	13	A	20	B	27	C	34	C	41	C	48	A
7	E	14	A	21	D	28	B	35	A	42	D	49	A

CAPÍTULO 3



PRODUCTOS NOTABLES



En el fútbol hay jugadores que son notables, es decir, basta con ver sus imágenes para identificar sus nombres, los equipos de fútbol donde juegan y otras características más; de la misma manera, en las matemáticas, hay ciertos productos que son notables y que identificarlos nos permitirá agilizar los resultados.

El estudio de los números y su aplicación en otras ramas de las matemáticas, como la geometría, la aritmética y el álgebra, no ha sido fácil. Los notables Pitágoras, Euclides, Al-Juarismi, Fermat, Descartes, Leibniz, entre otros, le dieron forma y sentido a todo ese conocimiento que desde tiempos remotos los babilonios y egipcios aplicaban en su cotidianidad. Por ejemplo, en la aritmética, que se basa en la habilidad para contar, solo se utilizan números o cantidades conocidas que mediante la adición, multiplicación y potenciación realiza cálculos. En el álgebra se permite generalizar las aplicaciones aritméticas mediante cantidades desconocidas representadas por letras, también se usa la adición, multiplicación y potenciación para tales aplicaciones. Dentro de todas estas operaciones elementales, se derivan procedimientos que simplifican las operaciones indicadas, como los productos notables, que son herramientas muy prácticas para la agilización en la búsqueda de un resultado concreto.

Aprendizajes esperados

- Identificar los principales productos notables.
- Aplicar la resolución de problemas de los principales productos notables.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Dentro de los productos de polinomios existen productos notables, que son aquellas multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumple ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

Productos notables

1. CONCEPTO

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, sin efectuar la multiplicación. A los productos notables también se les conoce como identidades algebraicas.

2. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

a. Efectuamos los siguientes ejemplos para hallar la propiedad:

- $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2 + 5x + 5x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- $(m+n)^2 = (m+n)(m+n) = m^2 + mn + nm + n^2 = m^2 + 2mn + n^2$

Luego de analizar los ejemplos anteriores, deducimos lo siguiente:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

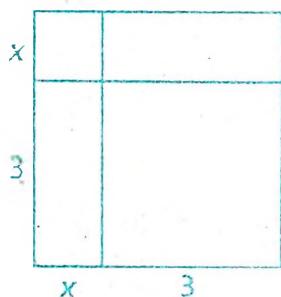
Por lo tanto, el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto del primer y el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos

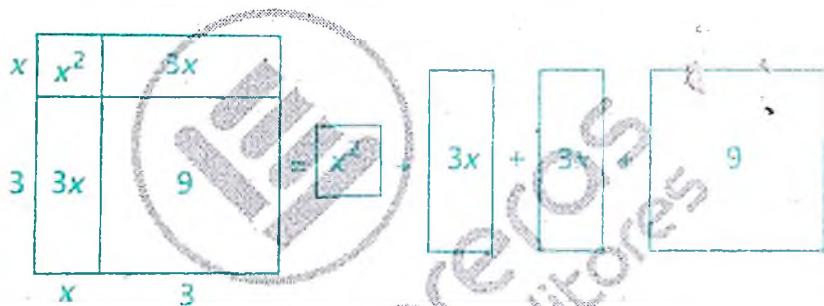
- $3 \cdot x = x \cdot 3$
- $5 \cdot x + x \cdot 5 = 5x + 5x = 10x$
- $mn + n \cdot m = mn + mn = 2mn$

- $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Analicemos geométricamente este ejemplo, es decir $(x+3)^2$, donde $x+3$ es el lado de un cuadrado.



Observamos que el área del cuadrado del lado $x+3$ corresponde a la suma de las áreas que se forman.



$$\therefore (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

- Efectúe $(x+5)^2$

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA
$(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$ $\rightarrow x^2 + 10x + 25$	$(x+5)^2 = ?$

$$(x+5)^2 = x^2 + 5x + 5x + 25$$

$$\rightarrow x^2 + 10x + 25$$

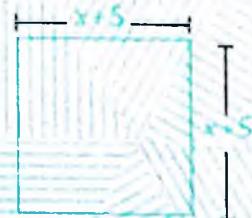
No olvide

- $(x^2)^2 = x^4$
- $(x^3)^2 = x^6$
- $(2x^3)^4 = 2^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{12}$
- $(4x)^2 = 4^2 \cdot x^2 = 16x^2$



Cuidado!

El área del cuadrado es igual a $(x+5)^2$.



- b. Los siguientes ejemplos nos ayudarán a deducir la siguiente propiedad:

- $(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9$

$$\therefore (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

- $(x-5)^2 = (x-5)(x-5) = x^2 - 5x - 5x + 25$

$$\therefore (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

- $(m-n)^2 = (m-n)(m-n) = m^2 - mn - nm + n^2$

$$\therefore (m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

Al analizar los ejemplos anteriores, podemos observar lo siguiente:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Por lo tanto, el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto del primer término por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos

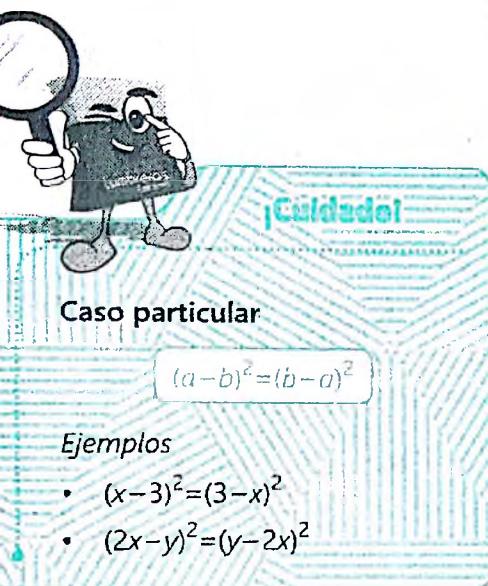
- $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

- $(x-7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$

- $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

- $(3x-2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

- $(x^2-3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 - 6x^2 + 9$



Caso particular

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Ejemplos

- $(x-3)^2 = (3-x)^2$
- $(2x-y)^2 = (y-2x)^2$



Propiedad asociativa

$$a(bc) = (ab)c$$

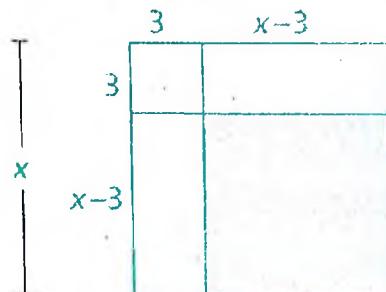
Ejemplos

- $2 \cdot x \cdot 3 = 2 \cdot 3x = 6x$

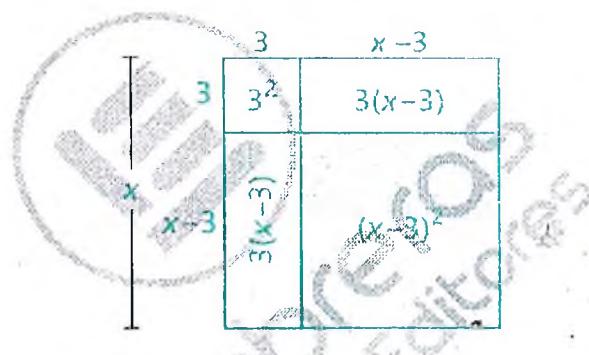
- $2 \cdot 5x \cdot 4 = 10 \cdot x \cdot 4 = 10 \cdot 4 \cdot x = 40x$

- $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Analizamos geométricamente el desarrollo del $(x-3)^2$, donde x es el lado de un cuadrado.



El área del cuadrado sombreado corresponde a $(x-3)^2$, que es equivalente al siguiente esquema:



Luego

$$(x-3)^2 = x^2 - (3^2 + 3(x-3) + 3(x-3))$$

$$(x-3)^2 = x^2 - (9 + 3x - 9 + 3x - 9)$$

$$(x-3)^2 = x^2 - (6x - 9)$$

$$\therefore (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

APLICACIÓN 1

Si $a+b=5$ y $a \cdot b=3$, determine $a^2+b^2+3a+3b$.

RESOLUCIÓN

Nos piden determinar

$$a^2+b^2+3a+3b$$

Operamos la expresión

$$a^2+b^2+3(a+b) \quad (*)$$

No olvide



Propiedad distributiva

$$A(B+C)=AB+AC$$

Ejemplos

- $5(2x+3)=10x+15$

- $x^2(x^3-2)=x^2 \cdot x^3 - 2x^2$

$$x^2(x^3-2)=x^5-2x^2$$

- $2x(7x+3)=(2x)(7x)+2x \cdot 3$

$$2x(7x+3)=14x^2+6x$$

Datos:

$$a+b=5$$

$$ab=3$$

NO OLVIDE

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Reemplazamos los datos.

$$5^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 3 \rightarrow 25 - 6 = a^2 + b^2$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 19$$

Luego en (*)

$$a^2 + b^2 + 3(a+b)$$

$$\therefore 19 + 3 \cdot 5 = 34$$

3. IDENTIDADES DE LEGENDRE

a. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

b. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Ejemplos

- $(x+5)^2 + (x-5)^2 = 2(x^2 + 5^2) = 2(x^2 + 25) = 2x^2 + 50$

- $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 2(\sqrt{5}^2 + \sqrt{2}^2) = 2(5+2) = 2 \cdot (7) = 14$

- $(y+4)^2 - (y-4)^2 = 4 \cdot y \cdot 4 = 16y$

- $(2x+3y)^2 - (2x-3y)^2 = 4 \cdot 2x \cdot 3y = 24xy$

- $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2 = 4x^2 \cdot 1 = 4x^2$

- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 4$

4. MULTIPLICACION DE BINOMIOS CON UN TERMINO COMÚN

- a. Los siguientes ejemplos servirán para poder conocer la propiedad de la multiplicación de binomios con término común.

Ejemplos

- $(x+5)(x+3)=x^2+3x+5x+15=x^2+8x+15$
- $(x+2)(x+7)=x^2+7x+2x+14=x^2+9x+14$
- $(x+5)(x+10)=x^2+10x+5x+50=x^2+15x+50$
- $(x+7)(x-2)=x^2-2x+7x-14=x^2+5x-14$

Observamos que

$$(x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn$$

Para multiplicar binomios con término común, debemos elevar al cuadrado el término común, luego sumar (o restar) los términos no comunes multiplicados por el término común y también multiplicar los términos no comunes.

Ejemplos

- $(x+3)(x+6)=x^2+(3+6)x+3\cdot 6=x^2+9x+18$
- $(x+11)(x+5)=x^2+(11+5)x+11\cdot 5=x^2+16x+55$
- $(x-4)(x-7)=x^2+(-4+-7)x+(-4)(-7)=x^2-11x+28$
- $(x-2)(x-20)=x^2+(-2+-20)x+(-2)(-20)=x^2-22x+40$
- $(x+7)(x-3)=x^2+(7+-3)x+7(-3)=x^2+4x-21$
- $(x-9)(x+20)=x^2+(-9+20)x+(-9)(20)=x^2+11x-180$

Cuidado!



Evite cometer el siguiente error:

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)\cdot 3 + 3^2 \\ &\rightarrow 2x^2 + 12x + 6 \end{aligned}$$

La respuesta correcta es

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)\cdot 3 + 3^2 \\ &\rightarrow 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

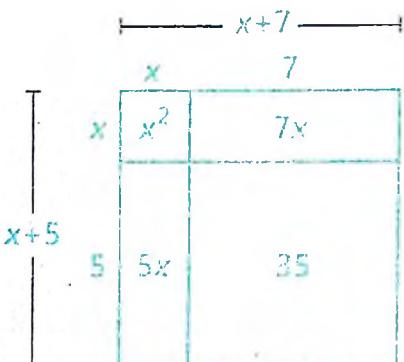
Importante



- $(x+6)(x-2)=x^2+4x-12$
- $(x-9)(x+3)=x^2-6x-27$
- $(x-4)(x-3)=x^2-7x+12$

- $(x+7)(x+5) = x^2 + (7+5)x + 7 \cdot 5 = x^2 + 12x + 35$

Analizamos geométricamente el desarrollo de $(x+7)(x+5)$, donde $x+7$ es el largo del rectángulo y $x+5$ es su ancho.



Observamos que el área del rectángulo de los lados $(x+7)$ y $(x+5)$ corresponde a la suma de áreas que se forman.

$$(x+7)(x+5) = x^2 + 7x + 5x + 35$$

$$(x+7)(x+5) = x^2 + (7+5)x + 35$$

$$\therefore (x+7)(x+5) = x^2 + 12x + 35$$

APLICACIÓN 2

Si se tiene que $x^2 + 3x = 1$, determine el valor reducido de $(x+1)(x+2) + (x+5)(x-2)$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $(x+1)(x+2) + (x+5)(x-2)$.

Dato: $x^2 + 3x = 1$

Desarrollamos

$$(x+1)(x+2) + (x+5)(x-2)$$

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 + 3x - 10$$

Reemplazamos

$$x^2 + 3x = 1$$

$$\therefore 1 + 2 + 1 - 10 = -6$$

APLICACIÓN 3

Si $x + \frac{1}{x} = 3$, calcule $(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)$.

$$\text{Dato: } x + \frac{1}{x} = 3$$

Operamos el dato.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x} &= 3 \rightarrow x^2 + 1 = 3x \\ \rightarrow x^2 - 3x &= -1 \end{aligned} \quad (*)$$

Luego

$$(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)$$

$$(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10)$$

Reemplazamos (*)

$$(-1-4)(-1-10)$$

$$\therefore (-5)(-11) = 55$$

5. DIFERENCIA DE CUÁDRADOS

Para hallar la propiedad, efectuamos los siguientes ejemplos:

- $(x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 3^2 = x^2 - 3^2$
- $(x-7)(x+7) = x^2 + 7x - 7x - 7^2 = x^2 - 7^2$
- $(x+m)(x-m) = x^2 - mx + mx - m^2 = x^2 - m^2$

En general

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

Por lo tanto, el producto de la suma por la diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.



¡Cuidado!

Evite cometer el siguiente error:

$$(n+m)(m-n) \neq n^2 - m^2$$

Ejemplo

$$\text{Si } n=5; m=3$$

$$(5+3)(3-5) \neq 5^2 - 3^2$$

$$8(-2) \neq 25 - 9$$

$$\therefore -16 \neq 16 \text{ ¡Falso!}$$


Reto al saber

Efectúe los siguientes casos:

- $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$
- $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$
- $(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2$


Importante
Radicales dobles

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$\rightarrow \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Ejemplos

$$\bullet \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \end{array}$$

$$\bullet \quad \sqrt{11+2\sqrt{30}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ 5 \end{array}$$

Ejemplos

- $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$
- $(x-9)(x+9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$
- $(8+b)(8-b) = 8^2 - b^2 = 64 - b^2$
- $(a-30)(a+30) = a^2 - 30^2 = a^2 - 900$
- $(x^2 - 3)(x^2 + 3) = (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$
- $(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3 - 2 = 1$
- $(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{4} - \sqrt{3}) = \sqrt{4}^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$
- $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

Analizamos geométricamente el desarrollo de $(x+4)(x-4)$, donde $x+4$ es un lado del rectángulo y $x-4$ es el otro lado.



El área del rectángulo de lados $x+4$ y $x-4$ corresponde a la suma de áreas que se forman.

Simplificamos

$$(x+4)(x-4) = x^2 - 4x + 4x - 16$$

$$\therefore (x+4)(x-4) = x^2 - 16$$

APLICACIÓN 4

Reduzca la expresión R .

$$R = (\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) + \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}$$

RESOLUCIÓN

Nos piden reducir R .

$$R = \underbrace{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})}_{\text{diferencia de cuadrados}} + \underbrace{\frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}_{\text{racionalización}} - \sqrt{3}$$

Luego

$$R = \sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2 + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} - \sqrt{3}$$

Simplificamos la expresión R .

$$R = 7 - 5 + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - \sqrt{3}$$

$$\therefore R = 2 + \cancel{\sqrt{3}} + 1 - \cancel{\sqrt{3}} = 3$$

APLICACIÓN 5

Simplifique la expresión T .

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

RESOLUCIÓN

Para simplificar la expresión, racionalizamos cada término.

$$T = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)}_{\text{dif. de cuadrados}} + \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \right)}_{\text{dif. de cuadrados}} - \underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \right)}_{\text{dif. de cuadrados}}$$

$$T = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} - \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2}$$

$$T = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} - \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$T = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$\therefore T = 0$$

No olvide



Diferencia de cuadrados

En general

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=1$$

Ejemplos

- $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$
- $(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})=1$
- $(\sqrt{5}+\sqrt{4})(\sqrt{5}-\sqrt{4})=1$
- $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})=$
⋮

Importante



Los productos notables se usan para racionalizar.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2}$$

$$\therefore \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

APLICACIÓN 6

Si $x=2014^2 - 2016 \cdot 2012$, halle el valor de $2x+1$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $2x+1$.

Dato: $x=2014^2 - 2016 \cdot 2012$

Escribimos convenientemente la expresión.

$$x = 2014^2 - \frac{(2014+2)(2014-2)}{\text{dif. de cuadrados}}$$

$$x = 2014^2 - (2014^2 - 2^2)$$

$$x = 2014^2 - 2014^2 + 2^2$$

$$x = 4$$

Nos piden

$$2x+1 = 2(4)+1$$

$$\therefore 2x+1 = 9$$

6. CUBO DE UN BINOMIO

Para hallar las propiedades, resolveremos los siguientes ejemplos:

- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- $(m+n)^3 = (m+n)(m+n)(m+n) = (m+n)^2(m+n)$

$$(m+n)^3 = (m^2 + 2mn + n^2)(m+n)$$

$$(m+n)^3 = m^3 + 2m^2n + mn^2 + m^2n + 2mn^2 + n^3$$

$$\therefore (m+n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$

En general

a. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplos

- $(x+2)^3$

Aplicamos la propiedad a.

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos.

$$\therefore (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

- $(x+5)^3$

Aplicamos la propiedad a.

$$(x+5)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos.

$$\therefore (x+5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

- $(x-1)^3$

Aplicamos la propiedad b.

$$(x-1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos.

$$\therefore (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

- $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 + 1^3$

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 3(4x^2) \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1 + 1$$

$$\therefore (2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

- $(5x-2)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2 \cdot 2 + 3(5x) \cdot 2^2 - 2^3$

$$(5x-2)^3 = 125x^3 - 3(25x^2) \cdot 2 + 3(5x) \cdot 4 - 8$$

$$\therefore (5x-2)^3 = 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$$

$$\bullet \quad (x^2+3)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \cdot 3 + 3x^2 \cdot 3^2 + 3^3$$

$$\therefore (x^2+3)^3 = x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$$

$$\bullet \quad (x-2y)^3 = x^3 - 3(x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot x(2y)^2 - (2y)^3$$

$$(x-2y)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x(4y^2) - 8y^3$$

$$\therefore (x-2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

6.1. Forma semidesarrollada

a. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

b. $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

APLICACIÓN 7

Se sabe que $a+b=5$ y $ab=3$.

Calcule a^3+b^3 .

RESOLUCIÓN

Nos piden a^3+b^3 .

Datos:

$$a+b=5$$

$$ab=3$$

De la propiedad, tenemos

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Reemplazamos los datos.

$$5^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 3(5)$$

$$\rightarrow a^3 + b^3 = 125 - 45$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 80$$

7. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

a. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

b. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos

• $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

• $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

• $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

• $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

APLICACIÓN 8

Si al desarrollar el producto $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ se obtiene $ax^3 + b$, halle el valor de $\sqrt{a+b}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $\sqrt{a+b}$.

Del dato, tenemos

$$\underbrace{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}_{\text{suma de cubos}} = ax^3 + b$$

Efectuamos la suma de cubos.

$$x^3 + 2^3 = ax^3 + b$$

$$1x^3 + 8 = ax^3 + b$$

Comparamos y obtenemos

$$a=1 \wedge b=8$$

$$\therefore \sqrt{a+b} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$$

APLICACIÓN 9

Si se cumple que $x+y=2$ y $x^3+y^3=5$, calcule el valor de xy .

RESOLUCIÓN

Nos piden xy .

Datos: $x+y=2$

$$x^3+y^3=5$$

De la propiedad, tenemos

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

Reemplazamos los datos.

$$2^3=5+3\cdot xy(2)$$

$$8=5+6xy \rightarrow 8-5=6xy$$

$$3=6xy \rightarrow \frac{3}{6}=xy$$

$$\therefore xy=\frac{1}{2}$$

**Biografía****Adrien-Marie Legendre**

(París, 1752-Auteuil, Francia, 1833). Fue un matemático francés que tras culminar sus estudios, entró a trabajar en la Escuela Militar, donde completó un análisis sobre la trayectoria de los proyectiles que le supuso el premio de la Academia de Berlín en 1782. En 1795 enseñó Matemáticas en la *École Normale*. En sus primeros trabajos, centrados en la mecánica, introdujo conceptos como la función que lleva su nombre o la primera demostración del método de los mínimos cuadrados. Tras los pasos de Euler y Lagrange, estudió las funciones elípticas y las redujo a tres formas básicas. Fue el primero en hacer una obra estrictamente relacionada con la teoría de números, ámbito en el que obtuvo resultados fundamentales como la demostración en 1830 de la ley de la reciprocidad cuadrática. En 1794 publicó *Los elementos de geometría*, una versión reordenada y simplificada de la obra original de Euclides, que fue traducida a más de treinta idiomas.

APLICACIÓN 10

Determine el valor de a^3-b^3 si se sabe que $a-b=2$ y $ab=5$.

RESOLUCIÓN

Nos piden a^3-b^3 .

Datos:

$$a-b=2$$

$$ab=5$$

De la propiedad, tenemos

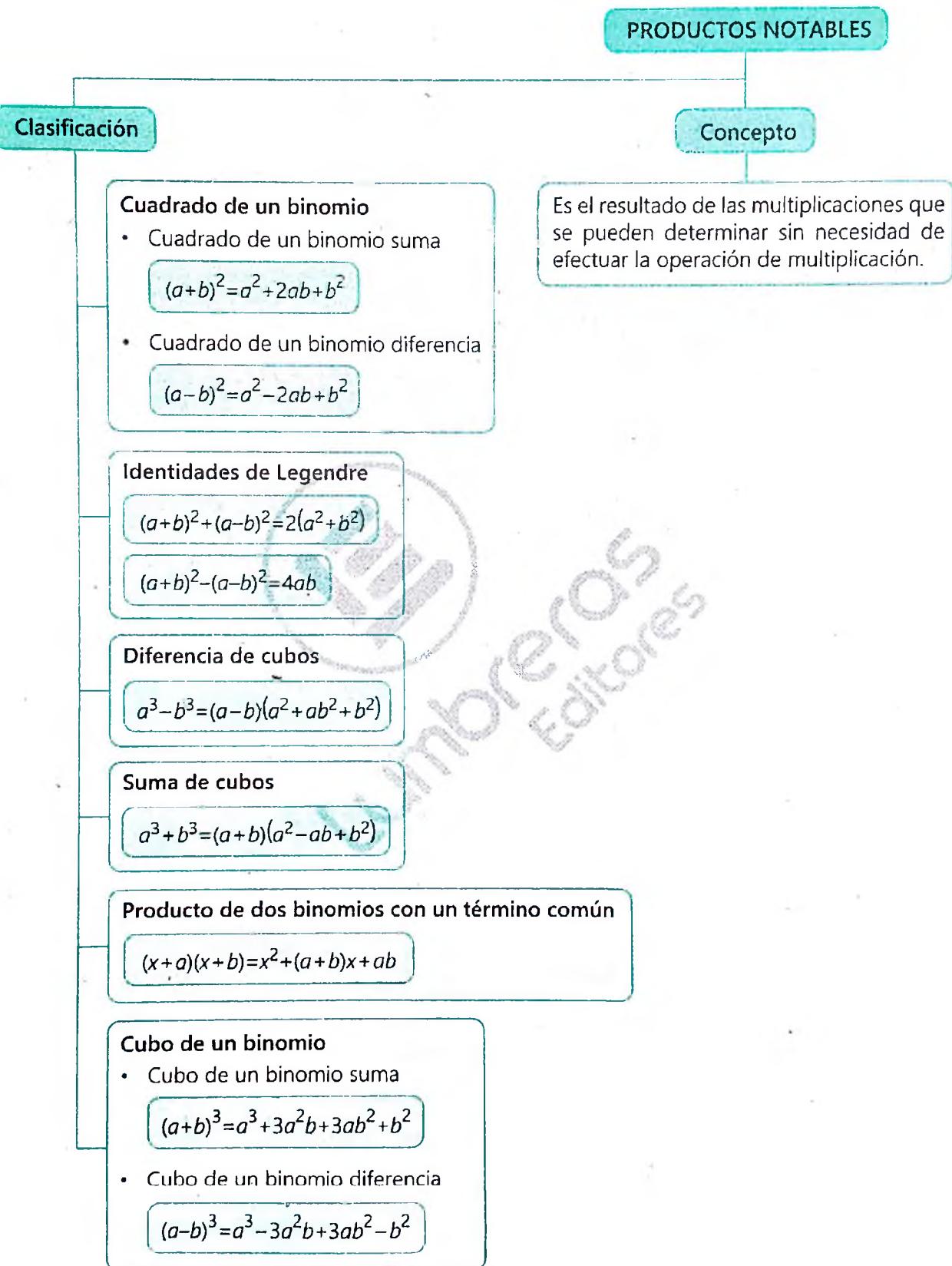
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Reemplazamos los datos.

$$2^3=a^3-b^3-3(5)(2)$$

$$8+30=a^3-b^3$$

$$\therefore a^3-b^3=38$$



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes proposiciones:

I. $(2a-3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$

II. $(x^2+3)^2-(x^2-3)^2=12x^2$

III. $(x^2+3y)^2=x^4+6x^2y+9y^2$

- A) FFF B) VVV C) VFV
D) FVF E) VFF

Resolución

I. Verdadera

$$(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$$

$$(2a-3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$$

II. Verdadera

$$(x^2+3)^2-(x^2-3)^2=4 \cdot x^2 \cdot 3$$

$$(x^2+3)^2-(x^2-3)^2=12x^2$$

III. Verdadera

$$(x^2+3y)^2=(x^2)^2+2 \cdot x^2 \cdot 3y+(3y)^2$$

$$(x^2+3y)^2=x^4+6x^2y+9y^2$$

Clave B

Problema N.º 2

Determine el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$

si se sabe que $x + \frac{1}{x} = 4$.

- A) 2 B) 6 C) 16
D) 12 E) 14

Resolución

Nos piden $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Dato: $x + \frac{1}{x} = 4$

IMPORTANTE

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

En el problema, tenemos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

Reemplazamos el dato.

$$4^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 16 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

Clave E

Problema N.º 3

Determine el valor de ab si se sabe que $a+b=6$ y $a^2+b^2=30$.

- A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) 12

Resolución

Nos piden ab .

Datos: $a+b=6$

$$a^2+b^2=30$$

NO OLVIDE

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Reemplazamos los datos.

$$6^2 = 30 + 2ab$$

$$36 - 30 = 2ab$$

$$6 = 2ab$$

$$\therefore ab = 3$$

Clave 5

Problema N.º 4

Sean x e y dos números, de modo que $x+y=\sqrt{7}$

y $xy=2$. Halle el valor de $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.

A) 1

B) $\frac{3}{2}$

C) 3

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{2}{3}$

Resolución

Nos piden $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.

Datos: $x+y=\sqrt{7}$

$xy=2$

Otra forma

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} = \frac{y^2+x^2}{xy} \quad (*)$$

IMPORTANTE

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Reemplazamos los datos.

$$\sqrt{7}^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot (2) = 7 - 4 = x^2 + y^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 3$$

Luego en (*)

$$\therefore \frac{y^2+x^2}{xy} = \frac{3}{2}$$

Clave B

Problema N.º 5

Sea x un número, de modo que $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$.

Halle el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

A) 1

B) 3

C) 5

D) 7

E) $2\sqrt{3}$

Resolución

Nos piden $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Dato: $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$

Del dato, tenemos

$$x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{x} - \frac{\sqrt{3}x}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$x - \sqrt{3} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

Elevamos al cuadrado.

$$\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \sqrt{3}^2$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 3 \rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$$

Clave C

Problema N.º 6

Si $2x^2 - 3 = 5x$, indique el valor de $4x^2 + \frac{9}{x^2}$.

- A) 25 B) 13 C) 12
D) 37 E) 33

Resolución

Nos piden $4x^2 + \frac{9}{x^2}$.

Del dato, tenemos

$$2x^2 - 3 = 5x$$

$$\frac{2x^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{5x}{x}$$

Simplificamos y obtenemos

$$2x - \frac{3}{x} = 5$$

Elevamos al cuadrado.

$$\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = 5^2$$

Tenemos

$$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 25$$

$$4x^2 - 12 + \frac{9}{x^2} = 25$$

Luego

$$4x^2 + \frac{9}{x^2} = 25 + 12$$

$$\therefore 4x^2 + \frac{9}{x^2} = 37$$

Clave D

Problema N.º 7

Si $a^2 + b^2 = 13$ y $ab = 2$, halle el mayor valor de $a - b$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Nos piden $a - b$.

Datos: $a^2 + b^2 = 13$

$$ab = 2$$

Relacionamos los datos y lo que nos piden.

No olvide

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Ordenamos convenientemente la expresión.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Reemplazamos los datos.

$$(a - b)^2 = 13 - 2(2)$$

$$(a - b)^2 = 9$$

$$a - b = 3 \vee a - b = -3$$

Por lo tanto, el mayor valor de $a - b$ es igual a 3.

$$\therefore a - b = 3$$

Clave B

Problema N.º 8

Si se cumple que $m - n = 6$ y $m^2 + n^2 = 80$, calcule el valor de $\left(\frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$.

- A) 8 B) 9 C) 5
D) 4 E) 11

Resolución

Nos piden $\frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}}$.

Datos: $m^2 + n^2 = 80$
 $m - n = 6$

Relacionamos los datos y lo que nos piden

IMPORTANTE

$$(m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

Ordenamos convenientemente la expresión.

$$(m-n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn$$

Reemplazamos los datos.

$$6^2 = 80 - 2mn$$

$$36 = 80 - 2mn$$

$$2mn = 80 - 36 \rightarrow 2mn = 44 \rightarrow mn = 22$$

Nos piden

$$\frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{mn}{2}$$

$$\therefore \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{22}{2} = 11$$

Clave E

Problema N.º 9

Si se cumple que

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$, calcule el valor de M .

$$M = \sqrt[3]{\frac{(a+b)^4}{a^4 + b^4}}$$

- A) -4 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$
 D) 1 E) 2

Resolución

Nos piden M .

$$M = \sqrt[3]{\frac{(a+b)^4}{a^4 + b^4}} \quad (*)$$

Dato:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$$

Del dato, tenemos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{4}{a+b}$$

Luego

$$(a+b)^2 = 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

Completamos cuadrados.

$$(a-b)^2 = 0 \rightarrow a-b=0 \rightarrow a=b$$

Reemplazamos en (*).

$$M = \sqrt[3]{\frac{(a+b)^4}{a^4 + b^4}} = \sqrt[3]{\frac{(a+a)^4}{a^4 + a^4}} = \sqrt[3]{\frac{(2a)^4}{2a^4}}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{\frac{2^4 \cdot a^4}{2a^4}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\therefore M=2$$

Clave E

Problema N.º 10

Si se sabe que $(x-1)^2=x$.

Calcule el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- A) 9 B) 7 C) 6
D) 4 E) 2

Resolución

Nos piden $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Dato: } (x-1)^2 = x$$

Del dato, tenemos

$$(x-1)^2 = x$$

$$x^2 - 2x + 1 = x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{0}{x}$$

Simplificamos y obtenemos

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

Elevamos al cuadrado.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2$$

Desarrollamos el binomio cuadrado.

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Clave B

Problema N.º 11

Determine el área del rectángulo. Considere que $x > 0$.



A) $x^2 + 25x + 10$

B) $x^2 + 10x + 25$

C) $x^2 + 11x + 30$

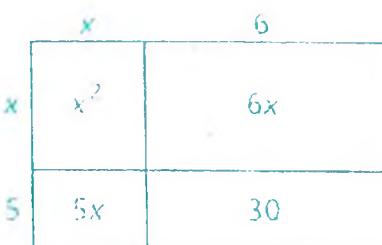
D) $x^2 + 10x + 30$

E) $x^2 + 30$

Resolución

Nos piden el área del rectángulo.

Del dato, tenemos



Del gráfico, tenemos

$\square A = x^2 + 6x + 5x + 30$

$\square A = x^2 + 11x + 30$

$\therefore \square A = x^2 + 11x + 30$

Clave C

Problema N.º 12

Simplifique la expresión L .

$$L = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} - 1 - x^2.$$

Considere que x es positivo.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| A) $3x$ | B) x | C) $2x$ |
| D) $4x$ | E) $5x$ | |

Resolución

Nos piden L .

$$L = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} - 1 - x^2$$

$$L = \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1} - 1 - x^2$$

Reemplazamos $x^2+3x=a$.

Entonces

$$L = \sqrt{a(a+2)+1} - 1 - x^2$$

$$L = \sqrt{a^2+2a+1} - 1 - x^2$$

Luego

$$\sqrt{(a+1)^2} - 1 - x^2 \rightarrow a+1 - 1 - x^2$$

Recordemos que $a=x^2+3x$.

Simplificamos y obtenemos

$$L = x^2 + 3x + 1 - 1 - x^2$$

$$\therefore L = 3x$$

**Problema N.º 13**

Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes proposiciones y elija la secuencia correcta.

- I. $(x+7)(x+3)=x^2+10x+21$
- II. $(x+5)(x+a)=x^2+(a+5)x+5a$

$$\text{III. } (x^2+4)(x^2+2)=x^4+6x^2+8$$

$$\text{IV. } (2n+5)(2n+7)=4n^2+24n+35$$

- | | | |
|---------|---------|---------|
| A) VVVV | B) FFFF | C) VVFF |
| D) VVVF | | E) WVVF |

Resolución

- I. Verdadera

$$(x+7)(x+3)=x^2+(7+3)x+7\cdot 3$$

$$(x+7)(x+3)=x^2+10x+21$$

- II. Verdadera

$$(x+5)(x+a)=x^2+(a+5)x+5a$$

- III. Verdadera

$$(x^2+4)(x^2+2)=(x^2)^2+(4+2)x^2+4\cdot 2$$

$$(x^2+4)(x^2+2)=x^4+6x^2+8$$

- IV. Verdadera

$$(2n+5)(2n+7)=(2n)^2+(5+7)2n+5\cdot 7$$

$$(2n+5)(2n+7)=4n^2+12\cdot 2n+35$$

$$(2n+5)(2n+7)=4n^2+24n+35$$

**Problema N.º 14**

Si $x^2+5x=7$, halle el valor de S .

$$S=x(x+5)+(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) 18 | B) 20 | C) 137 |
| D) 143 | E) 150 | |

Resolución

Nos piden a^2 .

Datos: $a+b=7 \wedge a^2-b^2=21$

Del dato $a^2-b^2=21$, tenemos

$$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{(a+b)(a-b)=21}=21$$

Luego

$$7(a-b)=21 \rightarrow a-b=3$$

Observamos que

$$a+b=7 \text{ y } a-b=3$$

$$a=5 \wedge b=2$$

$$\therefore a^2=25$$

Problema N.º 17

Reduzca la expresión

$$P = \frac{(mn+3)^2 - (mn-3)^2}{12m} + \frac{(mn+3)^2 - (mn-3)^2}{12n}$$

donde $m \neq 0; n \neq 0$.

- A) $m+n$ B) $m-n$ C) mn
 D) m E) n

Resolución**IMPORTANTES**

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

En el problema, tenemos

$$\frac{(mn+3)^2 - (mn-3)^2}{12m} + \frac{(mn+3)^2 - (mn-3)^2}{12n}$$

$$P = \frac{4 \cdot mn \cdot 3}{12m} + \frac{4 \cdot mn \cdot 3}{12n}$$

Simplificamos

$$P = \frac{\cancel{12mn}}{\cancel{12m}} + \frac{\cancel{12mn}}{\cancel{12n}}$$

$$\therefore P = m+n$$

**Problema N.º 18**

Simplifique la siguiente expresión:

$$(m+n)(m-n)(m^2+n^2)+n^4.$$

- A) mn B) m^4 C) $-m^8$
 D) n^8 E) m^8

Resolución

No olvide

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

En el problema, tenemos

$$(m+n)(m-n)(m^2+n^2)+n^4$$

$$(m^2-n^2)(m^2+n^2)+n^4$$

$$(m^2)^2 - (n^2)^2 + n^4$$

$$m^4 - n^4 + n^4 = m^4$$

$$\therefore (m+n)(m-n)(m^2+n^2)+n^4 = m^4$$



Problema N.º 19

Calcule el valor de la expresión J .

$$J = \sqrt{\frac{334 \cdot 332 + 1}{112 \cdot 110 + 1}}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

Resolución**IMPORTANTE**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

En el problema, tenemos

$$J = \sqrt{\frac{(333+1)(333-1)+1}{(111+1)(111-1)+1}}$$

$$J = \sqrt{\frac{333^2 - 1^2 + 1}{111^2 - 1^2 + 1}} = \sqrt{\frac{333^2 - 1 + 1}{111^2 - 1 + 1}}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{333^2}{111^2}} = \sqrt{\left(\frac{333}{111}\right)^2} = \frac{333}{111}$$

$$\therefore J = 3$$

Clave

Problema N.º 20

Con respecto a las siguientes proposiciones, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

- I. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$
 II. $(x+2)^3 = x^3 + 2^3 + 6x(x+2)$
 III. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

- A) VVV B) VFV C) FVV
 D) FFV E) FFF

Resolución

- I. Verdadera

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1^2)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

- II. Verdadera

$$(x+2)^3 = x^3 + 2^3 + 3 \cdot x \cdot 2(x+2)$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 2^3 + 6x(x+2)$$

- III. Verdadera

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Clave

Problema N.º 21

Se tiene que $a+b=5$ y $a \cdot b=2$. Determine el valor de $a^3 + b^3$.

- A) 85 B) 95 C) 105
 D) 115 E) 155

Resolución

Nos piden $a^3 + b^3$.

Datos: $a+b=5$

$$a \cdot b=2$$

IMPORTANTE

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Reemplazamos los datos.

$$5^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 2(5)$$

$$\therefore 125 = a^3 + b^3 + 30$$

$$125 - 30 = a^3 + b^3$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 95$$

Clave

Problema N.º 22

Dados los números

$$x = 2 - \sqrt{3} \quad \wedge \quad y = 2 + \sqrt{3}$$

calcule el valor de $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$.

- A) $12\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{2}$
 D) 52 C) 53
 E) 42

Resolución

Nos piden $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$.

$$\text{Datos: } x = 2 - \sqrt{3}$$

$$y = 2 + \sqrt{3}$$

Observamos que $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ equivale a $\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}$.

De los datos, tenemos

$$\bullet \quad x + y = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4$$

$$\bullet \quad xy = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$xy = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3$$

$$xy = 1$$

No olvide

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

Reemplazamos

$$x + y = 4 \quad \wedge \quad xy = 1$$

$$4^3 = x^3 + y^3 + 3 \cdot 1 \cdot 4$$

$$64 = x^3 + y^3 + 12$$

$$64 - 12 = x^3 + y^3$$

$$x^3 + y^3 = 52$$

$$\therefore \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = \frac{52}{(xy)^2} = \frac{52}{1^2} = 52$$

Clave

Problema N.º 23

Simplifique la expresión K .

$$K = (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)(a^2 + a + 1) - a^3$$

- A) $a+1$ B) $a-1$ C) 1
 D) -1 E) $3a^6$

Resolución

Efectuamos la diferencia de cuadrados.

$$K = \underbrace{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)}_{\text{dif. de cuadrados}} (a^2 + a + 1) - a^3$$

Luego

$$K = (\sqrt{a}^2 - 1^2)(a^2 + a + 1) - a^3$$

$$K = \underbrace{(a - 1)(a^2 + a + 1)}_{\text{dif. de cubos}} - a^3$$

$$K = a^3 - 1^3 - a^3$$

$$\therefore K = -1$$

Clave

Problema N.º 24

Calcule el valor de a^3+b^3 si se sabe que $a+b=6$ y $a^2+b^2=30$.

- A) 216 B) 180 C) 164
 D) 160 E) 162

Resolución

Nos piden a^3+b^3 .

$$\text{Datos: } a+b=6$$

$$a^2+b^2=30$$

Hallamos el valor de ab .

No OLVIDE

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Reemplazamos los datos.

$$6^2=30+2ab$$

$$36=30+2ab$$

$$36-30=2ab$$

$$6=2ab$$

$$ab=3$$

Luego, hallamos a^3+b^3 .

IMPORTANTE

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

Reemplazamos los datos.

$$6^3=a^3+b^3+3 \cdot 3(6)$$

$$216=a^3+b^3+54$$

$$216-54=a^3+b^3$$

$$\therefore a^3+b^3=162$$

Clave**E****Problema N.º 25**

Si la diferencia de dos números es igual a 4 y la suma de sus cuadrados es igual a 24, halle la diferencia de sus cubos.

- A) 92 B) 94 C) 100
 D) 96 E) 112

Resolución

Nos piden determinar la diferencia de sus cubos. Sean a y b los números.

Luego, traducimos toda la información del problema al lenguaje del álgebra.

EN PALABRAS	EN LENGUAJE ALGEBRAICO
La diferencia de dos números es igual a 4.	$a-b=4$
La suma de cuadrados es igual a 24.	$a^2+b^2=24$
Halle la diferencia de sus cubos.	$a^3-b^3=?$

Hallamos el valor de ab .

No OLVIDE

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Reemplazamos los datos.

$$4^2=24-2ab$$

$$16=24-2ab$$

$$2ab=24-16$$

$$2ab=8$$

$$ab=4$$

Hallamos el valor de $a^3 - b^3$.

IMPORTANTE

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Reemplazamos los datos.

$$4^3 = a^3 - b^3 - 3 \cdot 4(4)$$

$$64 = a^3 - b^3 - 48$$

$$64 + 48 = a^3 - b^3$$

$$\therefore a^3 - b^3 = 112$$

Problema N.º 26

Si $a = \sqrt[3]{5} - 1$,

determine el valor de $a^3 + 3a^2 + 3a$.

A) 1

B) 5

C) 2

D) 4

E) 6

Resolución

Nos piden $a^3 + 3a^2 + 3a$.

Dato: $a = \sqrt[3]{5} - 1$

No olvide

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En el problema, tenemos

$$a = \sqrt[3]{5} - 1$$

$$a+1 = \sqrt[3]{5}$$

Elevamos al cubo.

$$(a+1)^3 = \sqrt[3]{5}$$

$$a^3 + 3a^2 \cdot 1 + 3a \cdot 1^2 + 1^3 = 5$$

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 5$$

$$\therefore a^3 + 3a^2 + 3a = 4$$

Clave



Problema N.º 27

Si se cumple que $x^2 + x + 1 = 0$, indique el valor de $x^9 + x^3$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución

Nos piden $x^9 + x^3$.

Dato: $x^2 + x + 1 = 0$

IMPORTANTE

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Como $x^2 + x + 1 = 0$, entonces

$$\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{dif de cubos}} = 0 \quad (x-1)$$

$$x^3 - 1^3 = 0$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

Luego

$$x^9 + x^3 = (x^3)^3 + x^3$$

$$1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore x^9 + x^3 = 2$$

Clave



Problema N.º 28

Calcule el valor de la expresión S .

$$S = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

- | | | |
|------|-------|-------|
| A) 2 | B) 4 | C) 15 |
| D) 8 | E) 12 | |

Resolución

NO OLVIDE

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Dato:

$$S = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

Luego

$$S = \frac{\overbrace{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}^{\text{identidad de Legendre}}}{\overbrace{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}^{\text{diferencia de cubos}}}$$

Simplificamos

$$S = \frac{2(\sqrt{5}^2 + \sqrt{3}^2)}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2}$$

Finalmente

$$S = \frac{2(5+3)}{5-3} = \frac{2(8)}{2}$$

$$\therefore S=8$$

Clave D

Problema N.º 29

Determine el valor de ab , si se sabe que $a+b=6$ y $a^2+b^2=30$

- | | | |
|------|------|------------------|
| A) 6 | B) 3 | C) $\frac{3}{2}$ |
| D) 9 | E) 2 | |

Resolución

Nos piden hallar ab .

Datos:

$$a^2 + b^2 = 30$$

$$a+b = 6$$

Elevamos al cuadrado.

$$(a+b)^2 = 6^2$$

Luego

$$a^2 + b^2 + 2ab = 36$$

$$30 + 2ab = 36$$

$$2ab = 6$$

$$\therefore ab = 3$$

Clave 5

Problema N.º 30

Sean x e y dos números de modo que

$$x+y = \sqrt{5} \quad y \quad xy=2.$$

Halle el valor de $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| A) $\frac{1}{2}$ | B) 1 | C) $\frac{1}{3}$ |
| D) 3 | E) $\frac{2}{3}$ | |

Resolución

Nos piden hallar

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad (*)$$

Datos: $x + y = \sqrt{5}$

$$xy = 2$$

Del dato, tenemos

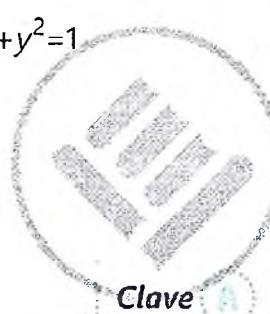
$$(x + y)^2 = \sqrt{5}^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 5$$

$$x^2 + y^2 + 2(2) = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Luego en (*).

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1}{2}$$

**Problema N.º 31**

Dados los números $x = 3 + \sqrt{8}$ y $y = 3 - \sqrt{8}$,

calcule el valor de $\frac{x(y+1)}{y(x+1)} + \frac{y(x+1)}{x(y+1)}$.

- A) 1 B) 8 C) 6
D) 5 E) 3

Resolución

Del dato, tenemos

$$x = 3 + \sqrt{8}$$

$$y = 3 - \sqrt{8}$$

$$xy = 3^2 - \sqrt{8}^2$$

$$xy = 1$$

Nos piden

$$\frac{x(y+1)}{y(x+1)} + \frac{y(x+1)}{x(y+1)}$$

$$\therefore \frac{xy + x + yx + y}{yx + y + xy + x} = \frac{1+x+1+y}{1+x+1+y} = 1$$

**Problema N.º 32**

Si $x = \sqrt{2} + 1$, calcule el valor de M .

$$M = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

- A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 6 E) $2\sqrt{2}$

Resolución

Dato: $x = \sqrt{2} + 1$

Tenemos

$$(x-1)^2 = \sqrt{2}^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2$$

$$x^2 - 1 = 2x$$

Elevamos al cuadrado.

$$(x^2 - 1)^2 = (2x)^2$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 4x^2$$

$$x^2 + 1 = 6x^2$$

$$\therefore M = \frac{x^4 + 1}{x^2} = 6$$



Problema N.º 33

Dados los números

$$a = \sqrt{2} + 1 \wedge b = \sqrt{2} - 1$$

halle el valor de $a^3 + b^3$

- A) $16\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
 D) $8\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

Resolución

Nos piden $a^3 + b^3$.

Datos:

$$a = \sqrt{2} + 1$$

$$b = \sqrt{2} - 1$$

Calculamos $a+b$ y $a \cdot b$.

$$a+b = 2\sqrt{2} \wedge ab = 1$$

$$(a+b)^3 = (2\sqrt{2})^3$$

Aplicamos el binomio al cubo.

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 16\sqrt{2}$$

$$a^3 + b^3 + 3 \times 1 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$a^3 + b^3 + 6\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 10\sqrt{2}$$

Clave E

Problema N.º 34

Si del producto $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ se obtiene $ax^3 + b$, halle el valor de $\sqrt{a+b}$.

- A) 3 B) 4 C) 2
 D) 0 E) 9

Resolución

Nos piden $\sqrt{a+b}$.

Dato:

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = ax^3 + b$$

Luego

$$x^3 + 2^3 = ax^3 + b$$

$$1x^3 + 8 = ax^3 + b$$

$$\rightarrow a=1 \wedge b=8$$

$$\therefore \sqrt{a+b} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$$

Clave A

Problema N.º 35

La suma de dos números es igual a 5 y la suma de sus cubos es igual a 95. Halle la suma de sus cuadrados.

- A) 21 B) 20 C) 23
 D) 25 E) 24

Resolución

Sean los números a y b .

Datos:

$$a+b=5$$

$$a^3 + b^3 = 95$$

Nos piden $a^2 + b^2$.

IMPORTANTE

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Reemplazamos los datos

$$5^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot 5$$

$$125 = 95 + 15ab$$

$$30 = 15ab \rightarrow ab = 2$$

Sumamos los cuadrados.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$5^2 = a^2 + b^2 + 2(2)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 21$$

Problema N.º 36

Luego de multiplicar $(2x-1)(2x-2)$, se obtiene $ax^2 - bx + c$. Calcule el producto de abc .

- A) 16 B) -96
D) -8

- B) -96 C) -48
E) -16

Resolución

Nos piden abc .

Por dato:

$$(2x-1)(2x-2) = ax^2 - bx + c$$

$$4x^2 - 4x - 2x + 2 = ax^2 - bx + c$$

$$4x^2 - 6x + 2 = ax^2 - bx + c$$

Entonces

$$a=4; b=-6; c=2$$

$$\therefore abc = -48$$

Clave A

Problema N.º 37

Si se sabe que $x + \frac{1}{x} = 3$, calcule el valor de S .

$$S = \left(x^x + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right) \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} \right)^x \right)$$

- A) 18 B) 15
D) 21 E) 24

Resolución

$$\text{Dato: } x + \frac{1}{x} = 3$$

Nos piden

$$S = \left(x^x + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right) \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} \right)^x \right)$$

$$S = x^{x+\frac{1}{x}} + x^x \cdot \frac{1}{x^x} + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}+x}$$

$$S = x^3 + 1 + 1 + \left(\frac{1}{x} \right)^3$$

$$S = x^3 + 2 + \frac{1}{x^3}$$

Elevamos el dato al cubo.

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^3 = 3^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27 \rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\therefore S = 18 + 2 = 20$$

Clave C

Clave C

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes proposiciones:

- I. $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 10$
 - II. $(2x+3)^2 = 2x^2 + 6x + 9$
 - III. $(x^2 + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$
- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) VVV | B) VFV | C) FVV |
| D) FFV | E) FFF | |

2. Se tiene que $a+b=7$ y $ab=2$.

Determine $a^2 + b^2$.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 10 | B) 20 | C) 31 |
| D) 42 | E) 45 | |

3. Determine el valor de ab si se sabe que $a+b=9$ y $a^2+b^2=25$

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) -5 | B) 14 | C) 21 |
| D) 28 | E) 56 | |

4. Sea x un número, de modo que $x^2 - 5x + 1 = 0$.

Halle el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 23 | B) 25 | C) 27 |
| D) 32 | E) 45 | |

5. Si se cumple que $m-n=6$ y $m^2+n^2=70$, calcule el valor de $m^2 \cdot n^2$.

- | | | |
|--------|--------|-------|
| A) 17 | B) 19 | C) 25 |
| D) 286 | E) 289 | |

6. Si se sabe que $(x-2)^2 = 2x$, calcule el valor de $x^2 + \frac{16}{x^2}$.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 21 | B) 28 | C) 32 |
| D) 34 | E) 36 | |

7. Determine el área del siguiente rectángulo.

Considere que $x > 0$.



- | |
|--------------------|
| A) $x^2 + 14$ |
| B) $x^2 + 14x + 9$ |
| C) $x^2 + 9x + 14$ |
| D) $x^2 + 5x + 7$ |
| E) $x^2 + 49$ |

8. Reduzca la expresión E .

$$E = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) + \frac{2}{\sqrt{10} - 3} - 2\sqrt{10}$$

- | | | |
|------|-------|-------|
| A) 7 | B) -7 | C) -5 |
| D) 5 | E) 6 | |

9. Si $x + \frac{1}{x} = 5$, calcule $x(x+2)(x-5)(x-7)$.

- | | | |
|--------|--------|-------|
| A) 15 | B) -15 | C) 13 |
| D) -13 | E) 12 | |

10. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes proposiciones:

I. $(\sqrt{3} + \sqrt{9})^2 - (\sqrt{9} - \sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$

II. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$

III. $(x^2 - 5)(x^2 + 5) = x^4 - 25$

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FFV

E) FFF

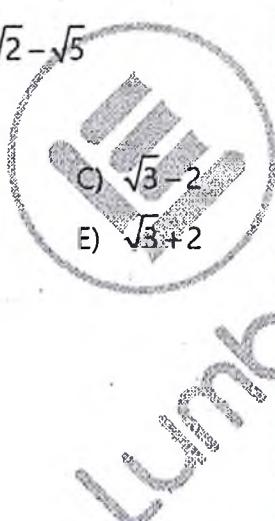
11. Simplifique la expresión H.

$$H = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

A) 2

B) $\sqrt{3}$

D) $2 - \sqrt{3}$



C) $\sqrt{3} - 2$
E) $\sqrt{3} + 2$

12. Si se cumple que

$$x+y=3 \wedge x^3+y^3=7,$$

calcule el valor de xy.

A) 1

B) $\frac{20}{3}$

C) 2

D) $\frac{20}{9}$

E) $\frac{21}{8}$

13. Si tenemos que

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab,$$

calcule $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$.

A) 1

B) 2

C) 4

D) 9

E) 16

14. Se sabe que

$$x + \frac{1}{x} = 2.$$

Calcule $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

A) 2^8

B) 2^4

C) 2^2

D) 2

E) 2^0

15. Se tiene que

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x + y = 44 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

calcule el valor de xy.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

16. Calcule el valor de la expresión J.

$$J = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

A) 10

B) 12

C) 14

D) 2

E) 24

17. Si la diferencia de cuadrados de las edades de Ana y Lupita es igual a 17 y el cuadrado de la suma de sus edades equivale a 289, ¿por cuántos años Anita es mayor que Lupita?

A) 1

B) 4

C) 5

D) 6

E) 3

18. Simplifique la expresión B .

$$B = (x+4)(x+2) + (x+3)(x+5) - 2x(x+7) + 7$$

- A) 20 B) 24 C) 30
D) 18 E) 12

19. Calcule el valor de la expresión

$$(x+1)(x-2)(x+5)(x+2)+5$$

si se sabe que $x^2+3x-1=0$.

- A) -27 B) 27 C) -22
D) 22 E) -32

20. Determine el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$

si se sabe que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$.

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $-2\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

21. La suma de dos números es igual a 5 y la suma de sus cubos es igual a 95. Halle la suma de sus cuadrados.

- A) 21 B) 20 C) 23
D) 25 E) 24

22. Determine el valor de $a^3 - b^3$

si se sabe que $a - b = 2$ y $ab = 5$.

- A) 14 B) 23 C) 38
D) 36 E) 32

23. Dados los números

$$a = \sqrt{2} + 1 \text{ y } b = \sqrt{2} - 1$$

halle el valor de $a^3 + b^3$.

- A) $16\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

24. Si $x - x^{-1} = 1$,

halle el valor de $x^3 - x^{-3}$.

- A) 4 B) 3 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

25. Si $x = \sqrt{2} + 1$,

halle el valor de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 16

26. Si $a + b = \sqrt{10}$ y $ab = 2$,

indique el valor de $a^4 + b^4$.

- A) 28 B) 26 C) 20
D) 100 E) 32

27. Si se cumple que

$$a + b = 3 \text{ y } a^3 + b^3 = 9$$

¿cuál es el valor de $ab^{-1} + ba^{-1}$?

- A) $\frac{5}{2}$ B) 5 C) $\sqrt{5}$
D) 5^{-3} E) $5\sqrt{5}$

28. A partir del siguiente sistema

$$\begin{cases} x^3 = -1; x \neq -1 \\ y^3 = 8; y \neq 2 \end{cases}$$

determine el valor de

$$(x^2 - x + 3)(3y^2 + 6y + 1).$$

- A) -22 B) 2 C) -11
D) 125 E) 11

29. Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{x^3 + 8}{x+2} + \frac{x^3 - 8}{x-2}$$

- A) $2x^2 + 8$
B) $2x^2 - 1$
C) $2x^2 + 1$
D) $2x^2$
E) $2x^2 - 8$

30. Si $x = \sqrt[3]{4} - 1$,

calcule el valor de $\frac{x^3}{x^2 + x - 1}$.

- A) 1 B) -2 C) -3
D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

31. Si $x + \frac{2}{x} = \sqrt{2}$,

calcule el valor de $x^3 + 2\sqrt{2}$.

- A) $-\sqrt{2}$ B) -1 C) $4\sqrt{2}$
D) 0 E) $3\sqrt{2}$

32. Simplifique la expresión S.

$$S = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b) + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}$$

Considere que a y b son positivos.

- A) 1 B) 2 C) \sqrt{b}
D) \sqrt{a} E) 3

33. Si se cumple que

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 0$$

indique un valor de $5x + 2y$.

- A) 0 B) 3 C) -3
D) -6 E) 1

34. Reduzca la siguiente expresión:

$$\{(1 + \sqrt{2})^3 - 5\sqrt{2}\} + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1).$$

- A) 9 B) 5 C) 7
D) 2 E) 8

35. Al racionalizar el denominador de la

expresión $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{5} + \sqrt{7}}$

halle el resultado.

- A) $\frac{13 - 4\sqrt{35}}{13}$ B) $\frac{13 + 4\sqrt{35}}{13}$
C) $\frac{27 + 4\sqrt{35}}{13}$
D) $\frac{27 - 4\sqrt{35}}{13}$ E) $\frac{4 + 27\sqrt{35}}{13}$

36. Si $ab=3$ y $a^2+b^2=19$, calcule el valor de a^3+b^3 .

- A) 75 B) 60 C) 80 D) 120 E) 90

UNMSM 2011

37. Si $x-x^{-1}=1$ ($x \neq 0$), halle los valores de x^2+x^{-2} y x^3-x^{-3} .

- A) 3 y 4 B) 2 y 3 C) 2 y $\frac{1}{2}$
 D) 3 y $\frac{1}{3}$ E) 4 y $\frac{1}{4}$

UNMSM 2010

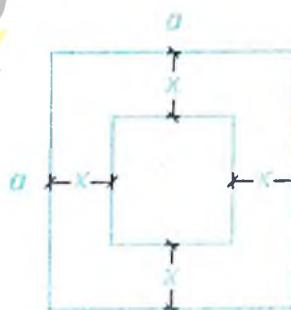
38. Si la diferencia de dos números es igual a 4 y la suma de sus cuadrados es igual a 24, halle la diferencia de sus cubos.

- A) 92 B) 90 C) 100
 D) 96 E) 112

UNMSM 1997

39. Cada semana se corta el pasto de las orillas de un terreno cuadrado de un estacionamiento. El resto del terreno permanece intacto para que sirva como hábitat de los pájaros (ver el gráfico). El terreno mide a metros por a metros y la franja podada es de x metros de ancho.

Explique por qué el área podada es igual a $a^2-(a-2x)^2$.



40. Simplifique la expresión $(x+1)(x-2)(x+5)(x+2)+6^2$ si se sabe que $x^2+3x-5=0$.

- A) -1 B) -35 C) -6
 D) 30 E) 1

41. Halle el valor de x^2+y^2 si se sabe que $x+y=5$, además $xy=2$.

- A) 21 B) 23 C) 29
 D) 22 E) 20

42. Sea x un número, de modo que

$$x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Halle el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- A) 1 B) 3 C) 5
 D) 7 E) $2\sqrt{3}$

43. Calcule el valor de la expresión J .

$$J = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

- A) 10 B) 12 C) 14
 D) 2 E) 24

44. Sean a y b dos números de modo que $a+b=\sqrt{8}$ y $a-b=\sqrt{2}$. Halle el valor de $(a^4-2a^2b^2+b^4)$.

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

45. Determine el valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$ si se sabe que $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$.

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $-2\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

46. Calcule el valor de a^3+b^3 si se sabe que $a+b=6$ y $a^2+b^2=30$

- A) 216 B) 180 C) 164
D) 160 E) 162

47. La diferencia de dos números es igual a 4 y la suma de sus cuadrados es igual a 24. Halle la diferencia de sus cubos.

- A) 90 B) 92 C) 100
D) 96 E) 112

Claves

1	E	7	C	13	C	19	C	25	B	31	C	37	A	43	B
2	E	8	A	14	D	20	B	26	A	32	A	38	E	44	D
3	D	9	A	15	B	21	A	27	A	33	B	39	*	45	B
4	A	10	A	16	B	22	C	28	A	34	E	40	E	46	E
5	E	11	E	17	A	23	E	29	A	35	D	41	A	47	E
6	B	12	D	18	C	24	A	30	C	36	C	42	C		

* Problema sin alternativas

CAPÍTULO 4



POLINOMIOS



Encontrar las raíces de una ecuación polinómica es uno de los problemas más antiguos en matemáticas. Sin embargo, los conceptos formales y la notación que actualmente utilizamos para resolver este tipo de problemas solo fueron desarrollados a partir del siglo xv d.n.e. Antes de esto, las ecuaciones eran escritas en palabras y no con los símbolos actuales. El matemático francés François Viète (1540 - 1603) es considerado uno de los precursores del álgebra moderna. En su obra principal, *Isagoge Arithmeticae Analyticem* (*Introducción al arte analítico*), se presenta por primera vez una concepción consistente y sistemática de la noción moderna de ecuación algebraica. Viète introduce el uso de símbolos para representar los términos que constituyen una ecuación: vocales para las incógnitas y consonantes para los valores conocidos (coeficientes). Los polinomios forman una clase muy importante de funciones, que están definidas en términos de sumas, restas y multiplicaciones de monomios. Aparecen en diversas áreas de las matemáticas y las ciencias naturales. Por ejemplo, en ingeniería civil se aplica para resolver problemas en la construcción de puentes. La curva que se describe debajo de algunas de estas construcciones es la gráfica de una función cuadrática (función polinomial) cuya concavidad es hacia abajo.

PARIS
para
AMOR A SOFIA

Aprendizajes esperados

- Identificar los diferentes tipos de polinomios.
- Calcular el valor numérico de polinomios.
- Resolver problemas de cambio de variable.
- Aplicar las propiedades de polinomios en la resolución de problemas.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Los polinomios se relacionan con varios temas del curso de Álgebra como división, factorización, entre otros. Las funciones polinomiales tienen mucha aplicación en diversos fenómenos de la realidad; en economía, por ejemplo, un investigador suele relacionar el consumo en función del ingreso o la oferta en función del precio.

Polinomios

1. DEFINICIONES PREVIAS

1.1. Expresión matemática

Es cualquier combinación de números y letras entrelazadas por las diferentes operaciones matemáticas.

Ejemplos


No olvide
 $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7$
variable: x
coeficientes: 2; 5; 7
 $Q(x, y) = 2x^2 + 9y^2 - 8xy$
variables: x, y
coeficientes: 2; 9; -8

- $x^2 - 2y + 3$
- $x^2 + 5x - 1$
- $5^x + \log x$
- $\frac{1}{5}\pi r^2 h$
- $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

1.2. Notación matemática

Es la representación simbólica que nos permite reconocer cuáles son las variables de una expresión matemática.

Ejemplos


Cuidadó!
Constante es cualquier número, el cual debe estar en un conjunto determinado.
Variable es un símbolo (letra) y representa a diferentes elementos de un conjunto determinado.

- $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 3$ tiene una variable: x

variable
- $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 3$ tiene una variable: x

variable
- $P(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 5x + 4y$ tiene dos variables: x, y

variables
- $P_{(x-1)} = 5x^2 + 7x - 3$ tiene una variable: $x-1$

variable
- $P_{(2x+7)} = 4x - 3$ tiene una variable: $2x+7$

variable

2. VALOR NUMÉRICO

Si le asignamos valores a las variables de una expresión matemática y efectuamos las operaciones que se indican, el número real que se obtiene se llama valor numérico de la expresión.

Ejemplos

1. Dada la expresión $f(x) = 2x + 1$

$$\text{si } x=1 \rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$\text{si } x=-2 \rightarrow f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$$

$$\text{si } x=\frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

2. Dada la expresión $f(x) = x^2 + 2x$

$$\text{si } x=0 \rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{si } x=3 \rightarrow f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$$

$$\text{si } x=-3 \rightarrow f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3$$

3. Dada la expresión $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$\text{si } x=2 \rightarrow g(2) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{si } x=-2 \rightarrow g(-2) = \frac{1-(-2)}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\text{si } x=\frac{1}{2} \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

4. Dada la expresión $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 0 \\ x+1; & x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{si } x=-2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$\text{si } x=-1 \rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$\text{si } x=0 \rightarrow f(0) = 0+1=1$$

$$\text{si } x=1 \rightarrow f(1) = 1+1=2$$

$$\text{si } x=2 \rightarrow f(2) = 2+1=3$$

Reto al saber

Dada la expresión matemática

$$P(\sqrt{x}-1) = x^2 - x + 5$$

calcule el valor de $P(1)$.



Dato curioso

La expresión matemática

$$C = Ax^{-0.3} y^{-0.2} z^{-0.5}$$

nos proporciona el consumo mensual (C) de carne (en kg), en términos de los precios de tres productos: x , y y z , donde A es una cierta constante.

Además

x : precio del litro de leche

y : precio del kilo de huevo

z : precio del kilo de carne



APLICACIÓN 1

Luis ha solicitado un celular en un plan pospago de S/.39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cada minuto adicional de uso cuesta 20 céntimos. El costo mensual está representado por la siguiente expresión, donde x representa el número de minutos:

$$C(x) = \begin{cases} 39; & 0 \leq x \leq 400 \\ 39 + 0,2(x - 400); & x > 400 \end{cases}$$

Determine $C_{(480)}$.

Reto al saber

1. Si $f_{(x-3)}=x^2+1$ y $h_{(x+1)}=4x+1$, halle el valor de $h(f_{(3)}+h_{(-1)})$

A) 117 B) 145 C) 115
D) 107 E) 120

UNMSM 2013-I

2. Si $f_{(x-1)}=x^2+2x$ y
 $f_{(a)}-f_{(b)}=b-a$
¿cuál es el valor de $a+b+5$?

A) 0 B) 5 C) -1
D) 1 E) -2

UNMSM 2004-II

RESOLUCIÓN

$$C_{(480)} = 39 + 0,2(480 - 400) = 39 + 0,2(80) = 55$$

Por lo tanto, el pago por 480 minutos es S/.55.

APLICACIÓN 2

Dados los siguientes polinomios:

$$P_{(x-1)}=3x^2-2x+1 \quad \wedge \quad Q_{(x+1)}=3x-2$$

calcule el valor de $P_{(Q_{(2)})}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden el valor de $P_{(Q_{(2)})}$.

Datos:

- $P_{(x-1)}=3x^2-2x+1$ (I)
- $Q_{(x+1)}=3x-2$ (II)

Primero, hallamos $Q_{(2)}$.

Reemplazamos $x=1$ en (II).

$$Q_{(1+1)}=3(1)-2 \rightarrow Q_{(2)}=1$$

Luego, como nos piden $P_{(Q_{(2)})}=P_{(1)}$, entonces hallamos $P_{(1)}$.

Reemplazamos $x=2$ en (I).

$$P_{(2-1)}=3(2)^2-2(2)+1$$

$$P_{(1)}=12-4+1 \rightarrow P_{(1)}=9$$

$$\therefore P_{(Q_{(2)})}=P_{(1)}=9$$

3. CAMBIO DE VARIABLE

Las variables de una expresión matemática pueden ser sustituidas por cualquier otra variable o expresión, quedando la expresión matemática en términos de la nueva variable.

Ejemplo

Realice el cambio de variable en las siguientes situaciones:

- $f(x) = 2x + 1$

$$f(a) = 2 \cdot a + 1$$

$$f(-a) = 2(-a) + 1 = -2a + 1$$

$$\therefore f(a+b) = 2(a+b) + 1 = 2a + 2b + 1$$

- $f(x) = x^2 + 1$

$$f(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

$$\therefore f(x) + f(2) = x^2 + 1 + 2^2 + 1 = x^2 + 6$$

- $f(x) = 3x - 1$

$$f(2x) = 3(2x) - 1 = 6x - 1$$

$$\therefore 2f(x) = 2(3x - 1) = 6x - 2$$

- $f(x) = 5x + 4$

$$f(x^2) = 5x^2 + 4$$

$$\therefore (f(x))^2 = (5x+4)^2 = (5x)^2 + 2(5x)4 + 4^2 = 25x^2 + 40x + 16$$

- $f(x) = 6x - 18$

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = 6\left(\frac{x}{3}\right) - 18 = 2x - 18$$

$$\therefore \frac{f(x)}{3} = \frac{6x - 18}{3} = 2x - 6$$

Reto al saber

Sea $f(x) = 2x + 3$.

Halle la expresión equivalente a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

No olvide

- En la expresión $P(x+2) = x^2 + x + 5$, $x+2$ es la variable.

- En la expresión

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}$ es la variable.



APLICACIÓN 3

Sea $f(x)=3x+2$. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

$$\text{I. } f(a) \quad \text{II. } f(a+h) \quad \text{III. } \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

RESOLUCIÓN

$$\text{I. } f(a)=3a+2$$

$$\text{II. } f(a+h)=3(a+h)+2=3a+3h+2$$

III. Con los resultados de los incisos I y II se tiene

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3a+3h+2-(3a+2)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

APLICACIÓN 4

Dada la expresión $f(x)=5x+3$, halle $f(7x+2)$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $f(7x+2)$.

$$\text{Dato: } f(x)=5x+3$$

Cambiamos x por $7x+2$.

$$f(7x+2)=5(7x+2)+3$$

$$f(7x+2)=35x+10+3$$

$$\therefore f(7x+2)=35x+13$$

APLICACIÓN 5

Dada la expresión $f(x)=4x+13$, halle $f(f(x))$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $f(f(x))=f(4x+13)$.

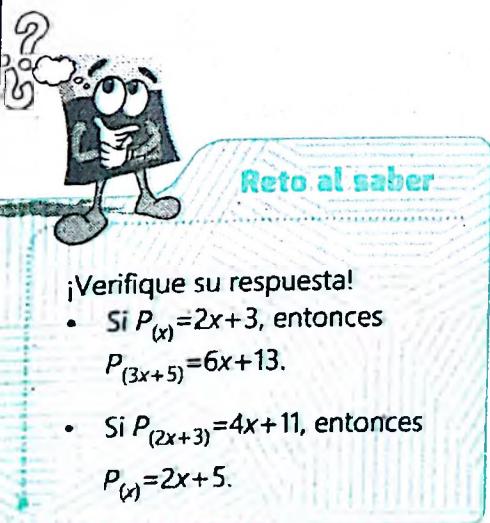
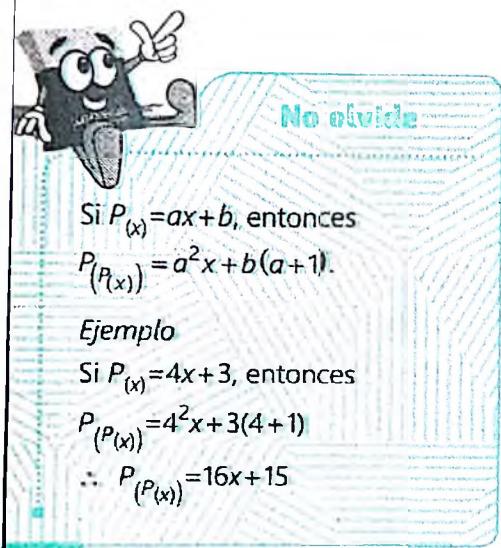
$$\text{Dato: } f(x)=4x+13$$

$$\text{Luego } f(f(x))=f(4x+13)$$

$$f(x)=4x+13$$

$$f(4x+13)=4(4x+13)+13 \rightarrow f(4x+13)=16x+65$$

$$\therefore f(f(x))=16x+65$$



¡Verifique su respuesta!

- Si $P(x)=2x+3$, entonces $P_{(3x+5)}=6x+13$.
- Si $P_{(2x+3)}=4x+11$, entonces $P(x)=2x+5$.

APLICACIÓN 6

Dada la expresión $f_{(2x+3)}=10x+30$, halle $f_{(x)}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $f_{(x)}$.

Dato: $f_{(2x+3)}=10x+30$

Primero, formamos la variable $2x+3$, es decir,

$$f_{(2x+3)}=5(2x+3)+15$$

Luego, cambiamos $2x+3$ por x .

$$\therefore f_{(x)}=5x+15$$

APLICACIÓN 7

Dada la expresión $f_{(4x+7)}=12x+23$, halle $f_{(x)}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $f_{(x)}$.

Dato: $f_{(4x+7)}=12x+23$

Primero, formamos la variable $4x+7$, es decir,

$$f_{(4x+7)}=3(4x+7)+2$$

Luego, cambiamos $4x+7$ por x .

$$\therefore f_{(x)}=3x+2$$

APLICACIÓN 8

Dada la expresión $f_{(x+3)}=x^2-9$, halle $f_{(x)}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $f_{(x)}$.

Dato: $f_{(x+3)}=x^2-9$

Primero, formamos la variable $x+3$, es decir,

$$f_{(x+3)}=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$$

$$f_{(x+3)}=(x+3)(x+3-6)$$

Luego, cambiamos $x+3$ por x .

$$f_{(x)}=x(x-6)$$

$$\therefore f_{(x)}=x^2-6x$$

Cuidado!**Polinomio constante**

Es aquel polinomio de la forma

donde c es un número real distinto de cero.

Ejemplos

- $P_{(x)}=3$
- $P_{(x)}=2015$
- $S_{(x)}=\frac{5}{4}$

Importante

Sea

$$P_{(x)}=50$$

entonces

$$P_{(1)}=50$$

$$P_{(2)}=50$$

$$P_{(3)}=50$$

$$P_{(4)}=50$$

4. POLINOMIO DE UNA VARIABLE

Es la expresión que enlaza variables o constantes mediante una combinación finita de adiciones, sustracciones, multiplicaciones o potenciaciones, en las cuales los exponentes de las variables son enteros positivos.

Ejemplos

POLINOMIO	TIPO	TERMIOS	GRADO
$5x^2 - 7x + 2$	trinomio	$5x^2, -7x, 2$	2
$3x^7 + 3x$	binomio	$3x^7, 3x$	7
$7x^6$	monomio	$7x^6$	6
$5x - 2$	binomio	$5x, -2$	1
$4 - x + 5x^2 - x^5$	polinomio	$4, -x, 5x^2, -x^5$	5

4.1. Formas generales

4.1.1. Polinomio lineal

Es de la forma

$$P(x) = ax + b; a \neq 0$$

Ejemplos

- $P(x) = 3x + 5$
- $S(x) = 7x$

No olvides

Los polinomios lineales son de grado 1.

APLICACIÓN 9

El grado del polinomio $P(x)$ es uno y se cumple que $P(3) = 12$ y $P(2) = 8$.

Halle el valor de $P(1) + P(2) + \dots + P(10)$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $P(1) + P(2) + \dots + P(10)$.

Datos:

- $P(3) = 12$
- $P(2) = 8$
- $P(x)$ es de grado uno.

Importante

¿Conoce alguna definición o propiedad que pueda ser útil?
 $P(x)$ es de grado uno, entonces $P(x)$ es un polinomio lineal.

Luego

$$P(x) = ax + b; a \neq 0 \quad (*)$$

Por dato

$$\begin{aligned} P(3) &= 12 \rightarrow P(3) = 3a + b = 12 \\ P(2) &= 12 \rightarrow P(2) = 2a + b = 8 \end{aligned}$$

$a = 4$
 $b = 0$

Luego, en (*)

$$P(x) = 4x$$

Nos piden

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + \dots + P(10) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 4(1) + 4(2) + \dots + 4(10) \\ \therefore 4(1+2+\dots+10) = 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 220 \end{aligned}$$

APLICACIÓN 10

Si $P(x)$ es un polinomio lineal de coeficientes enteros, tal que se cumple que $P(1) + P(2) = 2P(3) - 6$, halle el valor de $P(5) - P(3)$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $P(5) - P(3)$.

Datos:

- $P(1) + P(2) = 2P(3) - 6$
- $P(x)$ es un polinomio lineal.

Importante

¿Conoce alguna definición que puede ser útil en este caso?
 Como $P(x)$ es lineal, entonces

$$P(x) = ax + b$$

**Importante****Polinomio mónico**

Es aquel cuyo coeficiente principal es 1.

Ejemplos

- $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$
- $S(x) = x^2 + 5x + 12$
- $R(x) = x + 19$

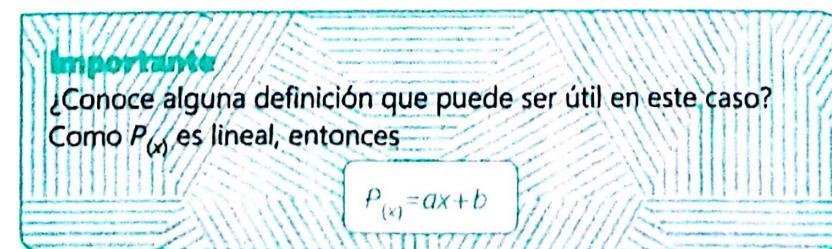
**Reto al saber**

Sean P y Q dos expresiones matemáticas de modo que

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= ax + b; \\ P(x) - Q(x) &= a + bx \quad y \\ P(5) &= 4 \end{aligned}$$

Calcule el valor de $P(Q(1))$.

UNMSM 2010-1



Además

$$P_{(1)} + P_{(2)} = 2P_{(3)} - 6$$

$$a(1) + b + a(2) + b = 2[a(3) + b] - 6$$

$$a + b + 2a + b = 2(3a + b) - 6$$

$$3a + 2b = 6a + 2b - 6$$

$$6 = 3a \rightarrow a = 2$$

Nos piden

$$P_{(5)} - P_{(3)} = a(5) + b - (a(3) + b)$$

$$P_{(5)} - P_{(3)} = 5a + b - 3a - b$$

$$P_{(5)} - P_{(3)} = 5a - 3a$$

$$P_{(5)} - P_{(3)} = 2a$$

$$\therefore P_{(5)} - P_{(3)} = 2 \cdot 2 = 4$$

4.1.2. Polinomio cuadrático

Es de la forma

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$$

Ejemplos

- $P_{(x)} = 2x^2 + 5x + 6$
- $P_{(x)} = 9x^2$
- $S_{(x)} = 5x^2 - 7$
- $P_{(x)} = 4x^2 - 5x$

No olvide

Los polinomios cuadráticos son de grado 2.

4.1.3. Polinomio cúbico

Es de la forma

$$P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d ; a \neq 0$$

Ejemplos

- $P_{(x)} = 4x^3 + 5x^2 - 7x + 1$
- $S_{(x)} = 5x^3 + 2$
- $R_{(x)} = x^3 + 6x^2 + 3$

Observación

Sea el polinomio $P_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$, donde

- $a; b; c$ y d son los coeficientes del polinomio.
- a es el coeficiente principal.
- d es el término independiente.

Ejemplos

POLINOMIO	COEFICIENTES	COEFICIENTE PRINCIPAL	Término independiente
$4x^3+5x^2-7x+2$	4; 5; -7; 2	4	2
$9x^2+5x^3-x^2+1$	5; 9; -1; 1	5	1
$4x^2-7x+3$	4; -7; 3	4	3
$5x+12$	5; 12	5	12
x^2-1	1; -1	1	-1
$2x^3+7x^2+6x$	2; 7; 6	2	0

Propiedades

Dado el polinomio

$$P_{(x)}=Ax^3+Bx^2+Cx+D; A \neq 0$$

- Suma de coeficientes

$$A+B+C+D=P_{(1)}$$

- Término independiente

$$D=P_{(0)}$$

Ejemplos

1. Sea el polinomio $P_{(x)}=5x^2-7x+8$.

Suma de coeficientes: $P_{(1)}=5(1)^2-7(1)+8=6$

Término independiente: $P_{(0)}=5(0)^2-7(0)+8=8$

No olvide**Propiedad distributiva**

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Ejemplos

- $(x+3)(x+2)$
 $x^2+2x+3x+6$
 x^2+5x+6
- $(2x+7)(x-3)$
 $2x^2-6x+7x-21$
 $2x^2+x-21$
- $(3x+2)(2x-5)$
 $6x^2-15x+4x-10$
 $6x^2-11x-10$
- $(x+6)(3x-1)$
 $3x^2-x+18x-6$
 $3x^2+17x-6$

2. Sea el polinomio $P_{(x)} = (3x-1)^{10} + (x-2)^5 + x^2$.

Suma de coeficientes: $P_{(1)} = (3(1)-1)^{10} + (1-2)^5 + 1^2$

$$P_{(1)} = 2^{10} + (-1)^5 + 1$$

$$P_{(1)} = 1024 - 1 + 1 = 1024$$

Término independiente: $P_{(0)} = (3(0)-1)^{10} + (0-2)^5 + 0^2$

$$P_{(0)} = (-1)^{10} + (-2)^5 + 0$$

$$P_{(0)} = 1 - 32 = -31$$

APLICACIÓN 11

Dado el polinomio $P_{(x)} = 3(x+1) - 4(x-2) + 5$,

calcule $\frac{\text{suma de coeficientes de } P}{\text{término independiente de } P}$

RESOLUCIÓN

Como $P_{(x)} = 3(x+1) - 4(x-2) + 5$

$$P_{(x)} = 3x + 3 - 4x + 8 + 5$$

$$P_{(x)} = -x + 16$$

Suma de coeficientes: $P_{(1)} = -1 + 16 = 15$

Término independiente: $P_{(0)} = 16$

Por lo tanto, el resultado es $\frac{15}{16}$.

APLICACIÓN 12

Dado el polinomio cuadrático

$P_{(x-1)} = nx^n - 7x + m$, su término independiente es 1. Halle el valor

de $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden el valor de $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Datos:

El polinomio $P_{(x-1)} = nx^n - 7x + m$ es cuadrático y su término independiente es 1.

Del dato

$$P_{(x-1)} = nx^n - 7x + m$$

El valor de n es 2, pues el polinomio es cuadrático, es decir, de grado 2.

$$\text{Luego, } P_{(x-1)} = 2x^2 - 7x + m. \quad (*)$$

Además, su término independiente es 1; es decir, $P_{(0)} = 1$. Reemplazamos $x=1$ en (*).

$$P_{(1-1)} = 2(1)^2 - 7(1) + m = 0$$

$$2 - 7 + m = 0 \rightarrow -5 + m = 0$$

$$m = 5$$

Nos piden $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Reemplazamos $x = \frac{3}{2}$ en (*).

$$P_{\left(\frac{3}{2}-1\right)} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 5$$

$$P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 5 \rightarrow P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + 5 \rightarrow P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{12}{2} + 5$$

$$P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -6 + 5 \rightarrow P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -1$$

$$\therefore P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -1$$

4.2. Operaciones con polinomios

La suma de dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es el polinomio $P_{(x)} + Q_{(x)}$, que se obtiene sumando los monomios semejantes que se encuentran en $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$.

Ejemplos

1. Calculamos las siguientes sumas o restas de monomios:

a. $3x + 4x = 7x$

b. $5x^4 - 3x^4 = 2x^4$

c. $4z + 6z = 10z$

d. $7x^4y - x^4y = 6x^4y$

e. $4x^3 + 3x^3 - 11x^3 = 7x^3 - 11x^3 = -4x^3$



Reto al saber

$$\text{Dado } R_{(x)} = \frac{x+1}{x-1}; Q_{(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\text{calcule } R_{(Q(R(x)))}$$

A) $\frac{x+1}{x-1}$ B) $x+1$ C) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

D) $x-1$ E) $\frac{(x-1)^2}{x+1}$

UNMSM 2006-1



Importante

- Si $ax+b=mx+n$
→ $a=m$ y $b=n$.
- Si $ax^2+bx+c=mx^2+nx+p$
→ $a=m$; $b=n$ y $c=p$.

2. Efectuamos las siguientes sumas y diferencias:

a. $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

Primero, buscamos los monomios semejantes.

$$(x^3 - \cancel{6x^2} + 2x + 4) + (\cancel{x^3} + 5\cancel{x^2} - 7x)$$

Luego, operamos los monomios semejantes.

$$2x^3 - x^2 - 5x + 4$$

b. $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

Primero, aplicamos la propiedad distributiva.

$$(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - x^3 - 5x^2 + 7x$$

Luego, buscamos los monomios semejantes.

$$\cancel{x^3} - \cancel{6x^2} + 2x + 4 - \cancel{x^3} - \cancel{5x^2} + 7x$$

Finalmente, operamos los monomios semejantes.

$$-11x^2 + 9x + 4$$

c. $3(x-1) + 4(x+2)$

$$\cancel{3x} - \cancel{3} + \cancel{4x} + \cancel{8} = 7x + 5$$

d. $8(2x+5) - 7(x-9)$

$$16x + 40 - 7x + 63 = 9x + 103$$

e. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

Primero, aplicamos la propiedad distributiva.

$$4x^2 - 12x + 20 - 3x^2 + 6x - 3$$

Luego, buscamos los monomios semejantes.

$$\cancel{4x^2} - \cancel{12x} + \cancel{20} - \cancel{3x^2} + \cancel{6x} - \cancel{3}$$

Por último, operamos los monomios semejantes.

$$x^2 - 6x + 17$$

3. Calculamos las siguientes multiplicaciones:

a. $(3x^2)(5x^3) = 15x^5$

b. $(2x^2)(-3x^4) = -6x^6$

c. $(-2x^5)(-3x^2) = 6x^7$

d. $(8x^2y)(x^3y^4) = 8x^5y^5$

4. Efectuamos las siguientes multiplicaciones:

a. $(2x+1)(3x-5)$

Primero, aplicamos la propiedad distributiva.

$$(2x+1)(3x-5)$$

$$(2x)(3x) - 5(2x) + 1(3x) + 1(-5)$$

$$6x^2 - 10x + 3x - 5$$

Luego, buscamos los monomios semejantes.

$$6x^2 - \underline{10x} + \underline{3x} - 5$$

Finalmente, operamos los monomios semejantes.

$$6x^2 - 7x - 5$$

b. $(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1)$

Primero, aplicamos la propiedad distributiva.

$$(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1)$$

$$x^2(x^3) + x^2(2x) + x^2(1)$$

$$-3 \cdot x^3 - 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1$$

$$x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$$

Luego, buscamos los monomios semejantes.

$$x^5 + 2x^3 + \cancel{x^2} - \cancel{3x^3} - 6x - 3$$

Por último, operamos los monomios semejantes.

$$x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$$

5. POLINOMIOS DE MÁS DE UNA VARIABLE

Los siguientes polinomios tienen más de una variable:

$$P_{(x,y)} = 3x - 2x^2y^5 + 1$$

(polinomio de dos variables)

$$Q_{(x,y,z)} = x + 2y - 3z$$

(polinomio de tres variables)

Los polinomios con más de una variable tienen dos tipos de grado:

Grado relativo (GR)

Se calcula respecto a una de sus variables.

Grado absoluto (GA)

Se calcula con respecto a todas sus variables.

Ejemplos

Hallamos el grado relativo y absoluto en los siguientes casos:

- $P_{(x,y)} = 4x^3y^5$

Grado relativo con respecto de x : $GR_x = 3$

Grado relativo con respecto de y : $GR_y = 5$

Grado absoluto: $GA_{(P)} = 3+5=8$

- $P_{(x,y)} = 3x^2y^4 - x^3y^5 + 7xy^6$

$GR_x = \max\{2; 3; 1\} = 3$

$GR_y = \max\{4; 5; 6\} = 6$

$GA = \max\{6; 8; 7\} = 8$

6. POLINOMIOS ESPECIALES

6.1. Polinomios idénticos

Dos polinomios, $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, son idénticos ($P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$) cuando tienen los mismos valores numéricos para cualquier valor que se asigne a sus variables.

Ejemplo

Los polinomios $P_{(x)} = (x+3)^2$ y $Q_{(x)} = x^2 + 6x + 9$ son idénticos, ya que $P_{(x)} = Q_{(x)}; \forall x \in \mathbb{R}$.

Además, los siguientes productos notables son identidades:

$$(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2$$

$$(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

6.2. Polinomio idénticamente nulo

Un polinomio reducido es idénticamente nulo si todos sus coeficientes son iguales a cero.

Ejemplo

El polinomio $P_{(x)} = 0x^2 + 0x + 0$ es idénticamente nulo, es decir, $P_{(x)} \equiv 0$.

Importante

Si el polinomio $P_{(x)} = ax^2 + bx + c$ es idénticamente nulo, entonces $a=b=c=0$.

Ejemplo

Si el polinomio

$$P_{(x)} = (m-3)x^2 + (n+1)x + (p-2)$$

es idénticamente nulo, entonces

$$m-3=0 \wedge n+1=0 \wedge p-2=0$$

es decir, $m=3$, $n=-1$ y $p=2$.

6.3. Polinomio homogéneo

Es aquel polinomio que se caracteriza porque todos sus términos tienen igual grado absoluto.

Ejemplo

En el polinomio

$$P(x; y) = \underbrace{x^3}_{GA=3} - \underbrace{x^2y}_{GA=3} + \underbrace{2xy^2}_{GA=3} + \underbrace{5y^3}_{GA=3}$$

vemos que todos los términos tienen el mismo grado, entonces $P(x; y)$ es homogéneo; además, el grado de homogeneidad es 3.

APLICACIÓN 13

Se define la expresión

$$P_{(n)} = a^n - b^n.$$

Reduzca la expresión $\frac{P_{(4)}}{P_{(2)}}$.

RESOLUCIÓN

Nos piden

$$\frac{P_{(4)}}{P_{(2)}} = \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \frac{P_{(4)}}{P_{(2)}} = a^2 + b^2$$



Biografía

Évariste Galois

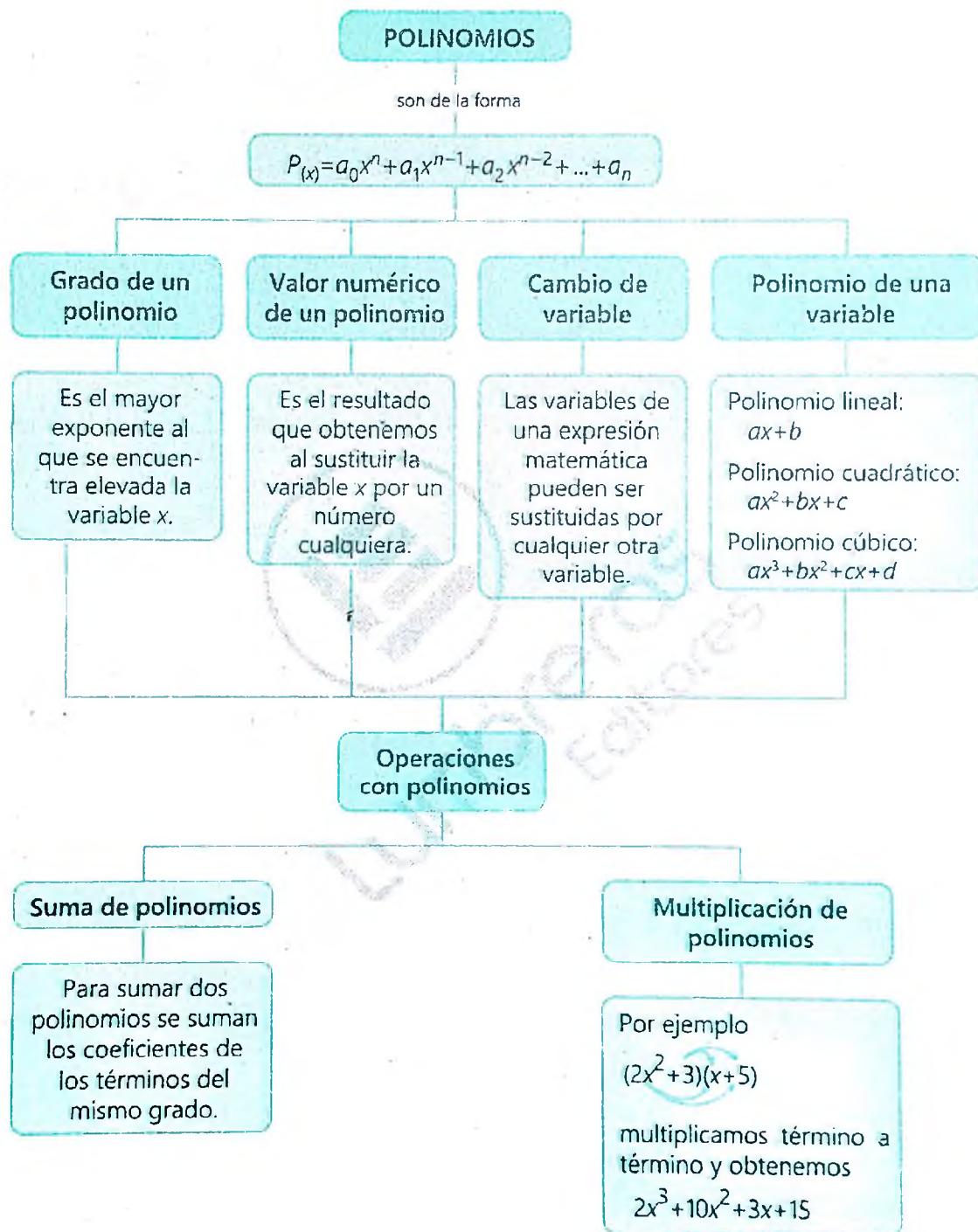
Galois nació en Bourg la Reine, cerca de París, en 1811. Aunque su legado matemático a tan pronta edad es innegable, no se puede decir que Évariste fue exactamente un niño prodigo, ya que sus primeros contactos con las matemáticas fueron a los 12 años, cuando comenzó a estudiar en París.

A los 15 años, y tras repetir curso (hasta algunos genios han repetido curso alguna vez), Évariste encontró en las matemáticas el reto intelectual que le faltaba, especialmente en el estudio del álgebra, rama matemática que por aquél entonces tenía múltiples resultados sin resolver.

Tras ser rechazado en dos ocasiones en la Escuela Politécnica de París, fue admitido finalmente en la École Normale. El 30 de mayo de 1832, Galois fue retado a duelo, al parecer por un triángulo amoroso. Resignado a su muerte, Galois pasó toda la noche anterior enviando cartas a sus amigos, en las cuales dejaba constancia de su gran legado matemático: la teoría fundamental de grupos.

Se puede decir que esta teoría es la que ha hecho posible el desarrollo del álgebra en los últimos 200 años y he ahí su importancia hasta el día de hoy. Aunque no fue aceptada en vida cuando la presentó (los matemáticos de la época no la entendieron), once años después de su muerte, Joseph Liouville la publicó defendiendo la autoría de Galois.





RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Se tiene el polinomio

$$F_{(x+2)} = 3x^2 - 2x + 1.$$

Halle el valor de $F_{(3)}$.

- A) 1 B) 12 C) 0
D) 2 E) 8

Resolución

Nos piden $F_{(3)}$.

Dato:

$$F_{(x+2)} = 3x^2 - 2x + 1 \quad (*)$$

$$x+2=3 \rightarrow x=1$$

En (*)

$$F_{(1+2)} = 3(1)^2 - 2(1) + 1$$

$$\therefore F_{(3)} = 2$$



Clave

Problema N.º 2

¿Cuál es el término independiente del siguiente polinomio?

$$Q_{(x)} = (x+1)^{n+2} + (2x-1)^{2n}$$

- A) 0 B) 2 C) 3
D) -1 E) -2

Resolución

Nos piden el término independiente.

Dato:

$$Q_{(x)} = (x+1)^{n+2} + (2x-1)^{2n} \quad (*)$$

IMPORTANTE

Conoce alguna propiedad que pueda ser útil en este caso?

Término independiente = $Q_{(0)}$

Reemplazamos $x=0$ en (*).

$$Q_{(0)} = (0+1)^{n+2} + (2(0)-1)^{2n}$$

$$Q_{(0)} = 1^{n+2} + (-1)^{2n}$$

$$Q_{(0)} = 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto, el término independiente es 2.

Clave

Problema N.º 3

Si la suma de coeficientes del polinomio

$$P_{(x)} = (3x+2)^n + 11 \text{ es } 36, \text{ halle el valor de } n.$$

- A) 6 B) 5 C) 2
D) 4 E) 3

Resolución

Nos piden el valor de n .

Datos:

- $P_{(x)} = (3x+2)^n + 11 \quad (*)$
- La suma de coeficientes es 36.

IMPORTANTE

Conoce alguna propiedad que pueda ser útil en este caso?

Suma de coeficientes = $P_{(1)}$

Reemplazamos $x=1$ en (*).

$$P_{(1)} = (3(1) + 2)^n + 11 = 36$$

$$P_{(1)} = 5^n + 11 = 36$$

$$P_{(1)} = 5^n = 25.$$

$$\therefore P_{(1)} = n = 2$$

 Clave

Problema N.º 4

Dado el polinomio $f_{(x)}$, se cumple con la igualdad $f_{(x)} = 10x - 15 - 4f_{(x)}$.

Halle $f_{(3)}$.

- A) 3
- B) 4
- C) 8
- D) 9
- E) 6

Resolución

Nos piden $f_{(3)}$.

Dato:

$$f_{(x)} = 10x - 15 - 4f_{(x)} \quad (*)$$

Reemplazamos $x=3$ en (*).

$$f_{(3)} = 10(3) - 15 - 4f_{(3)}$$

$$f_{(3)} + 4f_{(3)} = 30 - 15$$

$$5f_{(3)} = 15$$

$$\therefore f_{(3)} = 3$$

 Clave

Problema N.º 5

Si $P_{(x)}$ es un polinomio lineal, donde se cumple que $P_{(5)} = 22$ y $P_{(7)} = 10$, determine la suma de coeficientes.

- A) 46
- B) 52
- C) -6
- D) 23
- E) 16

Resolución

Nos piden la suma de coeficientes.

Datos:

- $P_{(5)} = 22$; $P_{(7)} = 10$
- $P_{(x)}$ es un polinomio lineal.

Del dato, se sabe que $P_{(x)}$ es un polinomio lineal.

$$\rightarrow P_{(x)} = ax + b; a \neq 0 \quad (*)$$

Además

$$P_{(7)} = 7a + b = 10$$

$$P_{(5)} = 5a + b = 22$$

$$2a = -12$$

$$a = -6$$

$$b = 52$$

Luego, en (*)

$$P_{(x)} = -6x + 52$$

Como nos piden la suma de coeficientes

$$P_{(1)} = -6 + 52 = 46$$

Por lo tanto, la suma de coeficientes es 46.

 Clave

Problema N.º 6

Si $P(x) = 3x^{5-n} + nx^{n-3} + x^n + 2$

es un polinomio, halle $P_{(2)}$:

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 28 | B) 30 | C) 32 |
| D) 34 | E) 36 | |

Resolución

Nos piden $P_{(2)}$.

Dato:

$$P(x) = 3x^{5-n} + nx^{n-3} + x^n + 2 \quad (*)$$

es un polinomio.

Entonces

$$5-n \geq 1 \quad \wedge \quad n-3 \geq 1$$

$$5-1 \geq n \quad \wedge \quad n \geq 1+3$$

$$4 \geq n \quad \wedge \quad n \geq 4$$

$$\rightarrow n=4$$

Luego, reemplazamos $n=4$ en (*).

$$P(x) = 3x^{5-4} + 4x^{4-3} + x^4 + 2$$

$$P(x) = 3x + 4x + x^4 + 2$$

Nos piden

$$P_{(2)} = 3(2) + 4(2) + 2^4 + 2$$

$$P_{(2)} = 6 + 8 + 16 + 2$$

$$\therefore P_{(2)} = 32$$

Clave C

Problema N.º 7

Sea el polinomio $P_{(x-1)} = 3x^2 - 1$.

Halle $P_{(0)} + P_{(1)}$:

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 8 | B) 10 | C) 13 |
| D) 15 | E) 20 | |

Resolución

Nos piden $P_{(0)} + P_{(1)}$.

Dato:

$$P_{(x-1)} = 3x^2 - 1 \quad (*)$$

Primero, hallamos $P_{(1)}$.

Reemplazamos $x=2$ en (*).

$$P_{(2-1)} = 3(2)^2 - 1$$

$$P_{(1)} = 3 \cdot 4 - 1$$

$$\rightarrow P_{(1)} = 11$$

Luego, hallamos $P_{(0)}$.

Reemplazamos $x=1$ en (*).

$$P_{(1-1)} = 3(1)^2 - 1$$

$$P_{(0)} = 3 \cdot 1 - 1$$

$$\rightarrow P_{(0)} = 2$$

Nos piden

$$P_{(0)} + P_{(1)} = 2 + 11$$

$$\therefore P_{(0)} + P_{(1)} = 13$$

Clave C

Problema N.º 8

Analice los siguientes polinomios y determine, respectivamente, su grado, coeficientes, coeficiente principal y término independiente.

- $P(x) = 2x + 5$
- $S(x) = 2x^2 - 5x - 3$
- $P(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$
- $Q(x) = 7x - 2$
- $R(x) = x - x^2 + 3x^3 - 5x^4$

Resolución

POLINOMIO	GRADO	COEFICIENTES	COEFICIENTE PRINCIPAL	TERMINO INDEPENDIENTE
$P(x) = 2x + 5$	1	2; 5	2	5
$Q(x) = 7x - 2$	1	7; -2	7	-2
$S(x) = 2x^2 - 5x - 3$	2	2; -5; -3	2	-3
$R(x) = x - x^2 + 3x^3 - 5x^4$	4	1; -1; 3; -5	-5	0
$P(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}; -\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$

Problema N.º 9

Efectúe las siguientes operaciones:

- $(13x - 9) - (4x - 10)$
- $(5 - 3x) + (x - 7)$
- $3(x - 1) + 5(x + 2)$
- $4(3T - 2) - (T^2 + 4) - 2T(T + 1)$

Resolución

a. $(13x - 9) - (4x - 10)$

$$13x - 9 - 4x + 10$$

$$13x - 4x - 9 + 10$$

$$9x + 1$$

c. $3(x - 1) + 5(x + 2)$

$$3x - 3 + 5x + 10$$

$$3x + 5x - 3 - 10$$

$$8x - 13$$

b. $(5 - 3x) + (x - 7)$

$$5 - 3x + x - 7$$

$$-3x + x + 5 - 7$$

$$-2x - 2$$

d. $4(3T - 2) - (T^2 + 4) - 2T(T + 1)$

$$12T - 8 - T^2 - 4 - 2T^2 - 2T$$

$$-T^2 - 2T^2 + 12T - 2T - 8 - 4$$

$$-3T^2 + 10T - 12$$

Problema N.º 10

Si $T_{(x)}$ es un polinomio constante, tal que $T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} + \dots + T_{(10)} = 30$, halle el valor de $T_{(1)} + 2T_{(2)} + \dots + 10T_{(10)}$

- A) 165 B) 160 C) 55
D) 110 E) 220

Resolución

Nos piden

$$T_{(1)} + 2T_{(2)} + 3T_{(3)} + \dots + 10T_{(10)}$$

Datos:

- $T_{(x)}$ es un polinomio constante.
- $T_{(1)} + T_{(2)} + \dots + T_{(10)} = 30$

IMPORTANTE

¿Conoce alguna definición o propiedad que pueda ser útil?

$T_{(x)}$ es el polinomio constante, entonces

$$T_{(1)} = K$$

donde K es una constante.

Además $T_{(1)} = K$

$$T_{(2)} = K$$

$$T_{(3)} = K$$

⋮

Por dato

$$T_{(1)} + T_{(2)} + \dots + T_{(10)} = 30$$

$$K + K + \dots + K = 30$$

$$10K = 30 \rightarrow K = 3$$

Nos piden

$$T_{(1)} + 2T_{(2)} + 3T_{(3)} + \dots + 10T_{(10)}$$

$$K + 2K + 3K + \dots + 10K$$

$$K(1+2+\dots+10)$$

$$\therefore 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165$$

Clave

Problema N.º 11

Si $P_{(x-1)} = 2x+1$, determine el valor de la

$$\text{fracción } \frac{P_{(3)} + P_{(5)}}{P_{(0)}}$$

- A) 6 B) 7 C) $\frac{20}{3}$
D) $\frac{22}{3}$ E) $\frac{31}{3}$

Resolución

$$\text{Nos piden } \frac{P_{(3)} + P_{(5)}}{P_{(0)}}.$$

Dato: $P_{(x-1)} = 2x+1$

- $x-1=3 \rightarrow x=4 \rightarrow P_{(4-1)} = 2(4)+1 \rightarrow P_{(3)} = 9$
- $x-1=5 \rightarrow x=6 \rightarrow P_{(6-1)} = 2(6)+1 \rightarrow P_{(5)} = 13$
- $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow P_{(1-1)} = 2(1)+1 \rightarrow P_{(0)} = 3$

Luego, reemplazamos en lo que nos piden.

$$\frac{P_{(3)} + P_{(5)}}{P_{(0)}} = \frac{9+13}{3} = \frac{22}{3}$$

Clave

Problema N.º 12

Si $P_{(x)} = ax + b$; $a < 0$, además, se tiene que $P_{(P_{(x)})} = 4x - 9$, determine el valor de $P_{(5)}$.

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Resolución

Nos piden $P_{(5)}$.

Datos:

- $P_{(x)} = ax + b$; $a < 0$
- $P_{(P_{(x)})} = 4x - 9$

Por dato, $P_{(x)} = ax + b$.

Además

$$\begin{aligned} P_{(P_{(x)})} &= 4x - 9 \\ P_{(ax+b)} &= 4x - 9 \\ a(ax+b) + b &= 4x - 9 \\ a^2x + ab + b &= 4x - 9 \\ \rightarrow a^2 &= 4 \rightarrow a = 2; a = -2 \\ \text{No puedo ser par (por dato, } a < 0\text{), } a &= -2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ab + b &= -9 \\ -2b + b &= -9 \rightarrow -b = -9 \\ \rightarrow b &= 9 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} P_{(x)} &= ax + b \\ P_{(x)} &= -2x + 9 \\ \therefore P_{(5)} &= -2(5) + 9 = -1 \end{aligned}$$

Problema N.º 13

Determine la validez de las siguientes proposiciones:

- I. $P_{(x)} = 3x + 1 \rightarrow P_{(2)} = 7$
 II. $P_{(x)} = x^2 - 9 \rightarrow P_{(5)} = 16$
 III. $Q_{(x+1)} = 4x + 1 \rightarrow Q_{(3)} = 9$
 IV. $P_{(2x)} = x + 7 \rightarrow P_{(4)} = 9$

- A) FVVF B) FVVV C) WVVF
 D) VVFF E) WWW

Resolución

- I. Verdadera

$$P_{(x)} = 3x + 1$$

$$\begin{aligned} P_{(2)} &= 3(2) + 1 = 7 \\ \rightarrow P_{(2)} &= 7 \end{aligned}$$

- II. Verdadera

$$P_{(x)} = x^2 - 9$$

$$\begin{aligned} P_{(5)} &= 5^2 - 9 = 16 \\ \rightarrow P_{(5)} &= 16 \end{aligned}$$

- III. Verdadera

$$Q_{(x+1)} = 4x + 1$$

$$\begin{aligned} Q_{(2+1)} &= 4(2) + 1 = 9 \\ \rightarrow Q_{(3)} &= 9 \end{aligned}$$

- IV. Verdadera

$$P_{(2x)} = x + 7$$

$$\begin{aligned} P_{(2 \cdot 2)} &= 2 + 7 \\ \rightarrow P_{(4)} &= 9 \end{aligned}$$

Problema N.º 14

Si sabemos que $P_{(x+1)}=3x+7$, halle la expresión equivalente de $P_{(x+P_{(-1)})}$.

- A) $3x-1$ B) $3x+25$ C) $x+15$
 D) $3x+15$ E) $3x+6$

Resolución

Nos piden $P_{(x+P_{(-1)})}$.

Dato:

$$P_{(x+1)}=3x+9$$

El problema será resuelto en dos pasos:

Paso 1: hallamos $P_{(-1)}$.

Por dato:

$$P_{(x+1)}=3x+9$$

$$x+1=-1 \rightarrow x=-2: P_{(-2+1)}=3(-2)+9$$

$$P_{(-1)}=3$$

Paso 2: hallamos $P_{(x+P_{(-1)})}=P_{(x+3)}$.

Por dato

$$P_{(x+1)}=3x+9$$

$$\begin{cases} P_{(x+1)}=3(x+1)+6 \\ P_{(x+3)}=3(x+3)+6 \end{cases}$$

$$P_{(x+3)}=3x+9+6$$

$$\therefore P_{(x+3)}=3x+15$$

Problema N.º 15

Si $P_{(x)}=4x^2+24x+1$ se agrupa convenientemente a la forma $P_{(x)}=a(x+h)^2+k$, halle el valor de $a+2h+k$.

- A) 0 B) 1 C) -21
 D) -18 E) -25

Resolución

Nos piden $a+2h+k$.

Dato:

$$a(x+h)^2+k=\underline{\underline{4x^2+24x+1}}$$

$$a(x+h)^2+k=4(x^2+6x)+1$$

$$a(x+h)^2+k=4(x^2+6x+9-9)+1$$

$$a(x+h)^2+k=4((x+3)^2-9)+1$$

$$a(x+h)^2+k=4(x+3)^2-36+1$$

$$a(x+h)^2+k=4(x+3)^2-35$$

$$a=4; h=3; k=-35$$

Nos piden

$$a+2h+k=4+2(3)-35$$

$$\therefore 10-35=-25$$

Clave

Problema N.º 16

Sea $P_{(x)} = (x-1)^n + (x+1)^n + x$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Halle el término independiente de $P_{(x)}$ si la suma de coeficientes es igual a 65.

- A) 7 B) 3 C) 2
 D) 0 E) 1

Resolución

Nos piden el término independiente de $P_{(x)}$.

Datos:

- $P_{(x)} = (x-1)^n + (x+1)^n + x$
- La suma de coeficientes es 65.

IMPORTANTE

¿Conoce alguna propiedad que puede ser útil?

$P_{(1)}$ =suma de coeficientes de $P_{(x)}$

$$P_{(1)}=65$$

$$(1-1)^n + (1+1)^n + 1 = 65$$

$$2^n + 1 = 65 \rightarrow 2^n = 64 \rightarrow 2^n = 2^6$$

$$\rightarrow n=6$$

Nos piden el término independiente $P_{(0)}$.

$$P_{(0)} = (0-1)^6 + (0+1)^6 + 1$$

$$P_{(0)} = (-1)^6 + 1^6 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$P_{(0)} = 3$$

Por lo tanto, el término independiente es 3.

Clave

Problema N.º 17

Se define la siguiente operación matemática:

$$F_{(x-1)} = F_{(x)} - 2x, \text{ además, } F_{(1)} = 2.$$

$$\text{Calcule el valor de } E = \sqrt{F_{(5)} + 6}.$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 5 E) 6

Resolución

Datos:

- $F_{(1)} = 2$
- $F_{(x-1)} = F_{(x)} - 2x$

Reemplazamos los siguientes valores:

$$x=2: \quad F_{(1)} = F_{(2)} - 4$$

$$x=3: \quad F_{(2)} = F_{(3)} - 6$$

$$x=4: \quad F_{(3)} = F_{(4)} - 8$$

$$x=5: \quad F_{(4)} = F_{(5)} - 10$$

$$F_{(1)} + F_{(2)} + F_{(3)} + F_{(4)} = F_{(2)} + F_{(3)} + F_{(4)} + F_{(5)} - 28$$

$$F_{(1)} = F_{(5)} - 28$$

$$2 = F_{(5)} - 28$$

$$2 + 28 = F_{(5)}$$

$$\rightarrow F_{(5)} = 30$$

Luego, nos piden

$$E = \sqrt{F_{(5)} + 6}$$

$$E = \sqrt{30 + 6}$$

$$\therefore E = 6$$

Clave

Problema N.º 18

Sean P y Q dos polinomios, de modo que

$$P_{(2x-4)} = 4x - n$$

$$P_{(Q(x))} = nx \quad y \quad Q_{(4)} = 12$$

¿Cuál es el valor de n ?

- | | | |
|------|-------------------|------|
| A) 6 | B) 7 | C) 5 |
| D) 4 | E) $\frac{32}{5}$ | |

Resolución

Nos piden el valor de n .

Datos:

- $P_{(2x-4)} = 4x - n$ (I)
- $P_{(Q(x))} = nx$ (II)
- $Q_{(4)} = 12$

Reemplazamos $x=4$ en (II).

$$\begin{aligned} P_{(Q(4))} &= 4n \\ P_{(12)} &= 4n \end{aligned} \tag{III}$$

Reemplazamos $x=8$ en (I).

$$P_{(12)} = 32 - n \tag{IV}$$

Luego, igualamos (III) y (IV).

$$4n = 32 - n$$

$$5n = 32$$

$$\therefore n = \frac{32}{5}$$

Clave

Problema N.º 19

Calcule el valor de $P_{(a+b)}$ si se sabe que P es un polinomio lineal y mónico.

$$P_{(x)} = (a^3 - 27)x^2 + (b^3 - 7)x + b - a$$

- | | | |
|-------|-------|------|
| A) 3 | B) 4 | C) 5 |
| D) -4 | E) -5 | |

Resolución

Nos piden $P_{(a+b)}$.

Dato: P es lineal y mónico.

$$P_{(x)} = (a^3 - 27)x^2 + (b^3 - 7)x + b - a$$

P es lineal *P es mónico*

$$\begin{aligned} a^3 - 27 &= 0 & b^3 - 7 &= 1 \\ a^3 &= 27 & b^3 &= 8 \\ a^3 &= 3^3 & b^3 &= 2^3 \\ \rightarrow a &= 3 & \rightarrow b &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } P_{(x)} = x + 2 - 3$$

$$P_{(x)} = x - 1$$

Nos piden $P_{(a+b)} = P_{(5)}$.

$$\therefore P_{(5)} = 5 - 1 = 4$$

Clave

Problema N.º 20

Dados los polinomios

$$f_{(x-2)} = x^2 + 1 \quad y \quad h_{(x+1)} = 3x + 1, \text{ calcule } h_{(f_{(7)})}$$

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) 82 | B) 164 | C) 243 |
| D) 244 | E) 302 | |

Resolución

Nos piden $h_{(f(7))}$

Datos:

$$f_{(x-2)} = x^2 + 1 \quad (\text{I})$$

$$h_{(x+1)} = 3x + 1 \quad (\text{II})$$

Hallamos $f_{(7)}$.

Reemplazamos $x=9$ en (I).

$$f_{(7)} = 9^2 + 1 \rightarrow f_{(7)} = 82$$

Luego, como nos piden $h_{(f(7))} = h(82)$,

reemplazamos $x=81$ en (II).

$$h_{(82)} = 3(81) + 1 \rightarrow h_{(82)} = 244$$

$$\therefore h_{(f(7))} = h_{(82)} = 244$$

Problema N.º 21

Dados los polinomios

$$P_{(x-1)} = x + 3 \quad \wedge \quad Q_{(x+1)} = 2x - 1$$

determine $Q_{(P_{(1)})}$

- | | | |
|-------|------|-------|
| A) 7 | B) 8 | C) 10 |
| D) 12 | E) 9 | |

Resolución

Nos piden $Q_{(P_{(1)})}$.

Datos:

- $P_{(x-1)} = x + 3 \quad (\text{I})$
- $Q_{(x+1)} = 2x - 1 \quad (\text{II})$

Primero, hallamos $P_{(1)}$.

Reemplazamos $x=2$ en (I).

$$P_{(2-1)} = 2 + 3$$

$$P_{(1)} = 5$$

Luego, como nos piden $Q_{(P_{(1)})} = Q_{(5)}$

ahora hallamos $Q_{(5)}$.

Reemplazamos $x=4$ en (II).

$$Q_{(4+1)} = 2(4) - 1$$

$$Q_{(5)} = 7$$

$$\therefore Q_{(P_{(1)})} = Q_{(5)} = 7$$

Clave C

Problema N.º 22

Sea $P_{(x)} = ax + b$ un polinomio lineal, tal que $P_{(2)} = 6$ y $P_{(-1)} = 0$.

Determine $P_{(4)}$.

- | | | |
|-------|------|-------|
| A) 7 | B) 8 | C) 10 |
| D) 12 | E) 9 | |

Resolución

Nos piden $P_{(4)}$.

Datos:

- $P_{(2)} = 6$
- $P_{(-1)} = 0$
- $P_{(x)} = ax + b$

Evaluamos en $P_{(x)}$ los valores 2 y -1.

$$\begin{array}{r} P_{(2)} = 2a + b = 6 \\ P_{(-1)} = -a + b = 0 \\ \hline 2a - (-a) + b - b = 6 \\ 3a = 6 \rightarrow a = 2 \\ b = 2 \end{array}$$

Luego, $P_{(x)} = 2x + 2$.

$$\therefore P_{(4)} = 2(4) + 2 = 10$$

Clave C

Problema N.º 23

Si se sabe que $P_{(x)}$ es un polinomio constante, tal que $P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} = 12$, halle el valor de $P_{(2)} + P_{(4)} + P_{(6)} + \dots + P_{(2014)}$.

- A) 1007 B) 4 C) 2014
D) 3021 E) 4028

Resolución

Nos piden $P_{(2)} + P_{(4)} + P_{(6)} + \dots + P_{(2014)}$.

Datos:

- $P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} = 12$
- $P_{(x)}$ es un polinomio constante.

IMPORTANTE

¿Conoce alguna definición que pueda ser útil en este caso?

$P_{(x)}$ es un polinomio constante.

$$\rightarrow P_{(x)} = k$$

Como

$$P_{(x)} = k \quad (*)$$

además

$$P_{(1)} = k$$

$$P_{(2)} = k$$

$$P_{(3)} = k$$

Por dato, se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} P_{(1)} & + & P_{(2)} & + & P_{(3)} & = & 12 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ k & + & k & + & k & = & 12 \end{array}$$

$$3k = 12 \rightarrow k = 4$$

Reemplazamos $k=4$ en (*).

$$P_{(x)} = 4$$

Nos piden

$$\begin{array}{c} P_{(2)} + P_{(4)} + P_{(6)} + \dots + P_{(2014)} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ 4 + 4 + 4 + \dots + 4 \\ \hline \text{1007 veces} \end{array}$$

$$\therefore 4 \cdot 1007 = 4028$$

**Problema N.º 24**

Si el polinomio

$$P_{(x,y)} = (n+3)x^{n^2+1}y^{n-1} + (n-1)x^{3n}y^{n^2-8}$$

es homogéneo, halle el valor de la suma de sus coeficientes.

- A) 12 B) 8 C) 15
D) 10 E) 20

Resolución

Nos piden la suma de coeficientes de $P_{(x,y)}$.

Dato: $P_{(x,y)}$ es homogéneo.

$$P_{(x,y)} = (n+3)x^{n^2+1}y^{n-1} + (n-1)x^{3n}y^{n^2-8}$$

$$n^2+1+n-1 = 3n+n^2-8$$

$$\rightarrow 8=2n \rightarrow 4=n$$

Entonces tenemos el polinomio

$$P_{(x,y)} = 7x^{17}y^3 + 3x^{12}y^8$$

Suma de coeficientes de $P_{(x,y)}$: $7+3=10$

Por lo tanto, la suma de coeficientes es 10.



Problema N.º 25

Si $f_{(x)}$ es un polinomio lineal, tal que $2f_{(2)} - f_{(1)} = 5$, calcule el valor de $f_{(3)}$.

- A) 0 B) 1 C) 3
D) 5 E) 7

Resolución

Nos piden el valor de $f_{(3)}$.

Datos:

- $f_{(x)}$ es un polinomio lineal
- $2f_{(2)} - f_{(1)} = 5$ (I)

Del dato $f_{(x)}$ es un polinomio lineal

$$f_{(x)} = ax + b$$

Además, en (I)

$$2(a \cdot 2 + b) - (a \cdot 1 + b) = 5$$

$$4a + 2b - (a + b) = 5$$

$$3a + b = 5$$

(II)

Como nos piden

$$f_{(3)} = 3a + b$$

$$\therefore f_{(3)} = 5$$

Clave D

Problema N.º 26

Dado el siguiente polinomio:

$$P_{(x-3)} = 16x^4 - 64x^3 + 2x - 1$$

determine la suma de coeficientes.

- A) -47 B) -45 C) 23
D) 6 E) 7

Resolución

Nos piden la suma de coeficientes.

Dato:

$$P_{(x-3)} = 16x^4 - 64x^3 + 2x - 1 \quad (*)$$

IMPORTANTE

Sea $P_{(x)}$ un polinomio.

Suma de coeficientes de $P_{(x)} = P_{(1)}$.

Entonces reemplazamos $x=4$ en (*).

$$P_{(4-3)} = 16 \cdot 4^4 - 64 \cdot 4^3 + 2(4) - 1$$

$$P_{(1)} = 4^2 \cdot 4^4 - 4^3 \cdot 4^3 + 7$$

$$P_{(1)} = 4^6 - 4^6 + 7$$

$$P_{(1)} = 7$$

Por lo tanto, la suma de coeficientes es 7.

Clave E

Problema N.º 27

Sea P un polinomio, de modo que

$P_{(1-x)} = 3P_{(x)} - kx - 7$ y cuyo término independiente es k .

Calcule la suma de coeficientes.

- A) 4 B) $\frac{2k-7}{3}$ C) $3k+7$
D) 5 E) 20

Resolución

Nos piden la suma de coeficientes de $P_{(x)}$, es decir, $P_{(1)}$.

Datos:

- El término independiente es $k \rightarrow P_{(0)} = k$.
- $P_{(1-x)} = 3P_{(x)} - kx - 7$ (I)

Reemplazamos $x=1$ en (I).

$$P_{(1-1)} = 3P_{(1)} - k \cdot 1 - 7$$

$$\underline{P_{(0)}} = 3P_{(1)} - k - 7$$

$$k = 3P_{(1)} - k - 7$$

$$\frac{2k+7}{3} = P_{(1)} \quad (\text{II})$$

Ahora reemplazamos $x=0$ en (I).

$$P_{(1-0)} = 3P_{(0)} - k \cdot 0 - 7$$

$$P_{(1)} = 3P_{(0)} - 7$$

$$P_{(1)} = 3k - 7$$

Luego, igualamos (II) y (III).

$$\frac{2k+7}{3} = 3k - 7$$

$$2k + 7 = 9k - 21$$

$$28 = 7k$$

$$k = 4$$

Reemplazamos $k=4$ en (III).

$$P_{(1)} = 3(4) - 7 = 5$$

$$\therefore P_{(1)} = 5$$

Problema N.º 28

Dado el polinomio

$$f_{(x)} = x^2 - x + 1, \text{ si existe } \lambda \in \mathbb{R},$$

tal que $f_{(\lambda+1)} - f_{(\lambda-1)} = 10$, calcule $f_{(\lambda)}$.

- A) 7
- B) 10
- C) 13
- D) 21
- E) 25

Resolución

Por dato

$$f_{(x)} = x^2 - x + 1$$

$$f_{(\lambda+1)} = (\lambda+1)^2 - (\lambda+1) + 1$$

$$f_{(\lambda-1)} = (\lambda-1)^2 - (\lambda-1) + 1$$

$$f_{(\lambda+1)} - f_{(\lambda-1)} = (\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2 - (\lambda+1) + (\lambda-1)$$

OCUPACIÓN

$$f_{(\lambda+1)} - f_{(\lambda-1)} = \underline{4\lambda - 2}$$

OCUPACIÓN

$$\rightarrow 4\lambda - 2 = 10 \rightarrow \lambda = 3$$

Nos piden

$$f_{(\lambda)} = f_{(3)} = 3^2 - 3 + 1 = 7$$



Problema N.º 29

Respecto al polinomio P , tal que

$$P_{(x^2)} = 3x^4 - x^6 + 2(x^2 - 1) + 2$$

indique el enunciado correcto.

- A) Es mónico.
- B) Su término independiente es 2.
- C) La suma de sus coeficientes es 6.
- D) Carece de término lineal.
- E) Es un trinomio.

Resolución

Por dato, tenemos

$$P_{(x^2)} = 3x^4 - x^6 + 2(x^2 - 1) + 2$$

$$P_{(x^2)} = 3(x^2)^2 - (x^2)^3 + 2(x^2 - 1) + 2$$

Cambiamos la variable x^2 por x .

$$P(x) = 3x^2 - x^3 + 2(x-1) + 2$$

$$P(x) = 3x^2 - x^3 + 2x$$

Luego, podemos afirmar lo siguiente:

- $P(x)$ no es mónico, pues su coeficiente principal es -1 .
- El término independiente de $P(x)$ es 0 .
- La suma de coeficientes es 4 .
- $P(x)$ es un trinomio, pues $P(x)$ tienen 3 términos.

Problema N.º 30

Dado el polinomio $P(x) = x^2 - x - 2$,

halle el equivalente de la expresión

$$P_{(x-1)} - P_{(x+1)}$$

- A) $2x^2$
 B) $2x$
 C) $4x - 2$
 D) $2x^2 + 2$
 E) 0

Resolución

Por dato

$$P_{(x+1)} = (x+1)^2 - (x+1) - 2$$

$$P_{(x-1)} = (x-1)^2 - (x-1) - 2$$

$$\therefore P_{(x+1)} - P_{(x-1)} = \underbrace{(x+1)^2 - (x-1)^2}_{\text{raíz}} - (x+1) + (x-1)$$

$$\therefore P_{(x+1)} - P_{(x-1)} = 4x - 2$$



C) $4x - 2$
 E) 0

Problema N.º 31

Dada la expresión matemática

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 3 \\ x+1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

halle el valor de $f(f(4)) + f(2)$.

- A) 4
 B) 8
 C) 2
 D) 9
 E) 5

Resolución

Primero, hallamos $f(2)$:

$$x=2: f(2) = 2+1 \rightarrow f(2)=3$$

Luego, hallamos $f(f(4))$:

$$x=4: f(4) = 4-1 \rightarrow f(4)=3$$

Finalmente

$$f(f(4)) = f(3) = 3-1 = 2$$

Nos piden

$$f(f(4)) + f(2) = 2+3=5$$

Clave

Problema N.º 32

Dado el polinomio $P_{(2x+3)} = 4x + 7$,

al hallar $P_{(3x+5)}$ se obtiene $ax+b$.

¿Cuál es el valor de $a+b$?

- A) 17
 B) 13
 C) 16
 D) 20
 E) 30



Resolución

Por dato

$$P_{(2x+3)} = 4x + 7$$

$$P_{(2x+3)} = 2(2x+3) + 1$$

Cambiemos la variable $2x+3$ por $3x+5$.

$$\rightarrow P_{(3x+5)} = 2(3x+5) + 1$$

$$P_{(3x+5)} = 6x + 11 \quad (\text{I})$$

Por dato

$$P_{(3x+5)} = ax + b \quad (\text{II})$$

Luego, igualamos (I) y (II).

$$6x + 11 = ax + b$$

$$\rightarrow a = 6; b = 11$$

$$\therefore a + b = 17$$

Problema N.º 33

Si la suma de coeficientes del polinomio

$$P_{(x)} = (2x - 1)^3(x + b)$$

es igual al término independiente, evalúe $P_{(-b)}$.

- A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) 0
 D) -1 E) 1

ResoluciónNos piden el valor de $P_{(-b)}$.

Datos:

- $P_{(x)} = (2x - 1)^3(x + b)$ (*)
- La suma de coeficientes de $P_{(x)}$ es igual al término independiente de $P_{(x)}$.

IMPORTANTE

Si $P_{(x)}$ es un polinomio, entonces la suma de coeficientes es $P_{(1)}$ y el término independiente es $P_{(0)}$.

Del dato

$$P_{(1)} = P_{(0)}$$

$$(2(1) - 1)^3(1 + b) = (2(0) - 1)^3(0 + b)$$

$$1 \cdot (b + 1) = (-1)^3 \cdot b$$

$$b + 1 = -1 \cdot b$$

$$b + 1 = -b$$

$$b + b = -1$$

$$2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

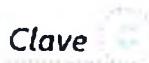
$$\frac{1}{2} = -b$$

Nos piden

$$P_{(-b)} = P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$P_{(-b)} = P_{\left(\frac{1}{2}\right)} = (1 - 1)^3 \cdot 0$$

$$\therefore P_{(-b)} = 0$$

**Problema N.º 34**

Dado el polinomio

$$P_{(2x-1)} = 4x^2 - 1$$

halle el valor de $P_{(0)} + P_{(3)}$.

- A) 1 B) 3 C) 2
 D) 4 E) 15

Resolución

Nos piden el valor de $P_{(0)} + P_{(3)}$.

Dato:

$$P_{(2x-1)} = 4x^2 - 1 \quad (*)$$

Entonces reemplazamos $x = \frac{1}{2}$ en (*).

$$P_{\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$P_{(1-1)} = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1$$

$$P_{(0)} = 0$$

Luego, reemplazamos $x=2$ en (*).

$$P_{(2(2)-1)} = 4(2)^2 - 1$$

$$P_{(4-1)} = 4 \cdot 4 - 1$$

$$P_{(3)} = 15$$

$$\therefore P_{(0)} + P_{(3)} = 0 + 15 = 15$$

Problema N.º 35

Sea $P_{(x)} = x^2 - 9$ y $Q_{(x)} = P_{(x-1)}$.

¿Para qué valores de x , $Q_{(x)} = 0$?

- A) 4 v 2
- B) 4 v -2
- C) -4 v -2
- D) -4 v 2
- E) 3 v -3

Resolución

Datos:

$$Q_{(x)} = P_{(x-1)}$$

$$P_{(x)} = x^2 - 9$$

$$P_{(x-1)} = (x-1)^2 - 9$$

$$Q_{(x)} = (x-1)^2 - 9 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\therefore x=4 \vee x=-2$$

Clave

Clave

1. Complete las siguientes tablas:

• $f(x) = 2(x-1)^2$

• $g(x) = 4x+1$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$g(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

2. Evalúe el siguiente polinomio en los valores indicados:

$f(x) = 2x+1$

$f(1) =$

$f(-2) =$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

3. Evalúe el siguiente polinomio en los valores indicados:

$f(x) = x^2 + 2x$

$f(0) =$

$f(3) =$

$f(-3) =$

4. Evalúe el siguiente polinomio en los valores indicados:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{si } x < 0 \\ x+1; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$f(-2) =$

$f(-1) =$

$f(0) =$

$f(1) =$

5. Use el polinomio para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

a. $f(x) = x^2 + 1$

$f(x+2) =$

$f(x) + f(2) =$

b. $f(x) = 5x - 1$

$f(2x) =$

$2f(x) =$

c. $f(x) = 6x - 18$

$f\left(\frac{x}{3}\right) =$

$f(x) =$
3

Dada la expresión $f(x) = x^2$,

determine $f(2) \cdot f(4) \cdot f(8)$.

A) 2^{10}

B) 2^{12}

C) 2^8

D) 2^{20}

E) 2^{14}

7. Si se cumple que

$P_{(x+1)} = x+7$, determine $P_{(a)}$.

A) $a+7$

B) $a+6$

C) $a+5$

D) $a+8$

E) $a-6$

8. Si $f_{(x,y)} = x^2 + y - xy$, indique el valor numérico de $f_{(4;3)}$.

A) 12

B) 7

C) 19

D) -12

E) -7

9. Dado el polinomio lineal

$$P(x) = 2x + 3a$$

tal que $P(a) = 50$, indique $P(x)$.

- A) $2x$ B) $2x+5$ C) $5x+30$
 D) $2x+30$ E) $2x-30$

10. Sea $P(x) = 3(x+2)^2 + 5(x-1)^4 + 3x + a$, tal que su término independiente es 20. Indique el valor de a .

- A) 5 B) 0 C) 3
 D) 1 E) -3

11. Sea $P(x) = 5x^4 + 2(2x+1)^2 + 7x + 7$.

Determine la suma de coeficientes de $P(x)$.

- A) 21 B) 7 C) 37
 D) 17 E) 0

12. Sea $f(x)$ un polinomio lineal, tal que

$$f(5) = 0 \quad \wedge \quad f(7) = 6$$

Indique el producto de coeficientes.

- A) -45 B) 45 C) 30
 D) -30 E) 40

13. Si el polinomio cuadrático

$$P(x) = (a-5)x^2 + ax + 2a \text{ es mónico,}$$

determine $P(a)$.

- A) 0 B) -84 C) 36
 D) 84 E) 72

14. Sea $P_{(x-2)} = 5x^2 + 3x + 7$.

Indique el valor de

suma de coeficientes de P
término independiente de P

- A) $\frac{15}{7}$ B) $\frac{61}{23}$ C) $\frac{61}{33}$

- D) $\frac{33}{61}$ E) $\frac{61}{7}$

15. Sean los polinomios cuadráticos

$$P(x) = 5x^2 + ax + 7; f(x) = ax^2 + 10x + a$$

$$\text{y } H(x) = P(x) + f(x),$$

de modo que $H(x)$ es un polinomio mónico.

Determine $H(x)$.

- A) $x^2 + 6x$ B) $x^2 + 6x + 3$ C) $x^2 + 3x + 6$
 D) $x^2 - 4x + 7$ E) $x^2 + 7x + 4$

16. Si la suma de coeficientes del polinomio cuadrático $P(x) = ax^{b-2} + bx + a$ es 12, halle su término independiente.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

17. Calcule el grado del polinomio

$$P(x) = 3x^{2m} + x^{m+2} - x^{m^2} + 4m$$

si su término independiente es 12.

- A) 6 B) 5 C) 4
 D) 2 E) 9

18. A partir del polinomio

$$P(x) = 243x^{85} - x^{90} + 3x + 4$$

calcule $P_{(3)}$.

- A) 4 B) 9 C) 11
D) 13 E) 15

19. Si $P(\sqrt{x}+1) = 2x-1$, calcule $P_{(3)}+P_{(5)}$.

- A) 4 B) 7 C) 16
D) 38 E) 31

20. Sea $f(x)$ un polinomio lineal, tal que

$$f_{(4)}=0 \quad \wedge \quad f_{(6)}=10. \text{ Determine } f_{(x)}.$$

- A) $5x$ B) $5x-20$ C) $5x+20$
D) $4x-16$ E) $2x-8$

21. Si el siguiente polinomio cuadrático es mónico, determine $P_{(2)}$.

$$P(x) = (a-6)x^2 + 2ax + 7$$

- A) 2 B) 20 C) 30
D) 39 E) 49

22. Si $P(x)$ es un polinomio, tal que

$P_{(x+1)} = 3P_{(x)} - x + 1$, determine la suma de sus coeficientes si su término independiente es 3.

- A) 4 B) 7 C) 8
D) 10 E) 3

23. Si $P_{(x-3)} = x+2$ y $P_{(x-1)} = ax+b$,

halle ab .

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

24. Si se cumple que

$$P_{(f(x))} = 4x+13 \quad \text{y} \quad P(x) = 2x+7,$$

halle el polinomio $f_{(x)}$.

- A) $2x+7$ B) $2x+3$ C) $4x+3$
D) $4x+7$ E) $2x+6$

25. Sea $P(x) = (a-3)x^2 + (b+2)x + 5$ un polinomio lineal y mónico. Calcule $\sqrt{a-b}$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

26. ¿Para qué valor de n la expresión

$$P(x) = x^5 - 7x^{n/6} + x^{8-n} + 5$$

es un polinomio?

- A) 6 B) 3 C) 12
D) 8 E) 4

27. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 12$,

determine el valor numérico de

$$P_{(1)} + P_{(-1)} + P_{(2)} + P_{(-2)} + \dots + P_{(5)} + P_{(-5)}$$

- A) 0 B) 6 C) 2
D) 24 E) 120

28. Dado el polinomio $f_{(x+3)}=x+7$,

reduzca la expresión $\frac{f(a)+f(-a)}{f(0)}$.

- A) 1 B) 0 C) 8
D) 2 E) -2

29. Dada la expresión $P_{(x^2)}=3x^4+7x^2+1$,
indique $P_{(x)}$.

- A) $3x^2+7$ B) $3x^2+7x$ C) $3x^2+7x+3$
D) $7x^2+3x+1$ E) $3x^2+7x+1$

30. Sea f una expresión matemática, de modo que $f_{(x)}=f_{(x-1)}+f_{(x-2)}$.

Calcule el valor de $f_{(2)}-f_{(0)}$ si se sabe que $f_{(1)}=4$.

- A) -4 B) 1 C) 0
D) 4 E) 2

31. Sea el polinomio $P_{(x+2)}=ax^2+bx+c$.

Si $P_{(x)}=3x^2-5x-2$, ¿cuál es el valor de abc ?

- A) 12 B) 6 C) 0
D) 21 E) -10

32. Dada la expresión matemática

$S_{(x^2+1)}=x^2+x$; $x \geq 0$, halle $S_{(x)}$.

- A) $S_{(x)}=x+1$
B) $S_{(x)}=x+\sqrt{x}-1$
C) $S_{(x)}=x-\sqrt{x}+1$
D) $S_{(x)}=x+\sqrt{x-1}+1$
E) $S_{(x)}=x+\sqrt{x-1}-1$

33. Dada la identidad de polinomios

$$(2x-1)A + (x-2)B = 4x+1$$

calcule el valor de $A+B$.

- A) -1 B) 0 C) 2
D) 1 E) 3

34. Halle el menor valor de $m+n$ si se sabe que el polinomio

$$P_{(x)}=(m-3)x^2+(n^2-1)x+m^{n+1}-a$$

es idénticamente nulo.

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 5

35. Sea P un polinomio, de modo que

$$P_{(x,y)}=4x^{n-3}y^{n-1}+9x^{n+1}y^{5-n}$$

Calcule el valor de

$$\text{GR}_{x(P)} + \text{GR}_{y(P)}$$

- A) 10 B) 9 C) 6
D) 8 E) 4

36. Calcule el coeficiente del monomio

$$P_{(x,y)}=abx^{a^2-b^2}y^{a+b}$$

si se sabe que el grado relativo con respecto a x es 40 y el grado relativo con respecto a y es 10.

- A) 33 B) 21 C) 18
D) 10 E) 12

37. En el monomio $H_{(x,y)} = 6(m-1)x^{n+3}y^{3m}$, el GA es 15 y el GR_y es igual al coeficiente. Halle el valor de mn .

- A) 12 B) 34 C) 42
D) 50 E) 63

38. Determine el valor de $m+n$ si se sabe que el polinomio

$$P_{(a; b; c)} = 5a^{m-1}b^3 + 4a^{n+2}b^4 + c^8$$

es homogéneo.

- A) 3 B) 5 C) 8
D) 7 E) -5

39. Halle el grado absoluto del polinomio homogéneo P si se sabe que GR_x es menor que GR_y en dos unidades.

$$P_{(x,y)} = 3x^{m+n}y^n + 2x^{m+6}y^{n+4}$$

- A) 20 B) 22 C) 23
D) 21 E) 18

40. Determine el grado absoluto del polinomio T .

$$T_{(x,y)} = (x^2)^{m-2} + x^{m-5}y^{m+2} - 2y^{7-m}$$

- A) 9 B) 6 C) 5
D) 3 E) 2

41. Determine la suma de coeficientes y el término independiente, respectivamente, del polinomio $P_{(x-1)} = (2x-3)(2x+4)(x+2)+5$.

- A) 37 y -13 B) 15 y 8 C) 36 y -4
D) 26 y -18 E) 44 y -15

42. Sean P y f dos polinomios, de modo que

$$P_{(x+3)} = 5x+10$$

$$P_{(f(x)-3)} = 15x+5$$

Calcule el valor de $P_{(f(1))}$.

- A) 35 B) 45 C) 75
D) 18 E) 15

43. Si se sabe que $P_{(x+1)} = P_{(x)} + x^2 + 2$,

halle el valor de $P_{(11)} - P_{(0)}$.

- A) 403 B) 207 C) 421
D) 395 E) 407

44. Si tenemos que

$$P_{(x-1)} = x^2 + 1$$

calcule la expresión equivalente de

$$P_{(x+1)} - P_{(x)}$$

- A) $3x+2$ B) $2x+1$ C) $2x+3$
D) $2x-3$ E) $3x+1$

45. Si se tiene que

$$F_{(x^{2n})} = \frac{1}{x^{4n} + 2x^{2n}}$$

halle el valor de

$$S = F_{(1)} + F_{(3)} + F_{(5)} + \dots + F_{(11)}$$

- A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{12}{11}$
D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{6}{13}$

46. Si $f(x) = 2x + 1$, además, se cumple la identidad $f(f(x)) \equiv P(x) + f(x-1)$,

halle la expresión $P_{(x+1)}$.

- A) $2x + 7$
- B) $2x + 6$
- C) $2x + 5$
- D) $2x + 4$
- E) $2x + 3$

47. Se sabe que $A_{(x)} = 2x + 5$ y $A(B_{(x+1)}) = x + 4$.

Determine $B_{(x)}$.

- A) $\frac{x-1}{2}$
- B) $\frac{x-2}{2}$
- C) $\frac{x+1}{2}$
- D) $\frac{x-2}{3}$
- E) $\frac{x-1}{3}$

48. Dada la expresión matemática

$$L_{(x+1)} = (x+2)^2 + 2010$$

determine el equivalente de $\frac{L_{(x)} - L_{(x-2)}}{4}$.

- A) $x-1$
- B) $\frac{x}{2}$
- C) $4x$
- D) x
- E) 1

49. Si $f_{(x-1)} = x^2 + 2x$, ¿cuál es el valor de $f_{(5)}$?

- A) 10
- B) 51
- C) -12
- D) 48
- E) -23

50. Si $f_{(1)} = 0$, tal que $f_{(x)} = x^4 + (n-4)x^3 - 5x^2 + n$, determine el término independiente de dicho polinomio.

- A) -4
- B) -5
- C) 5
- D) 6
- E) 4

Claves

1	*	8	B	15	B	22	D	29	E	36	B	43	E	50	E
2	*	9	D	16	D	23	B	30	D	37	A	44	C		
3	*	10	C	17	E	24	B	31	C	38	C	45	E		
4	*	11	C	18	D	25	A	32	E	39	B	46	B		
5	*	12	A	19	D	26	A	33	D	40	A	47	C		
6	B	13	D	20	B	27	E	34	C	41	A	48	D		
7	B	14	C	21	D	28	D	35	D	42	A	49	D		

* Problema sin alternativas

CAPÍTULO 5



DIVISIÓN DE POLINOMIOS



En la naturaleza podemos observar objetos que si los separamos en dos partes, estas se ven iguales desde un lado o desde el otro; esto es lo que comúnmente llamamos simetría. Lo vemos en las formas de las mariposas, en las colmenas de las abejas, en las flores, en los cristales, en los reflejos en el agua, etc. Podemos estudiar la simetría desde una perspectiva geométrica y también desde el álgebra mediante el estudio de los llamados grupos simétricos. En el álgebra, un grupo es un conjunto en el cual está definida una operación, la cual posee ciertas propiedades; un ejemplo es el conjunto de los números enteros respecto a la operación de adición, pero estos no solo pueden sumarse, sino también restarse, multiplicarse o dividirse entre ellos. En el caso de la división de números enteros, esta sirve de base para definir la división de polinomios. Aunque de una manera no tan evidente, note que cierta parte de las matemáticas, que parece muy abstracta, está relacionada con la realidad.

Aprendizajes esperados

- Entender el significado de dividir dos polinomios.
- Conocer los tipos de división y las propiedades relacionadas a los grados de los polinomios involucrados en la división.
- Conocer los métodos de división de Horner y Ruffini, y también el método para calcular directamente el residuo.
- Conocer un caso especial de división de polinomios a cuyo cociente se le conoce como cociente notable.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

La división de polinomios es similar a la división de números enteros que aprendemos en la primaria. Mediante su estudio podemos ver las similitudes y cómo la idea de división puede extenderse de los números a los polinomios. Por otro lado, en el proceso de la resolución de ecuaciones e inequaciones, muchas veces será necesario efectuar divisiones entre polinomios.

División de polinomios

Consiste en dividir el polinomio $D_{(x)}$, llamado dividendo, entre otro polinomio $d_{(x)}$, llamado divisor. Consideraremos que el grado de $D_{(x)}$ es mayor o igual que el grado de $d_{(x)}$.

1. DEFINICIÓN

Dividir $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$ consiste en hallar otros dos polinomios, $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$, llamados cociente y residuo, respectivamente, tal que se cumpla que

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$

donde $R_{(x)}$, que hemos llamado residuo, puede ser cero o distinto de cero. En caso sea distinto de cero, debe ser de grado menor al grado del divisor.

1.1. Notación

La división $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$ la representamos como

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} \quad \begin{array}{l} \text{dividendo} \\ \text{divisor} \end{array}$$

La idea cuando dividimos polinomios es encontrar el cociente $q_{(x)}$ y el residuo $R_{(x)}$.

Dividimos $D_{(x)}$
entre $d_{(x)}$

$$\begin{array}{c|c} D_{(x)} & d_{(x)} \\ R_{(x)} & q_{(x)} \end{array}$$

y debemos
calcular $D_{(x)}$ y $q_{(x)}$

Calculamos $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ de modo que se cumpla la relación

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$

a la que llamamos identidad de la división.

También debe cumplirse la condición que establece que cuando $R_{(x)} \neq 0$, el grado del residuo es menor al grado del divisor.

A esta condición le llamamos condición del residuo, y juega un rol importante en la división de polinomios, ya que garantiza que el cociente y el residuo serán únicos.

APLICACIÓN 1

Divida $\frac{x^2+2}{x+3}$.

RESOLUCIÓN

Representamos esta división en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c} \text{dividendo} \rightarrow x^2+2 \quad | \quad x+3 \quad \text{divisor} \\ R_{(x)} \quad | \quad q_{(x)} \end{array}$$

Debemos hallar el cociente $q_{(x)}$ y el residuo $R_{(x)}$ de modo tal que cumplan la identidad de la división, la cual es

$$x^2+2=(x+3)q_{(x)}+R_{(x)}$$

Si tenemos en cuenta que $(x+3)(x-3)=x^2-9$ y que si le sumamos 11 se obtiene x^2+2 , tendremos que

$$x^2+2=(x+3)(x-3)+11$$

De donde se deduce que el cociente $q_{(x)}$ es $x-3$ y el residuo $R_{(x)}$ es 11.

Observe que el residuo $R_{(x)}=11$, que es un polinomio constante (grado cero), tiene grado menor al divisor $d_{(x)}=x+3$, que es un polinomio lineal (grado uno). Es decir, cumple la condición del residuo.

APLICACIÓN 2

Divida $\frac{x^3+5x+2}{x^2+4}$.

RESOLUCIÓN

Representamos esta división en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c} \text{dividendo} \rightarrow x^3+5x+2 \quad | \quad x^2+4 \quad \text{divisor} \\ R_{(x)} \quad | \quad q_{(x)} \end{array}$$

Importante



Condición del residuo

Cuando la división es inexacta se debe cumplir que

$$^o[R_{(x)}] < ^o[d_{(x)}]$$

No olvide



Identidad de la división

En la división de polinomios

$$\begin{array}{c} D_{(x)} \quad | \quad d_{(x)} \\ R_{(x)} \quad | \quad q_{(x)} \end{array}$$

Se cumple que

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$

A esta relación se le llama **identidad de la división**.

Debemos hallar el cociente $q_{(x)}$ y el residuo $R_{(x)}$ de modo tal que cumplan la identidad de la división, la cual es

$$x^3 + 5x + 2 = (x^2 + 4)q_{(x)} + R_{(x)}$$

Si multiplicamos $(x^2 + 4)$ por x , se obtiene $x^3 + 4x$; y si a este resultado le sumamos $x + 2$, se obtiene $x^3 + 5x + 2$. Es decir

$$x^3 + 5x + 2 = (x^2 + 4)(x) + x + 2$$

De donde se deduce que su cociente es $q_{(x)} = x$ y su residuo es $R_{(x)} = x + 2$.

Observe que el residuo $R_{(x)} = x + 2$, que es un polinomio lineal (grado 1), tiene grado menor al divisor $d_{(x)} = x^2 + 4$, que es cuadrático (grado 2).

Se cumple la condición del residuo.

APLICACIÓN 3

Divida $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$.

RESOLUCIÓN

Representamos esta división en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|cc} \text{dividendo} & x^2 + 5x + 6 \\ \hline R_{(x)} & | q_{(x)} & \text{divisor} \end{array}$$

Debemos hallar el cociente $q_{(x)}$ y el residuo $R_{(x)}$ de modo tal que cumplan la identidad de la división, la cual es

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)q_{(x)} + R_{(x)}$$

Observe que $(x + 2)(x + 3)$ es exactamente igual a $x^2 + 5x + 6$.

Entonces tendremos

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) + 0$$

Importante

La condición del residuo garantiza que el cociente y el residuo son únicos.

Luego, el cociente es $q_{(x)} = x + 3$ y el residuo es $R_{(x)} = 0$.

2. TIPOS DE DIVISIÓN

2.1. División exacta

Se llama así cuando el residuo $R(x)$ es cero.

Esquema

$$\begin{array}{c|c} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & q(x) \\ 0 & \end{array}$$

Identidad de la división

$$\boxed{D(x) = d(x)q(x) + 0}$$

\downarrow
 $R(x)$

Ejemplo

En la siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 25 & x+5 \\ \hline 0 & x-5 \end{array}$$

se cumple la identidad de la división, la cual es

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5) + 0$$

$\downarrow D$ $\downarrow d$ $\downarrow q$ $\downarrow R$

El residuo es $R(x)=0$, así que es una división exacta.

2.2. División inexacta

Se llama así cuando el residuo $R(x)$ es diferente de cero.

Esquema

$$\begin{array}{c|c} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & q(x) \\ \neq 0 & \end{array}$$

Identidad de la división

$$\boxed{D(x) = d(x)q(x) + R(x)}$$

\downarrow
 $\neq 0$

Cuidado!

- En la división exacta, cuando decimos que el residuo es cero, nos referimos a que el residuo es el polinomio cero.
- En la división inexacta, cuando decimos que el residuo es distinto de cero, significa que el residuo no es el polinomio cero, lo cual implica que deberá ser un polinomio constante (no nulo), lineal, cuadrático o de mayor grado.

No olvide

En una división de números enteros positivos:

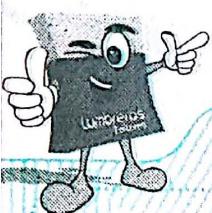
$$\begin{array}{r|l} D & d \\ R & q \end{array}$$

se cumple que

$$D = d \times q + R$$

algoritmo de la división

Además, se cumple que $R < d$.

**Dato curioso:**

- Cuando el dividendo y el divisor tienen el mismo grado, el cociente será un polinomio constante.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 2x^2+3x+1 \\ \hline x-9 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2+x+5 \\ \hline 2 \end{array}$$

Observe:

$$\left. \begin{array}{l} D_{(x)}=2x^2+3x+1 \\ d_{(x)}=x^2+x+5 \end{array} \right\} \text{dividendo} \quad \text{divisor}$$

El cociente $q_{(x)}=2$ es un polinomio constante.

**Reto al saber:**

Halle el cociente y el residuo de la siguiente división:

$$\frac{2x^2+7}{x^2+1}$$

Ejemplo

En la siguiente división:

$$\begin{array}{r} x^2+3x+5 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+3 \\ \hline x \end{array}$$

se cumple la identidad de la división, la cual es

$$x^2+3x+5 = \overbrace{(x+3)(x)+5}^{\text{D}_{(x)} \text{ } d_{(x)} \text{ } q_{(x)} \text{ } R_{(x)}}$$

El residuo es $R_{(x)}=5$, el cual es distinto de cero, así que es una división inexacta.

3. PROPIEDADES

- El cociente y el residuo de una división de polinomios son únicos.
- En la división de polinomios, $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$, el grado del cociente $q_{(x)}$ se calcula como

$${}^o[q_{(x)}] = {}^o[D_{(x)}] - {}^o[d_{(x)}]$$

El símbolo ${}^o[]$ lo usamos para indicar el “grado de un polinomio”. Esta propiedad nos indica que el grado del cociente se obtiene restando el grado del dividendo con el grado del divisor.

Ejemplos

- En la división $\frac{x^5+3x+2}{x^2+6}$, el dividendo $D_{(x)}=x^5+3x+2$

tiene grado 5 y el divisor $d_{(x)}=x^2+6$ tiene grado 2.

Calculamos el grado del cociente como

$${}^o[q_{(x)}] = {}^o[D_{(x)}] - {}^o[d_{(x)}]$$

$${}^o[q_{(x)}] = 5 - 2$$

$${}^o[q_{(x)}] = 3$$

Por lo tanto, el cociente $q_{(x)}$ tiene grado 3, es decir, es una cúbica.

2. En la división $\frac{x^6+2x^3+4x^2+7x+1}{2x+3}$,

el dividendo $D_{(x)}=x^6+2x^3+4x^2+7x+1$ tiene grado 6 y el divisor $d_{(x)}=2x+3$ tiene grado 1.

Calculamos el grado del cociente como

$$\circ[q_{(x)}] = \circ[D_{(x)}] - \circ[d_{(x)}]$$

$$\circ[q_{(x)}] = 6 - 1$$

$$\circ[q_{(x)}] = 5$$

Por lo tanto, el cociente es de grado 5.

- c. En una división de polinomios, cuando el residuo es distinto de cero, su grado como máximo podrá ser un grado menos que el grado del divisor. Es decir

$$\circ[R_{(x)}]_{\max} = \circ[d_{(x)}] - 1$$

Esta propiedad se deduce de la condición del residuo, que establece que este no puede ser de grado mayor al divisor y tampoco puede tener el mismo grado. Solo es posible que el residuo sea de grado menor al divisor y, por ende, como máximo será de un grado menos.

Ejemplo

En la siguiente división:

$$\begin{array}{c|cc} P_{(x)} & x^3 + 5 \\ \hline R_{(x)} & q_{(x)} \end{array} \quad \text{divisor de grado 3}$$

el residuo $R_{(x)}$ tiene las siguientes posibilidades:

- Puede ser que $R_{(x)}=0$ (división exacta).

- Puede ser que $R_{(x)} \neq 0$ y, en tal caso, de acuerdo a esta propiedad, el residuo como máximo será de un grado menos que el divisor; es decir,

$$\circ[R_{(x)}]_{\max} = \circ[d_{(x)}] - 1$$

$$\circ[R_{(x)}]_{\max} = 3 - 1$$

$$\circ[R_{(x)}]_{\max} = 2$$

Entonces $R_{(x)}$ como máximo será de grado 2, lo que nos da las siguientes opciones:

- $R_{(x)}$ puede ser constante (grado 0).
- $R_{(x)}$ puede ser lineal (grado 1).
- $R_{(x)}$ puede ser cuadrático (grado 2).

El residuo toma una y solo una de las posibilidades que hemos mencionado.

3.1 Forma del residuo

En los problemas de división de polinomios, un caso muy común es cuando el divisor es cuadrático, y en tal caso nos será útil saber la forma del residuo si queremos calcularlo.

A partir de la propiedad anterior, afirmamos lo siguiente:

Si el divisor es cuadrático, la forma del residuo es $R_{(x)}=ax+b$.

APLICACIÓN 4

Calcule el residuo de la siguiente división:

$$\frac{x^4+1}{(x-1)(x-2)}$$

RESOLUCIÓN

Como el divisor $d_{(x)}=(x-1)(x-2)$ es cuadrático, entonces su residuo será de la forma $R_{(x)}=ax+b$.

Lo que no conocemos de este residuo son los valores de a y b , los cuales calcularemos usando la identidad de la división.

Tenemos que

$$R_{(x)} = \underbrace{ax+b}_{\text{residuo}} \quad \left| \begin{array}{c} x^4+1 \\ (x-1)(x-2) \\ q_{(x)} \end{array} \right.$$

Se cumple la identidad de la división, la cual es

$$x^4+1 = (x-1)(x-2)q_{(x)} + ax+b$$

Debido a que es una identidad, con cualquier valor de x se cumplirá la igualdad numérica.

Le daremos valores a x de tal modo que el divisor resulte igual a cero.

Hallamos dichos valores.

$$\begin{aligned} d_{(x)} &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x-1=0 &\vee x-2=0 \\ x=1 &\vee x=2 \end{aligned}$$

Obtenemos que estos valores de x son 1 y 2, los cuales reemplazaremos en la identidad de la división.

$$x^4+1 = \underbrace{(x-1)(x-2)}_0 q_{(x)} + ax+b$$

$$x=1: 1^4+1 = (1-1)(1-2)q(1) + a(1) + b$$

$$\rightarrow 2 = \underbrace{(0)(-1)q(1)}_0 + a + b$$

$$\rightarrow a+b=2$$

$$x=2: 2^4+1 = (2-1)(2-2)q(2) + a(2) + b$$

$$\rightarrow 17 = \underbrace{(1)(0)q(2)}_0 + 2a + b$$

$$\rightarrow 2a+b=17$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a+b=17 & (\text{I}) \\ a+b=2 & (\text{II}) \end{cases}$$

Importante

En una identidad de polinomios, se cumple la igualdad numérica con cualquier valor numérico que se le otorgue a la variable.

Cuidado!

La razón por la que el divisor se iguala a cero en las aplicaciones 4 y 5 es porque el cociente no se conoce y por ello resulta conveniente darle valores a la variable de modo que el cociente se cancele.

$$D_{(x)} = \underbrace{d_{(x)}}_{0} q_{(x)} + R_{(x)}$$

Igualando $d_{(x)}=0$, el cociente $q_{(x)}$ se cancela.

4. MÉTODO DE DIVISIÓN DE HORNER

Este método sirve para calcular el cociente y el residuo de una división de polinomios.

Ejemplo

Dividamos $\frac{5x^3 + 3 + 2x^4 + 8x^2}{3 + 2x^2 - x}$.

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Ordenamos el dividendo y el divisor en forma decreciente.

Dividendo:

$$D_{(x)} = 5x^3 + 3 + 2x^4 + 8x^2$$

Lo ordenamos.

$$D_{(x)} = 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 3$$

Divisor:

$$d_{(x)} = 3 + 2x^2 - x$$

Lo ordenamos.

$$d_{(x)} = 2x^2 - x + 3$$

2. Si le falta términos al dividendo y al divisor, los completamos con coeficiente cero.

Como al dividendo le falta un término, que es el término lineal, entonces lo completamos de la siguiente manera:

$$D_{(x)} = 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 0x + 3$$

se completa con coeficiente cero
el término que falta

3. Colocamos los coeficientes del dividendo y el divisor en un esquema como se indica a continuación:

		coeficientes del dividendo					
		coeficientes del divisor			coeficientes del cociente		coeficientes del residuo
		2	2	5	8	0	3
		+1					
		-3					

Se les cambia de signo
linea vertical
dos términos porque el divisor tiene grado 2

- En el caso del divisor, a sus coeficientes se les cambia de signo, a excepción del primero.

En el método de Horner, a los coeficientes del divisor se les cambia de signo con la única excepción del primer coeficiente que mantendrá su signo.

Cuidado!

Importante

Esquema de Horner

$$\begin{array}{c} a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \\ \hline b_0 x^2 + b_1 x + b_2 \end{array}$$

b_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$-b_1$					
$-b_2$					
	c_0	c_1	c_2	d_0	d_1
	coeficientes del cociente			coeficientes del residuo	

El cociente es $q_{(x)} = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$.

El residuo es $R_{(x)} = d_0 x + d_1$.

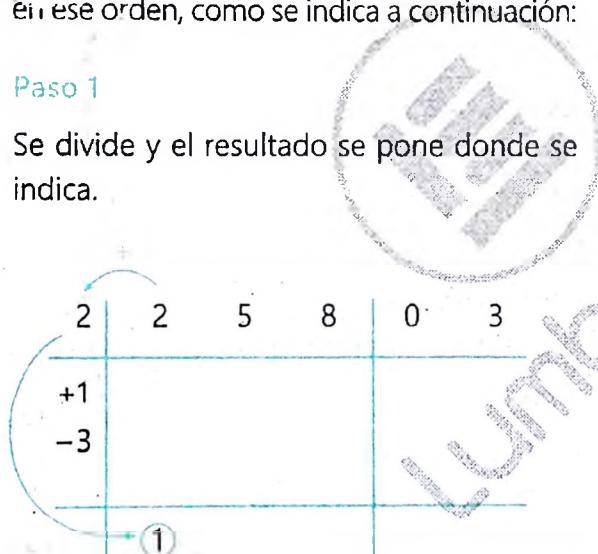
Observe que hay una línea vertical que separa los coeficientes del cociente de los coeficientes del residuo. Dicha línea se traza dejando tantos términos en el lado derecho del esquema como lo indica el grado del divisor.

En el esquema, el divisor tiene grado 2 y por eso la línea se ha trazado dejando dos términos.

- Ahora comenzamos con el proceso operativo. Este proceso consiste en tres pasos, los cuales son dividir, multiplicar y sumar, en ese orden, como se indica a continuación:

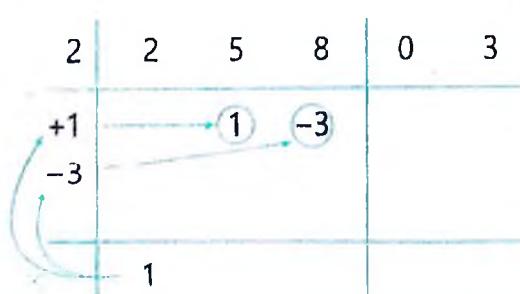
Paso 1

Se divide y el resultado se pone donde se indica.



Paso 2

Se multiplica y los resultados se ponen donde se indica.

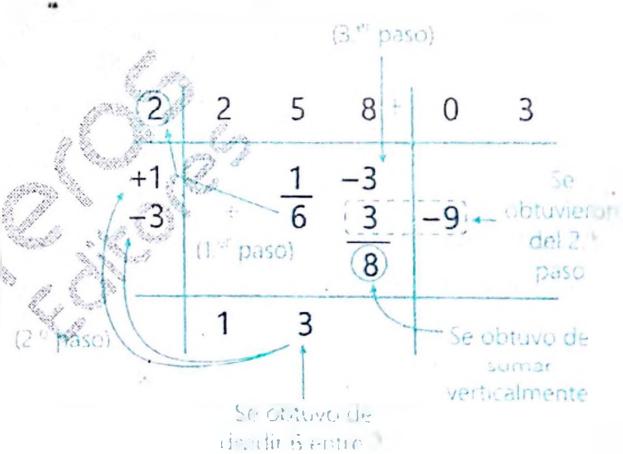


Paso 3

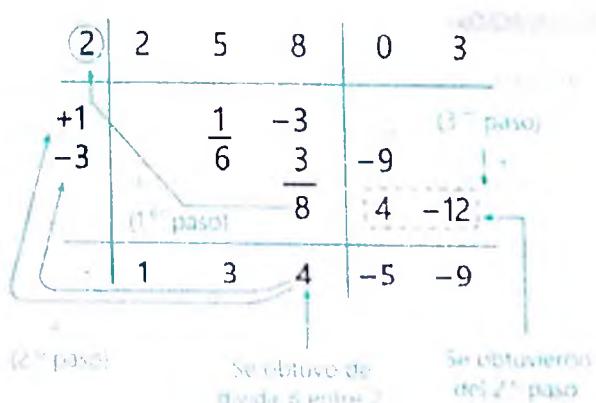
Se suma tal como se indica.

2	2	5	8	0	3
+1		$\frac{1}{6}$	-3		
-3		$\frac{6}{6}$			
			1		

- Este proceso de tres pasos lo repetiremos sucesivamente hasta llegar al final del esquema.



Nuevamente aplicaremos este proceso operativo.



Cuando lleguemos al final del esquema, sumaremos verticalmente las columnas que están a la derecha de la línea vertical y pondremos los resultados donde van los coeficientes del residuo y con eso termina el proceso operativo.

	2	5	8	0	3
+1					
-3					
	1	6	3	-9	
				4	-12
	1	3	4	-5	-9

coeficientes del cociente coeficiente del residuo

6. Finalmente, obtenemos que el cociente de la división es $q(x)=x^2+3x+4$ y su residuo es $R(x)=-5x-9$.

APLICACIÓN 7

$$\text{Divida } \frac{x^4+2x^3+7x^2-9x+2}{x^2-2x+3}.$$

RESOLUCIÓN

El dividendo y el divisor ya están ordenados en forma decreciente, además, observe que no les falta ningún término.

Tenemos que

- $D(x)=x^4+2x^3+7x^2-9x+2$
- $d(x)=1 \cdot x^2-2x+3$

Aplicamos el método de Horner.

1	1	2	7	-9	2
+2					
-3					
	2	4	8	12	
				24	-36
	1	4	12	3	-34

coeficientes del cociente coeficientes del residuo

Finalmente, se obtiene que el cociente es $q(x)=1 \cdot x^2+4x+12$ y el residuo es $R(x)=3x-34$.

APLICACIÓN 8

$$\text{Divida } \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$$

RESOLUCIÓN

Ordenamos y completamos el dividendo y el divisor.

- $D(x)=x^4+x^2+1$
 $D(x)=1 \cdot x^4+0x^3+1 \cdot x^2+0x+1$
- $d(x)=1 \cdot x^2+1 \cdot x+1$

Aplicamos el método de Horner.

1	1	0	1	0	1
-1					
-1					
	-1	-1	1	1	
				1	-1
	1	-1	1	0	0

coeficientes del cociente coeficientes del residuo

Finalmente, obtenemos que el cociente es $q_{(x)}=x^2-x+1$ y el residuo es $R_{(x)}=0x+0=0$.

Como el residuo $R_{(x)}$ es cero, esta división es exacta.

4.1. Caso especial de Horner

Cuando una división es exacta, podemos usar el método de Horner ordenando el dividendo y el divisor en forma creciente. El cociente que se obtiene también estará ordenado en forma creciente.

APLICACIÓN 9

Divida $\frac{x^4+7x^3+17x^2+23x+12}{x^2+2x+3}$

RESOLUCIÓN

Observe que el dividendo y el divisor están ordenados en la forma usual, que es la forma decreciente.

Aplicamos el método de Horner.

1	1	7	17		23	12
	-2	-3	$\frac{-2}{5}$	-3	-15	
		$\frac{5}{-10}$	$\frac{-10}{4}$	-8	-12	
		$\frac{4}{0}$		0	0	
	1	5	4			
	coeficientes del cociente			coeficientes del residuo		

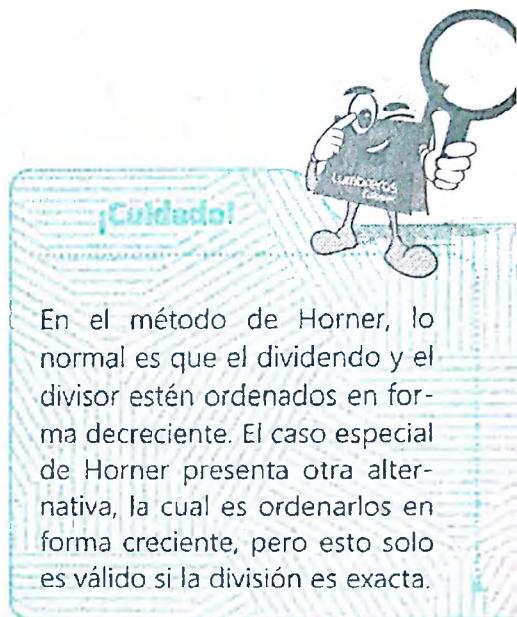
Luego, se obtiene que el cociente es $q_{(x)}=x^2+5x+4$ y el residuo es $R_{(x)}=0x+0=0$.

Como el residuo $R_{(x)}=0$, esta división es exacta.

Ahora comprobaremos lo que ocurre cuando ordenamos el dividendo y el divisor en forma creciente.

Así tendremos

$$\frac{12+23x+17x^2+7x^3+1 \cdot x^4}{3+2x+1 \cdot x^2}$$



Aplicamos el método de Horner con los coeficientes ordenados en esta forma.

	12	23	17	7	1
	-2	-8	-4	-5	
		15	-10		
			3	-2	-1
	4	5	1	0	0
coeficientes del cociente			coeficientes del residuo		

Luego, obtenemos que el cociente es $q(x)=4+5x+x^2$ y el residuo es $R(x)=0+0x=0$.

Comparamos los cocientes obtenidos en ambas divisiones:

EN LA 1.^a DIVISIÓN

$$q_{(x)} = x^2 + 5x + 4 \quad (\text{creciente})$$

EN LA 2.^a DIVISIÓN

$$q_{(x)} = 4 + 5x + x^2 \quad (\text{decreciente})$$

Hemos obtenido el mismo cociente, solo que en diferente orden. Esto es posible cuando la división es exacta.

Entonces cuando tengamos una división exacta, podremos usar el método de Horner de estas dos maneras. Ambas son válidas, ya que se obtienen los mismos resultados como lo hemos comprobado con este ejercicio.

APLICACIÓN 10

Calcule $m+n$ si la división

$$\frac{mx^4 + nx^3 + 7x^2 - x - 12}{x^2 + 3x + 4} \text{ es exacta.}$$

RESOLUCIÓN

Si usamos el método de Horner en la forma normal (forma decreciente), tendremos el inconveniente que los coeficientes m y n , que son desconocidos, aparecerán al inicio y complicarán el proceso operativo.

Por ello, en este caso, resulta conveniente ordenar el dividendo y el divisor en forma creciente, lo cual es posible, ya que es una división exacta.

Ordenamos en forma creciente.

$$\begin{array}{r} -12 - 1 \cdot x + 7x^2 + nx^3 + mx^4 \\ \hline 4 + 3x + 1 \cdot x^2 \end{array}$$

Aplicamos el método de Horner.

	-12	-1	7	n	m
	-3			3	
		9			
		8		-2	
			-6	-3	-1
			4		
	-3	2	1	0	0
					residuo

Como la división es exacta, el residuo es cero. Entonces

$$\bullet \quad n - 2 - 3 = 0$$

$$\rightarrow n = 5$$

$$\bullet \quad m - 1 = 0$$

$$\rightarrow m = 1$$

$$\therefore m+n=6$$

5. REGLA DE RUFFINI

Es un método de división de polinomios que sirve para calcular el cociente y el residuo, pero que solo puede usarse cuando el divisor es lineal.

Ejemplo

$$\text{Dividamos } \frac{4x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 2x + 7}{2x - 6}.$$

Observe que el divisor $d_{(x)} = 2x - 6$ es un polinomio lineal, por lo tanto, podemos usar este método.

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Ordenamos el dividendo en forma decreciente.

$$D_{(x)} = 2x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 7$$

2. El divisor lo igualamos a cero y calculamos el valor de x .

$$d_{(x)} = 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$$

3. Colocamos los coeficientes del dividendo y el valor de x que hemos obtenido en un esquema, tal como se indica a continuación:

coeficientes del dividendo				
2	-2	-10	4	7
$x=3$				
				residuo
coeficientes del cociente				

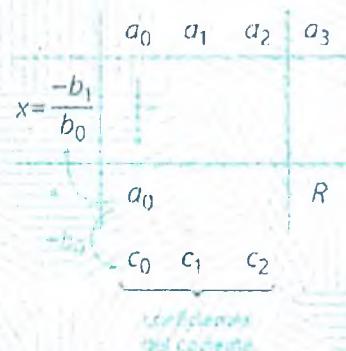
Trazamos una línea vertical dejando solo el último término en el lado derecho del esquema; esta línea separa el cociente del residuo. La razón por la que dejamos un solo espacio es porque el divisor es de grado 1 (lineal).

Importante



Esquema de Ruffini

$$\frac{a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{b_0 x + b_1}$$



El cociente es $q_{(x)} = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$

El resto es $R_{(x)} = R$.

La regla de Ruffini tiene dos etapas:

- I. En la primera, se multiplica y se suma, y se obtiene el residuo.
- II. En la segunda, se divide entre el coeficiente principal del divisor y se obtiene los coeficientes del cociente.

4. Ahora comenzamos con el proceso operativo, el cual consiste en multiplicar y sumar como se indica a continuación:

	2	-2	-10	4	7
$x=3$		6			
	2	4			



No olvide

Cuando se aplica la regla de Ruffini, el residuo es un polinomio constante debido a que el divisor es lineal.



Cuidado!

- La regla de Ruffini es más sencilla que el método de Horner, pero solo puede usarse cuando el divisor es lineal.
- En la regla de Ruffini, cuando el divisor es mónico (coeficiente principal igual a 1), no es necesario hacer la división al final, ya que al dividir entre 1 se obtendrán los mismos valores.

Este proceso de multiplicar por el valor de x y luego sumar verticalmente lo repetiremos sucesivamente hasta llegar al final del esquema.

En el ejemplo

	2	-2	-10	4	7
$x=3$		6	12	6	30
	2	4	2	10	37

zona del cociente

5. Los valores que están en la zona del cociente no son los coeficientes del cociente. Para calcularlos falta un último paso que consiste en hacer una división.

Los valores de la zona del cociente debemos dividirlos entre el coeficiente principal del divisor y entonces obtendremos los coeficientes del cociente de la división.

En el ejemplo, el divisor es $d_{(x)}=2x-6$, cuyo coeficiente principal es 2. Luego, los valores que están en la zona del cociente los dividimos entre 2, como se indica a continuación:

	2	-2	-10	4	7
$x=3$		6	12	6	30
	2	4	2	10	37
	1	2	1	5	

coeficientes del cociente

Finalmente, obtenemos que el cociente es $q_{(x)}=x^3+2x^2+x+5$ y el residuo es $R_{(x)}=37$.

APLICACIÓN 11

Divida $\frac{4x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 12x - 1}{4x - 8}$

RESOLUCIÓN

El dividendo ya está ordenado en forma decreciente y no le falta ningún término.

$$D_{(x)} = \underline{4x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 12x - 1} \\ \text{completo y ordenado}$$

El divisor $d_{(x)} = 4x - 8$ (lineal) lo igualamos a cero y calculamos x .

$$4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$$

Aplicamos la regla de Ruffini.

multiplicamos y sumamos	$x=2$	4	4	-8	12	-1	
		8	24	32	88		
		4	12	16	44	87	

zona del cociente residuo

Para hallar los coeficientes del cociente, dividimos los valores de la zona del cociente entre el coeficiente principal del divisor $d_{(x)} = 4x - 8$, que es 4.

$x=2$	4	4	-8	12	-1	
	8	24	32	88		
	4	12	16	44	87	

+4 1 3 4 11 residuo

coeficientes del cociente

Finalmente, se obtiene que el cociente es $q_{(x)} = x^3 + 3x^2 + 4x + 11$ y el residuo es $R_{(x)} = 87$.

APLICACIÓN 12

Divida $\frac{2x^4 + x^3 + 5x^2 + 7}{x - 2}$

RESOLUCIÓN

Ordenamos y completamos el dividendo.

$$D_{(x)} = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 0x + 7$$

El divisor $x - 2$ lo igualamos a cero y calculamos x .

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Aplicamos la regla de Ruffini.

multiplicamos y sumamos	$x=2$	2	1	5	0	7	
		4	10	30	60		
		2	5	15	30	67	

zona del cociente residuo

Ahora, dividimos los valores de la zona del cociente entre el coeficiente principal del divisor $d_{(x)} = 1 \cdot x - 2$, que en este caso es 1.

Así tendremos

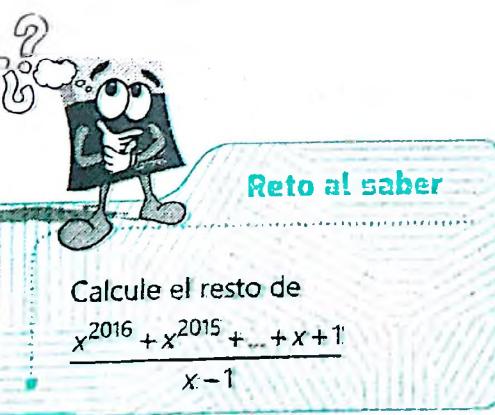
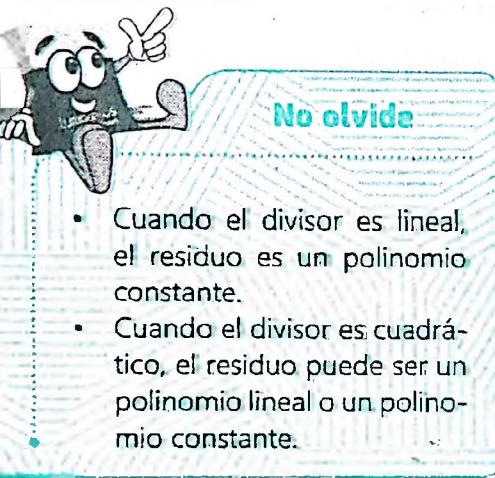
$x=2$	2	1	5	0	7	
	4	10	30	60		
	2	5	15	30	67	

coeficientes del cociente

Finalmente, obtenemos que el cociente es $q_{(x)} = 2x^3 + 5x^2 + 15x + 30$ y el residuo es $R_{(x)} = 67$.

6. CÁLCULO DEL RESTO

Los métodos de Horner y Ruffini nos permiten hallar el cociente y el residuo de una división de polinomios. El teorema del resto que veremos a continuación nos permitirá hallar solo el resto de una división, pero de un modo directo.



6.1. Teorema del resto

El resto de dividir $P(x)$ entre $ax+b$ es $P\left(-\frac{b}{a}\right)$, donde $a \neq 0$.

Ejemplos

$$1. \frac{P(x)}{x-2} \rightarrow \text{Resto} = P(2)$$

$$2. \frac{P(x)}{x-3} \rightarrow \text{Resto} = P(3)$$

$$3. \frac{P(x)}{2x-5} \rightarrow \text{Resto} = P\left(\frac{5}{2}\right)$$

6.2. Regla práctica para calcular el resto

1. Igualamos a cero el divisor y hallamos x .
2. Este valor de x lo reemplazamos en el dividendo y el resultado que se obtiene es el resto de la división.

APLICACIÓN 13

Halle el resto de $\frac{x^4 + 2x + 1}{x - 3}$.

RESOLUCIÓN

Igualamos a cero el divisor $x - 3$ y obtenemos $x = 3$.

Reemplazamos $x = 3$ en el dividendo

$$D(x) = x^4 + 2x + 1$$

y el resultado que se obtiene es el resto.

$$R(x) = 3^4 + 2(3) + 1$$

$$R(x) = 81 + 6 + 1$$

$$R(x) = 88$$

Por lo tanto, el resto es $R(x) = 88$.

APLICACIÓN 14

Halle el resto de

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x - 5}$$

RESOLUCIÓN

El divisor $x - 5$ lo igualamos a cero.

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

Reemplazamos $x = 5$ en el dividendo

$$D_{(x)} = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

y el resultado que se obtiene es el resto.

$$R_{(x)} = 5^3 + 2(5)^2 - 3(5) + 2$$

$$R_{(x)} = 162$$

Por lo tanto, el resto es $R_{(x)} = 162$.

APLICACIÓN 15

Halle el resto de

$$\frac{x^{100} + 5x^{28} + 3x^{10} + 2}{x - 1}$$

RESOLUCIÓN

Igualamos el divisor a cero.

$$x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x = 1$$

Reemplazamos $x = 1$ en el dividendo $D_{(x)} = x^{100} + 5x^{28} + 3x^{10} + 2$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = 1^{100} + 5(1)^{28} + 3(1)^{10} + 2$$

$$R_{(x)} = 1 + 5(1) + 3(1) + 2$$

$$R_{(x)} = 11$$

Por lo tanto, el resto es $R_{(x)} = 11$.

Cuidado!

$$\text{En la división } \frac{x^8 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$$

cuando se calcula el resto, lo que se hace es igualar el divisor a cero de la siguiente manera:

$$x^2 - 1 = 0$$

de donde se obtiene $x^2 = 1$.

No cometa el error de hallar x y decir que $x = 1$ y luego reemplazar este valor en el dividendo para hallar el resto.

Lo que se debe reemplazar en el dividendo es el valor de x^2 y no el valor de x . Tenga cuidado con esto al aplicar este método.

Reto al saber

1. Halle el cociente y el residuo de la división

$$\frac{x^{100} + 2x^{98} + x^{96} + 5}{x^2 + 1}$$

2. Calcule el cociente y el resi-

$$\text{duo de } \frac{x^{2016} + 3x + 2}{x^{2016} + 1}$$

6.3. Método general para calcular el resto

Este método sirve para calcular el resto de cualquier división de polinomios.

El procedimiento es el siguiente:

1. Igualamos el divisor a cero y despejamos su término principal (el de mayor grado).
2. Lo reemplazamos en el dividendo tantas veces como sea necesario hasta que el resultado sea cero o un polinomio de grado menor al divisor.

En tal caso, dicho resultado es el resto de la división.

APLICACIÓN 16

Halle el resto de $\frac{x^{10}+2x+1}{x^2-2}$.

RESOLUCIÓN

El divisor lo igualamos a cero y despejamos x^2 .

$$x^2-2=0 \rightarrow x^2=2$$

Debemos reemplazar $x^2=2$ en el dividendo, pero antes tenemos que acomodarlo convenientemente.

$$D_{(x)} = x^{10} + 2x + 1$$

$$D_{(x)} = (x^2)^5 + 2x + 1$$

Reemplazamos $x^2=2$ en el dividendo y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (2)^5 + 2x + 1$$

$$R_{(x)} = 32 + 2x + 1$$

Por lo tanto, el resto de la división es

$$R_{(x)} = 2x + 33.$$

APLICACIÓN 17

Halle el resto de $\frac{x^8-2x^2+3x+1}{x^2-1}$.

RESOLUCIÓN

Igualamos el divisor a cero.

$$x^2-1=0 \rightarrow x^2=1$$

Debemos acomodar convenientemente el dividendo para poder reemplazar $x^2=1$.

$$D_{(x)} = x^8 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$D_{(x)} = (x^2)^4 - 2(x^2)^2 + 3x + 1$$

Reemplazamos $x^2=1$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (1)^4 - 2(1) + 3x + 1$$

$$R_{(x)} = 1 - 2 + 3x + 1$$

$$R_{(x)} = 3x$$

Por lo tanto, el resto es $3x$.

APLICACIÓN 18

Halle el resto de

$$\frac{x^{10}+2x^5+x^3+x+2}{x^2-4}.$$

RESOLUCIÓN

El divisor lo igualamos a cero y se obtiene $x^2=4$.

Acomodamos el dividendo, de modo que aparezca x^2 .

$$D_{(x)} = x^{10} + 2x^5 + x^3 + x + 2$$

$$D_{(x)} = (x^2)^5 + 2(x^2)^2 \cdot x + (x^2) \cdot x + 2$$

Reemplazamos $x^2=4$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (4)^5 + 2(4)^2 x + (4)x + 2$$

$$R_{(x)} = 1024 + 32x + 4x + 2$$

$$R_{(x)} = 36x + 1026$$

Por lo tanto, el resto es $36x + 1026$.

APLICACIÓN 19

Halle el resto de

$$\frac{x^9 + 2x^5 + x^2 + 2x + 3}{x^3 - 1}$$

RESOLUCIÓN

El divisor lo igualamos a cero y despejamos x^3 .

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1$$

Acomodamos el dividendo para que aparezca x^3 .

$$D_{(x)} = x^9 + 2x^5 + x^2 + 2x + 3$$

$$D_{(x)} = (x^3)^3 + 2(x^3)x^2 + x^2 + 2x + 3$$

Reemplazamos $x^3 = 1$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (1)^3 + 2(1)x^2 + x^2 + 2x + 3$$

$$R_{(x)} = 1 + 2x^2 + x^2 + 2x + 3$$

$$R_{(x)} = 3x^2 + 2x + 4$$

Por lo tanto, el resto es $3x^2 + 2x + 4$.

7. COCIENTES NOTABLES

Al cociente de la división $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, donde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se le llama cociente notable porque puede obtenerse directamente sin necesidad de usar un método de división como Horner o Ruffini.

APLICACIÓN 20

Halle el cociente de $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$.

RESOLUCIÓN

De la propiedad de diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

se obtiene

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

Por lo tanto, el polinomio $x + y$ es el cociente de esta división.

Importante

Si tenemos que

- $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$
- $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$
- $\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

entonces si seguimos la secuencia tendremos que

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

Reto al saber

Usando cocientes notables, calcule el valor de $2^{19} + 2^{18} + 2^{17} + \dots + 2 + 1$.

APLICACIÓN 21

Halle el cociente de $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$.

RESOLUCIÓN

De la propiedad de diferencia de cubos

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

se obtiene

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Por lo tanto, el polinomio $x^2 + xy + y^2$ es el cociente de esta división.

APLICACIÓN 22

Halle el cociente de $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$.

RESOLUCIÓN

De la propiedad de diferencia de cuadrados

$$x^4 - y^4 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{(x - y)(x + y)} (x^2 + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x - y) \underbrace{(x + y)(x^2 + y^2)}_{(x + y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

Se obtiene

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

Por lo tanto, el polinomio $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ es el cociente de esta división.

7.1. Propiedad para hallar el cociente notable

El cociente de la división $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, donde $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq 2$, es el polinomio

$$q_{(x; y)} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

al cual llamamos cociente notable (CN).

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{x^n - y^n}{x - y} &= x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + \\ &\quad + xy^{n-2} + y^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplos

- Para $n=6$

$$\frac{x^6 - y^6}{x - y} = x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$$

- Para $n=7$

$$\begin{aligned} \frac{x^7 - y^7}{x - y} &= x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + \\ &\quad + xy^5 + y^6 \end{aligned}$$

- Para $n=20$

$$\frac{x^{20} - y^{20}}{x - y} = x^{19} + x^{18}y + x^{17}y^2 + \dots + xy^{18} + y^{19}$$

7.2. Número de términos

En la división $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, el exponente n indica

el número de términos que tiene su cociente.

Ejemplos

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = \underbrace{x^2 + xy + y^2}_{3 \text{ términos}}$$

- $\frac{x^4 - y^4}{x-y} = \underbrace{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}_{4 \text{ términos}}$
- $\frac{x^{15} - y^{15}}{x-y} = \underbrace{x^{14} + x^{13}y + x^{12}y^2 + \dots + y^{14}}_{15 \text{ términos}}$

7.3. Término general

El término de lugar k del cociente de la división

$$\frac{x^n - y^n}{x-y}$$
 es

$$t_k = x^{n-k} y^{k-1}$$

APLICACIÓN 23

Halle el término de lugar 5 (t_5) del cociente de la división

$$\frac{x^{13} - y^{13}}{x-y}$$

RESOLUCIÓN

El término general de su cociente es

$$t_k = x^{13-k} y^{k-1}$$

Para $k=5$, obtenemos el término de lugar 5.

$$t_5 = x^{13-5} y^{5-1}$$

$$\therefore t_5 = x^8 y^4$$

APLICACIÓN 24

Halle el término de lugar 25 (t_{25}) del cociente de la división

$$\frac{x^{54} - y^{54}}{x-y}$$

RESOLUCIÓN

El término general de su cociente es

$$t_k = x^{54-k} y^{k-1}$$

Importante

En la división $\frac{x^n - y^n}{x-y}$, si reemplazamos $y=1$, tendremos

$$\frac{x^n - 1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

Ejemplos

$$\frac{x^4 - 1}{x-1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\frac{x^5 - 1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Importante

Cuando la división es de la forma $\frac{x^n \pm y^n}{x+y}$, también genera CN

y su término general es

$$t_k = (-1)^{k+1} x^{n-k} y^{k-1}$$



Para $k=25$, obtenemos el término de lugar 25.

$$t_{25} = x^{54-25} y^{15-1}$$

$$\therefore t_{25} = x^{29} y^{24}$$

7.4. Caso general

Hay divisiones que no tienen la forma $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, pero que pueden llevarse a ella mediante cambios de variable. Por ello los cocientes de estas divisiones también serán cocientes notables.

Ejemplo

En la división $\frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3}$ podemos hacer los siguientes cambios de variable: $x^2 = a$ y $y^3 = b$.

Reemplazamos

$$\frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3} = \frac{(x^2)^5 - (y^3)^5}{x^2 - y^3} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}$$

La división $\frac{a^5 - b^5}{a - b}$ genera cociente notable, el cual es

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = \underbrace{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}_{\text{CN}}$$

Reemplazamos $a = x^2$ y $b = y^3$.

$$\begin{aligned} \frac{a^5 - b^5}{a - b} &= \frac{(x^2)^5 - (y^3)^5}{x^2 - y^3} = (x^2)^4 + (x^2)^3(y^3) + \\ &\quad + (x^2)^2(y^3)^2 + (x^2)(y^3)^3 + (y^3)^4 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3} = \underbrace{x^8 + x^6y^3 + x^4y^6 + x^2y^9 + y^{12}}_{\text{cociente notable de esta división}}$$

7.5. Propiedad

La división $\frac{x^p - y^q}{x^r - y^t}$ puede llevarse a la forma $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ mediante cambios de variable y, por ende, su cociente será un cociente notable si y solo si cumple la siguiente condición:

$$p = \frac{q}{t} = n \wedge n \in \mathbb{N} : n \geq 2$$

Además, para este cociente notable se cumplirá lo siguiente:

- Tiene n términos.
- Su término de lugar k es

$$t_k = (x^r)^{\frac{n-k}{t}} (y^t)^{\frac{k-1}{t}}$$

APLICACIÓN 25

Compruebe que la división $\frac{x^{20} - y^8}{x^5 - y^2}$ genera CN y halle t_3 .

RESOLUCIÓN

Verificamos que cumpla la condición.

$$\frac{20}{5} = \frac{8}{2} = 4 \wedge 4 \in \mathbb{N}$$

Como sí se cumple, entonces sí genera CN.

Luego, el número de términos del CN es 4.
Su término general es

$$t_k = (x^5)^{4-k} \cdot (y^2)^{k-1}$$

Reemplazamos $k=3$.

$$t_3 = (x^5)^{4-3} \cdot (y^2)^{3-1}$$

$$\therefore t_3 = x^5 y^4$$

APLICACIÓN 26

Si la división $\frac{x^{60}-y^{100}}{x^3-y^r}$ genera CN,

halle t_{14} .



Actividad recreativa

Juego de fichas

1. Se juega con 20 fichas.
2. Cada ficha debe indicar un ejercicio para calcular el resto de una división, cuando el divisor es lineal.

Ejemplo

El resto de $\frac{x^2+1}{x-2}$ es

3. Se juega entre dos jugadores.
4. Se reparte 10 fichas a cada uno.
5. El juego consiste en que cada participante le haga la pregunta que indica su ficha al otro jugador. Si este acierta, gana 1 punto. Si no acierta, el jugador que hizo la pregunta tiene la opción de responder la pregunta y si responde correctamente, gana un punto. Si ninguno sabe la respuesta, no se suman puntos.
6. Se juega por turnos y gana el que al final acumula más puntos.

RESOLUCIÓN

Como genera CN, entonces cumple la condición

$$\frac{60}{3} = \frac{100}{r} \rightarrow r=5$$

El número de términos del CN es

$$n = \frac{60}{3} = 20$$

Su término general es

$$t_k = (x^3)^{20-k} \cdot (y^5)^{k-1}$$

Reemplazamos $k=14$.

$$t_{14} = (x^3)^{20-14} \cdot (y^5)^{14-1}$$

$$\therefore t_{14} = x^{18} y^{65}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dividir el polinomio $D(x)$ entre el polinomio $d(x)$ consiste en hallar otros dos polinomios, $q(x)$ y $R(x)$, llamados cociente y residuo, respectivamente.

dividendo	$D(x)$	$d(x)$	divisor
residuo	$R(x)$	$q(x)$	cociente

Identidad de la división

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

Condición del residuo

Cuando $R(x) \neq 0$, se cumple $^o[R(x)] < ^o[d(x)]$.

Tipos de división

- División exacta, cuando $R(x) = 0$
- División inexacta, cuando $R(x) \neq 0$

Propiedades del cociente y el residuo

- $^o[q(x)] = ^o[D(x)] - ^o[d(x)]$
- $\max ^o[R(x)] = ^o[d(x)] - 1$

Cuando el divisor es cuadrático, el residuo es de la forma $R(x) = ax + b$.

Método de Horner

$$\begin{array}{r} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ \hline b_0x^2 + b_1x + b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \div \\ \begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_1 & & + & & & \\ -b_2 & & & & & \\ \hline & c_0 & c_1 & c_2 & d_0 & d_1 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Cociente: } q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$$

$$\text{Residuo: } R(x) = d_0x + d_1$$

Cálculo del resto

Teorema del resto

$$\frac{P(x)}{ax+b} \rightarrow \text{Resto} = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Método general

El divisor se iguala a cero, se reemplaza en el dividendo y se obtiene el resto.

Regla de Ruffini

$$\begin{array}{r} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \\ \hline b_0x + b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ \hline x = -\frac{b_1}{b_0} & + \\ & \times \quad a_0 & & R \\ & + b_0 & c_0 & c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\text{Cociente: } q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$$

$$\text{Residuo: } R(x) = R$$

Caso especial

Cuando la división es exacta, se puede cambiar de orden al dividendo y al divisor, es decir, se pueden poner en orden creciente. El cociente resultará también en ese orden.

Cocientes notables

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$$

Término general

$$t_k = x^{n-k} \cdot y^{k-1}$$

donde $k=1; 2; 3; \dots; n$

Caso general

$$\frac{x^a - y^b}{x^r - y^t} \text{ genera CN si y solo si } \frac{a}{r} = \frac{b}{t} = n \in \mathbb{N}.$$

Además, n es el número de términos del CN.

Problema N.º 1

Si el cociente de la división

$$\frac{x^6+3x+1}{x^3+2}$$

es x^3-2 , calcule el resto.

- A) $3x+5$ B) $2x+3$ C) $x+4$
 D) $2x$ E) $3x+1$

Resolución

Identidad de la división

$$\begin{array}{c} \text{dividendo} \rightarrow x^6+3x+1 \\ R_{(x)} \uparrow \quad \text{divisor} | x^3+2 \\ \hline x^3-2 \end{array}$$

$$x^6+3x+1 = \underbrace{(x^3+2)(x^3-2)}_{\text{cociente}} + R_{(x)}$$

$$x^6+3x+1 = x^6-4+R_{(x)}$$

$$3x+1 = -4+R_{(x)}$$

$$R_{(x)} = 3x+5$$

Por lo tanto, el resto es $3x+5$.

Problema N.º 2

Si el resto de la división

$$\frac{x^{100}+5x+a}{x-1}$$

es $3a$, calcule a .

- A) 2 B) -2 C) 1
 D) -1 E) 3

Resolución

Esquema de la división

$$\begin{array}{r|l} x^{100}+5x+a & x-1 \\ \hline 3a & q_{(x)} \end{array}$$

Identidad de la división

$$x^{100}+5x+a = (x-1)q_{(x)} + 3a$$

Evaluamos en $x=1$.

$$\underbrace{x^{100}}_{1} + 5(1) + a = \cancel{(1-1)} \cancel{q(1)} + 3a$$

$$1+5+a=3a$$

$$6+a=3a$$

$$6=3a-a$$

$$6=2a$$

$$3=a$$

$$\therefore a=3$$

Clave A

Problema N.º 3

Si en la división

$$\frac{4x^3+4x^3+3x^2+ax+b}{2x^2-3x+2}$$

el resto es $17x+1$, calcule ab .

- A) 24 B) 70 C) 81
 D) 90 E) 72

Resolución

Aplicamos el método de Horner.

2	4	4	3	a	b
3					
-2					
	6	-4			
	10	15			
	14				
				-10	
				21	-14
	2	5	7		
				17	1

Del residuo

- $a-10+21=17 \rightarrow a=6$
- $b-14=1 \rightarrow b=15$
- ∴ $ab=(6)(15)=90$

Clave



Problema N.º 4

Si la división

$$\frac{x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx - 3}{x^2 + 3}$$

es exacta, calcule $b-a$.

- A) -3 B) 4
D) -2 C) 6
E) 2

Resolución

Aplicamos el método de Horner.

1	1	2	a	b	-3	
0		$\frac{0}{2}$	-3			
-3		$\frac{0}{2}$	0	-6		
		$\frac{a-3}{a-3}$		0	$-3a+9$	
1	2	$a-3$		0	0	

resto=0
resto=0
(división exacta)

Del resto

- $b-6=0 \rightarrow b=6$
- $-3-3a+9=0 \rightarrow a=2$
- ∴ $b-a=6-2=4$

Clave



Problema N.º 5

En la división

$$\frac{4x^4 + 7x^3 + bx^2 + 5x + b}{x^2 + x - 2}$$

se obtiene un cociente cuyos coeficientes disminuyen de 1 en 1. Calcule el resto.

- A) $2x+7$ B) $3x+1$ C) $9x+1$
D) $9x-2$ E) $7x-2$

Resolución

Aplicamos el método de Horner.

1	4	7	b	5	b
-1		$\frac{-4}{3}$	8		
2		$\frac{0}{3}$	-3	6	
		$\frac{b+5}{b+5}$	-2	4	
4	3	2		9	$b+4$

Para el último coeficiente del cociente, se cumple

$$\frac{b+5}{1}=2 \rightarrow b=-3$$

Luego, en el resto

$$R_{(x)}=9x+(b+4)$$

Reemplazamos $b=-3$ y tendremos

$$R_{(x)}=9x+1$$

Por lo tanto, el resto es $9x+1$.

Clave



Problema N.º 6

En la división

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 6x + a \\ \hline x^2 - 2x - b \end{array}$$

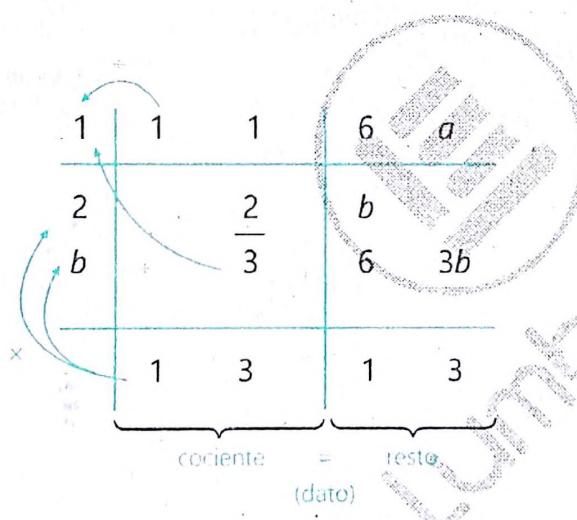
el cociente es igual al resto.

Calcule $a+b$.

- A) 32 B) 19 C) 21
D) 25 E) 27

Resolución

Aplicamos el método de Horner.



Del resto

- $6+b+6=1$
 $\rightarrow b=-11$
- $a+3b=3$
 $a+3(-11)=3$
 $\rightarrow a=36$
- $\therefore a+b=36-11=25$

Clave D

Problema N.º 7

Si el resto de la división

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + 2x^2 + mx + 5 \\ \hline x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

es constante, calcule m .

- A) 4 B) 2 C) 3
D) -1 E) 5

Resolución

Aplicamos el método de Horner.

1	1	3	2	m	5
-3	-1				0
		0	0		-3
			1		-1
				0	0

resto = $0x+c$
resto = c
(constante)

Del esquema, en el residuo

$$m-3=0$$

$$\therefore m=3$$

Clave E

Problema N.º 8

Si la división

$$\begin{array}{r} ax^4 + bx^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

es exacta, calcule $a+b$.

- A) 3 B) 6 C) 5
D) 7 E) 8

Resolución

Como es una división exacta, podemos ordenar el dividendo y el divisor en forma creciente.

$$\begin{array}{r} 1+2x+3x^2+bx^3+ax^4 \\ \hline 1+2x+x^2 \end{array}$$

Aplicamos el método de Horner.

1	1	2	3	b	a
-2	-1				
		-2	0	-1	0
			0	0	2
			2	-4	-2
				0	0
1	0	2			

Del esquema, en el resto

- $b-4=0 \rightarrow b=4$
- $a-2=0 \rightarrow a=2$
- ∴ $a+b=6$

Clave

Problema N.º 9

Dada la división

$$\begin{array}{r} 3x^3-2x^2-15x-21 \\ \hline x-3 \end{array}$$

calcule su cociente disminuido en $3x^2$.

- A) $x+7$
- B) $7x+3$
- C) $x+3$
- D) $x+4$
- E) $7x+6$

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini.

3	-2	-15	-21
$x=3$	9	21	18
3	7	6	-3
3	7	6	

coeficientes del dividendo

El cociente es

$$\begin{aligned} q(x) &= 3x^2 + 7x + 6 \\ \therefore q(x) - 3x^2 &= 7x + 6 \end{aligned}$$

Clave

Problema N.º 10

Calcule la suma de coeficientes del cociente de la siguiente división:

$$\begin{array}{r} nx^4-x^3+3nx-3 \\ \hline nx-1 \end{array}$$

- A) 0
- B) -1
- C) 3
- D) 2
- E) 4

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini.

n	-1	0	$3n$	-3
$x=\frac{1}{n}$	1	0	0	3
n	0	0	$3n$	0
1	0	0	3	

coeficientes del cociente

Del residuo

- $a+4+3=1$
 $\rightarrow a=-6$
- $b+1=0$
 $\rightarrow b=-1$
- $ab=(-6)(-1)=6$

Clave B**Problema N.º 18**

Sea la división

$$\frac{x^{20} + x^{19} + x^{18} + \dots + x^2 + x + 1}{x - 1}$$

Calcule la suma de coeficientes de su cociente.

- A) 240 B) 210 C) 200
D) 190 E) 180

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini.

20 veces					
$x=1$	1	1	1 ...	1	1
		1	2 ...	19	20
	1	2	3 ...	20	21

coeficientes del cociente resto

Luego, calculamos la suma de los coeficientes del cociente.

$$1+2+3+\dots+20 = \frac{(20)(21)}{2} = 210$$

Por lo tanto, la suma de coeficientes de su cociente es 210.

Clave B**Problema N.º 19**

En la división

$$\frac{m^2x^4 + (m^2-m)x^3 + mx^2 + (m-2)x + 6}{mx-1}$$

la suma de coeficientes del cociente es igual al resto. Calcule m .

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini.

	m^2	m^2-m	m	$m-2$	6
$x=\frac{1}{m}$	m	m	m	$m-2$	1
	m^2	m^2	$2m$	m	7
	m	m	2	1	resto

coeficientes del cociente

Del dato, la suma de coeficientes del cociente es igual al resto; entonces

$$m+m+2+1=7$$

$$2m+3=7$$

$$2m=4$$

$$\therefore m=2$$

Clave B**Problema N.º 20**

Determine el coeficiente del término cúbico del cociente de la siguiente división:

$$\frac{2x^{12} - 3x^9 + x^6 - 5x^3 + 3}{x^3 - 2}$$

- A) 3 B) 1 C) 13
D) 5 E) 6

Resolución

Hacemos el cambio de variable $y=x^3$ y lo reemplazamos en el dividendo y el divisor, con lo cual tendremos

$$\frac{2y^4 - 3y^3 + y^2 - 5y + 3}{y-2}$$

Aplicamos la regla de Ruffini.

	2	-3	1	-5	3
$y=2$		4	2	6	2
	2	1	3	1	5
	Coeficientes del cociente				

El cociente en variable y es

$$q(y) = 2y^3 + y^2 + 3y + 1$$

Para hallar el cociente de la división original (con variable x), debemos reemplazar $y=x^3$, con lo cual tendremos

$$q(x) = 2(x^3)^3 + (x^3)^2 + 3(x^3) + 1$$

$$q(x) = 2x^9 + x^6 + 3x^3 + 1$$

término cúbico

Por lo tanto, el coeficiente del término cúbico del cociente es 3.

Clave

Problema N.º 21

El resto de la división

$$\frac{mx^9 - mx^5 + px - 3}{3x - 3}$$

es 2.

Halle p .

- A) 3 B) 2 C) 5
D) 7 E) 1

Resolución

Usamos el teorema del resto.

Igualamos el divisor a cero.

$$-3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1$$

Este valor de x lo reemplazamos en el dividendo y obtenemos el resto.

$$R(x) = m(1)^9 - m(1)^5 + p(1) - 3$$

$$R(x) = m - m + p - 3$$

$$R(x) = p - 3$$

Del dato, el resto es 2.

$$R(x) = p - 3 = 2$$

$$\therefore p = 5$$

Clave

Problema N.º 22

Halle el resto de la siguiente división:

$$\frac{2x^{13} + 3x^6 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

- A) 6 B) $3x + 3$ C) $4x + 2$
D) $2x + 4$ E) $x + 5$

Resolución

Usamos el método general para calcular el resto.

Igualamos el divisor a cero.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

Expresamos el dividendo convenientemente.

$$D(x) = 2x^{13} + 3x^6 + 2x - 1$$

$$D(x) = 2(x^2)^6 \cdot x + 3(x^2)^3 + 2x - 1$$

Reemplazamos $x^2=1$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = 2(1)^6 x + 3(1)^3 + 2x - 1$$

$$R_{(x)} = 2x + 3 + 2x - 1$$

$$R_{(x)} = 4x + 2$$

Por lo tanto, el resto de la división es $4x + 2$.

Clave G

Problema N.º 23

Halle el resto de dividir

$$\frac{8(x-1)^{17} - (1-x)^{20} + 2x + 1}{x-3}$$

- A) 1025 B) 7
D) 14

- C) 9
E) 17

Resolución

Usamos el teorema del resto.

Igualamos el divisor a cero.

$$x-3=0 \rightarrow x=3$$

Este valor de x lo reemplazamos en el dividendo y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = 8(3-1)^{17} - (1-3)^{20} + 2(3) + 1$$

$$R_{(x)} = 8(2)^{17} - (-2)^{20} + 7$$

$$R_{(x)} = 2^3 \times 2^{17} - 2^{20} + 7$$

$$R_{(x)} = 2^{26} - 2^{20} + 7$$

$$R_{(x)} = 7$$

Por lo tanto, el resto es 7.

Clave B

Problema N.º 24

Halle el resto de dividir

$$\frac{3x^9 + x^6 + x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

- A) -1 B) 3 C) 1
D) 0 E) 4

Resolución

El divisor lo igualamos a cero.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Luego, lo multiplicamos por $x-1$ y obtenemos

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-1} = 0 \cdot (x-1)$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^3 = 1$$

Expresamos convenientemente el dividendo.

$$D_{(x)} = 3x^9 + x^6 + x^3 - 1$$

$$D_{(x)} = 3(x^3)^3 + (x^3)^2 + (x^3) - 1$$

Reemplazamos $x^3=1$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = 3(1)^3 + (1)^2 + (1) - 1$$

$$R_{(x)} = 4$$

Por lo tanto, el resto es 4.

Clave C

Problema N.º 25

Halle el resto de

$$\frac{x^5(x+1)^5 + (2x^2+2x-3)^6 - 2x + 2}{x^2 + x - 1}$$

- A) $2x-4$ B) $-2x+4$ C) $2x-1$
D) $2x+1$ E) $2x+4$

Resolución

El divisor lo igualamos a cero.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + x = 1$$

Expresamos el dividendo convenientemente.

$$D_{(x)} = x^5(x+1)^5 + (2x^2+2x-3)^6 - 2x+2$$

$$D_{(x)} = (x(x+1))^5 + (2(x^2+x)-3)^6 - 2x+2$$

$$D_{(x)} = (x^2+x)^5 + (2(x^2+x)-3)^6 - 2x+2$$

Reemplazamos $x^2+x=1$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (1)^5 + (2(1)-3)^6 - 2x+2$$

$$R_{(x)} = 1 + \underbrace{(-1)^6}_{1} - 2x+2$$

$$R_{(x)} = -2x+4$$

Por lo tanto, el resto es $-2x+4$.

Problema N.º 26

Halle el resto de

$$\frac{[(x-1)(x)(x+2)(x+3)]^2 + (x^2+2x)^3 \cdot x - 50}{x^2+2x-5}$$

- A) $100x+50$
- B) $125x-50$
- C) $100x-50$
- D) $125x+50$
- E) $50x+100$

Resolución

El divisor lo igualamos a cero.

$$x^2+2x-5=0$$

$$\rightarrow x^2+2x=5$$

Expresamos el dividendo convenientemente.

$$D_{(x)} = \underbrace{[(x-1)(x)(x+2)(x+3)]^2}_{100} + \underbrace{(x^2+2x)^3}_{125x} \cdot x - 50$$

$$D_{(x)} = ((x^2+2x-3)(x^2+2x))^2 + (x^2+2x)^3 \cdot x - 50$$

Reemplazamos $x^2+2x=5$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = \underbrace{((5-3)(5))^2}_{100} + \underbrace{(5)^3}_{125x} x - 50$$

$$R_{(x)} = 125x + 50$$

Por lo tanto, el resto es $125x+50$.



Clave

Problema N.º 27

Halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-1)(x-2)$ si el resto de $P_{(x)}$ entre $x-1$ es 5 y el resto de $P_{(x)}$ entre $x-2$ es 7.

- A) $x+4$
- B) $2x+3$
- C) $3x+2$
- D) $2x-3$
- E) $3x-2$

Resolución

Usamos el teorema del resto.

- $\frac{P_{(x)}}{x-1} \rightarrow \underbrace{\text{resto}}_{5} = 5$
- $\frac{P_{(x)}}{x-2} \rightarrow \underbrace{\text{resto}}_{7} = 7$

Tenemos que $P_{(1)}=5$ y $P_{(2)}=7$.

El resto de $\frac{P_{(x)}}{(x-1)(x-2)}$ es de la forma $R_{(x)}=ax+b$ porque el divisor es cuadrático.

Nos faltan los valores de a y b , los cuales hallamos usando la identidad de la división.

$$P(x) = (x-1)(x-2)q(x) + \overbrace{ax+b}^R$$

Evaluamos en $x=1$ y $x=2$.

$$P(x) = \cancel{(x-1)}(x-2)q(x) + ax+b$$

$$x=1: P(1)=a+b$$

$$x=2: P(2)=2a+b$$

Como $P(1)=5$ y $P(2)=7$, tendremos

$$P(1)=a+b=5$$

$$P(2)=2a+b=7$$

De donde se obtiene $a=2$ y $b=3$.

Luego, reemplazamos estos valores en

$$R(x)=ax+b \text{ y tendremos } R(x)=2x+3.$$

Por lo tanto, el resto es $2x+3$.

Clave

Problema N.º 28

Halle el resto de $\frac{D(x)}{x^2-x}$

si se sabe que $D(0)=3$ y $D(1)=7$.

- A) $7x+3$ B) $4x+3$ C) $3x+4$
 D) $x+3$ E) $3x+1$

Resolución

Esquema de la división

$$\begin{array}{c|cc} D(x) & x^2-x & \leftarrow \text{divisor cuadrático} \\ \hline R(x) & q(x) \end{array}$$

El resto será de la forma $ax+b$ porque el divisor es cuadrático.

Usamos la identidad de la división.

$$D(x) = (x^2-x)q(x) + \overbrace{ax+b}^R$$

Evaluamos en $x=1$ y $x=0$.

$$x=0: D(0) = \cancel{(0^2-0)}q(0) + a(0)+b$$

$$\rightarrow D(0)=b$$

$$x=1: D(1) = \cancel{(1^2-1)}q(1) + a(1)+b$$

$$\rightarrow D(1)=a+b$$

Como $D(0)=3$ y $D(1)=7$, entonces

- $D(0)=b=3$
 $\rightarrow b=3$
- $D(1)=a+b=7$
 $a+3=7$
 $\rightarrow a=4$

Reemplazamos $a=4$ y $b=3$ en $R(x)=ax+b$ y tendremos $R(x)=4x+3$.

Por lo tanto, el resto es $4x+3$.

Clave

Problema N.º 29

Calcule el resto de $\frac{(x+1)^{100}+x+3}{x^2+2x+2}$.

- A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x+3$
 D) $x-2$ E) $x+4$

Resolución

El divisor lo igualamos a cero.

$$x^2+2x+2=0$$

$$\rightarrow x^2+2x=-2$$

Expresamos el dividendo convenientemente.

$$D_{(x)} = (x+1)^{100} + x + 3$$

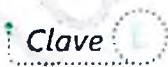
$$D_{(x)} = ((x+1)^2)^{50} + x + 3$$

$$D_{(x)} = (x^2 + 2x + 1)^{50} + x + 3$$

Reemplazamos $x^2 + 2x = -2$ y obtenemos el resto.

$$R_{(x)} = (-2 + 1)^{50} + x + 3$$

$$\therefore R_{(x)} = x + 4$$



Clave

Problema N.º 30

Si $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ son el cociente y el residuo de la división

$$\frac{x^{102} + x^{101} + x^2 + x + 1}{x^{100} + x^{99} + 1}$$

calcule $q_{(5)} + R_{(6)}$.

- A) 102 B) 64 C) 32
 D) 99 E) 100

Resolución

Expresamos el dividendo convenientemente.

$$D_{(x)} = (x^{102} + x^{101} + x^2) + x + 1$$

$$D_{(x)} = x^2 \underbrace{(x^{100} + x^{99} + 1)}_{f(x)} + x + 1$$

Esta es la identidad de la división, entonces el cociente es $q_{(x)} = x^2$ y el residuo es $R_{(x)} = x + 1$.

Luego $q_{(5)} = 25$ y $R_{(6)} = 7$.

$$\therefore q_{(5)} + R_{(6)} = 32$$



Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Halle la suma de coeficientes del cociente luego de dividir

$$\frac{2x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 4x - 3}{2x^2 - x + 3}$$

- A) 2 B) 3 C) -2
D) 9 E) -3

2. Luego de dividir

$$\frac{3x^3 + x^2 + 2x - A}{x^2 + 2x - 1}$$

halle el valor de A si se sabe que el residuo es $15x - 6$.

- A) -1 B) 0 C) 1
D) -3 E) 4

3. Al dividir

$$\frac{x^3 - x^2 + x + (a-2)}{x^2 + x - 2}$$

se obtiene que el residuo es $5x$. Halle el valor de a .

- A) 6 B) 5 C) 2
D) 16 E) 10

4. Al dividir

$$\frac{x^3 + 10x^2 + mx + 30}{x^2 + 7x + 10}$$

se obtiene que el coeficiente del término lineal del residuo es uno menos que el término independiente del cociente. Calcule m .

- A) 33 B) 31 C) 21
D) 41 E) 20

5. Calcule $a+b$ si el polinomio $x^3 + ax + b$ es divisible entre $x^2 - 4$.

- A) 4 B) -16 C) 16
D) -4 E) -8

6. Luego de dividir

$$\frac{8ax^3 + 2ax^2 + (3a-4)x + 3b - 6}{2ax^2 - ax - 1}$$

se obtiene que el resto es $R_{(4)} = 0$.

Calcule $a+b$.

- A) 0 B) 1 C) -4
D) -1 E) 4

7. Calcule m si la división

$$\frac{4x^3 - 2x^2 - 2x + (m+10)}{x-2}$$

- es exacta.
- A) 20 B) -20 C) -30
D) -10 E) 10

8. Del esquema de Ruffini

	3	b	1	d
a	12	c	100	
3	6	25	120	

calcule $a+b+c+d$.

- A) 40 B) 38 C) 50
D) 42 E) 30

9. Si al dividir

$$\frac{(\sqrt{3}-1)x^3 + \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{12})x + 4}{x-\sqrt{2}}$$

se obtiene como residuo $(m-1)$, halle el valor de m .

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 7

10. Calcule el resto de

$$\frac{x^{100} + 5x^{20} + (x+1)^4}{x-1}$$

- A) 18 B) 15 C) 16
D) 22 E) 12

11. Halle el resto de

$$\frac{(2x-3)^{21} + (x-3)^{40} + 7x}{x-2}$$

- A) 8 B) 7 C) 14
D) 16 E) 21

12. Halle el residuo de

$$\frac{(x^2-2)^{31} + (x^2-4)^{30} + x}{x^2-3}$$

- A) $x+2$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $2+\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2x+2$

13. Halle el resto de

$$\frac{(x^2+x-4)^4 - (x+5)(x-4)}{x^2+x-2}$$

- A) 34 B) 36 C) $x-36$
D) 32 E) $x+34$

14. Halle el resto de

$$\frac{[(x+7)(x-1)+15]^{203} + x^2 + 6x}{(x+2)(x+4)}$$

- A) 8 B) -8 C) -10
D) 16 E) 6

15. Si al dividir

$$\frac{(x-4)^{20} + (x-6)^{31} + c-4}{x-5}$$

el resto es 10, calcule c .

- A) -5 B) 4 C) 14
D) 10 E) 5

16. Si la división

$$\frac{x^{m+4} - y^{100}}{x^3 - y^{10}}$$

genera un cociente notable, halle el valor de m .

- A) 150 B) 100 C) 26
D) 29 E) 10

$$17. \text{ Si } \frac{x^a - y^{b+4}}{x^2 - y^4}$$

genera un CN de 15 términos, calcule $b-a$.

- A) 30 B) 24 C) 26
D) -24 E) 56

$$18. \text{ Si } \frac{x^{200} - y^{160}}{x^5 - y^4}$$

genera un CN, halle el grado del t_{20} .

- A) 96 B) 187 C) 200
D) 176 E) 196

$$19. \text{ Si la división } \frac{x^{45} + 1}{x + 1}$$

genera un CN, halle el grado del término central.

- A) 20 B) 23 C) 21
D) 25 E) 22

20. Si el término de lugar 9 del desarrollo de

$$\frac{x^{48} - y^{96}}{x^2 - y^4}$$
 es $x^{p+4} \cdot y^{q-2}$, calcule $q-p$.

- A) 9 B) 6 C) 8
D) 19 E) 16

21. La división

$$\frac{(x+3)^8 - 3^8}{x}$$

genera un CN. Calcule el t_6 evaluado en $x=-2$.

- A) -3^6 B) 3^7
D) 3^5

22. Halle el residuo en

$$\frac{x^5 + 2x + 3}{x^2 - 1}$$

- A) $3x$ B) $-3x$ C) 6
D) $x+3$ E) $3x+3$

23. Halle el resto de

$$\frac{x^{60} + x^4 + x^2 + 3}{x^4 - 1}$$

- A) 6 B) x^2 C) $5+x^2$
D) 8 E) x^2+3

24. De la división

$$\frac{x^{50} + 2x + 1}{x^2 + 1}$$

halle la suma de coeficientes del cociente.

- A) 2 B) -1 C) 3
D) 4 E) 1

25. Halle el resto de la división

$$\frac{(x+1)^4 + 11}{x^2 + 2x - 2}.$$

- A) 27 B) 39 C) 40
D) 25 E) 20

26. Si un polinomio cuadrático y mónico es dividido entre $(x+2)$ y $(x-3)$, se obtiene como restos a -6 y 19, respectivamente. Calcule el término independiente del polinomio.

- A) -8 B) -6 C) 6
D) 8 E) -2

27. Si un polinomio cuadrático $P(x)$ es dividido entre $(x+1)$ y $(x-2)$ se obtiene como restos 7 y 19, respectivamente. Halle la suma de coeficientes de $P(x)$ si se sabe que el coeficiente de su término lineal es 2.

- A) 8 B) 10 C) 9
D) 16 E) 11

28. Si al polinomio

$Q(x) = x^6 + x^2 - 2x + 3$ se le incrementa una cantidad b , su residuo al dividirlo entre $x+1$ será 47. ¿Cuál es el valor del cuadrado de b ?

- A) 100 B) 400 C) 64
D) 1600 E) 900

29. Calcule el resto de

$$\frac{(x^2 + 3)^{10} + 2x^{16} + x^{18} - 2x^2}{x^2 + 2}.$$

- A) -4 B) 2 C) 5
D) 4 E) 3

30. Calcule el resto de

$$\frac{5(x+3)(x+5)+(x+6)(x+2)+x(x+7)(x+1)(x+8)}{(x+4)^2}$$

- A) -146 B) 140 C) 135
D) -16 E) 16

31. Calcule el resto de

$$\frac{x^{100} + 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

- A) 2 B) 6 C) 4
D) 5 E) 3

32. Si el polinomio $P_{(x)} = x^4 + x + m$ es divisible por $x+3$, calcule m .

- A) -84 B) -81 C) 78
D) 84 E) 81

33. Calcule el resto de

$$\frac{x^{10} + x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

- A) $x-4$ B) $x+2$ C) $x+4$
D) $x+3$ E) $x-2$

34. Calcule el resto de

$$\frac{x^8 + x^7 + 2x^6 + x^3 - 1}{x^2 - 3}$$

- A) $30x+125$
B) $28x+134$
C) $28x-134$
D) $30x-125$
E) $30x+134$

35. Calcule el resto de

$$\frac{(x^4 + 1)(x^4 + 2)(x^4 + 3) + x}{x^2 - 1}$$

- A) 25
B) 23
C) $x+24$
D) $x+23$
E) $x+25$

36. El resto de la división

$$\frac{(x-2)^5 + (x-3)^5 + x}{(x-2)(x-3)}$$

es $ax+b$. Calcule $a-b$.

- A) 2 B) 8 C) -2
D) -8 E) 1

Claves

1	E	5	D	9	E	13	A	17	C	21	D	25	E	29	C	33	C
2	C	6	B	10	D	14	B	18	D	22	E	26	E	30	C	34	E
3	A	7	C	11	D	15	C	19	E	23	C	27	E	31	C	35	C
4	A	8	D	12	A	16	C	20	C	24	E	28	D	32	C	36	B

CAPÍTULO 6



FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS



En la actualidad nos hallamos frecuentemente conectados a internet y a las redes sociales mediante un ordenador o un Smartphone, ya sea para comunicarnos con otras personas, compartir información, hacer transacciones bancarias, etc. Gran parte de la información que colocamos en internet es personal y es necesario buscar la manera de protegerla de terceros que puedan aprovecharse de ella en perjuicio nuestro. La encriptación juega un rol importante en este proceso, ya que permite ocultar nuestra información mediante el cifrado o codificación de datos. La encriptación está relacionada con la factorización de números enteros, cuya complejidad permite que sea difícil decodificar los datos y los hace más seguros. La factorización de polinomios tiene relación con la factorización de números enteros, ya que ambas consisten en lo mismo, que es descomponer los datos como una multiplicación.

Aprendizajes esperados

- Entender el significado de factorizar un polinomio.
- Conocer los conceptos de factor, polinomio primo y factor primo.
- Identificar los métodos de factorización, principalmente el método de aspa simple que se usa para factorizar polinomios cuadráticos.
- Aplicar el método de divisores que se usa principalmente para factorizar polinomios cúbicos.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Al factorizar un polinomio lo descomponemos como una multiplicación y contribuye cuando queremos resolver ecuaciones o inecuaciones polinomiales. Por ejemplo, para resolver una ecuación cuadrática debemos factorizar el polinomio cuadrático con el método del aspa simple.

Factorización de polinomios

1. CONCEPTO

Se llama factorizar un polinomio al proceso de descomponerlo como una multiplicación de otros polinomios llamados factores.

Ejemplos

- El polinomio $P(x) = x^2 - 9$ con la propiedad de diferencia de cuadrados se factoriza como:

$$P(x) = x^2 - 3^2$$

$$P(x) = (x+3)(x-3)$$

Por lo tanto, hemos expresado $P(x)$ como una multiplicación.

- El polinomio $P(x) = x^2 + 5x + 6$ se factoriza como

$$P(x) = (x+2)(x+3)$$

Por lo tanto, cuando multiplicamos $x+2$ con $x+3$ obtenemos el polinomio

$$P(x) = x^2 + 5x + 6.$$

- El polinomio $P(x) = x^2 - 16$ mediante la propiedad de diferencia de cuadrados se factoriza como

$$P(x) = (x+4)(x-4)$$

factores

1.1. Factorización sobre \mathbb{Z}

Se llama así cuando en la factorización tanto el polinomio que se factoriza como sus factores, son polinomios con coeficientes enteros.

Ejemplo

El siguiente polinomio tiene coeficientes enteros.

$$P(x) = x^2 + 5x + 6$$

Factorizamos

$$P_{(x)} = (x+2)(x+3)$$



Sus factores también son polinomios con coeficientes enteros. Cuando factoricemos un polinomio tanto el polinomio a factorizar como sus factores debe tener coeficientes enteros.

2. FACTOR DE UN POLINOMIO

Cuando factorizamos un polinomio $P_{(x)}$ lo que hacemos es expresarlo como una multiplicación de otros polinomios. A estos últimos les llamamos factores del polinomio $P_{(x)}$.

Ejemplos

- El polinomio $P_{(x)} = x^2 - 16$ se factoriza como

$$P = (x+4)(x-4)$$

Los polinomios $(x+4)$ y $(x-4)$ son los factores de $P_{(x)}$.

Este polinomio también se factoriza como

$$P_{(x)} = (1)(x^2 - 16)$$

Por lo tanto, los polinomios 1 y $x^2 - 16$ también son factores de $P_{(x)}$.

- El polinomio $Q_{(x)} = x^2 + 7x + 12$ se factoriza como

$$Q_{(x)} = (x+3)(x+4)$$

y también como

$$Q_{(x)} = (1)(x^2 + 7x + 12)$$

Por lo tanto, los polinomios $x+3$; $x+4$; 1 y $x^2 + 7x + 12$ son sus factores.

No olvide



El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$ y los números como $\frac{1}{2}; \sqrt{3}; -\pi$ no son números enteros.

¡Cuidado!



El polinomio $P_{(x)} = x^2 - 3$ puede factorizarse como

$$\begin{aligned} P_{(x)} &= x^2 - 3 \\ P_{(x)} &= x^2 - \sqrt{3}^2 \\ P_{(x)} &= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Factorizar

No contaremos con esta factorización porque sus factores $x + \sqrt{3}$ y $x - \sqrt{3}$ tienen coeficientes que no son enteros, y hemos indicado que solo consideraremos polinomios con coeficientes enteros.

Importante



Todo polinomio $P_{(x)}$ se puede factorizar como

$$P_{(x)} = 1 \cdot P_{(x)}$$

2.1. Relación de la factorización con la división

Si un polinomio se divide entre uno de sus factores, la división es exacta.

Ejemplo

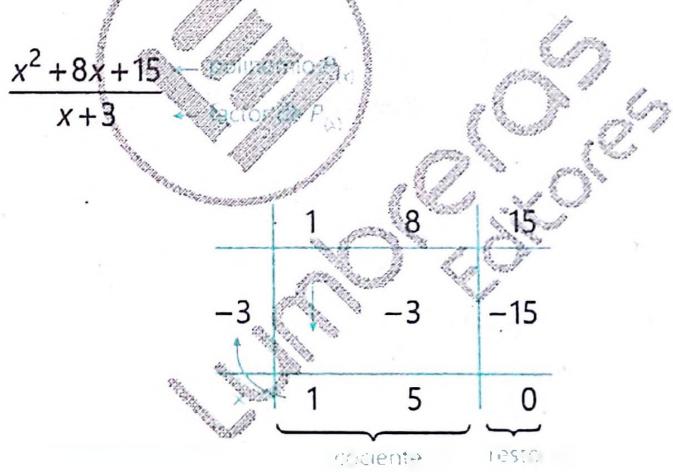
El polinomio $P(x) = x^2 + 8x + 15$ se factoriza como

$$P(x) = (x+3)(x+5)$$

factores

Dividamos $P(x)$ entre su factor $x+3$ para comprobar que la división es exacta.

Aplicamos la regla de Ruffini para efectuar esta división.



Observamos que el resto es igual a cero, con lo cual comprobamos que al dividir un polinomio entre uno de sus factores la división es exacta.

Observamos además, que el cociente de la división es $x+5$.

Este cociente representa el otro factor de $P(x)$.

Entonces

$$P(x) = x^2 + 8x + 15 = (x+3)\underbrace{(x+5)}_{\text{factor } P(x)}$$

APLICACIÓN 1

Un factor del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - m$ es $(x-1)$. Halle el valor de m .

RESOLUCIÓN

Si dividimos $\frac{P(x)}{x-1}$ la división será exacta.

Aplicamos la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c} x^3 + 2x^2 + x - m \\ \hline x - 1 \end{array}$$

1	2	1	$-m$
$x=1$	↓	1	4
		1	$-m+4$

(nº coeficiente del paciente) resto

Como es una división exacta, el residuo es igual a cero.

$$-m+4=0$$

$$\therefore m=4$$

APLICACIÓN 2

Si $x-2$ es un factor de $x^{10} + x - m$, calcule m .

RESOLUCIÓN

La división $\frac{x^{10} + x - m}{x - 2}$ es exacta.

Aplicamos el teorema del resto.

$$R(x) = 2^{10} + 2 - m$$

Como es una división exacta, entonces

$$R(x) = 0$$

$$2^{10} + 2 - m = 0$$

$$1026 - m = 0$$

$$\therefore m = 1026$$

Importante

Como un divisor de 135 es 5, entonces $135 = 5 \times d$
¿Cómo encontramos d ?

Lo encontramos al dividir $\frac{135}{5}$.

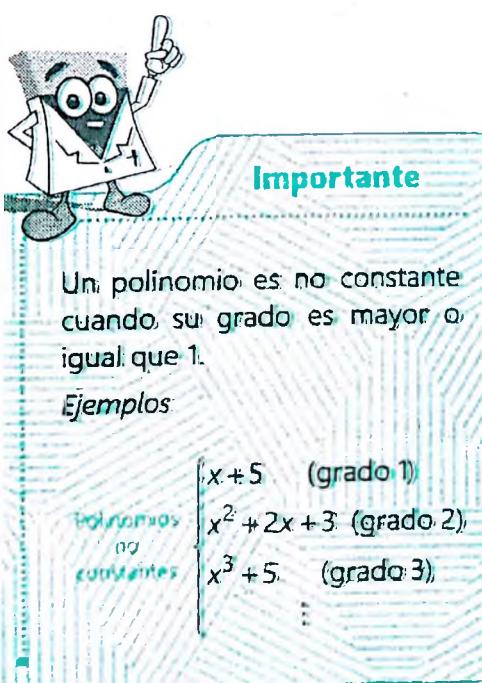
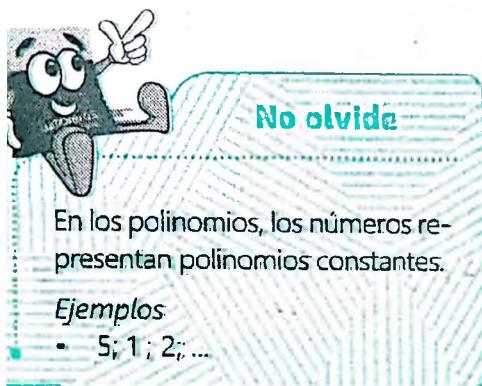
$$\begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ 0 & 27 \end{array}$$

Observamos que d es igual a 27 y representa el cociente al dividir $\frac{135}{5}$.

Lo mismo ocurre en los polinomios.

2.2. Factorización trivial

Cuando un polinomio se factorice como la multiplicación de un factor constante por otro factor no constante, a esta factorización se le llamará factorización trivial.



Ejemplos

- $x^2 + 3x + 2 = (1) \underline{(x^2 + 3x + 2)}$
 ↓ ↓
 factor constante factor no constante
- $2x^2 + 6 = (2) \underline{(x^2 + 3)}$
 ↓ ↓
 factor constante factor no constante
- $5x + 5y = 5 \underline{(x+y)}$
 ↓ ↓
 factor constante factor no constante

2.3. Factorización no trivial

Cuando el polinomio se descomponga como una multiplicación de factores no constantes, lo llamaremos factorización no trivial.

Ejemplo

Sea el polinomio

$$P(x) = x^2 - 9$$

su factorización trivial es

$$P(x) = (1) \underline{(x^2 - 9)}$$

↓ ↓
factor constante factor no constante

su factorización no trivial es

$$P(x) = (x+3)(x-3)$$

T
fatores no constantes

3. POLINOMIO PRIMO

Un polinomio no constante es un polinomio primo cuando no puede descomponerse como una multiplicación de dos factores no constantes. También se le llama polinomio irreducible.

Ejemplos

1. ¿El polinomio $P(x) = x^2 + 6x + 5$ es primo?

Este polinomio puede factorizarse como la multiplicación de dos factores no constantes.

$$P(x) = (x+1)(x+5)$$



Por lo tanto, este polinomio no es primo.

2. ¿El polinomio $P(x) = x^2 + 3$ es primo?

Este polinomio se factoriza como

$$P(x) = (1) \boxed{x^2 + 3}$$



¿Es posible factorizar este polinomio como la multiplicación de dos factores no constantes?

No es posible. Por lo tanto, es un polinomio primo.

Propiedades

- a. Todo polinomio lineal es primo.

Ejemplos

- $P(x) = x + 3$
 - $Q(x) = 2x + 1$
 - $R(x) = x - 5$
- } como son lineales
son primos

- b. Un polinomio cuadrático de la forma $P(x) = x^2 + m$ donde $m \in \mathbb{Z}^+$ es primo.

Ejemplos

- $P(x) = x^2 + 5$
 - $Q(x) = x^2 + 3$
 - $R(x) = x^2 + 9$
- } polinomios primos

Importante



Un polinomio primo es, como mínimo, de grado uno (lineal).

No olvide



Para saber si un polinomio es primo, debemos preguntar:
¿Puede descomponerse como una multiplicación de dos factores no constantes?

Si la respuesta es sí, entonces no es primo. Si la respuesta es no, quiere decir que solo puede factorizarse en forma trivial, entonces, será un polinomio primo.

- c. Un polinomio cuadrático de la forma $P_{(x)}=x^2-m$ donde $m \in \mathbb{Z}^+$ es primo cuando m no es un cuadrado perfecto.

Ejemplos

- $P_{(x)}=x^2-3$
 - $Q_{(x)}=x^2-5$
- polinomios primos

4. FACTORES PRIMOS

Sea $f_{(x)}$ un factor del polinomio $P_{(x)}$. Si $f_{(x)}$ es primo, entonces lo llamaremos factor primo de $P_{(x)}$.

Ejemplos

1. $P_{(x)}=x^3-16x$

Factorizamos

$$P_{(x)}=(x)(x^2-16)$$

El factor x , como es lineal, es primo.

Pero, el factor x^2-16 no es primo ya que puede descomponerse como

$$x^2-16=(x+4)(x-4)$$

Entonces

$$P_{(x)}=(x)(x+4)(x-4)$$



factores primos

Notamos que los factores $x+4$ y $x-4$ son lineales, así que también son factores primos.

Por lo tanto, $P_{(x)}$ tiene tres factores primos los cuales son x , $x+4$ y $x-4$.

2. $Q_{(x)}=(x-5)(x^2+2)(x^2-36)$

Observamos que

El factor $x-5$, como es lineal, es primo.

El factor x^2+2 por su forma es primo.

El factor x^2-36 no es primo y se descompone como

$$(x+6)(x-6).$$

Entonces

$$P_{(x)} = \underline{(x-5)} \underline{(x^2+2)} \underline{(x+6)} \underline{(x-6)}$$

factores primos

Por lo tanto, $Q_{(x)}$ tiene 4 factores primos, los cuales son $x-5$; x^2+2 ; $x+6$ y $x-6$.

4.1. Objetivo de la factorización

Cuando se factoriza un polinomio, el objetivo es expresarlo como una multiplicación de factores primos.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=x^4-13x^2+36$

se factoriza de la siguiente forma:

$$P_{(x)} = \underline{(x^2-4)} \underline{(x^2-9)}$$

¿Estos factores
son primos?

Observamos que los factores x^2-4 y x^2-9 no son primos ya que se descomponen como

- $x^2-4=(x+2)(x-2)$
- $x^2-9=(x+3)(x-3)$

Luego

$$P_{(x)} = \underline{(x+2)} \underline{(x+2)} \underline{(x+3)} \underline{(x-3)}$$

factores primos
(son lineales)

Por lo tanto, hemos expresado a $P_{(x)}$ como una multiplicación de factores primos.

2. En el polinomio

$$P_{(x)} = (x^2-1)(x^2+3x)$$

El factor x^2-1 no es primo, ya que se descompone como $(x+1)(x-1)$.

El factor x^2+3x tampoco es primo, porque se descompone como $(x)(x+3)$.

Luego

$$P_{(x)} = \underline{(x+1)} \underline{(x-1)} \underline{(x)} \underline{(x+3)}$$

factores primos
(son lineales)

De este modo, hemos expresado a $P_{(x)}$ como una multiplicación de factores primos.

4.2. Conteo de factores primos

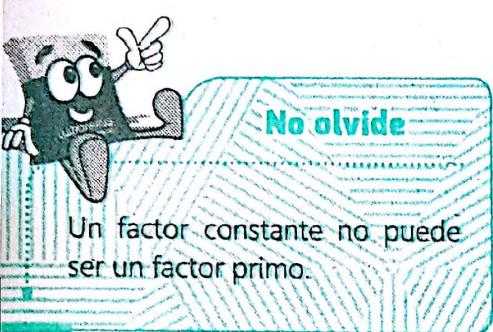
Para poder realizar el conteo debemos expresar el polinomio como una multiplicación de factores primos.

Ejemplos

1. $P_{(x)}=5x^2+10x$

Factorizamos

$$P_{(x)} = 5(x^2+2x)$$



Luego

$$P_{(x)} = 5(x)(x+2)$$

Los factores $x+2$ y x son factores primos porque ambos son lineales, pero el factor 5 no es un factor primo porque es constante.

Por lo tanto, $P_{(x)}$ tiene dos factores primos que son $x+2$ y x .

$$2. P_{(x)} = (x)(x^2 + 3x)$$

Factorizamos

$$P_{(x)} = (x) \cdot (x) \cdot (x+3)$$

Luego

$$P_{(x)} = x^2 \cdot (x+3)$$

Los factores x y $x+3$ son factores primos porque son lineales.

En el factor x , no tomamos en cuenta su exponente, ya que solo indica repetición.

Por lo tanto, $P_{(x)}$ tiene dos factores primos que son x y $x+3$.

$$3. N_{(x)} = (x^2 + 1)(x^2 - 25)$$

Factorizamos

$$N_{(x)} = (x^2 + 1)(x + 5)(x - 5)$$

Los factores $x+5$ y $x-5$ son primos porque son lineales y el factor $x^2 + 1$ es primo por la forma que tiene.

Por lo tanto, el polinomio tiene 3 factores primos.

$$4. Q_{(x)} = x^3(x+5)^2(x+7)^4$$

Los factores primos de $Q_{(x)}$ son x , $x+5$ y $x+7$.

Observamos que sus exponentes indican repetición, entonces no los tomaremos en cuenta.

Por lo tanto, este polinomio tiene 3 factores primos.

5. $R_{(x)} = (x^2 - 4)^3 (x^2 + 2x)$

Factorizamos

$$R_{(x)} = ((x+2)(x-2))^3 (x)(x+2)$$

$$R_{(x)} = (x+2)^3 (x-2)^3 (x) (x+2)^1$$

la misma base

$$R_{(x)} = (x+2)^4 (x-2)^3 (x)$$

Los factores primos de $R_{(x)}$ son $x+2$; $x-2$ y x .

Por lo tanto, hay 3 factores primos.

6. $M_{(x; y)} = xy(x^2 - y^2)$

Factorizamos

$$M_{(x; y)} = xy(x+y)(x-y)$$

Por lo tanto, hay 4 factores primos, los cuales son x , y , $x+y$ y $x-y$.

5. MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

5.1. Factor común

Este método está basado en la propiedad distributiva de los números reales.

$$a(b+c) = ab + ac$$

Para factorizar un polinomio usaremos esta propiedad de la siguiente manera:

$$ab + ac = a(b+c)$$

Factorización

Debemos identificar un factor que se repita en todos los términos del polinomio, al cual llamaremos factor común.

Factorizamos el factor común y el polinomio quedará expresado como la multiplicación de dicho factor común por otro.

No olvide



En una multiplicación de bases iguales se suman los exponentes.

Ejemplos

- $(x+2)^3 (x+2)^1 = (x+2)^4$
- $(x+1)^3 (x+1)^2 = (x+1)^5$
- $(x+3)^1 (x+3)^2 = (x+3)^3$
- $(x-1)^2 (x-1)^4 = (x-1)^6$

Cuidado!



En el valor xy un error común es pensar que representa a un factor primo, cuando en realidad es la multiplicación de dos factores primos.

Ejemplo

- $xy = (x)(y)$

Ejemplos

$$1. \ P_{(x,y)} = 2xy + 3x$$

x es un factor común.

Factorizamos x

$$P_{(x,y)} = (x)(2y+3)$$

Observe que el otro factor ($2y+3$) es lo que queda del polinomio $2xy+3x$ luego de quitar x.

$$2. \ P_{(x,y)} = x^2 + 5x + 2xy$$

Como $x^2 = x \cdot x$

Entonces

$$P_{(x,y)} = x \cdot x + 5x + 2xy$$



Cuando factorizamos x lo que queda es $x+5+2y$ que será el otro factor.

$$P_{(x,y)} = (x)(x+5+2y)$$

$$3. \ P_{(a,b)} = a^3 + a^2b + 5a^2$$

$$P_{(a,b)} = a^2 \cdot a + a^2b + 5a^2$$

factor común

El factor común es a^2 y al factorizarlo el otro factor será $a+b+5$.

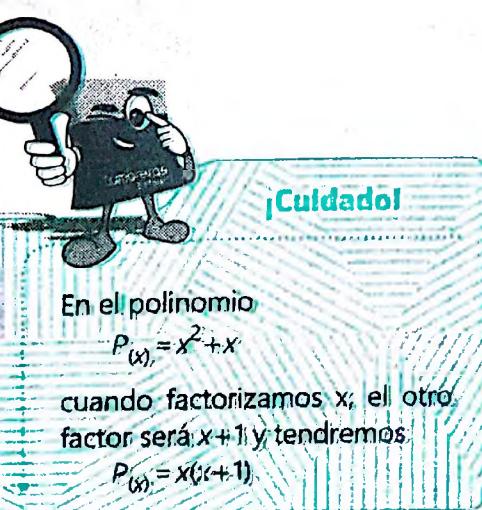
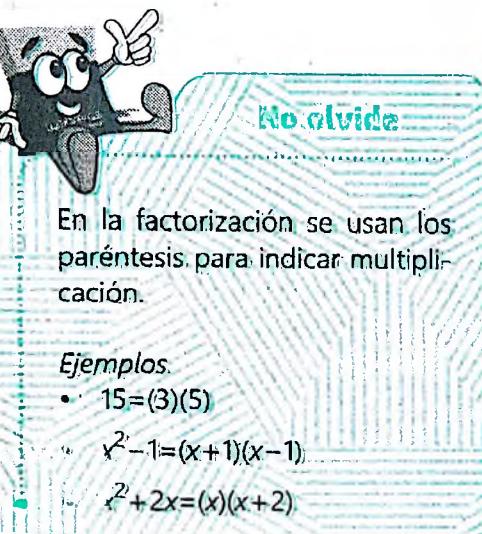
$$P_{(a,b)} = a^2(a+b+5)$$

$$4. \ P_{(a)} = 2a^5 + 3a^3 + a^4$$

$$P_{(a)} = 2a^2 \cdot a^3 + 3a^3 + a \cdot a^3$$

factor común

$$P_{(a)} = a^2(2a^2 + 3 + a)$$



$$5. P_{(a; b)} = ab^4 + 2b^5 + b^6$$

$$P_{(a; b)} = ab^4 + 2b \cdot b^4 + b^2 b^4$$

factor común

$$P_{(a; b)} = b^4(a + 2b + b^2)$$

$$6. P_{(a; b)} = ab + a$$

Tenemos que $a = a \cdot 1$

Entonces

$$P_{(a; b)} = ab + a \cdot 1$$

factor común

Factorizamos a y queda $b + 1$.

$$P_{(a; b)} = a(b + 1)$$

5.2. Agrupación de términos

Consiste en agrupar los términos del polinomio, de tal modo que en cada grupo aparezca un factor común. Luego, aplicamos el método del factor común.

Ejemplos

$$1. P_{(x; y)} = \underbrace{x^3 + x^2 y}_{\text{factor común}} + \underbrace{y^2 x + y^3}$$

$$P_{(x; y)} = x^2(x + y) + y^2(x + y)$$

factor común

$$P_{(x; y)} = (x + y)(x^2 + y^2)$$

$$2. P_{(x)} = \underbrace{x^3 + 5x^2}_{\text{factor común}} + \underbrace{2x + 10}$$

$$P_{(x)} = x^2(x + 5) + 2(x + 5)$$

factor común

$$P_{(x)} = (x + 5)(x^2 + 2)$$

Importante

Cuando en los términos de un polinomio se repite un factor con diferentes exponentes, el factor común será aquel con menor exponente.

Ejemplos

$$1. P_{(a; b)} = a^4 + a^3 b$$

El factor común es a^3

$$P_{(a; b)} = a^3(a + b)$$

$$2. Q_{(x)} = x^3 + 2x^2$$

El factor común es x^2

$$Q_{(x)} = x^2(x + 2)$$

$$3. R_{(x)} = x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

El factor común es x^2

$$R_{(x)} = x^2(x^2 + 2x + 3)$$



Reto al saber

En la clase de álgebra, el profesor pidió a sus alumnos factorizar el polinomio $P_{(x,y)} = x^2 + xy + x$.

- Juan lo factorizó como

$$P_{(x,y)} = x(x+y+1)$$

Aquí no pasa
nada nuevo

- Miguel lo factorizó como

$$P_{(x,y)} = x(x+y)$$

- María lo hizo como

$$P_{(x,y)} = x(x+y+1)$$

¿Quién factorizó correctamente el polinomio?



Cuidado!

Agrupar los términos en un polinomio no es una tarea fácil. Hay que buscar diferentes formas hasta encontrar una donde aparezca un factor común.

5.3. Identidades

Las identidades que se vieron en el capítulo de productos notables son muy útiles para factorizar polinomios. Además, se usan en combinación con los métodos de factor común y agrupación.

5.3.1. Binomio al cuadrado

a. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

b. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Ejemplos

1. $P_{(x)} = x^2 + 6x + 9$

$$\therefore P_{(x)} = (x+3)^2$$

2. $Q_{(x)} = x^2 - 2x + 1$

$$\therefore Q_{(x)} = (x-1)^2$$

3. $P_{(x,y)} = \underline{x^2 + 2xy} + \underline{y^2} + 5(x+y)$

$$P_{(x,y)} = (x+y)^2 + 5(x+y)$$

$$P_{(x,y)} = (x+y)(x+y) + 5(x+y)$$

$$\therefore P_{(x,y)} = (x+y)(x+y+5)$$

4. $R_{(x,y)} = \underline{x^2 + 4xy + 4y^2} + \underline{3x + 6xy}$

$$R_{(x,y)} = (x+2y)^2 + 3(x+2y)$$

$$R_{(x,y)} = (x+2y)(x+2y) + 3(x+2y)$$

$$\therefore R_{(x,y)} = (x+2y)(x+2y+3)$$

5. $Q_{(a,b)} = a^2 + 2ab + b^2 + 6a + 6b + 9$

$$Q_{(a,b)} = (a+b)^2 + 6(a+b) + 9$$

$$\therefore Q_{(a,b)} = (a+b+3)^2$$

5.3.2. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplos

$$1. \quad x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

$$2. \quad x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

$$3. \quad x^2 - (3y)^2 = (x+3y)(x-3y)$$

$$4. \quad (x^3)^2 - (y^2)^2 = (x^3+y^2)(x^3-y^2)$$

$$5. \quad P_{(x; y)} = x^2 + 2xy + y^2 - 25$$

$$P_{(x; y)} = (x+y)^2 - 5^2$$

$$\therefore P_{(x; y)} = (x+y+5)(x+y-5)$$

$$6. \quad R_{(x; y)} = x^2 - y^2 + 10y - 25$$

$$R_{(x; y)} = x^2 - (y^2 - 10y + 25)$$

$$R_{(x; y)} = x^2 - (y-5)^2$$

$$R_{(x; y)} = (x+y-5)(x-(y-5))$$

$$\therefore R_{(x; y)} = (x+y-5)(x-y+5)$$

$$7. \quad M_{(x; y)} = x^2 - y^2 + 2x + 2y$$

$$M_{(x; y)} = (x+y)(x-y) + 2(x+y)$$

$$\therefore M_{(x; y)} = (x+y)(x-y+2)$$

$$8. \quad R_{(a; b)} = a^2 + b^2 - 2ab - 49b^4$$

$$R_{(a; b)} = (a-b)^2 - (7b^2)^2$$

$$\therefore R_{(a; b)} = (a-b+7b^2)(a-b-7b^2)$$

$$9. \quad N_{(a; b)} = a^4 - b^4$$

$$N_{(a; b)} = (a^2)^2 - (b^2)^2$$

$$N_{(a; b)} = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$\therefore N_{(a; b)} = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$$

5.3.3. Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplos

$$1. \quad x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 2^2)$$

$$2. \quad x^3 + 1^3 = (x+1)(x^2 - x + 1^2)$$

$$3. \quad x^3 + (3y)^3 = (x+3y)(x^2 - 3xy + (3y)^2)$$

$$4. \quad Q_{(x; y)} = 8x^3 + 125y^3$$

$$Q_{(x; y)} = (2x)^3 + (5y)^3$$

$$Q_{(x; y)} = (2x+3y)((2x)^2 - (2x)(5y) + (5y)^2)$$

$$\therefore Q_{(x; y)} = (2x+3y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$$

$$5. \quad P_{(x; y)} = x^3 + 27 + 2x + 6$$

$$P_{(x; y)} = (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 2(x+3)$$

$$P_{(x; y)} = (x+3)(x^2 - 3x + 9 + 2)$$

$$\therefore P_{(x; y)} = (x+3)(x^2 - 3x + 11)$$

5.3.4. Diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos

$$1. \quad x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$2. \quad x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$3. \quad P_{(x; y)} = (x + 1)^3 - 27$$

$$P_{(x; y)} = (x + 1)^3 - (3)^3$$

$$P_{(x; y)} = (x + 1 - 3)((x + 1)^2 + 3(x + 1) + 3^2)$$

$$P_{(x; y)} = (x - 2)(x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 + 9)$$

$$\therefore P_{(x; y)} = (x - 2)(x^2 + 5x + 13)$$

$$4. \quad R_{(x; y)} = 8x^3 - 125y^6$$

$$R_{(x; y)} = (2x)^3 - (5y^2)^3$$

$$R_{(x; y)} = (2x - 5y^2)((2x)^2 + (2x)(5y^2) + (5y^2)^2)$$

$$\therefore R_{(x; y)} = (2x - 5y^2)(4x^2 + 10xy^2 + 25y^4)$$

APLICACIÓN 3

Factorice el polinomio

$$P_{(x; y)} = (x^2 - y^2)(x^3 - y^3)$$

e indique el número de factores primos.

RESOLUCIÓN

Al factor $x^2 - y^2$ lo descomponemos como $(x + y)(x - y)$.

Al factor $x^3 - y^3$ también lo descomponemos como $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Luego

$$P_{(x; y)} = (x^2 - y^2)(x^3 - y^3)$$

$$P_{(x; y)} = (x + y)\underbrace{(x - y)(x - y)}_{(x - y)^2}(x^2 + xy + y^2)$$

$$P_{(x; y)} = (x + y)(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$$

Notamos que el factor $x + y$ es primo, porque es lineal.

En $(x - y)^2$ el factor primo es $x - y$. Además su exponente solo indica repetición.

El factor $x^2 + xy + y^2$ también es primo, ya que no puede descomponerse como una multiplicación de factores no constantes.

Por lo tanto, $P_{(x; y)}$ tiene 3 factores primos.

APLICACIÓN 4

Factorice $P_{(x)} = x^4 - 81$ e indique un factor primo.

RESOLUCIÓN

Aplicamos la diferencia de cuadrados en el polinomio $P_{(x)}$.

$$P_{(x)} = x^4 - 81$$

$$P_{(x)} = (x^2)^2 - (9)^2$$

$$P_{(x)} = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9)$$

Observamos que

El factor $x^2 + 9$ es primo.

El factor $x^2 - 9$ se descompone, con la misma propiedad, como $(x + 3)(x - 3)$.

Entonces

$$P_{(x)} = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$$

Los factores $x+3$ y $x-3$ también son primos por ser lineales.

Por lo tanto, un factor primo de $P_{(x)}$ es igual a $x^2 + 9$.

5.4. Aspa simple

Este método se usa para factorizar principalmente los polinomios cuadráticos de una variable y también a otro tipo de polinomios.

Consiste en descomponer los términos extremos como una multiplicación, de modo que al multiplicar en aspa y sumar el resultado sea el término del centro.

Ejemplos

$$1. \quad P_{(x)} = x^2 + 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times x \\ \hline x \\ + 3 \\ + 2 \\ \hline 5x \end{array}$$

$$\therefore P_{(x)} = (x + 3)(x + 2)$$

$$2. \quad R_{(x)} = 12x^2 + 31x + 20$$

$$\begin{array}{r} 4x \\ \times 3x \\ \hline 12x \\ + 5 \\ + 4 \\ \hline 31x \end{array}$$

$$\therefore R_{(x)} = (4x + 5)(3x + 4)$$

$$3. \quad Q_{(x)} = 5x^2 + 7x + 2$$

$$\begin{array}{r} 5x \\ \times x \\ \hline 5x \\ + 2 \\ + 1 \\ \hline 7x \end{array}$$

$$\therefore Q_{(x)} = (5x + 2)(x + 1)$$

Cuidado!

Cuando un polinomio tiene los coeficientes negativos debemos tener cuidado tanto al multiplicar como al sumar, ya que es muy frecuente equivocarse al realizar estas operaciones.



4. $M_{(x)} = 2x^2 + 9x - 35$

$$\begin{array}{r} 2x \quad -5 \\ x \quad 7 \\ \hline 14x \\ 9x \end{array}$$

$$\therefore M_{(x)} = (2x-5)(x+7)$$

5. $N_{(x)} = x^2 - 5x - 36$

$$\begin{array}{r} x \quad -9 \\ x \quad 4 \\ \hline -9x \\ 4x \\ -5x \end{array}$$

$$\therefore N_{(x)} = (x-9)(x+4)$$

6. $T_{(x)} = 5x^2 - 26x - 24$

$$\begin{array}{r} 5x \quad 4 \\ x \quad -6 \\ \hline 4x \\ -30x \\ -26x \end{array}$$

$$\therefore T_{(x)} = (5x+4)(x-6)$$

7. $A_{(x,y)} = 5x^2 - 14xy - 3y^2$

$$\begin{array}{r} 5x \quad y \\ x \quad -3y \\ \hline xy \\ -15xy \\ -14xy \end{array}$$

$$\therefore A_{(x,y)} = (5x+y)(x-3y)$$

8. $B_{(x,y)} = x^4 + 7x^2y^2 + 12y^4$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad 3y^2 \\ x^2 \quad 4y^2 \\ \hline 3x^2y^2 \\ 4x^2y^2 \\ 7x^2y^2 \end{array}$$

$$\therefore B_{(x,y)} = (x^2 + 3y^2)(x^2 + 4y^2)$$

9. $P_{(x)} = x^4 - 3x^2 - 10$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad -5 \\ x^2 \quad 2 \\ \hline -5x^2 \\ 2x^2 \\ -3x^2 \end{array}$$

$$\therefore P_{(x)} = (x^2 - 5)(x^2 + 2)$$



Cuidado!

Para aplicar el método del aspa doble especial, el polinomio debe estar ordenado decrecientemente y si falta algún término se debe completar con cero.

Ejemplo

$$P_{(x)} = x^4 + x^2 + 1$$

Completamos los términos que le faltan y tendremos

$$P_{(x)} = x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1$$

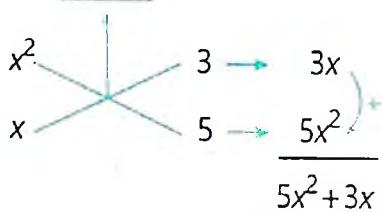
Ahora ya podemos usar el método del aspa doble especial.

$$P_{(x)} = x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad x \\ x \quad -x \\ \hline x \quad 1 \\ -x \quad 1 \end{array}$$

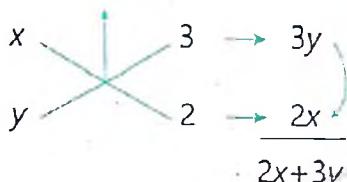
$$\therefore P_{(x)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

10. $R_{(x)} = x^3 + \underline{5x^2} + 3x + 15$



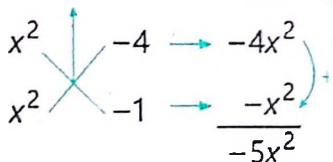
$$\therefore R_{(x)} = (x^2 + 3)(x + 5)$$

11. $M_{(x,y)} = xy + \underline{2x} + 3y + 6$



$$\therefore M_{(x,y)} = (x+3)(y+2)$$

12. $B_{(x)} = x^4 - 5x^2 + 4$



Entonces

$$B_{(x)} = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

$$\therefore B_{(x)} = (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$$

APLICACIÓN 5

Indique la suma de factores primos no comunes en

- $P_{(x)} = x^2 + 3x + 2$

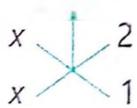
- $Q_{(x)} = 2x^2 + 7x + 5$

- $R_{(x)} = 3x^2 + 4x + 1$

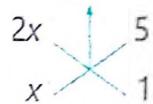
RESOLUCIÓN

Factorizamos con el aspa simple.

- $P_{(x)} = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$



- $Q_{(x)} = 2x^2 + 7x + 5 = (2x+5)(x+1)$



- $R_{(x)} = 3x^2 + 4x + 1 = (3x+1)(x+1)$



El factor en común es $x+1$. Los demás factores $x+2$; $2x+5$ y $3x+1$ son los factores no comunes.

$$\therefore (x+2) + (2x+5) + (3x+1) = 6x+8$$

APLICACIÓN 6

Factorice el polinomio

$$P_{(x)} = x(x+1)(x+2)(x+3) - 24$$

e indique la suma de los términos lineales de sus factores primos.

RESOLUCIÓN

Como el orden de los factores no altera el producto, entonces reordenamos

$$P_{(x)} = x(x+1)(x+2)(x+3) - 24$$

Multiplicamos convenientemente.

$$P_{(x)} = \underbrace{x(x+3)}_{(x^2+3x)} \underbrace{(x+1)(x+2)}_{(x^2+3x+2)} - 24$$

$$P_{(x)} = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 24$$

Ahora, hacemos el siguiente cambio:

$$x^2 + 3x = m$$

Luego

$$P(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_m \underbrace{(x^2 + 3x + 2)}_m - 24$$

$$P(x) = (m)(m+2) - 24$$

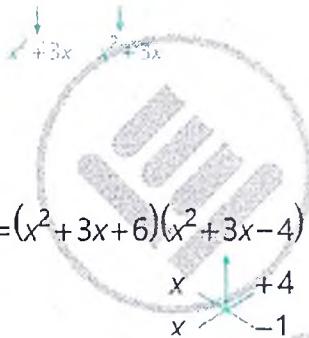
$$P(x) = m^2 + 2m - 24$$



$$P(x) = (m+6)(m-4)$$

Reemplazamos m por $x^2 + 3x$.

$$P(x) = (m+6)(m-4)$$



Luego

$$P(x) = (x^2 + 3x + 6)(x^2 + 3x - 4)$$

$$P(x) = (x^2 + 3x + 6)(x+4)(x-1)$$

Observamos que el factor $x^2 + 3x + 6$ no puede descomponerse con el aspa simple, entonces es primo.

Asimismo, los factores $x+4$ y $x-1$ son primos por ser lineales. Además, hay 3 factores primos y nos piden la suma de sus términos lineales.

FACTORES PRIMOS	TÉRMINOS LINEALES
$x^2 + 3x + 6$	$3x$
$x+4$	x
$x-1$	x

$$\therefore 3x + x + x = 5x$$

5.5. Aspa doble especial

Este método lo usamos para factorizar polinomios de cuarto grado y de una variable.

Ejemplos

- El siguiente polinomio lo factorizaremos con este método.

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$

Descomponemos los términos extremos como una multiplicación. En el caso de x^4 va como $x^2 \cdot x^2$ y en el caso de 20 va como 5×4 .

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & & 5 \\ x^2 & & 4 \end{array}$$

Multiplicamos en aspa y luego sumamos para obtener $9x^2$.

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x^2 & & 5 & & 5x^2 & \\ & x^2 & & 4 & & 4x^2 & \\ & & & & & & \hline & & & & & & 9x^2 \end{array}$$

Posteriormente restamos el término central con $-9x^2$.

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$

$$\begin{array}{ccccc} & x^2 & & 5 & \\ & x^2 & & - & \\ & & & 4 & \\ & & & & \hline & & & 9x^2 & \end{array}$$

Y tendremos

$$15x^2 - 9x^2 = 6x^2$$

Este nuevo resultado, que es $6x^2$ será descompuesto en el centro.

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 2x & 5 \\ x^2 & 3x & 4 \end{array}$$

$$6x^2$$

resultado de $15x^2 - 9x^2$

No olvide

En el método del aspa doble cuando se descomponen los términos se debe tener cuidado con los signos.

Ejemplo

- $-20 = (+5)(-4)$.

Cuidado!

El número cero se descompone como

$$0 = 0 \times 0$$

pero también como

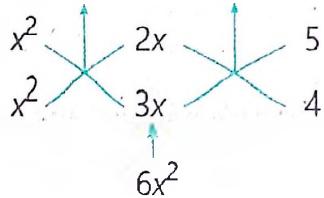
$$0 = 0 \times ()$$

cuquier
otro número



El objetivo de esta descomposición de los términos, es que al final se cumplan las siguientes aspas simples:

$$P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 23x + 20$$



Los factores de $P_{(x)}$ son los siguientes:

$$x^2 + 2x + 5 \quad \wedge \quad x^2 + 3x + 4.$$

$$\therefore P_{(x)} = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 3x + 4)$$

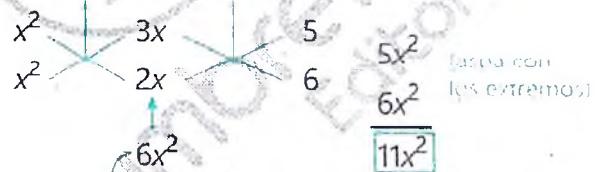
2. $P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 17x^2 + 28x + 30$

Operamos y ordenamos

$$P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 17x^2 + 28x + 30$$

Descomponemos los términos extremos convenientemente y tendremos

$$P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 17x^2 + 28x + 30$$



resultado de $11x^2$

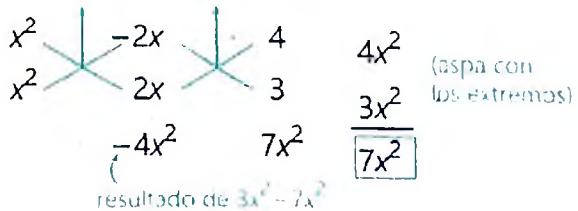
$$\therefore P_{(x)} = (x^2 + 3x + 5)(x^2 + 2x + 6)$$

3. $P_{(x)} = x^4 + 3x^2 + 2x + 12$

Observamos que falta el término cúbico; por ello hay que completar $P_{(x)}$ con $0x^3$.

Aplicamos el método del aspa doble especial.

$$P_{(x)} = x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 2x + 12$$



resultado de $3x^2 - 7x^2$

$$\therefore P_{(x)} = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 3)$$

4. $P(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 11x + 3$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times x^2 \\ \hline 6x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x \\ \times 3x \\ \hline 6x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \times 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 \\ \times x^2 \\ \hline 4x^2 \end{array}$$

resultado de $10x^2 + 4x^2$

$$\therefore P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 3x + 1)$$

5. $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x - 20$

Aplicamos el aspa doble especial.

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x - 20$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \\ \times x^2 \\ \hline 0x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x \\ \times 0x \\ \hline 0x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ \times -4 \\ \hline -12x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5x^2 \\ \times -7x^2 \\ \hline -7x^2 \end{array}$$

(aspas con los extremos)

Luego

$$P(x) = (3x^2 + 2x + 5)(x^2 + 0x - 4)$$

$$P(x) = (3x^2 + 2x + 5)(x^2 - 4)$$

$$\therefore P(x) = (3x^2 + 2x + 5)(x + 2)(x - 2)$$

APLICACIÓN 7

Factorice $P(x) = x^4 - 2x^2 + 16x - 15$

e indique el número de factores primos.

RESOLUCIÓN

Aplicamos el aspa doble especial.

$$P(x) = x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 16x - 15$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times x^2 \\ \hline -4x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -2x \\ \times 2x \\ \hline -4x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \rightarrow 5x^2 \\ \times -3 \rightarrow -3x^2 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$(-2x^2) - (4x^2)$

Importante



La raíz de un polinomio puede ser cualquier tipo de número, pero para el método de divisores binómicos solo nos interesarán las raíces que sean números racionales.

Luego

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 3)$$



$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x+3)(x-1)$$

factor primo cuadrático factores primos lineales

Por lo tanto, el número de factores primos es igual a 3.

¡Cuidado!

Los divisores de un entero pueden ser tanto positivos como negativos.

Ejemplo

- Los divisores de 6 son

$$1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6$$

divisores positivos

divisores negativos



Importante

Un número es la raíz de un polinomio cuando al evaluando en dicho número obtenemos cero.

6. DIVISORES BINÓMICOS

Desarrollaremos un método para factorizar los polinomios de una variable de grado mayor o igual que 2, principalmente polinomios cúbicos.

Con ese fin, necesitamos conocer el concepto de raíz de un polinomio y una propiedad conocida como teorema del factor.

6.1. Conceptos previos

6.1.1. Raíz de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio no constante, diremos que el valor r es una raíz de $P(x)$ si $P(r) = 0$.

Ejemplos

1. $P(x) = x^2 - 7x + 12$

Observamos que

$$P(3) = 3^2 - 7(3) + 12 = 0$$

Como $P(3) = 0$, entonces 3 es una raíz de $P(x)$.

$$P(4) = 4^2 - 7(4) + 12 = 0$$

Por lo tanto, 4 también es una raíz de $P(x)$.

2. $P(x) = x^2 - 9$

El valor 3 es una raíz de $P(x)$, ya que $P(3) = 3^2 - 9 = 0$.

Otra raíz de $P(x)$ es -3 , ya que $P(-3)$ también es igual a cero.

3. ¿Es 2 una raíz de $P_{(x)}=x^3-8$?

Sí lo es, ya que $P_{(2)}=2^3-8=0$.

APLICACIÓN 8

Si 2 es la raíz de

$$P_{(x)}=x^3-5x^2+mx+4,$$

calcule $m+m^2$.

RESOLUCIÓN

Como 2 es la raíz de $P_{(x)}$, entonces $P_{(2)}$ es igual a 0.

Luego

$$P_{(2)}=2^3-5(2)^2+m(2)+4=0$$

$$2m-8=0$$

$$2m=8$$

$$m=4$$

$$\therefore m+m^2=4+4^2=20$$

6.1.2. Cálculo de raíces racionales

Una raíz racional está representada por un número entero o una fracción.

Propiedades

En un polinomio no constante $P_{(x)}$, de coeficientes enteros se cumple lo siguiente:

- Si $P_{(x)}$ tiene una raíz entera, esta debe ser un divisor de su término independiente (TI).
- Si $P_{(x)}$ tiene una raíz que es una fracción, esta se obtiene al dividir un divisor del término independiente entre un divisor del coeficiente principal (CP).

Según estas propiedades las Posibles Raíces Racionales (PRR) de un polinomio se calculan como

$$\text{PRR} = \frac{\text{divisores del TI}}{\text{divisores del CP}}$$

Importante

Si un polinomio es mónico, sus raíces enteras se hallan al evaluar el polinomio en los divisores del término independiente.



No olvide



Buscar una raíz racional es una tarea laboriosa, ya que se deben analizar las posibilidades y ver con cuál de ellas al evaluar en el polinomio, se obtiene cero como resultado.



¡Cuidado!

Hay casos donde los polinomios no tienen una raíz racional.

Ejemplos

$$P(x) = 2x^3 + x + 1$$

$$\text{PRR} = \pm \frac{\text{divisores de } 1}{\text{divisores de } 2}$$

$$\text{PRR} = \pm \frac{1}{1, 2}$$

$$\text{PRR} = \pm 1; \frac{1}{2}$$

Reemplazamos estos valores en $P(x)$.

- $P(1) = 2(1)^3 + 1 + 1 = 4$
- $P(-1) = 2(-1)^3 + (-1) + 1 = -2$
- $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{4}$
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4}$

Con ninguno de estos valores obtuvimos cero, entonces $P(x)$ no tiene ninguna raíz racional.

Ejemplos

$$1. P(x) = x^3 - 3x + 2$$

Buscamos la raíces enteras de $P(x)$.

Si $P(x)$ tiene una raíz entera, esta debe ser un divisor de su término independiente que es 2.

Posibilidades: $1; 2; -1; -2$

divisores de 2

Reemplazamos estos valores en $P(x)$.

- $P(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0$

Como $P(1) = 0$, entonces 1 es la raíz de $P(x)$.

- $P(2) = 2^3 - 3(2) + 2 = 4$

No resultó cero, entonces 2 no es la raíz de $P(x)$.

- $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

Tampoco resultó cero, así que -1 no es la raíz de $P(x)$.

- $P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$

Obtuvimos como resultado cero, entonces -2 es la raíz de $P(x)$.

Por lo tanto, $P(x)$ tiene 2 raíces enteras que son 1 y -2.

$$2. Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 10x - 3$$

Buscamos las raíces enteras de $Q(x)$.

Posibilidades: $1; 3; -1; -3$

divisores de termino independiente -3

Reemplazamos estos valores en $Q(x)$.

- $Q(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - 10(1) - 3 = -6$

No resultó cero, entonces 1 no es la raíz de $Q(x)$.

- $Q(3) = 2(3)^3 + 5(3)^2 - 10(3) - 3 = 66$

No resultó cero, entonces 3 no es la raíz de $Q(x)$.

- $Q(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 - 10(-1) - 3 = 10$

No resultó cero, entonces -1 no es la raíz de $Q(x)$.

- $Q(-3) = 2(-3)^3 + 5(-3)^2 - 10(-3) - 3 = 18$

No resultó cero, entonces -3 tampoco es raíz de $Q(x)$.

Hemos probado todas las posibilidades y al reemplazarlas en $Q(x)$ ningún valor resultó cero. Esto significa que $Q(x)$ no tiene raíces enteras.

Pero aún queda la posibilidad de que tenga una raíz que sea una fracción la cual si existiera, se obtiene al dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente principal.

$$\text{Posibilidades: } \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$$

Reemplazamos estos valores en $Q(x)$.

- $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{13}{2}$
- $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 3$
- $Q\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = 0$
- $Q\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 10\left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = \frac{33}{2}$

Observamos que solo con $\frac{3}{2}$ el resultado fue cero. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ es la única raíz racional de $Q(x)$.

3. $R(x) = 2x^3 + x + 5$

Hallamos las posibles raíces racionales (PRR) al dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente principal.

$$\text{PRR} = \frac{\text{divisores de } 5}{\text{divisores de } 2}$$

$$\text{PRR} = \pm \frac{1; 5}{1; 2}$$

$$\text{PRR} = \pm 1; \frac{1}{2}; 5; \frac{5}{2}$$

Reemplazamos estos valores en $R(x)$.

No olvide



Conocer la raíz de un polinomio, nos proporciona un factor para ese polinomio.

Raíz	Factor
3 →	$x - 3$
5 →	$x - 5$
$\frac{1}{2} \rightarrow$	$x - \frac{1}{2}$
-2 →	$x + 2$

- $R_{(1)} = 2(1)^3 + 1 + 5 = 8$
- $R_{(-1)} = 2(-1)^3 - 1 + 5 = 2$
- $R_{(5)} = 2(5)^3 + 1 + 5 = 260$
- $R_{(-5)} = 2(-5)^3 - 1 + 5 = -250$
- $R_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} + 5 = \frac{23}{4}$
- $R_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 5 = \frac{17}{4}$
- $R_{\left(\frac{5}{2}\right)} = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{5}{2} + 5 = \frac{155}{4}$
- $R_{\left(-\frac{5}{2}\right)} = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{5}{2} + 5 = -\frac{155}{4}$

Con ninguno de estos valores obtuvimos cero. Por lo tanto, este polinomio no tiene ninguna raíz racional.

6.1.3. Teorema del factor

En un polinomio $P_{(x)}$ no constante se cumple que si r es una de sus raíces, entonces $x-r$ será uno de sus factores.

Ejemplos

1. $P_{(x)} = x^2 - 9$

Como $P_{(3)} = 3^2 - 9 = 0$, entonces 3 es una de sus raíces y por el teorema del factor, $x-3$ será uno de sus factores.

2. $P_{(x)} = x^3 + x^2 + x - 3$

Tenemos

$$P_{(1)} = 1^3 + 1^2 + 1 - 3 = 0$$

Observamos que 1 es una raíz $P_{(x)}$ y por el teorema del factor, $(x-1)$ es su factor.

Como $x-1$ es un factor de $P_{(x)}$, entonces

$$P_{(x)} = (x-1) \cdot f_{(x)}$$

El factor $f_{(x)}$ es desconocido, pero lo podemos calcular si dividimos $\frac{P_{(x)}}{x-1}$

Aplicamos la regla de Ruffini.

1	1	1	-3	
1	1	2	3	
1	2	3	0	

resto de la división

El factor $f_{(x)}$ es el cociente de esta división.

Entonces

$$f_{(x)} = x^2 + 2x + 3$$

Luego

$$P_{(x)} = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

Factor obtenido a partir de la regla de Ruffini

Factor obtenido con regla de Ruffini

Observamos que el polinomio $P_{(x)}$ está factorizado. Este procedimiento es la base del método de factorización que veremos a continuación.

6.2. Método de divisores binómicos

Para factorizar un polinomio $P_{(x)}$ de grado mayor o igual a 2 y con coeficientes enteros, aplicamos en el siguiente procedimiento:

- Debemos encontrar una raíz racional de $P_{(x)}$. Supongamos que encontramos que r es una raíz de este polinomio.
- Por el teorema del factor si r es raíz de $P_{(x)}$, entonces $x-r$ es su factor.

- El polinomio $P(x)$ quedará expresado como

$$P(x) = (x - r) \cdot f(x)$$

- Para hallar $f(x)$ dividimos $\frac{P(x)}{x - r}$. El factor $f(x)$ representa el cociente de esta división.

Ejemplos

1. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 5$

Buscamos una raíz racional de $P(x)$.

El valor $x=1$ es una raíz de $P(x)$ debido a que

$$P(1) = 0$$

Luego, $x-1$ es su factor.

Entonces

$$P(x) = (x - 1) \cdot f(x)$$

El factor $f(x)$ lo obtenemos si dividimos $\frac{P(x)}{x - 1}$, entonces aplicamos la regla de Ruffini.

	1	2	2	-5
1				
	1	1	3	8
	1	3	5	0

El factor $f(x)$ es el cociente de esta división.

Entonces

$$f(x) = x^2 + 3x + 5$$

Finalmente

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 5)$$

2. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x^2 - 2$.

Observamos que

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Entonces $\frac{1}{2}$ es una raíz de $P(x)$.

Importante



El teorema del factor es muy importante porque es la base para desarrollar el método de divisores binómicos.

No olvide



Para encontrar una raíz racional evaluamos el polinomio en los valores 1 o -1. Si no es ninguno de ellos, debemos intentar con las otras posibilidades.

Luego, $x - \frac{1}{2}$ es un factor y para hallar el otro, dividimos $\frac{P(x)}{x - \frac{1}{2}}$ y aplicamos la regla de Ruffini.

	2	5	1	-2
$x = \frac{1}{2}$		1	3	2
	2	6	4	0

El otro factor que representamos como $f(x)$ es el cociente de esta división.

Entonces

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 4.$$

Luego

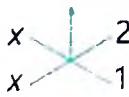
$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 6x + 4)$$

$$P(x) = \left(\frac{2x-1}{2}\right)(2)(x^2 + 3x + 2)$$

$$P(x) = (2x-1)(x^2 + 3x + 2)$$

Factorizamos $x^2 + 3x + 2$ con el aspa simple.

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$



$$\therefore P(x) = (2x-1)(x+2)(x+1)$$

APLICACIÓN 9

Al factorizar el polinomio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

se obtiene $(x^2 - x + a)(x + b)$. Calcule $a + b$.

RESOLUCIÓN

Observamos que

$$P(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 5(2) - 6 = 0,$$

Entonces, 2 es la raíz de $P(x)$ y $x - 2$ es su factor.

Luego

$$P(x) = (x-2) \cdot f(x)$$

Para hallar $f(x)$ dividimos con Ruffini $\frac{P(x)}{x-2}$.

	1	-3	5	-6
$x=2$		2	-2	6
	1	-1	3	0

Entonces

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

Luego

$$P(x) = (x-2)(x^2 - x + 3)$$

Entonces $a = 3$ y $b = -2$.

$$\therefore a+b=1$$

APLICACIÓN 10

Si $x - \alpha$ es el factor común de los polinomios

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4$$

$$Q(x) = x^3 - 5x + 2$$

$$\text{calcule } \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

RESOLUCIÓN

Aplicamos el método de divisores binómicos.

Con el polinomio $P(x)$ tendremos

$$P(x) = x^3 - x^2 + 0x - 4$$

El valor $x=2$ es la raíz de $P(x)$, porque $P(2)=0$.

	1	-1	0	-4
$x=2$	1	2	2	4
	1	1	2	0

Entonces

$$P(x)=(x-2)(x^2+x+2).$$

Con el polinomio $Q(x)$ tendremos

$$Q(x)=x^3+0x^2-5x+2$$

El valor $x=2$ es la raíz de $Q(x)$ porque $Q(2)=0$.

	1	0	-5	2
$x=2$	1	2	4	-2
	1	2	-1	0

Entonces

$$Q(x)=(x-2)(x^2+2x-1)$$

En ambos polinomios se repite el factor $(x-2)$, el cual es el factor en común.

Como $(x-\alpha)$ es el factor en común, entonces $\alpha=2$.

$$\therefore \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

6.3. Criterio para identificar un polinomio primo

Un polinomio cuadrático o cúbico es primo cuando no tiene ninguna raíz racional.

Ejemplos

1. $P(x)=x^2+3x+1$

Sus posibles raíces racionales son 1 o -1.

Al evaluar este polinomio con ninguno de sus valores obtenemos cero, entonces $P(x)$ no tiene raíces racionales. Por lo tanto, este polinomio cuadrático $P(x)$ es primo.

No olvide



Cuando se divide un polinomio entre uno de sus factores, la división es exacta, es decir, el resto es igual a cero.

Importante



¿Cómo podemos saber si $\frac{1}{3}$ es raíz de $3x^3+5x^2+10x-4$?

En vez de reemplazar $\frac{1}{3}$ en el polinomio y ver si resulta cero o no, dividimos el polinomio entre $x - \frac{1}{3}$. Si su resto es igual a cero, entonces es una raíz. Si su resto no es cero, no es raíz.

Entonces

	3	5	10	-4
$\frac{1}{3}$	1	2	4	
	3	6	12	0

Notamos que el resto es igual a cero, entonces $\frac{1}{3}$ es una raíz del polinomio y además $x - \frac{1}{3}$ es su factor.

2. $R_{(x)} = x^3 + 2x^2 + x + 3$

Posibles raíces racionales:

$$\underbrace{\pm 1; 3}$$

divisores del término independiente 3

Al evaluar el polinomio con ninguno de estos valores obtenemos cero, entonces $R_{(x)}$ no tiene raíces racionales.

Este polinomio cúbico $R_{(x)}$ no tiene raíces racionales, por lo tanto, es primo.

3. $Q_{(x)} = x^3 + x + 1$

Sus posibles raíces racionales son 1 o -1. Al evaluar este polinomio $Q_{(x)}$ con ninguno de estos valores, obtenemos cero. Entonces este polinomio no tiene raíces racionales y por lo tanto es primo.



Biografía

Niels Henrik Abel

Nació el 5 de agosto de 1802 en la isla de Finnoy, Noruega. Su familia fue pobre y él también lo fue durante toda su corta vida. Sus tempranas aptitudes matemáticas le valieron el apoyo de uno de sus maestros de la escuela, quien tras la muerte de su padre, financió sus primeros años en la universidad.

Sus trabajos iniciales le dieron prestigio, pero murió producto de la tuberculosis, apenas a los 27 años. Mientras vivió no pudo disfrutar de los beneficios del prestigio y el reconocimiento que sus trabajos de investigación. Su historia es una de las más tristes e injustas que se cuentan entre los matemáticos.

Sus principales aportes están en la teoría de integrales elípticas, aunque es más conocido por su prueba de la imposibilidad de la solución algebraica de la ecuación de quinto grado por radicales. Este es un problema que se conocía desde la época de Cardano y en el que grandes matemáticos como Euler fracasaron en solucionarlo. Tuvo que llegar Abel y luego Galois, para darle solución definitiva a este problema.



FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Consiste en descomponer un polinomio en una multiplicación de otros polinomios.

Factor de un polinomio

Cuando un polinomio $P(x)$ se factoriza como

$$P(x) = f(x) \cdot g(x)$$

A los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se les llama factores de $P(x)$

Factorización sobre \mathbb{Z}

Tanto el polinomio a factorizar como sus factores deben tener coeficientes enteros. No se consideran otros casos.

Polinomio primo

Se llama así cuando solo puede descomponerse como la multiplicación de un factor constante por otro no constante.

Propiedad

Cuando un polinomio se divide entre uno de sus factores, la división es exacta.

Métodos de factorización

Factor común

$$\begin{aligned} P(x; y) &= 5x + 5y \\ P(x; y) &= 5(x+y) \end{aligned}$$

Agrupación

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{x^2 + xy}_{x(x+y)} + \underbrace{2x + 2y}_{2(x+y)} \\ P(x) &= x(x+y) + 2(x+y) \\ P(x) &= (x+y)(x+2) \end{aligned}$$

Identidades

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 5^2 \\ P(x) &= (x+5)(x-5) \end{aligned}$$

Aspa simple

$$P(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 2 \\ & \diagup & \diagdown \\ x & & 1 \end{array}$$

$$P(x) = (x+2)(x+1)$$

Aspa doble especial

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 9x + 6$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & 2x & & 3 \\ & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ x^2 & & x & & 2 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 + 3x + 3)(x^2 + x + 2)$$

Divisores binómicos

$$P(x) = x^3 + x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{c|cccc} \text{raíz} & 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline x=1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline x & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline & & & & x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Sea el polinomio

$$P_{(x;y)} = 2xy(x^2 - y^2)$$

indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

- I. Un factor primo de P es 2.
 - II. Un factor primo de P es xy .
 - III. El polinomio $x^2 - y^2$ no es un factor primo de P .
 - IV. Tiene 4 factores primos.
- A) VVFF B) FVVV C) FVFV
D) FFVV E) FFVF

Resolución

I. Falso

El factor 2 el ser constante no es primo.

II. Falso

El factor xy no es primo, debido que es la multiplicación de x con y (factores no constantes).

III. Verdadero

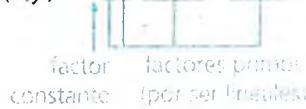
El factor $x^2 - y^2$ se descompone como $(x+y)(x-y)$, entonces no es primo.

IV. Verdadero

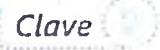
Descomponemos $x^2 - y^2$ como $(x+y)(x-y)$.

Factorizamos $P_{(x;y)}$

$$P_{(x;y)} = 2xy(x+y)(x-y)$$



El polinomio $P_{(x;y)}$ tiene 4 factores primos, los cuales son: $x; y; x+y; x-y$.



I. Un factor primo de P es 2.

II. Un factor primo de P es xy .

III. El polinomio $x^2 - y^2$ no es un factor primo de P .

IV. Tiene 4 factores primos.

- A) VVFF B) FVVV C) FVFV
D) FFVV E) FFVF

Problema N.º 2

Factorice el polinomio $P_{(x)} = x^3 + 3x^2 - 4x$

e indique cuál no es un factor de $P_{(x)}$.

- A) x B) $x^2 + 4x$ C) $x^2 - x$
D) $x^2 + 3x - 4$ E) $x + 3$

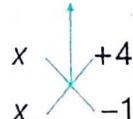
Observamos que $P_{(x)}$ tiene a x como factor común. Entonces

$$P_{(x)} = x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$P_{(x)} = x(x^2 + 3x - 4)$$

El factor $x^2 + 3x - 4$ se logra descomponer con el método del aspa simple.

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$



Luego

$$P_{(x)} = x(x+4)(x-1)$$

Observamos que los factores primos de $P_{(x)}$ son $x; x+4$ y $x-1$.

Si combinamos estos factores entre sí, tendremos más factores de $P_{(x)}$.

$$\left. \begin{array}{l} x(x+4)=x^2+4x \\ x(x-1)=x^2-x \\ (x+4)(x-1)=x^2+3x-4 \\ x(x-4)(x-1)=x^3+3x^2-4x \end{array} \right\} \text{otros factores de } P_{(x)}$$

Por lo tanto, $x+3$ no es un factor de $P_{(x)}$.



Problema N.º 3

Indique un factor primo de $P_{(x,y)}=x^2y^3(x^2+2xy+y^2)$.

- A) x^2 B) y^3
 D) xy C) $x^2+2xy+y^2$
 E) $x+y$

Resolución

Notamos que el factor $x^2+2xy+y^2$ es igual a $(x+y)^2$.

Luego $P_{(x,y)}=x^2 \cdot y^3 \cdot (x+y)^2$.

Los factores primos son y , $(x+y)$ y x .

Los exponentes de estos factores no se toman en cuenta ya que solo indican repetición.

$$x^2=x \cdot x$$

y se repite dos veces

$$y^3=y \cdot y \cdot y$$

y se repite tres veces

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)$$

y se repite dos veces

Por lo tanto, un factor primo de $P_{(x,y)}$ es $x+y$.



Problema N.º 4

Indique un factor primo de

$$P_{(a,b)}=8a^2b^4-12a^3b^3$$

- A) $4a^2$
 B) b^3
 C) ab
 D) b
 E) $2a-3b$

Resolución

Extraemos los factores en común.

$$P_{(a,b)}=8a^2b^4-12a^3b^3$$

$$P_{(a,b)}=4(2a^2b^4-3a^3b^3)$$

$$P_{(a,b)}=4a^2(2b^4 \cdot b - 3ab^3)$$

$$P_{(a,b)}=4a^2(2b^3 \cdot b - 3ab^3)$$

$$P_{(a,b)}=4a^2b^3(2b-3a)$$

El factor 4 por ser constante no es un factor primo.

Los factores a ; b y $2b-3a$ por ser lineales si son factores primos.

Los exponentes de los factores a y b solo indican repetición.

Por lo tanto, un factor primo es igual a b .



Problema N.º 5

Indique un factor primo del polinomio.

$$M_{(x; y)} = x^3y^2 - x^2y^2 + x^2y^3 - xy^3$$

- A) $x+1$ B) $x-1$ C) $y+1$
 D) $y-1$ E) $x-y$

Resolución

Extraemos los factores en común.

$$M_{(x; y)} = x^3y^2 - x^2y^2 + x^2y^3 - xy^3$$

✓ es un factor común

$$M_{(x; y)} = x(x^2y^2 - xy^2 + xy^2y - y^2 \cdot y)$$

✓ es un factor común

$$M_{(x; y)} = xy^2(x^2 - x + xy - y)$$

Aplicamos el método de agrupación en el polinomio $x^2 - x + xy - y$ para factorizarlo de la siguiente manera:

$$\underbrace{x^2 - x}_{\text{factor común}} + \underbrace{xy - y} = (x-1)(x+y)$$

factor común

Luego

$$M_{(x, y)} = xy^2(x-1)(x+y)$$

Sus factores primos son $x, y, x-1, x+y$.

Por lo tanto, un factor primo es igual a $x-1$.

**Problema N.º 6**

Factorice

$$P_{(a; b)} = a^2 - b^2 + 10a + 25$$

e indique la suma de sus factores primos.

- A) $2b+10$ B) $2a+10$ C) $a-10$
 D) $2a-10$ E) $2a+2b$

Resolución

Agrupamos de la siguiente manera:

$$P_{(a; b)} = (a^2 + 10a + 25) - b^2$$

Tengamos en cuenta que

$$a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2$$

Luego

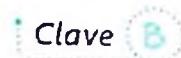
$$P_{(a; b)} = (a+5)^2 - b^2$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$P_{(a; b)} = (a+5+b)(a+5-b)$$

Los factores $a+b+5$ y $a-b+5$ son primos por ser lineales.

$$\therefore (a+b+5) + (a-b+5) = 2a+10$$

**Problema N.º 7**

Indique el factor primo común de

$$P_{(x)} = x^2 + 7x + 6$$

$$Q_{(x)} = 2x^2 + 5x + 3$$

- A) $x+6$ B) $2x+3$ C) $x+3$
 D) $x+1$ E) $x+2$

Resolución

Factorizamos ambos polinomios con el aspa simple.

$$P(x) = x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1)$$

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$$

Por lo tanto, el factor común en ambos polinomios es $x+1$.

Problema N.º 8

Indique un factor primo de

$$P(x) = mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn.$$

- A) $x+m$ B) $x+n$ C) $mx+1$
D) $mx+n$ E) $nx+1$

Resolución

Factorizamos con el aspa simple.

$$P(x) = mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn$$

Luego

$$P(x) = (mx+n)(nx+m)$$

Los factores $mx+n$ y $nx+m$ son primos por ser lineales.

Por lo tanto, un factor primo es $mx+n$.

Problema N.º 9

Indique un factor primo de

$$P(x) = (x-1)^2(x-3)^2 + (x^2 - 5x + 6)^2$$

- A) $x-1$ B) $x+1$ C) $x+2$
D) $x+3$ E) $(x-3)^2$

Resolución

Observamos que

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Luego

$$P(x) = (x-1)^2(x-3)^2 + ((x-2)(x-3))^2$$

$$P(x) = (x-1)^2(x-3)^2 + (x-2)^2(x-3)^2$$

Extraemos el factor común.

$$P(x) = (x-3)^2((x-1)^2 + (x-2)^2)$$

Operamos

$$P(x) = (x-3)^2(x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 3)$$

$$P(x) = (x-3)^2(2x^2 - 6x + 4)$$

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x) = (x-3)^2(2)(x^2 - 3x + 2)$$

$$P(x) = 2(x-3)^2(x-1)(x-2)$$

Los factores primos de $P(x)$ son $x-3$; $x-1$ y $x-2$.

Por lo tanto, un factor primo es $x-1$.

Clave**Clave**

Problema N.º 10

Factorice el polinomio

$$P(x) = 2x^2 - (3a+4)x + a^2 + 2a$$

e indique la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

- A) $a+2$ B) $2a+1$ C) $-a-2$
 D) $-a+2$ E) $-a+1$

Resolución

Factorizamos con el aspa simple.

$$P(x) = 2x^2 - (3a+4)x + \underbrace{a^2 + 2a}_{\text{suma de los términos constantes}}$$

Luego

$$P(x) = (2x-a)(x-(a+2))$$

Los factores $2x-a$ y $x-(a+2)$ son primos por ser lineales.

Nos piden la suma de coeficientes de uno de ellos, entonces calculamos en ambos.

FACTOR PRIMO	COEF.	SUMA DE COEF.
$2x-a$	$2; -a$	$-a+2$
$1 \cdot x - (a+2)$	$1; -(a+2)$	$1-(a+2) = -a-1$

Por lo tanto, la suma de coeficientes de uno de sus factores primos es $-a+2$.

Clave

Problema N.º 11

Indique el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) = (x^2 + 5x)^2 - 4 + (15+3x)(x)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

Resolución

Observamos que

$$(15+3x)(x) = 3x^2 + 15x \rightarrow 3(x^2 + 5x)$$

Luego

$$P(x) = (x^2 + 5x)^2 - 4 + 3(x^2 + 5x)$$

Como $x^2 + 5x$ se repite, entonces cambiamos a la forma $x^2 + 5x = m$

Reemplazamos

$$P(x) = \underbrace{(x^2 + 5x)^2}_{m} - 4 + 3 \underbrace{(x^2 + 5x)}_{m}$$

Tenemos

$$P(x) = m^2 - 4 + 3m$$

$$P(x) = m^2 + 3m - 4$$

$$\begin{array}{r} m \\ \cancel{m} \\ +4 \\ -1 \end{array}$$

$$P(x) = (m+4)(m-1)$$

Reemplazamos

$$m = x^2 + 5x$$

Luego

$$P(x) = (m+4)(m-1)$$

$$\begin{array}{r} m \\ \cancel{m} \\ +4 \\ -1 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 1)$$

Al factor x^2+5x+4 lo descomponemos con el aspa simple como $(x+1)(x+4)$.

El otro factor x^2+5x-1 no podemos descomponerlo con el aspa simple, entonces es primo.

Luego

$$P(x) = (x+1)(x+4)(x^2+5x-1)$$

Por lo tanto, hay 3 factores primos.

Clave C

Problema N.º 12

Luego de factorizar el polinomio

$$P(x) = (x^2 - x)^2 - 10(x^2 - x) + 24$$

indique la suma de sus factores primos.

- A) $3x-2$ B) $4x+1$ C) $3x-6$
 D) $4x-1$ E) $4x-2$

Resolución

Como x^2-x se repite, hacemos el siguiente cambio:

$$x^2-x=a$$

Reemplazamos

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{(x^2-x)^2}_{a^2} - 10 \underbrace{(x^2-x)}_a + 24 \\ &= a^2 - 10a + 24 \\ &\quad \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ -2 \\ a \\ \diagup \quad \diagdown \\ -12 \end{array} \\ &= (a-2)(a-12) \end{aligned}$$

Reemplazamos a por x^2-x .

$$P(x) = (a-2)(a-12)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ P(x) & = & (x^2-x-2) & (x^2-x-12) & & & \\ & & x & -2 & x & -4 & \\ & & \diagup & & \diagup & & \\ & & 1 & x & x & 3 & \\ & & \diagdown & & \diagdown & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Luego

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x-4)(x+3)$$

$$\therefore (x-2)+(x+1)+(x-4)+(x+3)=4x-2$$

Clave E

Problema N.º 13

Factorice

$$P(x) = x^3 + 5(x^2 + 2x + 4) - 8$$

e indique la mayor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos.

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

Resolución

Tenemos

$$P(x) = x^3 + 5(x^2 + 2x + 4) - 8$$

Agrupamos convenientemente.

$$P(x) = (x^3 - 8) + 5(x^2 + 2x + 4)$$

No olvide

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Entonces

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Luego

$$P(x) = (x-2)(\underline{x^2 + 2x + 4}) + \underline{5(x^2 + 2x + 4)}$$

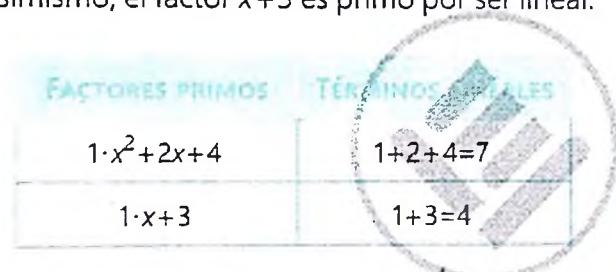
factor común

$$P(x) = (x^2 + 2x + 4)(x-2+5)$$

$$P(x) = (x^2 + 2x + 4)(x+3)$$

El factor $x^2 + 2x + 4$ es primo porque no puede descomponerse con el aspa simple.

Asimismo, el factor $x+3$ es primo por ser lineal.



Por lo tanto, la mayor suma de coeficientes de un factor primo es igual a 7.

Clave E

Problema N.º 14

Factorice $P(x; y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2y^2$ e indique cuántos factores primos tiene.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Tenemos

$$4x^2y^2 = (2xy)^2$$

Luego

$$P(x; y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - (2xy)^2$$

Aplicamos la propiedad de la diferencia de cuadrados.

$$P(x; y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - (2xy)^2$$

$$P(x; y) = (x^2 + y^2 - 1 + 2xy)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy)$$

Ordenamos convenientemente,

$$P(x; y) = \underline{(x^2 - 2xy + y^2 - 1)} \underline{(x^2 - 2xy + y^2 - 1)}$$

$$P(x; y) = ((x+y)^2 - 1)((x-y)^2 - 1)$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$(x+y)^2 - 1^2 = (x+y+1)(x+y-1)$$

$$(x-y)^2 - 1^2 = (x-y+1)(x-y-1)$$

Luego

$$P(x; y) = \underline{(x+y+1)} \underline{(x+y-1)} \underline{(x-y+1)} \underline{(x-y-1)}$$

factores primos
(son lineales)

Por lo tanto, $P(x; y)$ tiene 4 factores primos.

Clave D

Problema N.º 15

Si $x-3$ es factor de

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + m,$$

halle m .

- A) -27 B) 18 C) -30
D) 24 E) 30

Resolución

Como $x-3$ es un factor de $P(x)$, cuando dividamos $\frac{P(x)}{x-3}$ la división será exacta.

Es decir, el resto que resulta de dividir $\frac{P(x)}{x-3}$ será igual a cero.

Aplicamos la regla de Ruffini.

	1	2	-5	m
$x=3$	1	3	15	30
	1	5	10	0

Calculamos el resto $m+30=0 \rightarrow m=-30$
 $\therefore m=-30$

Aplicamos la regla de Ruffini.

	1	2	m	-2
2	1	2	8	$2m+16$
	1	4	$m+8$	$2m+14$

El cociente de esta división, que es $f(x)$ es igual a
 $f(x)=x^2+4x+(m+8)$

Esta división es exacta debido a que $x-2$ es un factor de $P(x)$.

Entonces, el resto $2m+14$ debe ser igual a 0.

$$2m+14=0 \rightarrow m=-7$$

Luego en $f(x)$ tenemos que

$$f(x)=x^2+4x+(m+8)$$

$$f(x)=x^2+4x+1$$

$$\therefore f(x)+m=x^2+4x-6$$

Clave

Problema N.º 16

Si el polinomio

$$P(x)=x^3+2x^2+mx-2$$

se factoriza como $P(x)=(x-2)f(x)$, halle $f(x)+m$.

- A) x^2+3x+5 B) x^2+4x+1 C) x^2+4x-6
 D) x^2+3x-6 E) x^2+4x+8

Resolución

Como $P(x)=(x-2)f(x)$, entonces calculamos $f(x)$ si

dividimos $\frac{P(x)}{x-2}$. Es decir, $f(x)$ es el cociente de

$$\frac{P(x)}{x-2} = \frac{x^3+2x^2+mx-2}{x-2}$$

Problema N.º 17

Factorice

$$P(x)=x^3-6x^2-x+30$$

e indique la suma de sus factores primos.

- A) $3x-6$ B) $3x-5$ C) $3x+7$
 D) $3x+4$ E) $3x-1$

Resolución

Debemos buscar una raíz racional de $P(x)$, las posibilidades a analizar son los divisores de 30 y si probamos con esos valores encontramos que

$$P(3)=3^3-6(3)^2-3+30=0$$

El valor 3 es una raíz de $P_{(x)}$ y su factor es $x-3$.

$$P_{(x)} = (x-3) \cdot f_{(x)}$$

Para hallar $f_{(x)}$ dividimos $\frac{P_{(x)}}{x-3}$ con la regla de Ruffini.

1	-6	-1	30
$x=3$	↓	3	-9
1	-3	-10	0

Luego

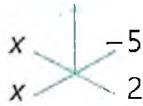
$$f_{(x)} = x^2 - 3x - 10$$

Entonces

$$P_{(x)} = (x-3)(x^2 - 3x - 10)$$

Ahora, el factor $x^2 - 3x - 10$ se puede descomponer con el aspa simple.

$$x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$$



Entonces

$$P_{(x)} = (x-3)(x-5)(x+2)$$

factores primos
(son lineales)

$$\therefore (x-3) + (x-5) + (x+2) = 3x - 6$$

Clave A

Problema N.º 18

Si $f_{(x)}$ es un factor primo de

$$P_{(x)} = x^3 - 5x^2 - 4x + 20;$$

halle el menor valor de $f_{(1)}$.

- A) 3 B) 1 C) -2
D) -4 E) -1

Resolución

Buscamos una raíz racional entre los divisores del término independiente que es 20.

Notamos que 2 es una raíz de $P_{(x)}$.

$$P_{(2)} = 2^3 - 5(2)^2 - 4(2) + 20 = 0$$

Como 2 es la raíz de $P_{(x)}$, entonces $x-2$ es su factor y luego

$$P_{(x)} = (x-2)f_{(x)}$$

Hallamos $f_{(x)}$ al dividir $\frac{P_{(x)}}{x-2}$ con la regla de Ruffini.

1	-5	-4	20
$x=2$	↓	2	-6
1	-3	-10	0

El factor $f_{(x)}$ es el cociente de esta división.

$$f_{(x)} = x^2 - 3x - 10$$

Descomponemos con el aspa simple.

$$f_{(x)} = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$$



Luego

$$P_{(x)} = (x-2)(x-5)(x+2)$$

Calculamos el menor valor de $f_{(1)}$ donde $f_{(x)}$ representa uno de estos tres factores primos.

POSSIBILIDADES PARA $f_{(x)}$

$x-2$	$1-2=-1$
$x-5$	$1-5=-4$
$x+2$	$1+2=3$

Por lo tanto, el menor valor de $f_{(1)}$ es -4.

Clave D

Problema N.º 19

Factorice $P(x) = 4x^4 + 11x^2 - 3$
e indique el número de factores lineales.

- A) 0 B) 2 C) 3
D) 1 E) 4

Resolución

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x) = 4x^4 + 11x^2 - 3$$

$$P(x) = (4x^2 - 1)(x^2 + 3)$$

Al factor $4x^2 - 1$ lo descomponemos con la propiedad de la diferencia de cuadrados.

$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 \rightarrow (2x+1)(2x-1)$$

Observamos que el factor $x^2 + 3$, por su forma, es primo.

Luego

$$P(x) = (2x+1)(2x-1)(x^2+3)$$

Por lo tanto, $P(x)$ tiene 2 factores lineales.

**Problema N.º 20**

Factorice $P(x) = x^4 + 5x^2 + 9$
e indique la suma de coeficientes de sus factores primos.

- A) 1 B) 2 C) -2
D) 4 E) 5

Resolución

El polinomio $P(x)$ no puede descomponerse con el aspa simple.

Entonces

$$P(x) = x^4 + 5x^2 + 9$$

Sumamos y restamos x^2 .

$$P(x) = x^4 + 5x^2 + x^2 + 9 - x^2$$

$$P(x) = \underline{(x^4 + 6x^2 + 9)} - x^2$$

$$P(x) = (x^2 + 3)^2 - x^2$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$P(x) = (x^2 + 3 + x)(x^2 + 3 - x)$$

$$P(x) = \underline{(x^2 + x + 3)}(x^2 - x + 3)$$

factores primos cuadráticos

Debemos calcular la suma de coeficientes de uno de estos factores primos.

FACTORES PRIMOS	SUMA DE COEF.
$x^2 + x + 3$	$1+1+3=5$
$x^2 - x + 3$	$1-1+3=3$

Por lo tanto, la suma de coeficientes de uno de sus factores primos es igual a 5.



Problema N.º 21

Factorice

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Calcule la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Al evaluar $P(x)$ en $x=-2$ obtenemos $P(-2)=0$, además -2 es una raíz de $P(x)$ y asimismo $x+2$ es su factor.

Entonces

$$P(x) = (x+2) \cdot f(x).$$

Para hallar $f(x)$ dividimos $\frac{P(x)}{x+2}$.

$$\begin{array}{c} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline x=-2 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Luego

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Este polinomio es primo porque no tiene ninguna raíz racional.

Entonces

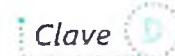
$$P(x) = (x+2) \underline{\underline{(x^3 + x^2 + 2x + 1)}}$$

factores primos

Debemos calcular la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

FACTORES PRIMOS	SUMA DE COEF.
$x+2$	$1+2=3$
$x^3 + x^2 + 2x + 1$	$1+1+2+1=5$

Por lo tanto, la suma de coeficientes de uno de sus factores primos es igual a 5.

**Problema N.º 22**

Factorice

$$P(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$$

e indique el número de factores primos.

- A) 6 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Agrupamos convenientemente.

$$P(x) = \underline{\underline{x^6 - 4x^4}} - \underline{\underline{x^2 + 4}}$$

$$P(x) = x^4(x^2 - 4) - (x^2 - 4)$$

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^4 - 1)$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$\rightarrow (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

Luego

$$P(x) = (x+2)(x-2)(x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

Por lo tanto, hay 5 factores primos.



Problema N.º 23

Factorice

$$P_{(x; y)} = (xy + 1)^2 + (x + y)(xy + 2) + xy + 1$$

e indique un factor primo.

- A) $xy + 1$ B) $x + 2$ C) $y + 2$
 D) $x + y$ E) $xy + 2$

ResoluciónExpresamos $P_{(x; y)}$ convenientemente.

$$P_{(x; y)} = \underbrace{(xy + 1)^2}_{m^2} + (x + y)(\underbrace{xy + 1 + 1}_{m+1}) + \underbrace{xy + 1}_{m}$$

$$P_{(x; y)} = m^2 + (x + y)(m + 1) + m$$

$$P_{(x; y)} = \underbrace{m^2 + m}_{m(m+1)} + (x + y)(m + 1)$$

$$P_{(x; y)} = m(m + 1) + (x + y)(m + 1)$$

factor común

Luego

$$P_{(x; y)} = (m + 1)(m + x + y)$$

 $xy + 1$ $xy + 1$

$$P_{(x; y)} = (xy + 1 + 1)(xy + 1 + x + y)$$

$$P_{(x; y)} = (xy + 2)(\underbrace{xy + x + y + 1}_{x(y+1) + x(y+1)})$$

factor común

$$P_{(x; y)} = (xy + 2)(y + 1)(x + 1)$$

Por lo tanto, un factor primo es $xy + 2$.**Clave****E****Problema N.º 24**

Factorice el polinomio

$$P_{(x)} = x^2 + 90x + 2016$$

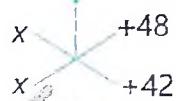
e indique la mayor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos.

- A) 47 B) 40 C) 56
 D) 49 E) 51

Resolución

Aplicamos el aspa simple.

$$P_{(x)} = x^2 + 90x + 2016$$



$$P_{(x)} = (x + 48)(x + 42)$$

Calculamos la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

FACTORES PRIMOS	SUMA DE COEFICIENTES
$1 \cdot x + 48$	$1 + 48 = 49$
$1 \cdot x + 42$	$1 + 42 = 43$

Por lo tanto, la mayor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos es 49.

Clave **Problema N.º 25**Si $x + \alpha$ y $x + \beta$ son factores primos del polinomio $P_{(x)} = (x + 5)(x + 4) - 6$, calcule $\alpha^\beta + \beta^\alpha$.

- A) 150 B) 154 C) 32
 D) 145 E) 177

Resolución

Tenemos

$$P(x) = (x+5)(x+4)-6$$

Operamos

$$P(x) = (x^2 + 9x + 20) - 6$$

$$P(x) = x^2 + 9x + 14$$

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x) = x^2 + 9x + 14$$



$$P(x) = (x+7)(x+2)$$

Los factores primos de $P(x)$ son $x+7$ y $x+2$. Entonces $\alpha=7$ y $\beta=2$.

$$\therefore \alpha^\beta + \beta^\alpha = 7^2 + 2^7 = 49 + 128 = 177$$

Problema N.º 26

Si $x-2016$ es un factor del polinomio

$$P(x) = (x+9)^3 - m,$$

calcule $\sqrt[6]{m} - 1$.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 25 | B) 44 | C) 24 |
| D) 30 | E) 36 | |

Resolución

Como $x-2016$ es un factor de $P(x)$, entonces 2016 es una raíz de $P(x)$.

$$P(2016) = 0$$

Reemplazamos

$$P(2016) = (2016+9)^3 - m = 0$$

$$(2025)^3 - m = 0$$

$$m = (2025)^3$$

$$\sqrt[6]{m} - 1 = \sqrt[6]{(2025)^3} - 1$$

$$\sqrt[6]{m} = \sqrt{2025} - 1$$

$$\rightarrow \sqrt[6]{m} = 45 - 1$$

$$\therefore \sqrt[6]{m} = 44$$

Clave

Problema N.º 27

Calcule el número de factores primos del polinomio

$$P(x) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6.$$

- | | | |
|------|------|------|
| A) 2 | B) 3 | C) 4 |
| D) 5 | E) 6 | |

Resolución

Hacemos el siguiente cambio:

$$x^2 = m$$

Reemplazamos en $P(x)$:

$$P(x) = (x^2)^3 - 6(x^2)^2 + 11(x^2) - 6$$

$$P(x) = m^3 - 6m^2 + 11m - 6$$

Aplicamos el método de divisores binómicos.

Si $m=1$, entonces

$$P(x) = 1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$$

Con este valor de m aplicamos la regla de Ruffini

	1	-6	11	-6
$m=1$		1	-5	6
	1	-5	6	0

Luego

$$P(x) = (m-1)(m^2 - 5m + 6)$$

$$\begin{array}{l} m \\ m \\ \hline -3 \\ -2 \end{array}$$

$$P(x) = (m-1)(m-3)(m-2)$$

Reemplazamos $m=x^2$.

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3)(x^2 - 2)$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - 3)(x^2 - 2)$$

factores primos

Por lo tanto, hay 4 factores primos.

Clave

Problema N.º 28

Factorice el polinomio $P(x, y) = 6x^2 + xy - 40y^2$ e indique la menor suma de coeficientes que tiene uno de los factores primos.

- A) -2
- B) -6
- C) 6
- D) 2
- E) -3

Resolución

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x, y) = 6x^2 + xy - 40y^2$$

$$\begin{array}{r} 3x \\ 2x \\ \hline +8y \\ -5y \end{array}$$

$$P(x, y) = (3x+8y)(2x-5y)$$

Debemos calcular la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

FACTORES PRIMOS	SUMA DE COEFICIENTES
$3x+8y$	$3+8=11$
$2x-5y$	$2-5=-3$

Por lo tanto, la menor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos es -3.

Clave

Problema N.º 29

Indique un factor primo del polinomio

$$P(x) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 - x^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2$$

- A) $x+\alpha$
- B) $x+\alpha+\beta$
- C) $x+\alpha-\beta$
- D) $x+\beta$
- E) $x-\alpha-\beta$

Resolución

Tenemos que

$$P(x) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 - x^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2$$

Operamos:

$$P(x) = (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) + (x^2 + 2\beta x + \beta^2) - x^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2$$

$$P(x) = x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

Agrupamos convenientemente.

$$P(x) = (x^2 + 2\beta x + \beta^2) + (2\alpha x + 2\alpha\beta)$$

$$P(x) = (x + \beta)^2 + 2\alpha(x + \beta)$$

$$P(x) = (x + \beta)(x + \beta + 2\alpha)$$

Por lo tanto, un factor de $P(x)$ es $x + \beta$.

Clave

D

Problema N.º 30

Factorice el polinomio

$$P(x) = x^2(x^2 + 1) - 20$$

e indique el número de factores primos.

- A) 0 B) 2
D) 1

Resolución

Tenemos

$$P(x) = x^2(x^2 + 1) - 20$$

Operamos

$$P(x) = x^4 + x^2 - 20$$

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x) = x^4 + x^2 - 20$$



Luego

$$P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 4)$$

$$P(x) = (x^2 + 5)(x + 2)(x - 2)$$



Por lo tanto, hay 3 factores primos.

Clave

C

Problema N.º 31

Factorice el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$$

e indique la menor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos.

- A) 1 B) 4
C) 3
D) 2 E) -1

Resolución

Tenemos

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$$

Sumamos y restamos $4x^2$.

$$\tilde{P}(x) = (x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 9) - 4x^2$$

$$\tilde{P}(x) = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2$$

$$\tilde{P}(x) = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$P(x) = (x^2 + 3 + 2x)(x^2 + 3 - 2x)$$

$$P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$$

Debemos calcular la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

FACTORES PRIMOS	SUMA DE COEFICIENTES
$1 \cdot x^2 + 2x + 3$	$1+2+3=6$
$1 \cdot x^2 - 2x + 3$	$1-2+3=2$

Por lo tanto, la menor suma de coeficientes que tiene uno de sus factores primos es 2.

Clave

D

Problema N.º 32

Indique el número de factores primos del polinomio.

$$P(x) = x^5 + 14x^4 - 40x^3 - 560x^2 + 144x + 2016.$$

- | | | |
|------|------|------|
| A) 2 | B) 3 | C) 1 |
| D) 5 | E) 4 | |

Resolución

Aplicamos el método de agrupación.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^5 + 14x^4) - (40x^3 + 560x^2) + \\ &\quad + (144x + 2016) \end{aligned}$$

$$P(x) = x^4(x+14) - 40x^2(x+14) + 144(x+14)$$

$$P(x) = (x+14)(x^4 - 40x^2 + 144)$$

Aplicamos el aspa simple.

$$P(x) = (x+14)(x^4 - 40x^2 + 144)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times x^2 \\ \hline -36 \\ -4 \end{array}$$

$$P(x) = (x+14)(x^2 - 36)(x^2 - 4)$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$P(x) = (x+14)(x+6)(x-6)(x+2)(x-2)$$

Por lo tanto, hay 5 factores primos.

Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Factorice el polinomio

$$P_{(a; b)} = (a+2) + (a+2) \cdot b$$

luego, indique un factor primo.

- A) b B) $a+1$ C) a
 D) $a+b$ E) $b+1$

2. Al factorizar

$$P_{(a; b)} = 6b + 3ab + 2 + a$$

indique un factor primo.

- A) $2+a$ B) $b+1$ C) $3b+2$
 D) $a+b$ E) $a+3b$

3. Luego de factorizar

$$Q_{(m; n)} = 2m + 2n + m^2 + mn$$

indique el número de factores primos.

- A) 1 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 2

4. Factorice

$$Q_{(m; n)} = 4m^2n - 8m^3 + 3mn - 6m^2$$

e indique la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 9 B) 0 C) -2
 D) 7 E) 4

5. Factorice

$$H_{(x)} = 81x^2 - 1$$

e indique un factor primo.

- A) $x+1$ B) $x-1$ C) $9x+1$
 D) $3x+1$ E) $3x-1$

6. Factorice

$$R_{(x)} = (x+3)^2 - 4$$

e indique el término independiente de un factor primo.

- A) 3 B) 4 C) 7
 D) 5 E) 8

7. Luego de factorizar

$$H_{(x; y)} = (x+2)^2 - (y+1)^2$$

indique un factor primo.

- A) $x+2$ B) $x-y-2$ C) $x-y+1$
 D) $y+1$ E) $x-y$

8. Factorice

$$M_{(x)} = 125x^3 + 1$$

e indique la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 0 B) 24 C) 21
 D) 1 E) 30

9. Luego de factorizar

$$R_{(x; y)} = x^2 + 6xy + 8y^2$$

indique un factor primo.

- A) $3y$ B) $x+y$ C) $x+3y$
 D) $x-3y$ E) $x+2y$

10. Factorice

$$H_{(x)} = (x+3)^2 + 8(x+3) + 16$$

e indique un factor primo.

- A) $x-4$ B) $x+5$ C) $x-6$
 D) x E) $x+7$

11. Factorice

$$P_{(x)} = 22x + 45x^2 - 3$$

y halle la suma de los términos independientes de sus factores primos.

- A) 4 B) 6 C) -5
 D) 2 E) -2

12. Factorice

$P_{(x)} = (x+1)^2 - 5(x+1) + 4$
e indique un factor primo.

- A) $x+4$ B) x C) $x-2$
D) $x+1$ E) $x-5$

13. Con relación al esquema del aspa simple

$$M_{(x)} = 18x^2 + 31x + m$$

halle $a^2 - b^2 + m$.

- A) 6 B) 5 C) 2
D) 8 E) 4

14. Factorice

$$H_{(y)} = y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 3y + 2$$

e indique la mayor suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 5 B) 1 C) 4
D) 2 E) 3

15. Luego de factorizar

$$R_{(x)} = 6x^3 + 6x + 7x^2 + 1 + x^4$$

calcule la suma de los términos independientes de sus factores primos.

- A) 2 B) 6 C) 7
D) 1 E) 4

16. Indique el número de factores primos

luego de factorizar el siguiente polinomio:
 $R_{(x)} = x^4 - 3x^2 - x^3 + 2 + x$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

17. Factorice

$M_{(x)} = x^3 - x^2 - 3 - 5x$
e indique el número de factores primos.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 0 E) 1

18. Factorice

$$R_{(x)} = x^2(x-2) - 3(2x+1)$$

e indique el factor primo que tenga la mayor suma de coeficientes.

- A) $x-1$ B) $x+1$ C) $x-2$
D) $x+3$ E) $x+2$

19. Factorice el polinomio

$$Q_{(x)} = 2x^3 + x^2 - x - 2$$

e indique el término lineal de un factor primo.

- A) $2x$ B) $3x$ C) $-2x$
D) $-x$ E) $-3x$

20. Luego de factorizar

$$M_{(x)} = x^3 - x^2 - 4x + (a-2)$$

se obtiene como factor a $x^2 + x - 2$. Halle el valor de a .

- A) 4 B) -4 C) -2
D) 6 E) 2

21. Si $(x+5)$ es factor de

$$P_{(x)} = x^3 + 10x^2 + mx + 30,$$

halle m .

- A) 24 B) 27 C) 31
D) 30 E) 25

22. Luego de factorizar

$$R_{(x)} = 6x^2 + (5a+16)x + a^2 + 7a + 10$$

halle la suma de factores primos.

- A) $5x+a+7$ B) $5x+7$ C) $3x+2a$
D) $5a+16$ E) $5x+2a+7$

23. Luego de factorizar

$$P_{(x)} = x(x+1)(x+2)(x+3) - 15$$

indique la menor suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 5 B) 1 C) 9
D) 10 E) 4

24. Factorice

$$M_{(y)} = 3y(y^2 + 6y + 8) - y(y^2 + 7y + 12)$$

e indique el término independiente de un factor primo.

- A) 3 B) 2 C) 1
D) 5 E) 7

25. Factorice

$$M_{(a, b)} = a^3 - 3a^2b - 2b^3 + 3ab^2$$

e indique un factor primo.

- A) $a^2 - ab + b$
B) $a - 2b^2$
C) $a^2 - b$
D) $a^2 - a + b^2$
E) $a - 2b$

26. Factorice

$$P_{(x, y)} = xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$$

e indique un factor primo.

- A) $bx + a$ B) $ax + by$ C) $ax + b$
D) $by + a$ E) $a + b$

27. Al factorizar el polinomio

$$M_{(a)} = 3a^3 + 18 - 21a$$

se obtiene

$$M_{(a)} = 3(a+m)(a+n)(a+p).$$

Halle $n+p+m$.

- A) 0 B) 3 C) 2
D) -2 E) 1

28. Indique el término independiente de uno de los factores primos de

$$P_{(x, y)} = 5 + (x+y-4)^2 + 18(x+y).$$

- A) 5 B) 4 C) 9
D) 2 E) 7

29. Indique uno de los factores primos de

$$P_{(x)} = x^4 - 5x^2 + 4.$$

- A) $x-5$ B) $x-3$ C) $x+2$
D) $x+5$ E) $x+4$

30. Indique un factor primo luego de factorizar

$$R_{(a, b)} = (a^2 - 6ab + b^2)^2 - 4ab(a+b)^2.$$

- A) $a^2 + b^2$
B) $a - b$
C) $a^2 - 4ab + b^2$
D) $a^2 - 6ab$
E) $a^2 + 4ab$

31. Factorice el polinomio

$$P_{(x)} = x^4 + 20x^2 - 2016$$

calcule la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

- A) -5 B) -20 C) 8
D) -35 E) 37

32. El polinomio

$$P_{(x)} = (x+2015)(x-2015) + 2x + 1$$

se factoriza como

$$P_{(x)} = (x+m)(x+n).$$

Calcule $m+n$.

- A) 2015 B) 2016 C) 2
D) -2 E) 0

33. Sean los polinomios

$$P(x) = x^2 - 2x - 48$$

$$Q(x) = x^2 + 2x - 80$$

Si $(x+m)$ es su factor en común, calcule $\frac{m-1}{2}$.

A) -3

B) -4

C) $\frac{7}{2}$

D) 4

E) $-\frac{9}{2}$

34. El polinomio $P(x) = 4x^2 + x - 150$ se factoriza como $P(x) = (mx+n)(px+q)$.

Calcule $m+n+p+q$.

A) 19

B) 21

C) 26

D) 24

E) 22

35. Factorice el polinomio

$$P(x) = ((x+2016)(x+2014)+1)^2 - 2025^2$$

e indique uno de sus factores primos.

A) $x+2025$

B) $x+2060$

C) $x+2016$

D) $x+2015$

E) $x+4030$

36. Si $x-2$ es factor de $x^{100} - 2x^{99} + 3x - m$, calcule $m^2 + m + 1$.

A) 31

B) 21

C) 43

D) 35

E) 48

37. Factorice el polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Si uno de sus factores primos es $x^2 + mx + n$, calcule mn .

A) 2

B) 3

C) -2

D) 1

E) -1

38. Si $(x-\alpha)$ y $(x-\beta)$, donde $\alpha; \beta \in \mathbb{Z}^+$, son factores primos del polinomio

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20,$$

calcule $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

A) $\frac{5}{6}$

B) 1

C) $\frac{7}{10}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{4}$

39. Factorice el polinomio

$$P(x) = x^4 - 3 + 2x(x^2 + x - 1)$$

e indique el número de sus factores primos.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 0

40. Factorice el polinomio

$$P(x) = x^4 + 3x^2 + 4.$$

Calcule la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A) -3

B) 1

C) -1

D) 3

E) 2

Claves

1	E	6	D	11	D	16	C	21	C	26	B	31	A	36	C
2	A	7	C	12	B	17	A	22	E	27	A	32	C	37	D
3	E	8	C	13	C	18	B	23	B	28	E	33	E	38	C
4	D	9	B	14	C	19	B	24	A	29	C	34	D	39	C
5	C	10	E	15	A	20	D	25	E	30	B	35	B	40	E

CAPÍTULO

7



ECUACIONES



La ecuación cuadrática tiene muchas aplicaciones en la vida real, por ejemplo, una parábola es la trayectoria que describe una pelota al ser lanzada por un jugador de fútbol, y para poder calcular el punto de su lanzamiento y luego el punto donde recae al tocar el césped por primera vez, es necesario poder resolver ecuaciones cuadráticas.

Actualmente hay marcadas evidencias de que los babilonios (1600 a. n. e.) ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución. Luego, los egipcios las usaron para redefinir los límites de las parcelas anegadas por el Nilo, en sus crecidas. Posteriormente, los griegos resolvían ecuaciones de segundo grado con métodos geométricos, ya que también las utilizaban para resolver algunas ecuaciones de grado superior. La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham Bar Hiyya, en su obra *Liber Kembadorum*. Asimismo, el matemático indio Bhaskara escribe su famoso *Siddhanta Siromani* en el año 1150. Este libro se divide en cuatro partes: Lilavati (Aritmética), Vijaganita (Álgebra), Golandhyaya (Globo celestial) y Grahaganita (Matemáticas de los planetas). Es aquí donde aparece la fórmula general que permite resolver una ecuación de segundo grado.

AMOR A SOY Andajes esperados

- Identificar y diferenciar las ecuaciones lineales, cuadráticas y bicuadradas.
- Aplicar el teorema de Cardano en ecuaciones, cuadráticas y cúbicas.
- Resolver problemas de ecuaciones mediante sus distintos métodos y propiedades.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Las ecuaciones constituyen una importante herramienta en el álgebra. Adquirir la habilidad para resolverlas resulta de suma importancia, por cuanto logra facilitar la solución a múltiples problemas que se presentan en las aplicaciones del mundo de las matemáticas en diferentes niveles.

Ecuaciones

1. CONCEPTO



No olvide

Cuando haya que resolver una ecuación será preciso determinar el conjunto solución.



Importante

Si α es solución de una ecuación, entonces, podemos reemplazar α en la ecuación.



Reto al saber

Si α es solución de $x^2+3x-3=0$, halle $\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2}$.

Las ecuaciones representan una igualdad entre dos expresiones matemáticas, en la que participa, al menos, una variable conocida como la incógnita.

Ejemplos

- $3x+5=0$
- $x^2=x+12$
- $\sqrt{x}=x+3$

2. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es aquel valor que toma la variable para verificar la ecuación.

Ejemplo

Sea la ecuación $x^2=x+12$.

Los valores que verifican son los siguientes:

$$x=4 \rightarrow 4^2=4+12$$

$$x=-3 \rightarrow (-3)^2=-3+12$$



Luego, $x=4$ y $x=-3$ son las soluciones de la ecuación $x^2=x+12$.

3. CONJUNTO SOLUCIÓN (CS)

Es el conjunto formado por las soluciones de una ecuación.

Ejemplo

En la ecuación $x^3-4x=0$, los valores que verifican la ecuación son los siguientes:

$$x=0 \rightarrow 0^3-4(0)=0 \quad \checkmark$$

$$x=2 \rightarrow 2^3-4(2)=0 \quad \checkmark$$

$$x=-2 \rightarrow (-2)^3-4(-2)=0 \quad \checkmark$$

$$\therefore CS=\{0; 2; -2\}$$

4. ECUACIÓN LINEAL

Es aquella ecuación de primer grado.

De la forma

$$P_1: ax+b=0; a \neq 0$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $2x+3=0$.

Tenemos que

$$2x+3=0$$

$$2x=-3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore CS = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Al resolver estas ecuaciones debemos ubicar los términos con x en el lado izquierdo de la ecuación y pasamos los términos constantes a la derecha de la misma.

APLICACIÓN 1

Resuelva la ecuación $3x-4(6-x)=15-6x$.

RESOLUCIÓN

De la ecuación

$$3x-4(6-x)=15-6x$$

Efectuamos las operaciones.

$$3x-24+4x=15-6x$$

Agrupamos las variables y las constantes.

$$3x+4x+6x=15+24$$

$$13x=39$$

$$x = \frac{39}{13} \rightarrow x=3$$

$$\therefore CS=\{3\}$$

APLICACIÓN 2

Resuelva la ecuación

$$2(1-x)=3(1+2x)+5.$$

RESOLUCIÓN

De la ecuación

$$2(1-x)=3(1+2x)+5$$

Efectuamos las operaciones.

$$-2x=3+6x+5$$

Agrupamos las variables y las constantes.

$$-6x-2x=3+5-2$$

$$-8x=6$$

$$x = -\frac{6}{8} \rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore CS = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$$

APLICACIÓN 3

Resuelva la ecuación

$$\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7.$$

RESOLUCIÓN

Nos piden resolver

$$\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$$

Agrupamos los términos que tienen a z .

$$\frac{z}{5} - \frac{3}{10}z = 7$$

Operamos

$$\frac{10z-15z}{50} = 7$$

$$-5z = 7 \cdot 50$$

$$z = \frac{7 \cdot 50}{-5} \rightarrow z = -70$$

$$\therefore CS = \{-70\}$$

APLICACIÓN 4

Resuelva la ecuación

$$\frac{2x-7}{3} = 5 - \frac{3x-2}{4}$$

RESOLUCIÓN

Para eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por el MCM(3; 4)=12 y simplificamos.

$$12\left(\frac{2x-7}{3}\right) = 12(5) - 12\left(\frac{3x-2}{4}\right)$$

Luego

$$4(2x-7) = 60 - 3(3x-2)$$

$$8x-28 = 60 - 9x+6$$

Agrupamos los términos.

$$8x+9x = 60+6+28$$

$$17x = 94$$

$$x = \frac{94}{17}$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{94}{17} \right\}$$

APLICACIÓN 5

Resuelva la ecuación

$$\frac{5y-6}{2} = y - \frac{2-y}{3}$$

RESOLUCIÓN

Para eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por el MCM(2; 3)=6 y simplificamos.

$$6\left(\frac{5y-6}{2}\right) = 6(y) - 6\left(\frac{2-y}{3}\right)$$

Luego

$$3(5y-6) = 6y - 2(2-y)$$

$$15y-18 = 6y-4+2y$$

Pasamos los términos con x al lado izquierdo y los constantes al derecho.

$$15y-6y-2y = 18-4$$

$$7y = 14$$

$$y = \frac{14}{7} \rightarrow y = 2$$

$$\therefore CS = \{2\}$$

5. DETERMINACIÓN DE UNA VARIABLE EN TÉRMINOS DE LAS OTRAS

Ahora veamos una serie de ejemplos que despejan una variable en términos de la otra.

Ejemplos

- Determine la variable M en la siguiente ecuación:

$$F = 6 \frac{mM}{r^2}$$

Aislamos a M y consideramos a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{6m}{r^2} \right) M$$

$$F \cdot r^2 = (6 \cdot m)M$$

$$\frac{F \cdot r^2}{6 \cdot m} = M$$

$$\therefore M = \frac{Fr^2}{6 \cdot m}$$

2. Determine ω en término de las otras variables en la siguiente ecuación:

$$A=2\ell\omega+2\omega h+2\ell h$$

Aislamos a ω y tratamos a las otras variables como si fueran constantes.

$$A=2\ell\omega+2\omega h+2\ell h$$

$$A-2\ell h=2\ell\omega+2\omega h$$

$$A-2\ell h=(2\ell+2h)\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{A-2\ell h}{2\ell+2h}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación para la variable indicada.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=2; \text{ para } x.$$

Apartamos a x y consideramos a las otras variables como si fueran constantes.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=2 \rightarrow ax+b=2(cx+d)$$

$$ax+b=2cx+2d$$

$$ax-2cx=2d-b$$

$$x(a-2c)=2d-b$$

$$x = \frac{2d-b}{a-2c}$$

$$\therefore x = \frac{2d-b}{a-2c}$$

4. Calcule la ecuación para la variable indicada.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \text{ para } R_1.$$

Apartamos a R_1 y tratamos a las otras variables como si fueran constantes.

Entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{R_2 - R}{RR_2} = \frac{1}{R_1}$$

$$R_1(R_2 - R) = RR_2$$

$$\therefore R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

5. Despeje x en la siguiente ecuación:

$$\frac{ax}{5x+3} = b.$$

Aislamos a x y analizamos a las otras variables como si fueran constantes.

$$ax = (5x+3)b$$

$$ax = 5bx + 3b$$

$$ax - 5bx = 3b$$

$$(a-5b)x = 3b$$

$$\therefore x = \frac{3b}{a-5b}$$

6. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a ; b y c son números reales con $a \neq 0$.

Ejemplos

- $3x^2 + 5x + 6 = 0$
- $x^2 - 7x + 3 = 0$
- $x^2 - 4 = 0$

6.1. Resolución

Existen tres métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: mediante la factorización, con la fórmula general y al completar los cuadrados.

¡Cuidado!

Con cualquier método que se utilice en la resolución de una ecuación cuadrática, debemos reducirla a su forma general.

Ejemplos

- $3x^2 + 5x + 2 = 3x$
 $3x^2 + 2x + 2 = 0$
(forma general)
- $5x^2 + 7x + 6 = 4x + 5$
 $5x^2 + 3x + 1 = 0$
(forma general)

6.1.1. Por factorización

Una ecuación cuadrática se puede resolver si aplicamos los métodos de factorización.

APLICACIÓN 6

Resuelva la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos el polinomio por el método del aspa simple.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\cancel{x} \quad -3$$

$$\cancel{x} \quad -5$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

Luego obtenemos

$$x-3=0 \quad \text{o} \quad x-5=0$$

$$x=3 \quad \text{o} \quad x=5$$

$$\therefore CS=\{3; 5\}$$

APLICACIÓN 7

Resuelva la ecuación $x^2 + 4x = 21$.

RESOLUCIÓN

Reescribimos la ecuación, de modo que el segundo miembro sea igual a cero y aplicamos el método del aspa.

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\cancel{x} \quad 7$$

$$\cancel{x} \quad -3$$

$$(x+7)(x-3) = 0$$

Luego

$$x+7=0 \quad \text{o} \quad x-3=0$$

$$x=-7 \quad \text{o} \quad x=3$$

$$\therefore CS=\{-7; 3\}$$

APLICACIÓN 8

Resuelva la ecuación $x^2 - 16 = 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos por la diferencia de cuadrados.

$$x^2 - 4^2 = 0$$

$$(x+4)(x-4) = 0$$

Luego

$$x+4=0 \quad o \quad x-4=0$$

$$x=-4 \quad o \quad x=4$$

$$\therefore CS=\{4; -4\}$$

APLICACIÓN 9

Resuelva la ecuación $x^2 - 4x = 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos por el criterio del factor común.

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

Luego

$$x=0 \quad o \quad x-4=0$$

$$x=0 \quad o \quad x=4$$

$$\therefore CS=\{0; 4\}$$

APLICACIÓN 10

Resuelva la ecuación

$$3(x^2 + 1) = 5(1-x)$$

RESOLUCIÓN

Expresamos la ecuación en su forma general y con ese fin procedemos a eliminar todos los paréntesis.

$$3x^2 + 3 = 5 - 5x$$

$$3x^2 + 5x + 3 - 5 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Importante**Raíz de un polinomio**

La raíz de un polinomio es aquel valor de la variable que anula el polinomio, es decir
 a es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(a)=0$

Ejemplo

Las raíces del polinomio

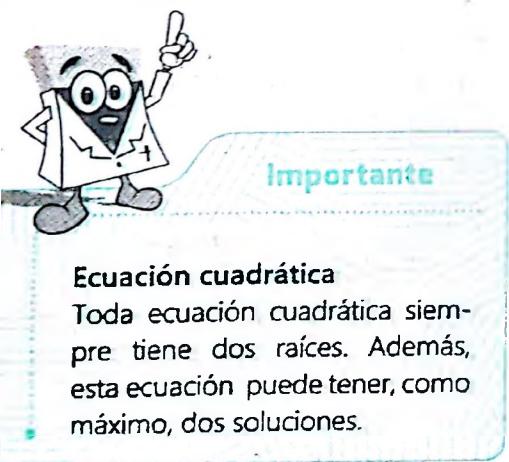
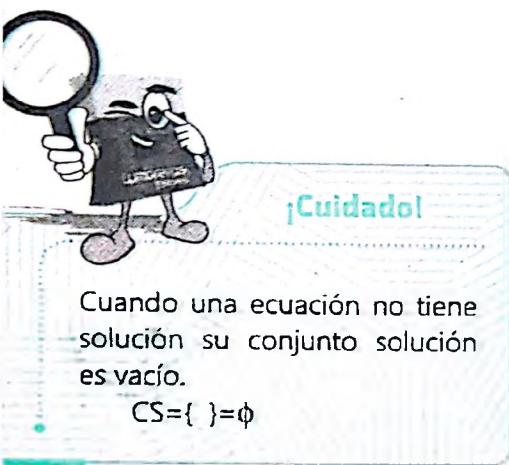
$$P(x) = x^2 - 9$$

son 3 y -3

Luego

$$P(3) = 3^2 - 9 = 0$$

$$P(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$$



Factorizamos por el aspa simple.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} 3x \\ \times \quad -1 \\ \hline x \quad \quad 2 \end{array}$$

$$(3x-1)(x+2)=0$$

$$3x-1=0 \quad \vee \quad x+2=0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = -2$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{1}{3}; -2 \right\}$$

APLICACIÓN 11

Resuelva $(2x+3)(3x-1) = 4$.

RESOLUCIÓN

Reducimos la ecuación a su forma general, mediante la multiplicación.

$$(2x+3)(3x-1) = -4$$

$$6x^2 - 2x + 9x - 3 + 4 = 0$$

$$6x^2 + 7x + 1 = 0$$

Factorizamos

$$6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c} 6x \\ \times \quad 1 \\ \hline x \quad \quad 1 \end{array}$$

$$(6x+1)(x+1) = 0$$

Luego

$$6x+1=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{6} \quad \vee \quad x = -1$$

$$\therefore CS = \left\{ -1; -\frac{1}{6} \right\}$$

6.1.2. Por fórmula general

Las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$ están dadas por la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para resolver una ecuación cuadrática, aplicamos la fórmula de la siguiente manera:

Reducimos la ecuación a su forma general, es decir,
 $ax^2+bx+c=0$.

Identificamos a ; b y c , que son los tres coeficientes que aparecen en la forma general.

Reemplazamos estos coeficientes en la fórmula general.

Ejemplos

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1. $3x(x-5)=1$

Reducimos la ecuación $3x(x-5)=1$ a su forma general.

$$3x(x-5)=1$$

$$3x^2 - 15x - 1 = 0$$

Comparamos el resultado con la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde

$$3x^2 - 15x - 1 = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $a=3 \quad c=-1$

\uparrow
 $b=-15$

Reto al saber



Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 1 = 0$, halle el valor de
 $E = x_1 + x_2$

- A) 7 B) 10 C) 9
 D) $\sqrt{5}$ E) 12

UNFV 2008-II

Reemplazamos todos los coeficientes en la fórmula general.

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(3)(-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{237}}{6}$$

$$\therefore x = \frac{15 + \sqrt{237}}{6} \quad \vee \quad x = \frac{15 - \sqrt{237}}{6}$$

2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Observamos que la ecuación $4x^2 + 12x + 9 = 0$ está en su forma general.

Donde

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

↓
 $a=4$
 ↓
 $b=12$
 ↓
 $c=9$

Reemplazamos los coeficientes en la fórmula general.

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$x = \frac{-12}{8}$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-3}{2}$$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$

Observamos que la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ está en la forma general.

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

↓
 $a=1$
 ↓
 $b=2$
 ↓
 $c=2$

Observación

$$\sqrt{-1} = i,$$

donde

i : unidad imaginaria

Reemplazamos los coeficientes en la fórmula general.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{-1}$$

$$\therefore x = -1 + i \quad \vee \quad x = -1 - i$$

7. EL DISCRIMINANTE

El discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ se define de la siguiente manera:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ejemplo

Halle el discriminante de $3x^2 - 2x + 5 = 0$, donde

- $a=3$
- $b=-2$
- $c=5$

Observamos

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 - 60$$

$$\therefore \Delta = -56$$

7.1. Análisis del discriminante

Dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, de coeficientes reales y raíces x_1, x_2 , se cumple lo siguiente:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Las raíces x_1, x_2 son números reales y diferentes.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

La raíces x_1 y x_2 son números reales e iguales (única solución).

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Las raíces x_1 y x_2 no son números reales (son imaginarios conjugados).

En las siguientes ecuaciones aplicarnos el discriminante para determinar cuántas soluciones reales hay:

Ejemplos

$$1. \quad x^2 - x - 3 = 0$$

El discriminante es

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3)$$

$$\Delta = 1 + 12 \rightarrow \Delta = 13 > 0$$

Observamos que la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes las cuales son

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \wedge \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Importante



Para encontrar la diferencia de las raíces de una ecuación cuadrática se utiliza la identidad de Legendre.

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

2. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

El discriminante es

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\Delta = 0$$

La ecuación tiene dos raíces iguales (solución única) las cuales son

$$-\frac{1}{2} \quad \wedge \quad -\frac{1}{2}$$

3. $x^2 - 2x + 5 = 0$

El discriminante es

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = -16 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real, porque sus raíces son los siguientes números complejos.

$$x_1 = 1 - 2i \quad \vee \quad x_2 = 1 + 2i$$

8. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES (TEOREMA DE CARDANO)

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ de raíces x_1 y x_2 , se cumple lo siguiente:

a. Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

b. Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplos

1. $3x^2 + 6x - 1 = 0$

Comparamos esta ecuación con la ecuación general, donde $a=3$; $b=6$ y $c=-1$

Aplicamos la suma de raíces.

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{3} = -2$$

Por lo tanto, aplicamos el producto de raíces.

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$$

2. $8x^2 - x + 14 = 0$

Comparamos la ecuación con la ecuación general, donde $a=8$; $b=-1$ y $c=14$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-1)}{8} = \frac{1}{8}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

3. $3x^2 + 5x + 9 = 4x + 11$

Reducimos la ecuación a su forma general.

$$3x^2 + 5x + 9 - 4x - 11 = 0$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

Comparamos la ecuación $3x^2 + x - 2 = 0$, con la ecuación general, donde $a=3$; $b=1$; $c=-2$.

Aplicamos la suma de raíces.

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, aplicamos el producto de raíces.

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$$

APLICACIÓN 12

Si α y β son las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 7x + 2 = 0, \text{ determine el valor de } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

RESOLUCIÓN

Nos piden $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$,

donde α y β son las raíces de $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha + \beta = \frac{7}{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{3}$$

Luego

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{7}{2}$$

APLICACIÓN 13

Sean a y b las raíces de $3x^2 - kx + 18 = 0$, tal que $a^2 + b^2 = 13$.

Determine el mayor valor de k .

RESOLUCIÓN

Nos piden el mayor valor de k .

Datos:

a y b son las raíces de

$$3x^2 - kx + 18 = 0$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$a + b = \frac{k}{3}$$

$$ab = \frac{18}{3} = 6$$

Como $a + b = \frac{k}{3}$, elevamos al cuadrado.

$$(a + b)^2 = \left(\frac{k}{3}\right)^2$$

Luego

$$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{k^2}{9}$$

Observamos

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{13} + 2ab = \frac{k^2}{9}$$

$$13 + 2 \cdot 6 = \frac{k^2}{9}$$

$$25 = \frac{k^2}{9} \rightarrow k^2 = 225$$

$$k = 15 \quad \vee \quad k = -15$$

Por lo tanto, el mayor valor de k es igual a 15.

8.1. Definición de raíces simétricas y recíprocas

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, de raíces x_1 y x_2 no nulas se definen en

Raíces simétricas

$$x_1 + x_2 = 0$$

Raíces recíprocas

$$x_1 x_2 = 1$$

Ejemplos

- La ecuación $3x^2 - 5 = 0$ posee raíces simétricas, ya que

$$x_1 + x_2 = -\frac{0}{3} = 0$$

- La ecuación $6x^2 - 120x + 6 = 0$ posee raíces recíprocas, ya que $x_1 x_2 = \frac{6}{6} = 1$.

APLICACIÓN 14

La ecuación $2x^2 + (b-3)x + 2c - 10 = 0$ tiene raíces simétricas y recíprocas. Halle el valor de $b+c$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $b+c$.

Raíces simétricas

$$\frac{-(b-3)}{2} = 0 \rightarrow -b+3=0 \rightarrow 3=b$$

suma de
raíces

Raíces reciprocas

$$\frac{2c-10}{2} = 1 \rightarrow 2c-10=2$$

producto
de raíces

$$\rightarrow 2c=12 \rightarrow c=6$$

$\therefore b+c=3+6=9$

8.2. Reconstrucción de una ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática de las raíces x_1 y x_2 se reconstruye de la siguiente manera:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Ejemplo

La ecuación de raíces $x_1=2$ y $x_2=9$ está dada por

$$x^2 - (2+9)x + 2 \cdot 9 = 0, \text{ es decir}$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

APLICACIÓN 15

Determine la ecuación que tenga como raíces $\alpha+1$ y $\beta+1$, si α y β son raíces de la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$.

RESOLUCIÓN

Nos piden la ecuación cuadrática de raíces.

$$\alpha+1 \wedge \beta+1$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha+\beta=1 \wedge \alpha\beta=1$$

Nos piden

$$x^2 - [(\alpha+1) + (\beta+1)]x + (\alpha+1)(\beta+1) = 0$$

$$x^2 - (\alpha+\beta+2)x + (\alpha+\beta+\alpha\beta+1) = 0$$

$$x^2 - (1+2)x + (1+1+1) = 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 3 = 0$$

Teorema de ecuaciones cuadráticas
Raíces

Las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0; abc \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0; mnp \neq 0$$

son equivalentes, entonces

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \hline m & n & p \end{matrix}$$

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones son equivalentes.

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

$$9x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$\therefore \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{-2}{-6}$$

APLICACIÓN 16

Si las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + (a+b)x + 2 = 0$$

$$bx^2 + 30x + 3 = 0$$

tienen el mismo conjunto solución, determine el valor de $a-b$.

RESOLUCIÓN

Nos piden $a-b$.

Se cumple que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{30} = \frac{2}{3}$$

De la igualdad, obtenemos

$$\frac{a+b}{30} = \frac{2}{3}$$

$$a+b=20$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \rightarrow 3a=2b$$

$$\begin{cases} 3a=2b \\ a+b=20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$a=8 \wedge b=12$$

$$\therefore a-b=8-12=-4$$

9. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Son de la forma

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0; a_0 \neq 0$$

Ejemplos

- $2x^3+4x^2+5x-1=0$

- $4x^4+5x^2+6=0$

APLICACIÓN 17

Resuelva la ecuación $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$.

RESOLUCIÓN

De la ecuación, tenemos

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

Factorizamos por el método de agrupación.

$$\underline{x^2 - 2x^2} \quad \underline{-9x + 18} = 0$$

$$x^2(x-2) - 9(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x-2)(x+3)(x-3) = 0$$

Luego

$$x=2 \vee x=-3 \vee x=3$$

$$\therefore CS=\{-3; 2; 3\}$$

APLICACIÓN 18

Resuelva la ecuación

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0.$$

RESOLUCIÓN

Factorizamos por el método de divisores binómicos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 2 & & 2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Obtenemos

$$(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x-2 \vee \underbrace{x^2 - 2x + 2 = 0}_{\text{fórmula general}}$$

Luego

$$x=2 \vee x=1+i \vee x=1-i$$

$$\therefore CS=\{2; 1+i; 1-i\}$$

APLICACIÓN 19

Resuelva la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

RESOLUCIÓN

De la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Factorizamos por el método de divisores binómicos.

1	-6	11	-6
1	1	-5	6
1	-5	6	0

Obtenemos

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2 - 5x + 6) &= 0 \\ x-1=0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x &= 1 \\ x &= 3 \\ x &= 2 \\ (x-3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$x=1 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=2$$

$$\therefore CS=\{1; 2; 3\}$$

9.1. Teorema de Cardano

Sea la ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

de raíces x_1, x_2, x_3 , se cumple

Suma de raíces

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

Suma de productos binarios

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

APLICACIÓN 20

Sea la ecuación $2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = 0$, de raíces α, β , y θ . Calcule las siguientes operaciones:

- $\alpha + \beta + \theta$
- $\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta$
- $\alpha\beta\theta$

RESOLUCIÓN

La ecuación $2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = 0$ está en su forma general.

Identificamos los coeficientes.

$$a=2; b=5; c=7; d=6$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

- $\alpha + \beta + \theta = -\frac{5}{2}$
- $\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = \frac{7}{2}$
- $\alpha\beta\theta = -\frac{6}{2} = -3$

APLICACIÓN 21

Sea la ecuación

$$2x^3 + x^2 - x + 3, \text{ de raíces } \alpha, \beta, \theta.$$

Calcule las siguientes operaciones:

- $\alpha + \beta + \theta$
- $\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta$
- $\alpha\beta\theta$

RESOLUCIÓN

La ecuación $2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$ está en su forma general.

Identificamos los coeficientes.

$$a=2; b=1; c=-1; d=3$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

- $\alpha + \beta + \theta = -\frac{1}{2}$
- $\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = -\frac{1}{2}$
- $\alpha\beta\theta = -\frac{3}{2}$

APLICACIÓN 22

Sea la ecuación $4x^3 + 7x^2 + 6x - 6x - 5 = 0$ de raíces x_1, x_2, x_3 .

Calcule las siguientes operaciones:

- $x_1 + x_2 + x_3$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $x_1x_2x_3$

RESOLUCIÓN

La ecuación $4x^3 + 7x^2 + 6x - 6x - 5 = 0$ debe cambiar a su forma general.

$$4x^3 + 7x^2 - 5 = 0$$

$$4x^3 + 7x^2 - 5 = 0 \quad (\text{forma general})$$

Identificamos los coeficientes.

$$a=4; b=7; c=0; d=-5$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{7}{4}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{0}{4} = 0$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{(-5)}{4} = \frac{5}{4}$$

9.2. Teorema de paridad de raíces

- a. En toda ecuación polinomial de coeficientes reales y grado $n \geq 2$ se cumple

$$(a+bi) \text{ es raíz} \rightarrow (c-bi) \text{ es raíz}$$

$$b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

- b. En toda ecuación polinomial de coeficientes racionales y grados $n \geq 2$ se cumple

$$(a + \sqrt{b}) \text{ es raíz} \Leftrightarrow (a - \sqrt{b}) \text{ es raíz} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$$

Reto al saber

Si a, b y c son raíces de la ecuación $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, donde $r \neq 0$, halle el valor de

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

A) $\frac{q^2 + 2pr}{r^2}$
 B) $\frac{q^2 - 2pr}{r^2}$
 C) $\frac{q^2 - 2p}{r^2}$
 D) $\frac{q^2 + 2p}{r^2}$
 E) $\frac{q^2 + 2r}{p}$

UNMSM 2011-1

Importante

Raíz de multiplicidad
 Dado el polinomio $P_{(x)}$ decimos que α es raíz de multiplicidad k si y solo si

$$P_{(x)} = (x - \alpha)^k q_{(x)}$$

tal que $q_{(\alpha)} \neq 0$

Ejemplos

- Si una raíz es $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, entonces la otra es $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.
- Si una raíz es $x_1 = -5 - \sqrt{7}$, entonces la otra es $x_2 = -5 + \sqrt{7}$.
- Si una raíz es $x_1 = 2 + 7i$, entonces la otra es $x_2 = 2 - 7i$.
- Si una raíz es $x_1 = -3 + 4i$, entonces la otra es $x_2 = -3 - 4i$.

10. ECUACIÓN BICUADRADA



; $abc \neq 0$ x variable

Ejemplos

- $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$
- $x^4 + 7x^2 + 5 = 0$
- $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

10.1. Resolución de una ecuación bicuadrada

10.1.1. Por factorización

Aplicamos el método del aspa simple.

APLICACIÓN 23

Resuelva la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos el polinomio.

$$\begin{array}{r} x^4 - 29x^2 + 100 = 0 \\ x^2 \quad -25 \\ x^2 \quad -4 \end{array}$$

$$(x^2 - 25)(x^2 - 4) = 0$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$(x+5)(x-5)(x+2)(x-2)=0$$

$$x=2 \vee x=-2 \vee x=5 \vee x=-5$$

$$\therefore CS=\{2; -2; 5; -5\}$$

10.1.2. Por cambio de variable

El cambio que se realizará es $x^2=y$.

APLICACIÓN 24

Resuelva la ecuación $x^4-4x^2+1=0$.

RESOLUCIÓN

Cambiamos las variables $x^2=y$ en la ecuación $x^4-4x^2+1=0$.

Entonces

$$y^2-4y+1=0$$

Resolvemos $y^2-4y+1=0$ con la fórmula general, porque la ecuación no acepta el aspa simple.

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1(1)}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \rightarrow y = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

Luego

$$y = 2 + \sqrt{3} \vee y = 2 - \sqrt{3}$$

$$x^2 = 2 + \sqrt{3} \vee x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

Tenemos

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \vee x = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} \vee x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\vee x = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\therefore CS = \{\sqrt{2 + \sqrt{3}}; -\sqrt{2 + \sqrt{3}}; \sqrt{2 - \sqrt{3}}; -\sqrt{2 - \sqrt{3}}\}$$

10.2. Propiedades

Dada la ecuación $ax^4+bx^2+c=0$; $abc \neq 0$.

- a. Las raíces tienen la forma $\alpha; -\alpha; \beta; -\beta$

b. $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$

c. $\alpha^2\beta^2 = \frac{c}{a}$

Ejemplos

1. Sea la ecuación $x^4+5x^2+9=0$, entonces podemos aplicar la propiedad "a".

$$\begin{array}{ll} x_1 = \alpha & x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta & x_4 = -\beta \end{array}$$

2. Sea la ecuación $2x^4+5x^2+7=0$ de raíces α, β , calcule

- $\alpha^2 + \beta^2$
- $\alpha^2 \cdot \beta^2$

La ecuación $2x^4+5x^2+7=0$, está en su forma general.

Identificamos los coeficientes.

$$a=2; b=5; c=7$$

Aplicamos las propiedades "b" y "c", respectivamente.

- $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{5}{2}$

- $\alpha^2\beta^2 = \frac{7}{2}$

APLICACIÓN 25

Calcule el valor de a^2+1 si la ecuación bicuadrada $x^4-(a+10)x^2+(a+1)^2=0$ presenta dos raíces positivas cuya suma es 6.

RESOLUCIÓN

De la ecuación bicuadrada

$$x^4-(a+10)x^2+(a+1)^2=0$$

sean las raíces positivas α y β

además, $\alpha+\beta=6$.

Por propiedad

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=a+10 \\ \alpha^2\beta^2=(a+1)^2 \end{cases} \rightarrow \alpha\beta=a+1$$

Luego, $\alpha+\beta=6$.

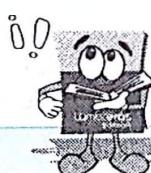
Elevamos al cuadrado.

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=36$$

$$a+10+2(a+1)=36$$

$$3a=24 \rightarrow a=8$$

$$\therefore a^2+1=65$$

**Biografía****Gerolamo Cardano**

Nació en Italia en el año 1501. En 1536 se trasladó a Milán, donde empezó a ejercer como profesor de Matemáticas.

En 1539 publicó su primera obra *Práctica de matemáticas y mediciones individuales*, en la que recogió el contenido de sus clases.

En 1545 publicó su obra científica más importante, el *Ars magna*, donde se recoge un exhaustivo estudio de las ecuaciones de tercer grado o cúbicas, y en la que se ofrece la regla para la resolución de las mismas que lleva su nombre. Por la publicación de dicho resultado fue duramente criticado por el también matemático Tartaglia quien se lo había revelado con la condición de que lo mantuviera en secreto.

Los últimos años de su vida estuvieron plagados de desgracias, desde la ejecución en el año 1560 de uno de sus hijos, acusado de asesinato, hasta un proceso de herejía por el que llegó a ser encarcelado (1570). Absuelto un año después, pero privado del derecho de publicar obra alguna, se trasladó a Roma donde redactó su autobiografía *Mi propia vida*, que concluyó poco antes de su muerte.



ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

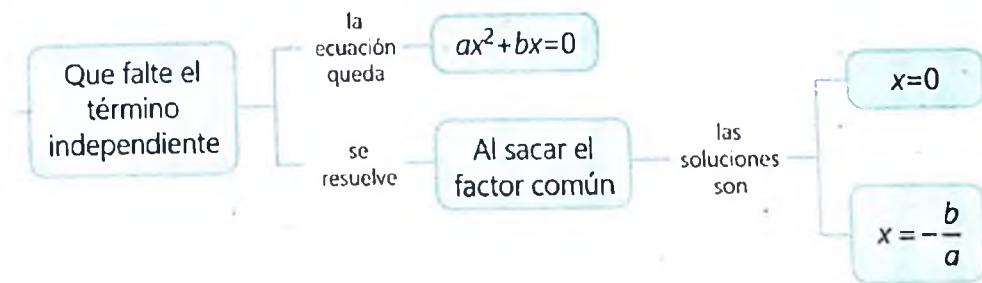
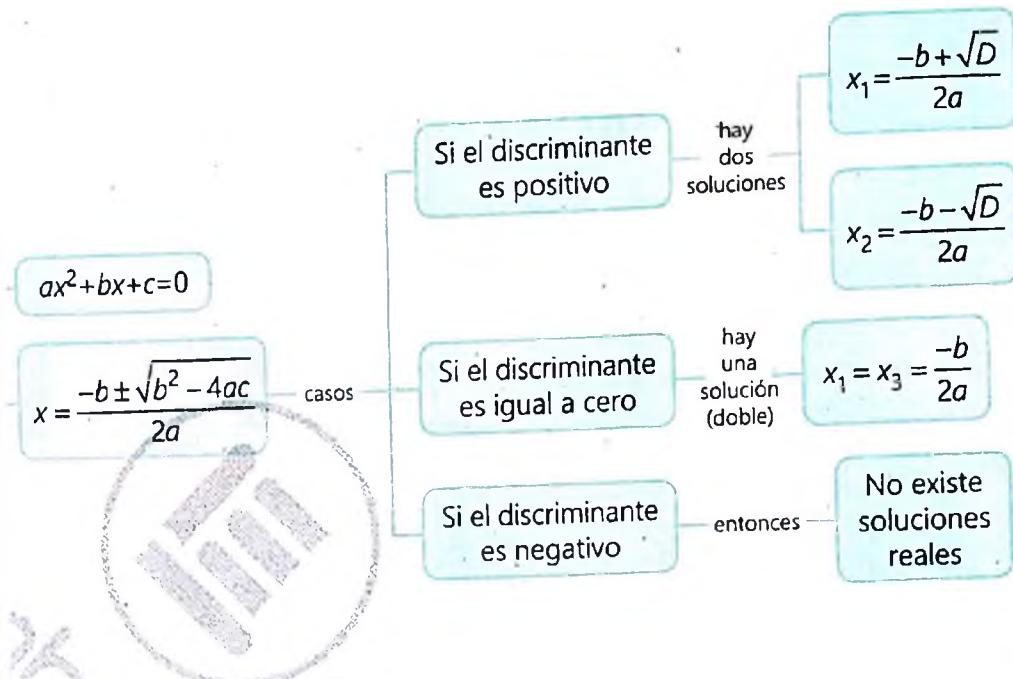
las
clasificamos
en

Completas

su
ecuación
es
se
resuelven
mediante

Incompletas

pueden
ser



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Resuelva la siguiente ecuación:

$$4x+7+9x=19+4(3x-2)$$

- A) {5} B) {2} C) {4}
D) {1} E) {6}

$$2(7x)-3(3x)=36-1$$

$$14x-9x=35$$

$$5x=35$$

$$x=\frac{35}{5}$$

$$\therefore x=7$$

Clave

Resolución

Efectuamos las operaciones.

$$4x+7+9x=19+4(3x-2)$$

$$4x+7+9x=19+12x-8$$

Pasamos los términos que tienen x al lado izquierdo y las constantes al derecho. Así tenemos que

$$4x+9x-12x=19-8-7$$

$$x=4$$

$$\therefore CS=\{4\}$$

Clave

Problema N.º 2

Determine el valor de x que verifica la ecuación

$$\text{lineal } \frac{7x}{3}-\frac{3x}{2}=6-\frac{1}{6}.$$

- A) 2 B) 6 C) 1
D) 7 E) 8

Resolución

Para eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por 6.

$$6\left(\frac{7x}{3}\right)-6\left(\frac{3x}{2}\right)=6\cdot 6-\left(\frac{1}{6}\right)6$$

Problema N.º 3

Resuelva la siguiente ecuación:

$$5(2x-4)=2(3x+4)$$

- A) 6 B) {7} C) -5
D) -7 E) {-5}

Resolución

Efectuamos las operaciones.

$$5(2x-4)=2(3x+4)$$

$$10x-20=6x+8$$

Pasamos los términos que tienen x al lado izquierdo y las constantes al lado derecho.

$$10x-6x=8+20$$

$$4x=28$$

$$x=\frac{28}{4}$$

$$x=7$$

$$\therefore CS=\{7\}$$

Clave

Problema N.º 4

Resuelva la ecuación lineal

$$10\left(\frac{x}{5}-1\right)+2=6\left(\frac{x}{6}+5\right)-2$$

e indique la suma de cifras de su solución.

- A) 36 B) 12 C) 9
D) 2 E) 1

Resolución

Efectuamos las operaciones.

$$10\left(\frac{x}{5}-1\right)+2=6\left(\frac{x}{6}+5\right)-2$$

$$2x-10+2=x+30-2$$

$$2x-x=30-2+10-2$$

$$x=36$$

Por lo tanto, la suma de cifras de la solución es igual 9.

**Problema N.º 5**

Resuelva la ecuación

$$\frac{x-1}{3}+\frac{x+5}{5}-\frac{x-2}{4}=4$$

e indique la solución aumentada en la unidad.

- A) 10 B) 11 C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{266}{17}$

Resolución

Con el objetivo de eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por 60.

$$60\left(\frac{x-1}{3}\right)+60\left(\frac{x+5}{5}\right)-60\left(\frac{x-2}{4}\right)=4 \cdot 60$$

Luego

$$20(x-1)+12(x+5)-15(x-2)=240$$

$$20x-20+12x+60-15x+30=240$$

$$20x+12x-15x=240+20-60-30$$

$$17x=170$$

$$x=\frac{170}{17} \rightarrow x=10$$

Por lo tanto, la solución aumentada en la unidad es igual a 11.

Clave

Problema N.º 6

Resuelva la ecuación lineal en la variable x

$$a^2 + \frac{x}{2} = a(a+1) - \frac{5x}{2}; a \neq 0.$$

- A) $\left\{-\frac{a}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{a}{6}\right\}$ C) $\left\{\frac{a}{2}\right\}$
D) $\left\{\frac{a}{3}\right\}$ E) $\left\{-\frac{a}{2}\right\}$

Resolución

Para eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por 2 y simplificamos.

$$2a^2 + 2\frac{x}{2} = 2a(a+1) - \frac{5x}{2} \cdot 2$$

$$2a^2 + x = 2a^2 + 2a - 5x$$

$$x + 5x = 2a$$

Luego

$$6x = 2a \rightarrow x = \frac{2a}{6}$$

$$x = \frac{a}{3}$$

$$\therefore CS = \left\{\frac{a}{3}\right\}$$

Clave

Problema N.º 7

Calcule el valor de $x_0^2 - 1$ si se sabe que x_0 es la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{4-x}{2} + \frac{18-x}{6} + \frac{48-x}{12} = 0$$

- A) 143 B) 120 C) 63
D) 80 E) 122

Resolución

Nos piden hallar $x_0^2 - 1$.

Multiplicamos por 12.

$$12 \cdot \frac{(4-x)}{2} + 12 \cdot \frac{(18-x)}{6} + 12 \cdot \frac{(48-x)}{12} = 0 \cdot 12$$

Efectuamos y obtenemos

$$6(4-x) + 2(18-x) + 48-x = 0$$

$$24-6x+36-2x+48-x=0$$

$$24+36+48=6x+2x+x$$

$$108=9x$$

$$\frac{108}{9}=x \rightarrow x=12$$

Luego

$$x_0=12$$

$$\therefore x_0^2 - 1 = 12^2 - 1 = 143$$

Clave

Problema N.º 8

Si x_0 es la solución de

$$\frac{x-8}{37} + \frac{x+11}{56} = 2,$$

halle el valor de $\frac{x_0}{9}$.

- A) 45 B) 9 C) $\frac{19}{9}$
D) 5 E) $\frac{1}{5}$

Resolución

Nos piden hallar $\frac{x_0}{9}$.

Tenemos que

$$\frac{x-8}{37} - 1 + \frac{x+11}{56} - 1 = 0$$

$$\frac{x-8-37}{37} + \frac{x+11-56}{56} = 0$$

$$\frac{x-45}{37} + \frac{x-45}{56} = 0$$

Luego

$$(x-45) \left(\underbrace{\frac{1}{37}}_{\text{igual}} + \underbrace{\frac{1}{56}}_{\text{diferente}} \right) = 0$$

$$x-45=0 \rightarrow x=45$$

$$\therefore \frac{x_0}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Clave

Problema N.º 9

Resuelva la ecuación si $a^2x + (a-1) = (a+1)x$, para x .

- A) {0} B) {1} C) $\left\{ \frac{1}{a} \right\}$
D) $\left\{ \frac{1-a}{a^2-a+1} \right\}$ E) $\{a^2+1\}$

Resolución

Efectuamos la ecuación.

$$a^2x + (a-1) = (a+1)x$$

$$a^2x + a - 1 = ax + x$$

$$a^2x - ax - x = 1 - a$$

$$(a^2 - a - 1)x = 1 - a$$

$$x = \frac{1-a}{a^2 - a - 1}$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{1-a}{a^2 - a - 1} \right\}$$

Clave

Problema N.º 10

Resuelva la ecuación cuadrática $5x^2 + 1 = 11x - 2x^2 - 3$.

Indique la menor solución.

- A) 1 B) -1
 D) $\frac{7}{4}$

C) $-\frac{4}{7}$

E) $\frac{4}{7}$

Resolución

Observamos que

$$5x^2 + 1 = 11x - 2x^2 - 3$$

$$5x^2 + 2x^2 - 11x + 1 + 3 = 0$$

$$7x^2 - 11x + 4 = 0$$

Factorizamos por el aspa simple.

$$7x - 11x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c} 7x \\ \times \quad -4 \\ \hline x \quad \quad -1 \end{array}$$

$$(7x - 4)(x - 1) = 0$$

Tenemos que

$$7x - 4 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$$

$$x = \frac{4}{7} \quad \vee \quad x = 1$$

Las soluciones son $x = \frac{4}{7}$ \vee $x = 1$.

Por lo tanto, la menor solución es igual a $\frac{4}{7}$.

Clave

Problema N.º 11

Resuelva la ecuación cuadrática $7x^2 - 2x - 1 = 0$. Indique la menor solución.

- A) $1 - 2\sqrt{2}$ B) $1 + 2\sqrt{2}$ C) 1
 D) $\frac{1 - 2\sqrt{7}}{2}$ E) $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}$

Resolución

La ecuación $7x^2 - 2x - 1 = 0$ no acepta el aspa simple.

Aplicamos la fórmula general.

$$7x^2 - 2x - 1 = 0$$

donde:

$$a = 7; \quad b = -2; \quad c = -1$$

NO OLVIDE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazamos en la fórmula.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(7)(-1)}}{2 \cdot (7)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{14} \rightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{14}$$

$$x = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

Las soluciones son las siguientes:

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{7} \text{ y } \frac{1-2\sqrt{2}}{7}$$

Por lo tanto, la menor solución es

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$$

Clave

Problema N.º 12

Resuelva la ecuación $4x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x - 2$.

- A) $\{4; 2\}$ B) $\{-2; -4\}$ C) $\{2; -4\}$
 D) $\{-2; 4\}$ E) $\{1; 8\}$

Resolución

De la ecuación, tenemos

$$4x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x - 2$$

$$4x^2 - 3x^2 - 5x - x + 6 + 2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Factorizamos, por el aspa simple.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{c} x \\ \times \\ x \end{array} \begin{array}{c} -4 \\ -2 \end{array}$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

$$x-4=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

$$x=4 \quad \vee \quad x=2$$

$$\therefore CS=\{4; 2\}$$

**Problema N.º 13**

Resuelva la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$ e indique la diferencia entre la mayor y menor solución.

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
 D) 1 E) $2\sqrt{2}$

Resolución

Datos:

$$a=1; b=-6; c=7$$

La ecuación no acepta el aspa simple, entonces aplicamos la siguiente fórmula:

IMPORTANTES

$$\frac{x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazamos en la fórmula.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$.

$$\therefore \underbrace{3 + \sqrt{2}}_{\substack{\text{mayor} \\ \text{solución}}} - \underbrace{(3 - \sqrt{2})}_{\substack{\text{menor} \\ \text{solución}}} = 2\sqrt{2}$$

**Problema N.º 14**

Resuelva la siguiente ecuación en x :

$$4x^2 + (2a-6)x - 3a = 0; a \neq -3$$

- A) $\left\{ \frac{3}{2}, a \right\}$ B) $\left\{ -\frac{a}{2} \right\}$ C) $\left\{ -\frac{3}{2}; \frac{a}{2} \right\}$
 D) $\left\{ \frac{3}{2}; -\frac{a}{2} \right\}$ E) \emptyset

Resolución

Aplicamos el método de la factorización.

$$4x^2 + (2a-6)x - 3a = 0$$

$$\begin{array}{c} 2x \\ \times \\ 2x \end{array} \begin{array}{c} a \\ -3 \end{array}$$

$$(2x+a)(2x-3)=0$$

Luego

$$2x+a=0 \quad \vee \quad 2x-3=0$$

$$x = -\frac{a}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore CS = \left\{ -\frac{a}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$



Problema N.º 15

Determine los valores que puede tomar k para que la ecuación cuadrática

$$x^2 + \frac{k}{2}x + 25 = 0$$

presente raíces iguales.

- A) 20; 40 B) -20; 40 C) 20; -20
 D) 40; -40 E) 10; -10

Resolución

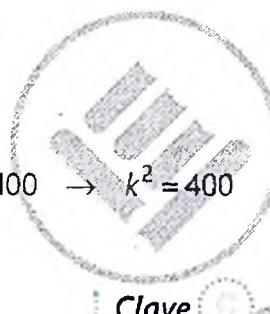
Nos piden los valores de k .

Si la ecuación tiene raíces iguales, entonces $\Delta=0$.

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 4(25) = 0$$

$$\frac{k^2}{4} - 100 = 0 \rightarrow \frac{k^2}{4} = 100 \rightarrow k^2 = 400$$

$$\therefore k=20 \vee k=-20$$



Clave

Problema N.º 16

Dada la ecuación cuadrática $x^2 - 9x + k = 0$ indique el valor de k , de modo que una raíz sea el doble de la otra.

- A) 18 B) -20 C) 20
 D) -18 E) 16

Resolución

Nos piden el valor de k .

Sean las raíces

$$x_1 = \alpha; x_2 = 2\alpha$$

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-9)}{1} \rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

Reemplazamos

$$\alpha + 2\alpha = 9$$

$$3\alpha = 9 \rightarrow \alpha = 3$$

Luego

$$x_1 = 3; x_2 = 6$$

$$x_1 x_2 = \frac{k}{1} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = k$$

↓ ↓
3 6

$$\therefore k = 18$$

Clave

Problema N.º 17

Si α y β son raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 6x + 3 = 0$, determine un valor de $\alpha - \beta$.

- A) $\sqrt{6}$ B) $-\sqrt{6}$ C) $-2\sqrt{6}$
 D) $\pm\sqrt{28}$ E) $2\sqrt{7}$

Resolución

Nos piden un valor de $\alpha - \beta$.

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\alpha + \beta = -6 \wedge \alpha \beta = 3$$

IMPORTANTE

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

Reemplazamos en la fórmula.

$$(-6)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4 \cdot 3$$

$$36 - 12 = (\alpha - \beta)^2 \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 24$$

$$\alpha - \beta = \pm\sqrt{24}$$

$$\alpha - \beta = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \alpha - \beta = 2\sqrt{6} \vee \alpha - \beta = -2\sqrt{6}$$

Clave

Problema N.º 18

Si m es la solución entera de la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$, calcule $\frac{2m-1}{m^2-m}$.

- A) -2 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$
 D) 2 E) 1

Resolución

De la ecuación

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Factorizamos por el aspa simple.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x \\ \times \quad x \\ \hline -1 \\ -2 \end{array}$$

$$(3x-1)(x-2)=0$$

$$3x-1=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

Efectuamos y obtenemos

$$x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 2$$

Las soluciones son 2 y $\frac{1}{3}$.

Luego

$$m=2$$

Hallamos

$$\frac{2m-1}{m^2-m}$$

Reemplazamos $m=2$

$$\frac{2(2)-1}{2^2-2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{2m-1}{m^2-m} = \frac{3}{2}$$

Clave

Problema N.º 19

Si la ecuación $mx^2 + mx + m = 0$; $m \neq 0$ presenta las raíces a y b , determine el valor de $a^2 + b^2$.

- A) -1 B) 0 C) 1
 D) 2 E) 3

Resolución

Nos piden $a^2 + b^2$.

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} a+b = -\frac{m}{n} = -1 \\ ab = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$$

No olvide

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Reemplazamos

$$(-1)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 1$$

$$1 = a^2 + b^2 + 2$$

$$1 - 2 = a^2 + b^2$$

$$-1 = a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = -1$$

Clave

Problema N.º 20

Si una de las raíces de la ecuación

$$x^2 - bx + b + 2 = 0$$

excede a la otra en dos unidades, indique el valor de b .

- A) 6 o -2 B) 4 C) -4
 D) 2 E) -6 o 2

Clave

Resolución

Nos piden hallar el valor de b .

Sean las raíces α y β , entonces $\alpha - \beta = 2$

Aplicamos el teorema de Cardano.

Por dato: $\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ \alpha\beta = b + 2 \end{cases}$

IMPORTANTE

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

Reemplazamos

$$b^2 - 2^2 = 4(b + 2)$$

$$b^2 - 4 = 4b + 8$$

$$b^2 - 4b - 4 - 8 = 0$$

$$b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$b \cancel{\times} -6$$

$$b \cancel{\times} 2$$

$$(b - 6)(b + 2) = 0$$

Luego

$$b - 6 = 0 \quad \vee \quad b + 2 = 0$$

$$\therefore b = 6 \quad \vee \quad b = -2$$



Clave A

Problema N.º 21

Si α y β son raíces de la ecuación

$x^2 - 3x + 1 = 0$, calcule el valor de $(\alpha - 4)(\beta - 4) + 7$.

- A) 1 B) 2 C) 7
D) 12 E) -5

Resolución

Nos piden el valor $(\alpha - 4)(\beta - 4) + 7$.

Datos: en la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ sus raíces son α y β .

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

Nos piden

$$(\alpha - 4)(\beta - 4) + 7 = \alpha\beta - 4\alpha - 4\beta + 16 + 7$$

$$(\alpha - 4)(\beta - 4) + 7 = \alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 23$$

$$(\alpha - 4)(\beta - 4) + 7 = \alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 23$$

1 3

$$\therefore (\alpha - 4)(\beta - 4) + 7 = 1 - 12 + 23 = 12$$

Clave

**Problema N.º 22**

Si m y n son raíces de la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$, calcule $m^{m+n} + n^{n+m}$.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Nos piden $m^{m+n} + n^{n+m}$.

Dato: m y n son raíces de la ecuación

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ mn = 1 \end{cases}$$

Luego, nos piden

$$m^{m+n} + n^{n+m}$$

$$m^1 + n^1$$

$$m + n = 1$$

$$\therefore m^{m+n} + n^{n+m} = 1$$

Clave



Problema N.º 23

Dada la ecuación cuadrática $3x^2+2x+5=0$ de raíces a y b , indique el valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{5}$
 D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{2}{5}$

Resolución

Nos piden el valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Datos: a y b son raíces de la ecuación

$$3x^2+2x+5=0$$

Aplicamos la propiedad de Cardano

$$\begin{cases} a+b = -\frac{2}{3} \\ a \cdot b = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Nos piden } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

Reemplazamos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-2(3)}{3 \cdot 5} = \frac{-6}{15}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{5}$$

Clave E

Problema N.º 24

Si α y β son soluciones de la ecuación $x^2+x-5=0$, determine el valor de $\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta$.

- A) 5 B) 20 C) 10
 D) 0 E) -10

Resolución

Nos piden $\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta$.

Datos: α y β son soluciones de la ecuación $x^2+x-5=0$.

Entonces

Si α es solución

$$\alpha^2+\alpha-5=0 \rightarrow \alpha^2+\alpha=5$$

Si β es solución

$$\beta^2+\beta-5=0 \rightarrow \beta^2+\beta=5$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=10$$

Clave C

Problema N.º 25

Calcule el valor de $\frac{(a+1)}{3}$ si se sabe que -6 es una raíz de la ecuación $x^2+(a+3)x+a+2=0$.

- A) 2 B) 5 C) 1
 D) 4 E) 0

Resolución

Nos piden $\frac{a-1}{3}$.

Dato: sea -6 una raíz de la ecuación

$$x^2+(a+3)x+a+2=0$$

Entonces

$$(-6)^2+(a+3)(-6)+a+2=0$$

$$36-6a-18+a+2=0$$

$$36-18+2=6a-a$$

$$20=5a$$

$$a=4$$

$$\therefore (a-1)+3=1$$

Clave C

Problema N.º 26

Calcule el valor de $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ si se sabe que α y β son las raíces de la siguiente ecuación en x .

$$mx^2 - 3mx + m = 0; m > 0.$$

- A) $3m$ B) $m^2 - 1$ C) 6
 D) -6 E) 1

Resolución

Nos piden $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$.

Datos: sean α y β las raíces de la ecuación

$$mx^2 - 3mx + m = 0.$$

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} \alpha\beta = \frac{m}{m} \rightarrow \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = \frac{-(-3m)}{m} \rightarrow \alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

Nos piden

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$\overbrace{\alpha + \beta}^{3} + \overbrace{\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}}^{1} = 3 + \frac{3}{1}$$

$$\therefore \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 3 + 3 = 6$$

Clave C

Problema N.º 27

Calcule el valor de $\frac{n^3}{4}$ si se sabe que a y b son raíces de la ecuación $x^2 + n(n+3)x + n^2 = 0$, además, $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$.

- A) -1 B) 2 C) -8
 D) 16 E) -2

Resolución

Nos piden $\frac{n^3}{4}$.

Datos:

Sean a y b las raíces de la ecuación

$$x^2 + n(n+3)x + n^2 = 0$$

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 \quad (*)$$

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} a+b = -n(n+3) \\ ab = n^2 \end{cases}$$

Luego en (*)

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 \rightarrow \frac{2a+2b}{ab} = 1 \rightarrow 2(a+b) = ab$$

$$2[-n(n+3)] = n^2 \rightarrow 2(-n^2 - 3n) = n^2$$

$$-2n^2 - 6n = n^2 \rightarrow -6n = n^2 + 2n^2$$

$$-6n = 3n^2 \rightarrow -2n = n^2$$

$$n^2 + 2n = 0 \rightarrow n(n+2) = 0$$

Luego

$$n=0 \vee n=-2$$

$$\therefore \frac{n^3}{4} = -2$$

Clave E

Problema N.º 28

Determine al menor valor de n para que la ecuación $x^2 - (3n+1)x + (2n+3) = 0$ presente raíces iguales.

- A) $\frac{11}{9}$ B) $-\frac{11}{9}$ C) 1
 D) -1 E) $-\frac{1}{9}$

Resolución

Nos piden el menor valor de n .

Observamos que la ecuación

$$x^2 - (3n+1)x + (2n+3) = 0$$

tiene raíces iguales.

Entonces

$$\Delta = 0$$

$$[-(3n+1)]^2 - 4(2n+3) = 0$$

$$(3n+1)^2 - 8n - 12 = 0$$

$$9n^2 + 6n + 1 - 8n - 12 = 0$$

Tenemos

$$9n^2 - 2n - 11 = 0$$

$$\begin{array}{r} 9n \\ \times n \\ \hline 11 \end{array}$$

Luego

$$(9n-11)(n+1) = 0$$

$$9n-11=0 \quad \vee \quad n+1=0$$

$$n = \frac{11}{9} \quad \vee \quad n = -1$$

Por lo tanto, el menor valor de n es -1

Clave

Problema N.º 29

Con respecto a la ecuación cuadrática $2x^2 - 6x + 1 = 0$ de raíces α y β , indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

- I. $\alpha + \beta = 3$
 II. $\alpha \beta = 1$
 III. Si $\alpha > \beta$, entonces $\alpha - \beta = \sqrt{7}$.
 A) VFF B) VVV C) FVF
 D) FFF E) VFV

Resolución

Los valores α y β son raíces de la ecuación

$$2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Aplicamos la propiedad de Cardano.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$3^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$9 - (\alpha - \beta)^2 = 2$$

$$9 - 2 = (\alpha - \beta)^2 \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 7$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{7}$$

Por lo tanto, la secuencia correcta es VFV.

Clave

**Problema N.º 30**

En la ecuación cuadrática $k^2x^2 + x + 3k = 0$ de raíces a y b , se verifica que $a + b = 2ab$.

Indique el valor de k .

- A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{6}$
 D) $-\frac{1}{4}$ E) 0

Resolución

Nos piden el valor de k .

Datos: La ecuación

$$k^2x^2 + x + 3k = 0 \text{ de raíces } a \text{ y } b.$$

$$\text{Además, } a+b=2ab \quad (*)$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$a+b = \frac{-1}{k^2}$$

$$ab = \frac{3k}{k^2} \rightarrow ab = \frac{3}{k}$$

Luego en (*)

$$\begin{aligned} a+b &= 2ab \\ -\frac{1}{k^2} &= 2 \cdot \frac{3}{k} \\ -k &= 6k^2 \rightarrow 6k^2 + k = 0 \\ k(6k+1) &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$k=0 \vee 6k+1=0$$

$$k=0 \vee k = -\frac{1}{6}$$

Como la ecuación es cuadrática, entonces $k \neq 0$.

$$\therefore k = -\frac{1}{6}$$

**Problema N.º 31**

Si el conjunto solución de la ecuación cuadrática $x^2 - (a+3)x + 12 = 0$ es $\{a; b\}$, indique la ecuación cuadrática de raíces $2a$ y $2b$.

- A) $x^2 + 4x + 1 = 0$
- B) $2x^2 - 14x + 1 = 0$
- C) $x^2 - 10x + 1 = 0$
- D) $x^2 - 14x + 48 = 0$
- E) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Resolución

Nos piden la ecuación cuadrática de raíces $2a$ y $2b$.

$$x^2 - (2a+2b)x + (2a)(2b) = 0 \quad (*)$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\begin{cases} a+b = a+3 \rightarrow b = 3 \\ ab = 12 \rightarrow a \cdot 3 = 12 \\ a = 4 \end{cases}$$

Luego en (*)

$$x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$$

$$x^2 - 2(4+3)x + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 14x + 48 = 0$$

Clave

Problema N.º 32

Si las ecuaciones cuadráticas

$$8x^2 - (2a-1)x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 6x + 5b + 2 = 0$$

son equivalentes, determine el valor de $\frac{a}{b}$.

- A) -13
- B) 65
- C) 13
- D) $\frac{65}{3}$
- E) $-\frac{65}{2}$

Resolución

Nos piden el valor de $\frac{a}{b}$.

Dato: las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$8x^2 - (2a-1)x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 6x + 5b + 2 = 0$$

Aplicamos el teorema de ecuaciones cuadráticas equivalentes.

$$\frac{8}{4} = \frac{-(2a-1)}{-6} = \frac{2}{5b+2}$$

De la expresión obtenemos

$$2 = \frac{2a-1}{6} \quad 2 = \frac{2}{5b+2}$$

$$12 = 2a - 1$$

$$1 = \frac{1}{5b+2}$$

$$13 = 2a$$

$$a = \frac{13}{2}$$

$$5b + 2 = 1$$

$$5b = -1$$

$$b = -\frac{1}{5}$$

Luego nos piden $\frac{a}{b}$.

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\frac{13}{2}}{-\frac{1}{5}} = -\frac{65}{2}$$

Problema N.º 33

Dada la ecuación en la variable x ,

$x^2 + (b-3)x + 4b = 0$ de raíces α y β , se cumple

$$\text{que } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -2.$$

Determine el conjunto solución de la ecuación anterior.

- A) $\{2; -2\}$
- B) $\{12\}$
- C) $\{12; -12\}$
- D) $\{2 - \sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$
- E) $\{2\sqrt{3}i; -2\sqrt{3}i\}$

Resolución

Nos piden hallar el conjunto solución.

Dato:

$$x^2 + (b-3)x + 4b = 0; \text{ donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son raíces.}$$

Además

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -2 \quad (*)$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(b-3) \\ \alpha\beta = 4b \end{cases}$$

Luego en (*)

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -2 \rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 0$$

$$(\alpha + \beta)^2 = 0$$

$$[-(b-3)]^2 = 0$$

$$(b-3)^2 = 0 \rightarrow b = 3$$

Luego, en la ecuación

$$x^2 + (b-3)x + 4b = 0$$

$$x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = -12$$

$$x = \pm \sqrt{-12} \rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}i$$

$$\therefore CS = \{2\sqrt{3}i; -2\sqrt{3}i\}$$



Problema N.º 34

Calcule el valor de n si la ecuación $2x^2 - (n+5)x + 2n+1 = 0$ tiene como conjunto solución a $\{\alpha; 2\alpha\}$.

- A) 7 B) 4 C) $\frac{13}{4}$
 D) 15 E) $\frac{11}{2}$

Resolución

Nos piden el valor de n .

Datos: tenemos la ecuación

$$2x^2 - (n+5)x + 2n+1 = 0; \text{ CS} = \{\alpha; 2\alpha\}$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha = \frac{n+5}{2} \rightarrow \alpha = \frac{n+5}{6} \\ \alpha \cdot 2\alpha = \frac{2n+1}{2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{2n+1}{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{n+5}{6}\right)^2 = \frac{2n+1}{4}$$

$$\frac{n^2 + 10n + 25}{36} = \frac{2n+1}{4}$$

$$n^2 + 10n + 25 = 18n + 9$$

$$n^2 - 8n + 16 = 0$$

$$\begin{array}{r} n \\ \times \quad \quad \quad -4 \\ \hline n \quad -4 \end{array}$$

Luego

$$(n-4)(n-4) = 0$$

$$\therefore n=4$$

**Problema N.º 35**

Dada la ecuación cuadrática $x^2 + bx + 2c = 0$ de raíces α y β , se cumple que $b^2 = 8c$.

Calcule el valor de $\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}$.

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

Resolución

Nos piden el valor de $\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}$ (*)

Datos:

$$x^2 + bx + 2c = 0 \text{ de raíces } \alpha \text{ y } \beta$$

$$\text{Además, } b^2 = 8c$$

Hallamos el discriminante de la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot (2c)$$

$$\Delta = b^2 - 8c$$

$$8c - 8c$$

$$\Delta = 0$$

La ecuación tiene raíces iguales es decir $\alpha = \beta$.

Luego en (*)

$$\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2} = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2} = 1$$

**Problema N.º 36**

Resuelva la siguiente ecuación:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

- A) $\{-1; i; -i\}$ B) $\{1; i\}$ C) $\{1; -i; i\}$
 D) $\{1; -2i; 2i\}$ E) $\{1+i; 1-i\}$

Resolución

Por dato, tenemos la ecuación

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

Agrupamos convenientemente.

$$\underline{x^3} - \underline{x^2} + \underline{x} - 1 = 0$$

$$\underline{x^2(x-1)} + \underline{1(x-1)} = 0$$

$$(x-1)(x^2+1) = 0$$

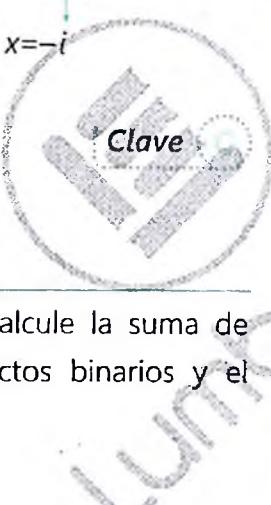
$$x-1=0 \quad \vee \quad x^2+1=0$$

$$x=1 \quad \vee \quad x^2=1$$

$$x = \sqrt{-1} \quad \vee \quad x = -\sqrt{-1}$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=i \quad \vee \quad x=-i$$

$$\therefore CS=\{1; i; -i\}$$

**Problema N.º 37**

En todas las ecuaciones calcule la suma de raíces, la suma de productos binarios y el producto de raíces.

a. $2x^3 + 5x^2 + 6x - 9 = 0$

b. $x^3 + x + 3 = 0$

c. $x^3 + x^2 + 5 = 0$

d. $2x^3 + 7x^2 + 4x = x^2 + 3x - 2$

Resolución

a. La ecuación $2x^3 + 5x^2 + 6x - 9 = 0$ tiene las raíces $\alpha; \beta; \theta$.

$$2x^3 + 5x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha + \beta + \theta = -\frac{(5)}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = \frac{6}{2} = 3$$

$$\alpha\beta\theta = -\frac{(-9)}{2} = \frac{9}{2}$$

- b. La ecuación $x^3 + x + 3 = 0$ tiene las raíces $\alpha; \beta; \theta$.

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1x + 3 = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha + \beta + \theta = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = \frac{1}{1} = 1$$

$$\alpha\beta\theta = -\frac{3}{1} = -3$$

- c. La ecuación $x^3 + x^2 + 5 = 0$ tiene las raíces $\alpha; \beta; \theta$.

$$1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0x + 5 = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha + \beta + \theta = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = \frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha\beta\theta = -\frac{5}{1} = -5$$

- d. De la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 + 4x = x^2 + 3x - 2$$

Efectuamos

$$2x^3 + 7x^2 + 4x - x^2 - 3x + 2 = 0$$

$2x^3 + 6x^2 + x + 2 = 0$ tiene las raíces $\alpha; \beta$ y 0 .

$$2x^3 + 6x^2 + 1x + 2 = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\alpha + \beta + \theta = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha\beta\theta = -\frac{2}{2} = -1$$

Problema N.º 38

Si la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$ tiene como raíces a x_1, x_2 y x_3 , calcule el valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

- A) -9 B) -5
D) -3

- C) -4
E) -2

Resolución

Nos piden $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Dato: la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$, de raíces x_1, x_2, x_3 .

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{3}{1} = -3$$

No olvide

Si $a+b+c=0 \rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Tenemos que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1 x_2 x_3$$

$$\therefore x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(-3) = -9$$

Clave

Problema N.º 39

Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0,$$

determine el valor de la expresión

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) (x_1 + x_2 + x_3).$$

- A) 0 B) -1
D) 2 E) 0,5

Resolución

Tenemos la ecuación

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0 \text{ de raíces } x_1, x_2, x_3$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -1$$

Nos piden

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\left(\frac{x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} \right) (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\left(\frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} \right) (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\therefore \left(\frac{\frac{1}{2}}{-1} \right) (-2) = \left(-\frac{1}{2} \right) (-2) = 1$$

Clave

Problema N.º 40

Si $1+2i$ es una raíz de la ecuación de coeficientes reales $x^3+2x^2-nx+m=0$, halle el valor de $m+4n$.

- A) 32 B) 34 C) 31
D) 30 E) 39

Resolución

De la ecuación $x^3+2x^2-nx+m=0$ de raíces x_1 ; x_2 ; x_3 , por dato una raíz es $x_1=1+2i$

Entonces $x_2=1-2i$ es otra raíz.

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$x_1+x_2+x_3=-2$$

$$1+2i+1-2i+x_3=-2$$

$$2+x_3=-2$$

$$x_3=-4$$

Como -4 es una raíz, entonces reemplazamos en la ecuación.

$$(-4)^3+2(-4)^2-n(-4)+m=0$$

$$-64+32+4n+m=0$$

$$4n+m=64-32$$

$$\therefore 4n+m=32$$

Clave A

Problema N.º 41

Calcule el valor de

$$a+b+c+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$$

si se sabe que a , b y c son las raíces de la ecuación $(x+1)^3=3x^2$.

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) 3
D) -3 E) 1

Resolución

De la ecuación $(x+1)^3=3x^2$, efectuamos

~~$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2$$~~

$$x^3 + 3x + 1 = 0 \text{ (raíces } a; b \text{ y } c)$$

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$a+b+c=0$$

$$ab+ac+bc=3$$

$$abc=-1$$

$$\text{Nos piden } a+b+c + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}.$$

Homogenizamos las fracciones.

$$a+b+c + \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc}$$

$$a+b+c + \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$$a+b+c + \frac{3abc}{abc} = 0+3=3$$

$$\therefore a+b+c + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$$

Clave C

Problema N.º 42

Si x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 son raíces de la ecuación

$$2x^4-x^2+2=0,$$

determine el valor de la expresión

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) -2 E) -1

Resolución

Tenemos la ecuación biquadrada

$$2x^4 - x^2 + 2 = 0$$

cuyas raíces son $x_1 = \alpha$; $x_2 = -\alpha$; $x_3 = \beta$; $x_4 = -\beta$.

Hallamos

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$

Reemplazamos

$$\alpha^3 + (-\alpha)^3 + \beta^3 + (-\beta)^3$$

$$\alpha^3 - \alpha^3 + \beta^3 - \beta^3 = 0$$

Luego

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

Por otro lado, tenemos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Reemplazamos

$$\alpha^2 + (-\alpha)^2 + \beta^2 + (-\beta)^2$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2$$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 \rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$\therefore \underbrace{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}_{=0} + \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}_{=1} = 1$$

**Problema N.º 43**

Calcule la mayor solución de la ecuación

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Resolución

De la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Factorizamos

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times \quad \quad \quad -9 \\ x^2 \\ \times \quad \quad \quad -4 \end{array}$$

$$(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados.

$$(x+3)(x-3)(x+2)(x-2) = 0$$

Luego

$$x = -3 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 2$$

Por lo tanto, la mayor solución es igual a 3.

**Problema N.º 44**

Calcule el menor valor de m , si se sabe que en la ecuación biquadrada $x^4 - 2m^2x^2 + m = 0$ el producto de 3 raíces es m .

A) -1

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $-\frac{1}{2}$

E) 1

Resolución

Tenemos la ecuación biquadrada

$$x^4 - 2m^2x^2 + m = 0$$

cuyas raíces son $x_1 = \alpha$; $x_2 = -\alpha$; $x_3 = \beta$; $x_4 = -\beta$



Aplicamos las propiedades b y c , respectivamente.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2m^2$$

$$\alpha^2 \beta^2 = m$$

El producto de 3 raíces es m .

$$x_1 x_2 x_3 = m$$

Entonces

$$\alpha(-\alpha)\beta = m$$

$$-\alpha^2 \beta = m$$

$$\alpha^2 \beta = -m$$

Luego

$$\alpha^2 \beta^2 = m$$

$$\alpha^2 \cdot \beta \cdot \beta = m$$

$$-m \cdot \beta = m \rightarrow -\beta = 1 \wedge \beta = -1$$

Como $\beta = -1$ es la raíz de la ecuación, entonces

$$x^4 - 2m^2 x^2 + m = 0$$

$$\text{Reemplazamos } (-1)^4 - 2m^2(-1)^2 + m = 0$$

$$1 - 2m^2 + m = 0$$

$$2m^2 - m - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2m \\ \cancel{+1} \\ m \\ \cancel{-1} \end{array}$$

$$(2m+1)(m-1) = 0$$

$$m = -\frac{1}{2} \vee m = 1$$

Por lo tanto, el menor valor de m es $-\frac{1}{2}$.

Problema N.º 45

La ecuación cúbica $x^3 + 2x + b = 0$ tiene raíces x_1 ; x_2 ; x_3 . Determine el valor de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -4 E) 4

Resolución

En $x^3 + 2x + b = 0$ sus raíces son x_1 ; x_2 ; x_3 .

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2 \\ x_1 x_2 x_3 = -b \end{cases}$$

Luego

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

Reemplazamos

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(2)$$

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -4$$

Clave

Problema N.º 46

Si x_1 ; x_2 ; x_3 son las raíces de la ecuación

$2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$, calcule el valor de

$$M = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3}$$

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) -1
D) 1 E) -2

Clave

Resolución

En la ecuación

$2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$, sus raíces son x_1, x_2, x_3 .

Aplicamos el teorema de Cardano.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

Nos piden $M = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3}$.

Homogenizamos las fracciones.

$$M = \frac{x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1}{x_1x_2x_3}$$

$$M = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3}$$

$$M = \frac{-\frac{1}{2}}{-1}$$

$$\therefore M = \frac{1}{2}$$

Clave 8



Lumíneros
Editores

1. Resuelva la ecuación

$$2(3+5x) = -3 + 28x$$

e indique la solución aumentada en dos.

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

2. Luego de resolver la ecuación

$$\frac{x}{27} = \frac{17}{9} - \frac{2x}{27},$$

halle la solución disminuida en 11.

A) 2 B) 6 C) 11
D) 10

3. Resuelva la siguiente ecuación:

$$2x + 3[x - (1-x) + 2] + x = 12$$

A) {2} B) {1} C) {12}
D) {4} E) {-2}

4. Resuelva la ecuación

$$\frac{x-7}{9} + \frac{x-9}{7} = 2.$$

A) {10} B) {12} C) {14}
D) {16} E) {18}

5. Resuelva la siguiente ecuación:

$$2ax + 4b = ax + 5b + 1$$

A) {a+b} B) $\left\{\frac{a+1}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{b+1}{a}\right\}$

D) $\left\{\frac{a-b}{2}\right\}$ E) {a-b}

6. Resuelva la ecuación lineal

$$\frac{x}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a} - \frac{1}{b}; a, b \neq 0.$$

A) $\frac{2(b-a)}{b}$ B) {a+b} C) $\left\{\frac{b+a}{2b}\right\}$

D) $\frac{b+a}{2b}$ E) $\left\{\frac{2(b-a)}{b}\right\}$

7. De la siguiente igualdad

$$a(b+1) = c(a+1) + b(a+1),$$

despeje la incógnita a en función de b y c .

A) $a = \frac{b+c}{bc-1}$ B) $a = ab+c$ C) $a = \frac{b+1}{c+1}$

D) $a = \frac{b+c}{1-c}$ E) $a = \frac{b+1}{c-1}$

8. Si x es la solución de la ecuación lineal

$$\frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x-2}{\sqrt{2}} = 0,$$

determine la solución aumentada en 2.

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{7}$

D) 2 E) $\frac{2}{9}$

9. Resuelva la ecuación lineal

$$mx^2 + 2mx = 3x^2 + m + 1.$$

A) {3} B) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ C) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

D) {2} E) $\left\{\frac{7}{6}\right\}$

10. Halle el denominador de la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{2x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$

- A) a
B) b
C) ab
D) $a+b$
E) a^2

11. Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización:

- a. $x^2+x-12=0$
b. $x^2-7x+12=0$
c. $2y^2+7y+3=0$
d. $6x(x-1)=21-x$

12. Resuelva las siguientes ecuaciones por la fórmula general:

- a. $x^2+2x-5=0$
b. $x^2-4x+2=0$
c. $2x^2+8x+1=0$
d. $3x^2-6x-1=0$

13. Dada la ecuación cuadrática $(a-3)x^2-ax+15=0$, determine el valor de a para que las raíces de la ecuación sumen 2.

- A) 6
B) 1
C) 3
D) 4
E) -1

14. Si la ecuación cuadrática $2x^2+\lambda x+n=0$, donde el $CS=\{2; \lambda+1\}$, calcule el valor de $\lambda \cdot n$.

- A) -2
B) -1
C) 8
D) 2
E) 3

15. Dada la ecuación cuadrática

$$x^2-2ax+a^2-1; a \in \mathbb{R}^+$$

indique la mayor solución.

- A) 1
B) $a-1$
C) $a+1$
D) -1
E) $-a-1$

16. Si el conjunto solución de una ecuación cuadrática $ax^2-ax+1=0$ es $\{x_0\}$, calcule el valor de $a \cdot x_0$.

- A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 2
D) 1
E) 4

17. Sea la ecuación cuadrática $x^2-3x+5=0$. Si sus raíces son r y s , halle el valor de $(2r+1)(2s+1)$.

- A) 30
B) 27
C) 14
D) 18
E) 20

18. Si las raíces de la ecuación $(2x-3)(x+5)=3(1-x)$ son α y β , determine el valor de $\alpha+\beta+\alpha\beta$.

- A) 14
B) -28
C) 28
D) -14
E) 20

19. Si α es la solución de la ecuación

$$x^2-\sqrt{2}x+1=0,$$

calcule el valor de $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$.

- A) 2
B) 4
C) 1
D) 0
E) $\sqrt{2}$

20. Si la ecuación cuadrática

$$(b-1)x^2 + 2bx + 4 = 0$$

presenta raíces iguales, ¿cuál es el valor de b ?

- A) 16 B) -4 C) -16
D) 4 E) 2

21. Si en $x^3 - x^2 - x - 15 = 0$,

cuyo $CS = \{3; \alpha; \beta\}$ donde $\alpha \neq \beta \neq 3$, indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

- I. $\alpha + \beta = -2$
II. $\alpha\beta = 5$
III. $3\alpha + 3\beta + \alpha\beta = 1$

- A) VVF B) VVV
D) FFV

C) FFF
E) VFV

22. Si las raíces de $x^3 + mx^2 + nx + m = 0$

son proporcionales a 2; 3 y 4, indique el valor de n .

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{39}{2}$ C) $\frac{39}{4}$
D) $\frac{3}{4}$ E) 24

23. Si una de las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx = 7 \text{ donde } \{a; b\} \in \mathbb{Q}$$

es $3 + \sqrt{2}$, calcule el valor de $(a+b)^2$.

- A) 4 B) 25 C) 36
D) 49 E) 81

24. Sean x_1, x_2, x_3 las raíces de

$$x^3 + mx^2 + 3x + m^2 - 1 = 0$$

y además $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcule el valor de $x_1 x_2 x_3$.

- A) 2 B) 3 C) 0
D) 1 E) -3

25. En la ecuación $2x^3 - 3x - 1 = 0$ sus raíces son $\alpha; \beta$ y θ . Calcule el valor de

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\theta} + \frac{1}{\beta\theta}.$$

- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) -3

26. Si $a; b$ y c son las raíces de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x = 9$, calcule el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

- A) 10 B) 15 C) 18
D) 20 E) 25

27. Las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3 + 9x^2 + ax + 15 = 0; \text{ donde } a \in \mathbb{Q}, \text{ están en progresión aritmética. Calcule el valor de } a.$$

- A) 13 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

28. En la ecuación polinomial $x^3 + ax^2 + 5x - b = 0$; donde $a \wedge b \in \mathbb{R}$. Si una raíz es igual a $2 - \sqrt{3}$, calcule el valor de $a - b$.

- A) 4 B) -6 C) 5
D) -4 E) 6

29. Si la ecuación cúbica

$$x^3 - 4x^2 + mx + n = 0; \text{ donde } \{m; n\} \in \mathbb{R}.$$

Además, una raíz es $(1+i); i = \sqrt{-1}$,

halle una ecuación cuadrática de raíces m y n .

- A) $x^2 + 2x + 24 = 0$
B) $x^2 + 2x - 8 = 0$
C) $x^2 - 2x + 24 = 0$
D) $x^2 - 2x - 24 = 0$
E) $x^2 + 24x - 2 = 0$

30. Resuelva la ecuación

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

- A) $\{3; -3; 2; -2\}$
- B) $\{3; -3; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$
- C) $\{3; -3; 2i; -2i\}$
- D) $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 2; -2\}$
- E) $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 2i; -2i\}$

31. Dada la ecuación biquadrada

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

halle A y B, donde

- El valor A es la suma de los cuadrados de sus raíces.
- El valor B es el producto de los cuadrados de sus raíces.

- A) $8 \wedge 4$
- B) $8 \wedge 1$
- C) $-8 \wedge 1$
- D) $8 \wedge -4$
- E) $-8 \wedge 8$

32. Si α y β son las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 2 = 0,$$
 indique la ecuación biquadrada de raíces α y $\beta.$

- A) $x^4 + 21x^2 + 4 = 0$
- B) $x^4 - 21x^2 - 4 = 0$

C) $x^4 - 21x^2 + 4 = 0$

D) $x^4 - 21x + 4 = 0$

E) $x^4 - 21x^2 + 1 = 0$

33. Construya una ecuación cuadrática cuyas raíces son 5 y $-\frac{1}{3}.$

A) $3x^2 - 14x - 5 = 0$

B) $3x^2 + 14x + 5 = 0$

C) $3x^2 - 14x + 5 = 0$

D) $x^2 - 14x - 5 = 0$

E) $3x^2 - 5x - 14 = 0$

34. Si las ecuaciones

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$3x + n = 15$$

tienen una raíz común, halle el mayor valor de $n.$

- | | | |
|------|-------|------|
| A) 6 | B) 7 | C) 8 |
| D) 9 | E) 10 | |

35. Si $\{5\}$ es el conjunto solución de la ecuación

$$2x^2 - mx + n = 0,$$
 halle el valor de $m + n.$

- | | | |
|-------|--------|-------|
| A) 70 | B) 75 | C) 80 |
| D) 90 | E) 100 | |

Claves

1	A	6	E	11	*	16.	C	21	A	26	B	31	B
2	B	7	D	12	*	17	B	22	C	27	D	32	C
3	B	8	A	13	A	18	D	23	C	28	B	33	A
4	D	9	B	14	C	19	D	24	D	29	D	34	D
5	C	10	D	15	C	20	*	25	E	30	C	35	A

* Problema sin alternativas

CAPÍTULO

8



DESIGUALDADES



En la vida cotidiana solemos hacer muchas comparaciones como cuando vamos a una tienda y queremos establecer paralelos con los diferentes precios que hay para un artículo, o cuando establecemos similitudes con nuestros amigos o familiares en cuanto a la altura y vemos quién es más alto o quién es más bajo.

La acción de comparar datos o elementos resulta ser una actividad muy frecuente y por eso es importante hacerlo adecuadamente. Las matemáticas nos brindan las desigualdades como herramientas para comparar cantidades; por ello debemos estudiarlas y aprender todo lo relacionado a ellas.

Aprendizajes esperados

- Conocer los cuatro tipos de desigualdades que existen.
- Estudiar las propiedades básicas de las desigualdades.
- Aprender sobre los intervalos y las operaciones entre ellos.
- Resolver problemas sobre las variaciones.
- Desarrollar problemas sobre máximos y mínimos.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Las desigualdades son útiles para comparar cantidades. Por ejemplo, cuando comparamos los precios de un artículo que se vende en distintos lugares y determinamos cuál es mayor o cuál es menor; o cuando un ingeniero civil mide y compara distintas longitudes para efectuar la construcción de una carretera nueva, puente, edificio u otra estructura.

Asimismo las desigualdades son básicas para desarrollar los temas de inecuaciones y funciones donde usaremos las propiedades que serán de mucha utilidad.

Desigualdades



Importante

Tipos de desigualdades

Desigualdades estrictas

- El signo $>$ se lee: "mayor que".
- El signo $<$ se lee: "menor que".

Desigualdades no estrictas

- El signo \geq se lee: "mayor o igual que".
- El signo \leq se lee: "menor o igual que".

No olvide

Se dice que a es mayor que b cuando $a - b$ es positivo.

Ejemplos

- El número 5 es mayor que 2 porque $5 - 2 = 3$ es positivo.
- El número -3 es mayor que -7 porque $-3 - (-7) = 4$ es positivo.

1. DEFINICIÓN

Las desigualdades son las relaciones que sirven para poder comparar dos cantidades, es decir indican cuál es el mayor o el menor entre ellas. Asimismo, incluye, la posibilidad de que ambas cantidades sean iguales.

Primer caso

La desigualdad $a > b$, la cual se lee: " a es mayor que b ".

Ejemplos

- El número 5 es mayor que 3, se escribe $5 > 3$.
- La expresión $7 > 2$ se lee: "7 es mayor que 2".

Segundo caso

La desigualdad $a < b$, la cual se lee: " a es menor que b ".

Ejemplos

- La expresión $5 < 6$, se lee: "5 es menor que 6".
- El número 4 es menor que 10, se escribe $4 < 10$.

Tercer caso

La desigualdad $a \geq b$, la cual se lee: " a es mayor o igual que b ".

Ejemplos

- $5 \geq 3$

La desigualdad $5 \geq 3$ se lee: "5 es mayor o igual a 3". Como se cumple que $5 > 3$, entonces la desigualdad $5 \geq 3$ es verdadera.

- $7 \geq 7$

La desigualdad $7 \geq 7$ se lee: "7 es mayor o igual a 7".

Como se cumple una de las dos posibilidades ($7=7$), entonces es verdadera.

- $3 \geq 6$

La desigualdad $3 \geq 6$ se lee: "3 es mayor o igual a 6".

Como no se cumple ninguna de las dos posibilidades, entonces es falsa.

Cuarto caso

La desigualdad $a \leq b$, se lee: " a es menor o igual que b ".

Ejemplos

- $3 \leq 8$

La desigualdad $3 \leq 8$ se lee: "3 es menor o igual a 8".

Es verdadera porque se cumple que $3 < 8$, aunque no se concrete la igualdad.

- $4 \leq 4$
La desigualdad $4 \leq 4$ se lee: "4 es menor o igual a 4".
Es verdadera porque se cumple que $4=4$, aunque no plasme la otra posibilidad.
- $8 \leq 2$
La desigualdad $8 \leq 2$ se lee: "8 es menor o igual a 2".
Es falsa, porque no se cumple ninguna de las dos posibilidades.

1.1. Otras definiciones

1. La desigualdad $a < b$ equivale a $b > a$.

Ejemplos

- La desigualdad $5 > 2$ se escribe también como $2 < 5$.
- La desigualdad $3 < 7$ se escribe también como $7 > 3$.

2. La desigualdad $a < b < c$ equivale a $a < b$ y $b < c$.

Ejemplos

- La desigualdad $2 < x < 5$ equivale a $2 < x \wedge x < 5$.
Se lee: "x es mayor que 2 y a la vez menor que 5".
- La desigualdad $3 < x < 8$ equivale a $3 < x \wedge x < 8$.
Se lee: "x es mayor que 3 y a la vez es menor que 8".

APLICACIÓN 1

Indique verdadero o falso según corresponda.

- | | |
|----------------|-----------------------------------|
| I. $3 \leq 7$ | III. $2 < 4 < 5$ |
| II. $6 \geq 6$ | IV. $3 < 5 \leftrightarrow 5 > 3$ |

RESOLUCIÓN

- I. Verdadero

Porque se cumple que $3 < 7$.

- II. Verdadero

Porque se cumple que $6=6$.

- III. Verdadero

Porque $2 < 4$ y $4 < 5$.

- IV. Verdadero

La desigualdad $3 < 5$ equivale a la desigualdad $5 > 3$.

Reto al saber

Entre 2015^{2016} y 2016^{2015} , ¿cuál es el mayor?

Cuidado!

La desigualdad $a \leq b$ implica dos posibilidades: una es $a < b$ y la otra es $a=b$.

Si se cumple una de estas dos posibilidades, la desigualdad será verdadera.

Esta posibilidad también ocurre con la desigualdad $a \geq b$.



**Importante**

Las desigualdades se usan para comparar números reales.

Ejemplos

- $5 > 2$
- $\frac{1}{2} < 6$
- $3 \leq 3$
- $\sqrt[4]{4} \geq \sqrt{2}$

**No olvide**

Los radicales inexactos representan números irracionales.

Ejemplos

- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[4]{4}$

2. NÚMEROS REALES

Los números reales resultan de la unión de los números racionales e irracionales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Los números racionales son los enteros y las fracciones (cociente dos enteros). Los números irracionales se representan como números con infinitos decimales no periódicos, los cuales no pueden convertirse a fracción.

Ejemplo

Se muestran los siguientes números:

$$-2; \frac{1}{3}; -\frac{5}{2}; 0; 6; \sqrt{3}; -\sqrt[3]{5}; \pi$$

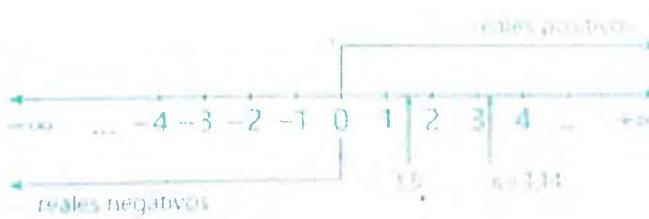
¿Cuáles son números racionales y cuáles son irracionales?

- Los números -2 , 0 y 6 son enteros, entonces son racionales.
- Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $-\frac{5}{2}$ también son racionales.
- Los números $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{5}$ y π no son enteros ni pueden expresarse como fracción, por lo tanto, son números irracionales.

NÚMEROS REALES	
Racionales (\mathbb{Q})	Irracionales (\mathbb{I})
Enteros: $-2; 0; 6; \dots$	$\sqrt{3} = 1,73\dots$
Fracciones: $\frac{1}{3}; -\frac{5}{2}; \dots$	$-\sqrt[3]{5} = -1,70\dots$ (No son enteros y no pueden expresarse como fracción).

2.1. Recta numérica real

Los números reales se representan geométricamente en la recta numérica real.



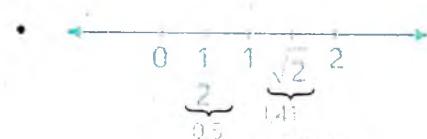
En esta recta están ubicados todos los números reales, tanto racionales como irracionales.

Además, están ordenados de menor a mayor, en el sentido de izquierda a derecha. Esto quiere decir que si “ a está a la izquierda de b ” significa que “ a es menor que b ”.

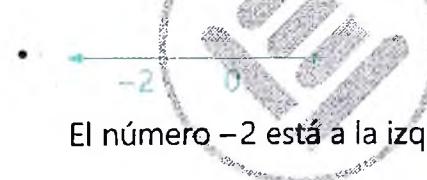
Ejemplos



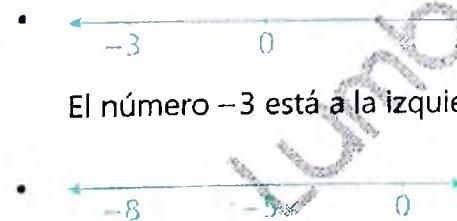
El número 0 está a la izquierda de 5, entonces $0 < 5$.



El número $\frac{1}{2}$ está a la izquierda de $\sqrt{2}$, entonces $\frac{1}{2} < \sqrt{2}$.



El número -2 está a la izquierda de 0, entonces $-2 < 0$.



El número -3 está a la izquierda de 7, entonces $-3 < 7$.



El número -8 está a la izquierda de -5 , entonces $-8 < -5$.

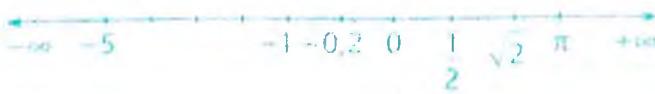
APLICACIÓN 2

Ubique los siguientes números reales en la recta numérica.

$$\frac{1}{2}; \pi; \sqrt{2}; -1; -0,2; -5$$

RESOLUCIÓN

Deberemos ubicarlos en la recta numérica, en orden de menor o mayor. Entonces tendremos lo siguiente:



Reto al saber

¿Cuántos números reales están comprendidos entre 3 y 7?



No olvide

En la recta numérica se observa lo siguiente:

- Un número positivo es mayor que cero.
- Un número negativo es menor que cero.
- Un número negativo es menor que uno positivo.
- En el caso de dos negativos, el más grande estará ubicado en la recta a la izquierda del otro y por ende, será el menor entre ellos.

2.2. Números positivos y negativos

En la recta numérica, los números positivos están ubicados a la derecha del cero, es decir, son mayores que cero, y los números negativos están ubicados a la izquierda del cero, o sea, son menores que cero. Entonces tendremos en cuenta los siguientes puntos:

1. Cuando un número real x es positivo, escribiremos $x > 0$.
2. Cuando un número real x es negativo, escribiremos $x < 0$.
3. Cuando un número real x es positivo, entonces su opuesto, $-x$, será negativo.

Ejemplos

- Como 5 es positivo, se escribirá $5 > 0$.
- Como $2 > 0$, significa que 2 es positivo.
- Como -7 es negativo, se escribirá $-7 < 0$.
- Como $-4 < 0$, significa que -4 es negativo.
- Como 3 es positivo, entonces -3 es negativo.

2.3. Ley de tricotomía

Los números reales son de tres tipos: los positivos, los negativos y el cero.

Es decir, si x es un número real, entonces se cumple solo una de las siguientes posibilidades:

$$x < 0 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x > 0$$

Ejemplos

- Si un número real no es negativo, entonces solo podrá ser cero o positivo.
- Si un número real no es positivo ni negativo, entonces solo le queda la opción de ser cero.
- Si un número real es diferente de cero, entonces será positivo o negativo.

3. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

3.1. Tricotomía

Dados dos números reales x y y , se cumple solo una de las siguientes posibilidades:

$$x < y \vee x = y \vee x > y$$

Ejemplo

Cuando comparamos el número real x con el número 2, tendremos solo tres posibilidades que se excluyen entre sí, las cuales son

$$x < 2 \vee x = 2 \vee x > 2$$

3.2. Transitividad

$$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

Ejemplos

- Si $x < 2$ y $2 < 5$, entonces $x < 5$.
- Si $x < 3$ y $3 < 10$, entonces $x < 10$.

3.3. Monotonía de la suma

Si a una desigualdad se le suma un número real a ambos miembros, esta mantiene su sentido.

$$x < y \in \mathbb{R} \rightarrow x + c < y + c$$

Ejemplos

1. A la desigualdad $2 < 5$ le sumamos 8 y tendremos

$$2 + 8 < 5 + 8$$

$$10 < 13$$

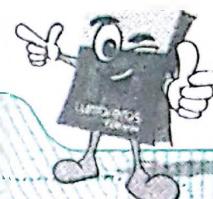
Observe que se mantiene el sentido de la desigualdad.

2. A la desigualdad $3 < 7$, le sumamos 10 y tendremos

$$3 + 10 < 7 + 10$$

$$13 < 17$$

Observe que se mantiene el sentido de la desigualdad.



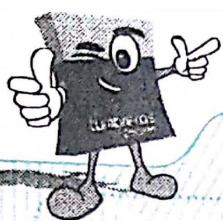
Dato curioso

La transitividad se usa en la vida real. Por ejemplo, si Juan es mayor que Raúl, y Raúl es mayor que Pepe, ¿qué podemos decir de Juan y Pepe? Podemos decir que Juan es mayor que Pepe. En este caso, hemos aplicado la transitividad.



Importante

- El conjunto de los números reales positivos se representa como \mathbb{R}^+ .
- El conjunto de los números reales negativos se representa como \mathbb{R}^- .

**Dato curioso**

Jorge tiene 20 años y es el hermano mayor de Miguel que tiene 15 años. ¿Si pasan 30 años Jorge seguirá siendo mayor que Miguel?

Sin importar el tiempo, Jorge siempre será mayor que Miguel. Estas ideas en términos de desigualdades se expresan como

- Al inicio: $20 > 15$
- Pasan 30 años:
 $20+30 > 15+30$
- Al final: $50 > 45$

La desigualdad se mantiene si se suma el mismo número a ambos miembros de la desigualdad.

**Importante**

Si a es un número real negativo, entonces su inversa $\frac{1}{a}$ también será un número real negativo.

Simbólicamente

$$a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

Si a es un número real positivo, entonces su inversa $\frac{1}{a}$ también será un número real positivo. Simbólicamente

$$a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Si $a=0$, entonces no tiene inversa.

3.4. Monotonía de la multiplicación

Si a una desigualdad se le multiplica por un número positivo, la desigualdad mantiene su sentido.

$$x < y \text{ A CERT } \rightarrow cx < cy$$

Ejemplo

A la desigualdad $3 < 7$, la multiplicamos por 10.

$$(3)(10) < (7)(10)$$

$$30 < 70$$

Observamos que se mantiene el sentido de la desigualdad.

Otras propiedades

a.

$$x < y \text{ A CERT } \rightarrow a > cy$$

Si multiplicamos por un número negativo a ambos miembros de una desigualdad, esta cambia de sentido.

Ejemplo

Si a la desigualdad $2 < 6$ la multiplicamos por -5 , tendremos

$$(-5)(2) > (-5)(6)$$

$$-10 > -30$$

Observamos que cambia el sentido de la desigualdad.

b.

$$x < y \wedge xy > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

Al invertir los números, la desigualdad cambiará de sentido.

En ambos miembros, los números deben ser del mismo signo.

Ejemplos

1. En la desigualdad $2 < 5$, ambos extremos son positivos, entonces aplicaremos esta propiedad.

Invertimos

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, la desigualdad cambió de sentido.

2. En la desigualdad $-3 < -2$, ambos extremos son del mismo signo, entonces aplicaremos esta propiedad.
Invertimos

$$-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la desigualdad cambió de sentido.

c. $0 < x < y \rightarrow x^{2n} < y^{2n}, n \in \mathbb{Z}^+$

Si ambos extremos son positivos y se elevan a un exponente par, mantendremos el sentido de la desigualdad.

Ejemplos

- $2 < 3 \rightarrow 2^2 < 3^2$
- $3 < 5 \rightarrow 3^4 < 5^4$

d. $x < y < 0 \rightarrow$ ~~$x^n < y^n, n \in \mathbb{Z}^+$~~

Si ambos extremos son negativos y se elevan a un exponente par, la desigualdad cambiará de sentido.

Ejemplos

- $-7 < -2 \rightarrow \underbrace{(-7)^2}_{49} > \underbrace{(-2)^2}_{4}$
- $-5 < -3 \rightarrow \underbrace{(-5)^4}_{625} > \underbrace{(-3)^4}_{81}$

e. $x < y \leftrightarrow x^{2n+1} < y^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}^+$

Sin importar los signos de x y y , al elevarlos a un exponente impar, la desigualdad mantendrá su sentido.

Ejemplos

- $2 < 3 \rightarrow 2^3 < 3^3$
- $-5 < 1 \rightarrow (-5)^3 < 1^3$
- $-3 < -2 \rightarrow (-3)^5 < (-2)^5$

Cuidado!

Si los extremos de una desigualdad son de signos opuestos, al invertir ambos extremos, no puede aplicarse la propiedad b, la cual es válida solo cuando los extremos tienen el mismo signo.



**No olvide**

En una desigualdad, si los extremos tienen signos opuestos, no es válido elevarlos a un exponente par.

Ejemplo

$$-5 < 4 \rightarrow (-5)^2 < 4^2$$

¡ERROR!

**Cuidado!**

Es incorrecto proceder así

$$x^2 < y^2 \rightarrow x < y$$

No es válido cancelar el exponente par sin conocer los signos de x y y .

**Reto al saber**

Encuentre los valores reales de x , tal que $x^2 < 9$.

También es válido el proceso de regreso. Por ese motivo, cuando el exponente es impar, lo podemos cancelar y la desigualdad mantendrá su sentido.

Ejemplos

- $(-7)^3 < (-6)^3 \rightarrow -7 < -6$
- $4^{11} < 5^{11} \rightarrow 4 < 5$
- $x^{2015} < 2^{2015} \rightarrow x < 2$

4. INTERVALOS

Se llama intervalo al conjunto que agrupa a todos los números reales comprendidos entre dos extremos, los cuales pueden ser números reales o los símbolos $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplos

1. ¿Qué conjunto agrupa a todos los números reales comprendidos entre 2 y 5 sin contar estos extremos?



Debemos tener en cuenta que entre 2 y 5 hay infinitos números reales y el conjunto que los agrupa es el intervalo abierto de 2 a 5 que se representa como $A=(2; 5)$.

2. ¿Qué conjunto agrupa a todos los números reales comprendidos entre 3 y 7 si se cuenta a ambos extremos?



El conjunto que los agrupa es el intervalo cerrado de 3 a 7, que se representa como $B=[3; 7]$.

3. ¿Qué conjunto agrupa a todos los números reales mayores que 4?



El conjunto que los agrupa es el intervalo de 4 a $+\infty$, que se representa como $C=(4; +\infty)$.

4.1. Clasificación

Sean a y b números reales, tales que $a < b$. Los intervalos se clasifican en los siguientes tipos:

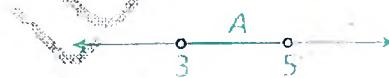
NOMBRE	INTERVALO	LO QUE REPRESENTA
Intervalo abierto	$(a; b)$	$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a; b]$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
Intervalos semiabiertos	$\langle a; b]$ $[a; b\rangle$	$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ $[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
Intervalos no acotados	$\langle a; +\infty\rangle$ $[a; +\infty)$ $\langle -\infty; b\rangle$ $\langle -\infty; b]$ $\langle -\infty; +\infty\rangle$	$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ $\langle -\infty; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$ $\langle -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$ $\langle -\infty; +\infty\rangle = \mathbb{R}$

4.1.1. Intervalo abierto

Se caracteriza por no incluir a los extremos.

Ejemplo

$$A = (3; 5)$$



Este intervalo agrupa a todos los números reales comprendidos entre 3 y 5, sin contar a estos valores. Es decir, 3 y 5 no pertenecen a este intervalo.

4.1.2. Intervalo cerrado

Se caracteriza porque incluye a los extremos.

Ejemplo

$$A = [2; 6]$$



Este intervalo agrupa a todos los números reales comprendidos entre 2 y 6 incluyendo a estos valores.

Importante

En la recta numérica real



El símbolo $+\infty$ no es un número real, así que no es correcto establecer desigualdades con este símbolo.

El símbolo $+\infty$ se usa para indicar que los números reales positivos aumentan ilimitadamente, lo mismo ocurre con el símbolo $-\infty$.

Cuidado!

Tenga en cuenta que entre 2 y 5 hay infinitos números reales. Entre ellos están los enteros 3 y 4, y además números decimales como 2,1; π ; 4,9; ...



No cometamos el error de contar solo los números enteros.

4.1.3. Intervalo semiabierto

Se caracteriza porque incluye a un extremo y al otro no.

Ejemplo

$$A=[2; 9)$$



Este intervalo agrupa a todos los números reales comprendidos entre 2 y 9 e incluye al 2 (porque es cerrado), pero no al 9 (porque es abierto). Es decir, $2 \in A$ y $9 \notin A$.

4.1.4. Intervalos no acotados

Se caracterizan porque uno de sus extremos es infinito positivo o infinito negativo.

Ejemplos

- $A=[3; +\infty)$
- $B=(-\infty; 5]$



4.2. Representación geométrica

Un intervalo acotado geométricamente representa a un segmento. En cambio, un intervalo no acotado representa una semirrecta o toda la recta.

Ejemplos

- El intervalo $A=[3; 5]$ es el segmento que va de 3 a 5.



- El intervalo $B=[2; +\infty)$ es la semirrecta que va de 2 a $+\infty$.



4.3. Longitud de un intervalo

El intervalo $A=[a; b]$ geométricamente representa un segmento.



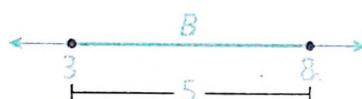
Su longitud se define como $\ell(A)=b-a$, donde $\ell(A)$ significa: "longitud del intervalo A ".

Ejemplos

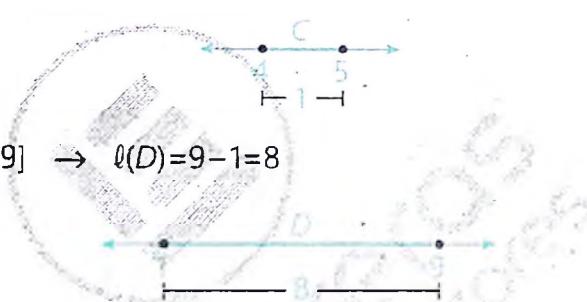
- $A=[2; 5] \rightarrow \ell(A)=5-2=3$



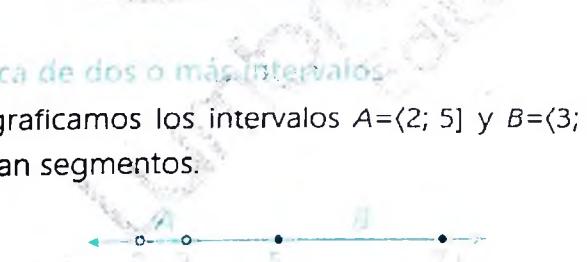
- $B=[3; 8] \rightarrow \ell(B)=8-3=5$



- $C=[4; 5] \rightarrow \ell(C)=5-4=1$



- $D=[1; 9] \rightarrow \ell(D)=9-1=8$



4.4. Gráfica de dos o más intervalos

Cuando graficamos los intervalos $A=[2; 5]$ y $B=(3; 7]$, ambos representan segmentos.



Observamos que se hace confuso diferenciar qué gráfico es de A y cuál es de B . Por ese motivo, los representaremos de la siguiente manera:



De este modo, se distinguen los gráficos de ambos intervalos.

Cuando se grafiquen dos o más intervalos juntos, se hará de esta manera, pero sin olvidar que esta es solo una representación por conveniencia, ya que los intervalos realmente son los segmentos de la recta.

Importante

Si alguno de los extremos de un intervalo es abierto, su longitud se calcula de la misma manera que en un intervalo cerrado.

Ejemplo

$$A=(2; 10] \rightarrow \ell(A)=10-2=8$$



Cuidado!

Los intervalos no acotados como $B=(2; +\infty)$ no presentan longitud.

En cambio, los intervalos acotados sí tienen longitud.



4.5. Operaciones

Los intervalos son un tipo especial de conjunto y como tal se pueden realizar operaciones entre ellos, como la unión, la intersección, la diferencia o el complemento.

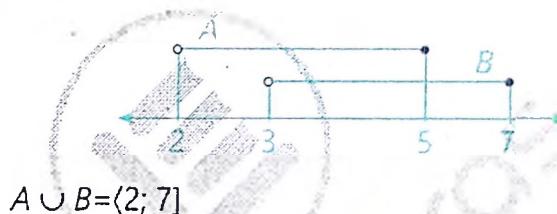
4.5.1. Unión

Dados dos intervalos A y B , su unión $A \cup B$ es el conjunto que agrupa a los elementos de A y también a los elementos de B .

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplos

- Se tienen los intervalos $A = (2; 5]$ y $B = (3; 7]$. Su representación en la recta numérica es



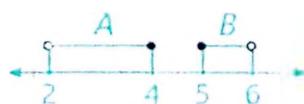
- Se tienen los intervalos $A = [5; 9]$ y $B = (3; 10]$. En la recta numérica, tenemos



Observamos que A está incluido en B , entonces su unión es el intervalo A .

$$A \cup B = (3; 10]$$

- Se tienen los intervalos $A = (2; 4]$ y $B = [5; 6)$. En la recta numérica



Estos intervalos son disjuntos y en tal caso su unión queda representada de la siguiente manera:

$$A \cup B = \underbrace{(2; 4]}_{\text{También puede expresarse como un solo intervalo}} \cup \underbrace{[5; 6)}$$

También puede expresarse como un solo intervalo

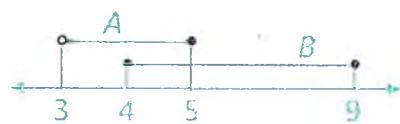
4.5.2. Intersección

Dados dos intervalos A y B , su intersección $A \cap B$ agrupa a todos los elementos en común de A y B .

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$$

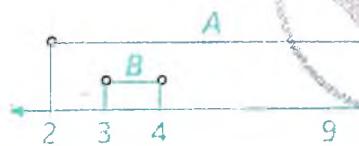
Ejemplos

- Se tienen los intervalos $A=(3; 5]$ y $B=[4; 9]$. En la recta numérica, tenemos



$$A \cap B = [4; 5]$$

- Se tienen los intervalos $A=(2; 9]$ y $B=(3; 4)$. En la recta numérica, tenemos



Como B está incluido en A , su intersección es el intervalo B .

$$A \cap B = B = (3; 4)$$

- Se tienen los intervalos $A=(2; 3)$ y $B=(5; 6)$. En la recta numérica, tenemos



Estos son intervalos disjuntos, ya que no tienen ningún elemento en común.

$$A \cap B = \emptyset$$

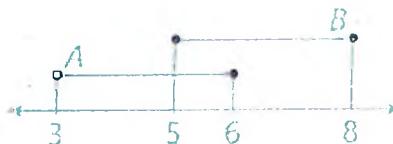
4.5.3. Diferencia

Dados dos intervalos A y B , la diferencia $A-B$ agrupa a los elementos que están solo en A .

$$A-B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplos

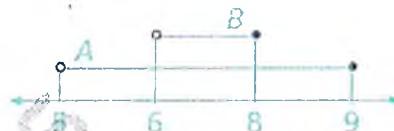
- Se tienen los intervalos $A=(3; 6]$ y $B=[5; 8]$. En la recta numérica, tenemos



Cuando calculamos $A-B$, el extremo de B cambia. En B , el extremo 5 está cerrado; pero en $A-B$, este extremo será abierto

$$A-B = (3; 5)$$

- Se tienen los intervalos $A=[5; 9]$ y $B=(6; 8]$. En la recta numérica, tenemos



Al calcular $A-B$, los extremos de B sí cambian. En B , el extremo 6 está abierto, pero en $A-B$ será cerrado. En B , el extremo 8 está cerrado, pero en $A-B$ será abierto.

$$A-B = (5; 6] \cup (8; 9]$$

4.5.4. Complemento

El complemento de A denotado como A^C es el conjunto que agrupa a todos los números reales que no pertenecen a A .

$$A^C = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\}$$

Ejemplos

- Se tiene el intervalo $A=(3; +\infty)$. En la recta numérica, tenemos

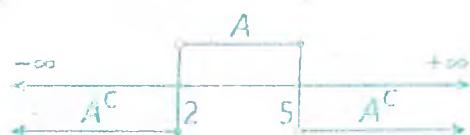


En A , el extremo 3 está abierto, pero en A^C será cerrado.

$$A^C = (-\infty; 3]$$

2. Se tiene el intervalo $A = \langle 2; 5 \rangle$.

En la recta numérica, tenemos



En A , el extremo 2 está abierto, pero en A^C será cerrado.

En A , el extremo 5 está cerrado, pero en A^C será abierto.

$$A^C = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$$

4.6. Relación de los intervalos con las desigualdades

Caso 1

$$x \in (a; b) \leftrightarrow a < x < b$$

Ejemplos

- $x \in (3; 4) \leftrightarrow 3 < x < 4$
- $2 < x < 9 \leftrightarrow x \in (2; 9)$

Caso 2

$$x \in [a; b] \leftrightarrow a \leq x \leq b$$

Ejemplos

- $x \in [1; 6] \leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$
- $3 \leq x \leq 4 \leftrightarrow x \in [3; 4]$

Caso 3

$$x \in (a; b] \leftrightarrow a < x \leq b$$

Ejemplos

- $x \in (1; 8] \leftrightarrow 1 < x \leq 8$
- $2 < x \leq 3 \leftrightarrow x \in (2; 3]$

Caso 4

$$x \in [a; b) \leftrightarrow a \leq x < b$$

Ejemplos

- $x \in [4; 5) \leftrightarrow 4 \leq x < 5$
- $7 \leq x < 9 \leftrightarrow x \in [7; 9)$

No es lo mismo $A - B$ que $B - A$.

Cuidado!

El complemento de A también se puede definir como

$$A^C = \mathbb{R} - A$$

En A y A^C no debe haber ningún elemento en común.

Si A y A^C están unidos, deben formar todo \mathbb{R} (total de la recta).

Importante

Caso 5

$$x \in (a; +\infty) \Leftrightarrow x > a$$

Ejemplos

- $x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow x > 3$
- $x > 5 \Leftrightarrow x \in (5; +\infty)$

Caso 6

$$x \in (-\infty; b) \Leftrightarrow x < b$$

Ejemplos

- $x \in (-\infty; 4) \Leftrightarrow x < 4$
- $x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 7)$

Caso 7

$$x \in [a; +\infty) \Leftrightarrow x \geq a$$

Ejemplos

- $x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow x \geq 2$
- $x \geq 9 \Leftrightarrow x \in [9; +\infty)$

Caso 8

$$x \in (-\infty; b] \Leftrightarrow x \leq b$$

Ejemplo

$$x \in (-\infty; 5] \Leftrightarrow x \in (-\infty; 8]$$

5. PROBLEMAS SOBRE VARIACIONES

Estos tipos de problemas consisten en lo siguiente:

- Sea $f_{(x)}$ una expresión matemática que depende de la variable x .
- La variable x toma los valores de un conjunto A , ($A \subset \mathbb{R}$) el cual generalmente será un intervalo.
- La variación de $f_{(x)}$ es el conjunto que agrupa a todos los valores de $f_{(x)}$ cuando x varía en A .
- El problema consiste en hallar la variación de $f_{(x)}$.

¡Cuidado!

Cuando operamos con desigualdades hay que aplicar sus propiedades para no incurrir en errores.

APLICACIÓN 3

Halle la variación de $f(x) = 5x + 1$ cuando $x \in (2; 3]$.

RESOLUCIÓN

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$\begin{aligned} 2 < x &\leq 3 \\ 10 < 5x &\leq 15 \\ 11 < 5x + 1 &\leq 16 \end{aligned}$$

$f(x) \in (11; 16]$

Graficamos



Por lo tanto, el conjunto que agrupa a los valores de $f(x)$ es el intervalo $(11; 16]$, el cual representa su variación.

5.1. Cuando $f(x)$ es un polinomio lineal

Para hallar la variación de $f(x)$

Propiedades

- Cuando se suma o se resta un número a una desigualdad, esta mantiene su sentido.
- Cuando se multiplica o divide por un número positivo a una desigualdad, esta mantiene su sentido.
- Cuando se multiplica o divide por un número negativo a una desigualdad, esta cambia de sentido.

APLICACIÓN 4

Halle la variación de $f(x) = -5x + 2$ si $x \in (-4; 5]$.

RESOLUCIÓN

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$-4 < x \leq 5$$

$$(-5)(-4) > (-5)(x) \geq (-5)(5)$$

Observamos que cambió el sentido de la desigualdad debido a que hemos multiplicado por un número negativo.

Operamos

$$20 > -5x \geq -25$$

$$22 > -5x + 2 \geq -23$$

$$-23 \leq -5x + 2 < 22$$

Graficamos



Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $[-23; 22]$.

APLICACIÓN 5

Halle la suma de valores enteros de $g(x) = \frac{x-5}{2}$ si $x \in (-1; 13]$.

RESOLUCIÓN

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$-1 < x \leq 13$$

$$-6 < x-5 \leq 8$$

$$-\frac{6}{2} < \frac{x-5}{2} \leq \frac{8}{2}$$

$$-3 < g(x) \leq 4$$

Graficamos



La variación de $g(x)$ es $(-3; 4]$.

Los valores enteros de $g(x)$ son $-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

El extremo -3 no cuenta porque está abierto, pero el extremo 4 sí porque está cerrado.

$$\therefore (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$$

Importante



Para hallar la variación de una expresión fraccionaria, esta debe expresarse convenientemente.

Ejemplos

$$1. \frac{5x+2}{x+1} = \left(\frac{5x+2}{x+1} - 5 \right) + 5$$

$$\frac{5x+2}{x+1} = \frac{5x+2 - 5x - 5}{x+1} + 5$$

$$\therefore \frac{5x+2}{x+1} = \frac{-3}{x+1} + 5$$

$$2. \frac{6x+2}{x+4} = \left(\frac{6x+2}{x+4} - 6 \right) + 6$$

$$\frac{6x+2}{x+4} = \frac{6x+2 - 6x - 24}{x+4} + 6$$

$$\therefore \frac{6x+2}{x+4} = \frac{-22}{x+4} + 6$$

5.2. Cuando $f(x)$ es una expresión fraccionaria

Se podrá hallar la variación de $f(x)$ cuando tenga la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; c \neq 0$$

entonces usaremos lo siguiente:

Propiedad.

Cuando tenemos $a < x < b$ donde a y b tienen el mismo signo,

al invertir obtenemos $\frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b}$.

Con esta propiedad la desigualdad cambia de sentido.

APLICACIÓN 6

Halle la variación de $f(x) = \frac{2}{x+5}$ si $x \in (1; 3)$.

RESOLUCIÓN

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$x \in (1; 3)$$

$$1 < x < 3$$

$$6 < x+5 < 8$$

Invertimos

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{x+5} > \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{6} > \frac{2}{x+5} > \frac{2}{8}$$

Observamos que cambió el sentido de la desigualdad.

Luego

$$\frac{1}{8} < \frac{2}{x+5} < \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} < f(x) < \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.



Importante

$$0 < x < b \rightarrow \frac{1}{x} > b$$

Ejemplos

- $0 < x < 5 \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{5}$
- $0 < x < 6 \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{6}$
- $0 < x < \frac{1}{2} \rightarrow x > 2$



Reto al saber

Si $x \in (2; 5)$, halle la variación de

$$\frac{12}{x-2}$$

APLICACIÓN 7

Halle la variación de $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ si $x \in (3; 5]$.

RESOLUCIÓN

A la expresión $f(x)$ le restamos el coeficiente principal de x en el numerador, el cual es 3, y para que no se altere, también le sumamos la misma cantidad.

Tenemos

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Restamos y sumamos 3.

$$f(x) = \left(\frac{3x+1}{x-2} - 3 \right) + 3$$

Operamos

$$f(x) = \frac{3x+1-3x+6}{x-2} + 3$$

$$f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$$

Hemos conseguido eliminar la variable x del numerador, ahora se encuentra en el denominador. Ahora, formaremos $f(x)$ a partir de los valores de x .

Tenemos que $x \in (3; 5]$.

$$3 < x \leq 5$$

$$1 < x-2 \leq 3$$

Invertimos y cambiamos el sentido de la desigualdad.

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{3}$$

$$7 > \frac{7}{x-2} \geq \frac{7}{3}$$

$$10 > \frac{7}{x-2} + 3 \geq \frac{7}{3} + 3$$

$$\frac{16}{3} \leq \frac{7}{x-2} + 3 < 10$$

Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $\left[\frac{16}{3}; 10 \right]$.

APLICACIÓN 8

Halle la variación de $f(x) = \frac{5x+3}{x+1}$ si $x \in (1; 2]$.

RESOLUCIÓN

Restamos y sumamos 5 a $f(x)$.

$$f(x) = \left(\frac{5x+3}{x+1} - 5 \right) + 5$$

$$f(x) = \frac{5x+3-5x-5}{x+1} + 5$$

$$f(x) = -\frac{2}{x+1} + 5$$

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$1 < x \leq 2$$

$$2 < x+1 \leq 3$$

Invertimos

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{2} < -\frac{2}{x+1} \leq -\frac{2}{3}$$

$$-1 < -\frac{2}{x+1} \leq -\frac{2}{3}$$

$$4 < -\frac{2}{x+1} + 5 \leq -\frac{2}{3} + 5$$

$$4 < f_{(x)} \leq \frac{13}{3}$$

Por lo tanto, la variación de $f_{(x)}$ es $\left(4; \frac{13}{3}\right]$.

5.3. Cuando $f_{(x)}$ es una cuadrática

Para hallar la variación de $f_{(x)}$

Propiedades

- a. Cuando a y b son positivos
 $a < x < b \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$

Ejemplos

- $2 < x < 5 \rightarrow 2^2 < x^2 < 5^2$
 $4 < x^2 < 25$
- $3 < x < 7 \rightarrow 3^2 < x^2 < 7^2$
 $9 < x^2 < 49$

- b. Cuando a y b son negativos

$$a < x < b \rightarrow b^2 < x^2 < a^2$$

Ejemplos

- $-5 < x < -3 \rightarrow \underbrace{(-3)^2}_{9} < x^2 < \underbrace{(-5)^2}_{25}$
- $-7 < x < -2 \rightarrow \underbrace{(-2)^2}_{4} < x^2 < \underbrace{(-7)^2}_{49}$

- c. Cuando a es negativo y b es positivo

$$a < x < b \rightarrow 0 \leq x^2 < \max\{a^2; b^2\}$$

Ejemplos

- $-3 < x < 5 \rightarrow 0 \leq x^2 < 25$
- $-7 < x < 2 \rightarrow 0 \leq x^2 < 49$

Para aplicar correctamente cada una de estas propiedades hay que fijarse en los signos de los extremos antes de elevar al cuadrado.

APLICACIÓN 9

Halle la variación de

$$f(x) = x^2 + 6x + 1 \text{ si } x \in (1; 2).$$

RESOLUCIÓN

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = 1 \cdot x^2 + 6x + 1$$

coef.
cuad.
principal
(monico)

Sumamos la mitad del coeficiente del término lineal, que es 6 elevado al cuadrado, es decir, $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ y también le restamos esta misma cantidad para no alterar la expresión $f(x)$.

Tenemos

$$f(x) = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1$$

$$f(x) = \underline{x^2 + 6x + 9} - 9 + 1$$

$$f(x) = (x+3)^2 - 8$$

Reto al saber

Intente completar cuadrados en las siguientes cuadráticas:

- $P_{(x)} = x^2 + 10x + 1$
- $R_{(x)} = x^2 - 3x + 7$
- $Q_{(x)} = 2x^2 + 4x + 9$

¡Cuidado!

Eviternos este error al aplicar la propiedad c.

Ejemplos

- $-2 < x < 3 \rightarrow (-2) < x^2 < 3$
¡ERROR!
- $-2 < x < 3 \rightarrow 0 \leq x^2 < 3^2$
¡ERROR!

Formamos $f_{(x)}$ a partir de los valores de x .

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \\ 4 < x+3 < 5 \\ 4^2 < (x+3)^2 < 5^2 \end{aligned}$$

+3
Elevamos al cuadrado

$$\begin{aligned} 16 < (x+3)^2 < 25 \\ 8 < \underbrace{(x+3)^2 - 8}_{\text{a}} < 17 \end{aligned}$$

a

Graficamos



Por lo tanto, la variación de $f_{(x)}$ es $(8; 17)$.

APLICACIÓN 10

Halle la variación de

$$f_{(x)} = 2x^2 + 6x + 5 \text{ si } x \in (-4; -3).$$

RESOLUCIÓN

Como $f_{(x)}$ no es un polinomio mónico, primero factorizamos su coeficiente principal.

$$f_{(x)} = 2 \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2} \right)$$

Luego completamos cuadrados, es decir, le sumamos la mitad de 3 al cuadrado, o sea, $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ y también le restamos la misma cantidad para que no se altere $f_{(x)}$.

$$f_{(x)} = 2 \left(x^2 + 3x + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\frac{9}{4}} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\frac{9}{4}} + \frac{5}{2} \right)$$

$$f_{(x)} = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$-4 < x < -3$$

$$-4 + \frac{3}{2} < x + \frac{3}{2} < -3 + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{5}{2} < x + \frac{3}{2} < -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 < \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

Operamos

$$\frac{9}{4} < \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

$$\frac{9}{2} < 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{2}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} < 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} < \frac{25}{2} + \frac{1}{2}$$

$$5 < f(x) < 13$$

$$\therefore f(x) \in (5; 13)$$

APLICACIÓN 11

Halle la variación de $f(x) = -x^2 - 6x + 1$ si $x \in (-5; 0)$.

RESOLUCIÓN

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = -(x^2 + 6x - 1)$$

$$f(x) = -\left(x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 1\right)$$

$$f(x) = -\underbrace{(x^2 + 6x + 9)}_{(a+b)^2} - \underbrace{9 - 1}_{-b^2}$$

$$f(x) = -(x+3)^2 + 10$$

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$-5 < x < 0$$

$$-2 < x+3 < 3$$

Elevamos al cuadrado y como los extremos son de signos contrarios tendremos

$$0 \leq (x+3)^2 < 9$$

$$0 \geq -(x+3)^2 > -9$$

$$10 \geq -\underbrace{(x+3)^2}_{(a+b)^2} + 10 > 1$$

$$1 < f(x) \leq 10$$

Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $(1; 10]$.

6. PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para resolver este tipo de problemas, tenemos:

Propiedades

a. $x^2 \geq 0; x \in \mathbb{R}$

Esta propiedad indica que x^2 solo puede ser positivo o cero, pero en ningún caso negativo.

También significa que el mínimo valor de x^2 es igual a cero.

b. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; a, b \in \mathbb{R}^+$

Esta propiedad, conocida como desigualdad de las medias, indica que la media aritmética de a y b que es $\frac{a+b}{2}$ es mayor o igual que su media geométrica que es \sqrt{ab} .

APLICACIÓN 12

Halle el mínimo valor de $f(x) = x^2 + 8x + 5$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

Completamos cuadrados.

$$f(x) = x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 5$$

$$f(x) = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} - \underbrace{16 + 5}_{-11}$$

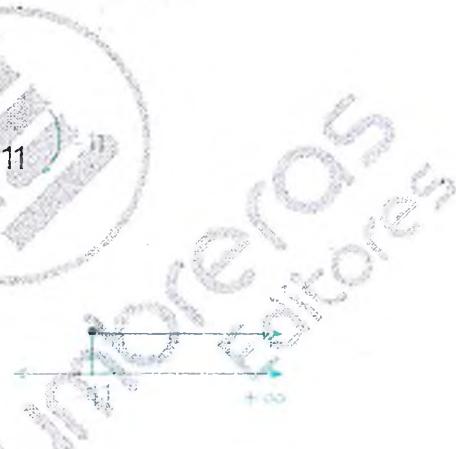
$$f(x) = (x+4)^2 - 11$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x+4)^2 \geq 0$.

Luego

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &\geq 0 \\ \underbrace{(x+4)^2 - 11}_{f(x)} &\geq 0 - 11 \\ f(x) &\geq -11 \end{aligned}$$

Graficamos



Observamos que $f(x)$ varía en el intervalo $[-11; +\infty)$.

Por lo tanto, el mínimo valor de $f(x)$ es -11 .

APLICACIÓN 13

Halle el máximo valor de $f(x) = -x^2 + 10x + 3$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

Completamos cuadrados.

$$f(x) = -x^2 + 10x + 3$$

$$f(x) = -(x^2 - 10x - 3)$$

$$f(x) = -\left(x^2 - 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 3\right)$$

$$f(x) = -\underbrace{(x^2 - 10x + 25)}_{(x-5)^2} - \underbrace{25 - 3}_{-28}$$

$$f(x) = -(x-5)^2 + 28$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x-5)^2 \geq 0$.

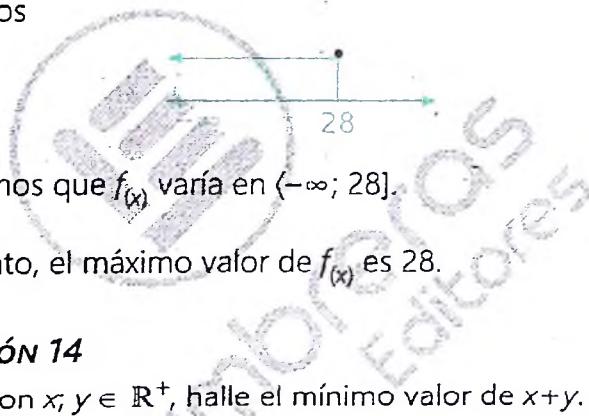
$$(x-5)^2 \geq 0$$

$$-(x-5)^2 \leq 0$$

$$\underline{-(x-5)^2 + 28} \leq 28$$

$$f(x) \leq 28$$

Graficamos



Observamos que $f(x)$ varía en $(-\infty; 28]$.

Por lo tanto, el máximo valor de $f(x)$ es 28.

APLICACIÓN 14

Si $xy=9$, con $x, y \in \mathbb{R}^+$, halle el mínimo valor de $x+y$.

RESOLUCIÓN

Como x y y son positivos, aplicaremos la desigualdad de las medias.

Tenemos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Como $xy=9$, entonces

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{9}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq 3$$

$$x+y \geq 6$$

Por lo tanto, el mínimo valor de $x+y$ es 6.

Importante

Otra desigualdad muy útil en los problemas de máximos o mínimos es la siguiente:

Para $x > 0$, se cumple que $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Lo que implica que para $x > 0$, $x + \frac{1}{x}$, como mínimo es 2.

Reto al saber

Halle el mínimo valor de

$$E = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x^2 + z^2}{xz} + \frac{y^2 + z^2}{yz}$$

si $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.



APLICACIÓN 15

Si $2x+5y=3$, con $x, y \in \mathbb{R}^+$, halle el máximo valor de xy .

RESOLUCIÓN

Aplicamos la desigualdad de las medias.

$$\frac{2x+5y}{2} \geq \sqrt{(2x)(5y)}$$

Como $2x+5y=3$, entonces

$$\frac{3}{2} \geq \sqrt{10xy}$$

Elevamos al cuadrado.

$$\frac{9}{4} \geq 10xy$$

$$\frac{9}{40} \geq xy$$

$$xy \leq \frac{9}{40}$$

Por lo tanto, el máximo valor de xy es $\frac{9}{40}$.

APLICACIÓN 16

Halle el mínimo valor de $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 4}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^+$.

RESOLUCIÓN

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = \frac{x^2 + 9x + 4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{9x}{x} + \frac{4}{x}$$

$$f(x) = x + 9 + \frac{4}{x}$$

$$f(x) = \left(x + \frac{4}{x} \right) + 9$$

Reto al saber

Si $a^2 + b^2 = 1$, halle la variación de $3a + 4b$.

Aplicamos la desigualdad de las medias.

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \left(\frac{4}{x} \right)}$$

Operamos

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq 2$$

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} &\geq 4 \\ x + \frac{4}{x} + 9 &\geq 13 \end{aligned}$$

$f(x)$

$$f(x) \geq 13$$

Por lo tanto, el mínimo valor de $f(x)$ es 13.

APLICACIÓN 17

Halle el mínimo valor de

$$E = \frac{x^2 + 5x + 1}{x}$$

si $x > 0$.

RESOLUCIÓN

Expresamos E convenientemente.

$$E = \frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$E = x + 5 + \frac{1}{x}$$

$$E = \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5$$

Como $x > 0$, entonces el mínimo valor de $x + \frac{1}{x}$ es 2.

$$\therefore E_{\min} = 2 + 5 = 7$$

No olvide

Desigualdad de Cauchy

Para $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$


Importante

Desigualdad de las medias

Para 3 valores

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}; a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

Para n valores

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$



APLICACIÓN 18

Halle el máximo valor de xyz si $x+2y+4z=12$ y $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

RESOLUCIÓN

Aplicamos la desigualdad de las medias.

$$\overline{MA} \geq \overline{MG}$$

$$\frac{x+3y+9z}{3} \geq \sqrt[3]{(x)(2y)(4z)}$$

Como $x+3y+9z=12$, entonces

$$\frac{12}{3} \geq \sqrt[3]{8xyz}$$

$$4 \geq 2\sqrt[3]{xyz}$$

Elevamos al cubo.

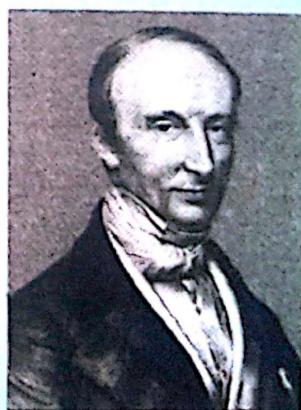
$$2 \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$xyz \leq 8$$

Por lo tanto, el máximo valor de xyz es 8.

**Biografía****Louis Cauchy**

Nació el 21 de agosto en París, Francia. Estudió en la Escuela Politécnica de París, donde obtuvo el título de ingeniería. Luego se dedicó a la investigación científica y su principal logro en esa época fue la demostración del teorema del número poligonal de Fermat, logrando el éxito donde otros matemáticos, como Gauss, fracasaron. Cauchy fue un analista prolífico que estudió diversas áreas de las matemáticas como la convergencia de series infinitas, teoría de grupos, determinados, probabilidades, física matemática, pero principalmente es reconocido por presentar las bases del análisis matemático. Además, procesó los conceptos de función, límite y continuidad que le dieron una base sólida al análisis infinitesimal. Antes de él, dichos conceptos eran ambiguos e imprecisos, apoyados principalmente por la intuición geométrica.



DESIGUALDADES

Son relaciones que comparan dos números reales que son $>$, $<$, \geq y \leq .

Números reales

En cada punto de la recta numérica está ubicado un número real.



Ley de tricotomía

Un número real x tiene una de las siguientes tres posibilidades:

$$x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$$

Número positivo y negativo

- $x > 0 \Leftrightarrow x$ es positivo
- $x < 0 \Leftrightarrow x$ es negativo

Propiedades de las desigualdades

Tricotomía

$$x < y \vee x = y \vee x > y$$

Monotonía de la adición y multiplicación

- $x < y \wedge c \in \mathbb{R} \rightarrow x + c < y + c$
- $x > y \wedge c \in \mathbb{R}^+ \rightarrow cx > cy$

Transitividad

$$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

Problemas sobre variaciones

Variación de una expresión lineal

1. Al sumar o restar un número a una desigualdad, esta mantiene su sentido.
2. Al multiplicar por un número positivo, la desigualdad mantiene su sentido.
3. Al multiplicar por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

Variación de una expresión fraccionaria

Al invertir en una desigualdad se cumple

$$a < x < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b}$$

donde a y b son números reales del mismo signo.

Variación de una cuadrática

Al elevar al cuadrado, se cumple lo siguiente

1. Cuando $a > 0 \wedge b > 0$
 $a < x < b \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$
2. Cuando $a < 0 \wedge b < 0$
 $a < x < b \rightarrow b^2 < x^2 < a^2$
3. Cuando $a < 0 \wedge b > 0$
 $a < x < b \rightarrow 0 \leq x^2 < \text{mayor } \{a^2; b^2\}$

Problemas sobre máximos y mínimos

Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a^2 \geq 0$.

Desigualdad de las medias

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}^+$$

Cuando $a \in \mathbb{R}^+$,

$$a + \frac{1}{a} \text{ como mínimo es } 2.$$

RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Indique cuántas proposiciones son correctas.

I. $8 \leq 8$

IV. $-6 > -5$

II. $9 \geq 11$

V. $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3}$

III. $\frac{3}{5} > \frac{5}{7}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

I. Correcta

En la proposición $8 \leq 8$ se cumple una de las dos posibilidades. En este caso sí se cumple la igualdad.

II. Incorrecta

En $9 \geq 11$ no se cumple ninguna de las dos posibilidades.

III. Incorrecta

En la proposición $\frac{3}{5} > \frac{5}{7}$ observamos que

$$\frac{3}{5} > \frac{5}{7} \leftrightarrow \underbrace{(3)(7)}_{21} > \underbrace{(5)(5)}_{25}$$

falso

IV. Incorrecta

La proposición $-6 > -5$, es incorrecta, ya que al ubicar en la recta tenemos



El número que está ubicado en el extremo izquierdo es menor, por ende, lo correcto será $-6 < -5$.

V. Correcta

La proposición $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3}$ es correcta, ya que si elevamos al exponente 12 obtenemos

$$(\sqrt[3]{2})^{12} < (\sqrt[4]{3})^{12}$$

$$2^4 < 3^3 \leftrightarrow \underbrace{16 < 27}_{\text{verdadero}}$$

Clave



Problema N.º 2

Indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) respecto a las siguientes proposiciones:

- I. $[2; 6] = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
II. $3 \in \langle 3; 5 \rangle$
III. $7 \in [7; 9]$
IV. $\langle 3; +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

- A) VFVV B) VVVF C) FVVF
D) FVFV E) FFVV

Resolución

I. Falsa

El intervalo $[2; 6]$ agrupa a todos los números reales comprendidos entre 2 y 6, incluyendo estos extremos. Es un error muy común contar solo los enteros y olvidarse de los demás números reales.



En el intervalo $[2; 6]$ no solo están los números enteros 2; 3; 4; 5 y 6. También hay decimales como 4,1 o 5,4 por nombrar algunos. Al contar los decimales notamos que hay infinitos números reales en este intervalo.

II. Falsa

El intervalo $(3; 5]$ está abierto en 3, lo cual significa que 3 no pertenece a este intervalo.

III. Verdadera

El intervalo $[7; 9)$ está cerrado en 7, lo cual significa que 7 pertenece a este intervalo.

IV. Verdadera

El intervalo $(3; +\infty)$ agrupa a los números reales que son mayores que 3 y simbólicamente se expresa como $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$.

Problema N.º 3

Sean los intervalos $A = (-\infty; 5]$ y $B = (0; +\infty)$. Halle la suma de los elementos enteros de $A \cap B$.

- A) 14 B) 10 C) 12
D) 15 E) 20

Resolución

IMPORTANTÉ

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Calculamos $A \cap B$.



$$A \cap B = (0; 5]$$

Sus elementos enteros son 1; 2; 3; 4; 5.

$$\therefore 1+2+3+4+5 = \frac{(5)(6)}{2} = 15$$

Clave

Problema N.º 4

Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x < 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}$$

Calcule $A - B$.

- A) $(2; 5)$ B) $[7; 9)$ C) $(5; 9)$
D) $(7; 9)$ E) $(2; 9)$

Resolución

En el conjunto A , tenemos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x < 9\} = [5; 9)$$



En el conjunto B , tenemos

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\} = (2; 7)$$



Calculamos $A - B$.



El conjunto $A - B$ es lo que queda en A , luego de quitar B .

El extremo 7 está abierto en B , pero en $A - B$ será cerrado. Esta es una regla que se cumple cuando se hace la diferencia de intervalos.

$$\therefore A - B = [7; 9)$$

Clave

Problema N.º 5

Halle $A - B$ si se sabe que

$$A = \{x + 1 \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$$

$$B = \{2x + 10 \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$$

- A) $[2; 5)$ B) $(-2; 5]$ C) $[-2; 4]$
 D) $(-4; 4)$ E) $[-2; 4)$

Resolución

En el conjunto

$$A = \{x + 1 \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$$

debemos calcular $x + 1$.

$$-3 \leq x < 5$$

$$-2 \leq x + 1 < 6$$

$$A = [-2; 6)$$

En el conjunto

$$B = \{2x + 10 \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$$

debemos calcular $2x + 10$.

$$-3 \leq x < 5$$

$$-6 \leq 2x < 10$$

$$4 \leq 2x + 10 < 20$$

$$B = [4; 20)$$

Calculamos $A - B$.



$$\therefore A - B = [-2; 4)$$

Clave

Problema N.º 6

Sean los conjuntos

$$A = \langle 3; 5]$$

$$B = \langle 7; 10 \rangle$$

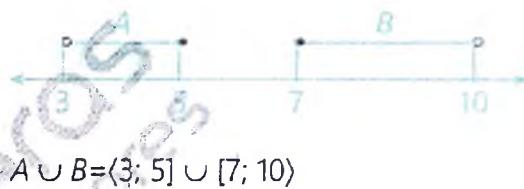
$$C = \langle 4; 9 \rangle$$

Calcule el número de elementos enteros de $(A \cup B) \cap C$.

- A) 5 B) 3 C) 6
 D) 4 E) 7

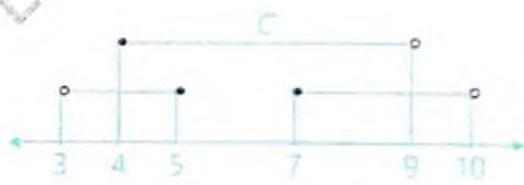
Resolución

Hallamos $A \cup B$.



$$A \cup B = \langle 3; 5] \cup \langle 7; 10 \rangle$$

Calculamos $(A \cup B) \cap C$.



$$(A \cup B) \cap C = \langle 4; 5] \cup \langle 7; 9 \rangle$$

Por lo tanto, hay 4 elementos enteros que son 4; 5; 7 y 8.

Clave

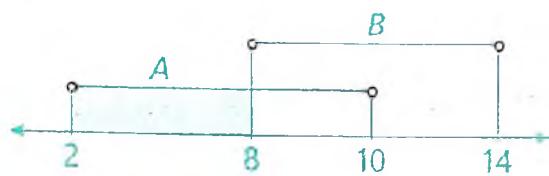
Problema N.º 7

Si $A = \langle 2; 10 \rangle$ y $B = \langle 8; 14 \rangle$, calcule $(A - B)^c \cup A$.

- A) $\langle 2; 8 \rangle$ B) $\langle 0; 8 \rangle$ C) $\mathbb{R} - \{2\}$
 D) $\langle 2; 14 \rangle$ E) \mathbb{R}

Resolución

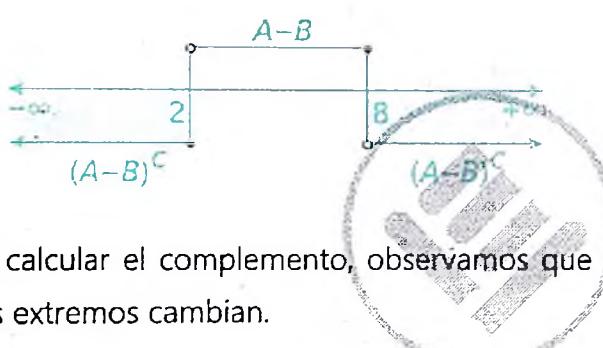
Calculamos $A - B$.



$$A - B = \langle 2; 8]$$

cerrado en 8

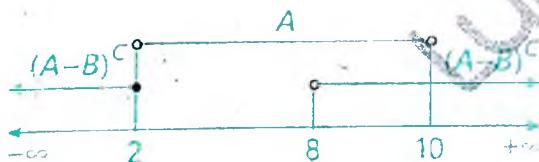
Calculamos $(A - B)^C$.



Al calcular el complemento, observamos que los extremos cambian.

$$(A - B)^C = (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$$

Calculamos $(A - B)^C \cup A$.



$$\therefore (A - B)^C \cup A = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$$

Clave E

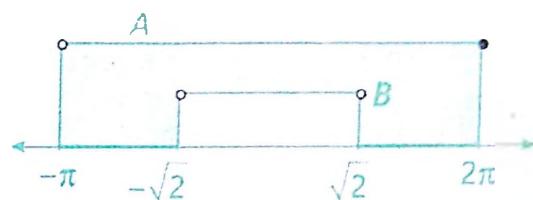
Problema N.º 8

Calcule la suma de los elementos enteros de $A - B$ si $A = \langle -\pi; 2\pi]$ y $B = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$.

- A) 18 B) 15 C) 21
D) 16 E) 12

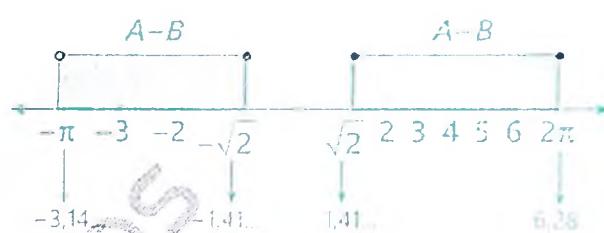
Resolución

Calculamos $A - B$.



$$A - B = \langle -\pi; -\sqrt{2} \rangle \cup [\sqrt{2}; 2\pi]$$

Ubicamos los elementos enteros de $A - B$.



Los elementos enteros de $A - B$ son -3; -2; 2; 3; 4; 5; 6.

$$\therefore (-3) + (-2) + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15$$

Clave B

Problema N.º 9

Sean los intervalos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < \frac{x+5}{3} \right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < 2x - 3 \leq 13\}$$

Halle la longitud de $A \cap B$.

- A) 9 B) 8 C) 13
D) 6 E) 7

Resolución

En el conjunto A , tenemos

$$2 < \frac{x+5}{3}$$

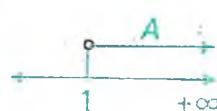
Operamos

$$6 < x+5$$

$$6-5 < x$$

$$1 < x \rightarrow x > 1$$

Graficamos



$$A = (1; +\infty)$$

En el conjunto B , tenemos

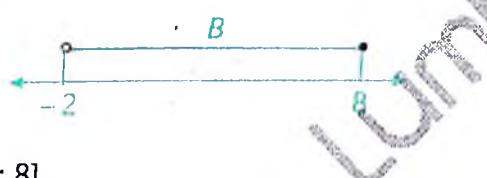
$$-7 < 2x-3 \leq 13$$

$$-4 < 2x \leq 16$$

$$-2 < x \leq 8$$

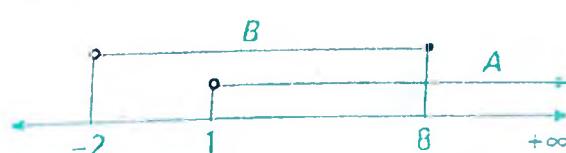
$$\left. \begin{array}{l} +3 \\ -2 \end{array} \right\}$$

Graficamos



$$B = (-2; 8]$$

Calculamos $A \cap B$.



$$A \cap B = (1; 8]$$

Debemos calcular la longitud de $A \cap B$, la cual obtenemos si restamos los extremos.

$$l(A \cap B) = 8 - 1 = 7$$

Por lo tanto, la longitud de $A \cap B$ es 7.

Problema N.º 10

Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 2x+1 > 3 \wedge 3x-4 \leq 8\}$$

$$B = \left\{ 3x+1 \in \mathbb{R} / \frac{x}{2} \in A \right\}$$

Halle el número de elementos enteros de B .

$$A) 18 \quad B) 15 \quad C) 16$$

$$D) 20 \quad E) 15$$

Resolución

En el conjunto A , tenemos

$$2x+1 > 3 \wedge 3x-4 \leq 8$$

$$2x > 2 \wedge 3x \leq 12$$

$$\underline{x > 1 \wedge x \leq 4}$$

$$A = (1; 4]$$

En el conjunto B , tenemos

$$B = \left\{ 3x+1 \in \mathbb{R} / \frac{x}{2} \in A \right\}$$

Hallamos $3x+1$.

$$\frac{x}{2} \in A$$

$$\frac{x}{2} \in (1; 4]$$

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{x}{2} \leq 4 \\ 2 &< x \leq 8 \\ 6 &< 3x \leq 24 \\ 7 &< 3x+1 \leq 25 \end{aligned}$$

$$B = (7; 25]$$

Los elementos enteros de B son $8; 9; 10; \dots; 25$.

18 elementos

Por lo tanto, B tiene 18 elementos enteros.

Clave

Problema N.º 11

Si $x \in (-2; 5]$, halle la variación de

$$f_{(x)} = \frac{15-3x}{4}$$

- A) $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4} \right)$ B) $[0; 5)$ C) $\left[0; \frac{21}{4} \right)$
 D) $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4} \right]$ E) $\left(0; \frac{21}{4} \right]$

Resolución

Formamos $f_{(x)}$ a partir de los valores de x .

$$-2 < x \leq 5$$

$$6 > -3x \geq -15$$

$$21 > 15 - 3x \geq 0$$

$$\frac{21}{4} > \frac{15 - 3x}{4} \geq 0$$

Luego

$$\frac{21}{4} > f_{(x)} \geq 0$$

$$0 \leq f_{(x)} < \frac{21}{4}$$

Graficamos



Por lo tanto, la variación de $f_{(x)}$ es $\left[0; \frac{21}{4} \right)$.

Clave **C**

Problema N.º 12

Si $x \in [1; 3]$, halle el número de valores enteros

$$\text{de } f_{(x)} = \frac{24}{2x+1}.$$

- A) 2 B) 5 C) 4
 D) 3 E) 6

Resolución

Formamos $f_{(x)}$ a partir de los valores de x .

$$1 \leq x < 3$$

$$2 \leq 2x < 6$$

$$3 \leq 2x+1 < 7$$

Invertimos

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{2x+1} > \frac{1}{7}$$

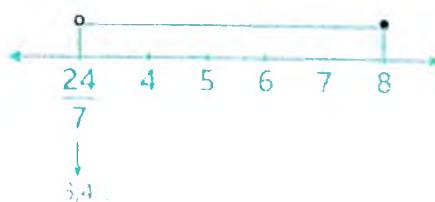
$$\frac{24}{3} \geq \frac{24}{2x+1} > \frac{24}{7}$$

Luego

$$8 \geq f_{(x)} > \frac{24}{7}$$

$$\frac{24}{7} < f_{(x)} \leq 8$$

Graficamos



Los valores enteros de $f_{(x)}$ son $\underline{\hspace{2cm}} 4; 5; 6; 7; 8 \hspace{2cm}$
 5 valores

Por lo tanto, $f_{(x)}$ toma 5 valores enteros.

Clave **B**

Problema N.º 13

Halle la variación de $f(x) = x^2 - 4x + 7$
si $x \in (0; 5]$.

- A) $[0; 12]$ B) $[7; 12]$ C) $[4; 7]$
 D) $[3; 12)$ E) $[3; 12]$

Resolución

Como $f(x)$ es una cuadrática, debemos completar cuadrados.

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + 3$$

$$f(x) = (x-2)^2 + 3$$

Formamos $f(x)$ a partir de los valores de x .

$$\begin{aligned} 0 < x \leq 5 \\ -2 < x-2 \leq 3 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 \leq (x-2)^2 \leq 9 \\ 3 \leq (x-2)^2 + 3 \leq 12 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $[3; 12]$.

Clave 

Problema N.º 14

Determine el equivalente del conjunto

$$A = \left\{ \frac{x+5}{x^2-25} \middle| 8 < x+2 < 9 \right\}.$$

- A) $\left\langle \frac{1}{5}; 5 \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{5}; 1 \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$
 D) $\left\langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{5}; \frac{1}{2} \right\rangle$

Resolución

El conjunto A está formado por los valores de la expresión $\frac{x+5}{x^2-25}$.

Simplificamos

$$\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x-5}$$

Tenemos que $8 < x+2 < 9$ y a partir de ahí formamos $\frac{1}{x-5}$.

$$\begin{aligned} 8 < x+2 &< 9 \\ 6 < x &< 7 \\ 1 < x-5 &< 2 \end{aligned}$$

Invertimos

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x-5} < 1$$

$$\therefore A = \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$$

Clave 

Problema N.º 15

Determine la suma del máximo y mínimo valor entero que puede tomar $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$ si $x \in (2; 3)$.

- A) 14 B) 15 C) 16
 D) 18 E) 20

Resolución

Expresamos $f_{(x)}$ convenientemente.

$$f_{(x)} = \left(\frac{3x+5}{x-1} - 3 \right) + 3$$

$$f_{(x)} = \frac{3x+5 - 3x+3}{x-1} + 3$$

$$f_{(x)} = \frac{8}{x-1} + 3$$

Tenemos que $x \in (2; 3)$ y a partir de ahí formamos $f_{(x)}$.

$$2 < x < 3$$

$$1 < x-1 < 2$$

Invertimos

$$1 > \frac{1}{x-1} > \frac{1}{2}$$

$$8 > \frac{8}{x-1} > 4$$

$$11 > \frac{8}{x-1} + 3 > 7$$

$$7 < f_{(x)} < 11$$

Graficamos



El mayor valor entero de $f_{(x)}$ es igual a 10.

El menor valor entero de $f_{(x)}$ es igual a 8.

$$\therefore 10 + 8 = 18$$

Clave D

Problema N.º 16

Si $x \in (-3; 0)$, halle la variación de

$$f_{(x)} = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$$

- A) $\left\langle \frac{1}{5}; 1 \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{2} \right\rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{1}{5} \right\rangle$
 D) $\left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{5} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right\rangle$

Resolución

Expresamos $f_{(x)}$ convenientemente.

$$f_{(x)} = \frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 4}$$

$$f_{(x)} = \frac{1}{(x+1)^2 + 4}$$

Tenemos que $x \in (-3; 0)$ y a partir de ahí formamos $f_{(x)}$.

$$-3 < x < 0$$

$$-2 < x+1 < 1$$

Luego

$$0 \leq (x+1)^2 < 4$$

$$4 \leq (x+1)^2 + 4 < 8$$

Invertimos

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{(x+1)^2 + 4} > \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} < f_{(x)} \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore f_{(x)} \in \left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right\rangle$$

Clave E

Problema N.º 17

Si $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{2}\right]$, halle la longitud del intervalo que representa la variación de $f(x) = \frac{3x-1}{2x-3}$.

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 4
 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{6}{5}$

Resolución

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x-3}$$

Restamos y sumamos $\frac{3}{2}$.

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2}$$

Simplificamos

$$f(x) = \frac{6x-2-6x+9}{(2x-3)(2)} + \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{7}{4x-6} + \frac{3}{2}$$

Tenemos que $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{2}\right]$ y a partir de ahí

formamos $f(x)$.

$$\frac{5}{2} \leq x < \frac{17}{2}$$

$$10 \leq 4x < 34$$

$$4 \leq 4x-6 < 28$$

Invertimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4x-6} > \frac{1}{28} \\ \frac{7}{4} &\geq \frac{7}{4x-6} > \frac{7}{28} \\ \frac{13}{4} &\geq \frac{7}{4x-6} + \frac{3}{2} > \frac{7}{4} \end{aligned}$$

La variación de $f(x)$ es $\left(\frac{7}{4}; \frac{13}{4}\right]$.

Debemos calcular la longitud de este intervalo si restamos los extremos.

$$\therefore \frac{13}{4} - \frac{7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

 Clave B

Problema N.º 18

Halle el máximo valor de $f(x) = -x^4 + 6x^2$ si $x \in [-1; 1]$.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

Resolución

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = -x^4 + 6x^2$$

Entonces

$$f(x) = -(x^4 - 6x^2)$$

$$f(x) = -\underbrace{(x^4 - 6x^2 + 9 - 9)}_{(x^2 - 3)^2}$$

$$f(x) = -(x^2 - 3)^2 + 9$$

Tenemos que $x \in [-1; 1]$ y a partir de ahí formamos $f(x)$.

$$-1 \leq x \leq 1$$

Operamos

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$-3 \leq x^2 - 3 \leq -2$$

$$4 \leq (x^2 - 3)^2 \leq 9$$

$$-4 \geq -(x^2 - 3)^2 \geq -9$$

$$5 \geq -\underbrace{(x^2 - 3)^2}_{f(x)} + 9 \geq 0$$

$$0 \leq f(x) \leq 5$$

Por lo tanto, el máximo valor de $f(x)$ es 5.

Clave

Problema N.º 19

Halle la suma de valores enteros de

$$f(x) = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

si sabemos que $x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

- A) 165 B) 150 C) 180
 D) 142 E) 171

Resolución

Operamos

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4)$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 5$$

Completamos cuadrados.

$$f(x) = 2(x^2 + 3x) + 5$$

$$f(x) = 2\left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 5$$

$$f(x) = 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 5$$

$$f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 5$$

$$f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Tenemos que $x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right]$, entonces formamos $f(x)$.

$$-\frac{9}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$

$$-3 \leq x + \frac{3}{2} < 2$$

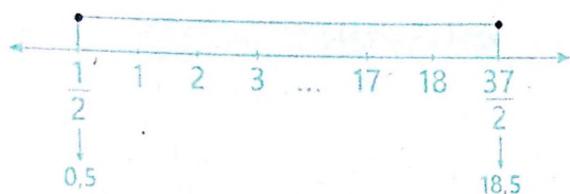
Elevamos al cuadrado.

$$0 \leq \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \leq 9$$

$$0 \leq 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \leq 18$$

$$\frac{1}{2} \leq 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{37}{2}$$

Graficamos



Los valores enteros de $f_{(x)}$ son 1; 2; 3; ... ; 18.

$$\therefore 1+2+3+\dots+18 = \frac{(18)(19)}{2} = 171$$

Clave E

Problema N.º 20

Halle la variación de

$$f_{(x)} = 3 + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

- A) [3; +∞)
- B) [8; +∞)
- C) [4; +∞)
- D) [5; +∞)
- E) [6; +∞)

Resolución

Expresamos $f_{(x)}$ convenientemente.

$$f_{(x)} = 3 + \sqrt{x^2 + 4x + 8}$$

$$f_{(x)} = 3 + \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 4}$$

$$f_{(x)} = 3 + \sqrt{(x+2)^2 + 4}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x+2)^2 \geq 0$.

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$(x+2)^2 + 4 \geq 4$$

Extraemos la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + 4} &\geq \sqrt{4} \\ \sqrt{(x+2)^2 + 4} + 3 &\geq 5 \end{aligned}$$

$$f_{(x)} \geq 5$$

Por lo tanto, la variación de $f_{(x)}$ es $[5; +\infty)$.

Clave D

Problema N.º 21

Halle la suma del mínimo valor de A con el máximo valor de B .

$$A = x^2 - 2x + 9; x \in \mathbb{R}$$

$$B = 6x - x^2; x \in \mathbb{R}$$

- A) 17
- B) 15
- C) 14
- D) 21
- E) 24

Resolución

Hallamos el mínimo valor de A .

$$A = x^2 - 2x + 9$$

$$A = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 8$$

$$A = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 8 \rightarrow A_{\min} = 8$$

Hallamos el máximo valor de B .

$$B = 6x - x^2$$

$$B = -(x^2 - 6x)$$

$$B = -\underbrace{(x^2 - 6x + 9 - 9)}_{(x-3)^2}$$

$$B = -(x-3)^2 - 9$$

$$B = -\underbrace{(x-3)^2}_{\text{Max}=0} + 9 \rightarrow B_{\max} = 9$$

$$\therefore A_{\min} + B_{\max} = 8 + 9 = 17$$



Problema N.º 22

Halle el mínimo valor de $4x + \frac{9}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^+$.

- A) 13 B) 36 C) 6
D) 12 E) 14

Resolución

No olvide

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; a, b \in \mathbb{R}^+$$

Reemplazamos la variable a por $4x$ y b por $\frac{9}{x}$.

$$\frac{4x + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{4(x)\left(\frac{9}{x}\right)}$$

Operamos

$$\frac{4x + \frac{9}{x}}{2} \geq 6$$

$$4x + \frac{9}{x} \geq 12$$

Por lo tanto, el mínimo valor de $4x + \frac{9}{x}$ es 12.

Clave

Problema N.º 23

Halle el máximo valor de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 9} \text{ si } x \in \mathbb{R}^+$$

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{15}$

Resolución

Dividimos entre x el numerador y el denominador.

$$f(x) = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2 + 5x + 9}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2 + 5x + 9}{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{9}{x} + 5}$$

Para que $f(x)$ sea el máximo valor, el denominador debe ser mínimo.

Aplicamos la desigualdad de las medias.

$$\frac{x + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{(x)\left(\frac{9}{x}\right)}$$

$$\frac{x + \frac{9}{x}}{2} \geq 3$$

$$x + \frac{9}{x} \geq 6$$

$$\left(x + \frac{9}{x}\right)_{\min} = 6$$

Reemplazamos

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{x + \frac{9}{x} + 5} = \frac{1}{5+6} = \frac{1}{11}$$

$\underbrace{x}_{\min=6}$

$$\therefore f(x)_{\max} = \frac{1}{11}$$

Clave

Problema N.º 24

Determine la variación de

$$f(x) = x + \frac{9}{x-3} \text{ si } x > 3.$$

- A) $[9; +\infty)$
- B) $[-2; +\infty)$
- C) $[0; +\infty)$
- D) $(3; +\infty)$
- E) $[3; +\infty)$

Resolución

Como $x > 3$, entonces $x-3 > 0$, es decir, $x-3$ es positivo.

Como $x-3$ es positivo, aplicamos la desigualdad de las medias.

$$\frac{(x-3) + \frac{9}{x-3}}{2} \geq \sqrt{(x-3)\left(\frac{9}{x-3}\right)}$$

$$\frac{x-3 + \frac{9}{x-3}}{2} \geq 3$$

$$x-3 + \frac{9}{x-3} \geq 6$$

Luego

$$x + \frac{9}{x-3} \geq 6 + 3$$

Observamos que

$$x + \frac{9}{x-3} \geq 9 \rightarrow f(x) \geq 9$$

Por lo tanto, la variación de $f(x)$ es $[9; +\infty)$.

Clave

Problema N.º 25

Halle el mínimo valor de

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{x} \text{ si } x > 0.$$

- A) 1
- B) 6
- C) 4
- D) 2
- E) 3

Resolución

Expresamos $f_{(x)}$ convenientemente.

$$f_{(x)} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

Aplicamos la propiedad de la desigualdad de las medias para cuatro valores.

$$\frac{x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{(x^3)\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Operamos

$$\frac{x^3 + \frac{3}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{(x^3)\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$\frac{x^3 + \frac{3}{x}}{4} \geq 1$$

$$x^3 + \frac{3}{x} \geq 4$$

Por lo tanto, el mínimo valor de $x^3 + \frac{3}{x}$ es 4.

Clave

Problema N.º 26

Halle el menor valor de la expresión

$$f_{(x)} = (x+1)^2 + (x+3)^2 \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$

- A) 2
- B) 1
- C) 3
- D) 4
- E) $\frac{3}{2}$

Resolución

Tenemos que

$$f_{(x)} = (x+1)^2 + (x+3)^2$$

Operamos

$$f_{(x)} = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 6x + 9)$$

$$f_{(x)} = 2x^2 + 8x + 10$$

Completamos cuadrados.

$$f_{(x)} = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 10$$

$$f_{(x)} = 2(x+2)^2 - 8 + 10$$

$$f_{(x)} = 2(x+2)^2 + 2$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x+2)^2 \geq 0$.

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$2(x+2)^2 \geq 0$$

$$2(x+2)^2 + 2 \geq 2$$

$$f_{(x)} \geq 2$$

Por lo tanto, el menor valor de $f_{(x)}$ es 2.

Clave

Problema N.º 27

Halle el máximo valor de la expresión

$$f_{(x)} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$

- A) 3
- B) 2
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{1}{3}$
- E) $\frac{3}{2}$

Resolución

No olvide

$$x \geq m \leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$$

Operamos

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3) - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^4 + 4x^2 + 3}$$

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = \frac{2}{(x^4 + 4x^2 + 4) - 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^2 - 1}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 2 \geq 2$$

$$(x^2 + 2)^2 \geq 4$$

$$(x^2 + 2)^2 - 1 \geq 3$$

Invertimos

$$0 < \frac{1}{(x^2 + 2)^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$$

$$0 < \frac{2}{(x^2 + 2)^2 - 1} \leq \frac{2}{3}$$

$$0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el máximo valor de $f(x)$ es $\frac{2}{3}$.

Clave

Problema N.º 28

Si $2-x \in (3; 7]$, halle la variación de $x(x-2)$.

- A) $[3; 35]$ B) $(5; 35]$ C) $[5; 35]$
 D) $(-1; 35]$ E) $(3; 35]$

Resolución

Hallamos x .

$$2-x \in (3; 7]$$

$$3 < 2-x \leq 7$$

$$1 < -x \leq 5$$

$$-1 > x \geq -5$$

$$x \in [-5; -1)$$

Expresamos $x(x-2)$ convenientemente.

$$x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$x(x-2) = \underbrace{x^2 - 2x}_{+1 - 1} - 1$$

$$x(x-2) = (x-1)^2 - 1$$

Formamos esta expresión a partir de los valores de x .

$$x \in [-5; -1]$$

$$-5 \leq x < -1$$

$$-6 \leq x-1 < -2$$

Elevamos al cuadrado.

$$4 < (x-1)^2 \leq 36$$

$$3 < \underbrace{(x-1)^2 - 1}_{x(x-2)} \leq 35$$

$$\therefore x(x-2) \in (3; 35]$$

Problema N.º 29

Sean los conjuntos

$$A = \left\{ x - \frac{1}{11} < 2x + 1 \leq 17 \right\}$$

$$B = \left\{ x^2 + \frac{2}{3} \leq x + 2 < 4 \right\}$$

Calcule $A \cap B$.

- A) $(5; 6)$ B) $(4; 6)$ C) $(3; 6)$
 D) $[3; 7]$ E) $(5; 7)$

Resolución

En el conjunto A , tenemos

$$11 < 2x+1 \leq 17$$

$$10 < 2x \leq 16$$

$$5 < x \leq 8$$

Formamos $x-1$.

$$4 < x-1 \leq 7$$

Entonces

$$A = (4; 7]$$

En el conjunto B , tenemos

$$3 \leq x+2 < 4$$

$$1 \leq x < 2$$

Formamos $x^2 + 2$.

$$1 \leq x^2 < 4$$

$$3 \leq x^2 + 2 < 6$$

Entonces

$$B = [3; 6)$$

Finalmente, calculamos $A \cap B$.



$$\therefore A \cap B = (4; 6)$$



Problema N.º 30

Calcule la suma de valores enteros de

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1} \text{ si } x \in (2; 10).$$

- A) 18 B) 16 C) 12
 D) 15 E) 14

Resolución

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = \left(\frac{3x+1}{x-1} - 3 \right) + 3$$

$$f(x) = \frac{3x+1 - 3x - 3}{x-1} + 3$$

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + 3$$

Formamos $f_{(x)}$ a partir de los valores de x .

$$\begin{aligned} 2 < x < 10 \\ 1 < x-1 < 9 \end{aligned}$$

Invertimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} < \frac{1}{x-1} < 1 \\ \frac{4}{9} < \frac{4}{x-1} < 4 \\ \frac{31}{9} < \frac{4}{x-1} + 3 < 7 \\ \frac{31}{9} < f_{(x)} < 7 \end{aligned}$$

Graficamos



$$\therefore 4+5+6=15$$

Clave

Problema N.º 31

Si $\frac{x+3}{x+4} \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$, halle la variación de x^2+1 .

- A) $[1; 10]$
- B) $[1; 6]$
- C) $[5; 10]$
- D) $[6; 10]$
- E) $[3; 10]$

Resolución

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x+3}{x+4} < \frac{5}{6} \\ -1 < \frac{x+3}{x+4} - 1 < \frac{5}{6} - 1 \end{aligned}$$

Operamos

$$-1 < \frac{x+3-x-4}{x+4} < -\frac{1}{6}$$

$$-1 < -\frac{1}{x+4} < -\frac{1}{6}$$

Invertimos

$$\begin{aligned} 1 < \frac{1}{x+4} > \frac{1}{6} \\ 1 < x+4 < 6 \\ -3 < x < 2 \end{aligned}$$

Hallamos la variación de x^2+1 .

$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 < 9 \\ 1 \leq x^2+1 < 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación de x^2+1 es $[1; 10]$.

Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

- 1.** Indique cuántas proposiciones son verdaderas.
- $5 \geq 2$
 - $-7 > -3$
 - $9 \leq 9$
 - $0 > -2$
- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4
- 2.** Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
- $\frac{3}{4} > \frac{5}{6}$
 - $\sqrt[4]{4} \leq \sqrt{2}$
 - $-0,5 > -3$
 - $-1 < -\frac{4}{3}$
- A) VFVV B) FFVV C) VFFF
D) FVVV E) FVVF
- 3.** Indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
- En el intervalo $(2; 5)$ solo hay dos elementos, que son 3 y 4.
 - El número 4 es un elemento de $(4; 7]$.
 - El número 5 es un elemento de $[5; 6)$.
 - En el intervalo $(3; 4)$ hay infinitos números reales.
- A) VFVF B) VFFV C) FFVV
D) FVVF E) VVFV
- 4.** Sean los intervalos $A = [-2; 7]$ y $B = [3; 9]$. Halle la suma de los elementos enteros de $A \cap B$.
- A) 18 B) 21 C) 15
D) 25 E) 28
- 5.** Sean los intervalos $A = (-2; 8)$ y $B = (-5; 2]$. Halle el número de elementos enteros de $A \cap B$.
- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8
- Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 8\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / 5 < x \leq 9\}$. Señale a qué es igual $A \cap B$.
- A) $[6; 7)$ B) $[5; 8)$ C) $[6; 8)$
D) $[6; 7]$ E) $\{6; 7\}$
- 7.** Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x \leq 10\}$. Halle $A \cap B \cap C$.
- A) $(3; 10]$ B) $(5; 9)$ C) $(5; 8)$
D) $[2; 10)$ E) $(3; 8)$

8. Sean los intervalos

$$A = \langle -\infty; 7 \rangle; \quad B = \langle 8; +\infty \rangle$$

Calcule $A^C \cap B^C$.

- A) \emptyset B) $\langle 7; 8 \rangle$ C) $[7; 8]$
 D) $[7; +\infty \rangle$ E) $\langle 7; 8]$

9. Sean los conjuntos

$$A = \langle 1; 5 \rangle$$

$$B = \langle 1; 6 \rangle$$

Calcule $(A-B) \cup (B-A)$.

- A) \emptyset B) $\langle 1; 6 \rangle$ C) $\langle 5; 6 \rangle$
 D) $\langle 1; 5 \rangle$ E) $[5; 6]$

10. Dados los intervalos

$$A = \left(-\sqrt{5}; 3\pi \right) \text{ y } B = [\pi; 2\pi),$$

halle el número de elementos enteros de $A \cap B^C$.

- A) 10 B) 11 C) 9
 D) 8 E) 12

11. Si $x \in \langle -3; 2 \rangle$, halle el número de valores enteros de $f_{(x)} = 4x+1$.

- A) 20 B) 21 C) 15
 D) 19 E) 18

12. Si $x \in [-2; 1)$, halle la suma de valores enteros de $g_{(x)} = \frac{13-10x}{2}$.

- A) 115 B) 125 C) 136
 D) 135 E) 120

13. Halle la variación de $f_{(x)} = 5x+2$

si $(x+3) \in \langle 1; 2 \rangle$.

- A) $\langle -3; -2 \rangle$ B) $\langle -8; -2 \rangle$ C) $\langle -5; -2 \rangle$
 D) $\langle -5; -3 \rangle$ E) $\langle -8; -3 \rangle$

14. Si la variación de $f_{(x)} = \frac{5-8x}{2}$ es $\left[\frac{13}{2}, \frac{29}{2} \right)$,

halle la variación de x .

- A) $\langle -2; -1 \rangle$ B) $\langle -3; -1 \rangle$ C) $\langle -3; -2 \rangle$
 D) $[-3; -1 \rangle$ E) $\langle -3; -1 \rangle$

15. Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq 5-2x < 3\}$$

$$B = \{x+2 \in \mathbb{R} / 2x+1 \in A\}$$

Calcule $A-B$.

- A) \emptyset B) $\langle 1; 2 \rangle$ C) $\langle 0; 2 \rangle$
 D) $\langle 1; 3 \rangle$ E) $\langle 1; 2 \rangle$

16. Sea el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x-5 \geq -1 \wedge 3-2x > 1\}$$

Halle su equivalente.

- A) $\langle 1; 4 \rangle$ B) $[1; 4)$ C) $[1; 4]$
 D) $\langle 1; 4 \rangle$ E) \emptyset

17. Halle la variación de $f_{(x)} = \frac{20}{3-x}$ si $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

Indique la suma de su mayor y menor valor entero.

- A) 30 B) 32 C) 29
 D) 31 E) 28

18. Si $f(x) = \frac{1}{2x+6}$ varía en el intervalo $\left[\frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right]$,

halle en qué intervalo varía x .

- A) $[-2; 2]$
- B) $[-2; 3]$
- C) $[-3; 2]$
- D) $[-2; 6]$
- E) $[-3; 1]$

19. Halle la variación de

$$f(x) = \frac{5x+2}{x-3} \text{ si } x \in (4; 5).$$

- A) $\left(\frac{1}{2}; 22\right)$
- B) $\left(\frac{19}{2}; 27\right)$
- C) $\left(\frac{13}{2}, \frac{27}{2}\right)$
- D) $\left(\frac{27}{2}; 22\right)$
- E) $\left(11; \frac{27}{2}\right)$

20. La variación de $f(x) = \frac{3x+1}{4x+3}$

cuando $x \in (0; 1)$, es $(a; b)$.

Calcule $a+b$.

- A) $\frac{16}{21}$
- B) $\frac{17}{21}$
- C) $\frac{18}{21}$
- D) $\frac{19}{21}$
- E) $\frac{20}{21}$

21. Determine la variación de $f(x) = x^2 + 8x + 1$ si $x \in (-3; 0)$.

- A) $[0; 1)$
- B) $(-3; 1)$
- C) $(1; 34)$
- D) $(0; 1)$
- E) $(-14; 1)$

22. La variación de $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ cuando $x \in \mathbb{R}$ es $[m; +\infty)$. Calcule m .

- A) $-\frac{19}{2}$
- B) $\frac{15}{2}$
- C) $-\frac{13}{2}$
- D) $-\frac{15}{2}$
- E) $\frac{19}{2}$

23. Calcule la longitud del intervalo de la variación de $\frac{10}{x^2 + 4x + 5}$ cuando $x \in (-5; -3)$.

- A) 5
- B) 6
- C) 4
- D) 8
- E) 10

24. Indique qué proposiciones son correctas.

- I. $x^2 < 4 \Leftrightarrow x < 2$
- II. $-2 < x < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{3}$
- III. $x^{2015} < 3^{2015} \Leftrightarrow x < 3$

- IV. $0 < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

- A) todas
- B) I y III
- C) I, II y III
- D) solo III
- E) III y IV

25. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- I. El mínimo valor de $x^2 + 6x$ es igual a -9 .
- II. El máximo valor de $4x - x^2$ es igual a 4 .
- III. El máximo valor de $\frac{6}{x^2 + 2}$ es igual a 3 .
- IV. El máximo valor de $x^2 - 8x$ es igual a 16 .

- A) VVFF
- B) FVFV
- C) FFVV
- D) VFVF
- E) VVVF

26. Halle el mínimo valor de $x + \frac{9}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^+$.

- A) 9 B) 3 C) 6
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{3}{2}$

27. El mínimo valor de $x + \frac{4}{x-1}$ cuando $x > 1$ es k . Calcule $k^2 - k$.

- A) 24 B) 16 C) 18
D) 20 E) 25

28. Halle el máximo valor de $\frac{5ab}{a^2+b^2}$ cuando $a, b \in \mathbb{R}^+$.

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 5
D) $\frac{1}{5}$ E) 1

29. Halle el máximo valor de

$$f(x) = \frac{8}{1+(x^2+5)(x^2+3)}$$

- A) 4 B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

30. Halle el máximo valor de $E = \frac{x}{(x+1)(x+4)}$ cuando $x \in \mathbb{R}^+$.

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

31. Si $2x+1 \in (7; 9]$, halle la variación de $2-x$.

- A) $(-2; 1)$ B) $[-2; -1)$ C) $(-2; 1]$
D) $[-1; 2)$ E) $(-1; 2]$

32. Si $\frac{2016}{x+1} \in [42; 56]$, halle el número de valores enteros de x .

- A) 14 B) 10 C) 9
D) 12 E) 11

33. Halle la variación de

$$\frac{x^2+5}{x^2+1} \text{ si } x \in [-2; 3].$$

- A) $\left(\frac{7}{5}; 5\right]$ B) $\left(\frac{3}{2}; 5\right]$ C) $\left(\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right]$
D) $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right]$ E) $\left(\frac{9}{5}; 5\right]$

34. La variación de la expresión $\frac{2x+1}{x-2}$ es $(\alpha; \beta]$ cuando $x \in [3; 5]$. Calcule $\alpha+\beta$.

- A) 16 B) 8 C) 10
D) $\frac{32}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

35. Halle el mínimo valor de la expresión x^2+2x+7 si $x \in (-5; 4)$.

- A) 14 B) 22 C) 7
D) 6 E) 13

36. Halle la variación de la expresión $x^2 + 3x + 1$ si $x \in \mathbb{R}$.

- A) 6 B) 8 C) 11
D) 9 E) 7

- A) $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ B) $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ C) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$
D) $\left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$ E) $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

37. Halle el máximo valor de $5 - x(x-4)$ si $x \in \mathbb{R}$.

- A) 13 B) 8 C) 4
D) 5 E) 9

38. Halle el menor valor de $x + \frac{4}{x} + 2$ si $x \in \mathbb{R}^+$.

39. Halle la variación de $\frac{x^2 + x + 2}{x+1}$ si $x > -1$.

Indique su menor valor entero.

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

40. Halle el mínimo valor de

$$x^2 + \frac{2}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^+.$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3
D) 2 E) 1

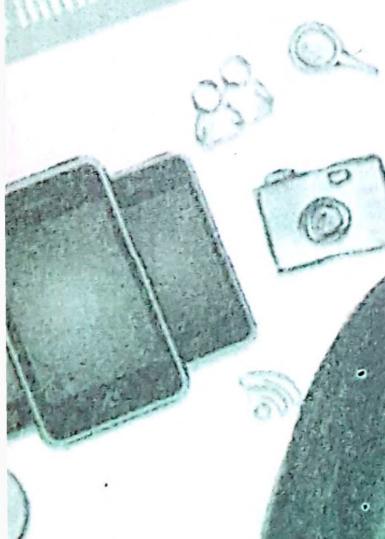
Claves

1	D	7	C	13	E	19	D	25	F	31	B	37	E
2	E	8	E	14	B	20	D	26	C	32	D	38	A
3	C	9	C	15	E	21	E	27	D	33	A	39	D
4	A	10	C	16	E	22	A	28	A	34	D	40	C
5	A	11	D	17	D	23	C	29	D	35	D		
6	E	12	D	18	B	24	E	30	E	36	B		

CAPÍTULO 9

Además:
200 MB para navegar
200 SMS para mensajear
100 min de llamadas a cualquier compañía

ilimitado



Facebook, Twitter,
WhatsApp y tu correo



INECUACIONES



Lejos quedaron aquellos tiempos en los que los celulares tenía un uso muy básico. Con la llegada de los *smartphones*, esto cambió radicalmente. Ahora los usamos para estar conectados con nuestros amigos mediante las redes sociales, para el trabajo, para hacer transacciones bancarias; para estar informados al momento, etcétera.

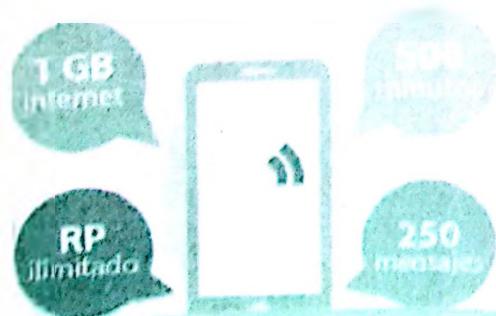
Los operadores de telefonía ofrecen planes tarifarios para todos los gustos y bolsillos, y debemos tener en cuenta muchos factores para elegir el plan que mejor se ajuste a nuestro presupuesto y forma de vida. Al comparar planes y decidir cuál de ellos escogeremos, estamos resolviendo inecuaciones.

Aprendizajes esperados

- Entender qué es una inecuación y qué significa resolvirla.
- Saber resolver inecuaciones lineales.
- Saber resolver inecuaciones cuadráticas.
- Saber resolver inecuaciones polinomiales de grado superior y fraccionarias.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Al calcular cuánto dinero debemos presupuestar mensualmente para cubrir nuestros gastos diarios, usamos inecuaciones; para resolver problemas de programación lineal cuando se calculan costos mínimos o ganancias máximas para una empresa, usamos inecuaciones. Su conocimiento es básico para resolver problemas propios del álgebra como el cálculo del dominio o el rango de una función.



Inecuación

1. CONCEPTO

Es una desigualdad en la que hay una incógnita, la cual generalmente se representará con la letra x .

Ejemplos

Las desigualdades son:

- mayor que ($>$)
 - menor que ($<$)
 - mayor o igual que (\geq)
 - menor o igual que (\leq)
- } estáticas
- } no estáticas

- $x + 5 > 2$

- $x^2 + 1 < \frac{1}{x}$

- $\sqrt{x+2} \leq x$

- $(x+3)(x+2) \geq 1$

1.1. Objetivo en la inecuación

Hallar todos los valores de la incógnita que verifican la desigualdad en la inecuación.

Ejemplos

1. En la inecuación $2x+5 > 13$, debemos hallar los valores de x que verifican la desigualdad.

Hallaremos dichos valores despejando x de la siguiente manera:

$$2x+5 > 13$$

$$2x > 13 - 5$$

$$2x > 8$$

$$x > \frac{8}{2}$$

$$\rightarrow x > 4$$

Encontramos que los valores de x que son mayores que 4 verifican la desigualdad en la inecuación.

Lo comprobamos reemplazando algunos valores enteros de x mayores que 4.

x	$2x+5 > 13$
5	$2(5)+5 > 13$ 15
6	$2(6)+5 > 13$ 17
7	$2(7)+5 > 13$ 19
⋮	⋮

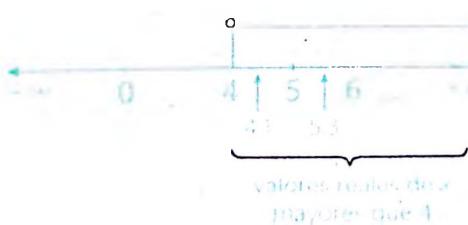
valores enteros
de x mayores
que 4

No solo los valores enteros de x verificarán la desigualdad, también lo harán los valores de x que sean números decimales mayores que 4, como se pueden ver a continuación:

x	$2x+5 > 13$
4,1	$2(4,1)+5 > 13$ 13
5,3	$2(5,3)+5 > 13$ 17
⋮	⋮

valores decimales
de x mayores
que 4

Cuando resolvemos una inecuación, los valores de la incógnita no solo serán números enteros, sino que en general serán números reales, lo que incluye a los enteros y decimales. Representamos estos valores de x en la recta numérica.



El intervalo $(4; +\infty)$ agrupa a todos los valores de x que verifican esta inecuación.

No olvide

En una inecuación, los valores de la incógnita que buscamos son números reales.



Reto al saber

Respecto a la inecuación

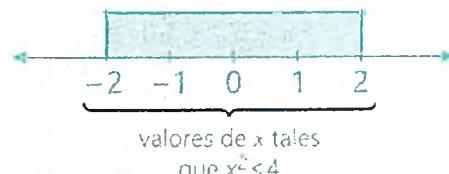
$$\frac{x-2}{x-5} \leq 0$$

indique las proposiciones que son verdaderas o falsas.

- I. El valor 5 es una solución.
- II. El valor 2 es una solución.
- III. Tiene 3 soluciones enteras.
- IV. Presenta infinitas soluciones reales.



2. En la inecuación $x^2 \leq 4$ debemos hallar los valores de x que verifiquen la desigualdad. Es decir, debemos encontrar números que elevados al cuadrado resulten menores que 4 o iguales a 4. Dichos valores se observan en el siguiente gráfico:



El intervalo $[-2; 2]$ agrupa a todos estos valores.

1.2. Solución y conjunto solución de una inecuación

Al valor de la incógnita que verifica la inecuación se le llama **solución de la inecuación**, y al conjunto que agrupa a todas las soluciones se le llama **conjunto solución de la inecuación**.

Ejemplos

- En la inecuación del ejemplo anterior, $2x+5 > 13$, encontramos que los valores de x que la verifican son los valores de x mayores que 4 ($x > 4$). Estos valores de x son las soluciones de esta inecuación y el conjunto que las agrupa, que es el intervalo $(4; +\infty)$, es su conjunto solución.
- Hallaremos las soluciones de la inecuación $2x+3 \leq 10$ despejando x .

$$2x \leq 10 - 3$$

$$2x \leq 7$$

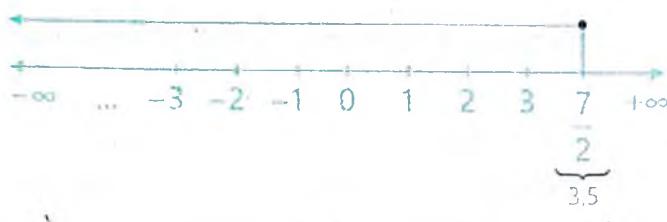
$$\rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

Los valores de x que sean iguales o menores que $\frac{7}{2}$ verifican la inecuación y por ello son sus soluciones.

No olvide

Cuando resuelva una inecuación, tome en cuenta que el objetivo es que se verifique la desigualdad. No trate a una inecuación como si fuera una ecuación.

Su representación en la recta numérica es



valores de x que verifican la inecuación
(incluye enteros y decimales)

$$\therefore CS = \left[-\infty; \frac{7}{2} \right]$$

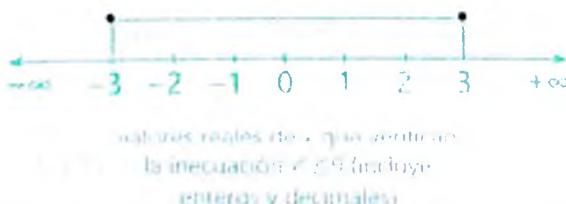
3. En la inecuación $x^2 \leq 9$, la idea es encontrar los valores de x , tal que x^2 sea menor o igual que 9.

Los hallaremos reemplazando algunos valores de x de la siguiente manera:

x	... -4 -3 -2 -1 0 1 2 2,5 3 4 ...
x^2	... 16 9 4 1 0 1 4 6,25 9 16 ...

Se puede observar que, para que se verifique $x^2 \leq 9$, los valores de x deben estar de -3 hasta 3 , contando ambos extremos.

Su representación en la recta numérica es



valores reales de x que verifican
la inecuación $x^2 \leq 9$ (incluye
enteros y decimales)

$$\therefore CS = [-3; 3]$$

¡Cuidado!



Un error común con respecto a la inecuación $x^2 \leq 9$ es proceder a resolverla como si fuera una ecuación.

Ejemplo

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 9 \\ \sqrt{x^2} &\leq \sqrt{9} \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

Este proceso es incorrecto.

Reto al saber



Determine las proposiciones que son correctas respecto a la inecuación $x^2 \leq 5$.

- El valor $\sqrt{5}$ es una solución.
- Se verifica para cualquier valor de x , tal que $x \leq \sqrt{5}$.
- Tiene 5 soluciones enteras.
- El valor $-\sqrt{5}$ es su menor solución.

4. En la inecuación $x^2 > -4$, la idea es encontrar los valores de x , tal que x^2 sea mayor que -4 .

Recordemos que x^2 siempre es positivo o cero, pero nunca negativo.

Entonces x^2 siempre será mayor que -4 , ya que, al ser siempre positivo o cero, será mayor que cualquier número negativo.

Comprobemos esto con una tabla de valores.

Importante

- La inecuación $x^2 \leq a^2$, donde $a > 0$, se verifica si y solo si $-a \leq x \leq a$.
- La inecuación $x^2 \geq a^2$, donde $a > 0$, se verifica si y solo si $x \leq -a \vee x \geq a$.

Reto al saber

Un procedimiento erróneo para resolver la inecuación $x^2 > -4$ es

$$x^2 > -4$$

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{-4}$$

$$x > \sqrt{-4}$$

$$x > -2$$

¿Dónde están los errores?

La inecuación es cualquier número real (positivo, cero o negativo)

x	x^2
⋮	⋮
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
⋮	⋮

En la tabla se observa que x^2 siempre resulta positivo o cero, por ende, será mayor que cualquier número negativo. En nuestro caso, x^2 siempre será mayor que -4 . Entonces la inecuación $x^2 > -4$ se cumple para cualquier valor real de x . Cualquier valor real de x es solución de esta inecuación, por lo tanto, el conjunto \mathbb{R} es su conjunto solución.

5. Resolvamos la inecuación $x^2 + 1 < 0$.

Tengamos en cuenta que x^2 solo puede ser positivo o cero, pero nunca negativo.

Entonces $x^2 + 1$ siempre resultará positivo, ya que al ser x^2 positivo o cero, al sumarle 1, que es una cantidad positiva, el resultado siempre será positivo.

En la inecuación $x^2 + 1 < 0$, la idea es encontrar los valores de x , de tal manera que $x^2 + 1$ sea menor que cero, es decir, que sea negativo. Pero esto no es posible, ya que, como explicamos, $x^2 + 1$ siempre será positivo.

$$\frac{x^2+1}{x} < 0$$

No es posible que
 x^2+1 sea menor
que cero.

Entonces esta inecuación no tiene solución, es decir, ningún valor real de x la verifica. Por lo tanto, su conjunto solución será el conjunto vacío.

6. Resolvamos la inecuación $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$.

En esta inecuación, la idea es encontrar los valores de x , tal que la fracción $\frac{x-3}{x^2+1}$ sea menor que cero, es decir, de signo negativo. Como la expresión x^2+1 siempre es positiva, entonces para que se verifique esta inecuación, la expresión del numerador, que es $x-3$, debe ser negativa.

$$\frac{x-3}{x^2+1} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

Luego, como $x-3 < 0$, entonces $x < 3$.



Estos valores de x son las soluciones de esta inecuación y el intervalo $(-\infty; 3)$ es su conjunto solución.

1.3. Clasificación de las inecuaciones

Una inecuación de incógnita x se representa de la siguiente manera:

$E_{(x)}$

donde $E_{(x)}$ es una expresión matemática y el símbolo \lessdot representa una de las siguientes desigualdades: $<$, $>$, \leq o \geq .

Haremos una clasificación de las inecuaciones de acuerdo al tipo de expresión matemática que representa $E_{(x)}$.

No olvide



Cuando una inecuación no tiene solución, su conjunto solución es el conjunto vacío, el cual se representa como \emptyset .

Cuidado!



En la inecuación

$$-2x > 5$$

multiplicamos cada uno de los miembros por $(-\frac{1}{2})$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right)(5)$$

$$Se obtiene x < -\frac{5}{2}.$$

Tenga cuidado con el sentido de la desigualdad; cuando se multiplica por un número negativo, esta cambia de sentido.

Tenemos los siguientes casos:

- Es una inecuación polinomial cuando $E_{(x)}$ es un polinomio no constante.
- Es una inecuación fraccionaria cuando $E_{(x)}$ es una expresión fraccionaria.
- Es una inecuación irracional cuando $E_{(x)}$ es una expresión irracional.

Ejemplos

<i>inecuaciones polinomiales</i> $\begin{cases} 2x+3 < 0 & \text{(lineal)} \\ x^2 + 5x + 1 > 0 & \text{(cuadrática)} \\ x^3 + 2x + 1 \leq 0 & \text{(grado superior)} \\ x^4 + x + 2 \geq 0 & \text{(grado superior)} \\ \vdots \end{cases}$	<i>inecuación fraccionaria</i> $\left\{ \frac{x+3}{x+5} < 1 \right.$	 <i>inecuación irracional</i> $\left\{ \sqrt{x+3} \leq 5 \right. \text{ (expresión con radicales)}$
---	---	---

También hay otros tipos de inecuaciones, como aquellas que incluyen valor absoluto o aquellas que incluyen logaritmos, las cuales se tratarán en su respectivo capítulo.

En este capítulo solo trataremos las inecuaciones polinomiales y las fraccionarias.

2. INECUACIÓN LINEAL

Para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, la inecuación lineal de incógnita x es aquella de la forma

$$ax + b \leq 0$$

Ejemplos

- $2x + 5 < 0$
- $3x + 7 \geq 0$

$$\bullet \quad \frac{x+1}{2} + 5 > 0$$

$$\bullet \quad \frac{x+1}{2} + \frac{x}{3} \leq 7$$

Método de resolución

Para resolver una inecuación lineal, seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Pasamos al primer miembro de la inecuación todos los términos que contengan a la incógnita y al segundo miembro todo lo demás.
2. Realizamos las operaciones correspondientes con el fin de despejar la incógnita de la inecuación.
3. El conjunto de valores de la incógnita que obtenemos es el conjunto solución de la inecuación.

APLICACIÓN 1

Resuelva $2x + 1 < x + 9$.

RESOLUCIÓN

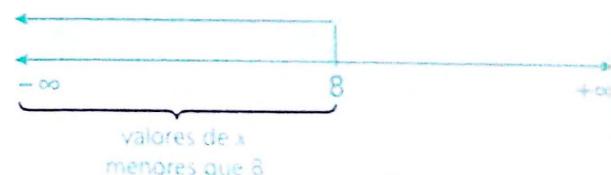
El procedimiento para resolver una inecuación lineal consiste en despejar x .

$$2x + 1 < x + 9$$

$$2x - x < 9 - 1$$

$$x < 8$$

Su representación en la recta numérica es



Los valores de x menores que 8 son las soluciones de esta inecuación.

$$\therefore CS = (-\infty; 8)$$

APLICACIÓN 2

Resuelva $5x+2 < 3x+10$.

RESOLUCIÓN

Despejamos x en la inecuación.

$$5x+2 < 3x+10$$

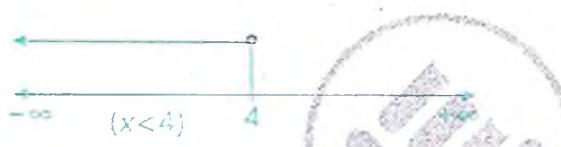
$$5x-3x < 10-2$$

$$2x < 8$$

$$x < \frac{8}{2}$$

$$x < 4$$

Su representación en la recta numérica es



Su conjunto solución es $CS = (-\infty; 4)$, el cual agrupa a todos los valores de x menores que 4, los cuales son las soluciones de esta inecuación.

APLICACIÓN 3

Resuelva $2x+5 \leq 5x+17$.

RESOLUCIÓN

Despejamos x en la inecuación.

$$2x+5 \leq 5x+17$$

$$2x-5x \leq 17-5$$

$$-3x \leq 12$$

Debemos pasar a dividir el coeficiente -3 al otro miembro; pero como es negativo, al hacerlo, la desigualdad cambiará de sentido.

$$\underline{-3} x \leq 12 \quad (-3 \text{ pasa a dividir})$$

$$x \geq \frac{12}{-3}$$

La desigualdad cambió de sentido y se obtiene $x \geq -4$.

Su representación en la recta numérica es



$$\therefore CS = [-4; +\infty)$$

3. INECUACIÓN CUADRÁTICA

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, la inecuación cuadrática de incógnita x es aquella de la forma

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Ejemplos

- $x^2 + 3x - 5 > 0$
- $3x^2 + x - 2 \leq 0$
- $-x^2 + 9x < 2$
- $-2x^2 + x^2 \geq 3x^2 + 1$

Forma simplificada

Por conveniencia, haremos que la inecuación cuadrática tenga la siguiente forma:

$$x^2 + mx + n \leq 0$$

Llamaremos a esta forma, la forma simplificada de una inecuación cuadrática.

Observe que en esta forma la cuadrática está en el primer miembro y en el otro miembro está cero. Es decir, la cuadrática se está comparando con cero, lo cual nos resultará conveniente, ya que reducirá el problema a un análisis de signos. También observe que el coeficiente principal de la cuadrática es uno.

Si una inecuación cuadrática no está en esta forma, debemos hacer lo siguiente:

- Pasamos todos los términos a un solo miembro, de modo que en el otro miembro quede cero.

Ejemplo

En la inecuación $x^2 + 3x < 5$, debemos pasar todos los términos a un solo miembro.

$$x^2 + 3x < 5$$

Pasa restando
al otro miembro.

Entonces tendremos

$$x^2 + 3x - 5 < 0$$

Observe que en el segundo miembro quedó cero, con lo cual ya está en la forma simplificada.

- Si el coeficiente principal de la cuadrática es diferente de 1, dividimos ambos miembros de la inecuación entre dicho coeficiente. Al hacer esto, tengamos en cuenta que si dicho coeficiente es positivo, se mantendrá el sentido de la desigualdad; y si es negativo, cambiará el sentido de la desigualdad.

Ejemplos

- En la inecuación $3x^2 + 6x + 9 < 0$, la cuadrática tiene coeficiente principal 3, el cual es diferente de 1.

Dividimos entre 3 ambos miembros de la desigualdad.

$$3x^2 + 6x + 9 < 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} < \frac{0}{3}$$

Se obtiene $x^2 + 2x + 3 < 0$, con lo cual ya está en la forma simplificada.

- La inecuación $-2x^2 + 4x + 10 \leq 0$ la dividimos entre el coeficiente principal de la cuadrática, que es -2.

$$-2x^2 + 4x + 10 \leq 0 \rightarrow \frac{-2x^2}{-2} + \frac{4x}{-2} + \frac{10}{-2} \geq \frac{0}{-2}$$

La desigualdad cambió
de sentido.

Se obtiene $x^2 - 2x - 5 \geq 0$, con lo cual ya está en la forma simplificada.

3.1. Resolución de la inecuación cuadrática

Se presentan tres casos, de acuerdo a la forma que tiene la inecuación cuadrática.

3.1.1. Primer caso

Cuando es posible llevar la cuadrática $x^2 + mx + n$ a la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, donde α y $\beta \in \mathbb{R}$, y además $\alpha \neq \beta$.

Tengamos en cuenta que α y β representan las raíces de la cuadrática y estamos considerando que son reales y diferentes.

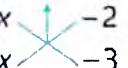
APLICACIÓN 4

Resuelva $x^2 - 5x + 6 < 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos la cuadrática utilizando el método de aspa simple.

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

x 

Luego, tendremos

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$(x-2)(x-3) < 0$$

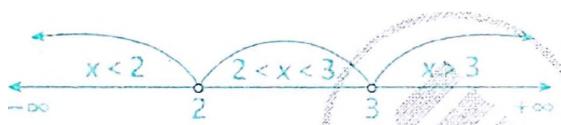
Tenemos que $(x-2)(x-3)$ debe ser menor que cero, es decir, debe ser negativo.

Ahora, para que un producto de dos factores sea negativo, dichos factores deben ser de signos distintos (uno positivo y el otro negativo).

Analicemos las posibilidades.

- Cuando $x=2$ o $x=3$, el producto $(x-2)(x-3)$ será igual a cero.
- Sin contar estos valores, quedan tres posibilidades, las cuales son

$$x < 2 \vee 2 < x < 3 \vee x > 3$$



- Si $x < 2$, se tendrá que $x-2$ es negativo y también $x-3$ será negativo. Así que su producto $(x-2)(x-3)$ resultará positivo.

Cuando $x < 2$: $\underbrace{(x-2)(x-3)}_{(-)(-)}^{(+)}$

- Si $2 < x < 3$, se tendrá que $x-2$ es positivo; en cambio, $x-3$ será negativo. Así que su producto resultará negativo.

Cuando $2 < x < 3$: $\underbrace{(x-2)(x-3)}_{(+)(-)}^{(-)}$

- Por último, si $x > 3$, se tendrá que ambos, $(x-2)$ y $(x-3)$, serán positivos. Así que su producto resultará positivo.

Cuando $x > 3$: $\underbrace{(x-2)(x-3)}_{(+)(+)}^{(+)}$

Resumimos este análisis de posibilidades en la siguiente tabla:

x	$x-2$	$x-3$	$(x-2)(x-3)$
$x < 2$	-	-	$(-)(-)=(+)$
$x=2$	0	-1	$(0)(-1)=0$
$2 < x < 3$	+	-	$(+)(-)=(-)$
$x=3$	1	0	$(1)(0)=0$
$x > 3$	+	+	$(+)(+)=(+)$

La inecuación $(x-2)(x-3) < 0$ se verifica cuando el producto $(x-2)(x-3)$ es negativo, y eso ocurre cuando $2 < x < 3$. Así que estos valores de x son las soluciones de la inecuación y el conjunto que las agrupa, que es el intervalo $(2; 3)$, es su conjunto solución.

APLICACIÓN 5

Resuelva la inecuación $x^2 - 7x + 6 \geq 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos la cuadrática con aspa simple.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 6 &= (x-6)(x-1) \\ x &\cancel{x} - 6 \\ x &\cancel{x} - 1 \end{aligned}$$

Se obtiene $(x-6)(x-1) \geq 0$.

Buscamos que $(x-6)(x-1)$ sea mayor que cero y que también sea igual a cero. Para que el producto $(x-6)(x-1)$ sea igual a cero, los valores de x deben ser $x=6$ o $x=1$. Y para que el producto $(x-6)(x-1)$ sea mayor que cero, es decir, positivo, los factores deben tener el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), lo cual ocurre cuando $x > 6$ o $x < 1$.

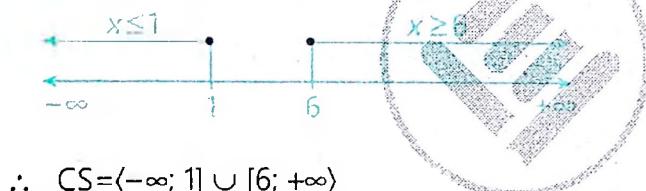
Podemos ver esto en la siguiente tabla:

x	$x-1$	$x-6$	$(x-1)(x-6)$
$x < 1$	-	-	$(-)(-) = (+)$
$x = 1$	0	-5	$(0)(-5) = 0$
$1 < x < 6$	+	-	$(+)(-) = (-)$
$x = 6$	5	0	$(5)(0) = 0$
$x > 6$	+	+	$(+)(+) = (+)$

Observe que la inecuación $(x-6)(x-1) \geq 0$ se verifica cuando $x \geq 6$ o $x \leq 1$.

Estos valores de x son las soluciones de esta inecuación.

Su representación en la recta numérica es



a. Método de puntos críticos

Para resolver la inecuación cuadrática

$$(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0$$

aplicaremos el llamado método de puntos críticos, que consiste en los siguientes pasos:

- Ubicamos α y β , que son las raíces de la cuadrática, en la recta numérica. Para ello supongamos que $\alpha < \beta$.



- Separamos la recta en tres zonas, como se muestra a continuación:



- En la siguiente tabla se pueden observar los signos de los factores $(x-\alpha)$ y $(x-\beta)$, y de su producto, en cada zona.

x	$x-\alpha$	$x-\beta$	$(x-\alpha)(x-\beta)$
$x < \alpha$	-	-	$(-)(-) = (+)$
$\alpha < x < \beta$	+	-	$(+)(-) = (-)$
$x > \beta$	+	+	$(+)(+) = (+)$

- Colocamos los signos de $(x-\alpha)(x-\beta)$ en la recta numérica (cada signo en su respectiva zona).



- Si queremos resolver la inecuación $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$, que significa que el producto debe ser negativo, elegimos la zona con ese signo.



En esta zona, el producto es negativo

Entonces el intervalo $(\alpha; \beta)$ será su conjunto solución.

Si queremos resolver la inecuación $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$, donde el producto $(x-\alpha)(x-\beta)$ debe ser positivo, elegimos las zonas con ese signo.



Entonces el intervalo $(-\infty; \alpha) \cup (\beta; +\infty)$ será su conjunto solución.

Y si en lugar de las desigualdades estrictas ($<$ o $>$) tuviéramos las desigualdades no estrictas (\leq o \geq), ocurriría lo mismo, con la única diferencia que los extremos α y β , en lugar de ser abiertos, serían cerrados. En síntesis, este método consiste en lo siguiente:

$$\underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)}_{P(x)} \leq 0$$

Punto crítico



- $P(x) < 0 \rightarrow CS = (\alpha; \beta)$
- $P(x) \leq 0 \rightarrow CS = [\alpha; \beta]$
- $P(x) > 0 \rightarrow CS = (-\infty; \alpha) \cup (\beta; +\infty)$
- $P(x) \geq 0 \rightarrow CS = (-\infty; \alpha] \cup [\beta; +\infty)$

APLICACIÓN 6

Resuelva $x^2+3x-28 \geq 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos con aspa simple.

$$\begin{array}{r} x^2+3x-28 \geq 0 \\ x \cancel{\times} +7 \\ x \cancel{\times} -4 \end{array}$$

Se obtiene $(x+7)(x-4) \geq 0$.

Aplicamos el método de puntos críticos.

Hallamos sus raíces.

$$\left. \begin{array}{l} x+7=0 \rightarrow x=-7 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{array} \right\} \text{raíces}$$

Ubicamos estas raíces en la recta.



Elegimos las zonas donde está el signo positivo. Además, hay que incluir las raíces -7 y 4 como soluciones de la inecuación, así que dichos extremos deben ser cerrados.

$$\therefore CS = (-\infty; -7] \cup [4; +\infty)$$

APLICACIÓN 7

Resuelva $x^2-2x-4 \leq 0$.

RESOLUCIÓN

La cuadrática x^2-2x-4 no puede factorizarse con aspa simple, así que la factorizaremos usando la propiedad de diferencia de cuadrados.

$$x^2-2x-4 \leq 0$$

$$\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2} - 4 - 1 \leq 0$$

$$(x-1)^2 - 5 \leq 0$$

Expresamos 5 como $\sqrt{5}^2$ y reemplazamos.

$$\underbrace{(x-1)^2 - \sqrt{5}^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} \leq 0$$

$$(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) \leq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.

Hallamos sus raíces.

$$\left. \begin{array}{l} x-1+\sqrt{5}=0 \rightarrow x=1-\sqrt{5} \\ x-1-\sqrt{5}=0 \rightarrow x=1+\sqrt{5} \end{array} \right\} \text{raíces}$$

Luego, colocamos estas raíces en la recta.



Elegimos la zona con signo negativo, además, será cerrado en los extremos.

$$\therefore CS = [1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$$

b. Relación con el discriminante

Usamos el método de puntos críticos cuando la cuadrática tiene raíces reales y diferentes. Este tipo de raíces está relacionado con el discriminante de la cuadrática (Δ) mediante la siguiente propiedad:

$$\text{Raíces reales y diferentes} \leftrightarrow \Delta > 0$$

c. Otra forma de hallar las raíces

Cuando factorizamos una cuadrática con aspa simple o con diferencia de cuadrados, lo hacemos con el fin de hallar las raíces (que en este caso son reales y diferentes).

Sin embargo, tenemos otra alternativa que es hallar las raíces usando la fórmula general de la cuadrática, la cual es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Usaremos esta fórmula solo cuando el discriminante es positivo ($\Delta > 0$).

APLICACIÓN 8

En el ejemplo anterior, las raíces se pueden obtener directamente usando la fórmula general. Tenemos que

$$x^2 - 2x - 4 \leq 0$$

Luego, $a=1$; $b=-2$ y $c=-4$.

Calculamos el discriminante.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-4)$$

$$\rightarrow \Delta = 20$$

Como $\Delta > 0$, usamos la fórmula general de la cuadrática para hallar las raíces.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{20}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

De este modo obtenemos las raíces $1 + \sqrt{5}$ y $1 - \sqrt{5}$ directamente. Luego aplicamos el método de puntos críticos y obtenemos el conjunto solución $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$.

APLICACIÓN 9

Resuelva $x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

RESOLUCIÓN

Hallamos su discriminante.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1)$$

$$\rightarrow \Delta = 5$$

Como $\Delta > 0$, usamos la fórmula general de la cuadrática para calcular las raíces.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

3.1.2. Segundo caso

Cuando es posible llevar la cuadrática x^2+mx+n a la forma $(x-\alpha)^2$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

En este caso, la cuadrática es un cuadrado perfecto.

APLICACIÓN 10

Resuelva $x^2 - 6x + 9 < 0$.

RESOLUCIÓN

Observe que $x^2 - 6x + 9 = \underbrace{(x-3)^2}_{\text{cuadrado perfecto}}$

Reemplazamos en la inecuación y tendremos $(x-3)^2 < 0$.

Tenemos que $(x-3)^2$ debe ser menor que cero, es decir, debe ser negativo. Pero esto no es posible, ya que, por ser un cuadrado perfecto, solo puede ser positivo o cero, pero en ningún caso negativo.

En otras palabras, no hay ningún valor de x que verifique la inecuación $(x-3)^2 < 0$. Esta inecuación no tiene solución, por ende, su conjunto solución es $CS = \emptyset$.

APLICACIÓN 11

Resuelva $x^2 - 10x + 25 \geq 0$.

RESOLUCIÓN

Observe que $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$ es un cuadrado perfecto.

Reemplazamos en la inecuación y tendremos

$$(x-5)^2 \geq 0$$

Esta inecuación significa que $(x-5)^2$ debe ser positivo o cero, lo que se cumplirá para cualquier valor real de x . Esto se debe a la siguiente propiedad de los números reales:

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces cualquier valor real de x es solución de esta inecuación.

$$\therefore CS = \mathbb{R}$$

APLICACIÓN 12

Resuelva $x^2 - 4x + 4 > 0$.

RESOLUCIÓN

Observe que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ es un cuadrado perfecto.

Luego tendremos

$$(x-2)^2 > 0$$

Buscamos que $(x-2)^2$ sea mayor que cero, es decir, que sea positivo, lo cual ocurre con cualquier valor real de x , con la única excepción de $x=2$, ya que con este valor la cuadrática $(x-2)^2$ no será positivo, sino que será igual a cero.

Entonces cualquier valor real de x , a excepción de $x=2$, verifica la inecuación, así que estos valores serán sus soluciones.

$$\therefore CS = \mathbb{R} - \{2\}$$

APLICACIÓN 13

Resuelva $x^2 - 8x + 16 \leq 0$.

RESOLUCIÓN

Observe que $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ es un cuadrado perfecto.

Luego tendremos

$$(x-4)^2 \leq 0$$

Esta inecuación implica que $(x-4)^2$ sea menor que cero o que sea igual a cero.

Pero $(x-4)^2$ no puede ser menor que cero, ya que eso significa que debe ser negativo, lo cual no es posible porque se trata de un cuadrado perfecto.

Entonces solo queda la opción de que $(x-4)^2$ sea cero. Eso ocurre cuando $x=4$, que será la única solución de esta inecuación.

$$\therefore CS=\{4\}$$

a. Cuadro de posibilidades

Podemos resumir todas las situaciones que se presentan en este caso en el siguiente cuadro:

INECUACIÓN	SOLUCIÓN	COMENTARIO
$(x-\alpha)^2 \geq 0$	Se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.	$CS=\mathbb{R}$
$(x-\alpha)^2 > 0$	Se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$, a excepción $x=\alpha$.	$CS=\mathbb{R}-\{\alpha\}$
$(x-\alpha)^2 < 0$	Ningún valor de x lo verifica.	$CS=\emptyset$
$(x-\alpha)^2 \leq 0$	Se verifica solo para $x=\alpha$.	$CS=\{\alpha\}$

Otros ejemplos

- $(x-8)^2 \geq 0 \rightarrow CS=\mathbb{R}$
- $(x-8)^2 > 0 \rightarrow CS=\mathbb{R}-\{8\}$
- $(x-8)^2 < 0 \rightarrow CS=\emptyset$
- $(x-8)^2 \leq 0 \rightarrow CS=\{8\}$

b. Relación con el discriminante

Cuando la cuadrática es un cuadrado perfecto

$$x^2 + mx + n = \underbrace{(x-\alpha)^2}_{\text{cuadrado perfecto}}$$

esta se descompone como $(x-\alpha)(x-\alpha)$ y entonces sus raíces serán iguales. Esto ocurre cuando $\Delta=0$.

3.1.3. Tercer caso

Cuando la cuadrática $x^2 + mx + n$ puede llevarse a la forma $(x-h)^2 + k$, donde $h \in \mathbb{R}$ y $k > 0$.

En este caso, la cuadrática tendrá signo positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Esto ocurre porque $(x-h)^2$ solo puede ser positivo o cero, además, estamos considerando que $k > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} (x-h)^2 + k = (+) \\ \quad \quad \quad (-) \\ (x-h)^2 + k = (+) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La cuadrática } (x-h)^2+k \text{ siempre es de signo positivo para} \\ \text{cualquier valor real de } x. \end{array}$$

APLICACIÓN 14

Resuelva $x^2 - 2x + 5 < 0$.

RESOLUCIÓN

Observe que la cuadrática $x^2 - 2x + 5$ puede llevarse a la forma

$$x^2 - 2x + 5 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4$$

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$$

Reemplazamos en la inecuación y tendremos

$$(x-1)^2 + 4 < 0$$

Buscamos que $(x-1)^2 + 4$ sea menor que cero, es decir, negativo. Pero esto no es posible, ya que para cualquier valor de x esta cuadrática siempre será de signo positivo.

$$\overbrace{(x-1)^2 + 4}^{\substack{\text{siempre} \\ (+)}} < 0$$

Es imposible que sea menor que cero.

Entonces la inecuación $(x-1)^2 + 4 < 0$ no tiene solución.

$$\therefore CS = \emptyset$$

APLICACIÓN 15

Resuelva $x^2 - 4x + 10 > 0$.

RESOLUCIÓN

Expresamos la cuadrática convenientemente,

$$x^2 - 4x + 10 > 0$$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-4)^2} + 6 > 0$$

$$\rightarrow (x-4)^2 + 6 > 0$$

Buscamos que $(x-4)^2 + 6$ sea mayor que cero, es decir, que sea positivo.

Pero por la forma que tiene esta cuadrática, siempre será de signo positivo.

$$\underbrace{(x-4)^2}_{(+)} + \underbrace{6}_{(+)} > 0$$

Entonces cualquier $x \in \mathbb{R}$ es solución de esta inecuación.

$$\therefore CS = \mathbb{R}$$

Importante



Usaremos el método de puntos críticos para resolver una inecuación cuadrática solo cuando el discriminante de la cuadrática sea de signo positivo.

Cuidado!



Es un error resolver la inecuación $(x-4)^2 < 0$ de la siguiente manera:

$$(x-4)^2 < 0$$

$$x-4 < 0$$

$$x < 4$$

ya que su conjunto solución no es el intervalo $(-\infty; 4)$, sino el conjunto vacío.

**Importante**

¿Por qué la cuadrática x^2+mx+n siempre es positiva cuando su discriminante es negativo?

Completabamos cuadrados.

$$P(x) = x^2 + mx + n$$

$$P(x) = x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$P(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{4n - m^2}{4}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2 - 4n}{4}$$

Como $m^2 - 4n$ es el discriminante (Δ), tendremos

$$P(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$$

Observe que cuando $\Delta < 0$ ocurre lo siguiente:

$$x^2 + mx + n = \underbrace{\left(x + \frac{m}{2}\right)^2}_{\text{Siempre positivo}} - \frac{\Delta}{4}$$

Se observa que cuando $\Delta < 0$, la cuadrática $x^2 + mx + n$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

a. Relación con el discriminante

Para que la cuadrática pueda llevarse a la forma $(x-h)^2+k$, donde $k > 0$, su discriminante debe ser negativo ($\Delta < 0$).

Esto puede corroborarse en los siguientes ejemplos:

- $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5)$$

$$\Delta = -16 < 0$$

- $x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(10)$$

$$\Delta = -24 < 0$$

- $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(10)$$

$$\Delta = -4 < 0$$

Entonces podemos afirmar que una cuadrática $x^2 + mx + n$ puede llevarse a la forma $(x-h)^2 + k$, donde $k > 0$, solo cuando su discriminante es negativo ($\Delta < 0$).

Esta afirmación está basada en una propiedad de la cuadrática conocida con el nombre de teorema del trinomio positivo.

b. Teorema del trinomio positivo

La cuadrática $x^2 + mx + n$, donde m y $n \in \mathbb{R}$, es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solo si su discriminante $\Delta = m^2 - 4n$ es negativo.

$$x^2 + mx + n > 0, \forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow \Delta < 0$$

Ejemplos

- $P(x) = x^2 + 2x + 5$

Calculamos su discriminante.

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(5) = -16$$

Como $\Delta < 0$, entonces la cuadrática $x^2 + 2x + 5$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. $Q(x) = x^2 - 3x + 7$

Calculamos su discriminante.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(7) = -19$$

Como $\Delta < 0$, entonces la cuadrática $x^2 - 3x + 7$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Regla práctica

Para resolver una inecuación cuadrática, usaremos el teorema del trinomio positivo en la siguiente forma:

Cuando $\Delta < 0$, la cuadrática $x^2 + mx + n$ es de signo positivo para todo valor real de x .

APLICACIÓN 16

Resuelva la inecuación $x^2 - 2x + 7 < 0$.

RESOLUCIÓN

Calculamos el discriminante.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(7) = -24$$

Como $\Delta < 0$, la cuadrática $x^2 - 2x + 7$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

En la inecuación buscamos que $x^2 - 2x + 7$ sea menor que cero, es decir, negativo. Pero esto no es posible, ya que, como indicamos, esta cuadrática siempre será de signo positivo.

Entonces la inecuación no tiene solución.

$$\therefore CS = \emptyset$$

- Para cualquier cuadrática

El teorema del trinomio positivo aplicado a una cuadrática cualquiera consiste en lo siguiente:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff a > 0 \wedge \Delta < 0$$

Esta propiedad indica que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ será de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ si verifica dos condiciones: $\Delta < 0$ y $a > 0$.

Importante



Para darle a la cuadrática

$P(x) = x^2 + mx + n$ la forma $(x-h)^2 + k$, donde $k > 0$, debemos completar cuadrados.

El proceso de completar cuadrados consiste en lo siguiente:

Sumamos y restamos $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ a $P(x)$

$$P(x) = x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n$$

$$\therefore P(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + n - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Ejemplo

$$P(x) = x^2 + 3x + 5$$

Sumamos y restamos $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ a $P(x)$

$$P(x) = x^2 + 3x + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{+5} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{-5}$$

$$\therefore P(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

No olvide



Trinomio no negativo

$$ax^2 + bx + c \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff a > 0 \wedge \Delta \leq 0$$

APLICACIÓN 17

Resuelva la inecuación $3x^2 - 2x + 8 > 0$.

RESOLUCIÓN

Calculamos el discriminante.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(8) = -92$$

El coeficiente principal es $a=3$.

Como $a > 0$ y $\Delta < 0$, entonces la cuadrática $3x^2 - 2x + 8$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

En la inecuación buscamos que $3x^2 - 2x + 8$ sea mayor que cero, es decir, positivo, lo cual ocurre para todo valor real de x .

$$\therefore CS = \mathbb{R}$$

3.1.4. Resumen de todos los casos

En el siguiente cuadro se resumen todos los casos que se presentan en una inecuación cuadrática.

DISCRIMINANTE	CUADRÁTICA $P(x)=x^2+mx+n$	INECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU CONJUNTO SOLUCIÓN
Primer caso $\Delta > 0$	$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ con α y β reales y diferentes ($\alpha < \beta$). Usamos el método de puntos críticos.	<ul style="list-style-type: none"> $P(x) < 0 \rightarrow CS = (\alpha; \beta)$ $P(x) \leq 0 \rightarrow CS = [\alpha; \beta]$ $P(x) > 0 \rightarrow CS = (-\infty; \alpha) \cup (\beta; +\infty)$ $P(x) \geq 0 \rightarrow CS = (-\infty; \alpha] \cup [\beta; +\infty)$ $(x-\alpha)^2 < 0 \rightarrow CS = \emptyset$ $(x-\alpha)^2 \leq 0 \rightarrow CS = \{\alpha\}$ $(x-\alpha)^2 \geq 0 \rightarrow CS = \mathbb{R}$ $(x-\alpha)^2 > 0 \rightarrow CS = \mathbb{R} - \{\alpha\}$
Segundo caso $\Delta = 0$	$P(x)$ es un cuadrado perfecto. $P(x) = (x-\alpha)^2$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.	<ul style="list-style-type: none"> $x^2 + mx + n > 0 \rightarrow CS = \mathbb{R}$ $x^2 + mx + n \geq 0 \rightarrow CS = \mathbb{R}$ $x^2 + mx + n < 0 \rightarrow CS = \emptyset$ $x^2 + mx + n \leq 0 \rightarrow CS = \emptyset$
Tercer caso $\Delta < 0$	Debido al teorema del trinomio positivo, la cuadrática $P(x) = x^2 + mx + n$ es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.	

4. INECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO SUPERIOR

Tiene la forma general

$$P(x) \geq 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 2.

Ejemplos

- $x^3 + 3x^2 + 2 < 0$
- $x^4 + 2x - 3 \geq 0$
- $x^3 - 2x + 1 \leq 0$
- $x^5 + 2x^2 + x - 3 > 0$

APLICACIÓN 19

Resuelva $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$.

RESOLUCIÓN

Factorizamos la cúbica con el método de divisores binómicos.

	1	-4	1	6
$x=2$		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

Se obtiene $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$.

La cuadrática $x^2 - 2x - 3$ puede factorizarse con aspa simple.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \\ x \cancel{-3} \\ x \cancel{+1} \end{array}$$

Luego

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x-3)(x+1)$$

Reemplazamos en la inecuación y tendremos

$$(x-2)(x-3)(x+1) < 0$$

Hallamos las raíces de la cúbica.

$$\left. \begin{array}{l} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{array} \right\} \text{raíces de la cúbica}$$

Ubicamos estas raíces en la recta numérica, en la cual quedarán determinadas cuatro zonas como se muestra a continuación:



En cada zona, los factores $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x+1)$ tienen un signo definido y su producto también. En la siguiente tabla indicamos todas las posibilidades:

$x < -1$	$(x+1)(x-2)(x-3)$
$-1 < x < 2$	$(x+1)(x-2)(x-3)$
$2 < x < 3$	$(x+1)(x-2)(x-3)$
$x > 3$	$(x+1)(x-2)(x-3)$

Ubicamos los signos de este producto en la recta numérica (en cada zona).



Buscamos que el producto $(x+1)(x-2)(x-3)$ sea menor que cero (negativo), y esto ocurre cuando $x < -1 \vee 2 < x < 3$.

Estos valores de x son las soluciones de la inecuación $(x+1)(x-2)(x-3) < 0$.

$$\therefore CS = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$$

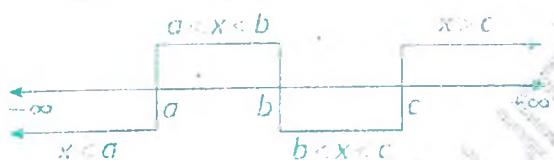
4.1. Método de puntos críticos

Para resolver la inecuación

$$\underbrace{(x-a)(x-b)(x-c)}_{P(x)} \geq 0$$

donde $a; b$ y c son las raíces reales y diferentes de $P(x)$, procedemos de la siguiente manera:

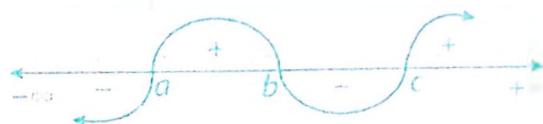
- Ubicamos estas raíces en la recta numérica, la cual quedará dividida en cuatro zonas. Supondremos que $a < b < c$.



- En cada zona analizamos los signos del producto $(x-a)(x-b)(x-c)$.

$x < a$	$\underbrace{(x-a)}_{(-)} \underbrace{(x-b)}_{(-)} \underbrace{(x-c)}_{(-)} = (-)$
$a < x < b$	$\underbrace{(x-a)}_{(+)} \underbrace{(x-b)}_{(-)} \underbrace{(x-c)}_{(-)} = (+)$
$b < x < c$	$\underbrace{(x-a)}_{(+)} \underbrace{(x-b)}_{(+)} \underbrace{(x-c)}_{(-)} = (-)$
$x > c$	$\underbrace{(x-a)}_{(+)} \underbrace{(x-b)}_{(+)} \underbrace{(x-c)}_{(+)} = (+)$

- En la recta numérica, ubicamos los signos del producto $(x-a)(x-b)(x-c)$, cada signo en su respectiva zona.



- Luego, dependiendo del tipo de desigualdad, se presentan las siguientes posibilidades:

$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$		
$P(x) < 0$	zona con signo (-) y abierto	$CS = (-\infty; a) \cup (b; c)$
$P(x) \leq 0$	zona con signo (-) y cerrado	$CS = (-\infty; a] \cup [b; c]$
$P(x) > 0$	zona con signo (+) y abierto	$CS = (a; b) \cup (c; +\infty)$
$P(x) \geq 0$	zona con signo (+) y cerrado	$CS = [a; b] \cup [c; +\infty)$

APLICACIÓN 20

Resuelva $(x-2)(x-5)(x+4) \geq 0$.

RESOLUCIÓN

Hallamos las raíces

$$\begin{aligned} x-2=0 &\rightarrow x=2 \\ x-5=0 &\rightarrow x=5 \\ x+4=0 &\rightarrow x=-4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{raíces}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Debido al tipo de desigualdad, elegimos las zonas con signo (+); además, los extremos -4; 2 y 5 serán cerrados.

$$\therefore CS = [-4; 2] \cup [5; +\infty)$$

APLICACIÓN 21

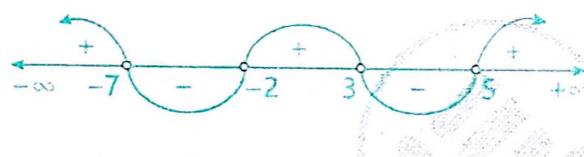
Resuelva $(x-3)(x+2)(x-5)(x+7) < 0$.

RESOLUCIÓN

Hallamos las raíces.

$$\left. \begin{array}{l} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \\ x+7=0 \rightarrow x=-7 \end{array} \right\} \text{raíces}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Debido al tipo de desigualdad, elegimos las zonas con signo (-); además, los extremos -7; -2; 3 y 5 serán abiertos.

$$\therefore CS = (-7; -2) \cup (3; 5)$$

4.2. Casos especiales

Para la inecuación polinomial de grado superior $P_{(x)} \geq 0$, tendremos los siguientes casos:

4.2.1. Cuando $P_{(x)}$ tiene un factor positivo

Supongamos que $P_{(x)}$ se factoriza como $P_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$, donde $f_{(x)}$ es un factor de $P_{(x)}$, que es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para resolver la inecuación $f_{(x)} \cdot g_{(x)} \leq 0$, usamos la siguiente propiedad:

$$f_{(x)} \cdot g_{(x)} \geq 0 \leftrightarrow g_{(x)} \geq 0$$

Se mantiene el sentido.

Esta propiedad indica que el factor positivo $f_{(x)}$ se cancelará.

APLICACIÓN 22

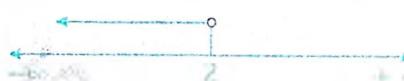
Resuelva $(x^2+5)(x-2) < 0$.

RESOLUCIÓN

Como x^2+5 es un factor positivo (es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$), entonces lo cancelamos de la siguiente manera:

$$\underbrace{(x^2+5)}_{(+)} (x-2) < 0$$

Nos queda $x-2 < 0$, de donde se obtiene $x < 2$.



Su conjunto solución es $(-\infty; 2)$.

APLICACIÓN 23

Resuelva $(x^2-2x+6)(x^2-3x+2) \geq 0$.

RESOLUCIÓN

El factor x^2-2x+6 es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, debido al teorema del trinomio positivo.

Entonces cancelamos este factor.

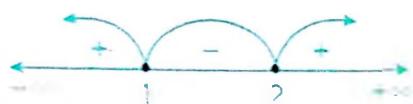
$$\underbrace{(x^2-2x+6)}_{(+)} (x^2-3x+2) \geq 0$$

Nos queda $x^2-3x+2 \geq 0$.

Lo factorizamos con aspa simple.

$$\begin{array}{c} x^2-3x+2 \geq 0 \\ x \cancel{x} -2 \\ x \cancel{x} -1 \\ (x-2)(x-1) \geq 0 \end{array}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



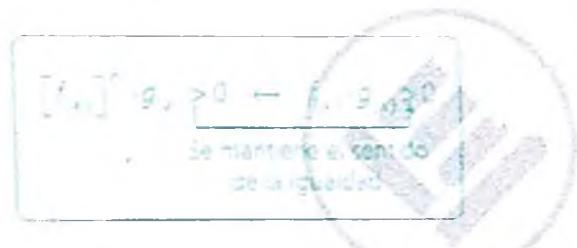
$$\therefore CS = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$$

4.2.2. Cuando $P_{(x)}$ tiene un factor con exponente impar

Supongamos que $P_{(x)}$ se factoriza como

$$P_{(x)} = [(f_{(x)})]^n \cdot g_{(x)}, \text{ donde } n \text{ es impar.}$$

Para resolver la inecuación $P_{(x)} > 0$, usamos la siguiente propiedad:



Esta propiedad indica que cancelaremos el exponente impar. Es válido también para las otras desigualdades ($<$, \leq y \geq).

APLICACIÓN 24

$$\text{Resuelva } (x-3)^5(x-2) < 0.$$

RESOLUCIÓN

El factor $(x-3)^5$ tiene exponente impar.

$$\underset{\text{ímpar}}{(x-3)^5} (x-2) < 0$$

Cancelamos dicho exponente y queda

$$(x-3)(x-2) < 0$$

Luego, usamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = (2; 3)$$

APLICACIÓN 25

$$\text{Resuelva } (x-2)^5(x-4)^7(x+2) \geq 0.$$

RESOLUCIÓN

Cancelamos los exponentes impares de los factores $(x-2)^5$ y $(x-4)^7$, y tenemos que

$$(x-2)(x-4)(x+2) \geq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = [-2; 2] \cup [4; +\infty)$$

4.2.3. Cuando $P_{(x)}$ tiene un factor con exponente par

Supongamos que $P_{(x)}$ se factoriza como

$P_{(x)} = [(f_{(x)})]^n \cdot g_{(x)}$, donde n es par. Se presentarán dos situaciones dependiendo de si la desigualdad en la inecuación es estricta o no.

a. Desigualdad estricta ($<$ o $>$)

Usamos la siguiente propiedad:



Esta propiedad indica que cancelaremos el factor con exponente par.

Para la desigualdad $>$ procedemos de modo similar.

APLICACIÓN 26

$$\text{Resuelva } (x-3)^4(x-8) < 0.$$

RESOLUCIÓN

Cancelamos $(x-3)^4$ porque tiene exponente par y queda $(x-8) < 0$, de donde se obtiene $x < 8$.

Además, ponemos la condición $x \neq 3$, ya que si $x=3$, la inecuación no se verifica.



$$\therefore CS = \langle -\infty; 8 \rangle - \{3\}$$

APLICACIÓN 27

$$\text{Resuelva } (x-6)^8(x-5) > 0.$$

RESOLUCIÓN

Tenemos que

par \curvearrowleft
 $(x-6)(x-5) > 0$

$$x-6 \neq 0 \wedge x-5 > 0 \\ x \neq 6 \wedge x > 5$$



$$\therefore CS = \langle 5; +\infty \rangle - \{6\}$$

a. Desigualdad no estricta (\leq o \geq)

Usamos la siguiente propiedad:

$$[f(x)]^n \cdot g(x) \leq 0 \leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) \leq 0$$

Para la desigualdad \geq procedemos de modo similar.

APLICACIÓN 28

$$\text{Resuelva } (x-3)^4(x-5) \geq 0.$$

RESOLUCIÓN

Tenemos que

par \curvearrowleft
 $(x-3)(x-5) \geq 0$

$$x-3=0 \vee x-5 \geq 0$$

$$x=3 \vee x \geq 5$$



$$\therefore CS = [5; +\infty) \cup \{3\}$$

APLICACIÓN 29

$$\text{Resuelva } (x-5)^6(x-3) \leq 0.$$

RESOLUCIÓN

Tenemos que

par \curvearrowleft
 $(x-5)(x-3) \leq 0$

$$x-5=0 \vee x-3 \leq 0 \\ x=5 \vee x \leq 3$$



$$\therefore CS = (-\infty; 3] \cup \{5\}$$

2. INECUACIÓN FRACCIONARIA

Una inecuación fraccionaria tiene la forma

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \geq 0$$

donde $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son polinomios, y $Q_{(x)}$ es no constante.

Método de resolución

- Ponemos la condición $Q_{(x)} \neq 0$.
- Factorizamos $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, y luego procedemos de modo similar a la resolución de la inecuación polinomial.

APLICACIÓN 30

Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} \leq 0.$$

RESOLUCIÓN

Ponemos la condición $x - 5 \neq 0$, de donde $x \neq 5$.

Luego factorizamos y obtenemos

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-5} \leq 0$$

Hallamos las raíces de los polinomios, tanto del numerador como del denominador.

$$\begin{aligned} x-1=0 &\rightarrow x=1 \\ x-2=0 &\rightarrow x=2 \\ x-5=0 &\rightarrow x=5 \end{aligned}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Luego tenemos en cuenta lo siguiente:

- Como $x \neq 5$, entonces en 5 será abierto.
- Como la desigualdad es no estricta (\leq), los extremos 1 y 2 serán cerrados.
- Como la desigualdad es \leq , elegimos las zonas con signo (-).
- ∴ $CS = (-\infty; 1] \cup [2; 5)$

APLICACIÓN 31

Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 9} \geq 0.$$

RESOLUCIÓN

Ponemos la condición $x^2 - 9 \neq 0$, de donde $x \neq -3$ y $x \neq 3$.

Factorizamos los polinomios del numerador y el denominador.

- $x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1)$

$$\begin{array}{c} x \\ \times \\ x \end{array} \begin{array}{c} -6 \\ -1 \end{array}$$

- $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

La inecuación queda como

$$\frac{(x-6)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \geq 0$$

Hallamos las raíces, tanto en el numerador como en el denominador.

$$\begin{aligned} x-6=0 &\rightarrow x=6 \\ x-1=0 &\rightarrow x=1 \\ x+3=0 &\rightarrow x=-3 \\ x-3=0 &\rightarrow x=3 \end{aligned}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Tengamos en cuenta lo siguiente:

- Como $x \neq -3$ y $x \neq 3$, los extremos -3 y 3 serán abiertos.
- Como la desigualdad \geq es no estricta, los extremos 1 y 6 serán cerrados.
- Como la desigualdad es \geq , elegimos las zonas con signo (+).
- ∴ $CS = (-\infty; -3) \cup [1; 3] \cup [6; +\infty)$

APLICACIÓN 32

Resuelva la inecuación

$$\frac{x+5}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+3}$$

RESOLUCIÓN

Ponemos la condición $x-2 \neq 0$ y $x+3 \neq 0$, de donde se obtiene $x \neq 2$ y $x \neq -3$.

Pasamos todo al primer miembro.

$$\frac{x+5}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+3} \rightarrow \frac{x+5}{x-2} - \frac{x+1}{x+3} \leq 0$$

pasó restando

Operamos

$$\frac{(x+5)(x+3) - (x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{9x+17}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

**Actividad recreativa****Rompecabezas de inecuaciones**

- Construya un tablero como el que se muestra a continuación:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

- Arme 12 fichas rectangulares de la siguiente manera:

En cada ficha habrá una inecuación que indicará uno de los números del tablero.

Ejemplo

Esta ficha indica el número 4.

Menor solución entera
de $2x+1 > 7$

- El juego consiste en resolver el problema que hay en cada ficha para luego ubicarla en la casilla correspondiente en el tablero.

El juego es individual y se termina cuando se completa el tablero.

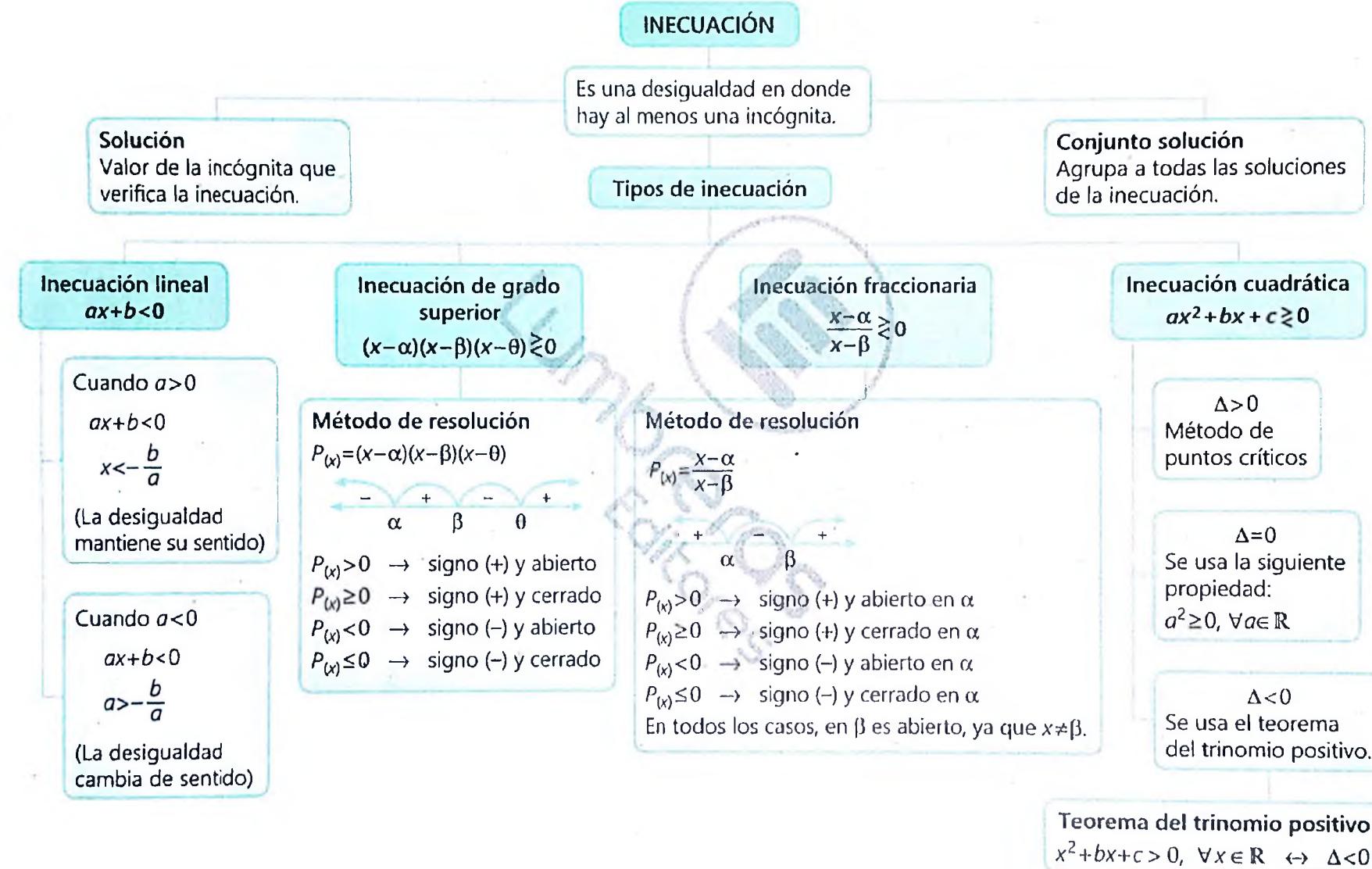
Hallamos las raíces.

$$\left. \begin{array}{l} 9x+17=0 \rightarrow x=-\frac{17}{9} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{array} \right\}$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \left[-\frac{17}{9}; 2 \right)$$



Problema N.º 1

Resuelva la inecuación

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x+3}{2} \leq \frac{x-1}{6}$$

- A) $(-\infty; -2]$ B) $[-2; +\infty)$ C) $\left(+\infty; \frac{1}{2}\right]$
 D) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ E) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x+3}{2} \leq \frac{x-1}{6}$$

$$\frac{2(x-1) + 3(x+3)}{6} \leq \frac{x-1}{6}$$

$$2(x-1) + 3(x+3) \leq x-1$$

$$2x-2+3x+9 \leq x-1$$

$$5x+7 \leq x-1$$

$$5x-x \leq -1-7$$

$$4x \leq -8$$

$$\rightarrow x \leq -2$$

Graficamos



$$\therefore CS = (-\infty; -2]$$

**Problema N.º 2**

Resuelva $2(x+3)-1 \geq 7(x+3)+2$.

- A) $\left[-\frac{14}{5}; +\infty\right)$ B) $\left(-\infty; \frac{14}{5}\right]$ C) $\left(-\infty; -\frac{14}{5}\right]$
 D) $\left[\frac{14}{5}; +\infty\right)$ E) $\left(-\infty; \frac{14}{5}\right)$

Resolución

Despejamos x en la inecuación.

$$2(x+3)-1 \geq 7(x+3)+2$$

$$2x+6-1 \geq 7x+21-2$$

$$2x+5 \geq 7x+19$$

$$2x-7x \geq 19-5$$

$$-5x \geq 14$$

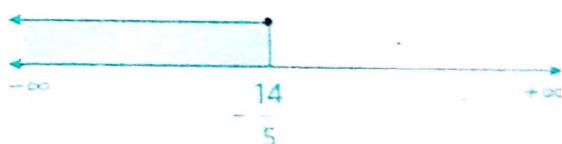
Para despejar x , debemos pasar a dividir el coeficiente -5 al otro miembro; pero, como es negativo, al hacerlo la desigualdad cambiará de sentido.

$$-5x \geq 14 \quad (-5 \text{ pasa a dividir})$$

La desigualdad cambia de sentido y se obtiene

$$x \leq -\frac{14}{5}$$

Su representación en la recta numérica es



$$\therefore CS = \left(-\infty; -\frac{14}{5}\right]$$



Problema N.º 3

Resuelva la inecuación

$$\frac{5-x}{2} < \frac{x-10}{3} \leq 4 - \frac{x}{3}$$

e indique la suma de sus soluciones enteras.

- A) 17 B) 38 C) 45
 D) 27 E) 52

Resolución

Tenemos que

$$\frac{5-x}{2} < \frac{x-10}{3} \leq 4 - \frac{x}{3}$$

$$\frac{5-x}{2} < \frac{x-10}{3} \quad \wedge \quad \frac{x-10}{3} \leq 4 - \frac{x}{3}$$

De (I)

$$\frac{5-x}{2} < \frac{x-10}{3}$$

Multiplicamos en aspa y tendremos

$$3(5-x) < 2(x-10)$$

$$15-3x < 2x-20$$

$$15+20 < 2x+3x$$

$$35 < 5x$$

$$x > 7 \rightarrow S_1 = \langle 7; +\infty \rangle$$

De (II)

$$\frac{x-10}{3} \leq 4 - \frac{x}{3}$$

$$\frac{x-10}{3} + \frac{x}{3} \leq 4$$

$$\frac{x-10+x}{3} \leq 4$$

$$2x-10 \leq 12$$

$$2x \leq 22$$

$$x \leq 11 \rightarrow S_2 = \langle -\infty; 11 \rangle$$

El conjunto solución se obtiene así:

$$CS = S_1 \cap S_2$$



$$CS = \langle 7; 11 \rangle$$

Las soluciones enteras son 8; 9; 10 y 11.

$$\therefore 8+9+10+11=38$$

Clave

Problema N.º 4

La siguiente inecuación:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}(x-1) + 1 \right) - 1 \leq -2$$

tiene como conjunto solución a $\langle -\infty; n \rangle$.

Indique el valor de n .

- A) -12 B) -10 C) -30
 D) -15 E) -28

Resolución

Tenemos que

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}(x-1) + 1 \right) - 1 \leq -2$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}(x-1) + 1 \right) \leq -2 + 1$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}(x-1) + 1 \right) \leq -1$$

$$\frac{1}{4}(x-1) + 1 \leq (-1)(3)$$

$$\frac{1}{4}(x-1) + 1 \leq -3$$

$$\frac{1}{4}(x-1) \leq -3 - 1$$

$$\frac{1}{4}(x-1) \leq -4$$

$$x-1 \leq (-4)(4)$$

$$x-1 \leq -16$$

$$x \leq -16 + 1$$

$$x \leq -15$$

Graficamos



$$CS = (-\infty; -15] = (-\infty; n]$$

Por lo tanto, n es -15 .

Problema N.º 5

Halle la mayor solución entera de la inecuación

$$\frac{x}{53} + \frac{x-6}{47} < 2.$$

- A) 53 B) 47 C) 52
D) 46 E) 42

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x}{53} + \frac{x-6}{47} < 2$$

$$\frac{x}{53} - 1 + \frac{x-6}{47} - 1 < 2 - 1 - 1$$

$$\frac{x-53}{53} + \frac{x-6-47}{47} < 0$$

$$\frac{x-53}{53} + \frac{x-53}{47} < 0$$

$$\left(\frac{1}{53} + \frac{1}{47} \right) \underbrace{(x-53)}_{\text{Debe ser } < 0} < 0$$

Queremos que sea < 0

Como $x-53$ debe ser negativo, entonces

$$x-53 < 0$$

$$\rightarrow x < 53$$

Por lo tanto, la mayor solución entera es 52.



Problema N.º 6

Resuelva

$$\frac{x+3}{2} + 1 < \frac{3x+1}{5}$$

- A) $(10; +\infty)$ B) $(21; +\infty)$ C) $(24; +\infty)$
 D) $(23; +\infty)$ E) $(15; +\infty)$

Resolución

Operamos

$$\frac{x+3}{2} + 1 < \frac{3x+1}{5}$$

$$\frac{x+3+2}{2} < \frac{3x+1}{5}$$

$$\frac{x+5}{2} < \frac{3x+1}{5}$$

Multiplicamos en aspa.

$$5(x+5) < 2(3x+1)$$

$$5x+25 < 6x+2$$

$$5x-6x < 2-25$$

$$-x < -23$$

Multiplicamos por -1 y por ello cambia el sentido de la desigualdad, y se obtiene

$$x > 23$$

Su representación en la recta numérica es así:

Los valores de x mayores que 23 son sus soluciones.

$$\therefore CS = (23; +\infty)$$

**Problema N.º 7**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} < 3-x \\ \frac{2x}{3} - 5 \leq -6 + \frac{8x}{3} \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} < 3-x \\ \frac{2x}{3} - 5 \leq -6 + \frac{8x}{3} \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$\text{A) } [1; 3] \quad \text{B) } \left[\frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right) \quad \text{C) } \left(\frac{1}{2}; 3 \right]$$

$$\text{D) } \left(\frac{1}{2}; 2 \right] \quad \text{E) } \left[\frac{1}{2}; \frac{8}{3} \right)$$

Resolución

Resolvamos en (I).

$$\frac{x-2}{2} < 3-x$$

$$x-2 < 2(3-x)$$

$$x-2 < 6-2x$$

$$x+2x < 6+2$$

$$3x < 8$$

$$x < \frac{8}{3} \rightarrow S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{3} \right)$$

Resolvamos en (II).

$$\frac{2x}{3} - 5 \leq -6 + \frac{8x}{3}$$

$$-5+6 \leq \frac{8x}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$1 \leq \frac{6x}{3}$$

$$1 \leq 2x$$

$$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow S_2 = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$$

El conjunto solución del sistema se calcula como

$$CS = S_1 \cap S_2$$



$$\therefore CS = \left[\frac{1}{2}; \frac{8}{3} \right]$$

Clave

Problema N.º 8

Considerando que $b < 0 < a$, resuelva la inecuación de incógnita x .

$$2b(x+2b) \leq a(a+x)$$

- A) $(-\infty; a+2b]$
- B) $(-\infty; a-2b]$
- C) $[a+2b; +\infty)$
- D) $[-a-2b; +\infty)$
- E) $[-a-b; +\infty)$

Resolución

Tenemos que

$$2b(x+2b) \leq a(a+x)$$

$$2bx+4b^2 \leq a^2+ax$$

$$2bx-ax \leq a^2-4b^2$$

$$(2b-a)x \leq (a+2b)(a-2b)$$

Para despejar x debemos enviar $2b-a$ a dividir al otro miembro. Para ello hay que saber cuál es su signo.

Del dato se tiene que $b < 0$ y $a > 0$, entonces $2b-a$ es negativo.



Cuando un número negativo pasa al otro lado a dividir, la desigualdad cambia de sentido.

Entonces

$$(2b-a)x \leq (a+2b)(a-2b)$$

pasa a dividir

cambio de sentido

$$x \geq \frac{(a+2b)(a-2b)}{2b-a}$$

$$x \geq -\frac{(a+2b)(2b-a)}{2b-a}$$

$$x \geq -a-2b$$

$$\therefore CS = [-a-2b; +\infty)$$

Clave

Problema N.º 9

Resuelva $x^2 - 2x - 24 \leq 0$.

- A) $[-4; 6]$
- B) $[-6; 4]$
- C) $[4; 6]$
- D) $(-\infty; -4]$
- E) $[-6; -4]$

Resolución

Factorizamos la cuadrática con aspa simple.

$$x^2 - 2x - 24 \leq 0$$

Se obtiene $(x-6)(x+4) < 0$.

Aplicamos el método de puntos críticos. Para ello hallamos sus raíces igualando cada factor a cero.

$$\begin{aligned}x - 6 &= 0 \rightarrow x = 6 \\x + 4 &= 0 \rightarrow x = -4\end{aligned}\quad \left.\begin{array}{l} \\ \text{raíces}\end{array}\right.$$

Ubicamos estas raíces en la recta.



Buscamos que la cuadrática sea menor que cero, entonces elegimos la zona con signo negativo.

$$\therefore CS = [-4; 6]$$

Problema N.º 10

Resuelva la inecuación

$$2x(x+1) + 15 > 3x^2$$

- A) $\langle -\infty; 5 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
- B) $\langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$
- C) $\langle -5; 3 \rangle$
- D) $\langle -3; 5 \rangle$
- E) $\langle -3; +\infty \rangle$

Resolución

Tenemos que

$$2x(x+1) + 15 > 3x^2$$

$$2x^2 + 2x + 15 > 3x^2$$

$$2x^2 - 3x^2 + 2x + 15 > 0$$

$$\rightarrow -x^2 + 2x + 15 > 0$$

Como el coeficiente de x^2 es negativo, debemos multiplicar por (-1) . Así tendremos

$$(-1)(-x^2 + 2x + 15) < (0)(-1)$$

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 15 &< 0 \\x &\cancel{-5} \\x &\cancel{+3}\end{aligned}$$

$$\rightarrow (x-5)(x+3) < 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = (-3; 5)$$

Clave

Problema N.º 11

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2 \geq 4 & (\text{I}) \\ x^2 + 5x < 0 & (\text{II}) \end{cases}$$

- A) $\langle 2; 5 \rangle$
- B) $\langle -5; 2 \rangle$
- C) $\langle -5; -2 \rangle$
- D) $\langle -\infty; -2 \rangle$
- E) $\langle -2; 5 \rangle$

Resolución

Resolvemos en (I).

$$x^2 \geq 4$$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x+2)(x-2) \geq 0$$

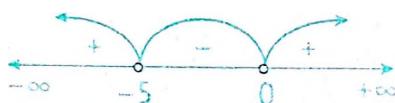


$$S_1 = \langle -\infty; -2 \rangle \cup [2; +\infty)$$

Resolvemos en (II).

$$x^2 + 5x < 0$$

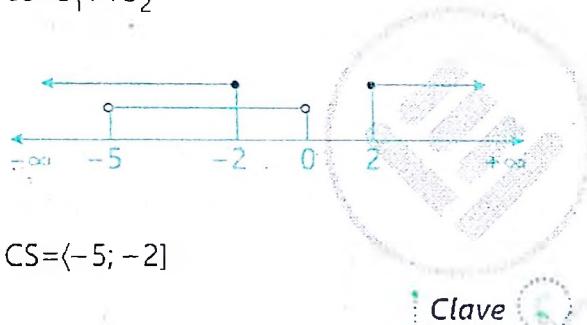
$$\rightarrow (x)(x+5) < 0$$



$$S_2 = \langle -5; 0 \rangle$$

El conjunto solución del sistema se calcula como

$$CS = S_1 \cap S_2$$



$$\therefore CS = \langle -2; 0 \rangle$$

Problema N.º 12

Si $\langle -\infty; a \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación $2x^2 - 6x + 3 > 0$, calcule $a^2 + b^2$.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 6
- E) 12

Resolución

Como $\langle -\infty; a \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$ es su conjunto solución, entonces a y b son las raíces de la cuadrática $2x^2 - 6x + 3$.

Como a y b son las raíces de la cuadrática, podemos aplicar las propiedades de Cardano.

Suma de raíces

$$a+b = -\frac{(-6)}{2} = 3$$

Producto de raíces

$$ab = \frac{3}{2}$$

Para calcular $a^2 + b^2$, hacemos lo siguiente:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

Luego reemplazamos $a+b=3$ y $ab=\frac{3}{2}$.

$$a^2 + b^2 = (3)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a^2 + b^2 = 9 - 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6$$

Clave

Problema N.º 13

Luego de resolver $x^2 \leq 2x + 2$, indique el número de soluciones enteras.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Resolución

Tenemos que

$$x^2 \leq 2x + 2$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

No puede factorizarse con aspa simple, así que calculamos su discriminante.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-2) = 12$$

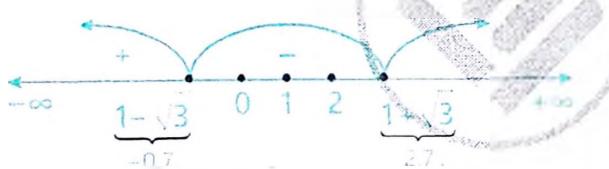
Como $\Delta > 0$, la inecuación se resuelve con el método de puntos críticos, pero para ello necesitamos las raíces de la cuadrática, las cuales podemos calcular con la fórmula general de la cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (raíces)}$$

$$x = \frac{(-2) \pm \sqrt{12}}{2(1)} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Ubicamos estos valores en la recta y aplicamos el método de puntos críticos.



$$CS = [1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$$

Las soluciones enteras son 0; 1; 2.

Por lo tanto, esta inecuación tiene tres soluciones enteras.



Problema N.º 14

El intervalo $[3; 5]$ es el conjunto solución de la inecuación $2x^2 - ax + b \leq 0$. Calcule ab .

- A) 160
- B) 240
- C) 480
- D) 320
- E) 340

Resolución

Como su conjunto solución es $[3; 5]$, entonces 3 y 5 son las raíces de la cuadrática $2x^2 - ax + b$.

Aplicamos las propiedades de Cardano.

- I. Suma de raíces:

$$3+5 = -\frac{(-a)}{2} \rightarrow a = 16$$

- II. Producto de raíces:

$$(3)(5) = \frac{b}{2} \rightarrow b = 30$$

$$\therefore ab = (16)(30) = 480$$

Clave

Problema N.º 15

El intervalo $\left(\frac{a}{2}; a\right)$ es el conjunto solución de

la inecuación $(\sqrt{3}-1)x^2 - 3x + \sqrt{3} + 1 < 0$.

Calcule $(a-1)^2$.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 9

Resolución

Como $\left(\frac{a}{2}; a\right)$ es su conjunto solución, entonces

$\frac{a}{2}$ y a son las raíces de la cuadrática

$$(\sqrt{3}-1)x^2 - 3x + \sqrt{3} + 1.$$

Usamos el teorema de Cardano para calcular la suma de raíces.

$$\frac{a}{2} + a = -\frac{(-3)}{\sqrt{3}-1}$$

Calculamos el valor de a .

$$\frac{a+2a}{2} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{3a}{2} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore (a-1)^2 = (\sqrt{3}+1-1)^2 = \sqrt{3}^2 = 3$$

Clave

Problema N.º 16

El conjunto solución de la inecuación $mx^2+12x+18 \leq 0$ es $\{\alpha\}$.

Calcule $\alpha+m$.

- A) -1 B) 1
D) -2 E) 0



Resolución

Para que el conjunto solución sea $\{\alpha\}$, la inecuación debe ser de la forma $(x-\alpha)^2 \leq 0$. Entonces la cuadrática $mx^2+12x+18$ debe ser un cuadrado perfecto.

La condición para que sea cuadrado perfecto es $\Delta=0$.

$$\Delta=(12)^2-4(m)(18)=0$$

$$144-72m=0$$

$$144=72m$$

$$m=\frac{144}{72}$$

$$\rightarrow m=2$$

Reemplazamos $m=2$ en la inecuación y luego la resolvemos de la siguiente manera:

$$\cancel{2}x^2 + \cancel{12}x + \cancel{18} \leq 0$$

6 9

$$\cancel{x^2 + 6x + 9} \leq 0$$

$$(x+3)^2 \leq 0$$

Esta inecuación se verifica solo si $x=-3$, de donde el conjunto solución es $\{-3\}$ y, por ende, $\alpha=-3$.

$$\therefore \alpha+m=-3+2=-1$$

Clave

Problema N.º 17

Resuelva $x^2-6x+10 \leq 0$.

- A) \mathbb{R} B) \mathbb{R}^+ C) \mathbb{R}^-
D) \mathbb{R}_0^+ E) \emptyset

Resolución

Expresamos la cuadrática convenientemente.

$$x^2-6x+10 \leq 0$$

$$\cancel{x^2-6x+9+1} \leq 0$$

$(x-3)^2+1$

$$\rightarrow (x-3)^2+1 \leq 0$$

Buscamos que $(x-3)^2+1$ sea menor que cero o igual que cero, pero ninguna de las dos opciones es posible, ya que, por la forma que tiene, $(x-3)^2+1$ siempre será de signo positivo.

Entonces esta inecuación no se verifica para ningún valor de $x \in \mathbb{R}$, es decir, no tiene solución.

$$\therefore CS=\emptyset$$

Clave

Problema N.º 18

Si $\{n\}$ es el conjunto solución de la inecuación $x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 2 \leq 0$, calcule $n\lambda$.

- A) 4 B) 2 C) 3
D) 6 E) 8

Resolución

Para que el conjunto solución sea $\{n\}$, la inecuación debe ser de la forma $(x-n)^2 \leq 0$. Entonces tendremos

$$x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 2 = \underbrace{(x-n)^2}_{\text{cuadrado perfecto}}$$

Es decir, la cuadrática es un cuadrado perfecto y eso ocurre cuando $\Delta=0$.

$$\Delta = (\lambda + 1)^2 - 4(1)(2\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 8\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$

Reemplazamos $\lambda = 3$ en la inecuación y la resolvemos.

$$x^2 - (3+1)x + 2(3) - 2 \leq 0$$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} \leq 0$$

$$(x-2)^2 \leq 0$$

Su conjunto solución es $\{2\}$, entonces $n=2$.

$$\therefore n\lambda = (2)(3) = 6$$

Clave

Problema N.º 19

El conjunto solución de la inecuación $mx^2 - (2m-3)x + m > 0$ es $\mathbb{R} - \{\alpha\}$. Calcule m .

- A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

Resolución

Para que el conjunto solución sea $\mathbb{R} - \{\alpha\}$, la inecuación debe ser de la forma $(x-\alpha)^2 > 0$.

Esto ocurre bajo las siguientes condiciones:

$$m > 0 \wedge \Delta = 0$$

Resolvemos $\Delta = 0$.

$$\Delta = (-(2m-3))^2 - 4(m)(m) = 0$$

$$4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 = 0$$

$$-12m + 9 = 0 \rightarrow 12m = 9$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}$$

Clave

Problema N.º 20

El conjunto solución de la inecuación $2x^2 + 3 > 6x + k$ es \mathbb{R} . Halle la variación de k .

- A) \mathbb{R}^- B) \mathbb{R} C) \mathbb{R}^+
D) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ E) $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Resolución

Tenemos que

$$2x^2 + 3 > 6x + k$$

$$2x^2 - 6x + (3 - k) > 0$$

Si su conjunto solución es \mathbb{R} , entonces $2x^2 - 6x + (3 - k)$ debe ser positivo (mayor que cero) para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que ocurre bajo la condición $\Delta < 0$, debido al teorema del trinomio positivo.

Resolvamos $\Delta < 0$.

$$(-6)^2 - 4(2)(3 - k) < 0$$

$$36 - 24 + 8k < 0$$

$$12 + 8k < 0$$

$$8k < -12$$

$$k < -\frac{12}{8} \rightarrow k < -\frac{3}{2}$$

$$\therefore k \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$$

Clave

Problema N.º 21

Si $2x^2 - 5x + 1 > \lambda; \forall x \in \mathbb{R}$, halle el máximo valor entero de λ .

- | | | |
|-------|-------|------|
| A) -3 | B) -2 | C) 1 |
| D) 0 | E) -1 | |

Resolución

Tenemos que

$$2x^2 - 5x + 1 > \lambda; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 5x + (1 - \lambda) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

Esto significa que la cuadrática debe ser de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que ocurre cuando $\Delta < 0$, como en el problema anterior.

Resolvamos $\Delta < 0$.

$$(-5)^2 - 4(2)(1 - \lambda) < 0$$

$$25 - 8 + 8\lambda < 0$$

$$17 + 8\lambda < 0$$

$$8\lambda < -17$$

$$\lambda < -\frac{17}{8}$$



Por lo tanto, el mayor valor entero de λ es -3.

Clave

Problema N.º 22

Resuelva $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2}x$.

- | | | |
|-------------------|-------------------------|----------------|
| A) \mathbb{R} | B) \mathbb{R}^- | C) \emptyset |
| D) \mathbb{R}^+ | E) $\mathbb{R} - \{0\}$ | |

Resolución

Tenemos que

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2}x$$

$$\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} < 0$$

Calculamos el discriminante.

$$\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{2})$$

$$\Delta = 8 - 4\sqrt{6} = -1,79\dots$$

Observe que Δ resultó ser negativo.

Entonces aplicamos el teorema del trinomio positivo que dice lo siguiente:

Cuando $\Delta < 0$, la cuadrática es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces tendremos

$$\sqrt{3x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}} < 0$$

Es (1) para
todo $x \in \mathbb{R}$

Como la cuadrática siempre es de signo positivo, es imposible que sea menor que cero; entonces la inecuación no tiene solución.

Por lo tanto, su conjunto solución es \emptyset .

Problema N.º 23

Si la desigualdad $x^2 < x + \frac{k}{4}$ no se verifica nunca, indique la variación de k .

- A) \mathbb{R}^- B) \mathbb{R} C) $(-\infty; 1]$
 D) $(-\infty; -1]$ E) $[-1; 1]$

Resolución

Si $x^2 < x + \frac{k}{4}$ no se verifica nunca, entonces

$x^2 \geq x + \frac{k}{4}$ se verifica siempre, es decir, se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces tendremos

$$x^2 - x - \frac{k}{4} \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

lo cual, por propiedad, se cumple bajo la condición $\Delta \leq 0$.

Resolvemos $\Delta \leq 0$.

$$(-1)^2 - 4(1)\left(-\frac{k}{4}\right) \leq 0$$

$$1 + k \leq 0$$

$$\rightarrow k \leq -1$$

$$\therefore k \in (-\infty; -1]$$

Clave

b

Problema N.º 24

Indique el cardinal del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x^2 + x < 6\}.$$

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

Resolución

En el conjunto A tenemos que

$$-3 \leq x^2 + x < 6$$

$$\underbrace{-3 \leq x^2 + x}_{\text{I}} \wedge \underbrace{x^2 + x < 6}_{\text{II}}$$

Resolvemos en (I).

$$-3 \leq x^2 + x$$

$$0 \leq x^2 + x + 3$$

$$x^2 + x + 3 \geq 0$$

Calculamos su discriminante.

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(3) = -11$$

Luego, la cuadrática $x^2 + x + 3$ siempre es de signo positivo debido a que $\Delta < 0$.

Entonces su conjunto solución es $S_1 = \mathbb{R}$.

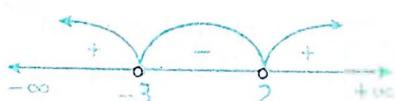
Resolvemos en (II).

$$x^2 + x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$\begin{array}{l} x \\ \times \\ x \\ \hline +3 \\ -2 \\ \hline \end{array}$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$



$$S_2 = \langle -3; 2 \rangle$$

Finalmente, intersecamos S_1 con S_2 .

$$S_1 \cap S_2 = \mathbb{R} \cap \langle -3; 2 \rangle = \langle -3; 2 \rangle$$

Luego, el conjunto A quedará así:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x \in \langle -3; 2 \rangle\}$$

$$\rightarrow A = \{-2; -1; 0; 1\}$$

Por lo tanto, el cardinal de A es 4 (número de elementos).

Clave

Problema N.º 25

Resuelva la inecuación

$$(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 9) < 0$$

e indique la suma de sus soluciones enteras.

A) 9

B) 4

C) 6

D) 1

E) 0

Resolución

La cuadrática $x^2 + 3x + 5$ siempre es de signo positivo, debido a que tiene discriminante negativo. Por propiedad, cuando se tiene un factor positivo, este se cancela de la siguiente manera:

$$\underbrace{(x^2 + 3x + 5)}_{\text{siempre positivo}}(x^2 - 9) < 0$$

Luego, nos queda $x^2 - 9 < 0$.

Factorizamos con diferencia de cuadrados.

$$(x+3)(x-3) < 0$$



$$\rightarrow CS = \langle -3; 3 \rangle$$

Las soluciones enteras son $-2; -1; 0; 1; 2$.

$$\therefore -2 + -1 + 0 + 1 + 2 = 0$$



Problema N.º 26

Resuelva la inecuación

$$x^3 + 3x^2 + 5 \leq 9x$$

A) $\langle -\infty; 1 \rangle$

B) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup [1; +\infty)$

C) $\langle -\infty; -1 \rangle$

D) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \{1\}$

E) $\langle -\infty; 1 \rangle - \{5\}$

Resolución

Tenemos que

$$x^3 + 3x^2 + 5 \leq 9x$$

$$\underline{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} \leq 0$$

Factorizamos $P(x)$ con el método de divisores binómicos.

$$\begin{array}{c} 1 & 3 & -9 & 5 \\ \hline x=1 & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}$$

Luego, tendremos

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 5)$$

$$x \nearrow +5$$

$$x \searrow -1$$

$$P(x) = (x-1)(x+5)(x-1)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+5)$$

La inecuación queda como

$$(x-1)^2(x+5) \leq 0$$

Luego

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} (x+5) \leq 0$$

$$x-1=0 \vee x+5 \leq 0$$

$$x=1 \vee x \leq -5$$



$$\therefore CS = (-\infty; -5] \cup \{1\}$$

Problema N.º 27

Resuelva la inecuación

$$(x-2)^5(x-3)^4(x-1)^7(x+2)^8 \leq 0$$

e indique la suma de soluciones enteras.

- A) 6 B) 4 C) -1
D) -2 E) 0

Resolución

Cancelamos los factores con exponente par, además, en esos factores tendremos

$$x-3=0 \rightarrow x=3$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

Estos valores $x=3$ y $x=-2$ verifican la inecuación, así que son soluciones.

En los factores con exponente impar cancelamos sus exponentes.

Luego, la inecuación queda como

$$\underbrace{(x-3)^4}_{>0} \underbrace{(x+2)^8}_{>0} (x-2)^5(x-1)^7 \leq 0$$

$$(x-2) \cdot (x-1) \leq 0$$

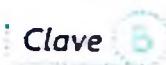
$$x=3 \vee x=-2 \wedge (x-2)(x-1) \leq 0$$



$$\rightarrow CS = [1; 2] \cup \{-2; 3\}$$

Las soluciones enteras son 1; 2; -2; 3.

$$\therefore 1+2-2+3=4$$



Problema N.º 28

Resuelva la inecuación

$$\frac{x-1}{x-5} \leq \frac{x-1}{x+3}$$

e indique la suma de sus soluciones enteras positivas.

- A) 10 B) 15 C) 3
D) 9 E) 6

Resolución

Tenemos que

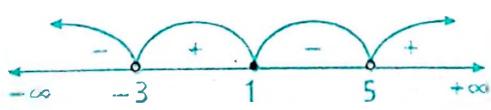
$$\frac{x-1}{x-5} - \frac{x-1}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+3) - (x-1)(x-5)}{(x-5)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+3-(x-5))}{(x-5)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(8)}{(x-5)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{x-1}{(x-5)(x+3)} \leq 0$$



$$\rightarrow CS = (-\infty; -3) \cup [1; 5)$$

Sus soluciones enteras positivas son 1; 2; 3; 4.

$$\therefore 1+2+3+4=10$$

Clave

Problema N.º 29

Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$$

e indique el número de soluciones enteras.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 3

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \leq 0$$

$$\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

Considerando que $x \neq 1$, cancelamos el factor $x-1$ y tendremos

$$\frac{x+2}{x+1} \leq 0$$

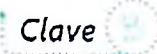
Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\rightarrow CS = [-2; -1)$$

La inecuación tiene una única solución entera que es -2 .

Por lo tanto, el número de soluciones enteras es 1 .

 Clave

Problema N.º 30

Resuelva la inecuación

$$x + \frac{1}{x-1} \leq 2.$$

- A) \mathbb{R}^- B) $(-\infty; 1)$ C) $(-\infty; -1)$
 D) $(1; +\infty)$ E) $(-1; +\infty)$

Resolución

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x-1} \leq 2$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x-1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{x^2 - x + 1 - 2x + 2}{x-1} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} \leq 0$$

La cuadrática $x^2 - 3x + 3$ siempre es de signo positivo, debido a que su discriminante es $\Delta < 0$. Para que la inecuación se verifique, se debe cumplir que $x-1$ sea negativo.

Entonces $x-1 < 0$, de donde $x < 1$.

$$\therefore CS = (-\infty; 1)$$

 Clave

Problema N.º 31

Resuelva la inecuación

$$\frac{(x^2+2)(x-3)}{x-6} \leq 0.$$

- A) $[3; 6]$ B) $(3; 6]$ C) $(3; 6)$
 D) $(3; +\infty)$ E) $[3; 6)$

Resolución

Ponemos la condición $x-6 \neq 0$, de donde se obtiene $x \neq 6$.

En el numerador, el factor x^2+2 siempre es positivo; lo cancelamos y tendremos

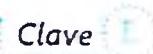
$$\frac{(x^2+2)(x-3)}{x-6} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x-6} \leq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = [3; 6)$$

 Clave

Problema N.º 32

Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x^2+x} \leq 0.$$

- A) $(-1; 0)$ B) $(0; 1]$ C) $(-1; 1)$
 D) $(1; +\infty)$ E) $(-\infty; 0)$

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x^2+x} \leq 0$$

$$\frac{(x)(x^2)}{(x)(x+1)} - \frac{1}{(x)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^3-1}{(x)(x+1)} \leq 0$$

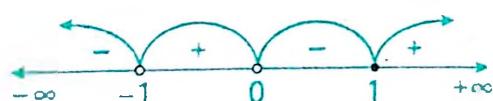
$$\rightarrow \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x)(x+1)} \leq 0$$

La cuadrática x^2+x+1 siempre es de signo positivo debido a su discriminante ($\Delta < 0$), así que la cancelamos.

$$\frac{(x+1)\cancel{(x^2+x+1)}}{(x)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x-1}{(x)(x+1)} \leq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Entonces $CS = (-\infty; -1) \cup (0; 1]$.

Por lo tanto, un intervalo solución es $(0; 1]$.

Problema N.º 33

Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2-8}{x-2} \leq 1.$$

Calcule el número de soluciones enteras positivas.

- A) 6 B) 3 C) 2
D) 1 E) 4

Resolución

Ponemos la condición $x-2 \neq 0$, entonces $x \neq 2$. Pasamos todo al primer miembro.

$$\frac{x^2-8}{x-2} - 1 \leq 0$$

Operamos

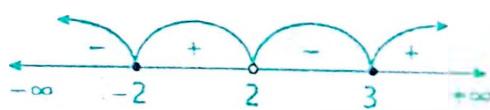
$$\frac{x^2-8-x+2}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-6}{x-2} \leq 0$$

Factorizamos el numerador con aspa simple.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x-2} \leq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



Entonces $CS = (-\infty; -2] \cup (2; 3]$.

La única solución entera positiva es 3.

Por lo tanto, el número de soluciones enteras positivas es 1.



PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Resuelva $5(x+2)+3(x-1)-2(x-1) \geq 3$.
- A) $[3; +\infty)$ B) $[0; +\infty)$ C) $[2; +\infty)$
 D) $[1; \infty)$ E) $[-1; +\infty)$
2. Halle el mayor valor entero que toma x en

$$\frac{x-4}{3} + \frac{6x-2}{9} < 1.$$
- A) 1 B) 3 C) 6
 D) 2 E) 4
3. Obtenga el mayor valor entero de x en
 $x(x+6) < 7+x(x+5)$.
- A) 6 B) 5
 D) 8
4. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x+2 < 7 \\ 2(x-1) > 8 \end{cases}$$
- A) $\langle 5; +\infty \rangle$ B) $\{6\}$ C) $\langle -\infty; 5 \rangle$
 D) $\{5\}$ E) \emptyset
5. Resuelva $x(x-6) < 7$.
- A) $\langle -1; 6 \rangle$ B) $\langle 6; 7 \rangle$ C) $\langle -1; 7 \rangle$
 D) $\langle 0; 6 \rangle$ E) $\langle 0; 7 \rangle$
6. Resuelva e indique el menor valor entero negativo de x .
 $x^2 < 16$
- A) -2 B) -1 C) 0
 D) -4 E) -3
7. Indique el número de soluciones enteras de la inecuación $(x-2)^2 < x-2$.
- A) 1 B) 3 C) 4
 D) 0 E) 2
8. Resuelva $(x-3)^2 \leq 0$.
- A) $\langle -\infty; 3 \rangle$ B) $\langle -\infty; 3 \rangle$ C) $\{3\}$
 D) $\langle 3; +\infty \rangle$ E) $[3; +\infty)$
9. Resuelva $x(x-4) < -4$.
- A) $\langle 0; 2 \rangle$ B) $\{2\}$ C) \emptyset
 D) $\langle -2; 2 \rangle$ E) $\langle -4; 4 \rangle$
10. Indique el conjunto solución de $(x-4)^2 \geq 0$.
- A) \emptyset B) $\{4\}$ C) $[4; +\infty)$
 D) $\{0; 4\}$ E) \mathbb{R}
11. Calcule el mayor valor entero del CS de

$$\frac{x-2}{x-8} < 0$$
- A) 7 B) 6 C) 2
 D) 3 E) 8
12. Indique el menor valor entero del conjunto solución de $\frac{x}{x-4} > 1$.
- A) 4 B) 1 C) 2
 D) 5 E) 3
13. Resuelva la inecuación

$$\frac{x+2}{x-2} \geq 10$$
- A) $\left(2; \frac{22}{9}\right]$ B) $[-2; 2]$ C) $\left[2; \frac{22}{9}\right]$
 D) $\langle 2; 10 \rangle$ E) $\langle -2; 22 \rangle$

14. Halle la suma de soluciones enteras positivas de $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \leq 0$.

- A) 15 B) 9 C) 14
D) 11 E) 10

15. Resuelva $(x-2)^2 \cdot (x-5) < 0$.

- A) $\langle 2; 5 \rangle$
B) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$
C) $\langle -8; 5 \rangle - \{2\}$
D) $(-\infty; 5) - \{2\}$
E) $\mathbb{R} - \{2\}$

16. Halle la suma de soluciones enteras negativas de $(x-6)^5 \cdot (x-4)^{11} \cdot (x+2) \geq 0$.

- A) -6 B) -3 C) -2
D) -5 E) -1

17. Indique la suma de soluciones enteras de $(x+3)^{17} \cdot (x-2)^9 \cdot (x+5) \cdot x < 0$.

- A) -1 B) -3 C) 6
D) 0 E) -6

18. Resuelva $(x^2 - x + 5)(x+2)(x-7) < 0$.

- A) $\langle -2; 7 \rangle$
B) $\langle -2; 6 \rangle$
C) $\langle -2; 5 \rangle$
D) $\langle -2; 7 \rangle$
E) $\langle -2; 5 \rangle$

19. Halle el máximo valor entero de x en

$$\frac{(x^2+x+3)(x-2)}{(x-3)(x+1)} \leq 0.$$

- A) -1 B) 3 C) 0
D) 2 E) 4

20. Halle el mínimo valor entero de x en

$$\frac{(x^2+x+2)(x+4)}{(x^2-x+7)} \geq 0.$$

- A) -2 B) -7 C) -4
D) -9 E) -6

21. El conjunto solución de $(x^2-9)(x-6) \geq 0$ es $[-a; a] \cup [b; +\infty)$. Halle a^2+b^2 .

- A) 34 B) 15 C) 45
D) 41 E) 39

22. Calcule la menor solución entera negativa de $(x^2-1)(x^2+6x+9)(x^2+5x+6) \leq 0$.

- A) -3 B) -2 C) -1
D) -5 E) -4

23. Halle la mayor solución entera positiva de $x^3+x^2-4x-4 \leq 0$.

- A) 1 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

24. Indique el número de soluciones enteras positivas de $(x+1)^3 < x+1$.

- A) 2 B) 0 C) 1
D) 3 E) 4

25. Resuelva $x+2 \leq 2x+4 \leq -x-2$.

- A) $(-\infty; -2]$ B) \emptyset C) $\{-2\}$
 D) $\{2\}$ E) $[-2; 2]$

26. Luego de resolver la inecuación, indique la suma de valores enteros de x .

$$\frac{3x}{2} < \frac{x}{2} + 7 \leq \frac{5x}{2} + 5$$

- A) 28 B) 21 C) 15
 D) 27 E) 20

27. Resuelva $x(x-5) < -3$

e indique el valor de $\frac{a+b}{2}$

si se sabe que su

$$CS = \left(\frac{a-\sqrt{b}}{2}; \frac{a+\sqrt{b}}{2} \right), \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z}.$$

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 8
 D) 4 E) 9

28. Halle la menor solución entera de

$$\frac{x+1}{x} > \frac{x-2}{x+3}$$

- A) -3 B) 1 C) -2
 D) -1 E) 2

29. Halle el menor valor natural de x que verifica la inecuación

$$\frac{(x+3)(x+1)(x-6)}{(x+5)(2-x)} \leq 0.$$

- A) 4 B) 2 C) 3
 D) 1 E) 6

30. Halle el menor valor entero positivo de x en

$$\frac{(x^3 - 13x + 12)(x-1)^2(x^2 + 25)}{(x+2)^3} \leq 0.$$

- A) 1 B) 2 C) 4
 D) 5 E) 3

31. Halle la suma de soluciones enteras de la

$$\frac{(x-5)(x^2 + 2)}{x-8} \leq 0.$$

- A) 15 B) 13 C) 19
 D) 18 E) 26

32. Halle la mayor solución entera negativa de

$$\frac{(2x+3)(x-4)^3}{x} < 0.$$

- A) -4 B) -3 C) -2
 D) -1 E) $-\frac{3}{2}$

33. Resuelva la inecuación $\frac{2x+1}{x-2} < 3$

e indique el complemento de su conjunto solución.

- A) $\left(\frac{1}{2}; 2 \right)$ B) $(2; 3)$ C) $(2; 7)$
 D) $(3; 7)$ E) $\left(\frac{1}{2}; 7 \right)$

34. Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x-2} \geq 2$$

e indique la menor solución entera.

- A) 2 B) 4 C) 1
 D) 0 E) 3

35. Resuelva la inecuación

$$1 < \frac{x}{x-2} < 2.$$

- A) $\langle 2; +\infty \rangle$ B) $\langle 3; +\infty \rangle$ C) $\langle 1; +\infty \rangle$
 D) $\langle 4; +\infty \rangle$ E) $\langle 0; +\infty \rangle$

36. Resuelva la inecuación

$$\frac{(x-5)^3(x+1)^7}{(x-2)^2} < 0$$

e indique la suma de soluciones enteras.

- A) 8 B) 12 C) 10
 D) 9 E) 14

37. Resuelva la inecuación

$$\frac{(x-6)^2(x-7)^4}{x-2} \leq 0$$

e indique el número de soluciones enteras positivas.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

38. Resuelva la inecuación

$$(x^2+3x+5)(x^2-4x+1) < 0$$

cuyo conjunto solución es $\langle m; n \rangle$ y calcule $m+n$.

- A) 3 B) -1 C) 1
 D) 4 E) -3

39. Resuelva la inecuación

$$\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{x-6} \geq 0$$

e indique un intervalo solución.

- A) $\langle -\infty; 4 \rangle$ B) $\langle -\infty; 2 \rangle$ C) $[2; +\infty)$
 D) $[6; +\infty)$ E) $\langle 6; +\infty \rangle$

40. Resuelva la inecuación

$$\frac{x-4}{x^2} < 1.$$

- A) $\langle 1; 4 \rangle$ B) $\langle 0; 4 \rangle$ C) $\langle 0; 1 \rangle$
 D) $\mathbb{R} - \{0\}$ E) \mathbb{R}

41. Resuelva la inecuación

$$\frac{x^4-5x^2-6}{(x-2)^2} \leq 0.$$

Luego calcule la suma de sus soluciones enteras.

- A) -2 B) 0 C) 1
 D) -3 E) 2

42. Resuelva la inecuación

$$\frac{(x-6)^5(x-5)^6}{x-1} < 0.$$

Luego calcule la suma de soluciones enteras positivas.

- A) 11 B) 12 C) 9
 D) 21 E) 15

Claves

1	E	6	E	11	A	16	B	21	C	26	B	31	D	36	A	41	A
2	D	7	D	12	D	17	B	22	A	27	E	32	C	37	C	42	C
3	A	8	C	13	A	18	A	23	D	28	C	33	C	38	D		
4	E	9	C	14	C	19	D	24	B	29	D	34	E	39	E		
5	C	10	E	15	D	20	C	25	C	30	A	35	B	40	D		

CAPÍTULO 10



VALOR ABSOLUTO

En la ingeniería civil es necesario realizar trabajos topográficos antes, durante y después de la construcción de obras como carreteras, edificios, puentes, canales, etc. A partir de estos trabajos se elaboran mapas o planos a escala que representan las particularidades del terreno donde se va a realizar la obra. Mediante el uso de instrumentos topográficos se toman diversas medidas sobre ángulos y distancias; estas últimas se miden al seguir las líneas rectas. Tales rectas se trazan al unir dos puntos o a partir de un punto fijo, con una dirección dada, y se marcan sobre el terreno con piquetes, pilares o jalones. Para representar la distancia horizontal o vertical de un punto a otro en un plano cartesiano, usamos el valor absoluto.

Aprendizajes esperados

- Entender el concepto de valor absoluto de un número real.
- Calcular el valor absoluto de una expresión algebraica que depende de una variable.
- Conocer las propiedades básicas del valor absoluto.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

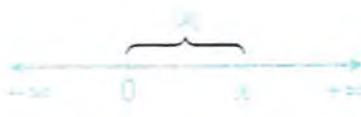
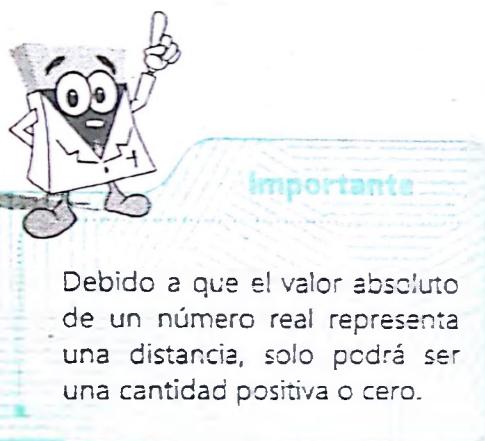
¿Por qué es necesario este conocimiento?

El valor absoluto sirve para representar todo tipo de distancias entre un objeto y otro. Podemos verlo cuando simbolizamos figuras en un plano cartesiano y queremos representar la distancia de un punto a otro, y luego resolver problemas geométricos. También podemos usarlo para caracterizar cantidades no negativas, las cuales son muy comunes en problemas de inecuaciones o funciones para representar. Por ejemplo, la raíz cuadrada de un número real que por definición es una actividad no negativa.

Valor absoluto

1. NOCIÓN GEOMÉTRICA

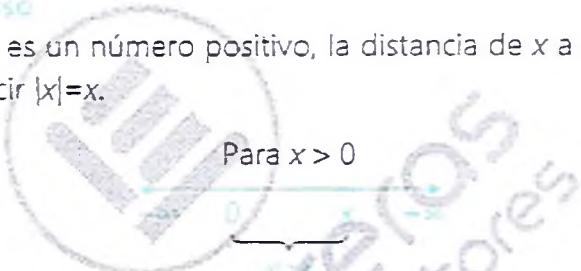
Desde el punto de vista geométrico el valor absoluto de un número real x , denotado como $|x|$ es la distancia de x a cero en la recta numérica, como se muestra en el siguiente gráfico:



El valor absoluto de x , según el tipo de número real que representa, tiene los siguientes casos:

Primer caso

Cuando x es un número positivo, la distancia de x a 0 es igual a x , es decir $|x|=x$.



Ejemplos

- La distancia de 1 a 0 es igual a 1, entonces $|1|=1$.



- La distancia de 5 a 0 es igual a 5, entonces $|5|=5$.



Segundo caso

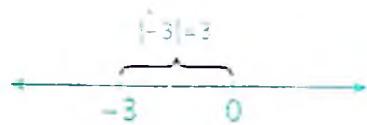
Cuando x es un número negativo, la distancia de x a 0 es igual al valor $-x$, es decir, $|x|=-x$.

Para $x < 0$

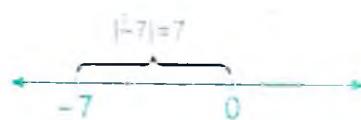


Ejemplos

- La distancia de -3 a 0 es igual a 3 , entonces $|-3|=3$.



- La distancia de -7 a 0 es igual a 7 , entonces $|-7|=7$.

**2. DEFINICIÓN**

El valor absoluto de un número real x se define como

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Si x es positivo, entonces $|x|=x$.

Ejemplos

- $|2|=2$
- $|2016|=2016$
- $\left|\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$
- $|\sqrt{3}+1|=\sqrt{3}+1$
- $|\pi+2|=\pi+2$
- $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$
- $\left|\frac{\pi+3}{2}\right|=\frac{\pi+3}{2}$

Si x es negativo, entonces $|x|=-x$.

Ejemplos

- $|-3|=-(-3)=+3$
- $|-5|=-(-5)=+5$
- $\left|-\frac{4}{3}\right|=-\left(-\frac{4}{3}\right)=+\frac{4}{3}$
- $|-{\sqrt{2}}|=-(-{\sqrt{2}})=+{\sqrt{2}}$

Observación

Si x es igual a cero, entonces $|0|=0$.

Importante

Para calcular el valor absoluto de un número real se debe conocer si dicho número es positivo, cero o negativo.

**Cuidado!**

Un error muy común es pensar que $-x$ es negativo porque tiene un signo ($-$) adelante.

Tenga en cuenta que x es una variable y el signo de $-x$ depende del valor de x .

Por ejemplo, cuando x es 3 , $-x$ es -3 (valor negativo).

Pero si x es -5 , entonces $-x$ será $-(-5)=+5$ (valor positivo).



2.1. Valor absoluto de una expresión que depende de una variable

Para calcular $|f(x)|$, donde $f(x)$ es una expresión matemática que depende de x , debemos tomar en cuenta los valores que tome la variable x .

Por ese motivo, hay que determinar los valores de x , para los cuales la expresión $f(x)$ resulta positiva, cero o negativa.

Si $f(x)$ resulta positivo, entonces $|f(x)| = f(x)$.

Si $f(x)$ resulta negativo, entonces $|f(x)| = -f(x)$.

Si $f(x) = 0$, entonces $|f(x)| = |0| = 0$.

APLICACIÓN 1

Calcule $|x-5|$ si $x > 5$.

RESOLUCIÓN

Debemos determinar el signo de $x-5$.

Tenemos que $x > 5$, entonces

$$x > 5$$

$$x-5 > 0$$

Como $x-5 > 0$, entonces $x-5$ es positivo.

$$\therefore \underline{|x-5|} = x-5$$

APLICACIÓN 2

Calcule $|x-6|$ si $x < 6$.

RESOLUCIÓN

Debemos determinar el signo de $x-6$.

Tenemos que $x < 6$, entonces

$$x < 6$$

$$x-6 < 0$$

Como $x-6 < 0$, entonces $x-6$ es negativo.

$$\underline{|x-6|} = -(x-6)$$

$$|x-6| = -x+6$$

$$\therefore \underline{|x-6|} = 6-x$$

APLICACIÓN 3

Calcule $|2x-1|$ si $x > 3$.

RESOLUCIÓN

Debemos determinar el signo de $2x-1$.

Tenemos que $x > 3$, entonces

$$\begin{aligned} x &> 3 \\ 2x &> 6 \\ 2x-1 &> 5 \end{aligned}$$

Como $2x-1 > 5$, entonces $2x-1$ es positivo.

$$\therefore |2x-1| = 2x-1$$

APLICACIÓN 4

Calcule $|3x-2|$ si $x \in (-2; -1)$.

RESOLUCIÓN

Debemos determinar el signo de $3x-2$.

Tenemos que $x \in (-2; -1)$, entonces

$$\begin{aligned} -2 &< x < -1 \\ -6 &< 3x < -3 \\ -8 &< 3x-2 < -5 \end{aligned}$$

Como $3x-2$ está entre -8 y -5 , entonces $3x-2$ es negativo.

$$|3x-2| = -(3x-2)$$

$$|3x-2| = -3x+2$$

$$\therefore |3x-2| = 2-3x$$

APLICACIÓN 5

Calcule $E=|x-5|+|x-8|$ si $x \in (5; 8)$.

RESOLUCIÓN

Tenemos que $x \in (5; 8)$. Calculamos $|x-5|$.

$$\begin{aligned} 5 &< x < 8 \\ 0 &< x-5 < 3 \end{aligned}$$

Como $x-5 \in (0; 3)$, entonces $x-5$ es positivo.

$$|x-5| = \underline{x-5}$$

Calculamos $|x-8|$.

$$5 < x < 8$$

$$-3 < x-8 < 0$$

Como $x-8 \in (-3; 0)$, entonces $x-8$ es negativo.

$$|x-8| = \underline{-(x-8)}$$

Reemplazamos en E .

$$E = |x-5| + |x-8|$$

$$E = x-5 - (x-8)$$

$$E = x-5-x+8 = 3$$

$$\therefore E = 3$$

APLICACIÓN 6

Calcule la variación de $E=|x-1|+|x-5|$; $x > 8$.

RESOLUCIÓN

Calculamos $|x-1|$.

$$x > 8$$

$$x-1 > 7 \rightarrow |x-1| = \underline{x-1}$$

Calculamos $|x-5|$.

$$x > 8$$

$$x-5 > 3 \rightarrow |x-5| = \underline{x-5}$$

Reemplazamos en E .

$$E = x-1 + x-5 \rightarrow E = 2x-6$$

Hallamos la variación de E .

$$x > 8$$

$$2x > 16$$

$$2x-6 > 10$$

$$\therefore E \in (10; +\infty)$$

APLICACIÓN 7

Determine $|x-3|$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

Tenemos que $x \in \mathbb{R}$, esto significa que x puede tomar cualquier valor real. Entonces tendremos las siguientes posibilidades:

Si $x > 3$, entonces $x-3$ es positivo.

$$\underbrace{|x-3|}_{=} = x-3$$

Si $x=3$, entonces $x-3$ es igual a cero.

$$\underbrace{|x-3|}_{=} = |0| = 0$$

Si $x < 3$, entonces $x-3$ es negativo.

$$\underbrace{|x-3|}_{=} = -(x-3).$$

Entonces

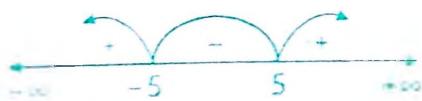
$$\therefore \underbrace{|x-3|}_{=} = \begin{cases} x-3 & ; x > 3 \\ 0 & ; x = 3 \\ -(x-3) & ; x < 3 \end{cases}$$

APLICACIÓN 8

Determine $|x^2 - 25|$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

El valor x toma cualquier valor real y además $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$, entonces tendremos las siguientes posibilidades:



Si $x < -5 \vee x > 5$, entonces $x^2 - 25$ es positivo.

$$\underbrace{|x^2 - 25|}_{=} = x^2 - 25$$

Si $x \in (-5; 5)$, entonces $x^2 - 25$ es negativo.

$$\underbrace{|x^2 - 25|}_{=} = -(x^2 - 25)$$

Si $x=5 \vee x=-5$, entonces $x^2 - 25 = 0$.

$$\underbrace{|x^2 - 25|}_{=} = |0| = 0$$

$$\therefore \underbrace{|x^2 - 25|}_{=} = \begin{cases} x^2 - 25 & ; x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty) \\ 0 & ; x = 5 \vee x = -5 \\ -(x^2 - 25) & ; x \in (-5; 5) \end{cases}$$

APLICACIÓN 9

Calcule $|x^2 + 3|$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces x^2 solo es positivo o igual a cero. Es decir, $x^2 \geq 0$.

Luego

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ x^2 + 3 &\geq 3 \end{aligned}$$

Observamos que $x^2 + 3 \geq 3$ es positivo.

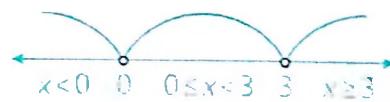
$$\therefore \underbrace{|x^2 + 3|}_{=} = x^2 + 3$$

APLICACIÓN 10

Determine $E = |x| + |x-3|$ si $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN

Como x toma cualquier valor real, entonces tendremos las siguientes posibilidades:



Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Como $x-3 < -3$, entonces $|x-3| = -3-x$.

Reemplazamos en E .

$$E = -x + 3 - x$$

$$E = 3 - 2x$$

Si $0 \leq x \leq 3$, entonces $|x|=x$.

Como $x-3 < 0$, entonces $|x-3| = 3-x$.

Reemplazamos en E .

$$E=x+3-x \rightarrow E=3$$

Si $x \geq 3$, entonces $|x|=x$.

Como $x-3 \geq 0$, entonces $|x-3|=x-3$.

Reemplazamos en E .

$$E=x+x-3 \rightarrow E=2x-3$$

$$\therefore E = \begin{cases} 3-2x; & x < 0 \\ 3; & 0 \leq x < 3 \\ 2x-3; & x \geq 3 \end{cases}$$

Propiedades

a. $|x| \geq 0; x \in \mathbb{R}$

El valor absoluto de cualquier número real solo puede ser cero o positivo y en ningún caso negativo.

APLICACIÓN 11

Halle los valores de x y y que verifiquen la ecuación $|x-2|+|y-5|=0$.

RESOLUCIÓN

Tengamos en cuenta que un valor absoluto solo puede ser cero o positivo. Entonces se presentarán las siguientes posibilidades:

$$\underbrace{|x-2|}_{(+)} + \underbrace{|y-5|}_{(+)} = 0$$

(+) + (+) ✗
 (+) + 0 ✗
 0 + (+) ✗
 0 + 0 ✓

Observamos que la igualdad se cumple cuando

$$|x-2|=0 \wedge |y-5|=0$$

$$\therefore x=2 \wedge y=5$$

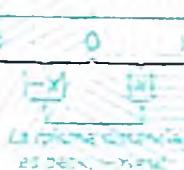
Reto al saber



1. ¿Qué valor de x verifica la ecuación $|x|=-27$?
2. ¿Qué valor de x verifica la ecuación $|x|=57$?
3. ¿Qué valor de x verifica la inecuación $|x|+(x-1)<0$?
4. ¿Qué valor de x verifica la ecuación $|x+2|+|x-2|=0$?

**No olvide**

Tengamos en cuenta que $|x|$ es la distancia de x a 0 y que $|-x|$ es la distancia de $-x$ a 0, y dichas distancias son iguales.

**Ejemplo****Importante**

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se cumple
 $|x-a|=|a-x|$

Ejemplos

- $|x-2|=|2-x|$
- $|x-6|=|6-x|$

b.

$$|x|=|-x|; x \in \mathbb{R}$$

Para cualquier x real, los valores absolutos de x y de $-x$ son iguales.

Ejemplos

- $|5|=|-5|$
- $\left|\frac{3}{4}\right|=\left|-\frac{3}{4}\right|$
- $|3x-1|=|-(3x-1)|=|-3x+1|$
- $|x-2|=|-x+2|$

c.

$$|xy|=|x||y|; x, y \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

- $|5x+10|=|5(x+10)|$
 $|5x+10|=|5|\cdot|x+10|$
 $\therefore |5x+10|=5|x+10|$
- $|-2x+6|=|-2\cdot(x-3)|$
 $|-2x+6|=|-2|\cdot|x-3|$
 $\therefore |-2x+6|=2\cdot|x-3|$

d.

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}; y \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

- $\left|\frac{1}{x+3}\right|=\frac{|1|}{|x+3|}=\frac{1}{|x+3|}$
- $\left|\frac{x-2}{x+5}\right|=\frac{|x-2|}{|x+5|}; x \neq -5$

e.

$$|x|^2=x^2; x \in \mathbb{R}$$

Si elevamos al cuadrado un número real y si luego a dicho número le tomamos el valor absoluto y luego lo elevamos al cuadrado, entonces ambos resultados serán iguales.

Ejemplos

- $|-3|^2=(3)^2=9$
- $|x+2|^2=(x+2)^2$
- $|51|^2=(51)^2$
- $|x-1|^2=(x-1)^2$

APLICACIÓN 12

Calcule x de modo que $|x+3|=|x+7|$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|x+3|=|x+7|$$

Elevamos al cuadrado.

$$|x+3|^2=|x+7|^2$$

Aplicamos la propiedad “e”.

$$(x+3)^2=(x+7)^2$$

Operamos

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 14x + 49$$

$$9 - 49 = 14x - 6x$$

$$-40 = 8x$$

$$x = -\frac{40}{8}$$

$$\therefore x = -5$$

f. $\sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$

Cuando calculamos $\sqrt{x^2}$ el resultado no es x , sino $|x|$.

Ejemplos

- $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$

- $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$

- $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$

- $\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3|$

APLICACIÓN 13

Resuelva la ecuación $x^2=25$.

RESOLUCIÓN

Extraemos la raíz cuadrada.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x|=5$$

Esta igualdad se cumple si $x=5 \vee x=-5$.

$$\therefore CS=\{5; -5\}$$

Cuidado!

Cuando se tenga el valor absoluto de una suma, será incorrecto tomar el valor absoluto por separado:

Ejemplos

- $|x+y|=|x|+|y|$
- $|x-2|=|x|+|-2|$
- $|x-5|=|x|-|5|$
- $|x+6|=|x|+|6|$
- $|x+4|=|x|+|4|$

3. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Propiedades

a. $|a|=b \leftrightarrow (b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b))$

Cuando $|a|$ es igual a un número positivo b , la variable a tendrá en b y en $-b$ a sus valores.

Ejemplos

- $|x|=3 \leftrightarrow x=3 \vee x=-3$
- $|x|=5 \leftrightarrow x=5 \vee x=-5$
- $|x|=\pi \leftrightarrow x=\pi \vee x=-\pi$
- $|x|=\sqrt{2} \leftrightarrow x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

APLICACIÓN 14

Halle los valores de x que verifiquen la ecuación $|x-2|=7$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|x-2|=7$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$x-2=7 \vee x-2=-7$$

$$x=9 \vee x=-5$$

Por lo tanto, los valores de x son 9 y -5.

APLICACIÓN 15

Resuelva la ecuación $x^2=25$.

RESOLUCIÓN

Extraemos la raíz cuadrada.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x|=5$$

Esta igualdad se cumple si $x=5 \vee x=-5$.

$$\therefore CS=(5;-5)$$

APLICACIÓN 16

Resuelva la ecuación $|3x - 1| = 6$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|3x - 1| = 6$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$3x - 1 = 6 \quad \vee \quad 3x - 1 = -6$$

$$3x = 7 \quad \vee \quad 3x = -5$$

$$x = \frac{7}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{7}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$$

APLICACIÓN 17

Resuelva la ecuación $|x - 2| + |2 - x| + |3x - 6| = 20$.

RESOLUCIÓN

Tengamos en cuenta que

$$|2 - x| = |x - 2|$$

$$|3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$$

Reemplazamos en la ecuación.

$$|x - 2| + \underbrace{|2 - x|}_{|x - 2|} + \underbrace{|3x - 6|}_{3|x - 2|} = 20$$

$$1|x - 2| + 1|x - 2| + 3|x - 2| = 20$$

$$(1+1+3)|x - 2| = 20$$

$$5|x - 2| = 20$$

$$|x - 2| = 4$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$x - 2 = 4 \quad \vee \quad x - 2 = -4$$

$$x = 6 \quad \vee \quad x = -2$$

$$\therefore CS = \{6; -2\}$$

Cuidado!

Cuando se tenga que calcular

$$\sqrt{(x-2)^2}$$

el resultado es $|x-2|$ y no $x-2$



APLICACIÓN 18

Resuelva la ecuación $x^2 - 5|x| - 14 = 0$.

RESOLUCIÓN

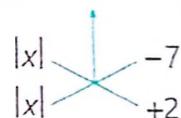
Tenemos que $x^2 = |x|^2$.

Reemplazamos en la ecuación.

$$|x|^2 - 5|x| - 14 = 0$$

Aplicamos el aspa simple.

$$|x|^2 - 5|x| - 14 = 0$$



Tenemos

$$(|x|-7)(|x|+2)=0$$

Luego

$$|x|-7=0 \quad \vee \quad |x|+2=0$$

$$|x|=7 \quad \vee \quad |x|=-2$$

De la ecuación $|x|=7$, obtenemos

$$x=7 \vee x=-7$$

En la ecuación $|x|=-2$ no conseguimos ningún valor de x , ya que es imposible que $|x|$ sea igual a un número negativo.

$$\therefore CS=\{7; -7\}$$

APLICACIÓN 19

Resuelva la ecuación $(x-5)^2=16$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$(x-5)^2=16$$

Extraemos la raíz cuadrada.

$$\sqrt{(x-5)^2}=\sqrt{16}$$

Tengamos en cuenta que

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

Entonces

$$\sqrt{(x-5)^2}=\sqrt{16}$$

$$|x-5|=4$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$x-5=4 \quad \vee \quad x-5=-4$$

$$x=9 \quad \vee \quad x=1$$

$$\therefore CS=\{9; 1\}$$

b. $|a|=|b| \rightarrow (a=b \quad \vee \quad a=-b)$

APLICACIÓN 20

Resuelva la ecuación $|2x+3|=|x+5|$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|2x+3|=|x+5|$$

Aplicamos la propiedad "b".

$$2x+3=x+5 \quad \vee \quad 2x+3=-(x+5)$$

$$x=2 \quad \vee \quad 3x=-8$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=-\frac{8}{3}$$

$$\therefore CS=\left\{2; -\frac{8}{3}\right\}$$

APLICACIÓN 21

Resuelva la ecuación $|x^2+13x+19|=|x^2-2x-4|$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|x^2+13x+19|=|x^2-2x-4|$$

Aplicamos la propiedad "b" y tendremos dos casos.

Caso 1

$$x^2 + 13x + 19 = x^2 - 2x - 4$$

$$13x + 19 = -2x - 4$$

$$15x = -23 \rightarrow x = -\frac{23}{15}$$

Caso 2

$$x^2 + 13x + 19 = -(x^2 - 2x - 4)$$

$$x^2 + 13x + 19 + (x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$2x^2 + 11x + 15 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ \times \quad 5 \\ \hline x \quad 3 \end{array}$$

Luego

$$(2x+5)(x+3)=0$$

$$2x+5=0 \vee x+3=0$$

$$x = -\frac{5}{2} \vee x = -3$$

$$\therefore CS = \left\{ -\frac{23}{15}; -\frac{5}{2}; -3 \right\}$$

4. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Propiedades

a. $|a| < b \leftrightarrow -b < a < b$

Esta propiedad también es válida si en lugar de la desigualdad $<$ está la desigualdad \leq .

Ejemplos

- $|x| < 3 \leftrightarrow -3 < x < 3$
- $|x| < 5 \leftrightarrow -5 < x < 5$
- $|x| \leq 6 \leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$
- $|x| \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

APLICACIÓN 22

Resuelva la inecuación $|2x - 5| < 7$.

RESOLUCIÓN

Tenemos que $|2x - 5| < 7$.

Aplicamos la propiedad "a".

$$-7 < 2x - 5 < 7$$

$$-2 < 2x < 12$$

$$-1 < x < 6$$

$$\therefore CS = (-1; 6)$$

APLICACIÓN 23

Resuelva la inecuación $|2x + 5| < x + 13$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|2x + 5| < x + 13$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$-(x + 13) < 2x + 5 < x + 13$$

Luego

$$-(x + 13) < 2x + 5 \wedge 2x + 5 < x + 13$$

$$-x - 13 < 2x + 5 \quad x < -2$$

$$-3x < 28$$

$$x > -\frac{28}{3}$$

Intersecamos



$$\therefore CS = \left(-\frac{28}{3}; -2 \right)$$

APLICACIÓN 24

Resuelva la inecuación $|4x-1| \leq 6$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|4x-1| \leq 6$$

Aplicamos la propiedad "a".

$$\begin{aligned} -6 &\leq 4x-1 \leq 6 \\ -5 &\leq 4x \leq 7 \\ -\frac{5}{4} &\leq x \leq \frac{7}{4} \\ \therefore CS = & \left[-\frac{5}{4}, \frac{7}{4} \right] \end{aligned}$$

APLICACIÓN 25

Resuelva la inecuación $|x-3| \leq -2x+5$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|x-3| \leq -2x+5$$

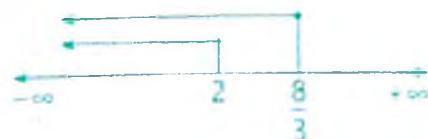
Aplicamos la propiedad "a".

$$-(2x+5) \leq x-3 \leq -2x+5$$

Luego

$$\begin{aligned} -(2x+5) &\leq x-3 \wedge x-3 \leq -2x+5 \\ 2x-5 &\leq x-3 \quad 3x \leq 8 \\ x &\leq 2 \quad x \leq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Intersecamos



$$\therefore CS = (-\infty; 2]$$

b. $|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$

Esta propiedad también es válida si en lugar de la desigualdad $>$ está la desigualdad \geq .

Ejemplos

- $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3$
- $|x| > 8 \Leftrightarrow x > 8 \vee x < -8$
- $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$
- $|x| \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 6 \vee x \leq -6$

APLICACIÓN 26

Resuelva la inecuación $|3x-7| > 8$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$3x-7 > 8$$

Aplicamos la propiedad "b".

$$3x-7 > 8 \vee 3x-7 < -8$$

$$\begin{aligned} 3x &> 15 & 3x &< -1 \\ x &> 5 & x &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Unimos los intervalos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; -\frac{1}{3} \right) \cup \left(5; +\infty \right)$$

APLICACIÓN 27

Resuelva la inecuación $|5x-2| > 2x+9$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|5x-2| > 2x+9$$

Aplicamos la propiedad "b".

$$5x-2 > 2x+9 \quad \vee \quad 5x-2 < -(2x+9)$$

$$3x > 11$$

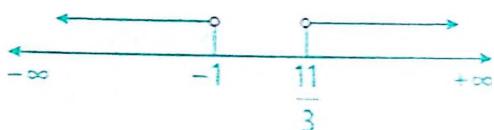
$$5x-2 < -2x-9$$

$$x > \frac{11}{3}$$

$$7x < -7$$

$$x < -1$$

Unimos los intervalos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; -1\right) \cup \left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$$

APLICACIÓN 28

Resuelva la inecuación $|3x-5| \geq 2$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|3x-5| \geq 2$$

Aplicamos la propiedad "b".

$$3x-5 \geq 2 \quad \vee \quad 3x-5 \leq -2$$

$$3x \geq 7$$

$$3x \leq 3$$

$$x \geq \frac{7}{3}$$

$$x \leq 1$$

Unimos los intervalos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; 1\right] \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$$

APLICACIÓN 29

Resuelva la inecuación $|2x+9| \geq 3x-1$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|2x+9| \geq 3x-1$$

Aplicamos la propiedad "b".

$$2x+9 \geq 3x-1 \quad \vee \quad 2x+9 \leq -(3x-1)$$

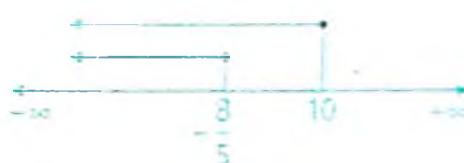
$$10 \geq x$$

$$2x+9 \leq -3x+1$$

$$x \leq 10$$

$$x \leq -\frac{8}{5}$$

Unimos los intervalos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; 10\right]$$

$$c. |a| \leq b \iff a^2 \leq b^2$$

Observamos que en ambos miembros hay valores absolutos, entonces debemos elevarlos al cuadrado para poder eliminarlos. Esta propiedad también es válida si en lugar de la desigualdad \leq están las desigualdades $<$, $>$ o \geq .

APLICACIÓN 30

Resuelva la inecuación $|5x+1| \leq |2x-3|$.

RESOLUCIÓN

Elevamos al cuadrado.

$$|5x+1|^2 \leq |2x-3|^2$$

Eliminamos los valores absolutos.

$$(5x+1)^2 \leq (2x-3)^2$$

Pasamos todo al primer miembro.

$$\underbrace{(5x+1)^2 - (2x-3)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} \leq 0$$

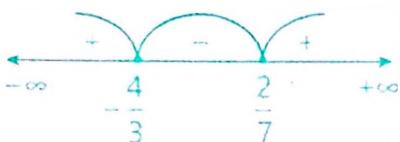
Factorizamos

$$[(5x+1)+(2x-3)][(5x+1)-(2x-3)] \leq 0$$

Operamos

$$(7x-2)(3x+4) \leq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = \left[-\frac{4}{3}; \frac{2}{7} \right]$$

APLICACIÓN 31

Resuelva la inecuación $|5 - 3x| > |2x + 1|$.

RESOLUCIÓN

Elevamos al cuadrado.

$$|5 - 3x|^2 > |2x + 1|^2$$

Luego

$$(5 - 3x)^2 > (2x + 1)^2$$

$$(5 - 3x)^2 - (2x + 1)^2 > 0$$

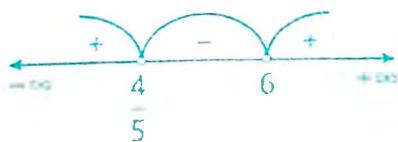
Aplicamos la propiedad de diferencia de los cuadrados.

$$[(5 - 3x) + (2x + 1)][(5 - 3x) - (2x + 1)] > 0$$

$$(6 - x)(4 - 5x) > 0$$

$$(x - 6)(5x - 4) > 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = \left(-\infty; \frac{4}{5} \right) \cup (6; +\infty)$$

5. DESIGUALDAD TRIANGULAR

5.1. Propiedad

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Esta propiedad es válida si reemplazamos cualquier valor numérico para a y b .

Ejemplos

$$\bullet \quad a = 2 \text{ y } b = 5$$

$$|2 + 5| = |\underline{2}| + |\underline{5}|$$

✓

$$\bullet \quad a = -3 \text{ y } b = -1$$

$$|-3 - 1| = |\underline{-3}| + |\underline{-1}|$$

✓

$$\bullet \quad a = -5 \text{ y } b = 9$$

$$|-5 + 9| < |\underline{-5}| + |\underline{9}|$$

✓

Observamos que $|a + b|$ puede ser menor o igual que $|a| + |b|$, pero en ningún caso $|a + b|$ es mayor que $|a| + |b|$.

APLICACIÓN 32

Resuelva la inecuación $|x - 2| + |2x - 5| \geq |3x - 7|$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$(x - 2) + (2x - 5) = 3x - 7$$

Luego

$$|x - 2| + |2x - 5| \geq |3x - 7|$$

$$|x - 2| + |2x - 5| \geq |x - 2 + 2x - 5|$$

Hacemos los siguientes cambios de variable:

$$x - 2 = a \wedge 2x - 5 = b$$

Reemplazamos

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

Esta es la desigualdad triangular y se cumple para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces en la inecuación

$$|x - 2| + |2x - 5| \geq |3x - 7|$$

se cumplirá para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore CS = \mathbb{R}$$

APLICACIÓN 33

Resuelva la inecuación $|x-2| > |x-1| + 1$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$|x-2| > |x-1| + 1$$

$$|x-2| > |x-1| + |-1|$$

Hacemos los siguientes cambios de variable:

$$x-1=a \wedge -1=b$$

Reemplazamos

$$|a+b| > |a| + |b|$$

Es imposible que $|a+b|$ sea mayor que $|a| + |b|$.

Entonces en la inecuación

$$|x-2| > |x-1| + |-1|$$

no se cumple para ningún valor de x . Es decir, no tiene solución.

$$\therefore CS = \emptyset$$

5.2. Otras propiedades

a. $|a+b| < |a| + |b| \iff ab < 0$

b. $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$

APLICACIÓN 34

Resuelva la inecuación $|x+5| + |x+2| > |2x+7|$.

RESOLUCIÓN

Tenemos

$$(x+5) + (x+2) = 2x+7$$

Luego

$$|x+5| + |x+2| > |2x+7|$$

$$|x+5| + |x+2| > |x+5 + x+2|$$

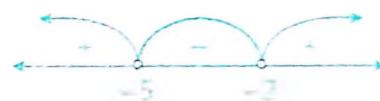
$$\rightarrow |a| + |b| > |a+b|$$

Esta desigualdad se cumple de acuerdo a la propiedad "a" si y solo si $ab < 0$.

Como $a=x+5 \wedge b=x+2$, entonces

$$(x+5)(x+2) < 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = (-5; -2)$$

APLICACIÓN 35

Resuelva la inecuación $|x+2| + |3x-2| = |4x|$.

RESOLUCIÓN

Observamos que si sumamos $x+2$ con $3x-2$, obtenemos $4x$.

Luego

$$|x+2| + |3x-2| = |4x|$$

Tenemos

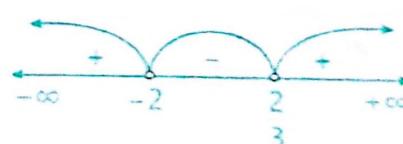
$$|a| + |b| = |a+b|$$

Esta igualdad se cumple de acuerdo a la propiedad "b" si y solo si $ab \geq 0$.

Si $a=x+2 \wedge b=3x-2$, entonces

$$(x+2)(3x-2) \geq 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\therefore CS = (-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty \right)$$

6. MÉTODO DE ZONAS

Hay ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto que no pueden resolverse directamente con las propiedades ya mencionadas. En ese caso, tenemos la opción de aplicar el método de zonas.

Ejemplo

En la ecuación $|x-2|+|x-5|=10$

haremos lo siguiente:

Igualamos cada valor absoluto a cero.

$$|x-2|=0 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$|x-5|=0 \rightarrow x-5=0 \rightarrow x=5$$

Ubicamos los valores 2 y 5 en la recta numérica.



La recta ya ha quedado dividida en tres zonas, entonces resolveremos la ecuación en cada una de ellas.

Zona I

Tenemos

$$x < 2$$

$$x-2 < 0$$

$$\underline{|x-2|} = -(x-2)$$

Luego

$$\begin{aligned} x &< 2 \\ x-5 &< -3 \end{aligned}$$

$$\underline{|x-5|} = -(x-5)$$

En la ecuación, tenemos

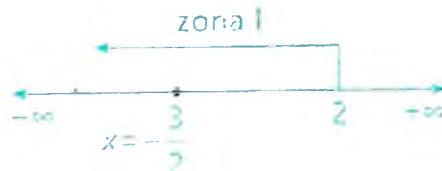
$$\underline{|x-2|} + \underline{|x-5|} = 10$$

$$-(x-2) - (x-5) = 10$$

$$-2x + 7 = 10$$

$$-2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Ubicamos el valor hallado de x .



Observamos que $-\frac{3}{2}$ está en la zona I, entonces este valor es una solución de la ecuación.

Zona II

Tenemos

$$2 \leq x < 5$$

$$0 \leq x-2 < 3 \rightarrow \underline{|x-2|} = x-2$$

Luego

$$2 \leq x < 5$$

$$-3 \leq x-5 < 0 \rightarrow \underline{|x-5|} = -(x-5) \rightarrow (5-x)$$

En la ecuación, observamos

$$\underline{|x-2|} + \underline{|x-5|} = 10$$

$$x-2 + 5-x = 10 \rightarrow 3 = 10$$

El resultado indica que la ecuación no tiene solución.

Zona III

Tenemos

$$x \geq 5$$

$$x-2 \geq 3 \rightarrow \underline{|x-2|} = x-2$$

Luego

$$x \geq 5$$

$$x-5 \geq 0 \rightarrow \underline{|x-5|} = x-5$$

Reemplazamos

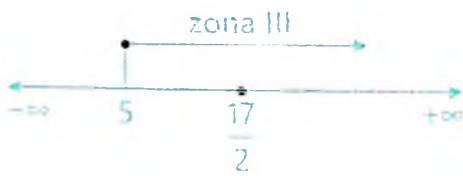
$$\underline{|x-2|} + \underline{|x-5|} = 10$$

$$x-2 + x-5 = 10$$

$$2x-7 = 10$$

$$2x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{2}$$

Ubicamos el valor hallado de x .



Observamos que $\frac{17}{2}$ sí está en la zona III, entonces es una solución de la ecuación.

$$\therefore CS = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{17}{2}\right\}$$

APLICACIÓN 36

Resuelva la inecuación

$$\frac{2x+|x-2|}{x-6} < 0.$$

RESOLUCIÓN

Aplicamos el método de zonas.



Zona I

Tenemos

$$\begin{aligned} x &< 2 \\ x-2 &< 0 \end{aligned}$$

Luego

$$|x-2| = 2-x$$

En la ecuación, tenemos

$$\frac{2x+2-x}{x-6} < 0$$

$$\frac{x+2}{x-6} < 0$$

Graficamos



$$x \in (-2; 6)$$

Intersecamos



Obtenemos

$$S_1 = \langle -2; 2 \rangle$$

Zona II

Tenemos

$$x \geq 2$$

$$x-2 \geq 0$$

$$|x-2| = x-2$$

En la ecuación, tenemos

$$\frac{2x+x-2}{x-6} < 0$$

$$\frac{3x-2}{x-6} < 0$$

Graficamos



$$\text{donde } x \in \left(\frac{2}{3}; 6\right) < 0.$$

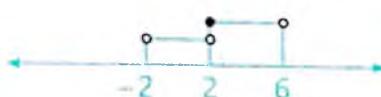
Intersecamos



Obtenemos

$$S_2 = [2; 6]$$

Hallamos el conjunto solución de la inecuación.



$$\therefore CS = \langle -2; 6 \rangle$$



Actividad recreativa

Juego de carreras

1. Construya un camino con 100 casilleros de la siguiente manera:

1 2 3 ... 99 100

2. Arme 8 fichas del siguiente modo:

- Cada ficha debe indicar un número que será solución de una ecuación con valor absoluto.

Ejemplo

$|x|=3$
donde x es el
valor
negativo

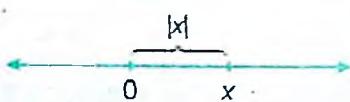
- Las fichas indicarán los números del 1 al 5 y los números negativos del -1 al -3.
3. Se juega entre dos o más jugadores, por turnos y por rondas.
 4. Se ubica a cada jugador en la casilla 1 del camino.
 5. Se baraja el mazo de fichas en cada ronda.
 6. En cada ronda, el jugador saca una ficha y avanza tantos casilleros como lo indica la ficha. Si esta señala un número negativo, entonces retrocede ese número de casilleros.
 7. Gana el primero en llegar al casillero 100.

VALOR ABSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Interpretación geométrica

El valor $|x|$ es la distancia de x a 0 en la recta numérica.

**Valor absoluto de $f(x)$**

Se debe conocer el signo de $f(x)$, el cual depende de x .

- Si $f(x) > 0 \rightarrow |f(x)| = f(x)$
- Si $f(x) < 0 \rightarrow |f(x)| = -f(x)$

Propiedades

$$|x| \geq 0$$

$$|x| \geq |-x|$$

$$|xy| \geq |x| \cdot |y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x|^2 = |x|^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Ecuaciones con valor absoluto

$$|a|=b$$

si y solo si
 $b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b)$

$$|a|=|b|$$

si y solo si
 $a=b \vee a=-b$

Inecuaciones con valor absoluto

$$|a| \leq b$$

si y solo si
 $-b \leq a \leq b$

$$|a| \geq b$$

si y solo si
 $a \leq -b \vee a \geq b$

$$|a| \geq |b|$$

Se sugiere elevar al cuadrado y luego usar la propiedad de diferencia de cuadrados.

RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Resuelva la ecuación

$$\left| \frac{x-1}{4} \right| = 2$$

e indique la mayor solución.

- A) 4 B) 7 C) 5
D) -2 E) 9

Resolución

Tenemos

$$\left| \frac{x-1}{4} \right| = 2$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} &= 2 \quad \vee \quad \frac{x-1}{4} = -2 \\ x-1 &= 8 \quad \vee \quad x-1 = -8 \\ x &= 9 \quad \vee \quad x = -7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la mayor solución es 9.

 Clave

Problema N.º 2

Halle el cardinal del conjunto solución de

$$\left| \frac{x}{2} + 3 - x \right| = x - 1.$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 0 E) 4

Resolución

No olvide

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \quad \vee \quad a = -b \end{cases}$$

En la ecuación

$$\left| \frac{x}{2} + 3 - x \right| = x - 1$$

Aplicamos esta propiedad.

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 3 - x &= x - 1 \quad \vee \quad \frac{x}{2} + 3 - x = -(x - 1) \\ x + 6 - 2x &= 2x - 2 \quad \quad x + 6 - 2x &= -2x + 2 \\ -x + 6 &= 2x - 2 \quad \quad x + 6 &= 2 \\ 8 &= 3x \quad \quad x &= -4 \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Los valores de x deben verificar la condición $x \geq 1$.

El valor $x = \frac{8}{3}$ sí cumple esta condición y es una solución.

El valor $x = -4$ no cumple esta condición, por eso no es una solución.

$$CS = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

Por lo tanto, su cardinal es 1.

 Clave

Problema N.º 3

Resuelva la ecuación

$$\left| \frac{x}{3} - 1 \right| + 4 = 7$$

e indique el producto de sus soluciones.

- A) 6 B) -6 C) 12
D) 18 E) -72

Resolución

La expresión $\left|\frac{x}{3}-1\right|+4$ siempre es positiva.

Tenemos

$$\left|\left|\frac{x}{3}-1\right|+4\right|=\left|\frac{x}{3}-1\right|+4$$

Luego

$$\left|\left|\frac{x}{3}-1\right|+4\right|=7$$

$$\left|\frac{x}{3}-1\right|+4=7$$

$$\left|\frac{x}{3}-1\right|=3$$

Entonces

$$\frac{x}{3}-1=3 \quad \vee \quad \frac{x}{3}-1=-3$$

$$\frac{x}{3}=4 \quad \frac{x}{3}=-2$$

$$x=12 \quad x=-6$$

$$CS=\{12; -6\}$$

$$\therefore (12)(-6)=-72$$

**Problema N.º 4**

Si $x \in (-2; 1)$, indique el valor reducido de

$$H(x)=\frac{|x-5|+|1-x|+2x}{3}$$

- A) 3 B) 1 C) 2
D) 4 E) 5

Resolución

Como $x \in (-2; 1)$, entonces

$$-2 < x < 1$$

$$-7 < x-5 < -4$$

Como $x-5$ es negativo, entonces

$$\underbrace{|x-5|}_{=} = -(x-5)$$

Luego

$$-2 < x < 1$$

$$-1 < -x < 2$$

$$0 < 1-x < 3$$

Como $1-x$ es positivo, entonces

$$\underbrace{|1-x|}_{=} = 1-x$$

Reemplazamos

$$H(x)=\frac{|x+5|+|1-x|+2x}{3}$$

$$H(x)=\frac{-(x-5)+1-x+2x}{3}$$

$$H(x)=\frac{-x+5+1-x+2x}{3}$$

$$H(x)=\frac{-2x+6+2x}{3}$$

$$H(x)=\frac{6}{3}=2$$

$$\therefore H(x)=2$$



Problema N.º 5

Resuelva la ecuación

$$|5x+15| + |20x-60| + |3-x| = 26.$$

Halle la suma de las inversas de las soluciones.

- | | | |
|------------------|------------------|------|
| A) 4 | B) 2 | C) 6 |
| D) $\frac{3}{4}$ | E) $\frac{1}{4}$ | |

Resolución

Tenemos

$$|5x+15| + |20x-60| + |3-x| = 26$$

$$5|x-3| + 20|x-3| + 1|x-3| = 26$$

$$(5+20+1)|x-3| = 26$$

$$26|x-3| = 26$$

$$|x-3| = 1$$

No olvide

$$a=b \Leftrightarrow (b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b))$$

Luego

$$x-3=1 \vee x-3=-1$$

$$x=4 \vee x=2$$

$$CS=\{4; 2\}$$

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Clave

Problema N.º 6

Resuelva la ecuación

$$|3x-6|=3x-6$$

e indique la menor solución entera.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 4 | B) 1 | C) 2 |
| D) 0 | E) 3 | |

Resolución

Para que $|3x-6|$ sea igual a sí mismo, la expresión $3x-6$ debe ser de signo positivo o igual a cero, es decir, $3x-6 \geq 0$.

Luego

$$3x-6 \geq 0$$

$$3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$$

$$CS=[2; +\infty)$$

Por lo tanto, la menor solución es 2.

Clave

Problema N.º 7

Resuelva la ecuación

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(-6)^2}$$

e indique la suma de las soluciones.

- | | | |
|-------------------|------|-------------------|
| A) $\frac{1}{2}$ | B) 1 | C) $-\frac{3}{2}$ |
| D) $-\frac{1}{4}$ | E) 2 | |

Resolución

Tenemos

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(-6)^2}$$

$$\sqrt{(2x-1)^2} = |-6| \rightarrow |2x-1| = 6$$

Clave

IMPORTANTE

$$a=b \leftrightarrow (b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b))$$

Luego

$$2x-1=6 \vee 2x-1=-6$$

$$2x=7 \vee 2x=-5$$

$$x=\frac{7}{2} \vee x=-\frac{5}{2}$$

$$CS=\left\{\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$$

$$\therefore \frac{7}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

Clave

Problema N.º 8

Resuelva la ecuación

$$x^2+14=9|x|$$

e indique el número de soluciones.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 0

Resolución

Tenemos

$$x^2+14=9|x|$$

$$x^2-9|x|+14=0$$

$$|x|^2-9|x|+14=0$$

$$|x| = -7$$

$$|x| = -2$$

Luego

$$(|x|-7)(|x|-2)=0$$

$$|x|-7=0 \vee |x|-2=0$$

$$|x|=7 \vee |x|=2$$

$$x=7 \vee x=-7 \vee x=2 \vee x=-2$$

$$CS=\{7; -7; 2; -2\}$$

Por lo tanto, hay 4 soluciones.

Clave

Problema N.º 9

Resuelva el sistema de inecuaciones

$$|x-7| \leq 1$$

$$|x+2| > 3$$

- A) [6; 8] B) (-5; 8] C) [6; 7)
 D) (1; 8] E) $(-\infty; 5)$

Resolución

Tenemos

$$|x-7| \leq 1$$

$$-1 \leq x-7 \leq 1$$

$$6 \leq x \leq 8$$

$$S_1=[6; 8]$$

Luego

$$|x+2| > 3$$

$$x+2 > 3 \vee x+2 < -3$$

$$x > 1 \vee x < -5$$

Graficamos

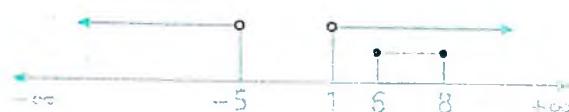


$$S_2 = \langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

Calculamos el conjunto solución del sistema.

$$CS = S_1 \cap S_2$$

Graficamos



$$\therefore CS = [6; 8]$$

Problema N.º 10

Resuelva la ecuación

$$|x-3|+3=2$$

- A) $\langle -3; 3 \rangle$ B) \emptyset C) $\{0\}$
 D) $\{3\}$ E) \mathbb{R}

Resolución

Tenemos

$$|x-3|+3=2$$

$$|x-3|+3=2$$

$$|x-3|=-1$$

El valor absoluto no puede ser igual a un número negativo, entonces no tiene solución.

$$\therefore CS = \{\emptyset\}$$

Clave B

Problema N.º 11

Luego de resolver la inecuación

$$|2x-7| > x-2$$

obtenemos $CS = \langle -\infty; a \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$.

Halle $a+b$.

- A) 5 B) 6 C) 8
 D) 12 E) 7

Resolución

Tenemos

$$|2x-7| > x-2$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2x-7 &> x-2 & 2x-7 &< -(x-2) \\ x &> 5 & & 3x < 9 \\ x &> 5 & & x < 3 \end{aligned}$$

Graficamos



$$CS = \langle -\infty; 3 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$$

$$\rightarrow a=3 \wedge b=5$$

$$\therefore a+b=3+5=8$$

Clave C

Problema N.º 12

Luego de resolver $|x-8|=6x+22$, indique la solución.

- A) -8 B) -4 C) -2
 D) 4 E) 10

Resolución**No olvide**

$$a=b \leftrightarrow (b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b))$$

Tenemos

$$6x+22 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{11}{3}$$

Luego

$$x-8=6x+22 \vee x-8=-(6x+22)$$

$$5x=-30$$

$$7x=-14$$

$$x=-6$$

$$x=-2$$

De estos valores, solo -2 verifica la condición

$$x \geq -\frac{11}{3}$$

$$\therefore CS=\{-2\}$$

Clave C**Problema N.º 13**

Luego de resolver

$$|x-6|^2 + 5|x-6|=24$$

indique el número de soluciones.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 1 | B) 2 | C) 3 |
| D) 4 | E) 5 | |

Resolución

Tenemos

$$|x-6|^2 + 5|x-6|-24=0$$

$$\begin{array}{c} |x-6| \\ \diagup +8 \\ \diagdown -3 \end{array}$$

$$(|x-6|+8)(|x-6|-3)=0$$

Luego

$$|x-6|+8=0 \vee |x-6|-3=0$$

$$|x-6|=-8 \vee |x-6|=3$$

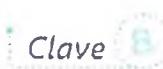
$|x-6|$ no puede
ser negativo

$$x-6=3 \vee x-6=-3$$

$$x=9 \vee x=3$$

$$CS=\{9; 3\}$$

Por lo tanto, hay 2 soluciones.

**Problema N.º 14**

Resuelva la inecuación

$$|2x-7| < x-2$$

e indique el número de soluciones enteras.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 0 | B) 1 | C) 2 |
| D) 3 | | E) 4 |

Resolución

Tenemos

$$|2x-7| < x-2$$

Entonces

$$-(x-2) < 2x-7 < x-2$$

$$-(x-2) < 2x-7 \wedge 2x-7 < x-2$$

$$-x+2 < 2x-7 \wedge x < 7-2$$

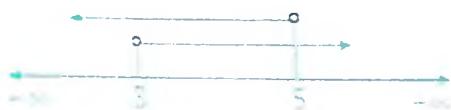
Luego

$$9 < 3x \wedge x < 5$$

$$3 < x \wedge x < 5$$

$$x > 3 \wedge x < 5$$

Intersecamos



$$CS = \emptyset$$

El valor 4 es la única solución entera.

Por lo tanto, el número de soluciones enteras es 1.

Clave

Problema N.º 15

Resuelva la ecuación

$$|5x-1|=|x+3|$$

e indique el cardinal del conjunto solución.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Tenemos

$$|5x-1|=|x+3|$$

$$5x-1=x+3 \quad \vee \quad 5x-1=-(x+3)$$

Luego

$$4x=4 \quad \vee \quad 5x-1=-x-3$$

$$x=1 \quad \vee \quad 6x=-2$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=-\frac{1}{3}$$

$$CS = \left\{ 1; -\frac{1}{3} \right\}$$

Por lo tanto, su cardinal es 2.

Clave

Problema N.º 15

Sea el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |3x-6|-|8-4x| < -4\}.$$

Determine la suma de los elementos enteros del complemento de A.

- A) 20 B) 6 C) 10
D) 12 E) 18

Resolución

Tenemos

$$|3x-6|-|8-4x| < -4$$

$$3|x-2|-|4x-8| < -4$$

$$3|x-2|-4|x-2| < -4$$

$$(3-4)|x-2| < -4$$

$$-|x-2| < -4$$

$$|x-2| > 4$$

Luego

$$x-2 > 4 \quad \vee \quad x-2 < -4$$

$$x > 6 \quad \vee \quad x < -2$$

Unimos



El conjunto A es el conjunto solución de esta inecuación.

$$A = (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$$

Luego

$$A^C = [-2; 6]$$

Los elementos enteros de A^C son -2; -1; 0; 1; 2; ...; 6.

$$\therefore -2-1+0+1+2+3+4+5+6=18$$

Clave

Problema N.º 17

Si m es la suma de elementos del conjunto $T = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-4| + |x-2| = 9\}$, calcule $3m-1$.

- A) 8 B) 17 C) 11
D) 14 E) 2

Resolución

Tenemos

$$T = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-4| + |x-2| = 9\}$$

Calculamos los valores enteros de x .

$$2|x-2| + |x-2| = 9$$

$$3|x-2| = 9$$

$$|x-2| = 3$$

Luego

$$x-2=3 \vee x-2=-3$$

$$x=5 \vee x=-1$$

$$T=\{5; -1\}$$

Notamos que m es la suma de elementos de T .

$$m=5+(-1)=4$$

$$\therefore 3m-1=3(4)-1=11$$

 Clave C

Problema N.º 18

Resuelva la ecuación

$$|x^2-x-36|=6$$

y calcule la suma de las inversas de las soluciones.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{35}$ C) $\frac{2}{35}$
D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{95}$

Resolución

Tenemos

$$|x^2-x-36|=6$$

$$x^2-x-36=6 \vee x^2-x-36=-6$$

$$x^2-x-42=0 \vee x^2-x-30=0$$

$$\begin{array}{c} x \\ \cancel{-7} \\ \cancel{+6} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \\ \cancel{+5} \\ \cancel{-6} \end{array}$$

Luego

$$(x-7)(x+6)=0 \vee (x+5)(x-6)=0$$

$$x=7 \vee x=-6 \vee x=-5 \vee x=6$$

$$CS=\{7; -6; -5; 6\}$$

Sumamos las inversas de sus soluciones

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{-6} + \frac{1}{-5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{7} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{35}$$

 Clave B

Problema N.º 19

Resuelva

$$||x^2-2x+5|-5|=0$$

e indique la mayor solución.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución**IMPORTANTE**

$$|a|=0 \leftrightarrow a=0$$

En la ecuación, tenemos

$$|x^2 - 2x + 5| - 5 = 0$$

Aplicamos esta propiedad.

$$|x^2 - 2x + 5| - 5 = 0$$

Luego

$$\underline{|x^2 - 2x + 5|} = 5$$

propiedad de la
modulus

Entonces

$$x^2 - 2x + 5 = 5$$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0$$

$$x=0 \vee x=2$$

$$CS=\{0; 2\}$$

Por lo tanto, la mayor solución es 2.

Clave**B****Problema N.º 20**Resuelva la ecuación $|x^2 + 4| = -8$.

- A) {2} B) {-4} C) {8}
 D) R E) \emptyset

Resolución

No es posible que el valor absoluto sea igual a un número negativo, entonces esta ecuación no tiene solución.

$$\therefore CS=\emptyset$$

Clave**E****Problema N.º 21**

Halle las soluciones enteras de la ecuación

$$(x^2 - 2|x|-8)(|x|+3)=0$$

- A) 1 B) 0 C) 2
 D) 3 E) 5

Resolución

Tenemos

$$(x^2 - 2|x|-8)(|x|+3)=0$$

$$x^2 - 2|x|-8 = 0 \quad \vee \quad |x|+3 = 0$$

$$x^2 - 2|x|-8 = 0 \quad \vee \quad |x| = -3$$

$$|x| = -4$$

$$|x| = +2$$

Luego

$$(|x|-4)(|x|+2) = 0$$

$$|x|-4 = 0 \quad \vee \quad |x|+2 = 0$$

$$|x| = 4 \quad \vee \quad |x| = -2$$

$$x=4 \quad \vee \quad x=-4$$

$$CS=\{4; -4\}$$

Por lo tanto, la ecuación desarrollada tiene 2 soluciones enteras.

Clave**C****Problema N.º 22**

Al resolver la ecuación

$$x^4 - 8|x|^2 + 7 = 0$$

halle la suma de las soluciones negativas.

- A) $-\sqrt{7}$ B) 0 C) $\sqrt{5}$
 D) $1-\sqrt{7}$ E) $-1-\sqrt{7}$

Resolución

Tenemos

$$x^4 - 8|x|^2 + 7 = 0$$

$$x^4 - 8x^2 + 7 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times \quad -7 \\ \hline x^2 \\ -1 \end{array}$$

$$(x^2 - 7)(x^2 - 1) = 0$$

Luego

$$x^2 - 7 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 7 \quad \vee \quad x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{7} \quad \vee \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$|x| = \sqrt{7} \quad \vee \quad |x| = 1$$

$$x = \sqrt{7} \quad \vee \quad x = -\sqrt{7} \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$$CS = \{\sqrt{7}; -\sqrt{7}; 1; -1\}$$

Por lo tanto, la suma de las soluciones negativas es $-1 - \sqrt{7}$.

Entonces

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$$A = \{1; -1\}$$

Por lo tanto, el cardinal de A es 2.

Clave 8

Problema N.º 24

Sea $f(x) = |x - 5| + |3 - x|$.

Halle el valor de $\frac{f(0) + f(2)}{f(5)}$.

- A) 12 B) 6 C) -3
D) -6 E) 4

Resolución

Tenemos

$$f(x) = |x - 5| + |3 - x|$$

Entonces

$$f(0) = |0 - 5| + |3 - 0| = 8$$

$$f(2) = |2 - 5| + |3 - 2| = 4$$

$$f(5) = |5 - 5| + |3 - 5| = 2$$

$$\therefore \frac{f(0) + f(2)}{f(5)} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Clave 8

Problema N.º 23

Indique el cardinal del conjunto A .

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 3 - |x| = 2\}$$

- A) 0 B) 1 C) 4
D) 3 E) 2

Resolución

En el conjunto A , tenemos

$$3 - |x| = 2$$

$$3 - 2 = |x|$$

$$|x| = 1$$

Problema N.º 25

Halle la variación de

$$f(x) = |x + 5| + |1 - x| \text{ si } x \in (2; 5).$$

- A) (2; 8) B) (-2; 4) C) (8; 14)
D) (2; 10) E) (-4; 4)

Resolución

Dato: $x \in (2; 5)$

Si $x+5$ es positivo, entonces

$$\underline{|x+5|} = x+5$$

Si $1-x$ es negativo, entonces

$$\underline{|1-x|} = x-1$$

Luego

$$f_{(x)} = \underline{|x+5|} + \underline{|1-x|}$$

$$f_{(x)} = 2x+4$$

Hallamos la variación de $f_{(x)}$:

$$2 < x < 5$$

$$4 < 2x < 10$$

$$8 < \underline{2x+4} < 14$$

$$\therefore f_{(x)} \in (8; 14)$$

Clave

Problema N. 26

Si $(q; 6)$, es el conjunto solución de $|2x-p| < 5$, halle $p+q$.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 2 | B) 4 | C) 8 |
| D) 1 | E) 3 | |

Resolución

Tenemos

$$|2x-p| < 5$$

Entonces

$$-5 < 2x-p < 5$$

$$p-5 < 2x < p+5$$

$$\frac{p-5}{2} < x < \frac{p+5}{2}$$

$$CS = \left(\frac{p-5}{2}, \frac{p+5}{2} \right)$$

Del problema, tenemos

$$CS = (q; 6)$$

Igualamos los siguientes intervalos:

$$\frac{p+5}{2} = 6 \rightarrow p = 7$$

$$\frac{p-5}{2} = q \rightarrow q = 1$$

$$\therefore p+q = 7+1 = 8$$

Clave

Problema N. 27

Halle la diferencia positiva de las soluciones de la ecuación

$$2|x-3|^2 + |7x-21| - 15 = 0.$$

- | | | |
|-------|------|------|
| A) 10 | B) 6 | C) 7 |
| D) 9 | E) 3 | |

Resolución

Tenemos

$$2|x-3|^2 + |7x-21| - 15 = 0$$

$$2|x-3|^2 + 7|x-3| - 15 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 2|x-3| & = & -3 \\ |x-3| & = & +5 \end{array}$$

Luego

$$(2|x-3|-3)(|x-3|+5)=0$$

$$2|x-3|-3=0 \vee |x-3|+5=0$$

$$2|x-3|=3 \vee |x-3|=-5$$

segundo

$$|x-3|=\frac{3}{2}$$

Entonces

$$x-3=\frac{3}{2} \vee x-3=-\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{9}{2} \vee x=\frac{-3}{2}$$

$$CS=\left\{\frac{9}{2}; \frac{-3}{2}\right\}$$

$$\therefore \frac{9}{2}-\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Clave

Problema N.º 28

Resuelva la ecuación

$$|x^2-x+1|-x^2|+|x-1|=2.$$

- A) {0; 2}
- B) {2}
- C) {1; 0; 2}
- D) {0}
- E) {}

Resolución

Tenemos

$$|x^2-x+1|-x^2|+|x-1|=2$$

Entonces

$$|x^2-x+1-x^2|+|x-1|=2$$

$$|-x+1|+|x-1|=2$$

$$|x-1|+|x-1|=2$$

$$2|x-1|=2$$

$$|x-1|=1$$

Luego

$$x-1=1 \vee x-1=-1$$

$$x=2 \vee x=0$$

$$\therefore CS=\{0; 2\}$$

Clave

Problema N.º 29

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

y calcule la suma de sus soluciones enteras.

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 10
- E) 6

Resolución

De la primera inecuación del sistema, tenemos

$$x^2 \leq 9$$

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{9}$$

$$|x| \leq 3$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$S_1=[-3; 3]$$

De la segunda inecuación, tenemos

$$|x| \geq 1$$

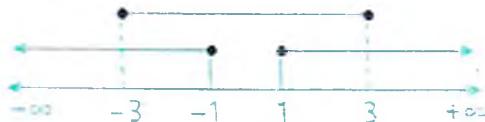
$$x \geq 1 \vee x \leq -1$$

$$S_2=(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

Calculamos el conjunto solución del sistema.

$$CS = S_1 \cap S_2$$

Graficamos



$$CS = [-3; -1] \cup [1; 3]$$

Las soluciones enteras son $-3; -2; -1; 1; 2$ y 3 .

$$\therefore (-3) + (-2) + (-1) + 1 + 2 + 3 = 0$$

Problema N.º 30

Resuelva la inecuación

$$|x-2|-2x \leq 5$$

e indique el número de soluciones enteras no positivas.

- A) 1 B) 4 C) 3 D) 2 E) 6

Resolución

Tenemos

$$|x-2|-2x \leq 5$$

$$|x-2| \leq 2x+5$$

Luego

$$-(2x+5) \leq x-2 \leq 2x+5$$

$$-(2x+5) \leq x-2 \wedge x-2 \leq 2x+5$$

$$-2x-5 \leq x-2 \wedge -7 \leq x$$

$$-3 \leq 3x \wedge x \geq -7$$

$$x \geq -1 \wedge x \geq -7$$

Intersecamos



$$CS = [-1; +\infty)$$

Las soluciones enteras no positivas son -1 y 0 . Por lo tanto, hay 2 soluciones enteras no positivas.

Clave



Problema N.º 31

Resuelva la inecuación

$$\frac{|x+1|-3}{|x-1|+2} < 0$$

- A) $(-2; 1)$ B) $(1; 4)$ C) $(-4; 2)$
D) $(-3; 2)$ E) $(-2; 3)$

Resolución

Observamos que la expresión que está en el denominador de la fracción, por su forma, siempre será positiva.

En el denominador, tenemos

$$\underbrace{|x-1|+2}_{>0}$$

Luego, en la inecuación

$$\frac{|x+1|-3}{\underbrace{|x-1|+2}_{>0}} < 0$$

$$|x+1|-3 < 0 \quad \underbrace{(|x-1|+2)}_{>0}$$

$$|x+1|-3 < 0$$

Tenemos

$$|x+1| < 3$$

$$-3 < x+1 < 3$$

$$-4 < x < 2$$

$$\therefore CS = \{-4; 2\}$$

Clave

Problema N.º 32

Resuelva la ecuación $x^2 - 3|x+1| + 2x + 3 = 0$.

Calcule el producto de sus soluciones.

- A) -2 B) 2 C) -6
D) 6 E) 0

Resolución

Tenemos

$$x^2 - 3|x+1| + 2x + 3 = 0$$

Agrupamos convenientemente.

$$(x^2 + 2x) - 3|x+1| + 3 = 0$$

Sumamos y restamos 1.

$$(x^2 + 2x + 1) - 3|x+1| + 3 - 1 = 0$$

Luego

$$(x+1)^2 - 3|x+1| + 2 = 0$$

Como $|x+1|^2 = (x+1)^2$, entonces

$$|x+1|^2 - 3|x+1| + 2 = 0$$

Aplicamos el aspa simple.

$$|x+1|^2 - 3|x+1| + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} |x+1| \\ |x+1| \end{array} \quad \begin{array}{r} -2 \\ -1 \end{array}$$

$$(|x+1|-2)(|x+1|-1)=0$$

Cada factor se iguala a cero.

$$|x+1|-2=0 \vee |x+1|-1=0$$

$$|x+1|=2 \vee |x+1|=1$$

$$x+1=2 \vee x+1=2 \vee x+1=1 \vee x+1=-1$$

$$x=1 \vee x=-3 \vee x=0 \vee x=-2$$

$$CS=\{1; -3; 0; -2\}$$

$$\therefore (1)(3)(0)(-2)=0$$

Clave

Problema N.º 33

Resuelva la ecuación $x^2 + 4 = 5|x|$ e indique el número de soluciones enteras.

- A) 4 B) 2 C) 6
D) 5 E) 3

Resolución

Tenemos

$$x^2 + 4 = 5|x|$$

$$x^2 - 5|x| + 4 = 0$$

Como $x^2 = |x|^2$, entonces

$$|x|^2 - 5|x| + 4 = 0$$

$$|x| \quad -4$$

$$|x| \quad -1$$

Luego

$$(|x|-4)(|x|-1)=0$$

$$|x|-4=0 \vee |x|-1=0$$

$$|x|=4 \vee |x|=1$$

$$x=4 \vee x=-4 \vee x=1 \vee x=-1$$

$$CS=\{4; -4; 1; -1\}$$

Por lo tanto, hay 4 soluciones enteras.

Clave

Problema N.º 34

Si el intervalo $(\alpha; \beta)$ es el conjunto solución de la inecuación

$$x^2 + |x| < 6, \text{ calcule } \alpha\beta.$$

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 4 | B) -3 | C) -4 |
| D) -6 | E) -2 | |

Resolución

Tenemos

$$x^2 + |x| < 6$$

$$x^2 + |x| - 6 < 0$$

$$|x|^2 + |x| - 6 < 0$$

Aplicamos el aspa simple.

$$\begin{array}{c} |x|^2 + |x| - 6 < 0 \\ |x| \quad +3 \\ |x| \quad -2 \end{array}$$

$$(|x|+3)(|x|-2) < 0$$

Como $|x|+3$, por su forma siempre es positivo, entonces podemos cancelarlo.

$$\underbrace{(|x|+3)}_{+} \cdot \underbrace{(|x|-2)}_{-} < 0$$

Luego

$$|x|-2 < 0$$

$$|x| < 2$$

$$-2 < x < 2$$

$$CS = (-2; 2) = (\alpha; \beta)$$

Entonces

$$\alpha = -2 \wedge \beta = 2$$

$$\therefore \alpha\beta = (-2)(2) = -4$$



Clave

Problema N.º 35

Resuelva la ecuación

$$x^5 + |x| = 0$$

e indique el número de soluciones.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 6 | B) 2 | C) 5 |
| D) 4 | E) 3 | |

Resolución

Tenemos

$$x^5 + |x| = 0$$

$$|x| = -x^5$$

No olvide

$$|a|=b \Leftrightarrow (b \geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b))$$

$$-x^5 \geq 0 \rightarrow x^5 \leq 0 \rightarrow x \leq 0$$

Luego

$$x = -x^5 \vee x = x^5$$

$$x^5 + x = 0 \vee x^5 - x = 0$$

$$x(x^4 + 1) = 0 \vee x(x^4 - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 + 1 = 0 \vee x = 0 \vee x^4 - 1 = 0$$

Obtenemos los siguientes valores:

$$x = 0 \vee x^4 = -1 \vee x^4 = 1$$

La ecuación $x^4 = -1$ no tiene solución, ya que x^4 no puede ser un número negativo.

Resolvemos la ecuación $x^4 = 1$.

$$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{1}$$

$$|x|=1$$

$$x=1 \vee x=-1$$

Obtenemos los siguientes valores:

$$x=0 \vee x=1 \vee x=-1$$

Pero como x debe cumplir la condición $x \leq 0$, solo nos quedarán los siguientes datos:

$$x=0 \vee x=-1$$

$$CS=\{0; -1\}$$

Por lo tanto, la ecuación tiene 2 soluciones.



Clave

Problema N.º 36

Resuelva la inecuación

$$|x^2+x+3|-1 > x^2.$$

- A) $(3; +\infty)$
- B) $(2; +\infty)$
- C) $(1; +\infty)$
- D) $(-1; +\infty)$
- E) $(-2; +\infty)$

Resolución

La cuadrática x^2+x+3 tiene el coeficiente principal positivo y su discriminante es negativo, como se ve a continuación.

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(3) = -11 < 0$$

La expresión cumple con las condiciones del teorema del trinomio positivo, la cuadrática x^2+x+3 es de signo positivo para todo x real.

Entonces

$$|x^2+x+3| = x^2+x+3$$

Reemplazamos en la inecuación.

$$|x^2+x+3| - 1 > x^2$$

$$|x^2+x+3-1| > x^2$$

$$|x^2+x+2| > x^2$$

Nuevamente, debido al teorema del trinomio positivo, la cuadrática x^2+x+2 también es de signo positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$|x^2+x+2| = x^2+x+2$$

Reemplazamos en la inecuación.

$$|x^2+x+2| > x^2$$

$$x^2+x+2 > x^2$$

Luego

$$x+2 > 0$$

$$x > -2$$

Graficamos



$$\therefore CS = (-2; +\infty)$$



Clave

Problema N.º 37

Si α y β son soluciones de la ecuación

$$|x-2| + |x-5| = 7,$$

calcule $\alpha^\beta + \beta^\alpha$.

- A) 1 B) 7 C) 13
D) 3 E) 5

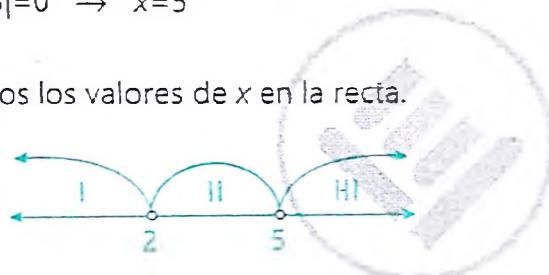
Resolución

Aplicamos el método de zonas y a cada valor absoluto lo igualamos a cero.

$$|x-2|=0 \rightarrow x=2$$

$$|x-5|=0 \rightarrow x=5$$

Ubicamos los valores de x en la recta.

**Zona I**

Tenemos

$$x < 2 \rightarrow \underbrace{x-2}_{(-)} < 0$$

$$\underbrace{|x-2|}_{(-)} = -(x-2)$$

Luego

$$x < 2 \rightarrow \underbrace{x-5}_{(-)} < -3$$

$$\underbrace{|x-5|}_{(-)} = -(x-5)$$

Reemplazamos en la ecuación.

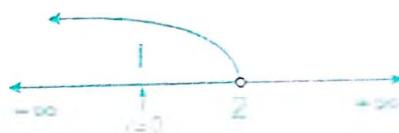
$$|x-2| + |x-5| = 7$$

$$-(x-2) - (x-5) = 7$$

$$-2x + 7 = 7$$

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Verificamos que este valor de x pertenezca a esta zona.



El valor $x=0$ sí pertenece a la zona I, entonces es una solución de esta ecuación.

Zona II

Tenemos

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow \underbrace{0 \leq x-2}_{(+)} < 3$$

$$\underbrace{|x-2|}_{(+)} = x-2$$

Luego

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow -3 \leq \underbrace{x-5}_{(-)} < 0$$

$$\underbrace{|x-5|}_{(-)} = -(x-5)$$

Reemplazamos en la ecuación.

$$|x-2| + |x-5| = 7$$

$$x-2 - (x-5) = 7$$

$$x-2 - x + 5 = 7$$

$$3 = 7$$

La igualdad $3=7$ es falsa. Esto significa que en esta zona la ecuación no tiene solución.

Zona III

Tenemos

$$x \geq 5 \rightarrow \underbrace{x-2 \geq 3}_{(+)}$$

$$\underbrace{|x-2|}_{(+)} = x-2$$

$$x \geq 5 \rightarrow \underbrace{x-5 = x-5}_{(+)=0}$$

$$\underbrace{|x-5|}_{(+)=0} = x-5$$

Reemplazamos en la ecuación.

$$|x-2| + |x-5| = 7$$

$$x-2+x-5=7$$

$$2x-9=7$$

$$2x=16 \rightarrow x=8$$

Verificamos que este valor de x se encuentre en esta zona.



Este valor de x sí pertenece a esta zona, entonces también es una solución de esta ecuación. Finalmente, en todas las zonas hemos encontrado que la ecuación tiene dos soluciones, las cuales son $x=0$ y $x=8$.

$$\text{CS}=\{0; 8\}$$

$$\therefore \alpha^{\beta} + \beta^{\alpha} = 0^8 + 8^0 = 0 + 1 = 1$$

Clave

Problema N.º 38

Resuelva la inecuación

$$|x| + |x-4| > 2|x-2|$$

y calcule el producto de sus soluciones enteras.

- A) -3 B) 3 C) 4
D) 6 E) -6

Resolución

Tenemos

$$|x| + |x-4| > 2|x-2|$$

$$|x| + |x-4| > |2x-4|$$

$$|x| + |x-4| > |x+x-4|$$

Si hacemos los siguientes cambios:

$$x=a$$

$$x-4=b$$

la inecuación queda como

$$|a| + |b| > |a+b|$$

Esta desigualdad se cumple si y solo si $ab < 0$.

Reemplazamos

$$a=x \text{ y } b=x-4$$

Luego

$$(x)(x-4) < 0$$

Aplicamos el método de puntos críticos.



$$\text{CS}=(0; 4)$$

Sus soluciones enteras son 1; 2 y 3.

$$\therefore (1)(2)(3)=6$$

Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Si $x > 4$, indique el valor reducido de

$$H(x) = \frac{|x+5| + |4-x|}{2x+1}$$

- A) 4 B) 2 C) 3
D) 9 E) 1

2. Sea la expresión

$$M(x) = |2x-4| + |x-3|.$$

Halle el valor de $M(0) + M(3)$.

- A) 6 B) 7 C) 10
D) 9 E) 3

3. Resuelva la ecuación

$$|2x-3|=13$$

e indique un valor de x .

- A) -1 B) -5
D) -7 E) 6



4. Obtenga un valor de x en

$$|x-2|+3|=5.$$

- A) 4 B) 2 C) 6
D) 1 E) 7

5. Resuelva la ecuación

$$|3x-6| + 5|2-x| + |x-2| = 27$$

y halle el producto de las soluciones.

- A) 5 B) -5 C) -6
D) 15 E) 6

6. Resuelva $|3x-2|=|2x-5|$

e indique la menor solución.

- A) -3 B) 7 C) 5
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{7}{3}$

7. Calcule la suma de todas las soluciones de la ecuación $x^2 + |x| = 6$.

- A) -1 B) 1 C) 0
D) 4 E) 5

8. Luego de resolver la ecuación

$$(x-4)^2 - 4|x-4| = 5$$

donde el $CS = \{\alpha; \beta\}$; $\alpha > \beta$, determine α^β .

- A) 1 B) 3 C) 9
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

9. Resuelva la ecuación $|x^2 + x + 1| = x^2 + 2x$.

- A) {1} B) {5} C) {2}
D) {0} E) {0}

Halle el cardinal del conjunto solución de $|x^2 - 3| = 6$.

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 3 E) 5

11. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{7^2}$$

e indique el producto de sus soluciones.

- A) 20 B) -45 C) 24
D) 28 E) -30

12. Resuelva la ecuación

$$|x^2 - 6| = x$$

e indique el producto de sus soluciones.

- A) -9 B) 6 C) 36
D) -4 E) -6

13. Resuelva la inecuación

$$|2x - 5| \leq 3.$$

- A) $[2; 5]$ B) $[1; 3]$ C) $[2; 4]$
 D) $[3; 5]$ E) $[1; 4]$

14. Resuelva en \mathbb{Z} la inecuación

$$\left| \frac{x}{2} + 1 \right| + 3 < 5$$

e indique la suma de sus soluciones.

- A) -10 B) -14 C) -11
 D) 11 E) -15

15. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} |x - 4| < 3 \\ |x + 2| \geq 4 \end{cases}$$

- A) $[2; 6]$ B) $[2; 7]$ C) $\langle 2; 7 \rangle$
 D) $[2; 5]$ E) $[2; 7]$

16. Determine el complemento del conjunto solución de

$$|3x - 9| + |15x - 45| > 36.$$

- A) $[1; 4)$ B) $\langle 1; 5]$ C) $[1; 4]$
 D) $\langle 1; 5\rangle$ E) $[1; 5]$

17. Luego de resolver la inecuación

$$|2x - 5| > x + 7$$

se obtiene como conjunto solución

$$\langle -\infty; -a \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle.$$

Determine $3a + b$.

- A) 10 B) 12 C) 14
 D) 8 E) 4

18. Determine el conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mid |x - 3|^2 - 3|x - 3| > 10 \right\}.$$

- A) $[8; +\infty)$ B) $\langle 6; +\infty \rangle$ C) $[6; +\infty)$
 D) $\langle 8; +\infty \rangle$ E) \emptyset

19. Luego de resolver la inecuación

$$|2x - 3| > |x - 4|$$

indique la alternativa que no representa una solución.

- A) 1 B) -2 C) 6
 D) -4 E) 7

20. Halle el producto de la mayor y menor solución de la inecuación.

$$x^2 - |4x^2 + 2| + 8 \geq 0$$

- A) -1 B) -2 C) 4
 D) 3 E) 1

21. Resuelva la inecuación

$$|x^2 - x + 1| - x^2 > (x - 1)^2$$

e indique un intervalo solución.

- A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $[1; 2]$ C) $\langle 1; 2 \rangle$
 D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $\langle 0; 2 \rangle$

22. Resuelva la inecuación

$$|3x - 4| \leq |2x - 3| + |x - 1|.$$

- A) $[4; 5\rangle$ B) $\langle 4; 5]$ C) $\langle 2; 3]$
 D) $\langle 2; 3\rangle$ E) \mathbb{R}

23. Resuelva la ecuación

$$|x - 1| + |x + 2| = 5$$

e indique la suma de sus soluciones.

- A) -1 B) 4 C) 5
 D) -4 E) -6

24. Si m es la solución positiva de la ecuación $|x-2|-3=4$, halle el valor de $m+1$.

- A) 11 B) 9 C) 8
D) 10 E) 4

25. Resuelva

$$|5x-12|=12-5x$$

e indique la mayor solución entera.

- A) 0 B) 2 C) 1
D) 3 E) 4

26. Determine la cantidad de soluciones reales de la ecuación

$$(x^2+|x|-6)(|x|^3+11)=0.$$

- A) 5 B) 4 C) 6
D) 3 E) 2

27. Resuelva la ecuación

$$|x^2+3x|=|x^2-9|$$

e indique cuál es la suma de las inversas de las soluciones.

- A) $\frac{2}{3}$ B) 0 C) 1
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

28. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x^2-8x+16}=8-3|x-4|$$

e indique la menor solución.

- A) 1 B) 2 C) 6
D) 4 E) 3

29. Resuelva la ecuación

$$|x^2+3|-x=x^2-4$$

e indique una solución.

- A) 4 B) 1 C) 3
D) 0 E) 7

30. Si el conjunto solución de

$$|3x+m|<2 \text{ es } \left(-p; \frac{1}{3}\right), \text{ halle } m+p.$$

- A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

31. Resuelva la ecuación

$$|x^2-3|=9 \text{ y calcule la suma de sus soluciones.}$$

- A) 12 B) 18 C) $2\sqrt{12}$
D) 0 E) $2\sqrt{6}$

32. Si α y β son la mayor y menor solución de la ecuación

$$|x^2+|x-1||=2x+1, \text{ calcule } \alpha^2-\beta^2.$$

- A) 0 B) 3 C) 4
D) 8 E) 1

33. Si el intervalo $(m; n)$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{|2x+3|-2}{|x+1|+3}<0, \text{ calcule } m-n.$$

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{5}{2}$

34. Resuelva la ecuación

$$|x^2 - 1| = |x - 1|$$

y calcule el número de sus soluciones.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

35. Resuelva la ecuación

$$|x + 5| = 2x + 1.$$

Si α es su solución, calcule $\alpha^2 + 1$.

- A) 26 B) 5 C) 6
D) 10 E) 17

36. El intervalo $(m; n)$ es el conjunto solución de la inecuación

$$|2016x + 1| < |x + 2016|.$$

Calcule $\frac{m+n}{2016}$.

- A) 0 B) $\frac{1}{2016}$ C) $\frac{1}{1008}$
D) 1 E) $-\frac{1}{2016}$

37. Resuelva la inecuación $x + |x - 1| > 3$.

- A) $(1; 3)$ B) $(1; +\infty)$ C) $(2; +\infty)$
D) $(3; +\infty)$ E) $(1; 2)$

38. Si α es la solución de la ecuación

$$|x - 2| + |x - 3| = x - 1, \text{ calcule } \frac{\alpha + 2}{\alpha - 2}.$$

- A) 3 B) 4 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{3}$

39. Calcule la suma de soluciones enteras de la ecuación $|x - 1| + |6 - x| = 5$.

- A) 20 B) 15 C) 18
D) 24 E) 21

40. Si α y β son las soluciones de la ecuación

$$|x - 1| + |x - 3| = 8, \text{ calcule } \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

- A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) -3

Claves

1	E	6	A	11	S	16	E	21	C	26	E	31	D	36	A
2	D	7	C	12	S	17	C	22	E	27	E	32	C	37	C
3	B	8	E	13	E	18	D	23	A	28	B	33	A	38	A
4	A	9	A	14	B	19	A	24	D	29	E	34	D	39	E
5	B	10	B	15	E	20	B	25	B	30	A	35	E	40	E

CAPÍTULO 11



TEORÍA DE FUNCIONES

La bolsa de valores es el lugar donde las personas ofrecen y compran los títulos valores (en el caso de las empresas son sus acciones) para obtener ganancias para ellos. La bolsa de valores juega un rol importante en la economía de un país, en ella se da una relación entre los inversionistas que buscan colocar su dinero para obtener una ganancia y las empresas que necesitan ese dinero como capital para invertir en el desarrollo de sus negocios. La bolsa de valores es la fuente más importante de suministro de capital a largo plazo. Los operadores de las bolsas de valores observan la evolución de indicadores bursátiles para saber la mejor manera de hacer una inversión. Generalmente, las funciones se representan mediante gráficos que describen sus subidas y bajadas a lo largo de un periodo de tiempo.

Aprendizajes esperados

- Conocer el concepto de función.
- Estudiar los conceptos de dominio rango y regla de correspondencia.
- Representar gráficamente una función en un plano cartesiano.
- Reconocer la función constante, lineal, cuadrática y valor absoluto.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

El concepto de función es uno de los más importantes de las matemáticas porque a partir de este se desarrollan otros conceptos fundamentales como las derivadas o las integrales, los cuales son los pilares del cálculo superior. Asimismo, las funciones permiten crear modelos matemáticos que representan algún fenómeno de la realidad con el fin de entender mejor el fenómeno en cuestión, y además resolver los posibles problemas y también hacer predicciones.



Teoría de funciones

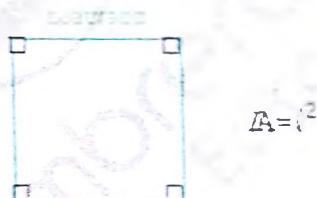
Se refiere al estudio de las funciones, los conceptos relacionados a ellas, como dominio y rango, sus representaciones (mediante una fórmula, tabla de datos, gráfico, etc.) y sus propiedades. En particular, estudiaremos funciones reales como la lineal, la cuadrática, etc.

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

La forma más usual en la que aparece una función es como dependencia de una variable respecto a otra. Es decir, si una variable y depende de una variable x diremos que y está en función de x .

Ejemplos

- El área de un cuadrado depende del valor de su lado. Esta relación queda expresada en la fórmula $A = l^2$, donde A es el área del cuadrado y l es el valor de su lado. Como A depende de l , diremos que A es una función de l .



- Juan gana 2 soles por helado vendido y su ganancia G depende del número de helados que venda, es decir
 - Si vende 1 helado, gana 2 soles.
 - Si vende 2 helados, gana 4 soles.
 - Si vende 3 helados, gana 6 soles.
 - En general, si vende x helados, gana $2x$ soles.

La fórmula $G = 2x$ expresa que la ganancia G es igual a $2x$ cuando se vende x helados. Como G depende de x , diremos que G es una función de x .

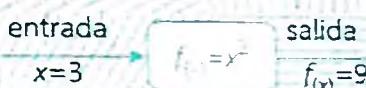
1.1. Función como asignación

Una función expresa una idea más general que la idea de dependencia, es decir, nos referimos a la idea de asignación, donde a los valores de una variable se le asignan los valores de otra.

Dato curioso

Una función puede entenderse también como una máquina en la cual se introduce un valor de entrada x y la máquina produce un valor de salida $f(x)$:

Ejemplo



No olvide

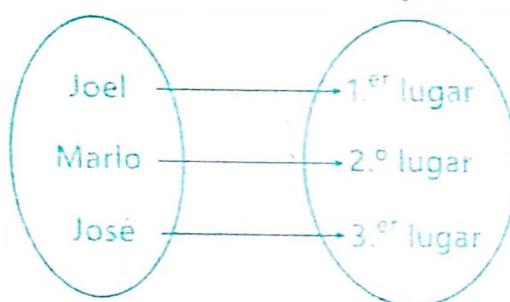
Las calculadoras sirven como ejemplos de una función.

Ejemplo

Al introducir el valor 9 y oprimir el botón $\sqrt{ }$ tenemos el valor 3. Esta función es la función raíz cuadrada.

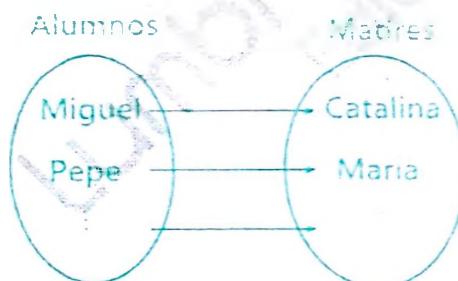
Ejemplos

1. En un concurso de matemáticas se premia a los tres primeros lugares. Joel quedó primero, Marlo fue segundo y José se ubicó tercero.



La relación entre los participantes y los lugares que obtuvieron en el concurso expresa la idea de una función que asigna a cada concursante el lugar que ocupó en el concurso.

2. En una reunión por el Día de la Madre, cada alumno asiste con su mamá. Ambos deben emparejarse para empezar la ceremonia. Así tendremos lo siguiente:



Como en el ejemplo anterior, esta relación expresa la idea de una función que asigna a cada alumno con su respectiva madre.

1.2. Relación de dependencia como asignación

Una relación de dependencia puede entenderse también como una relación de asignación, ya que cuando una variable y depende de x podemos entender esta relación como una asignación donde a cada valor de x se le asigna un valor de y .

Importante

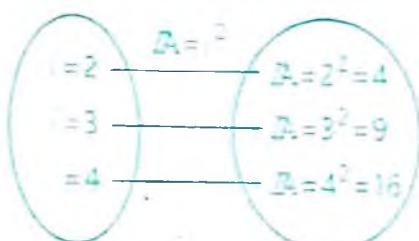
En la vida cotidiana y en diversas áreas del conocimiento se pueden observar muchos tipos de funciones.

Ejemplos

1. El tiempo que demora un auto en recorrer una determinada distancia depende de su velocidad.
2. En economía, la demanda de un bien depende del precio, de las preferencias del consumidor, de los precios de los bienes sustitutos, etc.
3. Cada ciudadano de nuestro país tiene un documento de identidad (DNI) que el Estado otorga. Aquí observamos una función que asigna a cada ciudadano su respectivo DNI.

Ejemplo

En el caso del área del cuadrado donde el área (A) depende de su lado (l), si le damos valores a l , obtenemos valores de A , como se muestra a continuación.



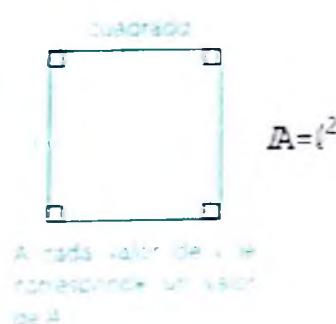
Podemos entender esta relación de dependencia (A depende de l) como una función que asigna a cada l un valor de A .

1.3. Condición de unicidad

Las funciones deben cumplir una condición llamada la condición de unicidad, la cual establece lo siguiente: "Si y está en función de x , entonces esta función debe asignar a cada valor de x , un valor de y ".

Ejemplo

En el área del cuadrado, definida por la fórmula $A = l^2$, ocurre que a un valor de l le corresponde un valor de A ; de esa forma se cumple con la condición de unicidad.



En conclusión, al hablar de una función nos referimos a una regla de asignación, pero no a cualquiera, sino a una que cumpla con la condición de unicidad.

2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función de A en B es una regla que asigna a cada $x \in A$ un $y \in B$, donde A y B son conjuntos no vacíos.

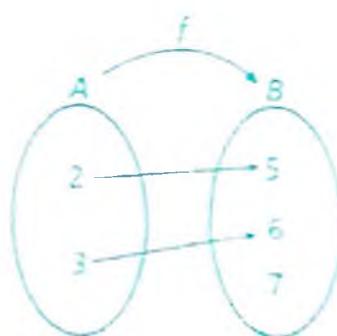
**Ejemplos**

1. En la siguiente relación:



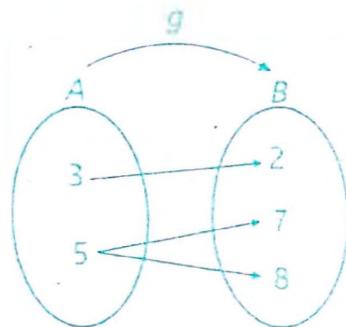
Observamos que a cada $x \in A$ le corresponde un $y \in B$, entonces esta relación es una función.

2. En la relación f , tenemos



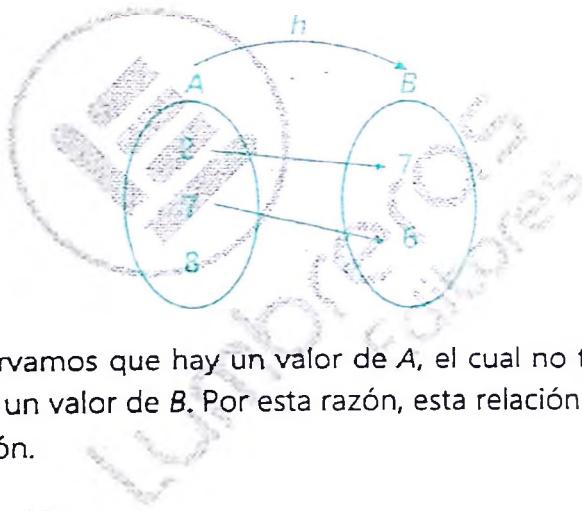
Observamos que a cada $x \in A$ le corresponde un único $y \in B$, entonces esta relación es una función.

3. En la relación g , tenemos



Observamos que $5 \in A$, pero tiene más de un valor de B , entonces esta relación no es una función.

4. En la relación h , tenemos



Observamos que hay un valor de A , el cual no tiene asignado un valor de B . Por esta razón, esta relación no es una función.

2.1. Notación

Una función f de A en B la representamos como

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow y \end{aligned}$$

donde

- El conjunto A es el conjunto de partida.
- El conjunto B es el conjunto de llegada.

2.2. Dominio de una función

Llamaremos dominio de la función f (representado como $\text{Dom } f$) al conjunto A .

$$\text{Dom } f = A$$

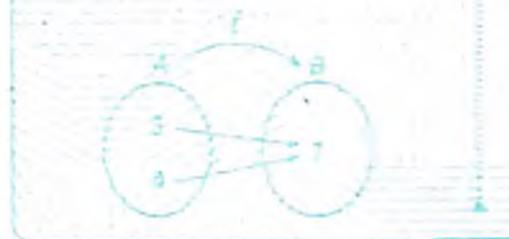


Importante

En una función de A en B puede ocurrir que a diferentes valores de A se le asigne el mismo valor de B .

Ejemplo

La función f asigna a diferentes valores de A el mismo valor de B .

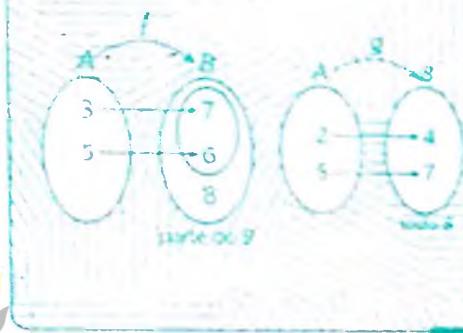


Cuidado!



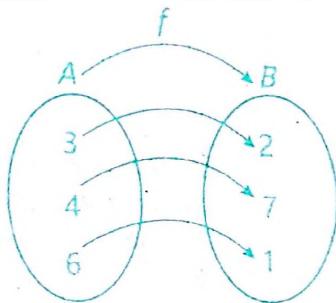
En una función de A en B se exige que se usen todos los elementos de A . Pero al conjunto B no se le hace tal exigencia. Puede ocurrir que use todos los elementos de B o solo una parte de ellos.

Ejemplos



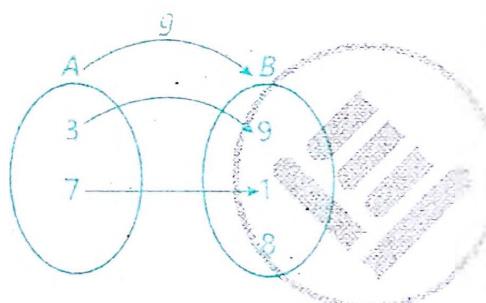
Ejemplos

1. En la siguiente función, tenemos



$$\text{Dom } f: A = \{3; 4; 6\}$$

2. En la siguiente función, tenemos



$$\text{Dom } g: A = \{3; 7\}$$

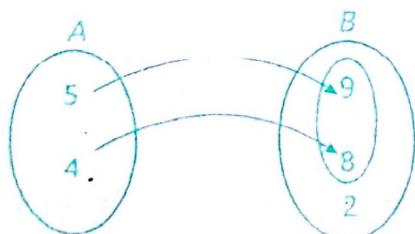
2.3. Rango de una función

Llamaremos rango de la función f representado como $\text{Ran } f$ al conjunto formado por todos los valores de B que han sido asignados a algún valor de A , es decir,

$$\text{Ran } f = \{y \in B / y \text{ le corresponde a algún } x \in A\}$$

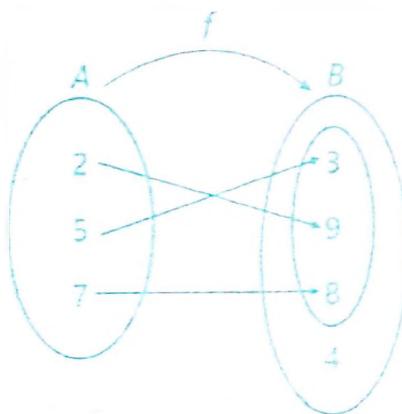
Ejemplos

1. En la siguiente función, tenemos



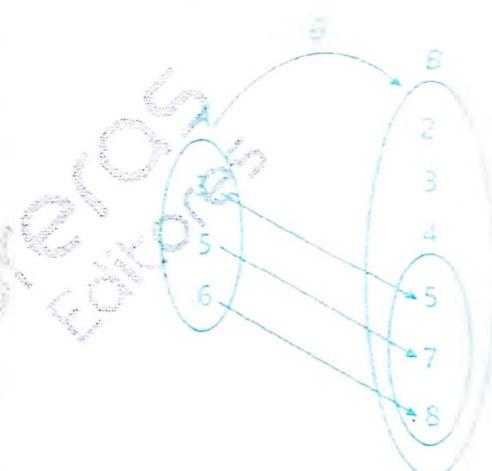
$$\text{Ran } f = \{9; 8\}$$

2. En la siguiente función, tenemos



$$\text{Ran } f = \{3; 9; 8\}$$

3. En la siguiente función, tenemos



$$\text{Ran } g = \{5; 7; 8\}$$

3. REGLA DE CORRESPONDENCIA

En una función f de A en B , la regla que permite hallar $y \in B$ a partir de $x \in A$, se llama regla de correspondencia y se representa como $y = f_{(x)}$.

Ejemplos

1. Sea f una función de A en B , tal que $f_{(x)} = x^2$ donde
- $A = \{3; 4; 5\}$
 - $B = \{4; 9; 16; 25\}$

En la función, la fórmula $f(x)=x^2$ representa su regla de correspondencia, la cual nos permitirá obtener los valores de $y \in B$, a partir de los valores de $x \in A$.

En una tabla de valores, tenemos

x	$y = f(x) = x^2$
3	$3^2 = 9$
4	$4^2 = 16$
5	$5^2 = 25$

Los valores que toma x son los valores del conjunto A , el cual representa su dominio, es decir, $\text{Dom } f = \{3; 4; 5\}$.

Los valores de y obtenidos a partir de $y=f(x)$ forman el rango de la función, es decir, $\text{Ran } f = \{9; 16; 25\}$.

2. Sea la función

$$f(x)=x^3+1; x \in \{2; 4; 0\}$$

La fórmula $f(x)=x^3+1$ es su regla de correspondencia.

Reemplazamos en ella los valores de x para obtener los valores de $f(x)$, los cuales forman el rango.

En una tabla de valores, tenemos

x	$f(x) = x^3 + 1$
2	9
4	65
0	1

Finalmente

$$\text{Dom } f = \{2; 4; 0\}$$

$$\text{Ran } f = \{9; 65; 1\}$$

Dato curioso



En una función de A en B , los conjuntos A y B pueden ser conjuntos formados por números, objetos, personas, etc. Cuando A y B son conjuntos formados por números reales, a la función se le llama función real de variable real.

Importante



El dominio de una función polinomial, cuando esta no se especifica, es \mathbb{R} .

Ejemplos

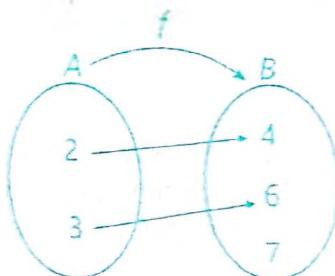
- $f(x)=5x+2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$
- $g(x)=x^2-3x+1 \rightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R}$

4. FUNCIONES REALES

Una función de A en B se llama función real cuando A y B son subconjuntos de \mathbb{R} .

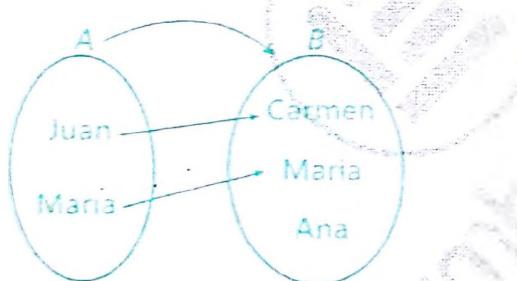
Ejemplos

- En la siguiente función, tenemos



Vemos que A y B son conjuntos formados por números reales, entonces esta función f es una función real.

- En la siguiente función, tenemos



Observamos que A y B no son conjuntos formados por números reales, entonces esta función g no es una función real.

4.1. Notación

Una función real f se representa de la siguiente manera:

$$y=f(x); x \in A$$

donde la fórmula $y=f(x)$ es su regla de correspondencia y el conjunto A es su dominio.

Ejemplos

- $f(x) = 2x + 1; x \in \{3; 5; 7\}$

• $\underbrace{g(x) = x^2 - 3}_{\text{regla de correspondencia}}; x \in \{1; 5\}$

dominio de la función

• $\underbrace{h(x) = \sqrt{x-2}}_{\text{regla de correspondencia}}; x \geq 2$

dominio de la función

4.2. Cálculo del dominio

Cuando en una función real solo se indica su regla de correspondencia, y no su dominio, este se calcula como

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ está definido en } \mathbb{R}\}$$

APLICACIÓN 1

Calcule el dominio de $f(x) = \frac{2}{x-5}$

RESOLUCIÓN

En una fracción, el denominador no puede ser igual a cero, ya que la división entre cero no está definida. Entonces ponemos la condición $x-5 \neq 0$, y obtenemos $x \neq 5$. Es decir, x puede ser cualquier número real, pero no 5.

$$\therefore \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{5\}$$

APLICACIÓN 2

Calcule el dominio de $f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{x-7}{x-2}$

RESOLUCIÓN

Los denominadores de las fracciones deben ser diferentes a cero.

Entonces

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

La variable x puede ser cualquier número real, a excepción de 1 y 2.

$$\therefore \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$$

APLICACIÓN 3

Calcule el dominio de $f_{(x)} = \sqrt{x-5} + 2$.

RESOLUCIÓN

En $\sqrt{x-5}$ no se puede permitir que $x-5$ sea negativo, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en \mathbb{R} .

Esta raíz cuadrada está definida en \mathbb{R} cuando $x-5$ es positivo o cero.

Debemos poner la condición $x-5 \geq 0$, de donde obtenemos $x \geq 5$.

$$\therefore \text{Dom } f = [5; +\infty)$$

4.3. Cálculo del rango

Para calcular el rango de una función f necesitamos conocer el dominio y la regla de correspondencia.

En la regla de correspondencia $y=f_{(x)}$ reemplazamos los valores de $x \in \text{Dom } f$, para obtener los valores de y . El conjunto que agrupa a todos los valores de y es el rango de f .

APLICACIÓN 4

Halle el rango de la función definida como

$$f_{(x)} = 2x+3; x \in \{1; 2; 4; 6\}$$

RESOLUCIÓN

Debemos hallar los valores de y mediante el reemplazo de los valores de x en la fórmula $f_{(x)} = 2x+3$.

Tenemos

x	$y = f_{(x)} = 2x+3$
1	$2(1)+3=5$
2	$2(2)+3=7$
4	$2(4)+3=11$
6	$2(6)+3=15$

$$\therefore \text{Ran } f = \{5; 7; 11; 15\}$$

No olvide

Para hallar el dominio de una función se debe saber lo siguiente:

1. La fracción $\frac{1}{x}$ está definida en \mathbb{R} si y solo si $x \neq 0$.
2. La expresión \sqrt{x} está definida en \mathbb{R} si y solo si $x \geq 0$.

APLICACIÓN 5

Halle el rango de $f(x) = 5x^2 + 1; x \in (2; 3)$.

RESOLUCIÓN

El dominio de esta función es el intervalo $(2; 3)$. Un intervalo tiene infinitos valores y no es posible reemplazarlos uno a uno en $f(x)$.

Aplicaremos las propiedades de desigualdades para hallar los valores de $f(x)$.

Tenemos

$$x \in (2; 3)$$

Entonces

$$2 < x < 3$$

Elevamos al cuadrado.

$$4 < x^2 < 9$$

$$20 < 5x^2 < 45$$

$$21 < \underbrace{5x^2 + 1}_{f(x)} < 46$$

Los valores de $f(x)$ forman el rango de la función, entonces

$$f(x) \in (21; 46)$$

$$\therefore \text{Ran } f = (21; 46)$$

APLICACIÓN 6

Halle el rango de $f(x) = \sqrt{x+5} - 1$ si $x \geq 4$.

RESOLUCIÓN

Como $x \geq 4$, entonces $\text{Dom } f = [4; +\infty)$.

El dominio de f es un intervalo. Usaremos las desigualdades para hallar los valores de $f(x)$.

Tenemos que $x \geq 4$.

$$x \geq 4$$

$$x+5 \geq 9$$

Extraemos la raíz cuadrada.

$$\sqrt{x+5} \geq \sqrt{9}$$

$$\sqrt{x+5} - 1 \geq \sqrt{9} - 1$$

$$f(x) \geq 3 - 1$$

$$f(x) \in [2; +\infty)$$

Graficamos



$$\therefore \text{Ran } f = [2; +\infty)$$

APLICACIÓN 7

Halle el rango de $f(x) = x^2 + 5$.

RESOLUCIÓN

La expresión $f(x) = x^2 + 5$ está definida en \mathbb{R} para cualquier valor real de x .

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces

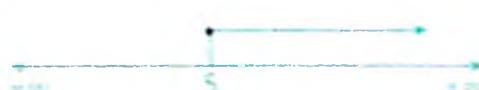
$$x^2 \geq 0$$

Sumamos 5 y obtenemos

$$x^2 + 5 \geq 5$$

$$f(x) \geq 5$$

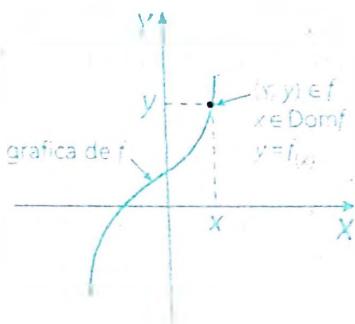
Graficamos



$$\therefore \text{Ran } f = [5; +\infty)$$

5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL

La gráfica de una función real f es el conjunto formado por los puntos $(x; y)$, representados en el plano cartesiano, donde $x \in \text{Dom}f$ y $y=f(x)$.



APLICACIÓN 8

Grafiqe la función

$$f(x)=x^2, x \in [-3; 3].$$

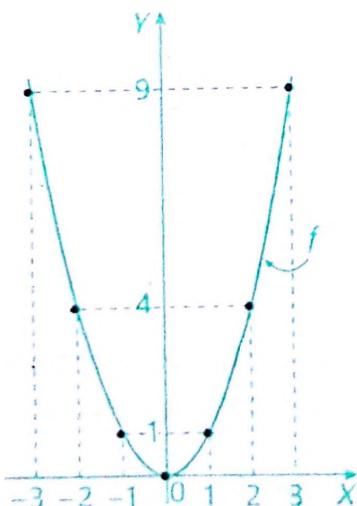
RESOLUCIÓN

En el intervalo $[-3; 3]$ hay infinitos valores.

Reemplazaremos algunos de ellos en $f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Ubicamos cada punto $(x; y)$ en el plano y obtenemos la gráfica aproximada de esta función.



APLICACIÓN 9

Grafiqe la función

$$f(x)=2x+3; x \in \mathbb{R}.$$

RESOLUCIÓN

Como x varía en \mathbb{R} , reemplazaremos unos cuántos valores en $f(x)$ y al unir los puntos que obtengamos, dibujaremos un esbozo de la gráfica de esta función.

x	... -3	-2	-1	0	1	2 ...
$y=f(x)=2x+3$... -3	-1	1	3	5	7 ...

Observamos su gráfica.



APLICACIÓN 10

Grafiqe la función $f(x)=\sqrt{x-1}$.

RESOLUCIÓN

Debemos calcular el dominio. Al ser una raíz cuadrada, $x-1$ no puede ser negativo, sino positivo o cero. Entonces ponemos la condición $x-1 \geq 0$, donde $x \geq 1$.

Cuidado!

Cuando el dominio de la función es un intervalo, el gráfico de la función será una línea continua.

Ejemplo
 $f(x) = 2x + 1$
 $x \in [3; 4]$

El dominio es un intervalo.

gráfico de f (una línea continua)

Importante

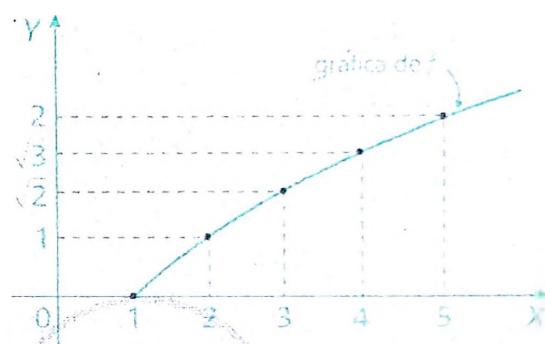
En el gráfico de una función se puede observar el dominio y el rango de una función.

- El dominio es la variación en el eje X .
Del gráfico, $\text{Dom } f = [a; b]$.
- El rango es la variación en el eje Y .
Del gráfico, $\text{Ran } f = [m; n]$.

Reemplazamos algunos valores de x en $f(x)$:

x	1	2	3	4	5...
$y = f(x) = \sqrt{x-1}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2...

Ubicamos estos puntos en el plano y finalmente hacemos un dibujo aproximado de la gráfica de esta función.



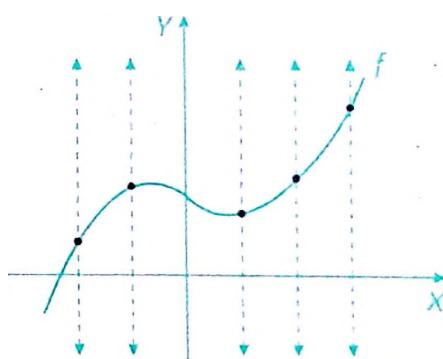
5.1. Prueba de la recta vertical

Cualquier gráfico en el plano no representa una función. Para que sea así tiene que cumplir la siguiente condición:

Cualquier recta vertical (paralela al eje Y) corta la gráfica de una función, como máximo, en un punto.

Ejemplos

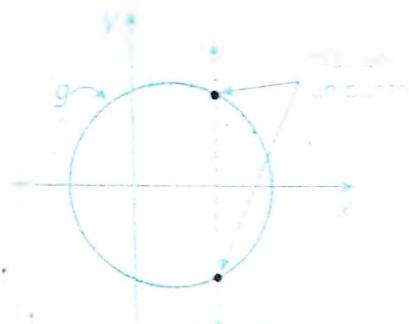
1. En la siguiente gráfica, tenemos



Observamos que sin importar por donde se trace una recta vertical, siempre cortará la gráfica de f , como máximo, en un punto.

Por lo tanto, f es una función.

2. En la siguiente gráfica, tenemos



Observamos que hay una recta vertical que corta la gráfica de g en más de un punto. Por lo tanto, g no representa una función.

No olvide

Un par ordenado se representa como

$$(a, b)$$



6. FUNCIÓN COMO CONJUNTO DE PARES ORDENADOS

Una función como un conjunto formado por pares ordenados se define de la siguiente manera:

$$f = \{(x; y) / x \in \text{Dom} f \wedge y = f_{(x)}\}$$

Ejemplo

Sea la función

$$f_{(x)} = 2x, x \in \{3; 4; 5\}$$

En un tabla de valores, tenemos

x	3	4	5
$f_{(x)}$	6	8	10

Esta función como un conjunto de pares ordenados se representa como

$$f = \{(3; 6), (4; 8), (5; 10)\}$$

6.1 Condición de unicidad

Para que un conjunto f , formado por pares ordenados, represente una función debe cumplir la siguiente condición:

$$(x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \rightarrow y = z$$

APLICACIÓN 11

Sea $f = \{(2; 5); (2; m+1); (3; 7)\}$.

Halle m para que f sea una función.

Importante



Un conjunto formado por pares ordenados diferentes es una función si y solo si los primeros componentes son diferentes entre sí.

Ejemplos

1. $f = \{(3; 4), (2; 7), (8; 9)\}$

Como los primeros componentes son diferentes, entonces f es una función.

2. $g = \{(2; 7), (3; 5), (3; 6)\}$

Como se repite el primer componente en dos pares ordenados, entonces g no es una función.

RESOLUCIÓN

En los puntos $(2; 5)$ y $(2; m+1)$ se repite la primera componente.

Por la condición de unicidad, para que f sea una función debemos igualar sus segundas componentes.

Entonces

$$(2; 5) \wedge (2; m+1) \in f \rightarrow 5 = m+1$$

$$\therefore m=4$$

7. FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

Una razón por la que las funciones son importantes es porque sirven como modelos para representar algún fenómeno de la realidad.

Ejemplos

- Un estudiante de la academia Aduni rinde un examen cada semana. El lleva la cuenta de sus resultados y observa que cada vez mejora sus notas. Desde la primera hasta la quinta semana sus resultados se muestran en el siguiente cuadro:

SEMAYA	NOT.
1	23
2	27
3	31
4	35
5	39

Haremos un modelo matemático que nos permita predecir su nota en la semana 6.

Observamos que hay una correspondencia entre el número de semana y su correspondiente nota, tal como se indica en el siguiente diagrama:

x	$f(x)$
1	$23 = 19 + 4(1)$
2	$27 = 19 + 4(2)$
3	$31 = 19 + 4(3)$
4	$35 = 19 + 4(4)$
5	$39 = 19 + 4(5)$

La variable x representa el número de semana y el valor $f(x)$ representa la nota que obtuvo en la semana x .

**No alvide**

Una función puede representarse de varias formas distintas.

Ejemplos

- Con una fórmula: $f(x) = 2x$
- Con una tabla de datos

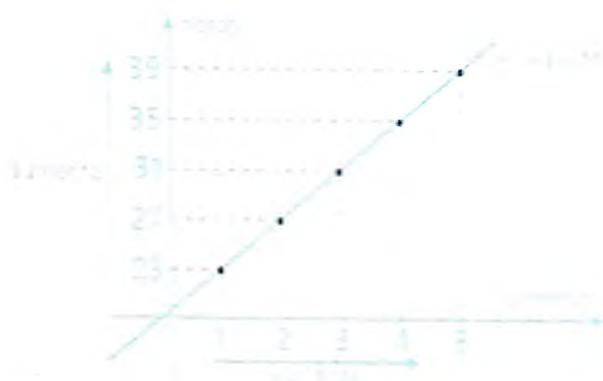
x	1	2	3	4	...
$f(x)$	2	4	6	8	...

- Con un gráfico



Esta función es un modelo matemático que expresa el comportamiento de las notas conforme pasan las semanas.

Su gráfica es



Para obtener la posible nota de la semana 6 debemos calcular $f_{(6)}$:

$$f(x) = 4x + 19$$

$$f_{(6)} = 4(6) + 19$$

$$f_{(6)} = 43$$

Por lo tanto, la nota que podría obtener en la semana 6 sería 43.

2. El ingreso I de una empresa, por la venta de uno de sus productos, depende de su precio p y se calcula como

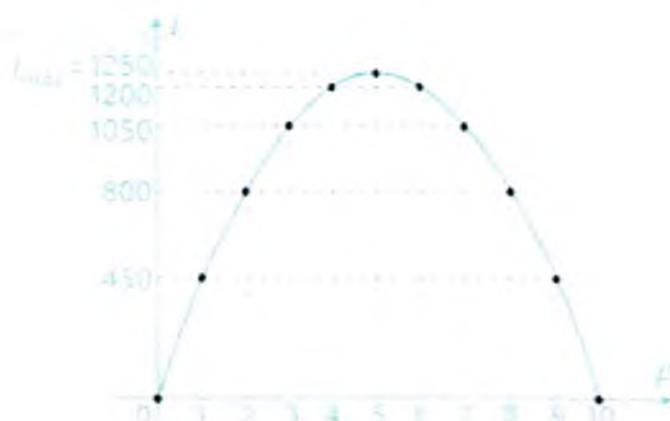
$$I = 50p(10 - p)$$

donde I y p están en soles. ¿Para qué valor de p el ingreso de la empresa es su máximo?

Para responder a esta pregunta, haremos una tabla de valores para I y p .

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	0	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800	450	0

El comportamiento de cómo varía I , conforme p va en aumento, se visualiza mejor en la siguiente gráfica:



Observamos que

- Cuando el precio es $p=0$, el ingreso es $I=0$. La razón es que si $p=0$ significa que el artículo es gratis y tiene sentido que no haya ingresos.
- Cuando el precio aumenta de $p=0$ a $p=5$, el ingreso se incrementa también de $I=0$ a $I=1250$.

Cuando el ingreso aumenta de $p=5$ hasta $p=10$, el ingreso disminuye hasta llegar a $I=0$.

Cuando $p=5$, el ingreso I es el máximo.

Por lo tanto, el ingreso es el máximo cuando el precio del artículo es igual a 5 soles.

8. FUNCIONES ELEMENTALES

Las funciones son útiles cuando se quieren modelar situaciones de la vida real.

Es importante estudiar ciertas funciones para conocerlas y así podamos hacer un buen uso de ellas.

8.1. Función constante

Es aquella que asigna a cada x real un número real c . Es decir, f es una función constante si

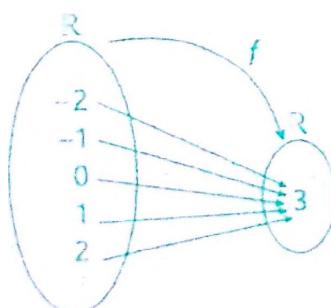
$$f(x) = c; x \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

$$1. f(x) = 3; x \in \mathbb{R}$$

Esta función asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ la constante 3.

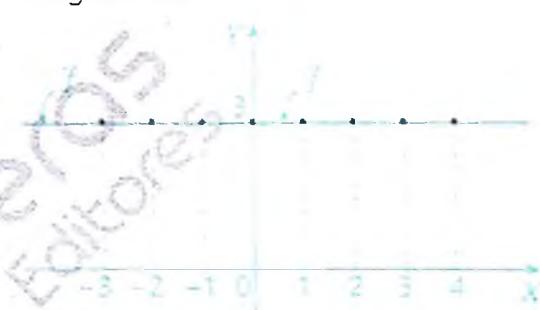
En el diagrama, tenemos



En una tabla de datos, tenemos

x	$f(x)$
⋮	⋮
-2	$f_{(-2)} = 3$
-1	$f_{(-1)} = 3$
0	$f_0 = 3$
1	$f_1 = 3$
2	$f_2 = 3$
⋮	⋮

Su gráfica es

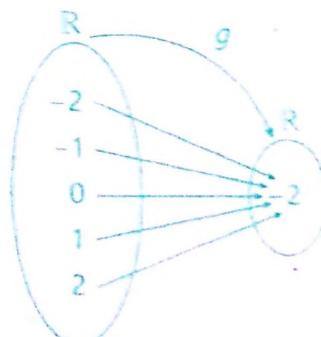


Por lo tanto, su gráfica es la recta horizontal que corta al eje Y en $y=3$.

$$2. g(x) = -2; x \in \mathbb{R}$$

Esta función asignará a cada x real la constante -2.

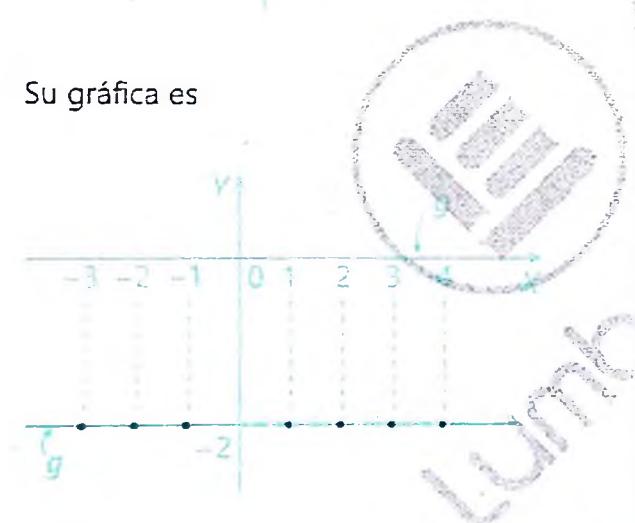
En el diagrama, tenemos



En la tabla de valores, tenemos

x	$g(x)$
\vdots	\vdots
-2	$g_{(-2)}=2$
-1	$g_{(-1)}=-2$
0	$g_0=-2$
1	$g_{(1)}=-2$
2	$g_{(2)}=-2$
\vdots	\vdots

Su gráfica es



Por lo tanto, su gráfica es la recta horizontal que corta al eje Y en $y=-2$.

3. $h(x)=6; x \in \mathbb{R}$

Su gráfica es



8.2. Función lineal

Una función f es lineal si tiene la forma

$$f(x)=ax+b; x \in \mathbb{R}$$

donde $a; b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$.

Ejemplos

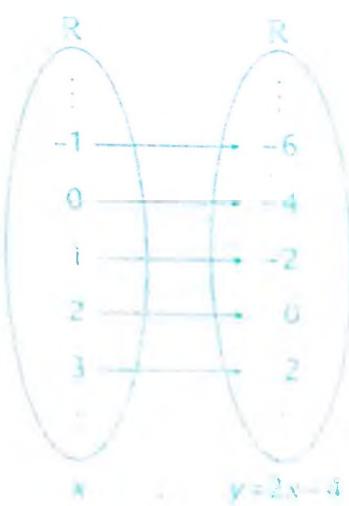
1. $f(x)=2x-4; x \in \mathbb{R}$

Esta función asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ su correspondiente $y=2x-4$.

En la tabla de datos, tenemos

x	$y=2x-4$
\vdots	\vdots
-1	$2(-1)-4=-6$
0	$2(-0)-4=-4$
1	$2(1)-4=-2$
2	$2(2)-4=0$
3	$y=2(3)-4=2$
\vdots	\vdots

En el diagrama, tenemos



Función identidad
A la función lineal $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$, se le conoce como función identidad.

Tabla de valores

x	... -2 -1 0 1 2 ...
$f(x)$... -2 -1 0 1 2 ...

En el plano cartesiano, tenemos

Punto de corte entre dos rectas
Sean las rectas

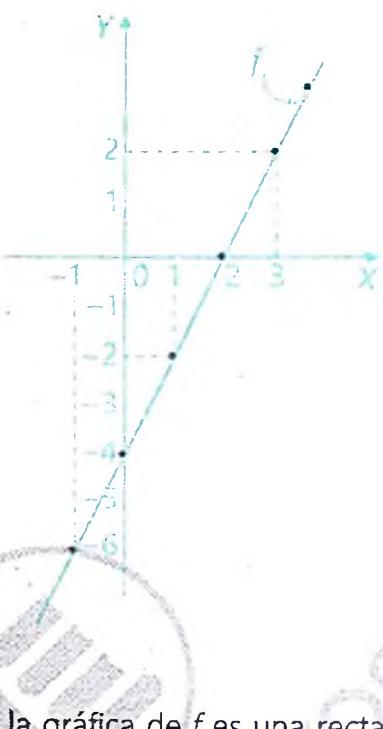
$$\mathcal{L}_1 = y = ax + b$$

$$\mathcal{L}_2 = y = cx + d$$

El punto de intersección de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 es aquel punto $P=(x_0; y_0)$ que verifica el siguiente sistema de ecuaciones de incógnitas x y y .

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

Su gráfica es



Por lo tanto, la gráfica de f es una recta inclinada hacia la derecha.

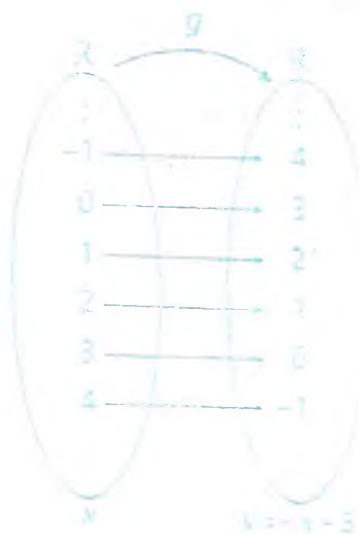
2. $g(x) = -x + 3$; $x \in \mathbb{R}$

Esta función asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ su correspondiente $y = -x + 3$.

En la tabla de valores, tenemos

x	$y = -x + 3$
...	...
-1	$y = -(-1) + 3 = 4$
0	$y = -(0) + 3 = 3$
1	$y = -(1) + 3 = 2$
2	$y = -(2) + 3 = 1$
3	$y = -(3) + 3 = 0$
4	$y = -(4) + 3 = -1$
...	...

En el diagrama, tenemos



Su gráfica es



Por lo tanto, la gráfica de g es una recta inclinada hacia la izquierda.

8.2.1. Cortes con los ejes

La gráfica de una función lineal es una recta (no es horizontal ni vertical).

Para graficar una recta solo se necesita conocer dos puntos. Podrían ser dos puntos cualesquiera, pero es preferible que sean los cortes con los ejes, los cuales tienen su modo de cálculo.

a. Punto de corte con el eje X

Los obtenemos al resolver la ecuación $f_{(x)}=0$.

b. Punto de corte con el eje Y

Los obtenemos si la función la evaluamos en $x=0$.

Ejemplos

$$1. \quad f_{(x)}=x-2; \quad x \in \mathbb{R}$$

Calculamos los cortes con los ejes.

- Punto de corte con el eje X

$$f_{(x)}=0$$

$$f_{(x)}=x-2=0$$

$$x=2$$

El punto $(2; 0)$ es el corte con el eje X .

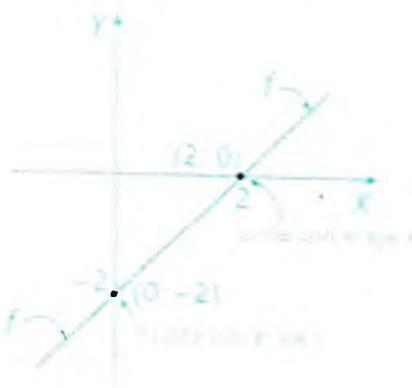
- Punto de corte con el eje Y

Evaluamos la función en $x=0$

$$y=f_{(0)}$$

$$y=0-2=-2$$

El punto $(0; -2)$ es el corte con el eje Y . Ubicamos estos dos puntos en el plano y trazamos la recta que pasa por esos puntos; por lo tanto, dicha recta es la gráfica de esta función.



2. $g(x) = -2x + 3; x \in \mathbb{R}$

Calculamos los cortes con los ejes.

- Punto de corte con el eje X

$$g(x) = 0$$

$$g(x) = -2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

El punto $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ es el corte con el eje X.

- Punto de corte con el eje Y

Evaluamos la función en $x=0$.

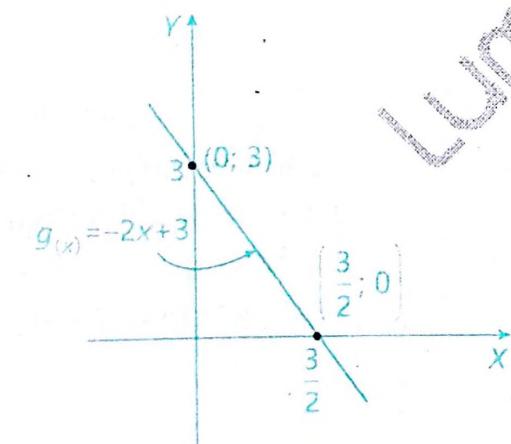
$$y = g(0)$$

$$y = -2(0) + 3$$

$$y = 3$$

El punto $(0; 3)$ es el corte con el eje Y.

Su gráfica es



8.2.2. Inclinación de una recta

Respecto a la gráfica de la función lineal

$f(x) = ax + b$, que es una recta, se cumple que

- Cuando $a > 0$, la recta está inclinada hacia la derecha.

- Cuando $a < 0$, la recta está inclinada hacia la izquierda.
- El término independiente de $f(x)$, que es b , indica el corte en el eje Y.

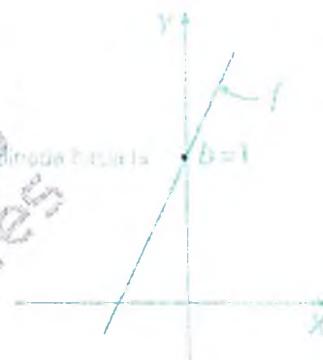
Ejemplos

1. $f(x) = 3x + 1; x \in \mathbb{R}$

Como $a = 3 > 0$, entonces la recta estará inclinada hacia la derecha.

El valor $b = 1$ indica el corte con el eje Y.

Su gráfica es

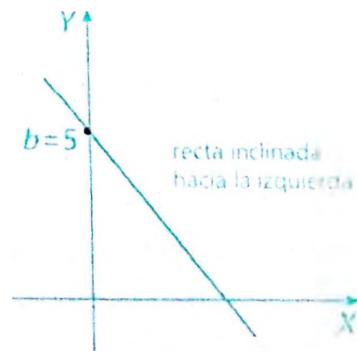


2. $g(x) = -2x + 5; x \in \mathbb{R}$

Como $a = -2 < 0$, entonces estará inclinada hacia la izquierda.

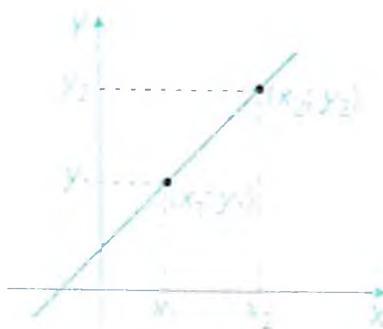
El valor $b = 5$ indica el corte con el eje Y.

Su gráfica es



8.2.3. Ecuación de una recta a partir de dos puntos

Sean $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ dos puntos de una recta como se muestra en la siguiente gráfica:



Para hallar la ecuación de esta recta procedemos de la siguiente manera:

Como es una recta inclinada, entonces representa una función lineal, por eso, su ecuación será de la forma

$$y=ax+b, a \neq 0$$

Para hallar los valores de a y b , reemplazamos los dos puntos conocidos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ en esta ecuación y tendremos

$$y_1=ax_1+b$$

$$y_2=ax_2+b$$

Luego, resolvemos este sistema y tendremos los valores de a y b .

Ejemplo

En la siguiente gráfica, tenemos



Observamos dos puntos de la recta: $(0; 2)$ y $(1; 5)$. La ecuación de la recta la expresamos en la forma

$$y=ax+b; a \neq 0$$

Los valores de a y b se calculan como

- Con el punto $(0; 2)$

$$a(0)+b=2$$

$$b=2$$

- Con el punto $(1; 5)$

$$a(1)+b=5$$

$$a+2=5$$

$$a=3$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y=3x+2$.

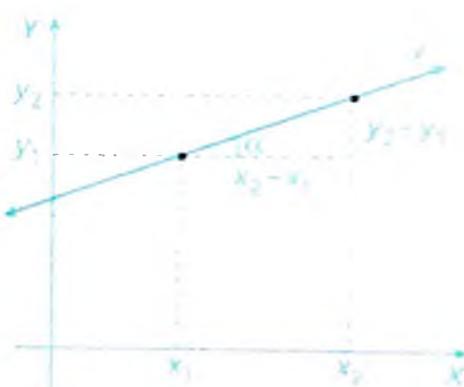
8.2.4. Pendiente de una recta

Sean $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ dos puntos cualesquiera de una recta \mathcal{L} .

La pendiente de esta recta se define como

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

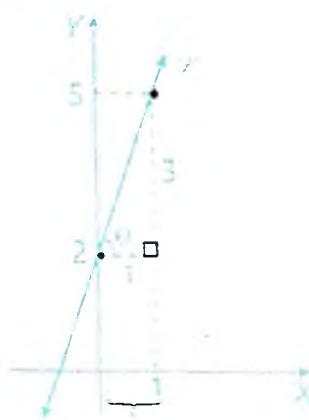
Su gráfica es



Observamos que la pendiente de la recta \mathcal{L} representa la tangente del ángulo α .

Ejemplo

En la gráfica, tenemos



La pendiente de \mathcal{L} es

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{5-2}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$$

Además

$$\tan \alpha = \frac{3}{1} = 3$$

$$\therefore m_{\mathcal{L}} = \tan \alpha.$$

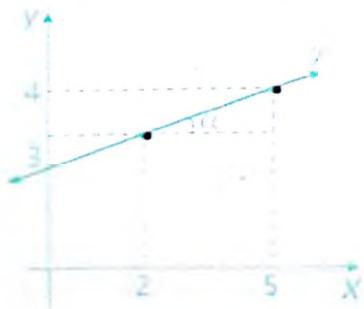
8.2.5. Relación de la ecuación de una recta con la pendiente

En una recta \mathcal{L} cuya ecuación es $y=ax+b$, se cumple que el coeficiente a es igual a la pendiente de \mathcal{L} .

El coeficiente b indica el corte con el eje Y .

Ejemplo

En la gráfica de la recta \mathcal{L} , tenemos



Su ecuación es de la forma $y=ax+b$.

El coeficiente a es su pendiente y se calcula como

$$a=m_{\mathcal{L}}$$

$$a = \frac{4-2}{2-0} \rightarrow a = \frac{1}{1}$$

Para calcular el valor de b , reemplazamos el punto $(2; 3)$ en la ecuación de la recta y tendremos.

$$y=ax+b$$

$$3 = 2 \left(\frac{1}{1} \right) + b \rightarrow b = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es
 $y = \frac{1}{1}x + \frac{1}{3}$

8.3. Función cuadrática

Una función f es una función cuadrática si

$$f(x) = ax^2 + bx + c; x \in \mathbb{R}$$

donde $a; b; c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Ejemplos

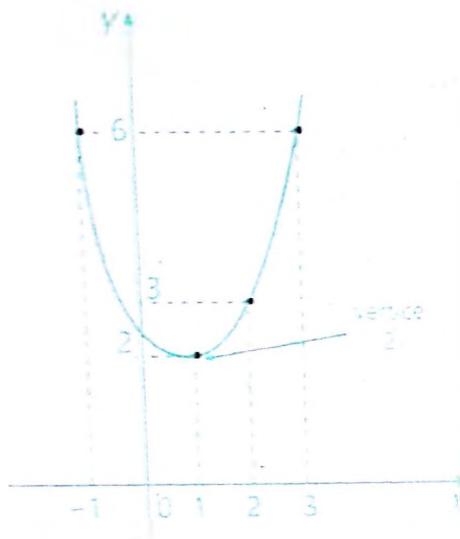
1. $f(x) = (x-1)^2 + 2; x \in \mathbb{R}$

Esta función asigna a cada x real su correspondiente $y = (x-1)^2 + 2$.

En una tabla de valores, tenemos

x	$y = (x-1)^2 + 2$
⋮	⋮
-1	$(-1-1)^2 + 2 = 6$
0	$(0-1)^2 + 2 = 3$
1	$(1-1)^2 + 2 = 2$
2	$(2-1)^2 + 2 = 3$
3	$(3-1)^2 + 2 = 6$
⋮	⋮

Su gráfica es



Observamos lo siguiente:

La gráfica de esta función es una curva llamada parábola.

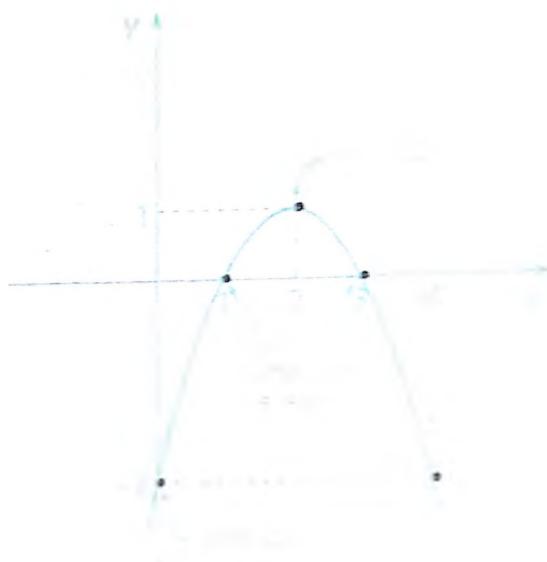
El punto $(1; 2)$ es llamado el vértice de la parábola. En este punto cuando $x=1$, $f(x)$ toma su mínimo valor que es 2.

$$2. \quad g(x) = -(x-2)^2 + 1; \quad x \in \mathbb{R}$$

En la tabla de valores, tenemos

x	$y = -(x-2)^2 + 1$
\vdots	\vdots
0	$-(0-2)^2 + 1 = -3$
1	$-(1-2)^2 + 1 = 0$
2	$-(2-2)^2 + 1 = 1$
3	$-(3-2)^2 + 1 = 0$
4	$-(4-2)^2 + 1 = -3$
\vdots	\vdots

Su gráfica es



Observamos lo siguiente:

Su gráfica es una parábola que se abre hacia abajo.

El punto $(2; 1)$ es el vértice de la parábola. Cuando $x=2$, $g(x)$ toma su máximo valor que es 1.

El corte en el eje Y es $(0; -3)$, que se obtiene al evaluar en $x=0$.

Los cortes con el eje X son $(1; 0)$ y $(3; 0)$, y se obtienen al resolver la ecuación $g(x)=0$.

8.3.1. Procedimiento para graficar

Sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, su gráfica es una parábola que tiene dos posibilidades:

- Cuando $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
- Cuando $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

En las siguientes gráficas se muestran las dos posibilidades.



En ambos casos, su vértice es el punto $(h; k)$, donde h y k se calculan como

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \wedge \quad k = f(h)$$

Ejemplos

1. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1; x \in \mathbb{R}$

Como $a=3 > 0$, la parábola se abrirá hacia arriba.

Su vértice es $(h; k)$. Calculamos h y k como

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(3)} = -\frac{2}{3}$$

Luego

$$k = f(h) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3}$$

Calculamos el vértice.

$$(h; k) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Luego

- Puntos de corte con el eje X

Resolvemos la ecuación $f(x)=0$.

$$\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 3x + x + 1 = 0 \\ 3x(x+1) + 1(x+1) = 0 \\ (3x+1)(x+1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+1 = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

Tenemos

$$(3x+1)(x+1) = 0$$

$$3x+1=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = -1$$

Los cortes con el eje X son $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ y $(-1; 0)$.

- Puntos de corte con el eje Y

Evaluamos en $x=0$.

$$y = f(0)$$

$$y = 3(0)^2 + 4(0) + 1 \rightarrow y = 1$$

El corte con el eje Y es $(0; 1)$.

Por lo tanto, la gráfica de f es



2. $g(x) = -x^2 + 2x + 3; x \in \mathbb{R}$

Como $a=-1 < 0$, la parábola se abrirá hacia abajo.

Calculamos el vértice $(h; k)$.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

Luego

$$k = g(1) = -1^2 + 2(1) + 3 = 4$$

Su vértice es $(h; k) = (1; 4)$.

- Puntos de corte con el eje X

Resolvemos la ecuación $g(x) = 0$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} -x & & 3 \\ \times & & \\ x & & 1 \end{array}$$

$$(-x+3)(x+1)=0$$

$$-x+3=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$x=3 \quad \vee \quad x=-1$$

Los cortes con el eje X son $(3; 0)$ y $(-1; 0)$.

- Puntos de corte con el eje Y

Evaluamos en $x=0$.

$$y = g(0)$$

$$y = -0^2 + 2(0) + 3 \rightarrow y = 3$$

El corte con el eje Y es $(0; 3)$.

Por lo tanto, la gráfica de g es



8.3.2 Vértice de la parábola

Otra forma de hallar el vértice es expresar la cuadrática en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. En tal caso, el punto $(h; k)$ es el vértice de la parábola.

Ejemplo

$$f(x) = x^2 + 6x + 3; x \in \mathbb{R}$$

Expresamos $f(x)$ en la forma indicada.

$$f(x) = x^2 + 6x + 3$$

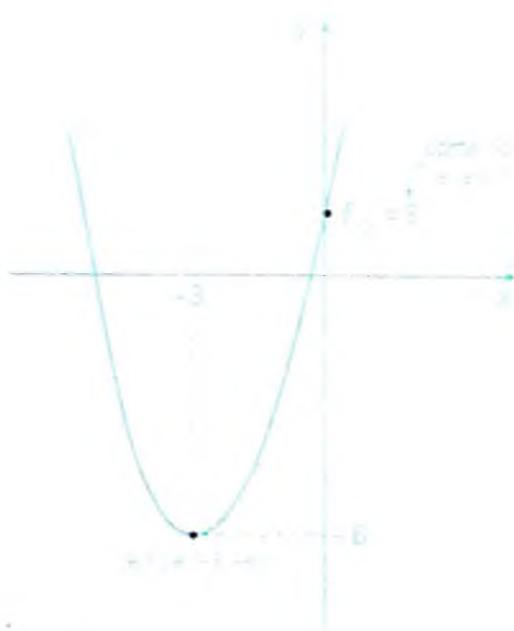
$$f(x) = \underline{x^2 + 6x} + 3 - 6$$

$$f(x) = (x+3)^2 - 6$$

donde $a=1$, $h=-3$ y $k=-6$.

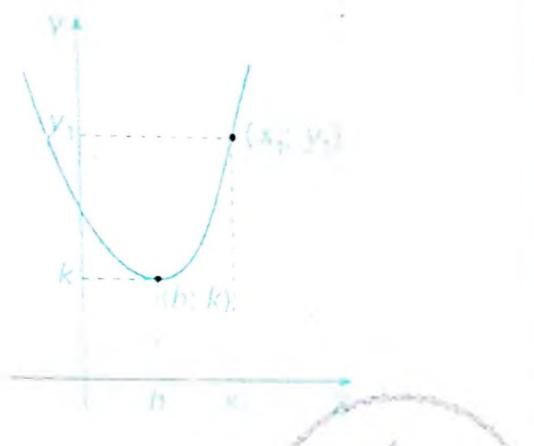
Luego, el vértice es $(h; k) = (-3; -6)$.

Como $a=1 > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba.



8.3.3. Ecuación de una parábola a partir del vértice

Cuando tengamos el vértice $(h; k)$ y otro punto cualquiera $(x_1; y_1)$ de una parábola como se muestra en el siguiente gráfico:



Expresamos la ecuación de la parábola de la siguiente forma:

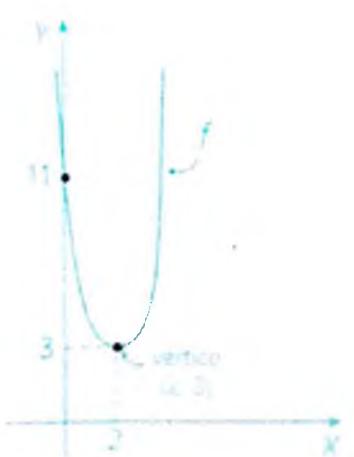
$$y=a(x-h)^2+k$$

Luego, los valores de h y k los obtenemos del vértice $(h; k)$, el cual es conocido.

Finalmente, el valor de a lo obtenemos si reemplazamos el punto $(x_1; y_1)$ en la ecuación de la parábola.

Ejemplo

En la siguiente gráfica



la ecuación de la parábola es

$$y=a(x-2)^2+3$$

De la gráfica, el vértice es $(h; k)=(2; 3)$.

$$h=2 \quad k=3$$

El corte con el eje Y es el punto $(0; 11)$ con el cual calcularemos el valor de a de la siguiente manera:

$$(0; 11) \in f$$

$$f_{(0)}=11$$

$$a(0-2)^2+3=11$$

$$4a+3=11$$

$$a=2$$

$$\therefore y=2(x-2)^2+3$$

8.3.4. Relación con las raíces

La raíces de una cuadrática $f_{(x)}$ indican los cortes con el eje X de la función f , y se obtienen cuando resolvemos la ecuación $f_{(x)}=0$.

Ejemplo

$$f_{(x)}=x^2-6x+5; x \in \mathbb{R}$$

Calculamos sus raíces.

$$f_{(x)}=x^2-6x+5=0$$

$$x = -5$$

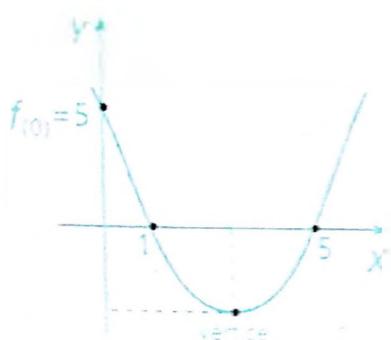
$$x = -1$$

$$(x-5)(x-1)=0$$

Sus raíces son $x=5$ y $x=1$.

Estos valores indican los cortes en el eje X .

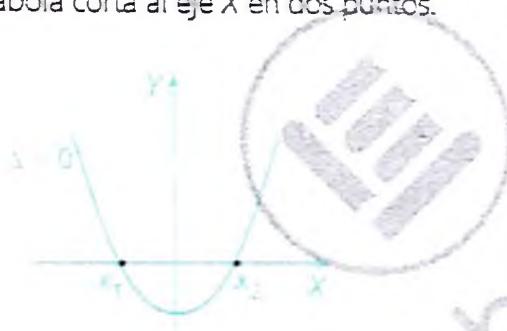
Su gráfica es



8.3.5 Relación con el discriminante

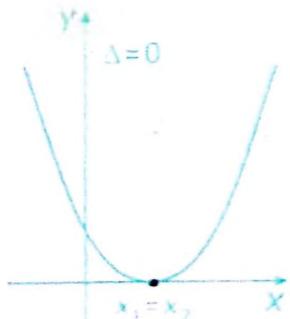
La gráfica de una función cuadrática, que es una parábola, presenta tres posibilidades:

1. La parábola corta al eje X en dos puntos.



Esto ocurre cuando sus raíces x_1 y x_2 son reales y diferentes, entonces su discriminante debe ser $\Delta > 0$.

2. La parábola corta al eje X en un solo punto.



Esto ocurre cuando sus raíces x_1 y x_2 son reales e iguales, entonces su discriminante debe ser $\Delta=0$.

3. La parábola no corta el eje X.



Esto ocurre cuando la cuadrática no tiene raíces reales, entonces $\Delta < 0$.

8.4 Función valor absoluto

Es aquella que tiene la forma

$$f(x) = a|x-h|+k; x \in \mathbb{R}$$

donde $a, h, k \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

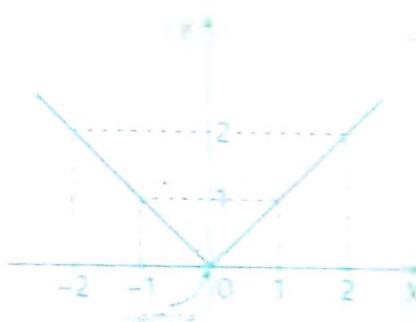
Ejemplos

1. Sea la función $f(x) = |x|; x \in \mathbb{R}$.

En una tabla de datos, tenemos

x	... -2	-1	0	1	2 ...
$f(x) = x $... 2	1	0	1	2 ...

Su gráfica es



Por lo tanto, esta gráfica está formada por dos semirrectas que parten del punto $(0; 0)$, al cual se le llama vértice.

2. Sea la función $f(x) = |x-2|; x \in \mathbb{R}$.

En la tabla de datos, tenemos

x	...	0	1	2	3	4	...
$f(x)$...	2	1	0	1	2	...

En la gráfica, tenemos



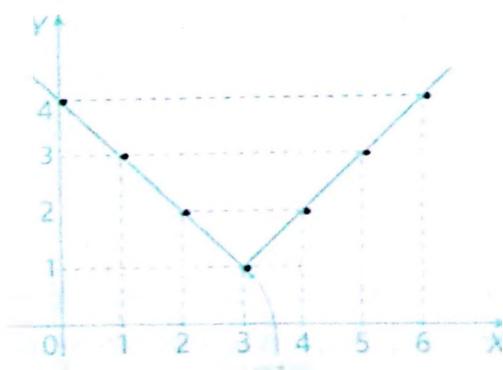
Por lo tanto, la gráfica mantiene una forma similar al ejemplo anterior, con la diferencia de que ahora el vértice es el punto $(2; 0)$.

3. Sea la función $f(x) = |x-3|+1; x \in \mathbb{R}$.

En la tabla de datos, tenemos

x	...	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$...	4	3	2	1	2	3	4	...

En la gráfica, tenemos



Por lo tanto, esta gráfica mantiene la misma forma que las anteriores con la diferencia de que ahora el vértice está en el punto $(3; 1)$.

4. Sea la función $f(x) = -|x-1|+2; x \in \mathbb{R}$.

En la tabla de datos, tenemos

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$f(x)$...	-1	0	1	2	1	0	-1	...

En la gráfica, tenemos



Por lo tanto, la gráfica se abre hacia abajo (a diferencia de los ejemplos anteriores). Esto ocurre cuando el coeficiente del valor absoluto es negativo.

8.4.1. Procedimiento para graficar la función con valor absoluto.

Para graficar la función

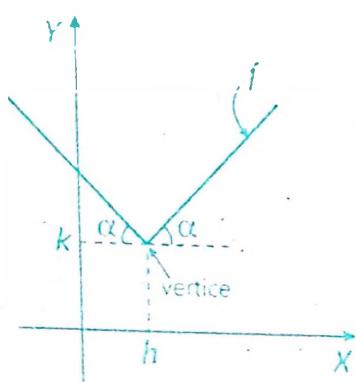
$$f(x) = a|x-h|+k, x \in \mathbb{R}$$

hallamos su vértice, el cual es el punto $(h; k)$.

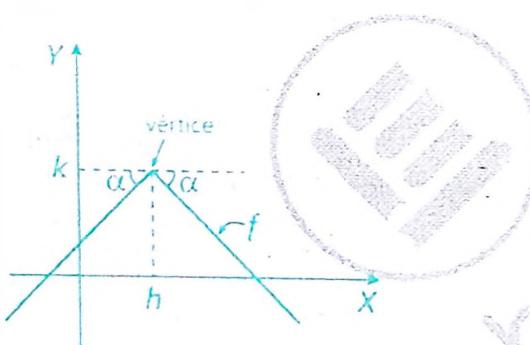
Luego, según el signo de a , se presentará uno de los siguientes casos:

Caso 1

Cuando $a > 0$, su gráfica es de la forma

**Caso 2**

Cuando $a < 0$, su gráfica es de la forma

**Ejemplos**

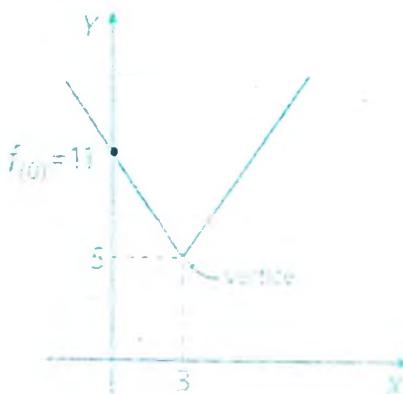
1. Grafique $f(x) = 2|x - 3| + 5$

donde

$$a=2, h=3 \text{ y } k=5.$$

Su vértice es el punto $(h; k)=(3; 5)$.

Como $a > 0$, su gráfica es



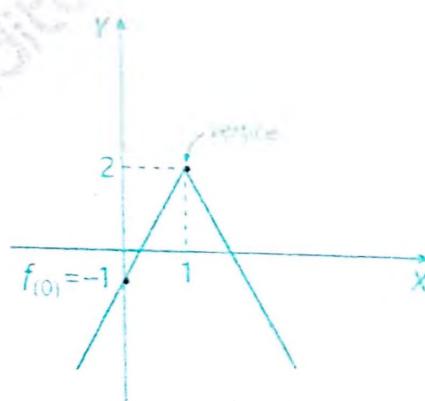
2. Grafique $f(x) = -3|x - 1| + 2$

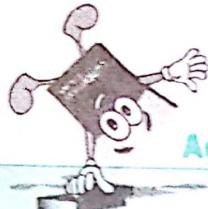
donde

$$a=-3 \quad h=1 \quad k=2$$

Su vértice es $(h; k)=(1; 2)$.

Como $a < 0$, su gráfica es

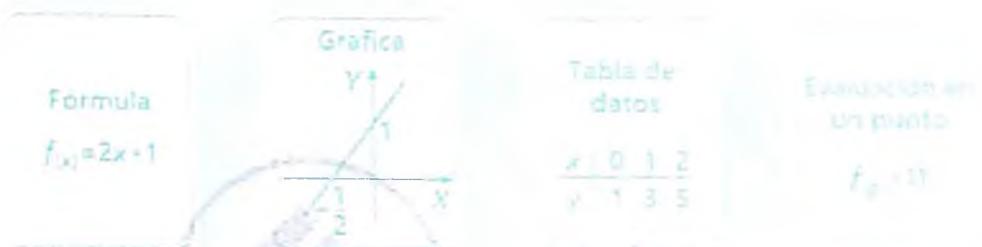




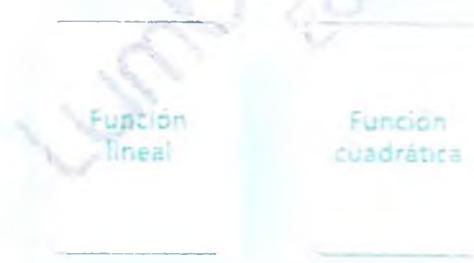
Actividad recreativa

Juegos de cartas con funciones

1. Con la función lineal y cuadrática se construirá un mazo de 72 cartas de la siguiente manera:
 - Cuatro cartas deben representar a una misma función. Diremos que son del mismo tipo.
- Ejemplo*



- Deben formarse 40 cartas en total, mediante 10 ejemplos distintos de funciones lineales o cuadráticas. Como se indicó en el punto anterior, cada función debe estar representada por cuatro cartas.
- Además, deben crearse dos cartas comodines de la siguiente manera:



2. Se juega entre dos o más jugadores, por turnos y por rondas.
3. Se reparten cuatro cartas para cada uno y se ponen en una mesa.
4. Si un jugador tiene una carta del mismo tipo de una que está en la mesa, se lleva las dos cartas; caso contrario, debe dejar una carta en la mesa.
5. En caso tenga una carta comodín, puede acumular cartas de este tipo al final de la ronda.
6. Cuando acabe la primera ronda, se repite el proceso desde el paso 3.
7. Gana quien al final acumule más cartas.

TEORÍA DE FUNCIONES

Una función de A en B asigna a cada $x \in A$ un $y \in B$.

Notación

$$f: A \rightarrow B$$

$$f$$



Regla de correspondencia

$$y = f(x)$$

Dominio

Conjunto de valores de x
 $\text{Dom } f = A$

Rango

Conjunto de valores de y
 $\text{Ran } f = \{y \in B / y = f(x)\}$

Notación

Una función real f se representa como
 $y \in f(x) ; x \in \text{Dom } f$
regla de correspondencia

Gráfica de una función

Es su representación en el plano cartesiano.

Dominio y rango
 $\text{Dom } f = \{\text{valores de } x\}$
 $\text{Ran } f = \{\text{valores de } f(x)\}$

Cálculo del dominio
 $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ está definido en } \mathbb{R}\}$

Prueba de la recta vertical

A la gráfica de una función cualquier recta vertical, como máximo, la corta en un punto.

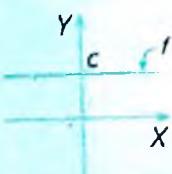
Condición de unicidad

El conjunto de pares ordenados f es una función si
 $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z$

Funciones elementales

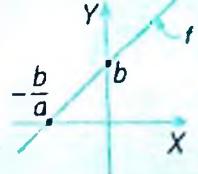
Función constante

$$f(x) = c$$



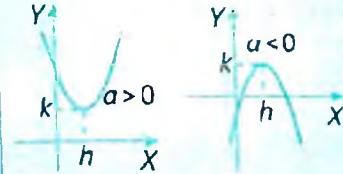
Función lineal

$$f(x) = ax + b; a \neq 0$$



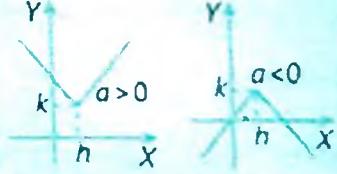
Función cuadrática

$$f(x) = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$$



Función valor absoluto

$$f(x) = a|x-h| + k; a \neq 0$$



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Sean los siguientes conjuntos:

- $f = \{(4; 8), (2; 9), (3; 9)\}$
- $g = \{(3; 5), (3; 6), (2; 8)\}$
- $h = \{(2; 9), (4; 5), (7; 11)\}$

Indique cuáles son funciones.

- A) h B) $g \wedge h$ C) $g \wedge f$
D) f E) $h \wedge f$

Resolución

- $f = \{(4; 8), (2; 9), (3; 9)\}$

Las primeras componentes son diferentes, entonces f es función.

- $g = \{(3; 5), (3; 6), (2; 8)\}$

Se repite las primeras componentes y son pares ordenados distintos, entonces g no es función.

- $h = \{(2; 9), (4; 5), (7; 11)\}$

Las primeras componentes son diferentes, entonces h es función.

Por lo tanto, h y f son funciones.

Clave

Problema N.º 2

Sea g una función.

$$g = \{(4; 5), (2; 8), (4; 3m - 1), (7; 11), (2; 4q)\}$$

Calcule el valor de $m - q$.

- A) 0 B) 2 C) -1
D) 4 E) 6

Resolución

Como g es una función, en los pares ordenados donde se repite la primera componente debemos igualar las segundas componentes.

Así tendremos

• $(4; 5) = (4; 3m - 1)$

$$5 = 3m - 1$$

$$6 = 3m$$

$$m = 2$$

• $(2; 8) = (2; 4q)$

$$8 = 4q$$

$$q = 2$$

∴ $m - q = 2 - 2 = 0$

Clave

Problema N.º 3

Halle el dominio de

$$M(x) = \sqrt{5x + 25}.$$

- A) $\langle 5; +\infty \rangle$ B) $[5; +\infty)$ C) $[-5; +\infty)$
D) $[-5; 25]$ E) $[-5; 3)$

Resolución

Como se trata de una raíz cuadrada, la condición para que esté bien definida es

$$5x + 25 \geq 0$$

Luego

$$5x \geq -25$$

$$x \geq -5$$

$$x \in [-5; +\infty)$$

El conjunto que agrupa a los valores de x es el dominio de esta función.

$$\therefore \text{Dom}M = [-5; +\infty)$$

Clave

Problema N.º 4

Obtenga el dominio de la función

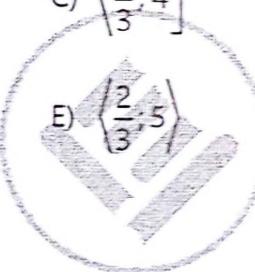
$$M_{(x)} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{5-x}.$$

A) \emptyset

B) $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$

C) $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$

D) $\left[\frac{2}{3}; 5\right]$



Resolución

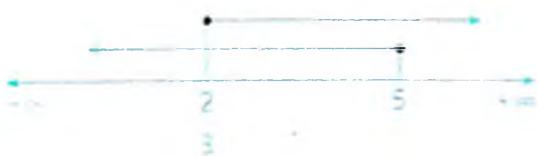
Tenemos dos raíces cuadradas y, en ambas, las condiciones para que estén bien definidas son

$$3x-2 \geq 0 \quad \wedge \quad 5-x \geq 0$$

$$3x \geq 2 \quad \wedge \quad 5 \geq x$$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x \leq 5$$

Intersecamos



$$\therefore \text{Dom}M = \left[\frac{2}{3}; 5\right]$$

Clave

Problema N.º 5

Halle el dominio de la función $H_{(x)} = \frac{3x+2}{x+4}$.

A) \emptyset

B) $\mathbb{R} \cup \{-4\}$

C) $\mathbb{R} - \{-4\}$

D) $\left(-\frac{3}{2}; 0\right]$

E) $\left(-4; -\frac{2}{3}\right]$

Resolución

Observamos una expresión fraccionaria, entonces su denominador debe ser diferente a cero.

Tenemos

$$x+4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

La variable x puede ser cualquier número real a excepción de -4 .

$$\therefore \text{Dom}H = \mathbb{R} - \{-4\}$$

Clave

Problema N.º 6

Si $x \in [5; 10]$, calcule el rango de la función g cuya regla de correspondencia es $g_{(x)} = 3x-8$.

A) $(7; 14)$

B) $(10; 18)$

C) $(7; 22)$

D) $[7; 22]$

E) $[7; 14]$

Resolución

Debemos calcular $g_{(x)} = 3x-8$ a partir de $x \in [5; 10]$.

Los valores de $g(x)$ formarán el rango de la función.

$$5 \leq x \leq 10$$

$$15 \leq 3x \leq 30$$

$$7 \leq 3x - 8 < 22$$

$$\therefore \text{Rang}=[7; 22]$$

Clave

Problema N.º 7

Si $x \in (-4; 6]$, calcule el rango de

$$R(x) = \frac{2x-5}{3}$$

A) $\left(-13; \frac{7}{3}\right]$

B) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right)$

C) $\left[-\frac{13}{3}; \frac{7}{3}\right]$

D) $\left(-\frac{13}{3}; \frac{7}{3}\right]$

E) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$

Resolución

Tenemos que $x \in (-4; 6]$.

$$-4 < x \leq 6$$

$$-8 < 2x \leq 12$$

$$-13 < 2x - 5 \leq 7$$

$$-\frac{13}{3} < \underbrace{\frac{2x-5}{3}}_{R(x)} \leq \frac{7}{3}$$

$$\therefore \text{Ran}R = \left(-\frac{13}{3}; \frac{7}{3}\right]$$

Clave

Clave

Problema N.º 8

Obtenga el rango de $M(x) = 4x^2 + 4x + 9$.

- A) $[4; 8]$ B) $[-8; +\infty)$ C) $[8; +\infty)$
 D) $[4; 9]$ E) $[9; +\infty)$

Resolución

Como es una función cuadrática, para hallar su rango debemos completar cuadrados.

$$M(x) = 4x^2 + 4x + 9$$

$$M(x) = \underline{4x^2 + 4x} + 8$$

$$M(x) = (2x+1)^2 + 8$$

Como es una función cuadrática, entonces su dominio es $x \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow 2x+1 \in \mathbb{R}$$

$$(2x+1)^2 \geq 0$$

$$\underline{(2x+1)^2} + 8 \geq 8$$

$$\therefore \text{Ran}M = [8; +\infty)$$

Clave

Problema N.º 9

Calcule el rango de la función R si

$$R(x) = 2x^2 + 4x + 8.$$

Consideré que $x \in [0; 2]$.

- A) $[2; 28]$ B) $[2; 8)$ C) $[8; 20)$
 D) $[8; 24)$ E) $(8; 30)$

Resolución

Completamos cuadrados.

$$R(x) = 2x^2 + 4x + 8$$

$$R(x) = 2(x^2 + 2x + 4)$$

$$R(x) = 2\left(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{{(x+1)}^2} + 3\right)$$

$$R(x) = 2((x+1)^2 + 3)$$

$$R(x) = 2(x+1)^2 + 6$$

Tenemos que $x \in [0; 2]$.

Luego

$$0 \leq x < 2$$

$$1 \leq x+1 < 3$$

$$1^2 \leq (x+1)^2 < 3^2$$

Finalmente

$$1 \leq (x+1)^2 < 9$$

$$2 \leq 2(x+1)^2 < 18$$

$$8 \leq \underline{2(x+1)^2} + 6 < 24$$

$$\therefore \text{Ran } R = [8; 24]$$

Clave

Problema N.º 10

$$\text{Si } H(x) = \frac{2x+6}{x+2}$$

tiene como dominio al intervalo $[3; 5]$, obtenga el rango de la función H .

A) $\left[\frac{12}{5}; +\infty\right)$ B) $\left(\frac{16}{7}; +\infty\right)$ C) $(2; 4]$

D) $\left[\frac{16}{7}; \frac{12}{5}\right]$

E) $\left(\frac{16}{7}; 3\right]$

Resolución

Expresamos $H(x)$ convenientemente.

$$H(x) = \left(\frac{2x+6}{x+2} - 2\right) + 2$$

$$H(x) = \frac{2x+6 - 2x - 4}{x+2} + 2$$

$$H(x) = \frac{2}{x+2} + 2$$

Tenemos que $x \in [3; 5]$.

Luego

$$3 \leq x < 5$$

$$5 \leq x+2 < 7$$

Invertimos

$$\frac{1}{5} \geq \frac{1}{x+2} > \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{5} \geq \frac{2}{x+2} > \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{5} + 2 \geq \frac{2}{x+2} + 2 > \frac{2}{7} + 2$$

$$\frac{12}{5} \geq H(x) > \frac{16}{7}$$

$\therefore \text{Ran } H = \left[\frac{16}{7}; \frac{12}{5}\right]$

Clave

Problema N.º 11

La función f tiene como regla de correspondencia a

$$f(x) = \frac{2x-6}{x},$$

además, $x \in [-12; -6]$. Halle su rango.

- A) $[12; 18)$ B) $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$ C) $\left[\frac{5}{2}; 6\right)$
 D) $\left[\frac{5}{4}; 12\right)$ E) $[-4; -1]$

Resolución

Expresamos $f(x)$ convenientemente.

$$f(x) = \frac{2x-6}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{6}{x}$$

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x}$$

Tenemos que $x \in [-12; -6]$.

Luego

$$-12 \leq x \leq -6$$

Invertimos

$$-\frac{1}{12} \geq \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{6}$$

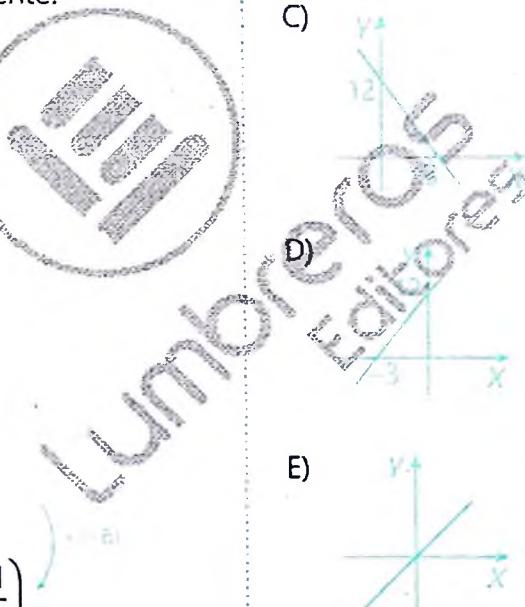
$$(-6)\left(-\frac{1}{12}\right) \leq -\frac{6}{x} \leq (-6)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2} \leq -\frac{6}{x} \leq 1$$

$$\frac{5}{2} \leq 2 - \frac{6}{x} \leq 3$$

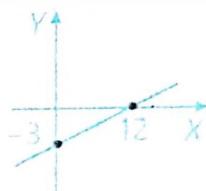
$$\frac{5}{2} \leq f(x) \leq 3$$

$$\therefore \text{Ran } f = \left[\frac{5}{2}; 3\right]$$

**Problema N.º 12**

Grafique la función lineal $g(x) = 3x - 12$.

A)



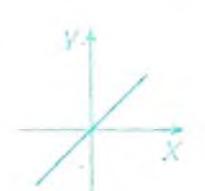
B)



C)



D)



E)

**Resolución**

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Eje X

$$g(x) = 3x - 12 = 0$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Al eje X lo corta en $x=4$.

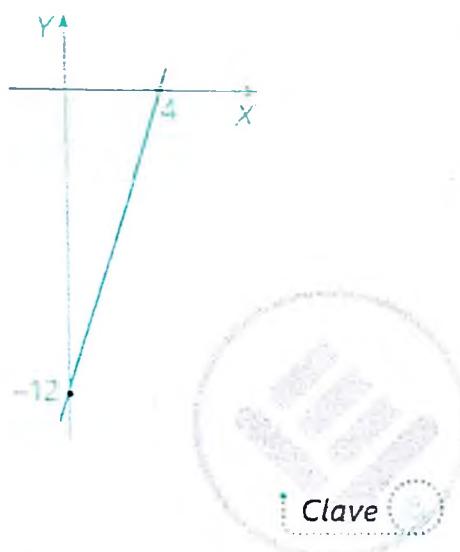
• Eje Y

$$y = g(0) \rightarrow y = 3(0) - 12$$

$$y = -12$$

Al eje Y lo corta en $y = -12$.

Por lo tanto, su gráfica es



Problema N.º 13

Halle el punto de intersección de las siguientes rectas:

• $\mathcal{L}_1: y = \frac{3x-2}{2}$

• $\mathcal{L}_2: y = 2x - 8$

A) $\left(-\frac{5}{4}; 8\right)$

B) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$

C) $(20; 28)$

D) $(14; 20)$

E) $(14; 18)$

Resolución

Hallamos los puntos de corte con los ejes para ambas rectas.

• $\mathcal{L}_1: y = \frac{3x-2}{2}$

• $\mathcal{L}_2: y = 2x - 8$

X	Y
0	-1
$\frac{2}{3}$	0

X	Y
0	-8
4	0

Su gráfica es



El punto P es la intersección de ambas rectas, el cual se calcula si igualamos sus ecuaciones de la siguiente manera:

$$y = \frac{3x-2}{2} = 2x - 8$$

$$3x - 2 = 4x - 16 \rightarrow x = 14$$

Para calcular y , reemplazamos el valor $x = 14$ en la ecuación

$$y = 2x - 8$$

$$y = 2(14) - 8$$

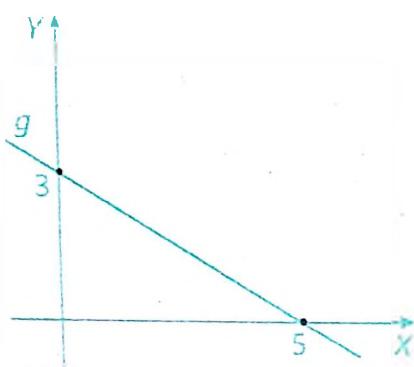
$$y = 20$$

Por lo tanto, el punto P es $(14; 20)$.

Clave D

Problema N.º 14

A partir de la siguiente gráfica:



halle $g_{(x)}$.

A) $g_{(x)} = \frac{3x - 5}{16}$

B) $g_{(x)} = \frac{3x - 15}{3}$

C) $g_{(x)} = \frac{15 - 3x}{5}$

D) $g_{(x)} = \frac{3x - 8}{2}$

E) $g_{(x)} = \frac{x - 5}{5}$

Resolución

Debido a que la gráfica de g es una recta, entonces debe ser una función lineal.

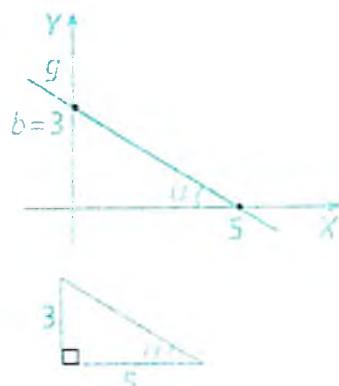
Luego

$$g_{(x)} = ax + b$$

El coeficiente a es la pendiente de la recta y se calcula como

$$a = -\tan \alpha = -\frac{3}{5}$$

El coeficiente b indica el corte con el eje Y , entonces b es igual a 3.



Reemplazamos los valores de a y b en $g_{(x)}$:

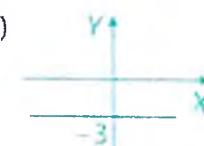
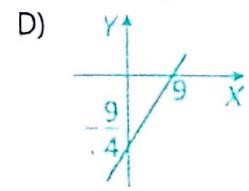
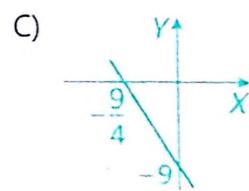
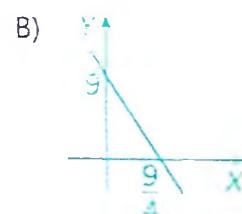
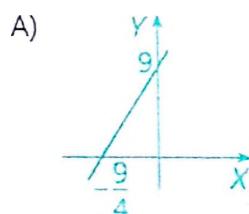
$$g_{(x)} = -\frac{3}{5}x + 3$$

$$\therefore g_{(x)} = \frac{15 - 3x}{5}$$

Clave

Problema N.º 15

Si $g_{(x)} = 2x + 3$, grafique la función $h_{(x)} = g_{(g_{(x)})}$.



Resolución

Hallamos $h_{(x)}$:

$$h_{(x)} = g(g_{(x)}) = 2g_{(x)} + 3$$

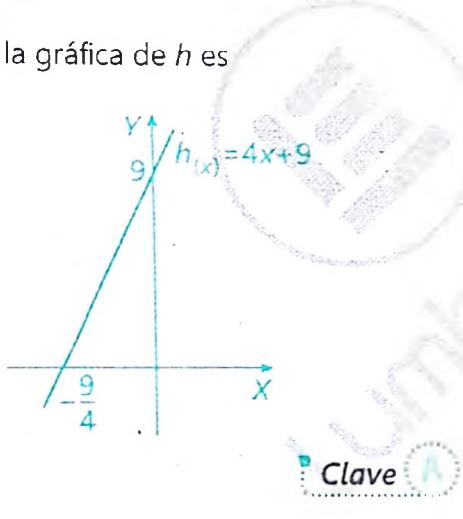
$$h_{(x)} = 2(2x+3)+3$$

$$h_{(x)} = 4x+9$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

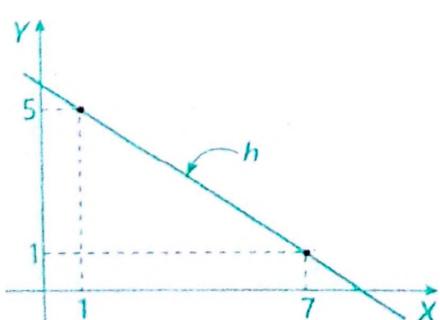
x	$h_{(x)}$
0	9 (corte con el eje Y)
$-\frac{9}{4}$	0 (corte con el eje X)

Finalmente, la gráfica de h es



Clave A

Halle la regla de correspondencia de la función lineal h , cuya gráfica es



A) $h_{(x)} = \frac{5x-1}{7}$

B) $h_{(x)} = \frac{5x+40}{6}$

C) $h_{(x)} = \frac{5x-2}{14}$

D) $h_{(x)} = \frac{5x-10}{7}$

E) $h_{(x)} = \frac{17-2x}{3}$

Resolución

Como la gráfica de h es una recta, entonces

$$h_{(x)} = ax + b$$

Reemplazamos los puntos $(1; 5)$ y $(7; 1)$ en $h_{(x)}$.

- Con el punto $(1; 5)$
 $h_{(1)} = 5 \rightarrow a+b=5$
- Con el punto $(7; 1)$
 $h_{(7)} = 1 \rightarrow 7a+b=1$

Resolvemos el sistema.

$$\begin{aligned} 7a+b &= 1 \\ a+b &= 5 \\ \hline 6a &= -4 \rightarrow a = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de a en la ecuación.

$$a+b=5$$

Luego

$$-\frac{2}{3} + b = 5 \rightarrow b = \frac{17}{3}$$

Reemplazamos los valores de a y b en $h_{(x)}$.

$$h_{(x)} = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$$

$$\therefore h_{(x)} = \frac{17-2x}{3}$$

Clave E

Problema N.º 17

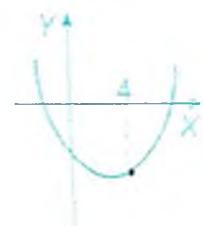
Grafiqque la función

$$f(x) = x^2 - 8x - 2; x \in \mathbb{R}.$$

A)



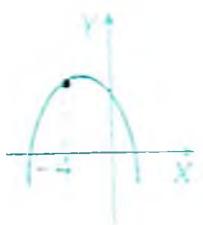
B)



C)



D)



E)

**Resolución**

Completamos cuadrados.

$$f(x) = x^2 - 8x + 16 - 16 - 2$$

$$f(x) = (x-4)^2 - 18$$

Hallamos el vértice.

$$(h; k) = (4; -18)$$

Como el coeficiente principal es positivo, la parábola se abre hacia arriba.

Hallamos el corte con el eje Y.

$$y = f(0) = -2$$

Por lo tanto, la gráfica de f es

**Clave****Problema N.º 18**

Grafiqque la función

$$f(x) = -2x^2 - 16x + 1; x \in \mathbb{R}.$$

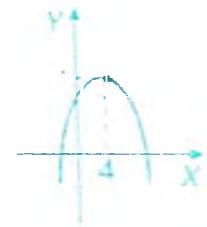
A)



B)



C)



D)



E)



Resolución

Completamos cuadrados.

$$f(x) = -2x^2 - 16x + 1$$

$$f(x) = -2(x^2 + 8x) + 1$$

$$f(x) = -2\underbrace{(x^2 + 8x + 16 - 16)}_{(x+4)^2} + 1$$

$$f(x) = -2(x+4)^2 + 33$$

Hallamos el vértice.

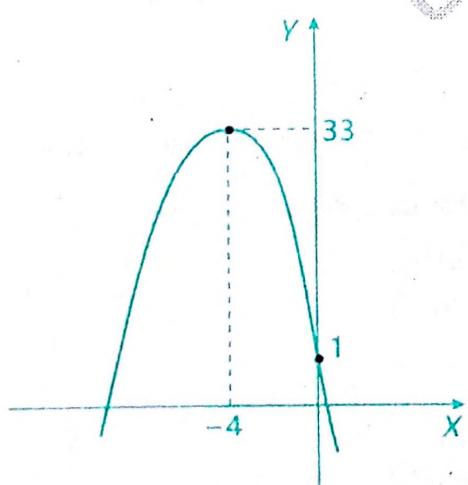
$$(h; k) = (-4; 33)$$

El coeficiente principal es negativo, entonces la parábola se abre hacia abajo.

Hallamos el corte con el eje Y.

$$y = f(0) = 1$$

Por lo tanto, la gráfica de f es

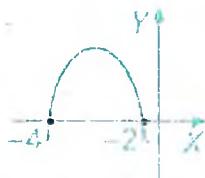


Clave A

Problema N.º 19

Grafique la función $f(x) = -(x-4)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

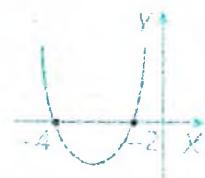
A)



B)



C)



D)



E)

**Resolución**

Las raíces de $f(x)$ son

$$x_1 = 4 \wedge x_2 = -2$$

Estos valores indican los cortes con el eje X.

Como su coeficiente principal es negativo, la parábola se abre hacia abajo.

Hallamos el corte con el eje Y.

$$y = f(0) = -(0-4)(0+2)$$

$$y = 8$$

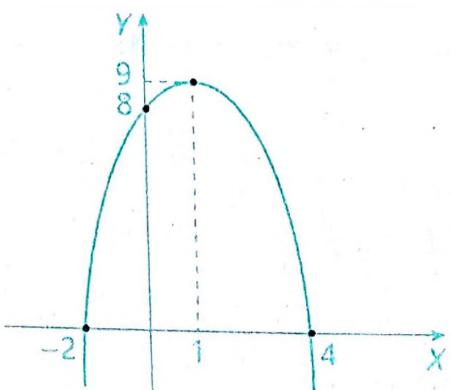
Hallamos el vértice $(h; k)$.

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$k = f(h) = f(1) = -(1-4)(1+2) = 9$$

El vértice es igual a $(1; 9)$.

Por lo tanto, la gráfica de f es



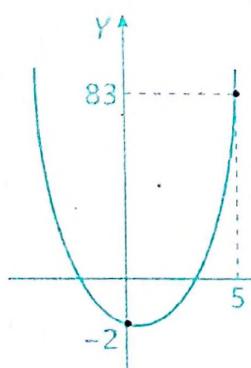
Clave

Problema N.º 20

De la gráfica de la función f , donde

$$f(x) = 3x^2 + bx + c,$$

halle $b - c$.



- A) 1 B) 2 C) 0
D) 4 E) -4

Resolución

Usamos los dos puntos conocidos de la gráfica de f .

El punto $(0; -2) \in f$.

Entonces

$$f(0) = -2$$

$$3(0)^2 + b(0) + c = -2$$

$$c = -2$$

El punto $(5; 83) \in f$.

Entonces

$$f(5) = 83$$

$$3(5)^2 + b(5) + c = 83$$

Reemplazamos el valor de c y operamos

$$75 + 5b - 2 = 83$$

$$5b = 10$$

$$b = 2$$

$$\therefore b - c = 2 - (-2) = 4$$

Clave

Problema N.º 21

Halle el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = -|x-1|+3$ y el eje X .

- A) 5 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Resolución

Tenemos que

$$f(x) = -|x-1|+3 = (-1)|x-1|+3$$

Su vértice es $(1; 3)$.

Como $a = -1 < 0$, entonces se abre hacia abajo.

- Puntos de corte con el eje X

$$f(x) = 0$$

$$-|x-1|+3 = 0$$

$$|x-1| = 3$$

Luego

$$x-1=3 \quad \vee \quad x-1=-3$$

$$x=4 \quad \vee \quad x=-2$$

Al eje X lo corta en $x=4$ y $x=-2$.

- Punto de corte con el eje Y

$$y=f_{(0)}$$

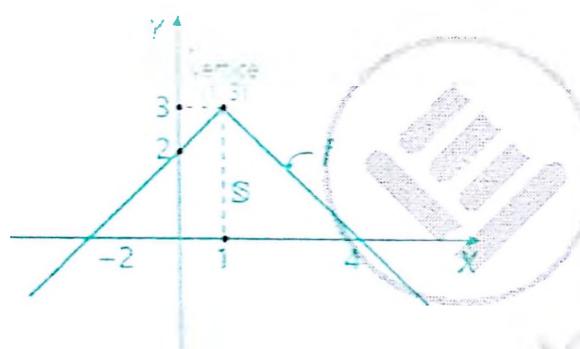
$$y=-\underbrace{|0-1|+3}_{1}$$

$$y=-1+3$$

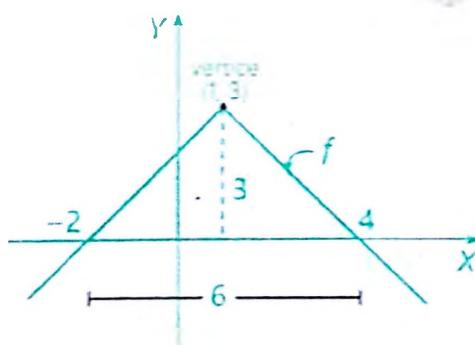
$$y=2$$

Al eje Y lo corta en $y=2$.

Su gráfica es



Calculamos el área de la región S.



$$\therefore S = \frac{(6)(3)}{2} = 9$$

Clave C

Problema N.º 22

Halle el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f_{(x)}=2x+12$ y los ejes coordenados.

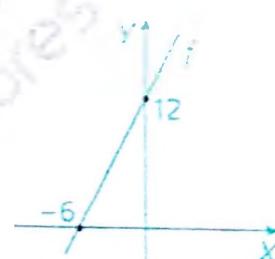
- A) 15 B) 36 C) 18
D) 20 E) 25

Resolución

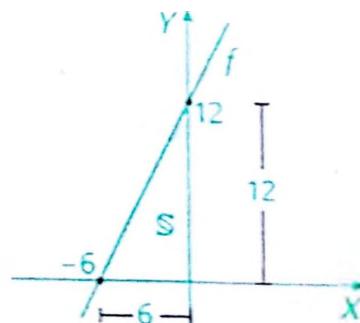
Tenemos

x	$f(x)$
0	12 (corte con el eje Y)
-6	0 (corte con el eje X)

Graficamos la función $f_{(x)}=2x+12$.



Hallamos el área de la región encerrada por esta recta y los ejes coordenados.



$$\therefore S = \frac{(6)(12)}{2} = 36$$

Clave B

Problema N.º 23

Halle el área de la región encerrada por los gráficos de $f(x)=x+3$; $g(x)=7-x$ y el eje X.

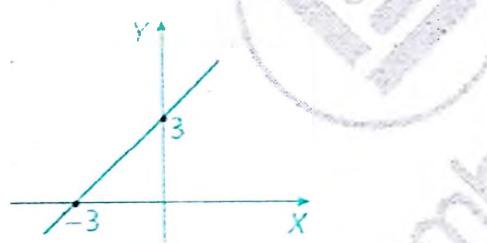
- A) 21 B) 18 C) 14
D) 10 E) 25

Resolución

- Graficamos la función $f(x)=x+3$.

Tenemos

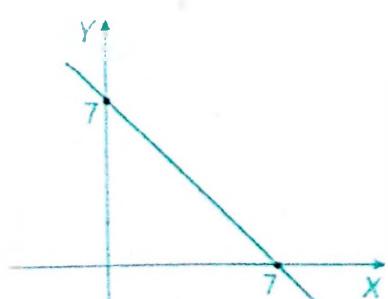
x	$f(x)$
0	3 (corte con el eje Y)
-3	0 (corte con el eje X)



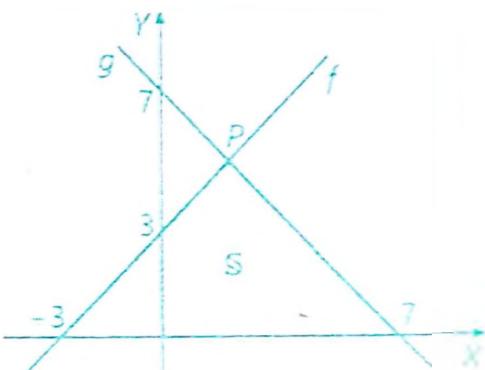
- Graficamos la función $g(x)=7-x$.

Tenemos

x	$g(x)$
0	7 (corte con el eje Y)
7	0 (corte con el eje X)



La gráfica de ambas funciones es



Hallamos el punto de intersección P de ambas rectas.

$$f(x)=g(x)$$

$$x+3=7-x$$

$$2x=4$$

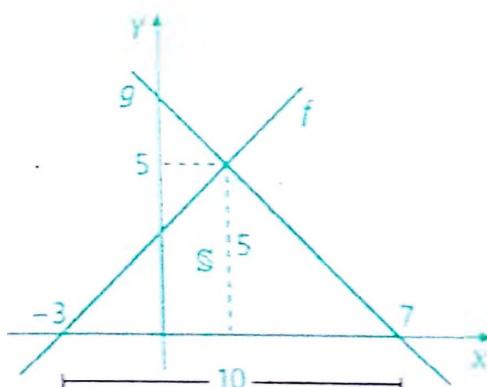
$$x=2$$

Luego

$$y=f(2)=5$$

$$P=(x, y)=(2; 5)$$

Hallamos el área de la región S .



$$\therefore S = \frac{(5)(10)}{2} = 25$$

Clave

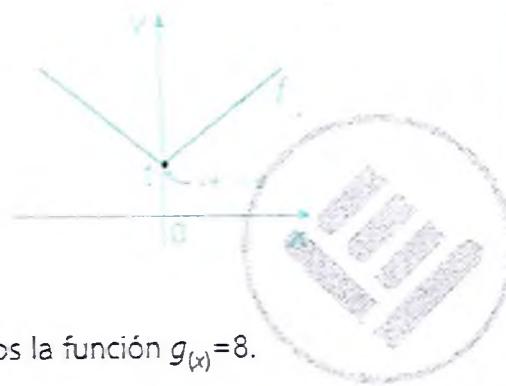
Problema N.º 24

Halle el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x)=|x+1|$ y $g(x)=8$.

- A) 28 B) 35 C) 45
 D) 49 E) 18

Resolución

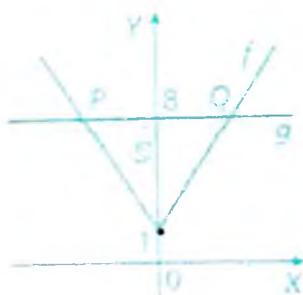
Graficamos la función $f(x)=|x+1|$.



Graficamos la función $g(x)=8$.



La región encerrada por ambas gráficas es la siguiente:



Hallamos los puntos de intersección de ambos gráficos.

$$f(x)=g(x)$$

$$|x|+1=8$$

$$|x|=7$$

$$x=7 \quad \vee \quad x=-7$$

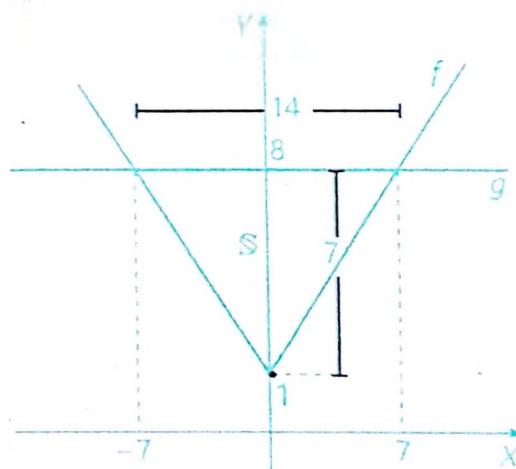
Luego

- $x=7 \rightarrow y=f(7)=8$
- $x=-7 \rightarrow y=f(-7)=8$

Los puntos de intersección son

$$P=(-7; 8) \wedge Q=(7; 8)$$

Hallamos el área S .

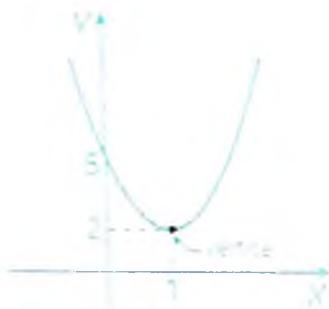


$$\therefore S = \frac{(7)(14)}{2} = 49$$



Problema N.º 25

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática cuya gráfica es



Calcule abc .

- A) -90 B) 100 C) 108
D) 80 E) -81

Resolución

Con el vértice $(h; k)$, la forma de $f(x)$ es

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

De la gráfica, el vértice es

$$(h; k) = (1; 2)$$

$$h=1 \quad \wedge \quad k=2$$

Reemplazamos en $f(x)$:

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

Para calcular a usamos el corte con el eje Y , que es el punto $(0; 5)$.

$$f(0) = 5$$

$$a(0-1)^2 + 2 = 5$$

$$a+2=5 \rightarrow a=3$$

Luego

$$f(x) = 3(x-1)^2 + 2$$

Operamos

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Entonces

$$a=3; b=-6 \text{ y } c=5$$

$$\therefore abc = (3)(-6)(5) = -90$$

Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. De los siguientes conjuntos, identifique cuáles son funciones.
- $f = \{(4; 5), (2; 3), (7; 9)\}$
 - $g = \{(3; 8), (3; 2), (7; 4)\}$
 - $h = \{(2; 9), (3; 8), (2; 9), (7; 6)\}$
- A) f y h B) f y g C) g
 D) g y h E) h
2. Si f es una función
 $f = \{(2; m+1), (3; 8), (2; 11), (3; 3b-4), (7; 11)\}$
 halle el valor de $m+b$.
- A) 21 B) 13 C) 12
 D) 14 E) 10
3. Halle el dominio de la función
 $H(x) = \sqrt{3x-9}$.
- A) $(-\infty; -3)$ B) $(-\infty; 3)$ C) $(3; +\infty)$
 D) $(-\infty; 9]$ E) $[3; +\infty)$
4. Halle el dominio de la función
 $R(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$.
- A) $[2; +\infty)$ B) $[8; +\infty)$ C) $(8; 10)$
 D) $[2; 8]$ E) $[2; 8)$
5. Determine el dominio de
 $R(x) = \frac{x-4}{x-2}$.
- A) $(2; 4)$ B) $[2; 4]$ C) $(2; 4)$
 D) $(2; +\infty)$ E) $\mathbb{R} - \{2\}$
6. Determine el dominio de la función
 $M(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$.
- A) \mathbb{R} B) $\{2\}$ C) $\{-2\}$
 D) $\mathbb{R} - \{2\}$ E) $\mathbb{R} - \{2, -2\}$
7. Calcule el rango de $f(x) = 3x + 2$ si $x \in [2; 5]$.
- A) $(0; 5]$ B) $(3; 10]$ C) $(8; 17]$
 D) $(18; 29]$ E) $(2; 3)$
8. Si $x \in (-2; -1)$, calcule el rango de la función H , cuya regla de correspondencia es
 $H(x) = \frac{1-x}{2}$.
- A) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ B) $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ C) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$
 D) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ E) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$
9. Calcule el rango de f si
 $f(x) = x^2 + 2x + 3$,
 donde $x \in [5; 10]$.
- A) $(38; 123]$ B) $[38; 123)$ C) $(30; 53)$
 D) $(10; 51)$ E) $(43; 123)$
10. La función H tiene como regla de correspondencia a
 $H(x) = \frac{x+2}{x+1}$
 y como dominio al intervalo $(2; 3)$. Calcule su rango.
- A) $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ B) $\left(\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right)$ C) $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{4}\right)$
 D) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{5}{4}; \frac{4}{3}\right)$

11. Sea la función R tal que

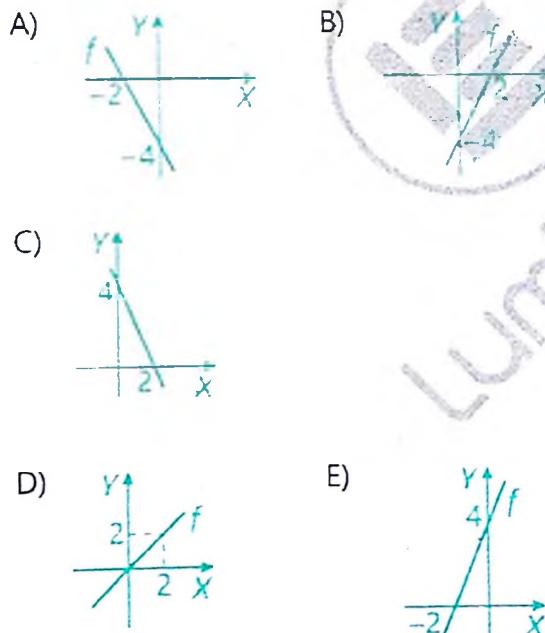
$$R(x) = \frac{x-2}{x-4}$$

tiene al intervalo $(6; 10]$ como su dominio.
Indique el rango de la función.

- A) $\left(2; \frac{4}{3}\right]$ B) $(4; 12)$ C) $\left[\frac{4}{3}; 2\right)$
 D) $(12; 4]$ E) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$

12. Grafique la función

$$f(x) = 2x + 4; x \in \mathbb{R}.$$

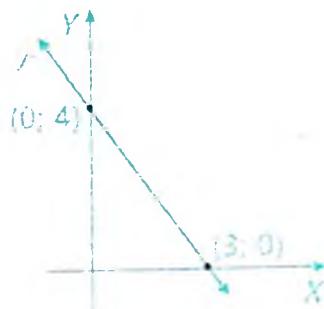


13. Halle el punto de intersección de las siguientes rectas:

- $\mathcal{L}_1: y = 5x + 10$
- $\mathcal{L}_2: y - x = 18$

- A) $(1; 20)$ B) $(5; 18)$ C) $(2; 18)$
 D) $(5; 20)$ E) $(2; 20)$

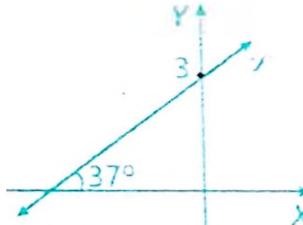
14. A partir de la gráfica



halle la ecuación de la recta \mathcal{L} .

- A) $g(x) = \frac{3x - 4}{3}$
 B) $g(x) = \frac{12 - 4x}{3}$
 C) $g(x) = 3x - 4$
 D) $g(x) = \frac{x - 4}{3}$
 E) $g(x) = 4x - 3$

15. A partir de la gráfica



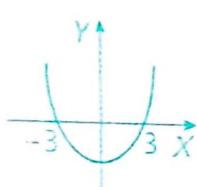
halle la ecuación de la recta \mathcal{L} .

- A) $g(x) = \frac{4x + 9}{3}$
 B) $g(x) = \frac{3x - 12}{2}$
 C) $g(x) = \frac{4x - 5}{3}$
 D) $g(x) = \frac{3x + 12}{4}$
 E) $g(x) = 3x + 12$

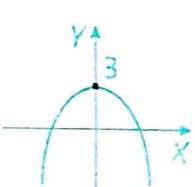
16. Esboce la gráfica de la función

$$h(x) = x^2 - 6x + 12, \text{ donde } x \in \mathbb{R}.$$

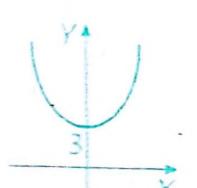
A)



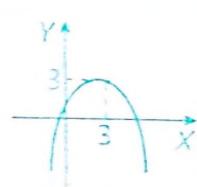
B)



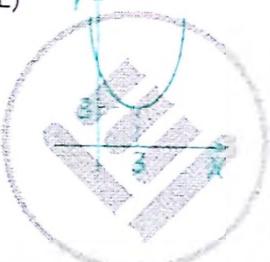
C)



D)



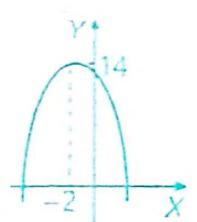
E)



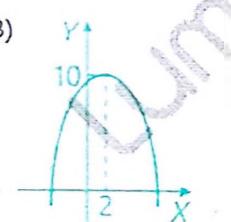
17. Grafique la función

$$M(x) = -x^2 - 4x + 10, \text{ donde } x \in \mathbb{R}.$$

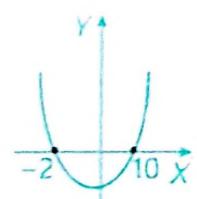
A)



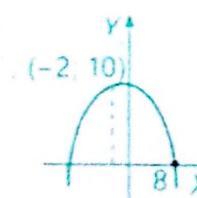
B)



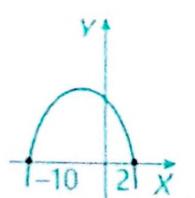
C)



D)



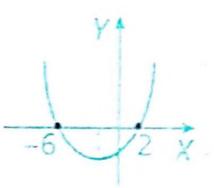
E)



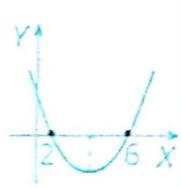
18. Grafique la función

$$f(x) = (x+6)(x-2).$$

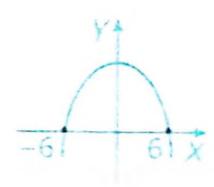
A)



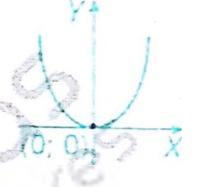
B)



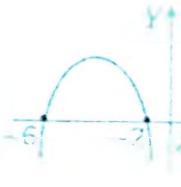
C)



D)

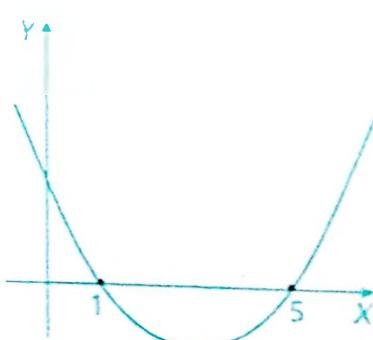


E)



19. Sea la función f , cuya regla de correspondencia es $f(x) = 3x^2 + px + q$,

que tiene la siguiente gráfica:



Halle $p+2q$.

A) 48

B) -18

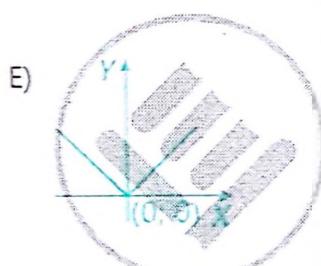
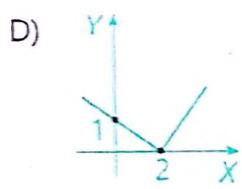
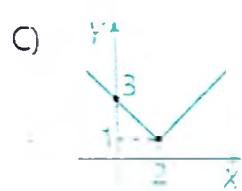
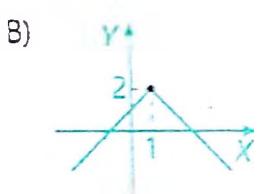
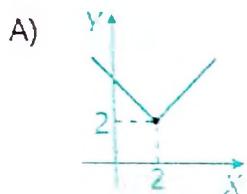
C) 12

D) 30

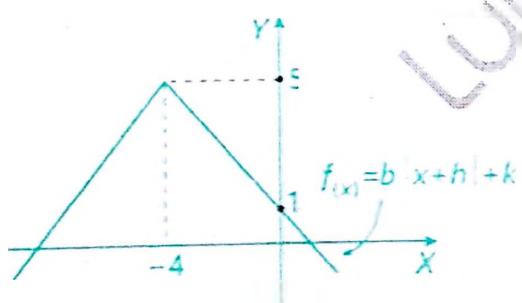
E) 15

20. Grafique la función

$$f(x) = |x - 2| + 1; x \in \mathbb{R}.$$



21. Dada la gráfica de la función f

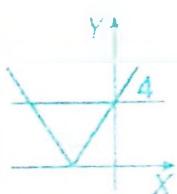


halle $b+k+h$.

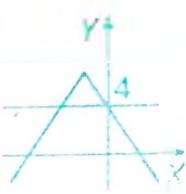
- A) 7 B) 10 C) 9
D) 8 E) 11

22. Represente la región triangular que encierran las gráficas de las funciones f y g si $f(x) = |x|$ y $g(x) = 4$.

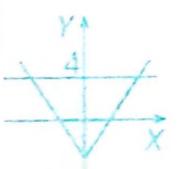
A)



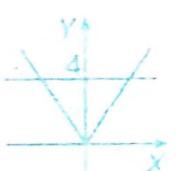
B)



C)



D)



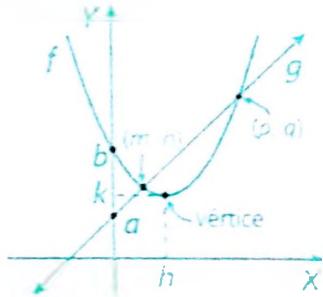
E)



23. Halle el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = 5 - |x - 3|$ y $g(x) = -1$.

- A) 28 B) 30 C) 24
D) 36 E) 32

24. A partir de la gráfica



donde

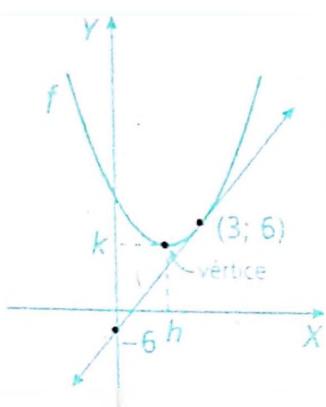
$$f(x) = x^2 - 4x + 8 \quad \wedge \quad g(x) = 2x + 3$$

calcule el valor de

$$\frac{a+b+n+k}{m+n+p+q}$$

- A) $\frac{18}{25}$ B) $\frac{19}{20}$ C) $\frac{16}{25}$
D) $\frac{15}{22}$ E) $\frac{17}{24}$

25. A partir de la gráfica



donde $f(x) = x^2 + bx + c$,

calcule el valor de $\frac{h+k}{b+c}$.

- A) -2 B) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

26. Halle el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 10 - 2x$ y los ejes coordinados.

- A) 24 B) 35
D) 20 E) 40

27. Halle el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = 6 - x$, $g(x) = x + 6$ y el eje X.

- A) 12 B) 30 C) 36
D) 18 E) 24

28. Halle el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 5 - |x - 2|$ y el eje X.

- A) 35 B) 32 C) 28
D) 20 E) 25

29. Halle el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones

$$f(x) = |x - 1| + 6 \text{ y } g(x) = 10.$$

- A) 16 B) 14 C) 18
D) 20 E) 24

30. Halle el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones

$$f(x) = |x - 2| \text{ y } g(x) = \frac{x}{2} + 2.$$

- A) 8 B) 12 C) 18
D) 15 E) 10

Claves

1	A	6	E	11	C	16	E	21	D	26	C
2	D	7	C	12	E	17	A	22	D	27	C
3	E	8	C	13	E	18	A	23	D	28	E
4	D	9	B	14	B	19	C	24	E	29	A
5	E	10	E	15	D	20	C	25	C	30	G

CAPÍTULO 12



LOGARITMOS



Los logaritmos fueron descubiertos para acelerar y simplificar el cálculo. Napier, inventor de las primeras tablas de logaritmos, refiere así el propósito que le animaba: "En la medida de mis capacidades, me proponía evitar las difíciles y aburridas operaciones de cálculo, cuyo fastidio constituye una pesadilla para muchos que se dedican al estudio de las matemáticas". En efecto, los logaritmos facilitan y aceleran los cálculos, además que permiten realizar operaciones que serían en extremo complejas si no los aplicáramos (extracción de raíces de cualquier índice, por ejemplo). Laplace escribió con todo fundamento que con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos. El famoso matemático se refería a los astrónomos por cuanto se veían obligados a hacer cálculos agotadores y de singular complejidad.

Las aplicaciones más famosas de los logaritmos están en las escalas logarítmicas; un ejemplo de estas lo apreciamos en la escala de Richter, que nos da información sobre la energía que se desprende de un terremoto. Richter tomó la idea del uso de logaritmos en la escala de magnitud estelar, usada en la astronomía para describir el brillo de las estrellas y de otros objetos celestes.

Aprendizajes esperados

- Identificar y aplicar las propiedades de los logaritmos.
- Resolver problemas utilizando las diferentes propiedades de logaritmos.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Los logaritmos son importantes porque facilitan la resolución de cálculos muy complejos, lo que ha contribuido enormemente al avance de la ciencia. Si bien es cierto que son elementos de estudios fundamentales en las matemáticas, la relevancia de los logaritmos está en las posibilidades de aplicación que tienen en la vida real. Por ejemplo, en la economía, en el crecimiento de la población, en la biología, en la música, etc.

**Importante**

La operación de extraer logaritmos, también llamada logaritmación, es una operación inversa a la potenciación, puesto que, mientras en la potenciación se trata de encontrar un número llamado potencia, conocidas la base y el exponente, en la logaritmación se trata de hallar el exponente, conocidas la base y la potenciación.

**Dato curioso**

En el siglo xv se destaca la aritmética íntegra de Michael Stifel (1487 - 1567), donde se asoma el concepto de logartimo. Sin embargo, las investigaciones profundas sobre los logaritmos fueron desarrolladas independientes y casi contemporáneamente por John Napier (1550 - 1617) en 1614 y Jobst Bürgi (1552 - 1632) en 1620.



Jobst Bürgi

Logaritmos

En la expresión $b^n=c$ puede calcularse una de estas tres cantidades si se conocen dos de ellas, resultando, de este modo, tres operaciones diferentes: potenciación, radicación y logaritmo.

**Potenciación****Radicación****Logaritmos**

$$b^n=x$$

$$x^n=c$$

$$b^x=c$$

Ejemplos**Ejemplos****Ejemplos**

- $2^3=x \rightarrow x=8$

- $3^2=x \rightarrow x=9$

- $x^3=27 \rightarrow x=3$

- $x^3=1 \rightarrow x=1$

- $2^x=8 \rightarrow x=3$

- ¿ $2^x=5$?

Para resolver este tipo de problemas necesitamos los logaritmos.

1. DEFINICIÓN

Para definir un logaritmo podríamos comenzar calculando las siguientes multiplicaciones sin ayuda de la calculadora.

- 16×256
- 81×6561
- $256 \times 65\ 536$

Aplicando el algoritmo de la multiplicación, tendríamos

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6 \times \\ 1\ 6 \\ \hline 1\ 5\ 3\ 6 \\ 2\ 5\ 6 \\ \hline 4\ 0\ 9\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6\ 5\ 6\ 1 \times \\ 8\ 1 \\ \hline 6\ 5\ 6\ 1 \\ 5\ 2\ 4\ 8\ 8 \\ \hline 5\ 3\ 1\ 4\ 4\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6\ 5\ 5\ 3\ 6 \times \\ 2\ 5\ 6 \\ \hline 3\ 9\ 3\ 2\ 1\ 6 \\ 3\ 2\ 7\ 6\ 8\ 0 \\ 1\ 3\ 1\ 0\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 6\ 7\ 7\ 7\ 2\ 1\ 6 \end{array}$$

Ahora bien, podríamos construir una tabla que contenga algunas potencias de base 2; 3 y 4, como las que aparecen a continuación:

n	2^n	3^n	4^n
1	2	3	4
2	4	9	16
3	8	27	64
4	16	81	256
5	32	243	1024
6	64	729	4096
7	128	2187	16 384
8	256	6561	65 536
9	512	19 683	262 144
10	1024	59 049	1 048 576
11	2048	177 147	4 194 304
12	4096	531 441	167 77 216
13	8192	1 594 823	67 108 864

Ahora ubicamos en la tabla cada uno de los resultados obtenidos en la multiplicación.

Observamos que todos los resultados se ubican en la fila que corresponde a $n=12$. Es decir, que 12 es el exponente al que hay que elevar el número 2 para obtener 4092, o el 3 para obtener 531 441, o el 4 para obtener 16 777 216.

Este exponente, en matemática, se denomina logaritmo. En particular diríamos que el logaritmo de 4096, en base 2, es 12 y lo denotamos de la siguiente forma:

FORMA LOGARÍTMICA	FORMA EXPONENCIAL
$\log_2 4096 = 12$	$2^{12} = 4096$

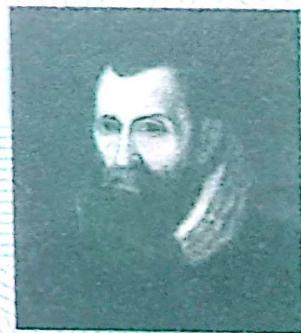
O que el logaritmo de 531 441 en base 3 es 12 y lo denotamos de la siguiente manera:

FORMA LOGARÍTMICA	FORMA EXPONENCIAL
$\log_3 531\,441 = 12$	$3^{12} = 531\,441$

Dato curioso



El nombre de logaritmo (de *logos* y *arithmo*, vale decir, número de razón) se debe a John Napier. En el *Micififici logarithmorum* de 1614 Napier hizo conocer la naturaleza de sus logantmos y la tabla de estos. Henry Briggs (1560-1650) logra la difusión y el perfeccionamiento de los logaritmos descubiertos por Napier, además de su adaptación al sistema decimal y su respectiva tabla de logaritmo.



John Napier

En general

$$\log_b N = x \leftrightarrow b^x = N$$

Así $\log_b N$ es el exponente al que se debe elevar la base b para obtener x .

Además, $N > 0$; $b > 0 \wedge b \neq 1$.

Cuidado!

El $\log_1 5$ no existe.

¿Por qué?

Sea $\log_1 5 = x \rightarrow 1^x = 5$

¿El número 1 a qué exponente x da 5?

No existe ningún valor de x que cumpla la igualdad.

Por lo tanto, $\log_1 5$ no existe.

Importante

De la definición de logaritmos se observa que tienen dos formas de expresarse:

forma logarítmica

exponente

$$\log_a x = y$$

base

forma exponencial

exponente

$$a^y = x$$

base

Ejemplos

1. Cambiamos las siguientes igualdades a la forma logarítmica:

Forma exponencial

$$4^2 = 16$$

$$3^4 = 81$$

$$49^{1/2} = 7$$

Forma logarítmica

$$\log_4 16 = 2$$

$$\log_3 81 = 4$$

$$\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$$

2. Cambiamos las siguientes igualdades a la forma exponencial:

Forma logarítmica

$$\log_{10} 1000 = 3$$

$$\log_9 81 = 2$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3$$

Forma exponencial

$$10^3 = 1000$$

$$9^2 = 81$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64}$$

3. Usamos la definición de logaritmo para hallar x .

a. $\log_2 x = 5 \leftrightarrow x = 2^5 \rightarrow x = 32$

b. $\log_2 16 = x \leftrightarrow 16 = 2^x \rightarrow 2^4 = 2^x \rightarrow x = 4$

c. $\log_3 x = 4 \leftrightarrow x = 3^4 \rightarrow x = 81$

No olvide

El $\log_2(-4)$ no existe.

¿Por qué?

Sea $\log_2(-4) = x \rightarrow -4 = 2^x$

¿El número 2 a qué exponente x se debe elevar para obtener -4 ?

No existe ningún valor de x que cumpla la igualdad.

Por lo tanto, $\log_2(-4)$ no existe.

d. $\log_3 243 = x \leftrightarrow 243 = 3^x \rightarrow 3^5 = 3^x \rightarrow x = 5$

e. $\log_x 16 = 4 \leftrightarrow 16 = x^4 \rightarrow 2^4 = x^4 \rightarrow x = 2$

f. $\log_x 6 = \frac{1}{2} \leftrightarrow 6 = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow 6 = \sqrt{x}$
 $\rightarrow 6^2 = \sqrt{x}^2 \rightarrow 36 = x$

g. $\log_x 3 = \frac{1}{3} \leftrightarrow 3 = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow 3 = \sqrt[3]{x}$
 $\rightarrow 3^3 = \sqrt[3]{x}^3 \rightarrow 27 = x$

4. Usamos la definición de logaritmo para hallar x .

a. $\log_3 \sqrt[5]{27} = x$ b. $\log_2 \sqrt[3]{32} = x$

Operamos

a. $\log_3 \sqrt[5]{27} = x \leftrightarrow \sqrt[5]{27} = 3^x \rightarrow \sqrt[5]{3^5} = 3^x$
 $\rightarrow 3^{\frac{5}{5}} = 3^x \rightarrow \frac{5}{5} = x$

$$\therefore \log_3 \sqrt[5]{27} = \frac{3}{5}$$

b. $\log_2 \sqrt[3]{32} = x \leftrightarrow \sqrt[3]{32} = 2^x \rightarrow \sqrt[3]{2^5} = 2^x$
 $\rightarrow 2^{\frac{5}{3}} = 2^x \rightarrow x = \frac{5}{3}$

$$\therefore \log_2 \sqrt[3]{32} = \frac{5}{3}$$

Lo que hemos realizado es resolver logaritmos, expresándolos en forma exponencial.

De la definición de logaritmo que hemos propuesto, podemos resaltar la relación tan estrecha que va a surgir entre el logaritmo y las potencias.

Reto al saber

Si $x = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{81}$, halle el valor de x .

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $-\frac{7}{3}$
 D) $\frac{4}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

UNMSM 2012 - I

No olvide

El número $e=2,71828183\dots$, conocido como número de Euler, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier.

Otra forma de representar este número es

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

**Dato curioso**

El promedio de vida de las mujeres estadounidenses desde el año 1907 hasta el 2007 está dado por la fórmula

$$w(\eta) = 49,9 + 17,1 \log_e T$$

donde $e=2,71$

$$1 \leq T \leq 6$$

Para

$$1907 \rightarrow T=1$$

$$1927 \rightarrow T=2$$

$$1947 \rightarrow T=3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

**Reto al saber**

Reduzca la siguiente expresión:

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^{2 \log_2 3}$$

Propiedades

a. $\log_b 1 = 0 \quad b > 0; b \neq 1$

Ejemplos

- $\log_2 1 = 0$
- $\log_{20} 1 = 0$
- $\log_{100} 1 = 0$

b. $\log_b b = 1 \quad b > 0; b \neq 1$

Ejemplos

- $\log_3 3 = 1$
- $\log_7 7 = 1$
- $\log_{50} 50 = 1$

c. Identidad fundamental de logaritmos

$$b^{\log_b N} = N \quad b > 0; b \neq 1$$

Ejemplos

- $3^{\log_3 7} = 7$
- $9^{\log_9 5} = 5$

2. TEOREMAS

En este análisis partiremos de ejemplos para escribir la formalización de cada uno de los teoremas.

Recordemos que el logaritmo de un número es el exponente, el cual se debe elevar la base del logaritmo para obtener dicho número.

Teorema 1*Ejemplo*

$$16 \times 256 = 2^4 \times 2^8 = 2^{12} = 4096$$

De lo anterior, 4 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 16. En otras palabras, 4 es logaritmo en base 2 de 16.

En símbolos

$$2^4=16 \leftrightarrow \log_2 16=4$$

También con el mismo criterio

$$2^8=256 \leftrightarrow \log_2 256=8$$

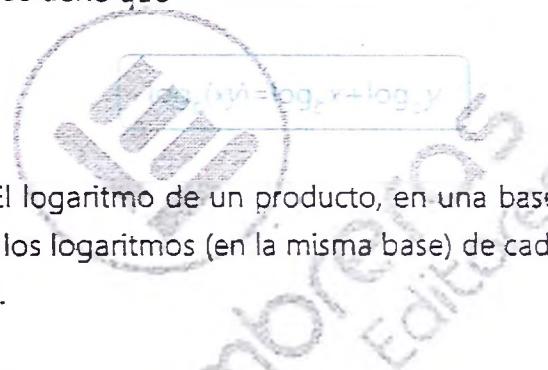
$$2^{12}=4096 \leftrightarrow \log_2 4096=12$$

Observamos que $4+8=12$, lo que podría escribirse como

$$\log_2 16 + \log_2 256 = \log_2 4096$$

$$\log_2 16 + \log_2 256 = \log_2 16 \times 256$$

Entonces se tiene que



Se lee: "El logaritmo de un producto, en una base dada, es la suma de los logaritmos (en la misma base) de cada uno de los factores".

Ejemplos

- $\log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 7 \cdot 3 = \log_2 21$
- $\log 9 + \log 4 = \log 9 \cdot 4 = \log 36$
- $\log_2 7 + \log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 7 \cdot 5 \cdot 3 = \log_2 105$
- $\log_3 7 + 1 = \log_3 7 + \log_3 3$
 $\rightarrow \log_3 7 \cdot 3 = \log_3 21$
- $\log_2 18 + 3 = \log_2 18 + \log_2 8 = \log_2 144$

Observación

- $\log_3 4 + \log_3 4 = 2 \log_3 4$
- $5 \log_2 7 + 6 \log_2 7 = 11 \log_2 7$
- $\log_2 x + 5 \log_2 x + 9 \log_2 x = 15 \log_2 x$

Cuidado!

No hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma, es decir,

$$\log_a(x+y) \cancel{=} \log_a x + \log_a y$$

Ejemplo

$$\log_5(x+3) \cancel{=} \log_5 x + \log_5 3$$



No olvide



Un error común es el siguiente:

$$\log_a(xy) \cancel{=} \log_a x \cdot \log_a y$$

Ejemplo

$$\log_2 3 \cancel{=} \log_2 3 \cdot \log_2 x$$

Teorema 2

Ahora analizaremos el logaritmo de un cociente. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{67\ 108\ 864}{262\ 144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$

Con un análisis análogo al realizado para el producto y teniendo en cuenta el concepto de logaritmo, tenemos

$$13 - 9 = 4$$

$$\log_4(67\ 108\ 864) - \log_4(262\ 144) = \log_4 256$$

$$\log_4(67\ 108\ 864) - \log_4(262\ 144) = \log_4\left(\frac{67\ 108\ 864}{262\ 144}\right)$$

Con un buen número de ejemplos análogos podemos concluir y generalizar.

Se lee: "El logaritmo de un cociente, en una base dada, es la diferencia entre los logaritmos del dividendo y divisor, en la misma base".

Ejemplos

Halle el valor de
 $\log(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 20) - \log(9!)$

- A) $10 + 10\log 2$
- B) $1 + 10\log 2$
- C) $10\log 2$
- D) $\log 2$
- E) $\log 10!$

UNMSM 2001

- $\log_3\left(\frac{x}{2}\right) = \log_3 x - \log_3 2$

- $\log_3 10 - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{10}{2}\right) = \log_3 5$

- $\log_2 5 - 1 = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2\left(\frac{5}{2}\right)$

- $\log\frac{AB}{C} = \log AB - \log C = \log A + \log B - \log C$

APLICACIÓN 1

Halle el valor de A.

$$A = \left[\frac{\log_1 5 + 2 \log_7 49}{5} \right] \log_3 81$$

RESOLUCIÓN

Hallamos el valor de A.

$$A = \left[\frac{\log_1 5 + 2 \log_7 49}{5} \right] \log_3 81$$

$$A = [\log_{5^{-1}} 5 + 2 \cdot 2] \cdot 4$$

$$A = \left[\frac{1}{-1} \cdot \log_5 5 + 4 \right] \cdot 4$$

$$A = [-1 \cdot 1 + 4] \cdot 4$$

$$A = (-1 + 4) \cdot 4$$

$$\therefore A = 3 \cdot 4 = 12$$

Importante

- $5 \log x - 2 \log x = 3 \log x$
- $3 \log_5 2 - 2 \log_5 2 = \log_5 2$

Teorema 3

También podemos deducir la propiedad del logaritmo respecto de la potencia si analizamos el siguiente ejemplo:

$$2^5 = 32 \leftrightarrow \log_2 32 = 5$$

Además, 32 se puede escribir como

$$32 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Entonces

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = \log_2 (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$\rightarrow \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 = 5 \log_2 2$$

¡Cuidado!

Un error común es el siguiente:

$$\log_a^n x \cancel{=} n \log_a x$$

Ejemplos

- $\log_5^2 x \cancel{=} 2 \log_5 x$
- $\log_3^4 x \cancel{=} 4 \log_3 x$

No olvide

$$\log_a^n x = (\log_a x)^n$$

Ejemplos

- $\log_5^2 x = (\log_5 x)^2$
- $\log_3^4 x = (\log_3 x)^4$
- $\log_3^4 9 = (\log_3 9)^4 = 2^4 = 16$

En consecuencia, según este criterio, también podemos escribir

$$\log_3 x^2 = \log_3 x \cdot x$$

$$\rightarrow \log_3 x + \log_3 x = 2 \log_3 x$$

Considerando los ejemplos anteriores, podemos concluir

(regla del sombrero)

Se lee: "El logaritmo de una potencia (en una base determinada) es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de esta potencia".

Ejemplos

- $\log_3 x^5 = 5 \log_3 x$
 - $\log_2 x^{10} = 10 \log_2 x$
 - $3 \log_5 b = \log_5 b^3$
 - $6 \log_3 a = \log_3 a^6$
 - $\log_2 3 + 2 \log_2 5 = \log_2 3 + \log_2 5^2$
 $\rightarrow \log_2 3 + \log_2 25 = \log_2 75$
 - $2 \log_2 7 + 3 \log_2 5 = \log_2 7^2 + \log_2 5^3$
 $\rightarrow \log_2 49 + \log_2 125 = \log_2 49 \cdot 125 = \log_2 6125$
- Usamos los teoremas de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:
 - $\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$
 - $\log_2[x(x-1)] = \log_2 x + \log_2(x-1)$
 - $\log_3(AB^2) = \log_3 A + \log_3 B^2 = \log_3 A + 2 \log_3 B$

- $\log_3 x \cdot \sqrt{y} = \log_3 x + \log_3 \sqrt{y}$

$$\rightarrow \log_3 x + \log_3 y^{\frac{1}{2}} = \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y$$

- $\log\left(\frac{x^3 y^4}{z^6}\right) = \log(x^3 \cdot y^4) - \log z^6$

$$\rightarrow \log x^3 + \log y^4 - 6 \log z = 3 \log x + 4 \log y - 6 \log z$$

3. Combinamos las expresiones en un solo logaritmo.

- $3 \log x + \frac{1}{2} \log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow \log x^3 + \log \sqrt{x+1} = \log x^3 \cdot \sqrt{x+1}$$

- $\log_3 5 + 5 \log_3 2$

$$\rightarrow \log_3 5 + \log_3 2^5 = \log_3 5 + \log_3 32$$

$$\rightarrow \log_3 5 \cdot 32 = \log_3 160$$

- $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$

$$\rightarrow \log_2 A \cdot B - \log_2 C^2 = \log_2 \frac{AB}{C^2}$$

- $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2 = \log 12 + \log 7^{\frac{1}{2}} - \log 2$

$$\rightarrow \log 12 + \log \sqrt{7} - \log 2 = \log 12 \cdot \sqrt{7} - \log 2$$

$$\rightarrow \log \frac{12\sqrt{7}}{2} = \log 6\sqrt{7}$$

Importante



- Logaritmo común

Ejemplos

- $\log_{10} 5 = \log 5$
- $\log_{10} 17 = \log 17$

- Logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x$$

donde e es el número de Euler.

$$e = 2,718281\dots$$

Ejemplos

- $\ln 5 = \log_e 5$
- $\ln 20 = \log_e 20$

- Además

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

**Reto al saber**

Si

$$M = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[2]{2} + \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \log_{\sqrt[4]{2}} 2 + \dots + \log_{\sqrt[20]{2}} 2$$

halle el valor de M .

- A) 231
B) 210
C) 190
D) 222
E) 215

UNMSM 2012

**No olvide**

$\log_b N$ está definido en \mathbb{R} si
 $N > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$

Corolarios

a. $\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$

Ejemplos

- $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{3}$
- $\log_{b^5} x = \frac{1}{5} \cdot \log_b x$
- $\log_{25} 5 = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

b. $\log_b x^n = n \log_b x$

Ejemplos

- $\log_b x^2 = 2 \log_b x$
- $\log_{27} 8 = \log_{3^3} 2^3 = 3 \log_3 2$
- $\log_{16} 81 = \log_{2^4} 3^4 = 4 \log_2 3$

c. $\log_b x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_b x$

Ejemplos

- $\log_{b^3} x^2 = \frac{2}{3} \log_b x$
- $\log_{b^2} a^7 = \frac{7}{2} \log_b a$

APLICACIÓN 2

Calcule el valor de

$$\log_{10} 10 + \log_{100} 10 + \log_{1000} 10$$

RESOLUCIÓN

En este caso podemos usar la siguiente propiedad:

$$\log_{b^n} N = \frac{1}{n} \cdot \log_b N$$

$$\log_{10} 10 + \log_{10^2} 10 + \log_{10^3} 10$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 10 + \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 10$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Teorema 4

Cambio de base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplos

- $\log_2 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2}$ (cambiamos de la base 2 a la base 3)
- $\log_5 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 5}$ (cambiamos de la base 5 a la base 3)
- $\frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \log_3 7$
- $\frac{\log_5 x}{\log_5 9} = \log_9 x$

Corolarios

a. $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$

Ejemplos

- $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$
- $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$
- $\log_2 9 = \frac{1}{\log_9 2}$
- $\log_b 8 = \frac{1}{\log_8 b}$

Importante



Ejemplos

- $\log_2 x = 5 \rightarrow x = 2^5$
 $\rightarrow x = 32$
- $\log_3 x = 4 \rightarrow x = 3^4$
 $\rightarrow x = 81$

Ejemplos

- $\ln x = 5 \rightarrow x = e^5$
- $\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$

Reto al saber



Si los primeros términos de una secuencia son:

$\log 4, \log 9, \log 25, \log 49, \dots$

$\rightarrow \log a^2, \dots, \log 361, \log b^2, \log 841$

donde $11 < a < 17$,

halle $\log(b-a)$.

- A) 1 B) 3 C) 2
D) 5 E) 10

UNMSM 2015-I

b. Regla de la cadena

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c m = \log_b m$$

Ejemplos

- $\log_2 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_9 13 = \log_2 13$
- $\log_3 a \cdot \log_a b \cdot \log_b 9 = \log_3 9 = 2$

c.

$$\log_b x \cdot \log_x b = 1$$

Ejemplos

- $\log_2 7 \cdot \log_7 2 = 1$
- $\log_3 x \cdot \log_x 3 = 1$

d.

$$\log_b a + \log_a c + \log_c M \cancel{=} \log_b M$$

Un error común es el siguiente:

$$\log_b a + \log_a c + \log_c M \cancel{=} \log_b M$$

Ejemplo

$$\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 9 \cancel{=} \log_3 9 = 2$$

Teorema 5

Regla de intercambio

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Ejemplos

- $5^{\log_2 3} = 3^{\log_2 5}$
- $3^{\log_5 x} = x^{\log_5 3}$
- $5^{2\log_2 3} = 5^{\log_2 3^2} = 5^{\log_2 9} = 9^{\log_2 5}$

APLICACIÓN 3

Reduzca la expresión $\frac{8^{\log_2 3} + 5 \cdot 36^{\log_6 \sqrt{7}}}{49^{\log_7 \sqrt{2}}}$.

RESOLUCIÓN

Para este caso, usaremos la siguiente propiedad: $a^{\log_a N} = N$

En el problema tenemos

$$\frac{(2^3)^{\log_2 3} + 5 \cdot (6^2)^{\log_6 \sqrt{7}}}{(7^2)^{\log_7 \sqrt{2}}}$$

$$\frac{2^{3\log_2 3} + 5 \cdot 6^{2\log_6 \sqrt{7}}}{7^{2\log_7 \sqrt{2}}}$$

$$\frac{2^{\log_2 27} + 5 \cdot 6^{\log_6 7^2}}{7^{\log_7 2^2}}$$

$$\frac{27 + 5 \cdot 7}{2} = \frac{27 + 35}{2}$$

$$\therefore \frac{62}{2} = 31$$

APLICACIÓN 4

Determine el valor reducido de M^2 .

$$M = 2^{\log_2 4} + 6^{\log_6 5} + \log_{2014} 2014$$

RESOLUCIÓN

Para este caso usaremos la siguiente propiedad: $b^{\log_b N} = N$

En el problema

$$M = 2^{\log_2 4} + 6^{\log_6 5} + \log_{2014} 2014$$

$$M = 4 + 5 + 1$$

$$M = 10$$

$$\therefore M^2 = 100$$

Reto al saber

Halle el valor de

$$M = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{100}{101}\right)^3$$

- A) $-3\ln 110$
- B) $-\ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 101)$
- C) $-3\ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 101)$
- D) $-3\ln 101$
- E) $-\ln 101$

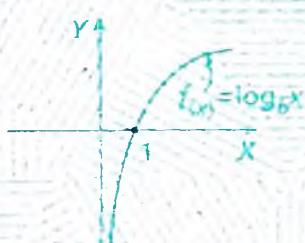
UNMSM 2012

**Dato curioso**

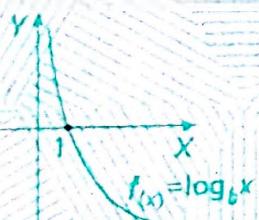
La gráfica de la función logaritmo $f(x) = \log_b x$ tiene dos casos:

Caso 1

$$f(x) = \log_b x \quad b > 1$$

**Caso 2**

$$f(x) = \log_b x \quad 0 < b < 1$$

**3. COLOGARITMO**

Se denomina cologaritmo de un número N ($N > 0$) en una base ($b > 0, b \neq 1$) al logaritmo de la inversa de dicho número en esa misma base.

$$\text{colog}_b N = \log_b \left(\frac{1}{N} \right)$$

Ejemplos

- $\text{colog}_3 9 = \log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = -2$
- $\text{colog}_2 x = \log_2 \left(\frac{1}{x} \right)$

Consecuencia

$$\text{colog}_b x = -\log_b x$$

Ejemplos

- $\text{colog}_5 125 = -\log_5 125 = -3$
- $\text{colog}_2 16 = -\log_2 16 = -4$
- $\text{colog}_2 13 = -\log_2 13$

4. ANTILOGARITMO

El antilogaritmo de un número real x , en una base dada b ($b > 0 \wedge b \neq 1$), es el número que resulta de elevar la base al número.

$$\text{antilog}_b x = b^x$$

Ejemplos

- $\text{antilog}_2 5 = 2^5 = 32$
- $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} (-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

Propiedades



$$\text{antilog}_b(\log_b N) = N$$

$$\log_b(\text{antilog}_b N) = N$$

5. ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Para resolver ecuaciones logarítmicas se utilizan a menudo las siguientes propiedades:

$$\log_b N = c \rightarrow N = b^c$$

$$\log_b A = \log_b B \rightarrow A = B$$

Ejemplos

- $\log x(3x-2) = 2$
- $\log_5(2x-1) = \log_5(x+2)$

APLICACIÓN 5

Resuelva la ecuación $\log_2(x+2) = 5$.

RESOLUCIÓN

Para despejar x , se escribe la ecuación en forma exponencial, es decir

$$\log_2(x+2) = 5$$

$$x+2 = 2^5$$

$$x+2 = 32$$

$$x = 30$$

Comprobamos la respuesta.

Reemplazamos $x=30$ en la ecuación inicial.

$$\log_2(30+2) = 5$$

$$\log_2 32 = 5$$

$$5 = 5$$

Reto al saber



Si n es un número entero positivo y

$$2^{\log_2 4} - 1 = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 2^n$$

halle el valor de $4 \log_2 4$

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 2
 D) $-\frac{2}{3}$ E) -1

UNMSM 2012-II

APLICACIÓN 6

Resuelva $\log_2(25-x)=4$.

RESOLUCIÓN

Primero reescribimos la ecuación en forma exponencial, es decir,

$$\log_2(25-x)=4$$

$$25-x=2^4$$

$$25-x=16$$

$$x=9$$

Luego, comprobamos la respuesta.

Reemplazamos $x=9$ en la ecuación inicial.

$$\log_2(25-9)=4$$

$$\log_2 16=4$$

$$4=4$$

APLICACIÓN 7

Resuelva la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$.

RESOLUCIÓN

Primero se combinan los términos logarítmicos usando los teoremas de los logaritmos.

$$\log(x+2)+\log(x-1)=1$$

$$\log(x+2)(x-1)=1$$

Luego escribimos la ecuación en su forma exponencial.

$$(x+2)(x-1)=10$$

$$x^2+x-2=10$$

$$x^2+x-12=0$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times \\ x \\ \hline 4 \\ -3 \\ \hline \end{array}$$

$$(x+4)(x-3)=0$$

$$x=\cancel{-4} \text{ o } x=3$$

$$\therefore x=3$$

Comprobemos la respuesta.

Reemplazamos $x=-4$ en la ecuación inicial.

$$\log(-4+2)+\log(-4-1)=1$$

$$\underbrace{\log(-2)}_{\text{no existe}}+\underbrace{\log(-5)}_{\text{no existe}}=1$$

Reemplazamos $x=3$ en la ecuación inicial.

$$\log(3+2)+\log(3-1)=1$$

$$\log 5 + \log 2 = 1$$

$$\log 10 = 1$$

$$1=1$$

¿Cómo resolver ecuaciones logarítmicas?

Para la resolución de una ecuación logarítmica tenga en cuenta lo siguiente:

- I. Aíslle el término logarítmico en un lado de la ecuación, podría ser necesario combinar primero los términos logarítmicos.
- II. Escriba la ecuación en forma exponencial.
- III. Despeje la incógnita.

APLICACIÓN 8

Resuelva la ecuación $4+3\log(2x)=13$.

RESOLUCIÓN

Se aísla el término logarítmico.

$$4+3\log(2x)=13$$

$$3\log(2x)=13-4$$

$$3\log(2x)=9$$

$$\log 2x=3$$

Escribimos la ecuación en forma exponencial.

$$2x=10^3$$

Despejamos la incógnita.

$$2x=1000$$

$$x=500$$

$$\therefore CS=\{500\}$$

Comprobamos la respuesta.

Reemplazamos $x=500$ en la ecuación inicial.

$$4+3\log_2(500)=13$$

$$4+3\log_{10}1000=13$$

$$4+3 \cdot 3=13$$

$$13=13$$

APLICACIÓN 9

Si n es un número entero positivo y

$$2^{\log_2 9}-3=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\dots+\log_n 2^n$$

halle el valor de n .

RESOLUCIÓN

Del dato

$$2^{\log_2 9}-3=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\dots+\log_2 2^n$$

$$9-3=1+2+3+\dots+n$$

$$6=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$12=n(n+1)$$

$$\therefore n=3$$



Biografía

Leonhard Euler

Euler nació en Basilea en 1707 y comenzó sus estudios universitarios a los 13 años. En 1723 recibió el título de maestro de Filosofía. En 1726, a los 19 años de edad, finalizó su doctorado y en julio de ese año aceptó el cargo de profesor de Fisiología en la Academia Imperial Rusa de las Ciencias, en San Petersburgo, donde vivió 15 años.

En 1741 aceptó un cargo que le ofreció Federico II el Grande, rey de Prusia, en la Academia de Berlín. Vivió veinticinco años en Berlín.

Euler es considerado como el matemático más importante del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos. Trabajó prácticamente en todas las áreas de las matemáticas: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra, teoría de números, además de física continua, teoría lunar y otras áreas de la física.

Fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Si se imprimiesen todos sus trabajos (muchos de los cuales son de una importancia fundamental), ocuparían entre 60 y 80 volúmenes.



APLICACIÓN 10

Calcule m^n+n^m si

$$\log_3(n^3+1)=2 \text{ y } \log_5 125=5-m.$$

RESOLUCIÓN

Nos piden m^n+n^m .

Datos:

$$\bullet \log_3(n^3+1)=2 \quad \bullet \log_5 125=5-m$$

En el problema

$$\log_3(n^3+1)=2$$

$$n^3+1=3^2$$

$$n^3+1=9$$

$$n^3=8$$

$$n^3=2^3 \rightarrow n=2$$

Además

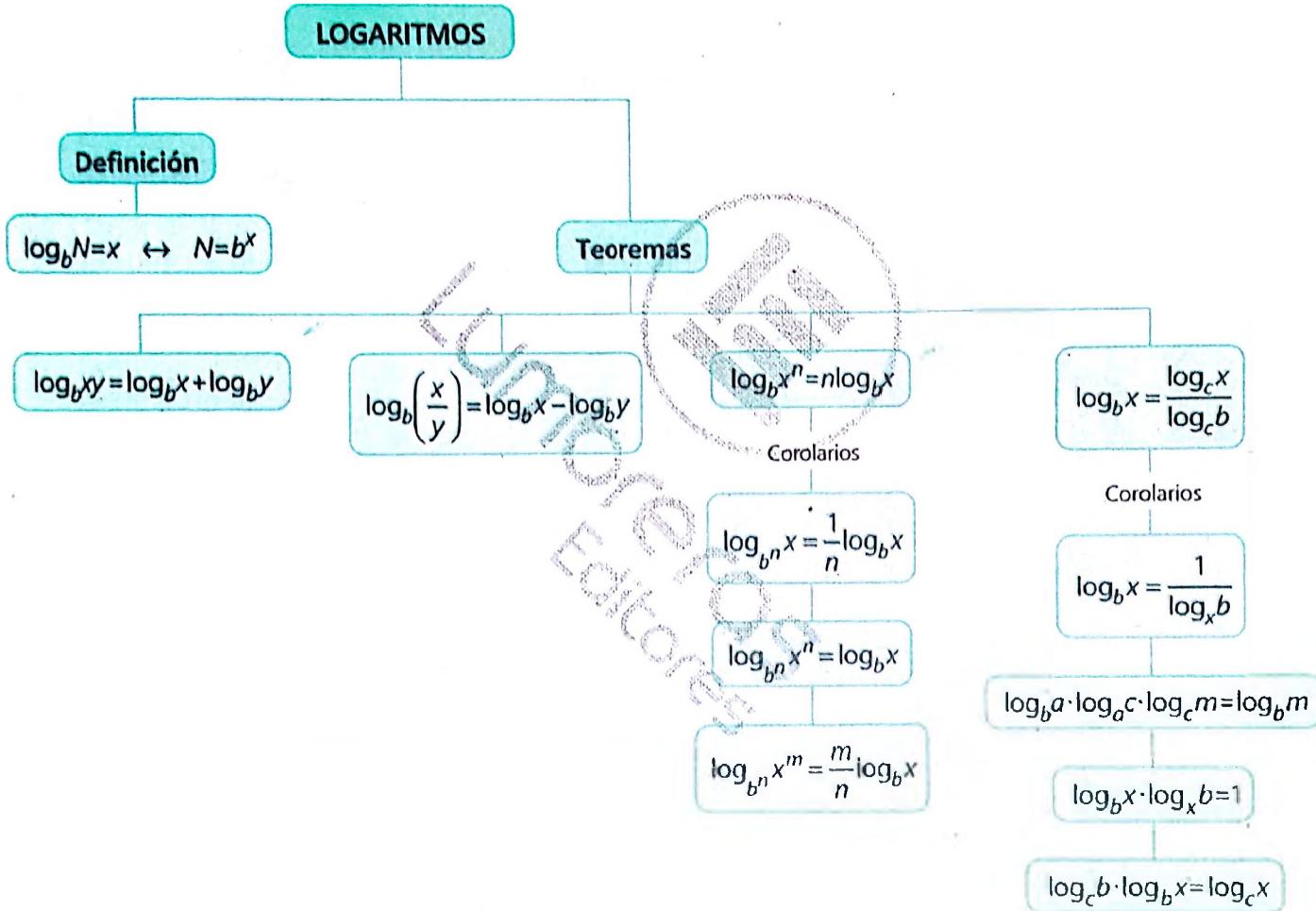
$$\log_5 125=5-m$$

$$3=5-m$$

$$m=5-3 \rightarrow m=2$$

Reemplazamos en lo que nos piden.

$$\therefore m^n+n^m=2^2+2^2=4+4=8$$



RESOLVEMOS JUNTOS

Problema N.º 1

Exprese en forma logarítmica las siguientes formas exponenciales:

a. $3^4 = 81$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c. $8^{-2} = \frac{1}{64}$

d. $8^{\frac{2}{3}} = 4$

Resolución

Para estos casos, usaremos el siguiente teorema:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow N = b^x$$

forma exponencial

a. $3^4 = 81$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c. $8^{-2} = \frac{1}{64}$

d. $8^{\frac{2}{3}} = 4$

forma logarítmica

a. $\log_3 81 = 4$

b. $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = 2$

c. $\log_8 \frac{1}{64} = -2$

d. $\log_3 4 = \frac{2}{3}$

Problema N.º 2

Exprese en forma exponencial las siguientes formas logarítmicas:

a. $\log_2 16 = 4$

b. $\log_a 7 = b$

c. $\log_3 243 = 5$

d. $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

Resolución

Para estos casos, utilizaremos el siguiente teorema:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow N = b^x$$

forma logarítmica

a. $\log_2 16 = 4$

b. $\log_a 7 = b$

c. $\log_3 243 = 5$

d. $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

forma exponencial

a. $16 = 2^4$

b. $7 = a^b$

c. $243 = 3^5$

d. $\frac{1}{16} = 4^{-2}$

Problema N.º 3

Determine el valor de x en las siguientes expresiones:

a. $\log_x 121 = 2$

b. $\log_2 32 = x$

c. $\log_4 x = 3$

d. $\log_x \left(\frac{81}{625}\right) = 4$

Resolución

Determinaremos el valor de x .

a. $\log_x 121 = 2 \rightarrow 121 = x^2 \rightarrow 11^2 = x^2$

$\therefore x = 11$

b. $\log_2 32 = x \rightarrow 32 = 2^x \rightarrow 2^5 = 2^x$

$\therefore x = 5$

c. $\log_4 x = 3 \rightarrow x = 4^3$

$\therefore x = 64$

d. $\log_x \left(\frac{81}{625}\right) = 4 \rightarrow \frac{81}{625} = x^4$

$\rightarrow \frac{3^4}{5^4} = x^4 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^4 = x^4$

$\therefore x = \frac{3}{5}$

Problema N.º 4

Calcule el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a. $\frac{\log_3 81 + \log_2 64}{\log 100}$

b. $\log_5(125)^{-1} - \log_2(32)^{-1}$

c. $2\log_{\frac{1}{4}} 32 + 7\log_{\frac{1}{5}} 125$

d. $4 \cdot \log_5 \left(\frac{25}{49} \right) + 2\log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{8}{125} \right)$

Resolución

Calculamos el valor de cada expresión.

a. $\frac{\log_3 81 + \log_2 64}{\log 100}$

$$\frac{\log_3 3^4 + \log_2 2^6}{\log 10^2}$$

$$\frac{4 \cdot \log_3 3 + 6 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \log 10}$$

$$\frac{4 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$\therefore \frac{10}{2} = 5$$

b. $\log_5(125)^{-1} - \log_2(32)^{-1}$

$$\log_5(5^3)^{-1} - \log_2(2^5)^{-1}$$

$$\log_5 5^{-3} - \log_2 2^{-5}$$

$$-3 \cdot \log_5 5 - (-5) \cdot \log_2 2$$

$$-3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1$$

$$\therefore -3 + 5 = 2$$

c. $2\log_{\frac{1}{4}} 32 + 7\log_{\frac{1}{5}} 125$

$$2\log_{2^{-2}} 2^5 + 7\log_{5^{-1}} 5^3$$

$$2 \left(\frac{5}{-2} \right) \cdot \log_2 2 + 7 \cdot \left(\frac{3}{-1} \right) \cdot \log_5 5$$

$$(-5) \cdot \log_2 2 + 7 \cdot (-3) \cdot \log_5 5$$

$$(-5) \cdot 1 + (-21) \cdot 1$$

$$\therefore -5 - 21 = -26$$

d. $4 \cdot \log_5 \left(\frac{25}{49} \right) + 2\log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{8}{125} \right)$

$$4 \cdot \log_5 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 2 \cdot \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5} \right)^3$$

$$4 \cdot 2 \cdot \log_5 \frac{5}{7} + 2 \cdot 3 \cdot \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}$$

$$\therefore 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 14$$

Problema N.º 5

Use las propiedades de logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

a. $\log_2(2x)$

d. $\log_b \left(\frac{a}{c^2} \right)$

b. $\log_2 x(x-1)$

e. $\log_b \left(\frac{p^2 q^3}{c} \right)$

c. $\log_b a^2 x$

f. $\log_p \sqrt[4]{ab^3}$

Resolución

Desarrollamos las expresiones.

a. $\log_2(2x)$

$\log_2 2 + \log_2 x$

$1 + \log_2 x$

b. $\log_2 x(x-1)$

$\log_2 x + \log_2(x-1)$

c. $\log_b a^2 \cdot x$

$\log_b a^2 + \log_b x$

$2\log_b a + \log_b x$

d. $\log_b \left(\frac{a}{c^2} \right)$

$\log_b a - \log_b c^2$

$\log_b a - 2\log_b c$

e. $\log_b \left(\frac{p^3 q^3}{c} \right)$

$\log_b p^3 q^3 - \log_b c$

$\log_b (pq)^3 - \log_b c$

$3 \cdot \log_b (pq) - \log_b c$

$3[\log_b p + \log_b q] - \log_b c$

f. $\log_p \sqrt[4]{ab^3}$

$\log_p (\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b^3})$

$\log_p \left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \right)$

$\log_p a^{\frac{1}{4}} + \log_p b^{\frac{3}{4}}$

$\frac{1}{4} \cdot \log_p a + \frac{3}{4} \log_p b$

Problema N.º 5

Reduzca cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo:

a. $\log_a m - \log_a n + \log_a p$

b. $2\log_b a + 3\log_b p + 1$

c. $3\log_a(x+y) - 2\log_a(x-y)$

d. $\log_b(a^2 - 36) - \log_b(a-6)$

Resolución

Reducimos cada expresión.

a. $\log_a m - \log_a n + \log_a p$

$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) + \log_a p$

$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) \cdot p$

b. $2\log_b a + 3\log_b p + 1$

$\log_b a^2 + \log_b p^3 + \log_b b$

$\log_b a^2 p^3 \cdot b$

c. $3\log_a(x+y) - 2\log_a(x-y)$

$\log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2$

$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$

d. $\log_b(a^2 - 36) - \log_b(a-6)$

$\log_b \left(\frac{a^2 - 36}{a-6} \right)$

$\log_b \frac{(a+6)(a-6)}{a-6}$

$\log_b(a+6)$

Problema N.º 7

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{\log_2 64}{\log_5 25} + \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)}{\log 1000} - \log_3 9 \cdot \log_{\sqrt{2}} 4$$

- A) 8 B) -1 C) -4
D) -8 E) 4

Resolución

Simplificamos la expresión.

$$\frac{\log_2 64}{\log_5 25} + \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)}{\log 1000} - \log_3 9 \cdot \log_{\sqrt{2}} 4^2$$

$$\frac{6}{2} + \frac{3 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)}{3} - 2 \cdot \log_2 16$$

$$3 + \frac{3 \cdot 1}{3} - 2 \cdot 4$$

$$\therefore 3 + 1 - 8 = -4$$

 Clave

Problema N.º 8

Halle el valor de $\log_{xy} z$ si se sabe que $\log_x y = 2$, $\log_z x = 3$.

- A) $\frac{1}{6}$ B) 6 C) 9
D) $\frac{1}{9}$ E) 26

Resolución

Nos piden $\log_{xy} z$.

A partir de los datos

$$\log_x y = 2 \rightarrow y = x^2$$

$$\log_z x = 3 \rightarrow x = z^3$$

$$\text{Además, } y = x^2 \rightarrow y = (z^3)^2 \rightarrow y = z^6$$

Reemplazamos en lo que nos piden.

$$\log_{xy} z = \log_{z^3 z^6} z = \log_{z^9} z$$

$$\therefore \frac{1}{9} \log_z z = \frac{1}{9}$$

 Clave

Problema N.º 9

Reduzca la siguiente expresión:

$$\log_7 3 + \log_7 14 - \log_7 6$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Reducimos la expresión.

$$\log_7 3 + \log_7 14 - \log_7 6$$

$$\downarrow \quad \log_7(3 \cdot 14) - \log_7 6$$

$$\log_7\left(\frac{3 \cdot 14}{6}\right)$$

$$\therefore \log_7 7 = 1$$

 Clave

Problema N.º 10

Simplifique la expresión J .

$$J = (\log_5 10 - 1)(\log_4 12 - 1) \cdot \log_3 5$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) 4
 D) 2 E) $\frac{1}{3}$

Resolución

Para este caso, haremos uso de la siguiente propiedad: $\log_a a = 1$

En el problema

$$J = (\log_5 10 - 1)(\log_4 12 - 1) \cdot \log_3 5$$

$$J = (\log_5 10 - \log_5 5)(\log_4 12 - \log_4 4) \cdot \log_3 5$$

$$J = \left(\log_5 \left(\frac{10}{5} \right) \right) \left(\log_4 \left(\frac{12}{4} \right) \right) \cdot \log_3 5$$

$$J = \log_5 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 5$$

Aplicamos la regla de la cadena y se obtiene

$$J = \log_4 2 = \log_{2^2} 2$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2$$

$$\therefore J = \frac{1}{2}$$

Clave

Problema N.º 11

¿Cuál es el valor de $\log_{45} 243$ si $\log_3 5 = x$?

- A) $\frac{6}{x+4}$ B) $\frac{4}{x+3}$ C) $\frac{5}{x+2}$
 D) $\frac{4}{x+5}$ E) $\frac{5}{x+3}$

Resolución

Para este caso, haremos uso de la siguiente propiedad:

$$\log_b N = \frac{\log_c N}{\log_c b}$$

En el problema

$$\log_{45} 243 = \frac{\log_3 243}{\log_3 45}$$

$$\rightarrow \frac{\log_3 3^5}{\log_3 5 \cdot 3^2} = \frac{5 \cdot \log_3 3}{\log_3 5 + \log_3 3^2}$$

$$\therefore \frac{5 \cdot 1}{x + 2 \log_3 3} = \frac{5}{x + 2}$$

Clave

Problema N.º 12

Si $\log_{18} 2 = a$, halle el valor de $\log_{18} 27$ en términos de a .

- A) $\frac{1-a}{2}$ B) $\frac{3}{2}(1-a)$ C) $\frac{1+a}{2}$
 D) $\frac{3}{2}(1+a)$ E) $a-1$

Resolución

Nos piden $\log_{18} 27 = 3 \log_{18} 3$. (*)

Dato: $\log_{18} 2 = a$

Recordemos que $\log_a a = 1$.

En el problema

$$\log_{18} 18 = \log_{18} 2 \cdot 3^2$$

$$1 = \log_{18} 2 + \log_{18} 3^2$$

$$1 = \underbrace{\log_{18} 2}_a + 2 \log_{18} 3$$

$$1 - a = 2 \log_{18} 3$$

$$\frac{1-a}{2} = \log_{18} 3$$

Luego en (*)

$$3 \log_{18} 3 = 3 \left(\frac{1-a}{2} \right) = \frac{3}{2} (1-a)$$



Problema N.º 13

Si

$$A = \log\left(\frac{75}{16}\right) - 2 \log\left(\frac{5}{9}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

calcule el valor de antilog(A).

- | | | |
|------|--------|-------|
| A) 2 | B) 0 | C) -2 |
| D) 7 | E) 0,5 | |

Resolución

Primero hallamos A.

$$A = \log\left(\frac{75}{16}\right) - 2 \log\left(\frac{5}{9}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{75}{16}\right) - \log\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{75}{16}\right) - \log\left(\frac{25}{81}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{\frac{75}{16}}{\frac{25}{81}}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

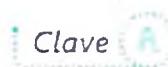
$$A = \log\left(\frac{75 \cdot 81}{16 \cdot 25}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{3 \cdot 81}{16}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{243}{16} \cdot \frac{32}{243}\right)$$

$$A = \log 2$$

$$\therefore \text{antilog}(A) = 10^A = 10^{\log 2} = 2$$



Problema N.º 14

Halle el valor de Q.

$$Q = \left(\frac{1}{1 + \log_2 35} \right) \cdot \log_2 70$$

- | | | |
|---------------|----------------|-------|
| A) $\log_2 3$ | B) 0 | C) -1 |
| D) 1 | E) $\log_2 18$ | |

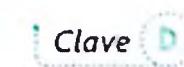
Resolución

Hallamos el valor de Q.

$$Q = \left(\frac{1}{\log_2 2 + \log_2 35} \right) \cdot \log_2 70$$

$$Q = \left(\frac{1}{\log_2 70} \right) \cdot \log_2 70$$

$$\therefore Q = 1$$



Problema N.º 15

Halle el valor de P .

$$P = \frac{1}{1+\log_2 35} + \frac{1}{1+\log_5 14} + \frac{1}{1+\log_7 10}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 5

Resolución

Para este caso, usaremos las siguientes propiedades:

- $\log_a a = 1$
- $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$

En el problema

$$P = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 35} + \frac{1}{\log_5 5 + \log_5 14} + \frac{1}{\log_7 7 + \log_7 10}$$

$$P = \frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_5 70} + \frac{1}{\log_7 70}$$

$$P = \log_{70} 2 + \log_{70} 5 + \log_{70} 7$$

$$P = \log_{70} 2 \cdot 5 \cdot 7 = \log_{70} 70$$

$$\therefore P = 1$$

Clave D

Problema N.º 16

Si se cumple que

$$7^{\log_b 81} = 3^8$$

determine el valor de $\log_7 b$.

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) 7 E) 1

Resolución

Nos piden $\log_7 b$.

Dato:

$$7^{\log_b 81} = 3^8$$

$$81^{\log_b 7} = 3^8$$

$$(3^4)^{\log_b 7} = 3^8 \rightarrow 3^{4 \log_b 7} = 3^8$$

$$\rightarrow 4 \log_b 7 = 8 \rightarrow \log_b 7 = 2$$

$$\therefore \log_7 b = \frac{1}{\log_b 7} = \frac{1}{2}$$

Clave C

Problema N.º 17

Si $\log_2 5 = x$ y $\log_2 343 = 9y$, halle el valor de la expresión $\log_{16} 35$ en términos de x y y .

- A) $\frac{x+y}{2}$ B) $\frac{x-y}{2}$ C) $\frac{x+3y}{4}$
D) $\frac{x+3y}{2}$ E) $\frac{x-3y}{4}$

Resolución

Nos piden $\log_{16} 35$.

Datos: $\log_2 5 = x$ y $\log_2 343 = 9y$

Lo que nos piden se puede escribir como

$$\log_{16} 35$$

$$\log_{2^4} 35$$

$$\frac{1}{4} \log_2 35$$

$$\frac{1}{4} (\log_2 5 + \log_2 7)$$

(*)

Del dato

$$\log_2 5 = x, \quad \log_2 343 = 9y$$

$$\log_2 7^3 = 9y$$

$$3\log_2 7 = 9y \rightarrow \log_2 7 = 3y$$

Luego en (*)

$$\log_{16} 35 = \frac{1}{4}(\log_2 5 + \log_2 7) = \frac{1}{4}(x + 3y)$$

$$\therefore \log_{16} 35 = \frac{x + 3y}{4}$$

Clave C

Problema N.º 18

Si se sabe que

$$A = \log_{24} 2 + \log_{24} 3 + \log_{24} 20 - \log_{24} 5$$

$$B = \log_3 6 + \log_3 9 - \log_3 12 + \log_3 2$$

determine el valor de $\log_2 \left(\frac{A}{B} \right)$.

- A) 1
- B) 0
- C) -1
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{4}$

Resolución

Nos piden $\log_2 \left(\frac{A}{B} \right)$. (*)

Primero hallamos el valor de A.

$$A = \log_{24} 2 + \log_{24} 3 + \log_{24} 20 - \log_{24} 5$$

$$A = \log_{24} 2 \cdot 3 \cdot 20 - \log_{24} 5$$

$$A = \log_{24} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{5} \right)^4 = \log_{24} 24$$

$$\rightarrow A = 1$$

Luego, hallamos el valor de B.

$$B = \log_3 6 + \log_3 9 - \log_3 12 + \log_3 2$$

$$B = \log_3 6 \cdot 9 - \log_3 12 + \log_3 2$$

$$B = \log_3 \left(\frac{6 \cdot 9}{12} \right) + \log_3 2$$

$$B = \log_3 \left(\frac{6 \cdot 9 \cdot 2}{12} \right) = \log_3 9$$

$$\rightarrow B = 2$$

Finalmente en (*)

$$\log_2 \left(\frac{A}{B} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \log_2 2^{-1}$$

$$\therefore \log_2 \left(\frac{A}{B} \right) = -1$$

Clave D

Problema N.º 19

Si $x > 1$, simplifique la expresión J.

$$J = \log_x (x \sqrt[3]{x}) + \log_{\sqrt{x}} \sqrt[3]{x}^2$$

- A) $\frac{5}{3}$
- B) 1
- C) 3
- D) $\frac{8}{3}$
- E) $\frac{10}{3}$

Resolución

Simplificamos J.

$$J = \log_x (x \sqrt[3]{x}) + \log_{\sqrt{x}} \sqrt[3]{x}^2$$

$$J = \log_x x + \log_x \sqrt[3]{x} + \log_{\sqrt{x}} \sqrt[3]{x}^2$$

$$J = \log_x x + \log_x x^{\frac{1}{3}} + \log_x x^{\frac{2}{3}}$$

$$J = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

$$\therefore J = \frac{8}{3}$$

Clave D

Problema N.º 20

Si $\log_{12} 3 = b$, halle $\log_{12} 8$ en términos de b .

- A) $\frac{3}{2}(1-b)$ B) $\frac{2}{3}b-1$ C) $\frac{1+b}{2}$
 D) $5b+1$ E) $\frac{2}{3}b+1$

Resolución

Nos piden $\log_{12} 8$.

Dato: $\log_{12} 3 = b$

Lo que nos piden se puede escribir como

$$\log_{12} 8 = \log_{12} 2^3 = 3 \log_{12} 2 \quad (*)$$

Del dato

$$\log_{12} 3 = b, \text{ además,}$$

$$\log_{12} 12$$

$$\log_{12} 3 + 2 \log_{12} 2 = 1$$

$$b + 2 \log_{12} 2 = 1$$

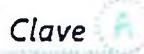
$$2 \log_{12} 2 = 1 - b$$

$$\log_{12} 2 = \frac{1-b}{2}$$

Luego en (*)

$$\log_{12} 8 = 3 \log_{12} 2 = 3 \left(\frac{1-b}{2} \right)$$

$$\therefore \log_{12} 8 = \frac{3}{2}(1-b)$$

 Clave A

Problema N.º 21

Dado el sistema

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=5 \end{cases}$$

calcule $\log_{\sqrt[3]{10}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}}$.

- A) 100 B) 1000 C) 12,5
 D) 2 E) 25

Resolución

Nos piden

$$\log_{\sqrt[3]{10}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt[3]{10}} \sqrt[3]{x^2 - y^2}^3$$

$$\rightarrow \log_{10} (x+y)(x-y) = \log_{10} 20 \cdot 5$$

$$\therefore \log_{10} 100 = 2$$

 Clave

Problema N.º 22

Determine la mayor solución de la ecuación

$$\log(x^2 - x + 8) - \log x^2 = 1.$$

- A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{9}{8}$ C) -1
 D) 1 E) 2

Resolución

Nos piden la mayor solución de la ecuación.

$$\text{Dato: } \log(x^2 - x + 8) - \log x^2 = 1$$

Entonces

$$\log(x^2 - x + 8) = \log x^2 + \log 10$$

$$\log(x^2 - x + 8) = \log 10x^2$$

$$x^2 - x + 8 = 10x^2$$

$$10x^2 - x^2 + x - 8 = 0$$

$$9x^2 + x - 8 = 0$$

$$9x - 8$$

$$x - 1$$

$$(9x-8)(x+1)=0$$

$$\rightarrow x = \frac{8}{9}; x = -1$$

Por lo tanto, la mayor solución es $\frac{8}{9}$.

 Clave A

Problema N.º 23

Halle el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\log_4(2-x) + \log_x x = -\frac{1}{2}$$

- A) \emptyset B) $\{1\}$ C) $\left\{\frac{15}{8}\right\}$
 D) $\left\{\frac{1}{8}\right\}$ E) $\left\{\frac{7}{8}\right\}$

Resolución

Hallamos el conjunto solución.

$$\log_4(2-x) + \log_x x = -\frac{1}{2}$$

$$\log_4(2-x) + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_4(2-x) = -\frac{3}{2} \rightarrow 2-x = 4^{-\frac{3}{2}}$$

$$2-x = (2^2)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow 2-x = 2^{2\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$2-x = 2^{-3} \rightarrow 2-x = \frac{1}{8}$$

$$2-\frac{1}{8}=x \rightarrow x=\frac{15}{8}$$

$$\therefore CS = \left\{\frac{15}{8}\right\}$$

Clave C

Problema N.º 24

Si x_0 es la solución de la ecuación

$$1+2\log x - \log(x+2)=0$$

determine el valor de x_0 .

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Resolución

Del dato

$$1+2\log x - \log(x+2)=0$$

$$\log 10 + \log x^2 = \log(x+2)$$

$$\log 10x^2 = \log(x+2)$$

$$10x^2 = x+2$$

$$10x^2 - x - 2 = 0$$

$$5x - 2$$

$$2x - 1$$

$$(5x+2)(2x-1)=0$$

$$x = -\frac{2}{5}; \quad x = \frac{1}{2}$$

$x > 0$, pues para $x = -\frac{2}{5}$ no cumple.

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

Clave C

Problema N.º 25

Halle el conjunto solución de la ecuación

$$(\log x^2)^2 - 4\log x = 8.$$

A) $\left\{1; \frac{1}{100}\right\}$ B) $\left\{100; \frac{1}{100}\right\}$ C) $\left\{10; \frac{1}{100}\right\}$

D) $\left\{10; \frac{1}{10}\right\}$ E) $\left\{100; \frac{1}{10}\right\}$

Resolución

De la ecuación

$$(\log x^2)^2 - 4\log x = 8$$

$$(2\log x)^2 - 4\log x - 8 = 0$$

$$4\log^2 x - 4\log x - 8 = 0$$

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

$$\log x - 2$$

$$\log x - 1$$

$$(\log x - 2)(\log x + 1) = 0$$

$$\log x = 2 \quad \vee \quad \log x = -1$$

$$x = 10^2 \quad \vee \quad x = 10^{-1}$$

$$x = 100 \quad \vee \quad x = \frac{1}{10}$$

$$\therefore CS = \left\{ 100; \frac{1}{10} \right\}$$

Clave

**Problema N.º 26**

Si $7^{x+2} + 7^x = 100$, determine el valor de E .

$$E = x \cdot \log_2 49$$

- A) $\log 16$
 B) $\log_2 3$
 C) $\log_4 7$
 D) $\log_2 5$
 E) 2

Resolución

Del dato

$$7^{x+2} + 7^x = 100$$

$$7^x \cdot 7^2 + 7^x = 100$$

$$49 \cdot 7^x + 7^x = 100$$

$$50 \cdot 7^x = 100$$

$$\rightarrow 7^x = 2$$

Tomamos los logaritmos en base 7.

$$\log_7 7^x = \log_7 2$$

$$x \cdot \log_7 7 = \log_7 2$$

$$\rightarrow x = \log_7 2$$

Nos piden

$$x \cdot \log_2 49 = \log_7 2 \cdot \log_2 49$$

$$\therefore E = \log_7 49 = 2$$

Clave

**Problema N.º 27**

Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_2(x^2 - 5x) = \log_2(2x - 12)$$

- A) $\{2; 4\}$
 B) $\{9; 16\}$
 C) $\{3; 4\}$
 D) ó
 E) $\{1; 3\}$

Resolución

De la ecuación

$$\log_2(x^2 - 5x) = \log_2(2x - 12)$$

$$\rightarrow x^2 - 5x = 2x - 12$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x \neq -3$$

$$x \neq -4$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x=3; x=4$$

Verifiquemos:

$x=3$ en la ecuación

$$\log_2(3^2 - 5 \cdot 3) = \log_2(2 \cdot 3 - 12)$$

$$\log_2 -6 = \log_2 -6 \text{ (no cumple)}$$

$x=4$ en la ecuación

$$\log_2(4^2 - 5 \cdot 4) = \log_2(2 \cdot 4 - 12)$$

$$\log_2 -4 = \log_2 -4 \text{ (no cumple)}$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Clave

Problema N.º 28

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\log_5(x+2) + \log_5(x+3) = \log_{25} 4$$

- A) $\{-1; -4\}$
 B) $\{-4\}$
 C) $\{1\}$
 D) $\{-1\}$
 E) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Resolución

Del dato

$$\log_5(x+2) + \log_5(x+3) = \log_{25}4 \quad (*)$$

$$\log_5(x+2)(x+3) = \log_{\sqrt{25}}\sqrt{4}$$

$$\log_5(x^2 + 5x + 6) = \log_5 2$$

$$x^2 + 5x + 6 = 2$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} x \\ \times \\ x \\ \hline +4 \\ +1 \end{array}$$

$$(x+4)(x+1)=0$$

$$\rightarrow x=-4 \vee x=-1$$

Verificamos

$$x=-4$$

En (*)

$$\log_5(-4+2) + \log_5(-5+3) = \log_{25}4$$

$$\underbrace{\log_5 -2 + \log_5 -2}_{\text{no existe}} = \log_5 2 \quad (\text{no cumple})$$

$$x=-1$$

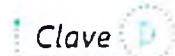
En (*)

$$\log_5(-1+2) + \log_5(-1+3) = \log_{25}4$$

$$\log_5 1 + \log_5 2 = \log_5 2$$

$$\log_5 2 = \log_5 2 \quad (\text{sí cumple})$$

$$\therefore CS=\{-1\}$$


Problema N.º 29

Resuelva la siguiente ecuación:

$$7^{x+3} - 4 \cdot 7^{x+1} = 90$$

- A) $\{\log_7 2\}$ B) $\{\log_7 2 - 1\}$ C) $\{\log_7 14\}$
 D) $\{\log_2 7\}$ E) $\{\log_2 7 - 1\}$

ResoluciónDe la ecuación $7^{x+3} - 4 \cdot 7^{x+1} = 90$

$$7^x \cdot 7^3 - 4 \cdot 7^x \cdot 7 = 90$$

$$343 \cdot 7^x - 28 \cdot 7^x = 90$$

$$315 \cdot 7^x = 90$$

$$7^x = \frac{90}{315}$$

$$7^x = \frac{2}{7}$$

$$\log_7 7^x = \log_7 \left(\frac{2}{7} \right)$$

$$x \cdot \log_7 7 = \log_7 2 - \log_7 7$$

$$x = \log_7 2 - 1$$

$$\therefore CS = \{\log_7 2 - 1\}$$


Problema N.º 30

Resuelva la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_3^2 x - 3 = \log_3 x^2$$

A) $\left\{ 8; \frac{1}{2} \right\}$ B) $\left\{ 27; \frac{1}{3} \right\}$ C) $\{1; 0\}$

D) $\left\{ 9; \frac{1}{3} \right\}$ E) $\left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$

Resolución

De la ecuación logarítmica

$$\log_3^2 x - 3 = \log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$$

$$\log_3 x \quad -3$$

$$\log_3 x \quad 1$$

$$(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 1) = 0$$

$$\log_3 x = 3 \quad \vee \quad \log_3 x = -1$$

$$x = 3^3 \quad \vee \quad x = 3^{-1}$$

$$x = 27 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore CS = \left\{ 27; \frac{1}{3} \right\}$$



Problema N.º 31

La percepción de la sonoridad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dado por

$$B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (sonoridad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0 .

Resolución

Nos piden el nivel de decibeles.

Dato:

La intensidad física I es 100 veces I_0 , es decir,

$$I = 100I_0$$

Además

$$B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$B = 10 \log \left(\frac{100I_0}{I_0} \right)$$

$$B = 10 \log 100$$

$$B = 10 \cdot 2$$

$$B = 20$$

Por lo tanto, la sonoridad del sonido es 20 dB.

Problema N.º 32

La ley de Ebbinghaus o curva del olvido establece que si se aprende una tarea a un nivel de desempeño P_0 , entonces después de un intervalo de tiempo t , el nivel de desempeño P satisface la relación

$$\log P = \log P_0 - c \log(t+1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

- Despeje P .
- Si la puntuación de una prueba es 90, ¿qué puntuación se esperaría obtener en una prueba similar dos meses después y un año después? (Suponga que $c=0,2$).

Resolución

- Nos piden despejar P .

Dato:

$$\log P = \log P_0 - c \log(t+1)$$

$$\log P = \log P_0 - \log(t+1)^c$$

$$\log P = \log \frac{P_0}{(t+1)^c}$$

$$\rightarrow P = \frac{P_0}{(t+1)^c} \quad (*)$$

b. Nos piden lo siguiente:

- La puntuación después de 2 meses

Aquí $P_0=90$ y $c=0,2$.

Luego en (*)

$$P = \frac{90}{(2+1)^{0,2}} \approx 72$$

Se esperaría que la puntuación 2 meses después sea 72.

- La puntuación después de un año

En (*)

$$P = \frac{90}{(12+1)^{0,2}} \approx 54$$

Se esperaría que la puntuación después de un año sea 54.

Problema N.º 33

Reduzca la siguiente expresión:

$$J = \frac{1}{1+\log_2 5}$$

- A) $\log 8$ B) $\log 5$ C) $\log_5 10$
 D) $\log 15$ E) $\log 7$

Resolución

Recuerde las siguientes propiedades:

- $\log_a a = 1$
- $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$

De la expresión

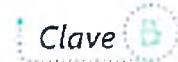
$$S = \frac{1}{1+\log_2 5}$$

$$S = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 5}$$

$$S = \frac{1}{\log_5 10}$$

$$S = \log_{10} 5$$

$$\therefore S = \log 5$$



Problema N.º 34

Si $\log_2 18 = m$, determine el valor de $2\log_2 3 + 5$.

- A) m B) $m+2$ C) $m+3$
 D) $m+4$ E) $m+5$

Resolución

Nos piden $2\log_2 3 + 5$. (*)

Del dato

$$\log_2 18 = m$$

$$\log_2 2 + \log_2 9 = m$$

$$1 + \log_2 3^2 = m$$

$$1 + 2\log_2 3 = m$$

$$2\log_2 3 = m - 1$$

Luego, reemplazamos $2\log_2 3 = m - 1$ en (*).

$$2\log_2 3 + 5 = m - 1 + 5 = m + 4$$



Problema N.º 35

Calcule el producto de soluciones de la ecuación $\log x^{\log x} - \log x - 2 = 0$.

- A) 10^{-1} B) 10 C) 100
 D) 1000 E) 10^{-2}

Resolución

De la ecuación

$$\log x \cdot \log x - \log x - 2 = 0$$

$$\log x \cdot \log x - \log x - 2 = 0$$

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

Factorizamos por aspa simple.

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} \cancel{\log x} \quad -2 \\ \cancel{\log x} \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$$(\log x - 2)(\log x + 1) = 0$$

$$\log x = 2 \vee \log x = -1$$

Por definición de logaritmos, tenemos

$$x_1 = 10^2 \vee x_2 = 10^{-1}$$

$$\therefore x_1 x_2 = 10^2 \cdot 10^{-1} = 10$$

Problema N.º 36

Resuelva

$$\log_3(5x+2) + \text{colog}_3(x-2) = 2$$

e indique el valor de $\log(2x)$.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 6

Resolución

De la ecuación

$$\log_3(5x+2) + \text{colog}_3(x-2) = 2$$

$$\log_3(5x+2) - \log_3(x-2) = 2$$

Por propiedad de logaritmos, tenemos

$$\log_3\left(\frac{5x+2}{x-2}\right) = 2$$

Por definición de logaritmos

$$\frac{5x+2}{x-2} = 9 \rightarrow 5x+2 = 9x-18$$

$$20 = 4x$$

$$\frac{20}{4} = x$$

Luego, $x=5$.Nos piden $\log(2x)=\log 10=1$.

$$\therefore \log(2x)=1$$

**Problema N.º 37**

Halle la solución de la siguiente ecuación:

$$\text{antilog}_2(x-5) = 3^{\text{colog}_9 16}$$

- A) 1 B) 3 C) 5
 D) 7 E) 9

Resolución

De la ecuación

$$\text{antilog}_2(x-5) = 3^{\text{colog}_9 16}$$

por definición de antilogaritmo y cologaritmo, tenemos

$$2^{x-5} = 3^{-\text{colog}_9 16}$$

Luego

$$2^{x-5} = 3^{-\log_3 4}$$

$$2^{x-5} = 3^{\log_3 4^{-1}}$$

Por identidad fundamental, tenemos

$$2^{x-5} = 4^{-1} \rightarrow 2^{x-5} = 2^{-2}$$

Luego

$$x-5 = -2$$

$$\therefore x=3$$

 Clave

Problema N.º 38

Si

$$\begin{cases} 7^x = 5 \\ 5^y = 3 \end{cases}$$

halle el valor de xy .

- A) $\log_7 3$
- B) $\log 3$
- C) $\log 7$
- D) $\log_7 2$
- E) $\log_3 7$

Resolución

Del dato

$$7^x = 5$$

$$\log_7 7^x = \log_7 5$$

$$\rightarrow x = \log_7 5$$

además

$$5^y = 3$$

$$\log_5 5^y = \log_5 3$$

Nos piden

$$xy = \log_7 5 \cdot \log_5 3$$

$$\therefore xy = \log_7 3$$

 Clave

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Exprese en forma logarítmica las siguientes formas exponenciales.

FORMA EXPOENCIAL	FORMA LOGARÍTMICA
$3^2=9$	
$2^6=64$	
$\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$	

2. Exprese los siguientes logaritmos en su forma exponencial.

FORMA LOGARÍTMICA	FORMA EXPONENCIAL
$\log_5 125=3$	
$\log_2 64=6$	
$\log_4 1024=5$	
$\log_{16} 8=\frac{3}{4}$	

3. Determine el valor de x en las siguientes expresiones:

a. $\log_x 144=2$

b. $\log_3 x=4$

c. $\log_2 16=x$

d. $\log_5 x=3$

e. $\log_x 3=1$

f. $\log_5 1=x$

g. $\log_x \left(\frac{16}{81}\right)=4$

h. $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}=x$

4. Efectúe

a. $\log_3 \sqrt{27}$

b. $\log 4 + \log 25$

c. $\log_2 160 - \log_2 5$

d. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

e. $\log_2 8^{10}$

f. $\log(\log 10^{100})$

5. Use las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

a. $\log_3(3x)$

b. $\log_5 x(x-1)$

c. $\log 5^{12}$

d. $\log_5(AB^3)$

e. $\log_3(x\sqrt[3]{y})$

f. $\log\left(\frac{x^3y^4}{z^8}\right)$

g. $\ln\sqrt[3]{3r^2z}$

6. Use las propiedades de los logaritmos para combinar las expresiones.

a. $\log_7 5 + 5 \log_7 2$

b. $\log 12 + \frac{1}{3} \log 11 - \log 2$

c. $\log_3 A + \log_3 B - 3 \log_3 C$

d. $\log_7(x^2 - 1) - \log_7(x - 1)$

e. $\log(a+b) + \log(a-b) - \log c$

f. $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

7. Si $\log_x a = 2$, halle el equivalente de $\log_x(ax)^2$.

- A) 4 B) 2 C) $\log_x 2a$
 D) 6 E) a

8. Si $\log(x^3 \cdot y^3) = a$, halle el equivalente de $6(\log x + \log y)$.

- A) -6 B) $6a$ C) $-2a$
 D) $2a$ E) $9a$

9. Halle el valor de x en la siguiente ecuación:
 $\log_2(7x-1) - \log_2(3x+5) = 1$

- A) 0,57 B) 11 C) $\frac{7}{4}$
 D) $\frac{1}{11}$ E) 5

10. ¿Cuál de las proposiciones es falsa?
 Consideré que los logaritmos están bien definidos.

- A) $\log_a a = 1$
 B) $\log_a a^n = n$
 C) $\log_a 1 = 0$
 D) $\log_a(b+c) = (\log_a b)(\log_a c)$
 E) $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

11. Si $\log 5 = 0,699$, determine el valor de $\log 50$.

- A) 16,99 B) 6,99 C) 1,699
 D) 0,301 E) 0,5223

12. Si $\log(\log(x+2)) = 0$, halle el valor de x .

- A) 1 B) 2 C) 0
 D) 10 E) 8

13. Halle una solución de la siguiente ecuación:

$$5\log x - 3 = \log 2$$

- A) $\sqrt[5]{2000}$ B) $\frac{1}{5}\log 5$ C) $20\sqrt{5}$
 D) $\sqrt{2}$ E) 400

14. Si x y y son números reales positivos con $y \neq 1$, además, $\frac{\log x}{\log y} = 2$, ¿qué se cumple?

- A) $x - 2y = 0$
 B) $x - y^2 = 0$
 C) $x - y = 2$
 D) $x + y = 2$
 E) $x - y = 100$

15. Calcule el valor de

$$\log_{0,25} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right).$$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

16. Determine el valor de la expresión

$$\log_2(\log_3 81) + \log_3 5^{-\log_5 9}.$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -3 E) 0

17. Reduzca la siguiente expresión:

$$\frac{\log_2 5^{\log_5 8}}{\log_3 \sqrt{3}}$$

- A) 2 B) 3 C) 6
D) 7 E) 9

18. Calcule el valor de $\log_5 a + \log_a b$ si se sabe que $\log_{ab} a = 2$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) $-\frac{3}{2}$
D) $-\frac{5}{2}$ E) 4

19. Determine el valor aproximado al centesimal de n si se sabe que $\left(\frac{1}{5}\right)^n = 2$. Considere que $\log 2 = 0,30$.

- A) -0,43 B) -0,41 C) -0,44
D) -0,4 E) -0,47

20. Si se cumple que

$$2^x = 18 \quad \wedge \quad 2^y = 12$$

halle $\log_2 3$ en términos de x y y .

- A) $x+y+1$ B) $x+y-1$ C) $-x+y-1$
D) $x-y-1$ E) $x-y+1$

21. Determine el valor de $\log_x y$ si se cumple que

$$\frac{\log_x y + \log_y x}{\log_x y - \log_y x} = \frac{13}{12}.$$

- A) 2 B) 7 C) 5
D) 3 E) 12

22. Simplifique la siguiente expresión:

$$J = \frac{\log_5 8 \cdot \log_4 a^2 \cdot \log_7 16}{\log_2 \cdot \log_b 10 \cdot \log_7 b}$$

- A) 2 B) 7 C) 8
D) 3 E) 12

23. Si $\log_{20} [m + \log_5 (1 + \log_7 1)] = \log_{\frac{1}{2}} (0,5)$, calcule la suma de cifras de m^2 .

- A) 2 B) 4 C) 5
D) 9 E) 13

24. Reduzca la siguiente expresión:

$$\log_{27} 81 + \log_{125} 25 - \log_{\sqrt{2}} (0,25)$$

- A) 4 B) 6 C) 7
D) 2 E) -1

25. Si $\{z_0\}$ es el conjunto solución de la ecuación $\log_3 z - \log_3 2 = 3$, calcule $\sqrt{z_0 + 10}$.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

26. Si $\log_2(x-1)=5$, halle el valor de $(x+5)$.

- A) 38 B) -35 C) 32
D) 41 E) 36

27. Halle las soluciones de la ecuación

$$\log(x^2 - 15x) = 2.$$

- A) $\frac{15 \pm \sqrt{233}}{2}$
B) -20; -5
C) 20; -5
D) 5; -20
E) ± 20

28. Resuelva la ecuación

$$\log x = \frac{1}{2} \cdot \log 16 - \frac{1}{3} \cdot \log 8 + 1.$$

- A) {18} B) {20} C) {10}
D) {30} E) {25}

29. Resuelva la siguiente ecuación:

$$4^{\log_2(x-1)} = 9$$

- A) {3} B) {4} C) {5}
D) $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$ E) {4; -2}

30. Halle la suma de soluciones de la siguiente ecuación:

$$\log^2 x = 5 \log x - 6$$

- A) 10 B) 11 C) 100
D) 1000 E) 1100

31. Al resolver la ecuación $\log x = 2 - \log^2 x$, se obtiene como conjunto solución $\{m; n\}$, donde $m > n$.

Calcule $\log\left(\frac{m^2}{n}\right)$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

32. Determine el producto de las soluciones que presenta la siguiente ecuación:

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x + 5)$$

- A) -2 B) 4 C) -6
D) -5 E) 8

33. Determine la solución de la ecuación $\log_4(2-x) + \log_x x = -\log_4 2$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{15}{4}$
D) $\frac{15}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

34. Si x_0 es solución de la ecuación

$$\log_{x+1}(4x+9) = 2$$

calcule el valor de $\log_{25}(4x_0 + 9)$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) 3 E) 2

35. Determine el valor de x en la expresión $3\log_2 x + 2\log_4 x + 4\log_8 x = 16$.

- A) 32 B) 16 C) 27
D) 8 E) 36

- 36.** Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (como una isla) mediante la relación especies-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especies y el hábitat.

- De la ecuación, despeja S .
- Use el inciso "a" para mostrar que si $k=3$, entonces duplicar el área incrementa el número de especies ocho veces.

- 37.** Wilfredo Pareto (1848 - 1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país la poseen algunos miembros de la población. El principio de Pareto es $\log P = \log C - k \log W$ donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas en la población que tiene esa cantidad de dinero.

- Resuelva la ecuación para P .
- Suponga que $K=2.1$; $C=8000$ y W se mide en millones de dólares. Use el inciso para hallar el número de personas que tienen dos millones o más, ¿cuántas personas tienen 10 millones o más?

- 38.** Analice y determine si las proposiciones son verdaderas o falsas. Considere que todos los logaritmos existen.

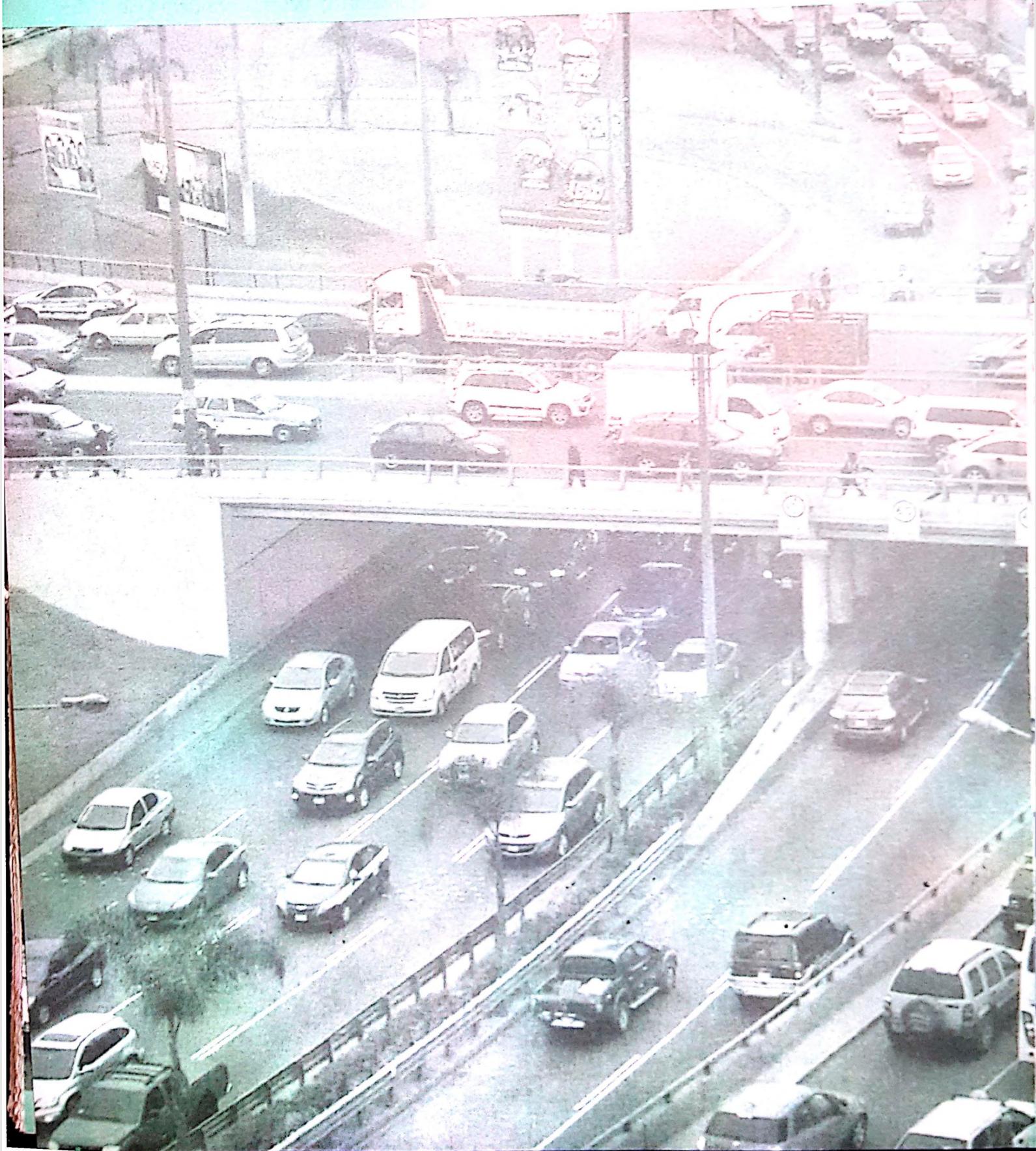
- $\log_3(x-y) = \log_3 x - \log_3 y$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$
- $\log_3\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_3 a - 2\log_3 b$
- $\log 3^z = z \log 3$
- $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$
- $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$
- $(\log_2 17)^x = x \log_2 17$
- $\log_m m^m = m$
- $-\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$

Claves

1	B	6	D	11	C	16	E	21	B	26	A	31	E	36	*
2	*	7	D	12	E	17	C	22	E	27	C	32	C	37	*
3	*	8	D	13	A	18	D	23	B	28	B	33	D	38	*
4	*	9	B	14	B	19	A	24	B	29	B	34	B		
5	*	10	D	15	D	20	E	25	C	30	E	35	C		

* Problema sin alternativas

CAPÍTULO 13



SISTEMA DE ECUACIONES



Los modelos matemáticos sobre redes se usan para modelar el tránsito vehicular, una red eléctrica o una red neuronal. Por ejemplo, en el estudio del tránsito vehicular, se toma en cuenta la circulación de los vehículos y la interacción entre los conductores estableciendo relaciones entre el flujo, la velocidad y la densidad para planificar, diseñar y usar las carreteras. La solución de este tipo de problemas implica plantear sistemas de ecuaciones lineales que fácilmente pueden involucrar cientos o miles de ecuaciones e incógnitas.

Aprendizajes esperados

- Conocer qué es un sistema de ecuaciones y saber qué significa resolverlo.
- Conocer los métodos de resolución de los sistemas lineales de dos y tres variables.
- Representar gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables.
- Saber cómo resolver algunos tipos de sistemas no lineales.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

Los sistemas de ecuaciones se presentan en diversos problemas de la vida cotidiana que involucren varias variables; por ejemplo, si el administrador de una empresa quiere asignar eficientemente labores a sus empleados, para ello deberá resolver un sistema de ecuaciones. También están presentes en problemas relacionados con la matemática en sí misma. Es por todo ello que debemos conocer los diferentes métodos para resolverlos.

PÁRIS
para
AMOR A SOFÍA

Sistema de ecuaciones

1. DEFINICIÓN

Es un grupo de dos o más ecuaciones, con dos o más incógnitas en común, que deben verificarse a la vez.

Ejemplos

1. “La suma de dos números es 8 y su diferencia es 2” simbólicamente se representa como

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y . La idea es encontrar los valores de x y y que verifiquen ambas ecuaciones a la vez.

2. “La suma de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 10” simbólicamente se representa como

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

4. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13 \\ x^2-2y=-2 \end{cases}$

Sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xyz=5 \end{cases}$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas



Dato curioso

Los sistemas de ecuaciones se pueden representar gráficamente.

Ejemplos

1. $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$



2. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$



Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema.



No olvide

Algunos sistemas de ecuaciones no tienen solución y en tal caso se llaman sistemas incompatibles.

1.1. Solución de un sistema

En un sistema de ecuaciones con incógnitas x y y , la idea es encontrar el valor de x y el valor de y que verifiquen todas las ecuaciones del sistema. El par ordenado (x, y) es la solución del sistema. En caso el sistema tenga más de dos incógnitas, se seguirá esta misma idea para representar la solución de este.

Ejemplos

1. En el sistema de incógnitas x y y

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Debemos encontrar los valores de x y y que verifiquen ambas ecuaciones.

Dichos valores son $x=7$ y $y=3$, como comprobaremos a continuación.

$$\begin{cases} 7+3=10 \\ 7-3=4 \end{cases}$$

Como se puede ver, estos valores verifican ambas ecuaciones, así que la pareja formada por los valores $x=7$ y $y=3$, representada como el par ordenado $(7; 3)$, es la solución de este sistema.

2. En el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

se puede ver que $x=3$ y $y=2$ verifican ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 3^2 + 2^2 = 13 \\ (3)(2) = 6 \end{cases}$$

Entonces el par ordenado $(3; 2)$ es una solución de este sistema.

Pero este sistema tiene más soluciones como se puede comprobar a continuación.

$$x=2 : \begin{cases} 2^2 + 3^2 = 13 \\ (2)(3) = 6 \end{cases} \quad \text{Solución} \quad (x, y) = (2; 3)$$

$$x=-3 : \begin{cases} (-3)^2 + (-2)^2 = 13 \\ (-3)(-2) = 6 \end{cases} \quad \text{Solución} \quad (x, y) = (-3; -2)$$

$$x=-2 : \begin{cases} (-2)^2 + (-3)^2 = 13 \\ (-2)(-3) = 6 \end{cases} \quad \text{Solución} \quad (x, y) = (-2; -3)$$

En total, este sistema tiene cuatro soluciones, las cuales son $(3; 2)$, $(2; 3)$, $(-3; -2)$ y $(-2; -3)$.

3. En el sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + z = 7 \\ y + z = 9 \end{cases}$$

se puede ver que todas las ecuaciones se verifican cuando $x=3$, $y=5$ y $z=4$.

$$\begin{cases} 3+5=8 \\ 3+4=7 \\ 5+4=9 \end{cases}$$

Así que la terna $(x, y, z) = (3; 5; 4)$ es la solución de este sistema.

4. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 48 \end{cases}$$

se verifica cuando $x=8$ y $y=6$. También se verifica cuando $x=6$ y $y=8$.

Entonces los pares ordenados $(8; 6)$ y $(6; 8)$ son las soluciones.

1.2. Conjunto solución (CS)

Es el conjunto formado por todas las soluciones de un sistema de ecuaciones.

1. En el sistema

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$CS=\{(7; 3)\}$$

2. En el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$CS=\{(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2)\}$$

3. En el sistema

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x+z=7 \\ y+z=9 \end{cases}$$

$$CS=\{(3; 5; 4)\}$$

2. CLASIFICACIÓN

De acuerdo al tipo de ecuaciones que hay en el sistema, los clasificaremos en dos casos.

2.1. Sistema lineal

Se llama así cuando todas las ecuaciones del sistema son lineales.

Ejemplos

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+y+z=6 \\ x-y+2z=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-3y=6 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

2.2. Sistema no lineal

Se llama así cuando alguna de las ecuaciones del sistema no es lineal.

Ejemplos

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=3 \\ xy=2 \end{cases}$$

3. SISTEMAS LINEALES

Un sistema de ecuaciones se llama sistema lineal cuando todas sus ecuaciones son ecuaciones lineales.

Una ecuación lineal con incógnitas x y y es aquella que tiene la forma

$$ax+by=c$$

Si tiene tres incógnitas, la ecuación lineal será de la forma

$$ax+by+cz=d$$

En caso de que la ecuación lineal tenga más incógnitas, se sigue la misma idea.

3.1. Métodos de resolución

Explicaremos estos métodos tomando como modelo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$$

Las ideas que usaremos pueden extenderse a sistemas lineales con más ecuaciones o más incógnitas.

3.1.1. Por eliminación

Consiste en lo siguiente:

- Elegimos una de las incógnitas del sistema.
- Multiplicamos una de las ecuaciones, o las dos, por los números convenientes, de modo que los términos que tienen a la incógnita elegida resulten con el mismo coeficiente, pero con signo contrario.
- Sumamos las ecuaciones con el fin de eliminar la incógnita elegida. Como resultado obtendremos el valor de la otra incógnita.
- Finalmente, dicho valor es reemplazado en una de las ecuaciones y así calculamos el valor de la incógnita que faltaba.

APLICACIÓN 1

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 4x+2y=24 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Debemos elegir una de las incógnitas.

Elijamos, por ejemplo, la incógnita y .

Multiplicamos ambas ecuaciones por los números convenientes.

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \dots \times(2) \\ 4x+2y=24 \dots \times(-3) \end{cases}$$

Ahora sumamos las ecuaciones

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4x+6y=32 \\ -12x-6y=-72 \end{cases} \\ \hline 4x-12x=32-72 \\ -8x=-40 \\ x=\frac{-40}{-8} \rightarrow x=5 \end{array}$$

Para encontrar el valor de y debemos reemplazar el valor de x en una de las dos ecuaciones del sistema.

Reemplazamos $x=5$ en la primera ecuación.

$$2(5)+3y=16$$

$$10+3y=16$$

$$3y=16-10$$

$$3y=6$$

$$y=\frac{6}{3} \rightarrow y=2$$

Finalmente, la solución del sistema, formado por $x=5$ y $y=2$, es el par ordenado $(5; 2)$. Esta es, además, su única solución.

$$\therefore CS=\{(5; 2)\}$$

APLICACIÓN 2

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x+5y=17 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Elijamos la incógnita y .

Multiplicamos por (3) la primera ecuación y por (-5) la segunda ecuación.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+5y=17 \dots \times(3) \\ 2x+3y=11 \dots \times(-5) \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

Se obtiene

$$\begin{cases} 9x+15y=51 \\ -10x-15y=-55 \end{cases}$$

Ahora sumamos.

$$\begin{array}{r} \text{Se cancela la} \\ \text{incógnita } y. \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} 9x+15y=51 \\ -10x-15y=-55 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9x-10x=51-55 \\ -x=-4 \\ x=4 \end{array}$$

Para hallar y reemplazamos $x=4$ en una de las ecuaciones.

Reemplazamos $x = 4$ en la primera ecuación.

$$3x + 5y = 17$$

$$3(4) + 5y = 17$$

$$12 + 5y = 17$$

$$5y = 5$$

$$y = \frac{5}{5} \rightarrow y = 1$$

Finalmente, la solución es el par ordenado $(4; 1)$.
Esta es su única solución.

$$\therefore CS = \{(4; 1)\}$$

APLICACIÓN 3

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Elijamos la incógnita x .

Multiplicamos por (-2) a la segunda ecuación.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x - 3y = 6 \dots \times (-2) \end{cases}$$

Luego, sumamos las ecuaciones.

$$\begin{array}{r} \cancel{2x+5y=9} \\ \cancel{-2x+6y=-12} \\ \hline 5y+6y=9-12 \\ 11y=-3 \\ y=-\frac{3}{11} \end{array}$$

Reemplazamos $y = -\frac{3}{11}$ en la primera ecuación.

$$2x + 5y = 9$$

$$2x + 5\left(-\frac{3}{11}\right) = 9$$

$$2x - \frac{15}{11} = 9$$

$$2x = 9 + \frac{5}{11}$$

$$2x = \frac{99+5}{11}$$

$$2x = \frac{104}{11} \rightarrow x = \frac{52}{11}$$

$$\therefore CS = \left\{ \left(\frac{52}{11}; -\frac{3}{11} \right) \right\}$$

APLICACIÓN 4

Resuelva el sistema

$$\begin{array}{l} x + y + z = 10 \quad (I) \\ x + 2y + z = 12 \quad (II) \\ 2x + 3y - z = 7 \quad (III) \end{array}$$

RESOLUCIÓN

Este sistema tiene tres incógnitas. Eliminaremos una de ellas, digámosla z , la cual parece más fácil de eliminar.

Sumamos las ecuaciones (I) y (III).

$$\begin{array}{r} \cancel{x+y+z=10} \\ \cancel{2x+3y-z=7} \\ \hline 3x+4y=17 \end{array} \quad (\alpha)$$

Sumamos las ecuaciones (II) y (III).

$$\begin{array}{r} \cancel{x+2y+z=12} \\ \cancel{2x+3y-z=7} \\ \hline 3x+5y=19 \end{array} \quad (\beta)$$

De este modo hemos logrado eliminar la incógnita z y hemos obtenido las ecuaciones (α) y (β) .

$$\begin{cases} 3x + 4y = 17 & (\alpha) \\ 3x + 5y = 19 & (\beta) \end{cases}$$

Hemos reducido el problema a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta es la idea a seguir cuando se trata de resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como el de este problema.

Ahora hallaremos los valores de x y y .

Restemos las ecuaciones (β) y (α) .

$$\begin{aligned} (\beta) - (\alpha) : & \begin{cases} 3x + 5y = 19 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases} \\ & \underline{5y - 4y = 19 - 17} \\ & 5y = 2 \\ & \rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Reemplazamos $y = 2$ en la ecuación (α) .

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 17 \\ 3x + 4(2) &= 17 \\ 3x + 8 &= 17 \\ 3x &= 9 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Tenemos $x = 3$ y $y = 2$. Nos falta el valor de z , el cual podemos obtener reemplazando x y y en la ecuación (I) .

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 3 + 2 + z &= 10 \\ 5 + z &= 10 \rightarrow z = 5 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es la terna ordenada $(3; 2; 5)$.

$$\therefore CS = \{(3; 2; 5)\}$$

3.1.2. Por sustitución

Consiste en lo siguiente:

- Despejamos una incógnita (cualquiera de ellas) de una de las ecuaciones del sistema.
- Luego, la reemplazamos en la otra ecuación.
- Finalmente operamos y obtendremos los valores de cada incógnita del sistema.

APLICACIÓN 5

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 12 & (I) \\ 3x + 7y = 29 & (II) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De la ecuación (I) despejamos la incógnita y .

$$\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ \rightarrow y &= 12 - 2x \end{aligned}$$

Luego, la reemplazamos en la ecuación (II) .

$$3x + 7y = 29$$

Se obtiene $3x + 7(12 - 2x) = 29$.

La resolvemos y obtendremos el valor de x .

$$\begin{aligned} 3x + 7(12 - 2x) &= 29 \\ 3x + 84 - 14x &= 29 \\ 3x - 14x &= 29 - 84 \\ -11x &= -55 \\ x &= \frac{-55}{-11} \rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Reemplazamos $x = 5$ en la ecuación (I) para obtener y .

$$\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ 2(5) + y &= 12 \\ 10 + y &= 12 \rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $(5; 2)$.

$$\therefore CS = \{(5; 2)\}$$

APLICACIÓN 6

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=18 & (I) \\ 5x-y=11 & (II) \end{cases}$$

RESOLUCIÓNDe la ecuación (I) despejamos la incógnita x .

$$2x+3y=18$$

$$2x=18-3y$$

$$\rightarrow x=\frac{18-3y}{2}$$

La reemplazamos en la ecuación (II).

$$5x-y=11$$

$$5\left(\frac{18-3y}{2}\right)-y=11$$

La resolvemos y obtendremos el valor de y .

Multiplicamos por (2) para eliminar la fracción.

$$(2)\left(5\left(\frac{18-3y}{2}\right)-y\right)=(11)(2)$$

$$(2)(5)\left(\frac{18-3y}{2}\right)-2y=22$$

$$5(18-3y)-2y=22$$

$$90-15y-2y=22$$

$$90-17y=22$$

$$-17y=22-90$$

$$-17y=-68$$

$$y=\frac{-68}{-17} \rightarrow y=4$$

Para hallar x , reemplazamos $y=4$ en la ecuación (I).

$$2x+3y=18$$

$$2x+3(4)=18$$

$$2x+12=18$$

$$2x=6 \rightarrow x=3$$

La solución del sistema es (3; 4).

$$\therefore CS=\{(3; 4)\}$$

3.1.3. Por igualación

Consiste en lo siguiente:

- De ambas ecuaciones, despejamos la misma incógnita, que puede ser cualquiera de ellas.
- Igualamos lo que se obtiene de la primera ecuación con lo que se obtiene de la segunda ecuación.
- Así se obtendrá el valor de cada incógnita del sistema.

APLICACIÓN 7

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=4 & (I) \\ 3x-y=17 & (II) \end{cases}$$

RESOLUCIÓNDespejamos la incógnita x de ambas ecuaciones.

De la ecuación (I)

$$2x+3y=4$$

$$2x=4-3y$$

$$x=\frac{4-3y}{2}$$

De la ecuación (II)

$$3x - y = 17$$

$$3x = 17 + y$$

$$x = \frac{17+y}{3}$$

Ahora igualamos.

$$x = \frac{4-3y}{2} = \frac{17+y}{3}$$

La resolvemos y obtendremos el valor de y .

$$\frac{4-3y}{2} = \frac{17+y}{3}$$

$$3(4-3y) = 2(17+y)$$

$$12-9y = 34+2y$$

$$-9y-2y = 34-12$$

$$-11y = 22$$

$$y = \frac{22}{-11} \rightarrow y = -2$$

Reemplazamos $y = -2$ en la ecuación (I).

$$2x + 3y = 4$$

$$2x + 3(-2) = 4$$

$$2x - 6 = 4$$

$$2x = 10 \rightarrow x = 5$$

La solución es $(5; -2)$.

$$\therefore CS = \{(5; -2)\}$$

APLICACIÓN 8

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 10 & (I) \\ 2x + 3y = 17 & (II) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Despejamos la incógnita y de ambas ecuaciones.

De la ecuación (I)

$$3x + y = 10 \rightarrow y = 10 - 3x$$

De la ecuación (II)

$$2x + 3y = 17$$

$$3y = 17 - 2x \rightarrow y = \frac{17-2x}{3}$$

Ahora igualamos.

$$y = 10 - 3x = \frac{17-2x}{3}$$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos x .

$$10 - 3x = \frac{17-2x}{3}$$

$$(3)(10 - 3x) = 17 - 2x$$

$$30 - 9x = 17 - 2x$$

$$-9x + 2x = 17 - 30$$

$$-7x = -13$$

$$x = \frac{-13}{-7} \rightarrow x = \frac{13}{7}$$

Reemplazamos este valor de x en la ecuación (I).

$$3x + y = 10$$

$$3\left(\frac{13}{7}\right) + y = 10$$

$$\frac{39}{7} + y = 10$$

$$y = 10 - \frac{39}{7} \rightarrow y = \frac{31}{7}$$

$$\text{La solución es } (x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{31}{7}\right)$$

$$\therefore CS = \left\{\left(\frac{13}{7}; \frac{31}{7}\right)\right\}$$

3.2. Propiedad fundamental de los sistemas lineales

En los ejemplos anteriores, todos los sistemas lineales que hemos resuelto tienen una única solución. Sin embargo, hay aún otras dos posibilidades que no hemos visto, las cuales son que el sistema tenga infinitas soluciones o que no tenga solución.

Cualquier sistema lineal de ecuaciones tiene solo tres posibilidades:

- Tiene una única solución.
- Tiene infinitas soluciones.
- No tiene solución.

Esta es la propiedad fundamental de los sistemas lineales.

3.3. Representación gráfica

Un sistema lineal de dos incógnitas se representa gráficamente en el plano cartesiano. Cada ecuación lineal del sistema representa una recta. Veamos los tres casos posibles.

3.3.1. Solución única

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y=7 & \text{(I)} \\ 2x-y=9 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema con el método de eliminación.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=9 \dots \times(2) \end{cases} \\ \underline{\begin{cases} x+2y=7 \\ 4x-2y=18 \end{cases}} \\ 5x=25 \rightarrow x=5 \end{aligned}$$

Reemplazamos $x=5$ en la ecuación (I).

$$x+2y=7$$

$$5+2y=7$$

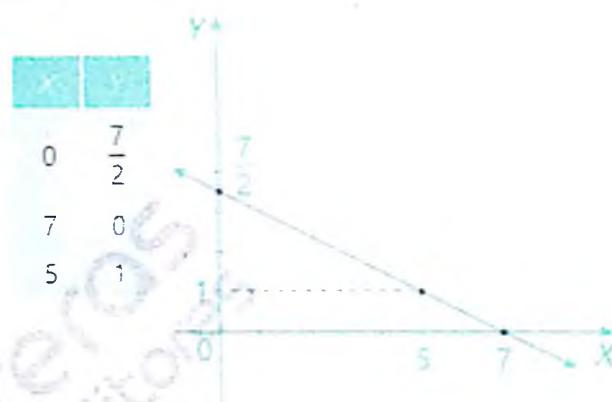
$$2y=2 \rightarrow y=1$$

La solución es $(x; y)=(5; 1)$.

Ahora representaremos gráficamente este sistema.

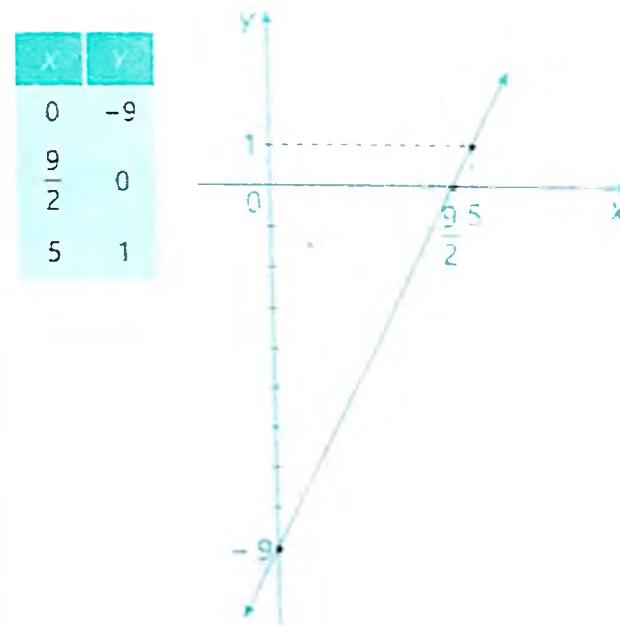
En la ecuación (I)

$$x+2y=7$$

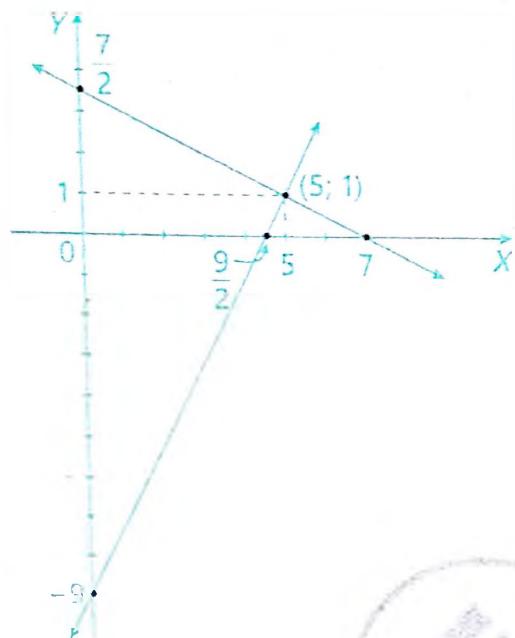


En la ecuación (II)

$$2x-y=9$$



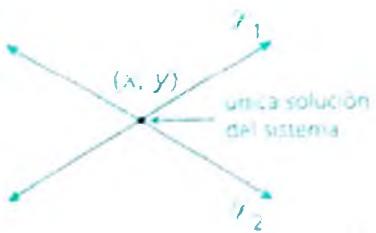
Graficamos ambas ecuaciones juntas.



En el gráfico se observa que ambas ecuaciones se intersecan en el punto $(5; 1)$, el cual es la solución del sistema.

Conclusiones

- Una ecuación lineal de dos incógnitas representa una recta en el plano cartesiano.
- Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representa dos rectas en el plano cartesiano.
- El punto de intersección de estas dos rectas representa la solución del sistema.
- Debido a que las dos rectas se intersecan en un único punto, decimos que el sistema tiene una única solución.



3.3.2. Infinitas soluciones

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+2y=10 & \text{(I)} \\ 3x+3y=15 & \text{(II)} \end{cases}$$

De la ecuación (I)

$$2x+2y=10$$

Simplificamos y se obtiene

$$x+y=5$$

De la ecuación (II)

$$3x+3y=15$$

Simplificamos y se obtiene

$$x+y=5$$

Observe que ambas ecuaciones se reducen a la misma ecuación, la cual es $x+y=5$.

Cuando esto ocurre, el sistema tiene infinitas soluciones.

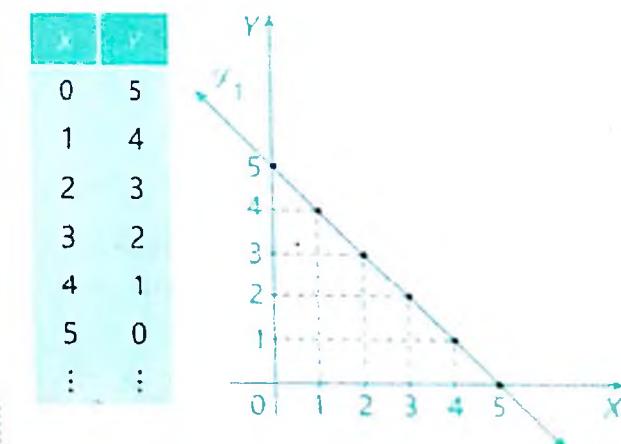
Esto es porque hay infinitos pares (x, y) que verifican la ecuación $x+y=5$.

Podemos llegar a esta misma conclusión si representamos gráficamente el sistema.

En la ecuación (I)

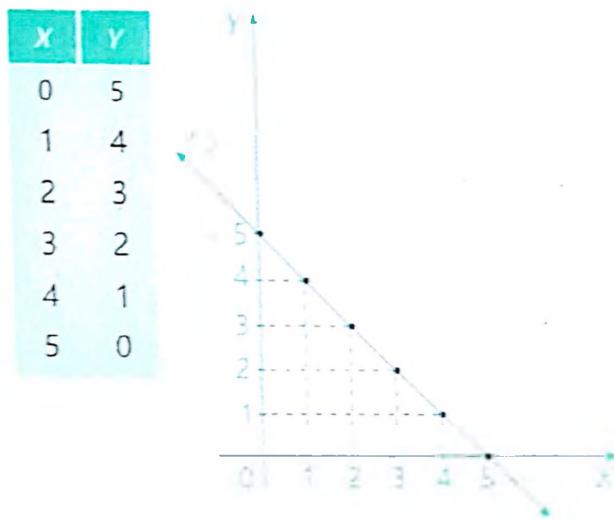
$$\mathcal{L}_1: 2x+2y=10$$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
⋮	⋮

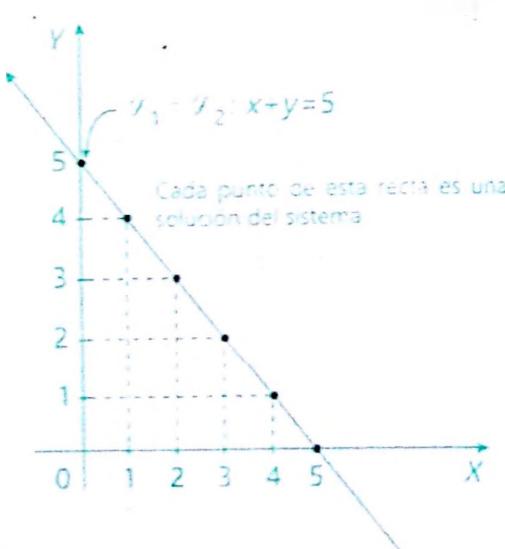


En la ecuación (II)

$$\mathcal{L}_2: 3x+3y=15$$



Observe que ambas rectas coinciden en todos los puntos y esto es porque al simplificar las ecuaciones del sistema se obtiene la misma ecuación. Dicho en otras palabras, ambas ecuaciones representan la misma recta, cuya ecuación es $x+y=5$, y cada punto de esta recta representa una solución del sistema.



Conclusión

Como la recta tiene infinitos puntos y todos representan soluciones, entonces el sistema tendrá infinitas soluciones.



3.3.3. No tiene solución

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Restemos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} x+y=5 \\ x+y=2 \\ \hline 0=3 \end{array}$$

Se obtiene $0=3$, lo cual es absurdo.

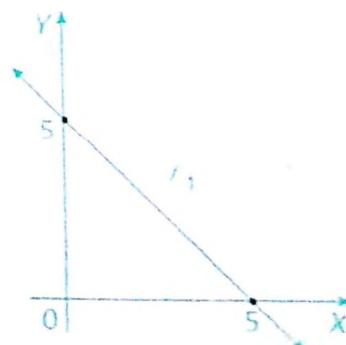
Este absurdo nos indica la imposibilidad de que ambas ecuaciones puedan verificarse a la vez. Esta imposibilidad significa que este sistema no tiene solución.

Podemos llegar a esta misma conclusión si representamos gráficamente el sistema.

En la ecuación (I)

$$\mathcal{L}_1: x+y=5$$

X	Y
0	5
5	0



En la ecuación (II)

$$\mathcal{L}_2: x+y=2$$

X	Y
0	2
2	0



Graficamos ambas rectas juntas.



Observe que ambas rectas son paralelas y distintas, por ello no tienen ningún punto de intersección.

Hemos visto que los puntos de intersección representan soluciones del sistema y el hecho que no tenga ningún punto de intersección significa que el sistema no tiene solución.

Conclusion

Cuando el sistema está representado por dos rectas paralelas y diferentes, entonces el sistema no tendrá solución.



3.4 Propiedades

En un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$$

donde los coeficientes m, n y p son distintos de cero, se cumple lo siguiente:

a. El sistema tiene única solución si y solo si



b. El sistema tiene infinitas soluciones si y solo si



c. El sistema no tiene solución si y solo si





Importante

- Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, su representación gráfica es una sola recta que representa a ambas ecuaciones del sistema. Para que representen la misma recta, cuando se simplifiquen, ambas ecuaciones deben reducirse a la misma ecuación, y eso solo es posible si los coeficientes de ambas ecuaciones están en la misma proporción, es decir, cuando
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$
- Cuando el sistema no tiene solución, las rectas son paralelas y diferentes. Por eso la condición es
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{p}$$

rectas paralelas y diferentes

- Para que tenga solución única, las rectas deben ser secantes, es decir, no deben ser paralelas. Ahora, si la condición $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ indica que serán rectas paralelas, para que no sean paralelas la condición debe ser $\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$, con lo cual se garantiza que el sistema tenga solución única.

Ejemplos**1. En el sistema**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 & \mathcal{L}_1 \\ 3x + 5y = 25 & \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

Observe la siguiente relación entre los coeficientes:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$$

Entonces el sistema tiene solución única.

La representación gráfica del sistema son dos rectas secantes que se cortan en un punto, el cual es su única solución.

**2. En el sistema**

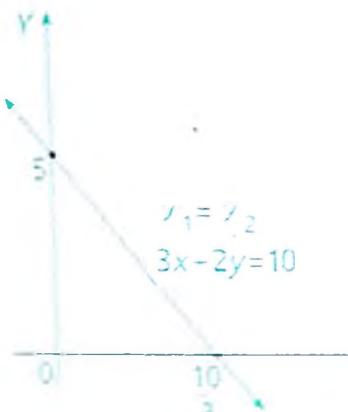
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 & \mathcal{L}_1 \\ 6x + 4y = 20 & \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

Observe la siguiente relación entre los coeficientes:

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20}$$

Entonces este sistema tiene infinitas soluciones.

Esto significa que ambas ecuaciones representan la misma recta, cuya ecuación es $3x+2y=10$. Cada punto de esta recta es solución del sistema.



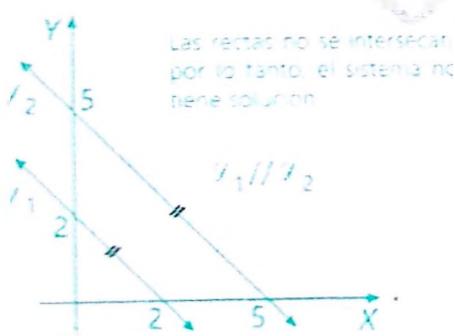
3. En el sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$$

observe que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{10}$.

Entonces este sistema no tiene solución.

Su representación gráfica son dos rectas paralelas y diferentes.



3.5 Regla de Cramer

Es un método que nos permite encontrar los valores de las incógnitas en un sistema lineal que tiene solución única y donde el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones.

En un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que poseen la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$$

Tendremos

- Determinante del sistema

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Determinante respecto a x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = md - bn$$

- Determinante respecto a y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm$$

Si suponemos que $\Delta_s \neq 0$, se cumple que



APLICACIÓN 9

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 4x-5y=7 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Calculamos x y y con la regla de Cramer.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (2)(-5) - (3)(4) = -22$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = (9)(-5) - (7)(3) = -66$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7) - (4)(9) = -22$$

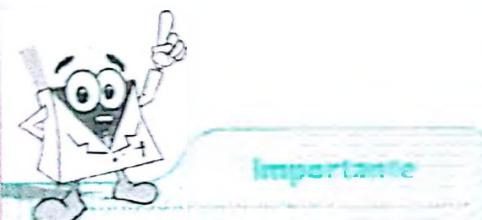
**Importante**

Un determinante es un operador que se calcula como

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplos

- $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (5)(6) - (9)(7) = -33$
- $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = (4)(9) - (2)(8) = 20$

**Importante**

- El determinante del sistema está formado por los coeficientes de las incógnitas x y y .
- En el caso del determinante respecto a x , se obtiene reemplazando la primera columna del Δ_s por los coeficientes del segundo miembro del sistema.
- En el caso del determinante respecto a y , se obtiene reemplazando la segunda columna del Δ_s por los coeficientes del segundo miembro del sistema.

Luego

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{-22}{-22} = 1$$

Por lo tanto, la solución es $(x; y) = (3; 1)$.

APLICACIÓN 10

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 9y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Calculamos x y y con la regla de Cramer.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (4)(9) = -30$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3) - (2)(9) = -15$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (4)(1) = 0$$

Luego

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{0}{-30} = 0$$

Por lo tanto, la solución es $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

4. SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema no lineal se caracteriza por que al menos una de sus ecuaciones no es lineal.

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x+y^2=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{--- ecuación no lineal}$$

$$\begin{cases} xy=7 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \text{--- ecuación no lineal}$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x+y=6 \end{cases} \quad \text{--- ecuación no lineal}$$

Este tipo de sistema de ecuaciones no tiene un método general de resolución. Por ello veremos cómo se resuelven solo en algunos casos particulares.

4.1. Sistema no lineal formado por una ecuación cuadrática y otra lineal

Procedimiento

1. De la ecuación lineal despejamos una de las incógnitas y la reemplazamos en la otra ecuación.
2. Resolvemos la ecuación que resulta de hacer dicho reemplazo, la cual será una ecuación cuadrática con una incógnita.
3. Calculamos los valores de dicha incógnita y los reemplazamos en la ecuación lineal para obtener los valores de la otra incógnita, con lo cual el sistema quedará resuelto.

APLICACIÓN 11

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2+3y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De la ecuación lineal, despejamos la incógnita y .

$$x+y=3$$

$$\rightarrow y=3-x$$

Reemplazamos y en la otra ecuación.

$$x^2+3y=7$$

$$x^2+3(3-x)=7$$

Operamos

$$x^2+9-3x=7$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$\cancel{x} \cancel{-2}$$

$$\cancel{x} \cancel{-1}$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$x-2=0 \vee x-1=0$$

$$x=2 \vee x=1$$

Reemplazamos estos valores de x en la ecuación lineal para obtener los valores de y .

Tenemos $x+y=3$.

- $x=2 \rightarrow y=3-2=1$
- $x=1 \rightarrow y=3-1=2$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $(x; y)=(2; 1)$ y $(x; y)=(1; 2)$.

APLICACIÓN 12

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} xy=15 \\ x-y=2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De la ecuación lineal, despejamos la incógnita x .

$$x-y=2$$

$$\rightarrow x=2+y$$

Reemplazamos x en la otra ecuación.

$$xy=15$$

$$(2+y)y=15$$

Operamos

$$y^2+2y=15$$

$$y^2+2y-15=0$$

$$\begin{array}{r} y \\ \times +5 \\ \hline y \\ -3 \end{array}$$

$$(y+5)(y-3)=0$$

$$y+5=0 \vee y-3=0$$

$$y=-5 \vee y=3$$

Reemplazamos estos valores de y en la ecuación lineal para obtener los valores de x .

Tenemos que $x-y=2$.

- $y=-5 \rightarrow x-(-5)=2$
 $\rightarrow x=7$
- $y=3 \rightarrow x-3=2$
 $\rightarrow x=5$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $(x, y)=(7; -5)$ y $(x, y)=(5; 3)$.

4.2. Sistema no lineal que se transforma en lineal

Son sistemas no lineales que mediante cambios de variable se transforman en sistemas lineales.

APLICACIÓN 13

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3\sqrt{x-2}+2\sqrt{y+1}=8 \\ \sqrt{x-2}-\sqrt{y+1}=1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Hacemos los siguientes cambios de variable:

- $a=\sqrt{x-2}$
- $b=\sqrt{y+1}$

Reemplazamos a y b en el sistema y tendremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3a+2b=8 \\ a-b=1 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema lineal con el método de eliminación.

$$\begin{cases} 3a+2b=8 \\ (a-b=1) \dots \times(2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3a+2b=8 \\ 2a-2b=2 \\ \hline 5a=10 \end{array}$$

$$\rightarrow a=2$$

En la segunda ecuación

$$\begin{array}{l} a-b=1 \\ 2-b=1 \rightarrow b=1 \end{array}$$

Calculamos x y y .

- $a=\sqrt{x-2}=2 \rightarrow x-2=4 \rightarrow x=6$
- $b=\sqrt{y+1}=1 \rightarrow y+1=1 \rightarrow y=0$

Por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y)=(6; 0)$.

APLICACIÓN 14

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y-2}=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{8}{y-2}=3 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Hacemos los siguientes cambios de variable:

- $a=\frac{1}{x}$
- $b=\frac{1}{y-2}$

Reemplazamos a y b en el sistema, y tendremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+8b=3 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema lineal con el método de eliminación.

$$\begin{cases} (2a+b=1) \times 8 \\ a+8b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a+8b=8 \\ a+8b=3 \end{cases}$$

$$15a=5$$

$$\rightarrow a=\frac{1}{3}$$

En la primera ecuación

$$2a+b=1$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)+b=1 \rightarrow b=\frac{1}{3}$$

Calculamos x y y .

- $a=\frac{1}{3} \rightarrow x=3$
- $b=\frac{1}{3} \rightarrow y-2=3$
 $\rightarrow y=5$

Por lo tanto, la solución del sistema es
 $(x; y)=(3; 5)$



Biografía

Gabriel Cramer

Nació el 31 de octubre de 1704 en Ginebra, Suiza. Fue un estudiante brillante; a los 18 años preparó una tesis doctoral sobre teoría del sonido. Dos años después dio cátedra en la Academia de Ginebra sobre geometría y mecánica. Esto le permitió relacionarse con otros matemáticos como Bernoulli y Euler.

Su obra fundamental se publicó en 1750 y trató sobre el análisis de curvas algebraicas. En ella enunció su regla para resolver sistemas de ecuaciones lineales, la misma que ahora lleva su nombre. Aunque es justo decir que no fue el primero en formular tales investigaciones porque Mc Claurin ya las había utilizado antes.

La historia suele ser caprichosa cuando atribuye nombres a resultados matemáticos, pues varios pueden llegar a conclusiones similares, pero las generaciones posteriores reconocen solo a uno de ellos. Tal es el caso de Cramer.



SISTEMA DE ECUACIONES

Son grupos de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas que deben verificarse a la vez.

Solución del sistema

El par ordenado (x, y) es solución de un sistema de ecuaciones si y sólo si sus valores verifican todas las ecuaciones del sistema a la vez.

Conjunto solución

Es el conjunto que agrupa a todas las soluciones del sistema.

Sistema lineal

Es cuando todas las ecuaciones son lineales.

Sistema no lineal

Es cuando al menos una ecuación no es lineal.

Método de resolución

- Por eliminación
- Por sustitución
- Por igualación

Propiedad fundamental

Un sistema lineal tiene solo tres posibilidades:

- Solución Única
- Infinitas soluciones
- No tiene solución.

Cuando está formado por una ecuación lineal y otra cuadrática

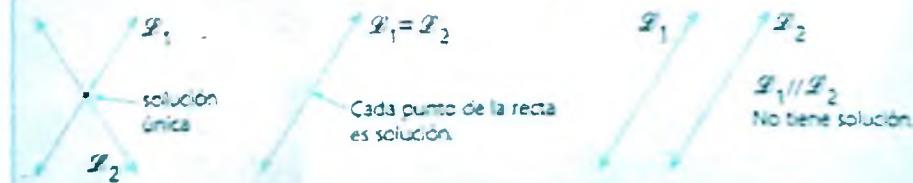
Se despeja una incógnita de la ecuación lineal y se reemplaza en la ecuación cuadrática.

Cuando se transforma en un sistema lineal

Mediante cambios de variable el sistema no lineal se transforma en un sistema lineal.

Representación gráfica

$$\begin{cases} ax+by=m & \mathcal{L}_1 \\ cx+dy=n & \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

**Regla de Cramer**

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}; \Delta_s \neq 0$$

Problema N.º 1

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

- A) $\left(8; -\frac{17}{2}\right)$ B) $\left\{\left(8; -\frac{17}{2}\right)\right\}$ C) $\left\{\left(-\frac{17}{2}; 8\right)\right\}$
 D) $\left(-\frac{17}{2}; 8\right)$ E) $\left\{\left(\frac{17}{2}; 8\right)\right\}$

Resolución

Del dato

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (2x+3y=7) \dots \times(5) \\ (4x+5y=6) \dots \times(3) \end{cases} \\ &\begin{cases} 10x+15y=35 \\ 12x+15y=18 \end{cases} \\ &\underline{-2x=17} \\ &\rightarrow x=-\frac{17}{2} \end{aligned}$$

En la primera ecuación

$$2x+3y=7$$

$$2\left(-\frac{17}{2}\right)+3y=7$$

$$-17+3y=7$$

$$3y=24 \rightarrow y=8$$

La solución del sistema es $(x, y)=\left(-\frac{17}{2}, 8\right)$.

$$\therefore CS=\left\{\left(-\frac{17}{2}, 8\right)\right\}$$

Clave

Problema N.º 2

Halle $x+y$ en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 2x+5y=13 \end{cases}$$

- A) 10 B) 4 C) -3
 D) 6 E) 5

Resolución

Del dato

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (3x-2y=10) \dots \times(5) \\ (2x+5y=13) \dots \times(2) \end{cases} \\ &\begin{cases} 15x-10y=50 \\ 4x+10y=26 \end{cases} \\ &\underline{19x=76} \rightarrow x=4 \end{aligned}$$

En la segunda ecuación

$$2x+5y=13$$

$$2(4)+5y=13$$

$$8+5y=13$$

$$5y=5 \rightarrow y=1$$

La solución del sistema es $(x, y)=(4, 1)$.

$$CS=\{(4, 1)\}$$

$$\therefore x+y=4+1=5$$

Clave

Problema N.º 3

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+3y-z=10 & (\text{I}) \\ 2x+y+2z=6 & (\text{II}) \\ 3x-2y+z=4 & (\text{III}) \end{cases}$$

- A) $\{(3; -2; 1)\}$ B) $\{(1; 2; 3)\}$ C) $\{(-1; 3; 2)\}$
 D) $\{(3; 2; -1)\}$ E) $\{(-2; 3; 1)\}$

Resolución

Sumamos (I) y (III).

$$\begin{cases} x+3y-z=10 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases} \quad \underline{-} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \hline 4x+y=14 \end{array} \quad (\alpha)$$

Multiplicamos 2 por (I) y le sumamos (II).

$$\begin{cases} 2x+6y-2z=20 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases} \quad \underline{-} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \hline 4x+7y=26 \end{array} \quad (\beta)$$

De (α) y (β)

$$\begin{cases} 4x+y=14 \\ 4x+7y=26 \end{cases} \quad \underline{-} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \hline -6y=-12 \end{array} \rightarrow y=2$$

En (α)

$$\begin{aligned} 4x+y &= 14 \\ 4x+2 &= 14 \rightarrow x=3 \end{aligned}$$

En (I)

$$\begin{aligned} x+3y-z &= 10 \\ 3+3(2)-z &= 10 \\ 9-z &= 10 \rightarrow z=-1 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $(x; y; z)=(3; 2; -1)$.

$$\therefore CS=\{(3; 2; -1)\}$$

Clave D

Problema N.º 4

Halle xyz si

$$\begin{cases} x+y=6 & (I) \\ 4x+2z=4 & (II) \\ 4y+3z=5 & (III) \end{cases}$$

A) $\frac{115}{4}$ B) $\frac{105}{2}$ C) $-\frac{105}{4}$

D) $-\frac{111}{4}$ E) $-\frac{111}{2}$

Resolución

Sumamos (I), (II) y (III).

$$\begin{array}{r} x+y=6 \\ 4x+2z=4 \\ 4y+3z=5 \\ \hline 5x+5y+5z=15 \end{array}$$

$$5(x+y+z)=15 \rightarrow x+y+z=3$$

Como $x+y=6$, entonces

$$\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 6+z=3 \rightarrow z=-3 \end{array}$$

En (II)

$$\begin{aligned} 4x+2z &= 4 \\ 4x+2(-3) &= 4 \\ 4x-6 &= 4 \rightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

En (III)

$$\begin{aligned} 4y+3z &= 5 \\ 4y+3(-3) &= 5 \\ 4y-9 &= 5 \rightarrow y = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore xyz = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)(-3) = -\frac{105}{4}$$

Clave C

Problema N.º 5

Si el par ordenado $(5; 3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x + my = 11 \\ nx - 2y = 14 \end{cases}$$

calcule $\frac{m+n}{mn}$.

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{2}$

D) 1

E) $\frac{5}{4}$

Resolución

Como $(5; 3)$ es solución $\rightarrow x=5 \wedge y=3$

En la primera ecuación

$x + my = 11$

$5 + 3m = 11 \rightarrow m = 2$

En la segunda ecuación

$nx - 2y = 14$

$5n - 2(3) = 14$

$5n = 20 \rightarrow n = 4$

$\therefore \frac{m+n}{mn} = \frac{2+4}{(2)(4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Clave

Problema N.º 6

Si el par ordenado $(2; k)$ es solución de

$$\begin{cases} 2x - 3y = m & (\text{I}) \\ 3x + 2y = 2m - 18 & (\text{II}) \end{cases}$$

calcule $k + m$.

A) 7

B) 4

C) 9

D) 8

E) 6

Resolución

Como $(2; k)$ es solución $\rightarrow x=2 \wedge y=k$

Reemplazamos estos valores en ambas ecuaciones y tendremos

$$\begin{cases} 2(2) - 3k = m \\ 3(2) + 2k = 2m - 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + 3k = 4 \\ 2m - 2k = 24 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} m + 3k = 4 \\ m - k = 12 \\ \hline 4k = -8 \\ \rightarrow k = -2 \end{array}$$

Como $y = k \rightarrow y = -2$

En (I)

$2x - 3y = m$

$2(2) - 3(-2) = m \rightarrow m = 10$

$\therefore k + m = -2 + 10 = 8$

Clave

Problema N.º 7

Sea $(\alpha; \beta)$ la solución del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = \alpha + 1 & (\text{I}) \\ 3x + 2y = \alpha + 4 & (\text{II}) \end{cases}$$

Si α y β son positivos, halle la variación de α .

A) $\langle 4; 5 \rangle$

B) $\langle 2; 5 \rangle$

C) $\langle 1; 5 \rangle$

D) $\langle 2; 4 \rangle$

E) $\langle 1; 4 \rangle$

Resolución

Multiplicamos la ecuación (I) por 2 y le restamos la ecuación (II).

$$\begin{cases} 4x + 2y = a + 2 \\ 3x + 2y = a + 4 \end{cases}$$

$$\underline{x = a - 2}$$

En (I)

$$\begin{aligned} 2x + y &= a + 1 \\ 2(a - 2) + y &= a + 1 \\ 2a - 4 + y &= a + 1 \rightarrow y = 5 - a \end{aligned}$$

La solución del sistema es $(a - 2; 5 - a)$.

entonces $\alpha = a - 2$ y $\beta = 5 - a$.

Como α y β son positivos, entonces

$$\begin{aligned} \alpha = a - 2 > 0 &\rightarrow a > 2 \\ \beta = 5 - a > 0 &\rightarrow a < 5 \end{aligned}$$

Tenemos $a > 2 \wedge a < 5$

$$\rightarrow 2 < a < 5$$

Por lo tanto, la variación de a es $(2; 5)$.

 Clave

Problema N.º 8

Si el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 & (\text{I}) \\ 4x + y = 8 & (\text{II}) \\ x + 2y = k & (\text{III}) \end{cases}$$

tiene una única solución, calcule k .

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| A) $\frac{17}{3}$ | B) $\frac{85}{9}$ | C) $\frac{17}{9}$ |
| D) $\frac{85}{3}$ | E) $\frac{85}{18}$ | |

Resolución

De (I) y (II)

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \dots \times (2) \\ 4x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 10y = 22 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$$

$$9y = 14$$

$$\rightarrow y = \frac{14}{9}$$

En (II)

$$4x + y = 8$$

$$4x + \frac{14}{9} = 8$$

$$4x = 8 - \frac{14}{9}$$

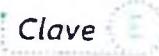
$$4x = \frac{58}{9} \rightarrow x = \frac{29}{18}$$

En (III)

$$x + 2y = k$$

$$\frac{29}{18} + 2\left(\frac{14}{9}\right) = k$$

$$\therefore k = \frac{85}{18}$$

 Clave

Problema N.º 9

Si el sistema

$$\begin{cases} (4n+1)x + 7y = 4n \\ 2n+3y = 9 \end{cases}$$

es incompatible, calcule $n + \frac{1}{n}$.

- | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|
| A) $\frac{13}{6}$ | B) $\frac{5}{2}$ | C) $\frac{10}{3}$ |
| D) $\frac{5}{4}$ | E) $\frac{4}{3}$ | |

Resolución

Que sea incompatible quiere decir que el sistema no tiene solución y en un sistema lineal esto ocurre bajo la siguiente condición:

$$\frac{4n+1}{2n} = \frac{7}{3} \neq \frac{4n}{9}$$

Calculamos el valor de n .

$$\frac{4n+1}{2n} = \frac{7}{3}$$

$$3(4n+1) = 7(2n)$$

$$12n + 3 = 14n$$

$$3 = 2n$$

$$\rightarrow n = \frac{3}{2}$$

Debemos verificar que este valor de n cumpla la condición

$$\frac{7}{3} \neq \frac{4n}{9}$$

Reemplazamos $n = \frac{3}{2}$

$$\frac{7}{3} \neq \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{9}$$

$$\frac{7}{3} \neq \frac{6}{9}$$

Se observa que sí lo verifica, por ende, es correcto este valor de n .

$$\therefore n + \frac{1}{n} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

 Clave

Problema N.º 10

Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto al siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 8x + my = m - 2 \end{cases}$$

- I. Cuando $m=2016$, el sistema tiene única solución.
- II. Cuando $m=4$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- III. Cuando $m=-4$, el sistema no tiene solución.

- A) VFV B) FVV C) VVF
 D) FVF E) VVV

Resolución

- I. Verdadero

única solución $\leftrightarrow \frac{m}{8} = \frac{2}{m}$

Operamos

$$m^2 = 16 \rightarrow m = 4 \wedge m = -4$$

Esto significa que para que el sistema tenga única solución, m puede ser cualquier valor real a excepción de 4 y -4 .

Así que cuando m es igual a 2016 , el sistema tendrá única solución, ya que este valor es diferente de 4 y -4 .

- II. Verdadero

infinitas soluciones $\leftrightarrow \frac{m}{8} = \frac{2}{m} = \frac{1}{m-2}$

Reemplazamos $m=4$:

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4-2}$$

Se observa que sí cumple esta condición, así que para este valor de m el sistema tiene infinitas soluciones.

III. Verdadero

No tiene solución. $\leftrightarrow \frac{m}{8} = \frac{2}{m} \neq \frac{1}{m-2}$

Reemplazamos $m = -4$.

$$\frac{-4}{8} = \frac{2}{-4} \neq \frac{1}{-4-2}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{6}$$

Se observa que sí cumple esta condición, así que para este valor de m el sistema no tiene solución.

Clave

Problema N.º 11

El sistema

$$\begin{cases} x - 6y = m \\ (a+2)x + 4y = 7 \end{cases}$$

es compatible indeterminado. Calcule am .

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------|
| A) $\frac{28}{3}$ | B) $\frac{21}{2}$ | C) 21 |
| D) 14 | E) 42 | |

Resolución

Que sea compatible indeterminado quiere decir que tiene infinitas soluciones y esto ocurre bajo la siguiente condición:

$$\frac{1}{a+2} = -\frac{6}{4} = \frac{m}{7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} * \quad \frac{1}{a+2} &= -\frac{6}{4} \rightarrow 4 = -6(a+2) \\ &\rightarrow a = -\frac{8}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad -\frac{6}{4} = \frac{m}{7} \rightarrow m = 7\left(-\frac{6}{4}\right)$$

$$\rightarrow m = -\frac{21}{2}$$

$$\therefore am = \left(-\frac{8}{2}\right)\left(-\frac{21}{2}\right) = 42$$

Clave

Problema N.º 12

El siguiente sistema lineal tiene más de una solución.

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = 6 \\ 2x + (b-1)y = 2 \end{cases}$$

Calcule $a^{-1} + b^{-1}$.

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| A) $\frac{6}{7}$ | B) $\frac{9}{14}$ | C) $\frac{3}{7}$ |
| D) $\frac{3}{14}$ | E) $\frac{9}{7}$ | |

Resolución

Si tiene más de una solución y es un sistema lineal, entonces necesariamente son infinitas soluciones. Y esto ocurre bajo la siguiente condición:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{3}{b-1} = \frac{6}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} * \quad \frac{a-1}{2} &= \frac{6}{2} \rightarrow a-1=6 \\ &\rightarrow a=7 \\ * \quad \frac{3}{b-1} &= \frac{6}{2} \rightarrow 6=6(b-1) \\ &\rightarrow b=2 \\ \therefore a^{-1} + b^{-1} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Clave

Problema N.º 13

El sistema

$$\begin{cases} x+y=5 & \text{(I)} \\ x+my=1 & \text{(II)} \\ mx+y=14 & \text{(III)} \end{cases}$$

es compatible determinado. Calcule $x+m-y$.

- A) 18 B) 11 C) 15
 D) 13 E) 12

Resolución

Que un sistema lineal sea compatible determinado significa que tiene una única solución. Es decir, las tres ecuaciones deben verificarse para los mismos valores de x y y .

De (II) y (III)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x+my=1 \\ mx+y=14 \end{array} \right. \\ & \hline \\ & (m+1)x+(m+1)y=15 \\ & (m+1)(x+y)=15 \end{aligned}$$

De (I) tenemos que $x+y=5$, entonces

$$(m+1)(5)=15$$

$$m+1=3 \rightarrow m=2$$

Calculamos los valores de x y y usando las ecuaciones (I) y (II) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x+y=5 \\ x+my=1 \end{array} \right. \\ & \hline \\ & (1-m)y=4 \\ & y=\frac{4}{1-m} \end{aligned}$$

Reemplazamos $m=2$.

$$y=\frac{4}{1-2} \rightarrow y=-4$$

En (I)

$$x+y=5$$

$$x-4=5 \rightarrow x=9$$

$$\therefore x+m-y=9+2-(-4)=15$$

Clave**Problema N.º 14**

Indique el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+6y=4 \\ 5x+15y=10 \end{cases}$$

- A) $\{(t, t+3) / t \in \mathbb{R}\}$
 B) $\{(t, t-3) / t \in \mathbb{R}\}$
 C) $\{(t, 2-t) / t \in \mathbb{R}\}$
 D) $\{(t, 2-3t) / t \in \mathbb{R}\}$
 E) $\left\{\left(t, \frac{2-t}{3}\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$

Resolución

Observe que los coeficientes de ambas ecuaciones están en la misma proporción, es decir,

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{4}{10}$$

Cuando esto ocurre, el sistema tiene infinitas soluciones.

Observe lo siguiente:

$$\text{De (I)} \quad 2x+6y=4 \rightarrow x+3y=2$$

$$\text{De (II)} \quad 5x+15y=10 \rightarrow x+3y=2$$

Ambas ecuaciones se reducen a la misma ecuación.

Cuando es así, para resolver el sistema se procede de la siguiente manera:

Sea $x=t$.

Reemplazamos $x=t$ en la primera ecuación y calculamos el valor de y .

$$x+3y=2$$

$$t+3y=2 \rightarrow y=\frac{2-t}{3}$$

Luego, la solución es $(x, y)=\left(t; \frac{2-t}{3}\right)$, donde t representa cualquier número real.

$$\therefore \text{CS}=\left\{\left(t; \frac{2-t}{3}\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$$

Clave

Problema N.º 15

El sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=n \\ 4x+my=10 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones. Determine su conjunto solución.

- A) $\{(5-a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- B) $\{(5-2a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- C) $\{(4-5a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- D) $\left\{\left(\frac{5-a}{2}; a\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$
- E) $\left\{\left(\frac{5-3a}{2}; a\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$

Resolución

Como tiene infinitas soluciones, se cumple la siguiente condición:

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{m}=\frac{n}{10}$$

Operando se obtiene $m=6$ y $n=5$.

Ambas ecuaciones del sistema se reducen a la siguiente ecuación:

$$2x+3y=5 \quad (*)$$

Para resolver el sistema procedemos de la siguiente manera:

Sea $y=a$.

Reemplazamos $y=a$ en (*) y calculamos el valor de x .

$$2x+3y=5$$

$$2x+3a=5$$

$$2x=5-3a \rightarrow x=\frac{5-3a}{2}$$

Luego, la solución es $(x, y)=\left(\frac{5-3a}{2}, a\right)$, donde a representa cualquier número real.

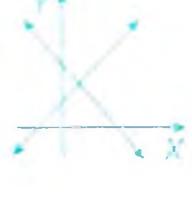
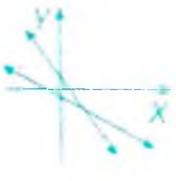
$$\therefore \text{CS}=\left\{\left(\frac{5-3a}{2}, a\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$$

Clave

Problema N.º 16

Indique el gráfico que mejor representa al sistema.

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=11 \end{cases}$$

- A) 
- B) 
- C) 
- D) 
- E) 

Resolución

Cada ecuación del sistema representa una recta.
Hallamos los cortes con los ejes para ambas rectas.

Recta \mathcal{L}_1 : $3x + 2y = 5$

x	y
0	$\frac{5}{2}$
5	0
0	2
3	0

— corte con el eje y
— corte con el eje x

Recta \mathcal{L}_2 : $x - 2y = 11$

x	y
0	$-\frac{11}{2}$
11	0
0	2

— corte con el eje y
— corte con el eje x

Calculamos la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

$$4x = 16 \rightarrow x = 4$$

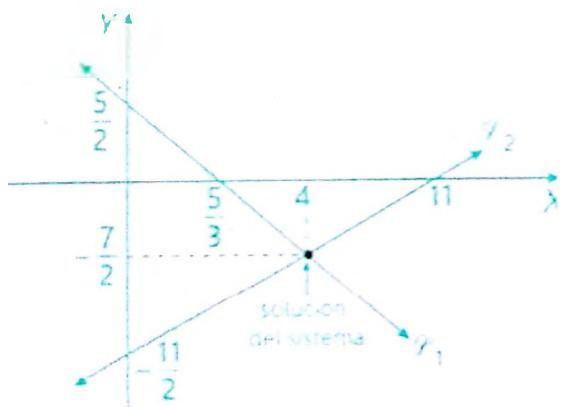
En la primera ecuación

$$3x + 2y = 5$$

$$3(4) + 2y = 5 \rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

La solución de este sistema es el punto $(4; -\frac{7}{2})$, el cual representa el punto de intersección de ambas rectas.

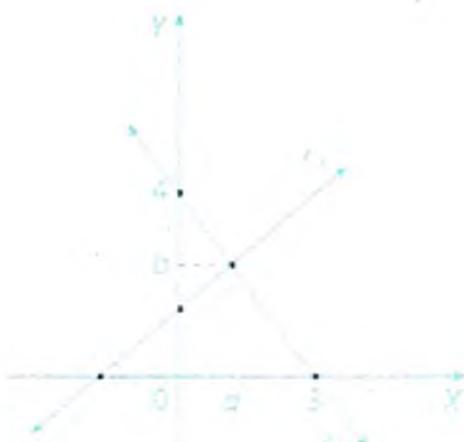
El gráfico de este sistema es el siguiente:



Clave C

Problema N.º 17

El gráfico



representa al sistema

$$\begin{cases} x - 2y = -2 & \mathcal{L}_1 \\ 4x + my = n & \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

Calcule $\frac{a+b}{m+n+4}$.

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{4}{11}$

D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{7}{11}$

Resolución

En la recta \mathcal{L}_2 : $4x + my = n$, reemplazamos los puntos $(3; 0)$ y $(0; 4)$, los cuales aparecen en el gráfico.

$$\text{Con el punto } (3; 0): 4(3) + m(0) = n \rightarrow n = 12$$

$$\text{Con el punto } (0; 4): 4(0) + m(4) = n$$

$$4m = n$$

$$4m = 12 \rightarrow m = 3$$

El punto de intersección de ambas rectas, el cual es el punto $(a; b)$ como aparece en el gráfico, representa la solución del sistema.

Vamos a resolver el sistema para calcular a y b .

$$\begin{cases} x - 2y = -2 & \times(3) \\ 4x + 3y = 12 & \times(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y = -6 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}$$

$$\underline{11x = 18} \rightarrow x = \frac{18}{11}$$

En la primera ecuación

$$x - 2y = -2$$

$$\frac{18}{11} - 2y = -2 \rightarrow y = \frac{20}{11}$$

La solución del sistema es

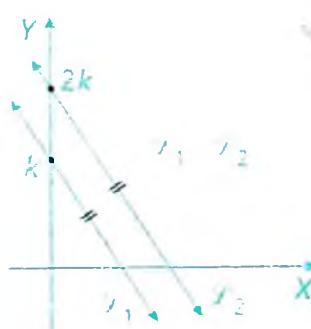
$$(x; y) = \left(\frac{18}{11}; \frac{20}{11} \right), \text{ entonces } a = \frac{18}{11} \text{ y } b = \frac{20}{11}.$$

$$\therefore \frac{a+b}{m+n+4} = \frac{\frac{18}{11} + \frac{20}{11}}{3+12+4} = \frac{\frac{38}{11}}{19} = \frac{2}{11}$$

Clave B

Problema N.º 18

El gráfico



representa el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 2x + my = n \end{cases}$$

Calcule $m + n + k$.

- A) 26 B) 23 C) 27
D) 18 E) 25

Resolución

Como las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución y la condición para ello es

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{m} \neq \frac{10}{n}$$

Luego

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{m} \rightarrow m = 5$$

Para hallar k usamos el punto $(0; k)$, que es el corte con el eje Y de la recta \mathcal{L}_1 .

$$\mathcal{L}_1: 2x + 5y = 10$$

$$2(0) + 5k = 10 \rightarrow k = 2$$

Para hallar n , usamos el punto $(0; 2k)$, que es el corte con el eje Y de la recta \mathcal{L}_2 .

$$\mathcal{L}_2: 2x + my = n$$

$$2(0) + 5(2k) = n$$

$$5(4) = n \rightarrow n = 20$$

$$\therefore m + n + k = 5 + 20 + 2 = 27$$

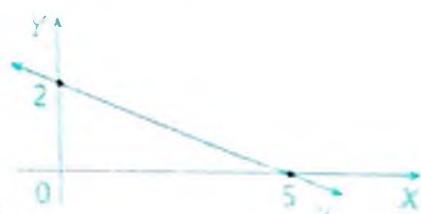
Clave

Problema N.º 19

La solución del sistema

$$\begin{cases} mx + ny = 10 & (\text{I}) \\ px + qy = 20 & (\text{II}) \end{cases}$$

está representada por la recta \mathcal{L}



Calcule $m + n + p + q$.

- A) 25 B) 18 C) 19
D) 21 E) 24

Resolución

Cuando una sola recta representa el sistema, es porque esta representa ambas ecuaciones y en tal caso el sistema tiene infinitas soluciones.

En la ecuación (I), usamos los puntos $(0; 2)$ y $(5; 0)$ que aparecen en el gráfico de la recta \mathcal{L} para calcular los valores de m y n .

Con el punto $(0; 2)$: $m(0) + n(2) = 10$
 $\rightarrow n=5$

Con el punto $(5; 0)$: $m(5) + n(0) = 10$
 $\rightarrow m=2$

Luego, debido a que el sistema tiene infinitas soluciones, se cumple la siguiente condición:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \frac{10}{20}$$

Reemplazamos los valores de m y n .

$$\frac{2}{p} = \frac{5}{q} = \frac{1}{2}$$

Operamos y se obtiene $p=4$ y $q=10$.

$$\therefore m+n+p+q=2+5+4+10=21$$

Clave

Problema N.º 20

Respecto al sistema

$$\begin{cases} ax + my = p \\ bx + ny = q \end{cases}$$

usando la regla de Cramer se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & m \\ 13 & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$$

Calcule el valor de y .

- A) -14 B) 13 C) 12
 D) -11 E) 15

Resolución

Con la regla de Cramer, el valor de x se calcula como

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}}$$

Del dato, tendremos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & m \\ 13 & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$$

Igualamos y se obtiene $p=5$; $q=13$; $a=3$; $b=5$; $m=2$ y $n=3$.

Calculamos el valor de y con la regla de Cramer.

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ b & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{39 - 25}{9 - 10} = -14$$

$$\therefore y = -14$$

Clave

Problema N.º 21

En el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x + 3y = 5 \\ x + ay = 6 \end{cases}$$

se cumple que las componentes de su solución son negativas.

Determine la variación de a .

- A) $\left(-\frac{7}{6}; 1\right]$ B) $(-3; 0)$ C) $(-3; 1)$
 D) $(-3; -\frac{7}{6})$ E) $(-\infty; -3)$

Resolución

Hallamos x y y con la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{5a - 18}{(a+2)(a-1)} = \frac{5a - 18}{(a+3)(a-1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{6a + 7}{(a+3)(a-1)}$$

Las componentes de la solución del sistema son los valores de x y y . Estos valores son negativos, entonces

- $x = \frac{5a - 18}{(a+3)(a-1)} < 0$



$$a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{18}{5}\right)$$

- $y = \frac{6a + 7}{(a+3)(a-1)} < 0$



$$a \in (-\infty; -7/6) \cup \left(-1; \frac{18}{5}\right)$$

Intersecamos



$$\therefore a \in (-\infty; -3)$$

Clave

Problema N.º 22

Halle el número de soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & (I) \\ xy = 10 & (II) \end{cases}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

De (II)

$$xy = 10 \rightarrow y = \frac{10}{x}$$

En (I)

$$x^2 + y^2 = 29$$

$$x^2 + \left(\frac{10}{x}\right)^2 = 29$$

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = 29$$

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 = 4$$

$$(x^2 - 25)(x^2 - 4) = 0$$

- $x^2 = 25 \rightarrow x = 5 \vee x = -5$
- $x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \vee x = -2$

En (II)

$$xy = 10$$

- $x = 5 \rightarrow y = 2$
- $x = -5 \rightarrow y = -2$
- $x = 2 \rightarrow y = 5$
- $x = -2 \rightarrow y = -5$

Las soluciones del sistema son: $(5; 2), (-5; -2), (2; 5), (-2; -5)$.

Por lo tanto, hay 4 soluciones.

Clave

Problema N.º 23

El sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = m & \text{(I)} \\ x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

no tiene solución. Calcule el máximo valor entero de m .

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

Resolución

De (II)

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ \rightarrow y &= 5 - x \end{aligned}$$

En (I)

$$\begin{aligned} x^2 + y &= m \\ x^2 + 5 - x &= m \\ x^2 - x + (5 - m) &= 0 \end{aligned}$$

Como el sistema no tiene solución, esta ecuación cuadrática no debe tener soluciones reales. Eso ocurre bajo la condición $\Delta < 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5 - m) < 0$$

$$1 - 4(5 - m) < 0$$

$$1 - 20 + 4m < 0$$

$$4m < 19 \rightarrow m < \frac{19}{4}$$

Por lo tanto, el mayor valor entero de m es 4.

**Problema N.º 24**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 & \text{(I)} \\ x^2 - xy + y^2 = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

e indique la suma de todas las componentes de todas sus soluciones.

- A) 10 B) 0 C) 26
D) 6 E) 12

Resolución

Sumamos (I) y (II).

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \\ \hline 2x^2 + 2y^2 = 26 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array} \quad (\alpha)$$

Restamos (I) y (II).

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \\ \hline 2xy = 12 \\ xy = 6 \end{array} \quad (\beta)$$

De (α) y (β)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Se verifica cuando $x=2 \wedge y=3$, y también cuando

- $x=3 \wedge y=2$
- $x=-2 \wedge y=-3$
- $x=-3 \wedge y=-2$

Soluciones: $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$ y $(-3; -2)$

Por lo tanto, la suma de todas las componentes de estas soluciones es

$$\underbrace{(2+3)+(3+2)}_{10} + \underbrace{(-2-3)+(-3-2)}_{-10} = 0$$

Clave

Problema N.º 25

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \frac{2015}{x+y} + \frac{2016}{x-y} = 1511 \\ \frac{2016}{x+y} + \frac{2015}{x-y} = 1520 \end{cases}$$

y halle $x^2 - y^2$.

- A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{12}$
 D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{25}$

Resolución

Hacemos los siguientes cambios de variable:

$$\frac{1}{x+y} = a \quad y \quad \frac{1}{x-y} = b$$

Los reemplazamos en el sistema y tendremos

$$\begin{cases} 2015a + 2016b = 1511 \\ 2016a + 2015b = 1520 \end{cases}$$

$$\underline{3031a + 3031b = 3031}$$

$$(3031)(a+b) = 3031 \rightarrow a+b=1$$

$$\begin{cases} 2015a + 2016b = 1511 \\ 2016a + 2015b = 1520 \end{cases}$$

$$-a+b=-9 \rightarrow a-b=9$$

Luego resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=9 \end{cases}$$

Se obtiene $a=5$ y $b=4$.

Luego

$$a = \frac{1}{x+y} = 5 \rightarrow x+y = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{1}{x-y} = 4 \rightarrow x-y = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20}$$

Clave

Problema N.º 26

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 10(x+y) = 7xy & (\text{I}) \\ 2(x+z) = 5xz & (\text{II}) \\ 5(y+z) = 11yz & (\text{III}) \end{cases}$$

y calcule xyz .

- A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) 5
 D) 4 E) $\frac{3}{2}$

Resolución

De (I)

$$10(x+y)=7xy$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{7}{10} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{10} \quad (\alpha)$$

De (II)

$$2(x+z)=5xz$$

$$\frac{x+z}{xz} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \quad (\beta)$$

De (III)

$$5(y+z)=11yz$$

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{11}{5} \rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{5} \quad (\gamma)$$

De (α), (β) y (γ)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{10} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{5} \end{array} \right.$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{54}{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{27}{10}$$

Reemplazamos (α), (β) y (γ) en esta ecuación de la siguiente manera:

$$\bullet \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{10} \rightarrow \frac{7}{10} + \frac{1}{z} = \frac{27}{10} \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{y} = \frac{27}{10} \rightarrow y = 5$$

$$\bullet \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{5} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{11}{5} = \frac{27}{10} \rightarrow x = 2$$

$$\therefore xyz = (2)(5)\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

Clave**Problema N.º 27**

Resuelva el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49 \quad (\text{I}) \\ x + xy + y = 11 \quad (\text{II}) \end{array} \right.$$

y calcule el mayor valor de $x-y$.

- A) 7 B) 3 C) 4
 D) 1 E) 2

Resolución

De (II)

$$x + xy + y = 11$$

$$x + y = 11 - xy$$

Elevamos al cuadrado.

$$(x+y)^2 = (11-xy)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 121 - 22xy + x^2y^2$$

$$x^2 + y^2 = 121 - 24xy + x^2y^2 \quad (\text{a})$$

De (I)

$$x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49$$

$$x^2 + y^2 = 49 - x^2y^2 \quad (\text{b})$$

De (α) y (β)

$$121 - 24xy + x^2y^2 = 49 - x^2y^2$$

$$\cancel{2x^2y^2} - \cancel{24xy} + \cancel{72} = 0$$

$$\underbrace{x^2y^2 - 12xy + 36 = 0}_{(xy-6)^2}$$

$$(xy-6)^2 = 0$$

$$xy-6=0 \rightarrow xy=6$$

En (I)

$$x + \cancel{xy} + y = 11$$

$$x + y + 6 = 11$$

$$\rightarrow x + y = 5$$

Luego, tenemos

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \wedge y = 2 \\ x = 2 \wedge y = 3 \end{cases}$$

$$\therefore (x-y)_{\max} = 3-2=1$$

Clave D

Problema N.º 29

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+y} = 5 & (\text{I}) \\ y + \sqrt{x+y} = 10 & (\text{II}) \end{cases}$$

y calcule xy .

A) 15 B) 20

D) 16

C) 10

E) 14

Resolución

Sumamos (I) y (II).

$$\begin{array}{r} x + \sqrt{x+y} = 5 \\ y + \sqrt{x+y} = 10 \\ \hline x + y + 2\sqrt{x+y} = 15 \end{array}$$

Como $x+y = \sqrt{x+y}^2$, entonces

$$\begin{array}{r} \sqrt{x+y}^2 + 2\sqrt{x+y} - 15 = 0 \\ \sqrt{x+y} + 5 \\ \sqrt{x+y} - 3 \end{array}$$

Igualamos a cero.

$$\begin{array}{l} \sqrt{x+y} + 5 = 0 \vee \sqrt{x+y} - 3 = 0 \\ \sqrt{x+y} = -5 \quad \text{absurdo} \quad \sqrt{x+y} = 3 \\ x+y = 9 \end{array}$$

En (I)

$$x + \sqrt{x+y} = 5$$

$$x + \sqrt{9} = 5$$

$$x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$$

En (II)

$$y + \sqrt{x+y} = 5$$

$$y + \sqrt{9} = 10$$

$$y + 3 = 10 \rightarrow y = 7$$

$$\therefore xy = (2)(7) = 14$$

Clave E

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Sea el sistema

$$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 5x+3y=19 \end{cases}$$

Calcule x^y .

- A) 8 B) 9 C) 16
D) 25 E) 27

2. La terna $(\alpha; \beta; \theta)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+3y-z=12 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$$

Calcule $\alpha\beta\theta$.

- A) -6 B) 6
D) 18

3. Si $(3; 2)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} ax+by=13 \\ x+(b+1)y=15a \end{cases}$$

calcule $a+b$.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

4. Determine λ , de modo que el sistema lineal

$$\begin{cases} 14x+3y=13 \\ 3x-2y=16 \\ \lambda x+y=7 \end{cases}$$

tenga solución única.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

5. Determine a^2-b^2 , de modo que el sistema

$$\begin{cases} (a-3)x+(b-4)y=15 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$$

tenga infinitas soluciones.

- A) 48 B) 30 C) 45
D) 51 E) 56

6. Determine m para que el sistema

$$\begin{cases} mx+y=3 \\ 5x+(m-1)y=2m \end{cases}$$

sea inconsistente.

- A) 3 B) -3 \vee 3 C) -2
D) -3 \vee 2 E) 5

Calcule z en el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=4 \\ 4x+9y+25z=8 \end{cases}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

8. El sistema

$$\begin{cases} kx-6y=5k+3p \\ (k-4)x-2y=4k+3 \end{cases}$$

es indeterminado. Calcule $p+k$.

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 24 E) 23

9. Si $(m; n)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}y = 7 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}y = 6 \end{cases}$$

calcule m^2 .

- A) 1 B) 4 C) 9
D) 6 E) 36

10. En el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x - my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

se cumple que $y < 0$.

Si $m \in \mathbb{Z}^+$, calcule xy .

- A) -1 B) 2 C) -4
D) 3 E) -6

11. El sistema de incógnitas x y y

$$\begin{cases} nx + (m+n^2)y = m-1 \\ x + (n-2)y = n \end{cases}$$

tiene más de una solución. Calcule $m^2 + n^2$.

- A) 13 B) 1 C) 20
D) 8 E) 5

12. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} ax + 3y = 5 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$$

y calcule $(x+y)(a^2-6)$.

- A) $8a-19$ B) $8a-17$ C) $8a+19$
D) $8a-1$ E) $8a+1$

13. ¿Para qué valores de m el sistema tiene una solución de componentes positivas?

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2m \end{cases}$$

- A) $m > -2$ B) $m < 2$ C) $-2 < m < 2$
D) $-4 < m < 4$ E) $m > 4$

14. Si el sistema

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ mx + ny = 5n \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

tiene solución única, calcule m/n .

- A) 2 B) 3 C) -1
D) 4 E) 1

15. Resuelva

$$\begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{x+y} = \frac{11}{14} \\ \frac{3}{x+y} + \frac{5}{x+2y} = \frac{47}{14} \end{cases}$$

y calcule xy .

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{5}$

16. Resuelva

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5 \\ 2\sqrt{x+y} + 3\sqrt{x-y} = 11 \end{cases}$$

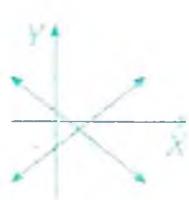
y calcule $x^2 - y^2$.

- A) 5 B) 12 C) 6
D) 15 E) 16

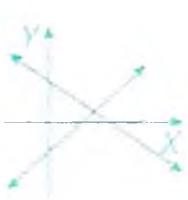
17. Represente gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

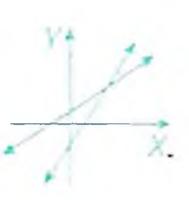
A)



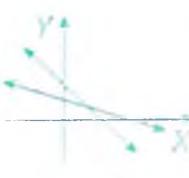
B)



C)



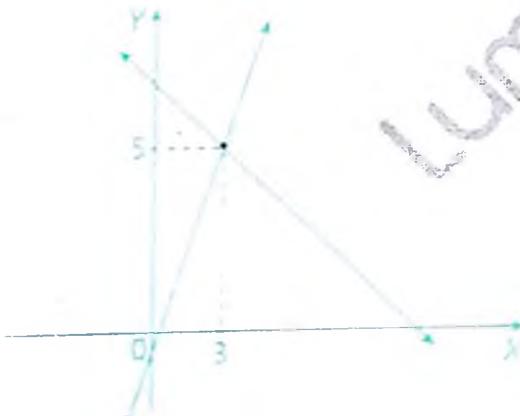
D)



E)



18. La gráfica



representa el sistema

$$\begin{cases} 2x + my = 11 \\ nx - 3y = 6 \end{cases}$$

Calcule mn .

- A) 16
B) 7
C) 8
D) 6
E) 10

19. La recta \mathcal{L}



representa la solución del sistema

$$\begin{cases} ax + by = 12 \\ mx + ny = 18 \end{cases}$$

Calcule $a+b+m+n$.

- A) 10
B) -1
C) 5
D) 13
E) -7

20. La gráfica



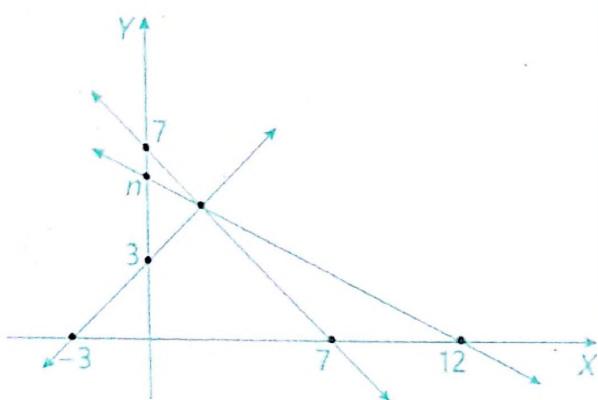
representa el sistema

$$\begin{cases} mx + ny = 6 & \mathcal{L}_1 \\ ax + by = 12 & \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

Si se sabe que $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, calcule $\frac{m+n+k}{a+b}$.

- A) $\frac{6}{5}$
B) $\frac{5}{4}$
C) $-\frac{7}{2}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{11}{5}$

21. La gráfica



representa el sistema

$$\begin{cases} y - x = 3 \\ x + y = 7 \\ ax + by = 12 \end{cases}$$

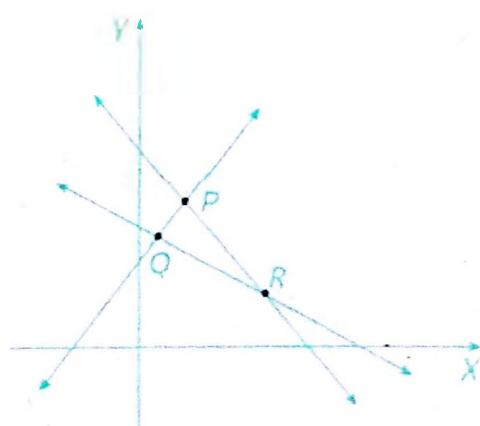
Calcule $a+b+n$.

- A) 20 B) 9
D) 18 C) 19
E) 21

22. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

está representado por la gráfica



Calcule la suma de los componentes de los puntos P , Q y R .

- A) 6 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{7}{2}$ E) 11

23. En el sistema

$$\begin{cases} mx + py = a \\ nx + qy = b \end{cases}$$

con la regla de Cramer se obtiene

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 10 \\ n & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}$$

Calcule $\frac{(m+p+a)x}{(n+q+b)y}$.

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{6}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

24. El sistema

$$\begin{cases} mx - (m+1)y = 2 \\ (m-1)x - my = 1 \end{cases}$$

tiene una solución cuya primera componente es positiva y su segunda componente es negativa.

Determine la variación de m .

- A) $(1; +\infty)$
B) $(2; +\infty)$
C) $(1; 2)$
D) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$
E) $(0; +\infty)$

25. Si x y y son reales positivos, tal que el sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 8 \\ x - 4y = -32 \\ x + y = a \end{cases}$$

presenta única solución, calcule axy .

- A) 368 B) 138 C) 468
D) 408 E) 568

26. El sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3 - a \\ x = -y = -z \\ x = yz \end{cases}$$

presenta solución única. Calcule el menor valor de a .

- A) 3 B) 2 C) 4
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{3}$

27. Dado el sistema

$$\begin{cases} x+2 = \frac{xy+22}{y+3} \\ x-5 = \frac{xy-19}{y-2} \end{cases}$$

calcule $\sqrt{xy-1}$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

28. Dado el sistema

$$\begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}} = 5 \\ \sqrt{4x+4} - \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

calcule $x^2 - y^2$.

- A) 52 B) -60 C) -25
D) 55 E) 42

29. El sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = m \end{cases}$$

presenta solución única. Calcule la suma de valores de m .

- A) $\frac{3}{2}$ B) 0 C) $-\frac{1}{2}$
D) 2 E) -1

30. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} xy + 2x + 3y = 19 \\ xz + 5x + 3z = 30 \\ yz + 5y + 2z = 35 \end{cases}$$

y calcule xyz .

- A) 15 B) 24 C) 32
D) 20 E) 30

Claves

1	A	5	E	9	D	13	C	17	A	21	B	25	C	29	B
2	A	6	C	10	E	14	E	18	B	22	E	26	B	30	B
3	D	7	E	11	E	15	B	19	C	23	B	27	B		
4	C	8	F	12	A	16	E	20	F	24	C	28	D		

CAPÍTULO 14



PROGRAMACIÓN LINEAL

En 1946 comenzó el largo periodo de la Guerra Fría entre la Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más importantes se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres con la ciudad de Berlín desde las zonas alemanas en poder de los aliados. Los aliados solo tuvieron dos posibilidades: romper el bloqueo terrestre por la fuerza o llegar a Berlín por el aire.

Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica; para tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer a la ciudad. En diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias de víveres; en marzo de 1949 se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo.

Aprendizajes esperados

- Analizar el conjunto solución de un sistema de inequaciones lineales graficando la región relacionada con el sistema.
- Calcular los vértices de la región factible resolviendo el sistema asociado de ecuaciones lineales.
- Resolver problemas de programación lineal aplicados a la vida cotidiana.

¿Por qué es necesario este conocimiento?

La importancia de la programación lineal no solo radica en el procedimiento matemático, sino en la herramienta financiera que sirve de soporte para la toma de decisiones en cualquier organización, pues la programación lineal busca la asignación eficiente de los recursos asignados para maximizar las utilidades y minimizar los costos.



Programación lineal

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Una inecuación lineal con dos variables, x y y , es una expresión que puede escribirse de alguna de las siguientes formas:

- $ax+by \geq c$
- $ax+by \leq c$
- $ax+by > c$
- $ax+by < c$

Ejemplo

Las siguientes expresiones son inecuaciones lineales con dos variables:

- $3x+5y < 4$
- $-x+3y > 5$
- $5x-6y \geq 2$

2. GRAFICACIÓN DE UNA INECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Para graficar una desigualdad lineal con dos variables necesitamos indicar el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

APLICACIÓN 1

Represente la región correspondiente a la siguiente inecuación lineal:

$$x+2y \leq 4$$

RESOLUCIÓN

Primero graficamos la recta de la ecuación

$$x+2y=4$$

Si $x=0$, entonces

$$2y=4$$

$$y=2$$

Luego, la recta pasa por el punto $(0; 2)$.

Si $y=0$, entonces $x=4$; luego, la recta pasa por el punto $(4; 0)$.

Para graficar la función
 $y=2x+3$
 hacemos lo siguiente:

- Primero, tabulamos.

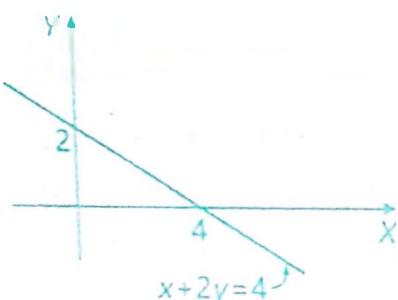
X	Y
0	3
$\frac{3}{2}$	0
$-\frac{3}{2}$	0

- Luego, ubicamos los puntos $(0; 3)$ y $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ en el plano.

- Finalmente, trazamos la recta.



Graficamos la recta.

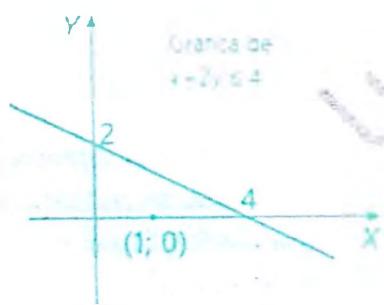


Después, para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos tomar un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, por ejemplo, el punto (1; 0).

Para que dicho punto sea solución, se tendrá que cumplir $x + 2y \leq 4$, por lo que sustituimos en la inecuación el punto (1; 0).

$$1 + 2 \cdot 0 < 4, \text{ es decir, } 1 < 4.$$

Como esta desigualdad es evidentemente cierta, concluimos que el punto (1; 0) es solución; por lo tanto, el semiplano que contiene a (1; 0) es la solución, es decir, el semiplano inferior, como vemos en el siguiente gráfico:



APLICACIÓN 2

Grafique la región correspondiente a la desigualdad $y \geq -3x + 6$.

RESOLUCIÓN

Primero graficamos la recta de la ecuación, es decir, $y = -3x + 6$.

Si $x = 0$, entonces $y = 6$. Luego, la recta pasa por el punto (0; 6).

Si $y = 0$, entonces

$$0 = -3x + 6$$

$$x = 2$$

Luego, la recta pasa por el punto (2; 0).

Graficamos la recta.



Después, para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos tomar un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, por ejemplo, el punto (3; 0).

Para que dicho punto sea solución se tendrá que cumplir que $y \geq -3x + 6$, por lo que sustituimos en la inecuación el punto (3; 0).

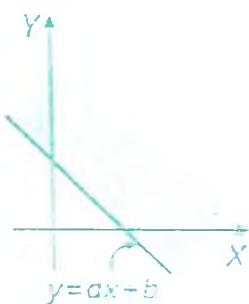
$$0 \geq -3(3) + 6, \text{ es decir, } 0 \geq -9.$$

Como esta desigualdad es evidentemente cierta, concluimos que el punto (3; 0) es solución; por lo tanto, el semiplano que contiene a (3; 0) es la solución, es decir, el semiplano superior, como vemos en el siguiente gráfico:

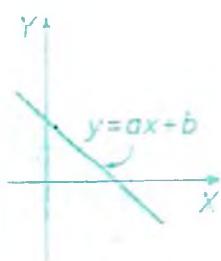


2.1. Tipos de gráfica de una inecuación lineal

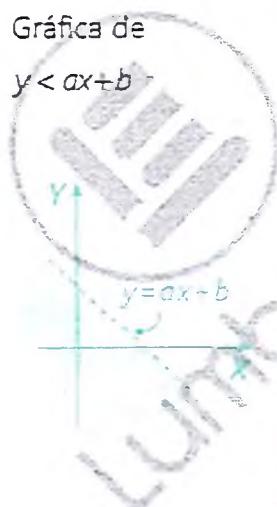
- Gráfica de $y \geq ax+b$
- Gráfica de $y > ax+b$



- Gráfica de $y \leq ax+b$



- Gráfica de $y < ax+b$



APLICACIÓN 3

Grafique la siguiente inecuación:

$$2x+5y \leq 50$$

RESOLUCIÓN

Primero, graficamos la recta de la ecuación

$$2x+5y=50$$

Si $x=0$, entonces

$$\begin{aligned} 5y &= 50 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Luego, la recta contiene el punto $(0; 10)$.

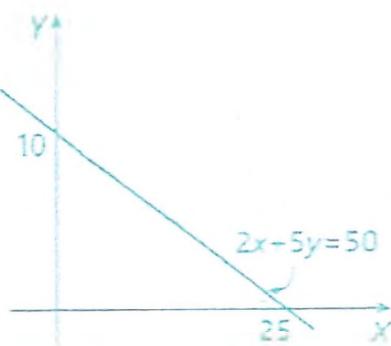
Si $y=0$, entonces

$$2x=50$$

$$x=25$$

Luego, la recta contiene el punto $(25; 0)$.

Luego, graficamos la ecuación de la recta $2x+5y=50$.



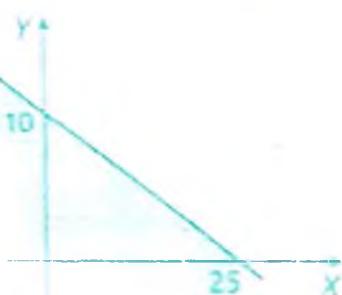
Después, para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos despejar y :

$$2x+5y \leq 50$$

$$5y \leq 50 - 2x$$

$$y \leq \frac{50 - 2x}{5}$$

La última inecuación tiene la forma $y \leq mx+b$, por lo tanto, el conjunto de puntos correspondientes a la desigualdad lineal está formado por la recta de la ecuación $2x+5y=50$ y por la región que se encuentra debajo de la recta.



APLICACIÓN 4

Grafique la región correspondiente a la inecuación $y < 2x - 6$.

RESOLUCIÓN

Primero, graficamos la recta de la ecuación $y = 2x - 6$.

Si $x=0$, entonces $y=-6$. Luego, la recta pasa por el punto $(0; -6)$.

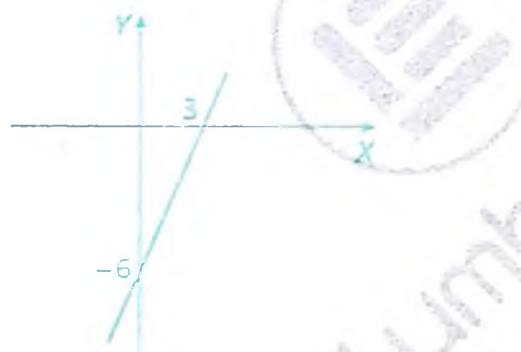
Si $y=0$, entonces

$$0 = 2x - 6$$

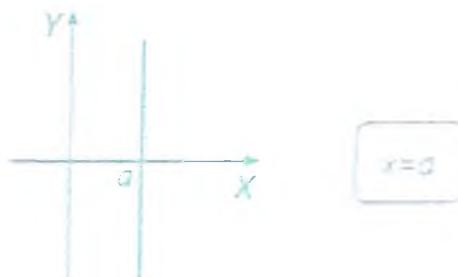
$$x = 3$$

Luego, la recta pasa por el punto $(3; 0)$.

Luego, graficamos la ecuación de la recta $y = 2x - 6$.



La inecuación $y < 2x - 6$ es del tipo $y < ax + b$. Por lo tanto, el conjunto de puntos correspondiente a la desigualdad lineal está formado por la región que se encuentra por debajo de la recta $y = 2x - 6$.

**2.2. Ecuación de la forma $x=a$; $y=b$** **Recta vertical**

Las gráficas de las desigualdades asociadas a rectas verticales son las siguientes:

- Gráfica de $x \leq b$
- Gráfica de $x < b$

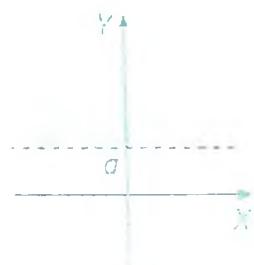
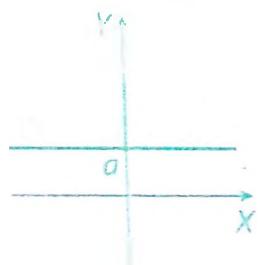


- Gráfica de $x \geq b$
- Gráfica de $x > b$

**Recta horizontal**

Las gráficas de las desigualdades asociadas a rectas horizontales son las siguientes:

- Gráfica de $y \geq a$
- Gráfica de $y > a$



- Gráfica de $y \leq a$
- Gráfica de $y < a$

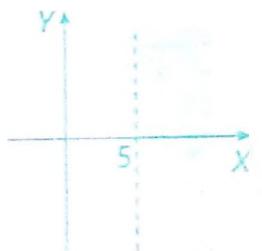


Ejemplo

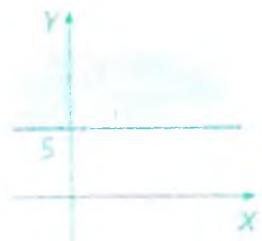
Grafiquemos las regiones correspondientes a las siguientes desigualdades:

- | | |
|---------------|-------------|
| a. $x > 5$ | c. $x < -3$ |
| b. $y \geq 5$ | d. $y < -3$ |

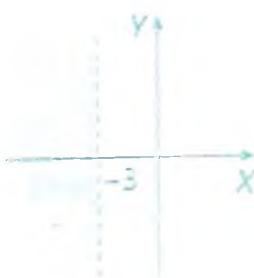
a. $x > 5$



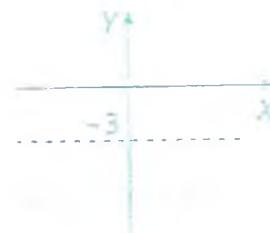
b. $y \geq 5$



c. $x < -3$



d. $y < -3$



3. SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Un sistema de inecuaciones lineales es un conjunto de inecuaciones del tipo anterior (por ejemplo, $y > ax+b$); en este caso debemos resolver gráficamente cada inecuación, representar la solución en una misma gráfica y la solución total será la parte común a todas las soluciones.

APLICACIÓN 5

Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x-y > 1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Representamos $x+y \leq 3$.

Primero graficamos $x+y=3$.

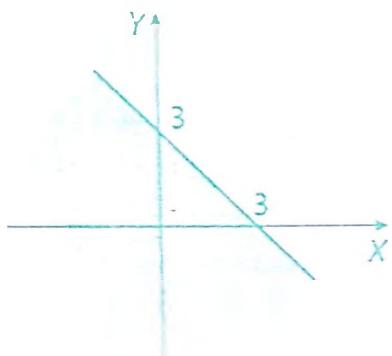
Si $x=0$, entonces $y=3$.

Luego, la recta pasa por $(0; 3)$.

Si $y=0$, entonces $x=3$.

Luego, la recta pasa por $(3; 0)$.

Al resolver la inecuación para y , obtenemos $y \leq -x + 3$, que tiene la forma $y \leq mx + b$; por lo tanto, la región está formada por la recta $x + y = 3$ y por el conjunto de puntos bajo la recta.



Ahora representamos $x - y > 1$.

Primero, graficamos la frontera $x - y = 1$.

Si $x = 0$, entonces

$$-y = 1$$

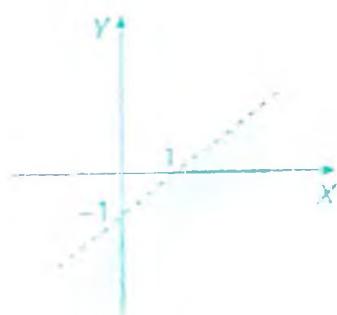
$$y = -1$$

Luego, la recta pasa por $(0; -1)$.

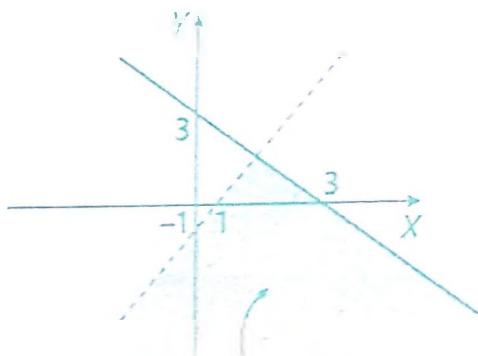
Si $y = 0$, entonces $x = 1$.

Luego, la recta pasa por $(1; 0)$.

Al resolver la desigualdad para y , obtenemos $y < x - 1$, que tiene la forma $y < mx + b$; por lo tanto, la región está formada por la recta $x - y = 1$ y por el conjunto de puntos bajo la recta.



Finalmente, intersecamos la gráfica de $x + y \leq 3$ y $x - y > 1$.



Esta región representa el conjunto solución del sistema de inecuaciones.

APLICACIÓN 6

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Del dato

$$2x + 3y = 15 \quad (\text{I})$$

$$x + 2y = 12 \quad (\text{II})$$

Multiplicamos por 2 a la ecuación (II).

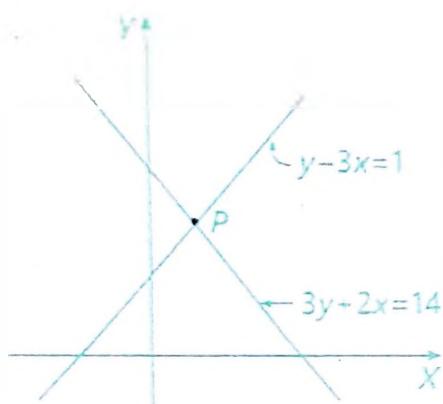
$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 24 \\ 2x + 3y = 15 \\ \hline \rightarrow y = 9 \end{array}$$

Para hallar el valor de x , reemplazamos el valor de $y = 9$ en la ecuación (II) y se obtiene $x + 2(9) = 12$; luego obtenemos que $x = -6$.

Por lo tanto, la solución del sistema es $(-6; 9)$.

APLICACIÓN 7

Del gráfico, halle el punto P .

**RESOLUCIÓN**

Para hallar el punto P , debemos igualar las funciones:

$$1.^{\text{a}} \text{ función: } y = 3x + 1$$

$$2.^{\text{a}} \text{ función: } y = \frac{14 - 2x}{3}$$

Igualando las funciones, tenemos

$$3x + 1 = \frac{14 - 2x}{3}$$

$$9x + 3 = 14 - 2x$$

$$11x = 11$$

$$\rightarrow x = 1$$

Para hallar el valor y , reemplazamos $x=1$ en la primera función.

$$y = 3(1) + 1$$

$$\rightarrow y = 4$$

Por lo tanto, el punto P es $(1; 4)$.

APLICACIÓN 8

Grafique la función $y \leq 5x - 3$.

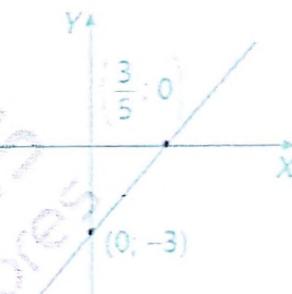
RESOLUCIÓN

Primero graficamos la recta $y = 5x - 3$.

Tabulamos

X	Y
0	-3
3/5	0

Ubicamos dichos puntos en el plano cartesiano y trazamos la recta, obteniendo el siguiente gráfico.



Ahora, para ver qué semiplano sombreado, sustituimos, por ejemplo, el punto $(0; 0)$ en la inecuación

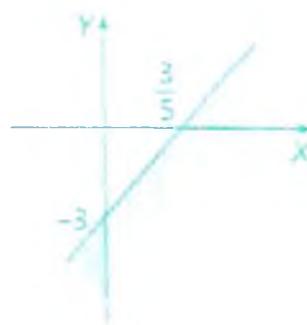
$$y \leq 5x - 3$$

Se obtiene

$$0 \leq -3 \quad (\text{no verifica})$$

$$\rightarrow (0; 0) \quad (\text{no es solución})$$

Por lo tanto, sombreado el semiplano que no contiene el punto $(0; 0)$.



APLICACIÓN 9

Grafe el siguiente sistema de inecuaciones:

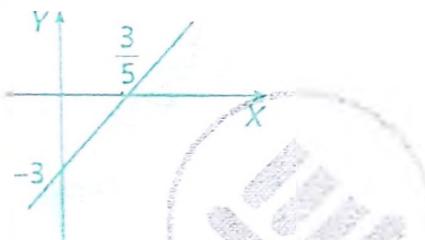
$$\begin{cases} y \leq 5x - 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Para graficar un sistema de inecuaciones, primero graficamos cada inecuación y luego la intersecamos.

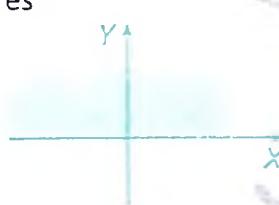
- $y \leq 5x - 3$

Su gráfica es



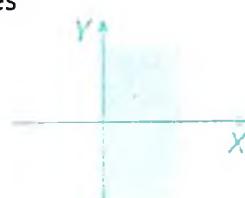
- $x \geq 0$

Su gráfica es



- $y \geq 0$

Su gráfica es



Luego, intersecamos los tres gráficos anteriores y obtenemos



Es un método de optimización cuya finalidad es maximizar o minimizar funciones lineales de variables positivas, sujetas a unas restricciones determinadas por inecuaciones lineales.

4.1. Modelo de programación lineal en forma general

Es la representación general del modelo de programación lineal con dos variables de decisión y n números de restricciones, y es una función objetivo que hay que maximizar o minimizar según sea el caso.

$$z = f_{(x,y)} = ax + by + c \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{función objetivo} \\ \text{variables de decisión} \end{array} \right.$$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \geq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_nx + b_ny \geq c_n \end{cases}$$

Las condiciones de no negatividad son $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

APLICACIÓN 10

Dado el problema de programación lineal

$$f_{(x,y)} = 3x + 2y$$

sujeta a las restricciones

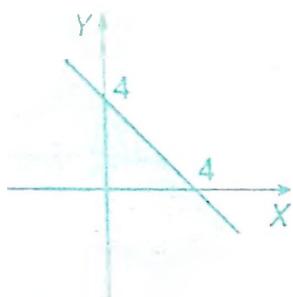
$$\begin{cases} y + x \leq 4 & (I) \\ y \leq x & (II) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

halle el máximo y el mínimo de $f_{(x,y)}$.

RESOLUCIÓN

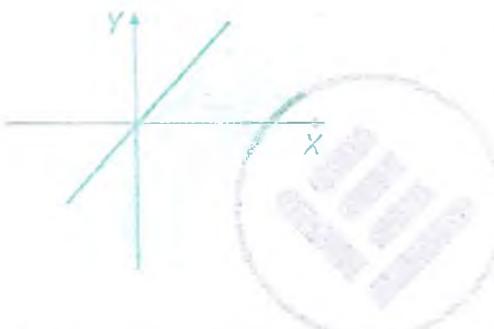
De (I)

$$y \leq -x + 4$$



De (II)

$$y \leq x$$

De $x \geq 0$ y $y \geq 0$ se tiene el primer cuadrante.

Luego, intersecamos los tres gráficos anteriores.



Ahora evaluamos en la función objetivo

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

- $f(0, 0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$
- $f(1, 0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$
- $f(2, 0) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$
- $f(3, 0) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 9$
- $f(4, 0) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$
- $f(0, 1) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$
- $f(1, 1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $f(2, 1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$
- $f(3, 1) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$
- $f(4, 1) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$

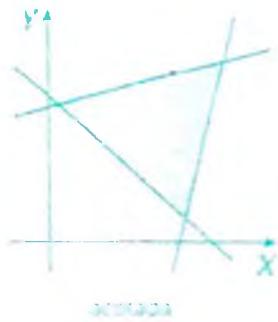
Observando los resultados, tenemos lo siguiente:

- El máximo es 12 y se obtiene en el punto (4, 0).
- El mínimo es 0 y se obtiene en el punto (0, 0).

En el ejemplo anterior, el máximo y mínimo fueron obtenidos en los vértices de la región sombreada.

4.2. Región factible

Es el conjunto de puntos $P = (x_0, y_0)$ que satisface todas las restricciones y puede ser acotada y no acotada.

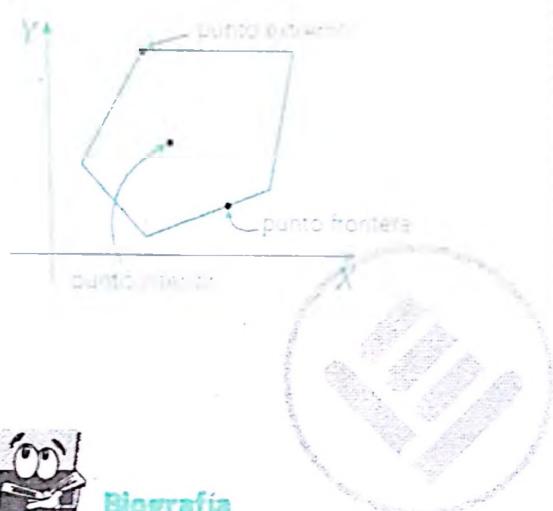


4.3. Solución óptima

Al par ordenado $P=(x_0; y_0)$, que pertenece a la región factible y maximiza o minimiza la función objetivo, se le llama solución óptima.

4.4. Valor óptimo

Es el valor máximo o mínimo que adquiere la función objetivo. Además, en una región convexa se distingue los siguientes puntos:



Biografía

George Bernard Dantzig

Nació el 8 de noviembre de 1914 en Portland, Oregon, EE.UU. Fue un matemático reconocido por desarrollar el método simplex y es considerado como el padre de la programación lineal. Dantzig se graduó en matemáticas en 1936 en la Universidad de Maryland, donde enseñaba su padre. Obtuvo el máster en ciencias en 1937, en la Universidad de Michigan. Este no disfrutaba con las matemáticas puras, pues señalaba frecuentemente que solo disfrutó de los cursos relacionados con la estadística.

Durante la Segunda Guerra Mundial, Dantzig dejó los estudios y pasó a trabajar de 1941 a 1946 en la llamada Combat Analysis Branch, de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, donde obtuvo reconocimientos por su labor. Su trabajo era colecciónar y analizar datos sobre misiones aéreas, efectividad de los bombardeos y pérdidas de aviones. Esta actividad se caracterizaba por el desarrollo de planes minuciosos llamados "programas".

Al final de la guerra, George pasó a la Universidad de California, en Berkeley, pero el Pentágono le hizo una oferta mejor pagada, así que se dedicó a la labor de mecanizar el proceso de planeamiento como asesor matemático en el Departamento de Defensa. En 1947, Dantzig hace su más famosa contribución: el método simplex de optimización. Este fue el resultado de una labor que buscaba simplificar los usuales métodos de planeamiento que utilizaban calculadoras de mesa. Le llamó "programación" por el término usado en el argot militar.

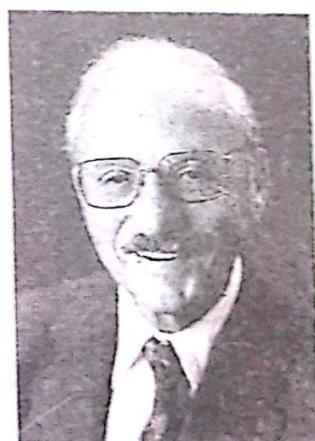
4.4.1. Teorema fundamental de la optimización

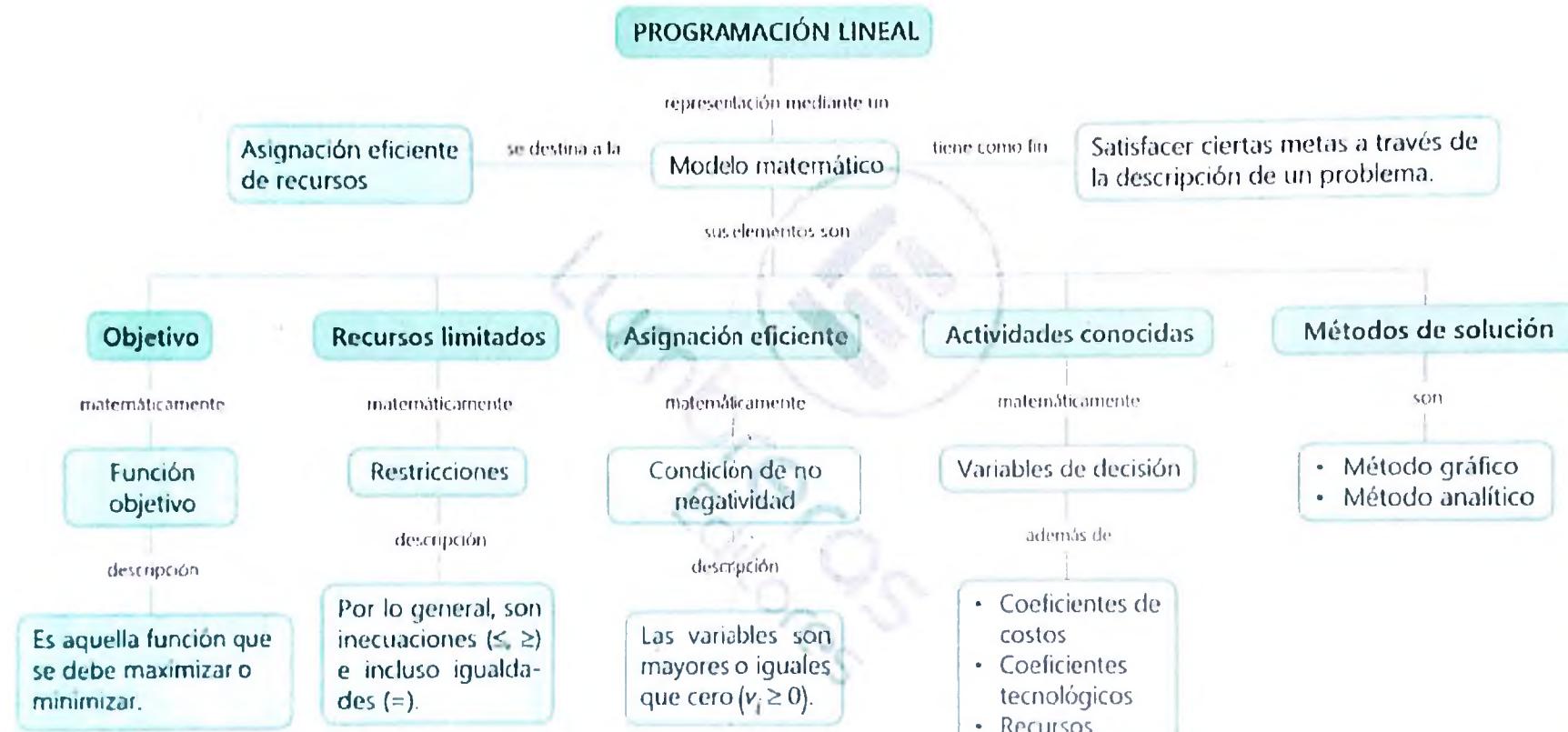
Sea S la región factible formada por las restricciones de un problema de programación lineal, entonces el máximo o mínimo de la función objetivo $f_{(x,y)}$ se alcanza en los puntos extremos.

Si hay una solución óptima, esta se encuentra en un punto extremo de la región factible.

Observación

Si hay infinitas soluciones óptimas, estas se encuentran en un lado de la región factible, incluyendo los puntos extremos.





Problema N.º 1

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

- A) (3; 2) B) (1; 5) C) (3; 7)
 D) (1; 4) E) (2; 7)

Resolución

Del dato:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 21 & (I) \\ x + y &= 5 & (II) \end{aligned}$$

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación.

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 21 \\ 3x + 3y = 15 \\ \hline \rightarrow 2x = 6 \\ x = 3 \end{array}$$

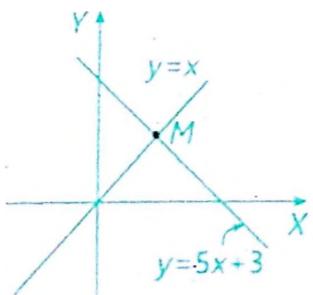
Para hallar el valor de y , reemplazamos $x=3$ en (II).

Se tiene $3+y=5$; luego, $y=2$.

Por lo tanto, la solución es (3; 2).

Problema N.º 2

Del gráfico, halle el punto M .



- A) (1; 2) B) (2; 3) C) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
 D) (4; 1) E) $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$

Resolución

Para hallar el punto M , debemos igualar las funciones:

1.^a función: $y=x$

2.^a función: $y=-5x+3$

Igualando funciones, tenemos

$$x = -5x + 3$$

$$6x = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

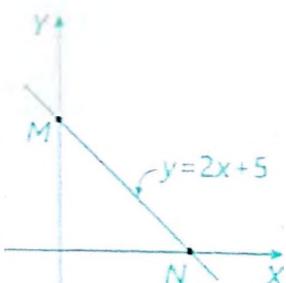
Para hallar el valor de y , reemplazamos $x = \frac{1}{2}$ en la primera función: $y = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, el punto M es $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Clave

Problema N.º 3

Del gráfico, halle los puntos M y N , respectivamente.



A) (0; 3) y $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

B) (0; 5) y $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

C) $\left(0; \frac{5}{2}\right)$ y (5; 0)

D) (0; 1) y (3; 0)

E) (1; 1) y (2; 7)

Resolución

Primero, hallaremos el punto N . Esto implica hallar el punto de corte de la función con el eje x . Reemplazamos $y=0$ en la función $y=-2x+5$.

$$0 = -2x + 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el punto N es $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Luego, hallaremos el punto M . Esto implica hallar el punto de corte de la función con el eje y .

Reemplazamos $x=0$ en la función $y=-2x+5$.

$$y = -2(0) + 5$$

$$\rightarrow y = 5$$

Por lo tanto, el punto M es $(0; 5)$.

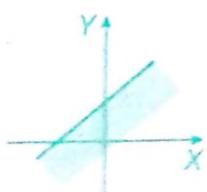
La respuesta es $(0; 5)$ y $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Clave B

Problema N.º 4

Grafique la inecuación $y \geq 3x+7$.

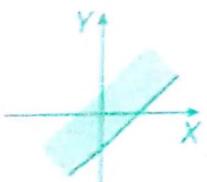
A)



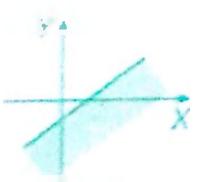
B)



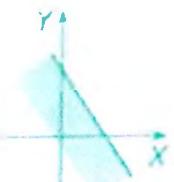
C)



D)



E)

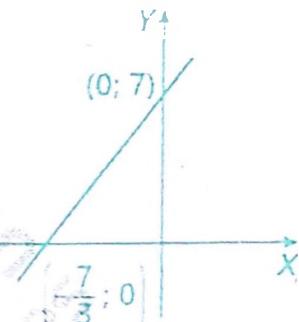
**Resolución**

Primero, graficamos la recta $y=3x+7$.

Tabulando

X	Y
0	7
$-\frac{7}{3}$	0

Ubicamos dichos puntos en el plano cartesiano y trazamos la recta, obteniendo el siguiente gráfico:



Luego, para ver qué semiplano sombreado, sustituimos, por ejemplo, el punto $(0; 0)$ en la inecuación.

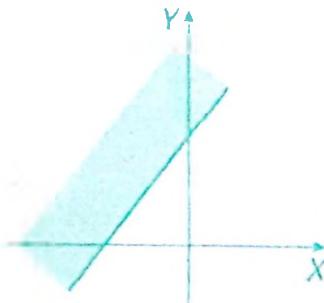
$$y \geq 3x+7$$

$$0 \geq 7$$

(no verifica)

$$\rightarrow (0; 0) \text{ (no es solución)}$$

Por lo tanto, sombreado el semiplano que no contiene al punto $(0; 0)$.

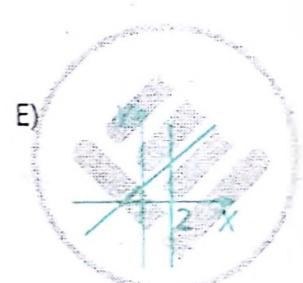
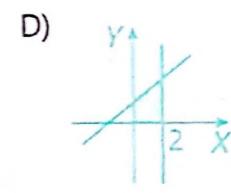
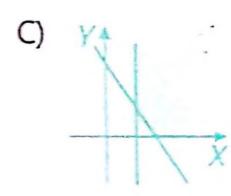
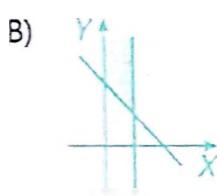
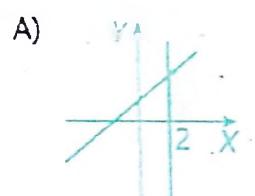


Clave B

Problema N.º 5

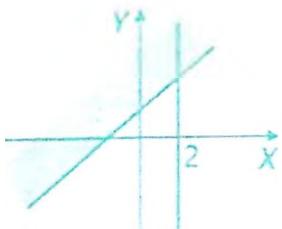
Grafe el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} y \geq 3x + 7 \\ x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Resolución**

Para graficar un sistema de inecuaciones, primero graficamos cada inecuación y luego las intersecamos.

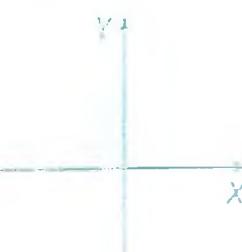
- $y \geq 3x + 7$
Su gráfica es



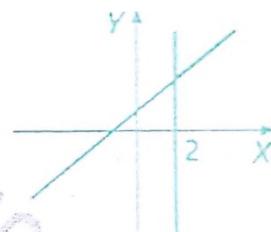
- $x \geq 2$
Su gráfica es



- $y \geq 0$
Su gráfica es



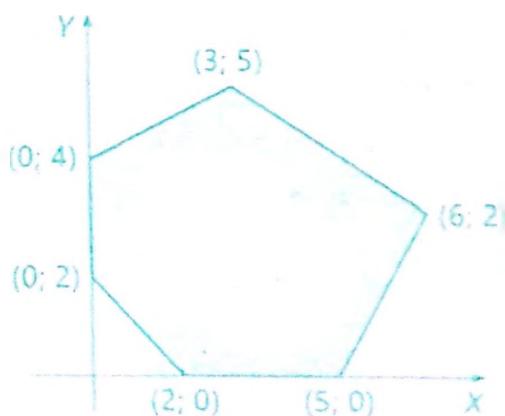
Luego, intersecamos los tres gráficos anteriores y obtenemos



Clave **E**

Problema N.º 6

Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función objetivo $C = 3x + 2y + 5$ en la región del gráfico. Dé como respuesta la suma de tales valores.



- A) 24 B) 28 C) 32
D) 36 E) 39

Resolución

Del dato, la función objetivo $C_{(x,y)}=3x+2y+5$. Recuerde que para hallar los máximos y mínimos se evalúan los puntos extremos de la región factible.

Evaluamos en

- $(0; 2)$: $C_{(0; 2)}=3(0)+2(2)+5=9$ es el mínimo valor
- $(0; 4)$: $C_{(0; 4)}=13$
- $(3; 5)$: $C_{(3; 5)}=24$
- $(6; 2)$: $C_{(6; 2)}=27$ es el máximo valor.
- $(5; 0)$: $C_{(5; 0)}=20$
- $(2; 0)$: $C_{(2; 0)}=11$

Nos piden la suma del máximo con el mínimo, entonces la respuesta es $9+27=36$.

Clave

Problema N.º 7

Determine el máximo valor de la función objetivo $Z=3x+2y$

sujeta a $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

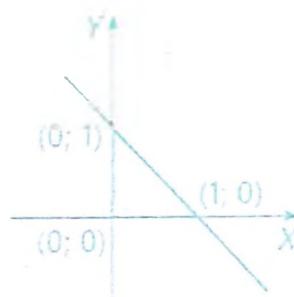
- | | | |
|-------|------|------|
| A) -2 | B) 0 | C) 2 |
| D) 3 | E) 4 | |

Resolución

Dato: función objetivo $Z=3x+2y$

Restricciones $\begin{cases} y \leq 1-x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Graficamos el sistema de inecuaciones y obtenemos



Reemplazamos los puntos del vértice en la función objetivo, es decir,

$$Z_{(1; 0)}=3(1)+2(0)=3$$

$$Z_{(0; 1)}=3(0)+2(1)=2$$

$$Z_{(0; 0)}=3(0)+2(0)=0$$

Por lo tanto, el máximo valor es 3.

Clave

Problema N.º 8

Halle la solución gráfica de las siguientes inecuaciones:

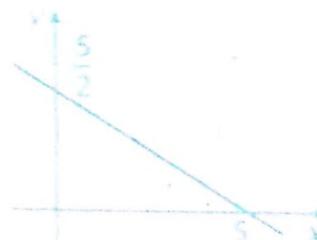
- $2y+x \geq 5$
- $2x-3y \geq -2$
- $2x+3y \geq 5$

Resolución

- $2y+x \geq 5$

Graficamos la recta de la ecuación $2y+x=5$.

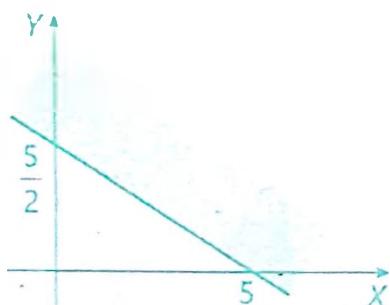
X	Y
0	$\frac{5}{2}$
5	0



Para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos despejar y .

$$2y+x \geq 5$$

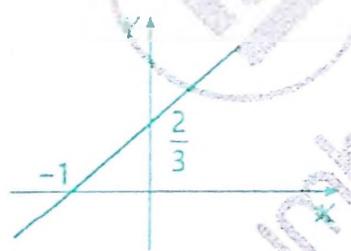
$$2y \geq 5-x \rightarrow y \geq \frac{5-x}{2}$$



$$b. \quad 2x-3y \geq -2$$

Graficamos la recta de la ecuación $2x-3y=-2$.

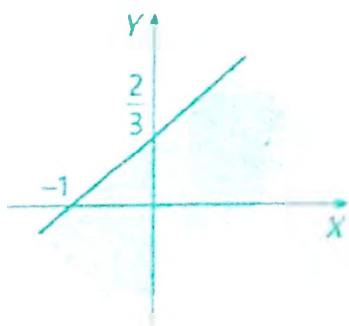
X	Y
0	$\frac{2}{3}$
-1	0



Para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos despejar y .

$$2x-3y \geq -2$$

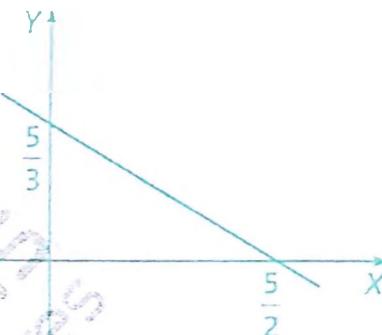
$$2x+2 \geq 3y \rightarrow \frac{2x+2}{3} \geq y$$



$$c. \quad 2x+3y \geq 5$$

Primero graficamos la recta de la ecuación $2x+3y=5$.

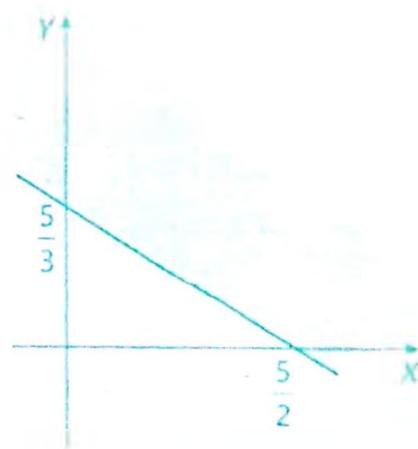
X	Y
0	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{2}$	0



Luego, para determinar la región correspondiente a la inecuación lineal, debemos despejar y .

$$2x+3y \geq 5$$

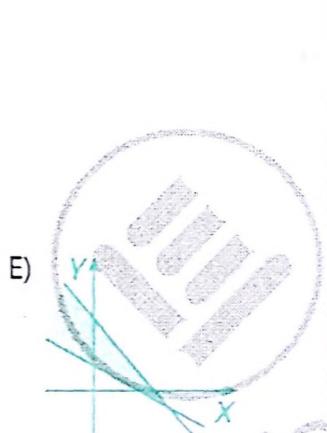
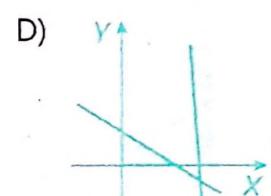
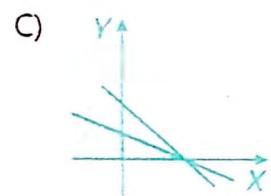
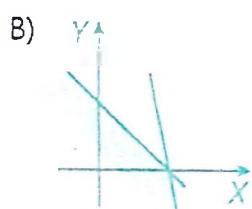
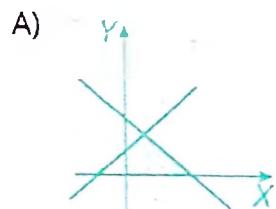
$$3y \geq 5-2x \rightarrow y \geq \frac{5-2x}{3}$$



Problema N.º 9

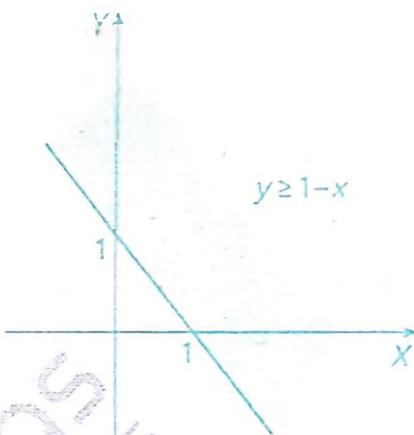
Halle la solución gráfica del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

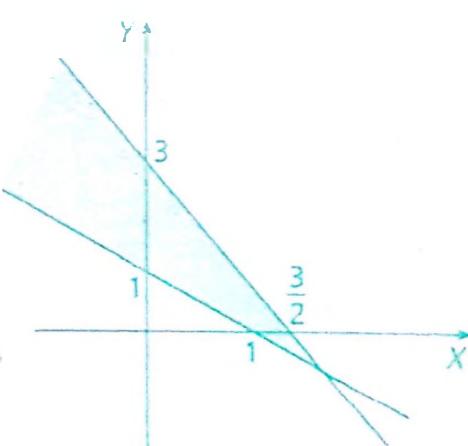


X	Y
0	1
1	0

Luego, graficamos la inecuación $x+y \geq 1$.



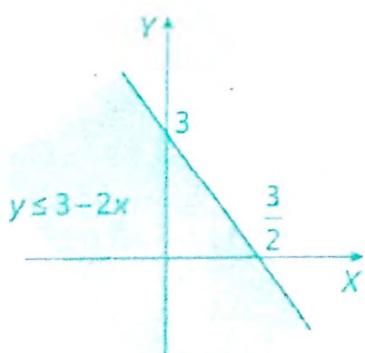
Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos las dos soluciones anteriores.

**Resolución**

Sea el sistema $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$

Primero, graficamos la inecuación $2x + y \leq 3$.

X	Y
0	3
$\frac{3}{2}$	0



Clave **E**

Problema N.º 10

Halle la solución gráfica del sistema.

$$\begin{cases} 2x - y > 1 & \text{(I)} \\ 5x + 10y \leq 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

A)



B)



C)



D)



E)



Luego, graficamos la inecuación (II).

$$5x + 10y \leq 5 \rightarrow x + 2y \leq 1$$

x	y
0	$\frac{1}{2}$
1	0



Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos las dos soluciones anteriores.



Clave



x	y
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

Resolución

Primero, graficamos la inecuación (I), es decir,

$$2x - y > 1.$$



Problema N.º 11

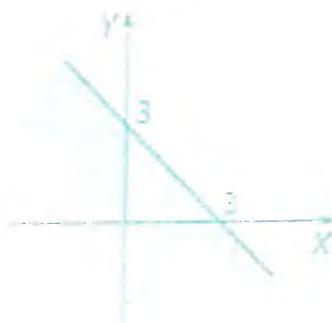
Halle la solución gráfica del sistema.

$$\begin{cases} y \leq x+2 \\ y \leq -x+3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Luego, graficamos la inecuación $y \leq -x+3$.

x	y
0	3
3	0



Después, graficamos las inecuaciones

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0$$



Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos los tres gráficos anteriores.

0	2
-2	0

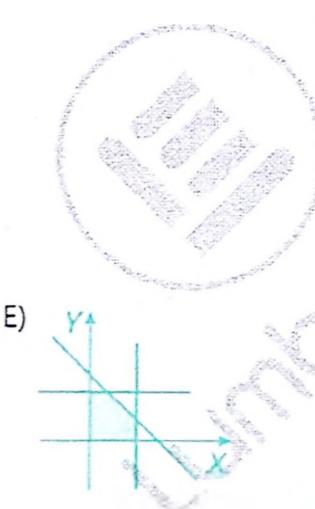
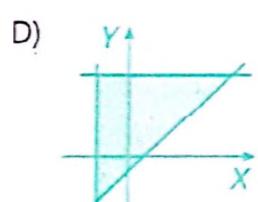
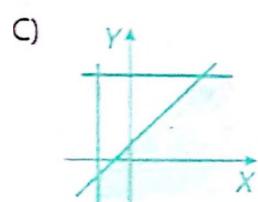
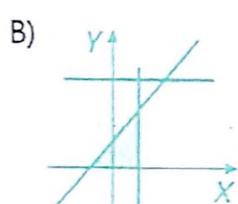
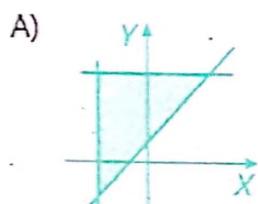


Clave

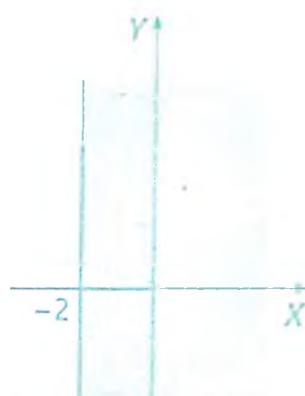
Problema N.º 12

Señale cuál es la región que mejor represente al sistema de inecuaciones.

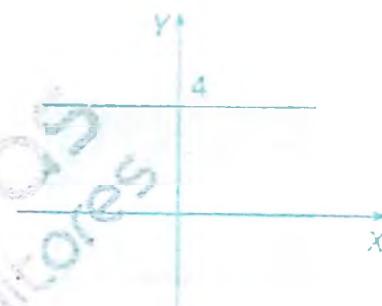
$$\begin{cases} y - 2x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$



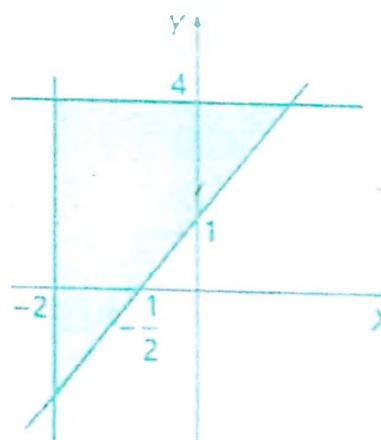
Luego, graficamos la inecuación $x \geq -2$.



Después, graficamos la inecuación $y \leq 4$.

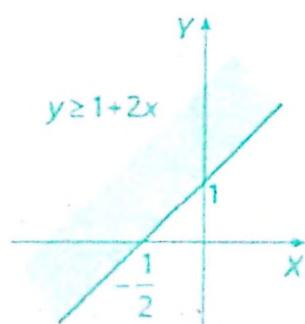


Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos los tres gráficos anteriores.



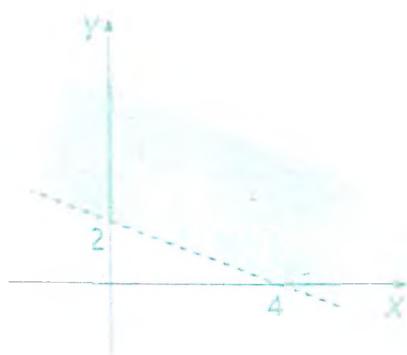
Clave A

0	1
$-\frac{1}{2}$	0



Problema N.º 13

Indique la inecuación cuya solución es el siguiente semiplano:



- A) $y > \frac{2-x}{2}$ B) $y \geq 3x-2$ C) $2y > -x+1$
 D) $y > \frac{x}{2} + 2$ E) $y + \frac{x}{2} > 2$

Resolución

Primero hallamos la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4; 0)$ y $(0; 2)$.

Sea $y = ax + b$ (ecuación de la recta).

X	Y
4	0
0	2

$$y = ax + b \rightarrow 0 = 4a + b \quad (*)$$

$$y = ax + b \rightarrow 2 = a \cdot 0 + b$$

$$\rightarrow b = 2$$

En (*)

$$4a + 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación de la recta es

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Luego, del gráfico, la región sombreada está encima de la recta, y no toma la frontera; entonces

$$y > -\frac{1}{2}x + 2$$

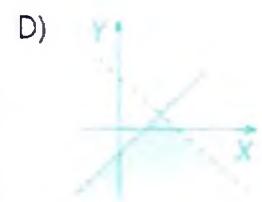
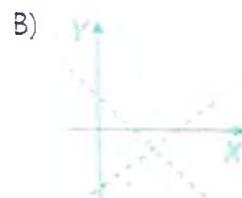
$$\therefore y + \frac{x}{2} > 2$$

Clave **E**

Problema N.º 14

Determine gráficamente el conjunto solución del sistema.

$$\begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y < 3 \end{cases}$$

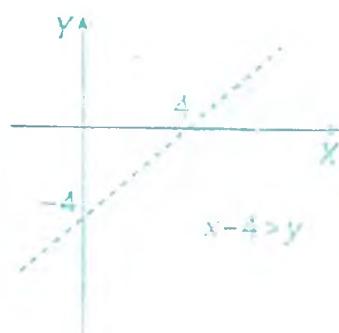


Resolución

Primero, graficamos la inecuación $x-y > 4$.

- $x-y=4$

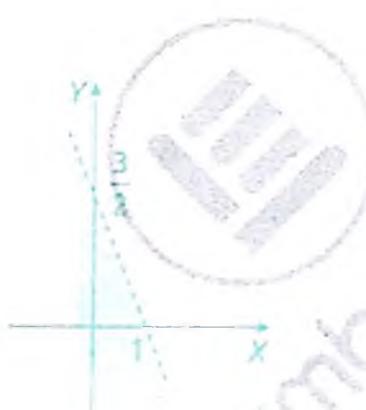
X	Y
0	-4
4	0



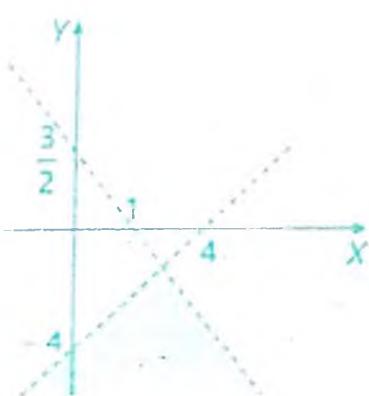
Luego, graficamos la inecuación $3x+2y < 3$.

- $3x+2y=3$

X	Y
0	$\frac{3}{2}$
1	0



Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos los dos gráficos anteriores.



Clave **B**

Problema N.º 15

Indique la inecuación cuya solución es el siguiente semiplano:

A) $y > \frac{x}{3} - 1$

B) $3y > x - 1$

C) $2y < \frac{x}{3} - 1$

D) $3y < x - 3$

E) $y \geq \frac{x-1}{3}$

**Resolución**

Primero, hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3; 0)$ y $(0; -1)$.

Sea $y=ax+b$ (ecuación de la recta).

X	Y
3	0
0	-1

$$y=ax+b \rightarrow 0=3a+b \quad (*)$$

$$y=ax+b \rightarrow -1=3 \cdot 0+b$$

$$\rightarrow b=-1$$

En (*)

$$0=3a-1 \rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Luego, la ecuación de la recta es $y=\frac{1}{3}x-1$.

Entonces, en el gráfico, la región sombreada está encima de la recta y no toma la frontera.

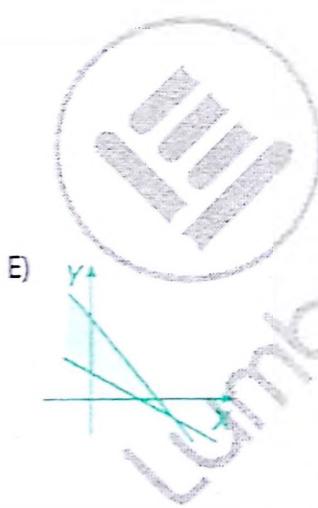
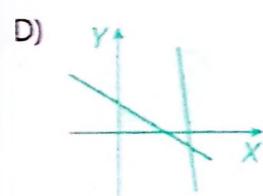
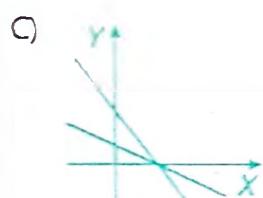
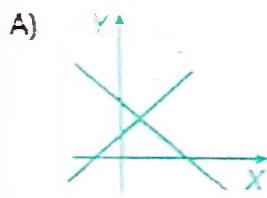
$$\therefore y > \frac{x}{3} - 1$$

Clave **A**

Problema N.º 16

Halle la solución gráfica del sistema.

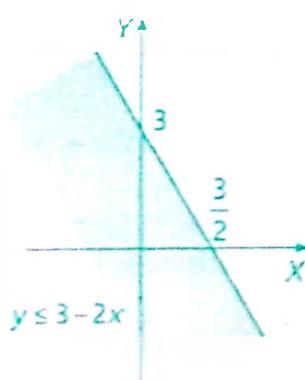
$$\begin{cases} 2x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$$

**Resolución**

Primero graficamos la inecuación $2x+y \leq 3$.

- $2x+y=3$

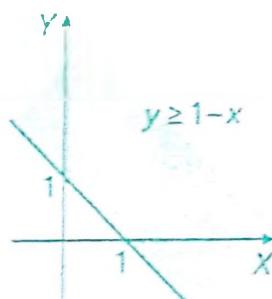
X	Y
0	3
$\frac{3}{2}$	0



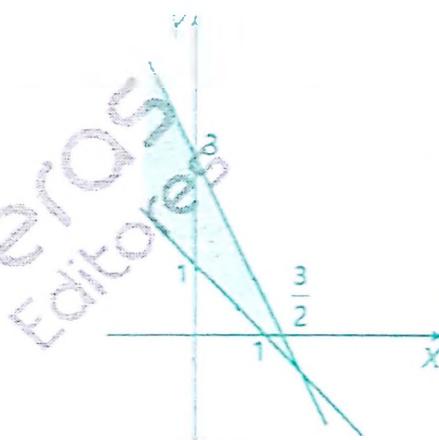
Luego, graficamos la inecuación $x+y \geq 1$.

- $x+y=1$

X	Y
0	1
1	0



Finalmente, para hallar la solución gráfica del sistema, intersecamos los dos gráficos anteriores.



Clave

Problema N.º 17

Determine el máximo valor que asume $2x+y$ sujeta a

$$\begin{cases} y \leq x+2 \\ y \leq -x+3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 6 B) 14 C) 15
D) 20 E) 30

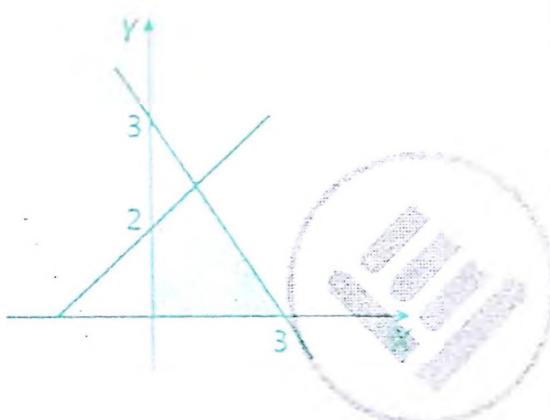
Resolución

Nos piden el máximo valor de $f_{(x,y)} = 2x + y$.

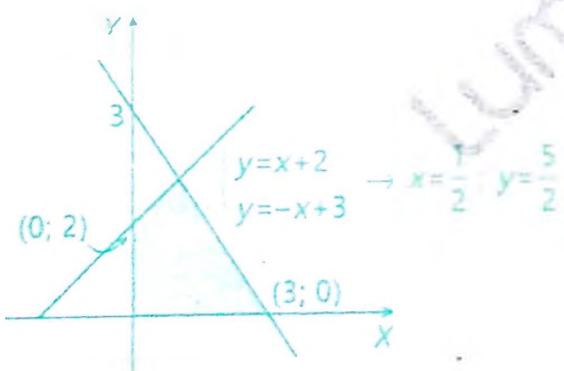
Dato: Las restricciones son

$$\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Primero graficamos las restricciones.



Luego, hallamos los vértices y obtenemos



El vértice es $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Finalmente, en la función objetivo $f_{(x,y)} = 2x + y$, evaluamos los puntos de los vértices.

- $f_{(x,y)} = 2x + y$
- $f_{(0,2)} = 2(0) + 2 = 2$
- $f_{(3,0)} = 2(3) + 0 = 6$

• $f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

∴ $f_{\max} = f_{(3,0)} = 2(3) + 0 = 6$

Clave

Problema N.º 18

Determine el máximo valor de $f_{(x,y)} = 4x + 3y$

sujeta a $\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

- A) 8 B) 9 C) 69
D) 10 E) 13,28

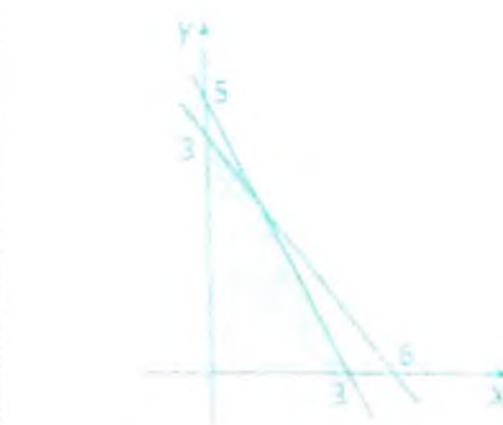
Resolución

Nos piden maximizar $f_{(x,y)} = 4x + 3y$.

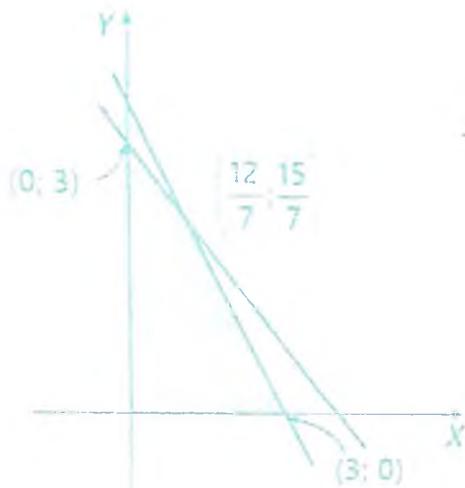
Dato: Las restricciones son

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Primero graficamos las restricciones.



Luego, hallamos los vértices.



Finalmente, evaluamos en los vértices.

- $f_{(3, 0)} = 4(3) + 3(0) = 12$
- $f_{(0, 3)} = 4(0) + 3(3) = 9$
- $f_{(\frac{12}{7}, \frac{15}{7})} = 4\left(\frac{12}{7}\right) + 3\left(\frac{15}{7}\right) = 13,28$

Por lo tanto, el máximo valor es 13,28.

Clave E

Problema N.º 19

Halle el máximo valor de $z = 3x + 6y$, tal que

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ 2x + \frac{y}{2} \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

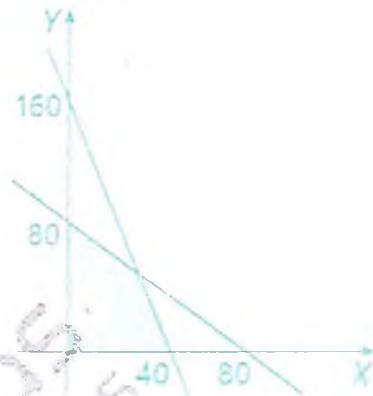
- A) 200 B) 300 C) 400
D) 480 E) 600

Resolución

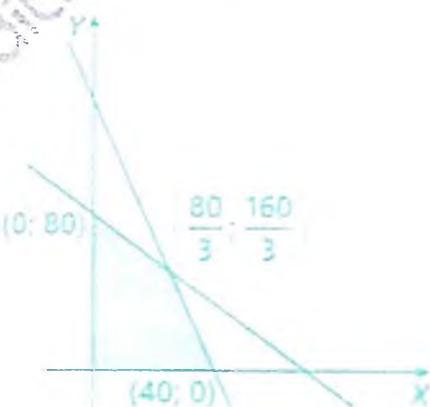
Nos piden maximizar $z = 3x + 6y$.

Dato: $\begin{cases} x + y \leq 80 \\ 4x + y \leq 160 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Primero, graficamos las restricciones.



Luego, hallamos los vértices.



Finalmente, evaluamos en los vértices.

- $z = 3(40) + 6(0) = 120$
- $z = 3(0) + 6(80) = 480$
- $z = 3\left(\frac{80}{3}\right) + 6\left(\frac{160}{3}\right) = 80 + 320 = 400$

$$\therefore z_{\max} = z(0, 80) = 480$$

Clave D

Problema N.º 20

Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana; y un vestido requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Calcule el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden al mismo precio.

- A) 10 trajes y 20 vestidos
- B) 20 trajes y 10 vestidos
- C) 30 trajes y 20 vestidos
- D) 20 trajes y 30 vestidos
- E) 20 vestidos y 30 trajes

Resolución

Datos:

Sean

- x : n.º de trajes
- y : n.º de vestidos

Además

	Trajes	Vestidos	
Algodón	1	2	80
Lana	3	2	120

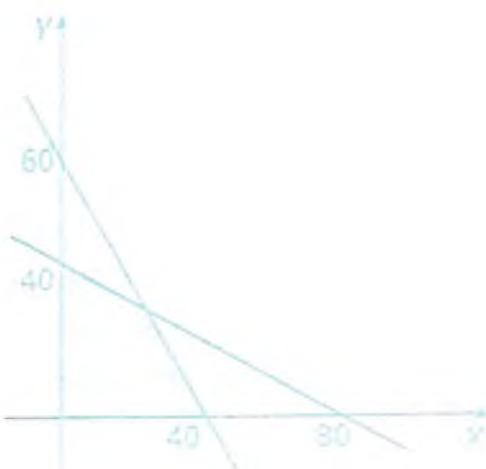
De la tabla, tenemos

$$\begin{cases} x+2y \leq 80 \\ 3x+2y \leq 120 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

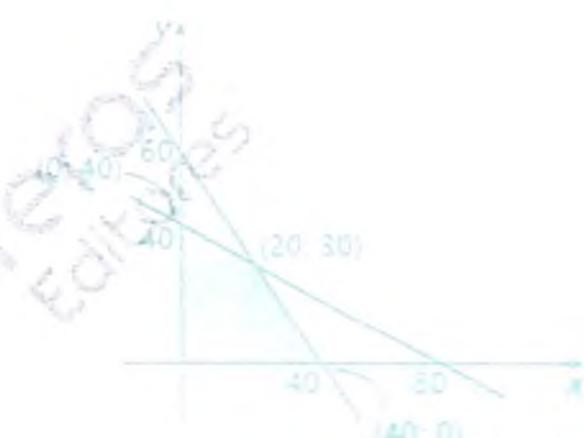
Sea k el precio de cada prenda, entonces la función objetivo será

$$f_{(x,y)} = k(x+y)$$

Primero, graficamos las restricciones.



Luego, hallamos los vértices.



Finalmente, evaluamos en los vértices.

Alcanza su máximo valor en $x=20$; $y=30$, pues

- $f_{(x,y)} = k(x+y)$
- $f_{(0,40)} = 40k$
- $f_{(40,0)} = 40k$
- $f_{(20,30)} = 50k$

Por lo tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

Clave



Problema N.º 21

Una editorial planea utilizar una sección de planta para producir dos libros de textos. La utilidad unitaria es de S/.2 para el libro 1 y de S/.3 para el libro 2. El texto 1 requiere 4 h para su impresión y 6 h para su encuadernación. El texto 2 requiere de 5 h para su impresión y 3 h para su encuadernación. Si se dispone de 200 h para imprimir y 210 h para encuadernar, determine la máxima utilidad que se puede obtener.

- A) S/.70 B) S/.110 C) S/.120
 D) S/.140 E) S/.160

Resolución

Nos piden la máxima utilidad que puede obtenerse.

Datos:

	Texto 1	Texto 2	Total
IMPRESIÓN	4	5	200
ENCUADERNACIÓN	6	3	210

Sean

- x : número de unidades del texto 1
- y : número de unidades del texto 2

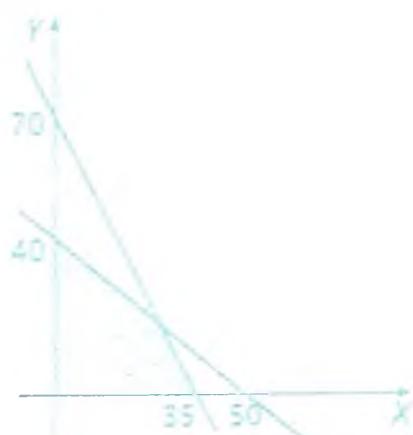
Restricciones

$$\begin{cases} 4x + 5y \leq 200 \\ 6x + 3y \leq 210 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es

$$U_{(x,y)} = 2x + 3y$$

Primero graficamos las restricciones.



Luego, ubicamos los vértices de la región factible.



Después, evaluamos en los vértices.

- $U_{(x,y)} = 2x + 3y$
- $U_{(35,0)} = 70$
- $U_{(0,40)} = 120$
- $U_{(25,20)} = 50 + 60 = 110$

Por lo tanto, la máxima utilidad es S/.120.

Clave

Problema N.º 22

Trace la región S definida por las restricciones dadas. Halle el valor mínimo de C en S .

$$C = 3x + 6y$$

$$S = \begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ 2x + 5y \geq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 12 B) 16 C) 19
 D) 21 E) 19,2

Resolución

Nos piden el mínimo de $3x + 6y$.

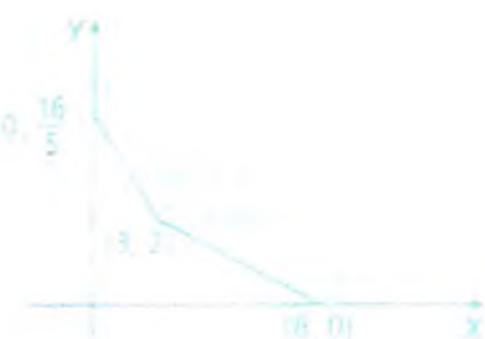
Dato: Las restricciones son

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \rightarrow y \geq 4 - \frac{2}{3}x \\ 2x + 5y \geq 16 \rightarrow y \geq \frac{16}{5} - \frac{2}{5}x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Primero, graficamos las restricciones.



Luego, hallamos los vértices.



Finalmente, evaluamos los vértices en

- $C_{(0,0)} = 3(0) + 6(0) = 0$
- $C_{(8,0)} = 3(8) + 6(0) = 24$
- $C_{(3,2)} = 3(3) + 6(2) = 21$
- $C_{\left(0,\frac{16}{5}\right)} = 3(0) + 6\left(\frac{16}{5}\right) = 19,2$

Por lo tanto, el valor mínimo es 19,2.

Clave E

Problema N.º 23

Halle el valor mínimo de la función objetivo

$$f_{(x,y)} = 2x + 6y, \text{ sujeta a las restricciones}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 15 B) 16 C) 18
 D) 21 E) 24

Resolución

Nos piden el máximo de $f_{(x,y)} = 2x + 6y$.

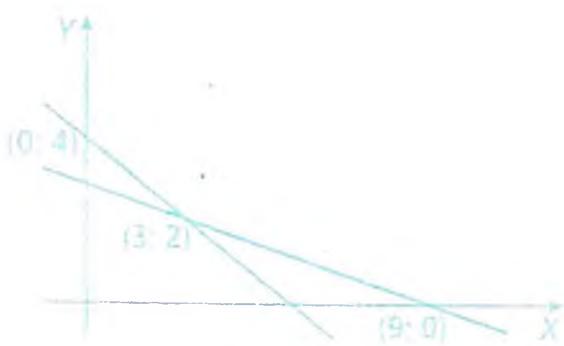
Dato: Las restricciones son

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Primero, graficamos las restricciones.



Luego, ubicamos los vértices de la región factible.



Finalmente, evaluamos en los vértices.

- $f_{(0; 4)} = 24$
- $f_{(3; 0)} = 18$
- $f_{(3; 2)} = 18$

Por lo tanto, el mínimo de f es 18.



Problema N.º 24

Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 soles por cada impreso repartido; y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 soles por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es lo siguiente: ¿cuántos impresos habrá que repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

- 50 impresos tipo A y 100 tipo B
- 110 impresos tipo A y 100 tipo B
- 100 impresos tipo A y 50 tipo B
- 30 impresos tipo A y 20 tipo B
- 0 impresos tipo A y 50 tipo B

Resolución

Sean

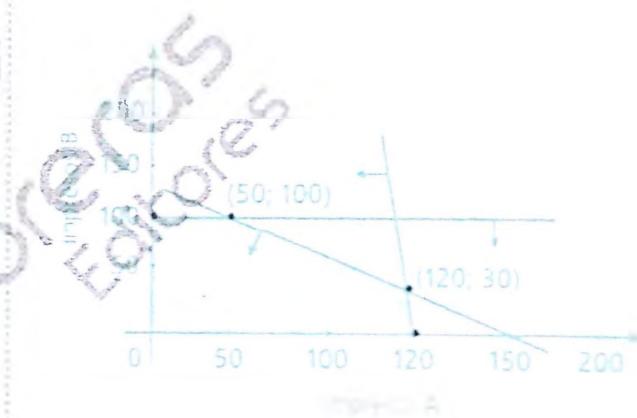
- $x=n.º$ de impresos diarios tipo A repartidos
- $y=n.º$ de impresos diarios tipo B repartidos

La función objetivo es $f_{(x, y)} = 5x + 7y$.

Dato: Las restricciones son

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica es



Evaluamos los puntos del vértice en la función objetivo:

- $f_{(100; 0)} = 7 \cdot 100 = 700$
- $f_{(50; 100)} = 5 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 950$ máximo
- $f_{(120; 30)} = 5 \cdot 120 + 7 \cdot 30 = 810$
- $f_{(120; 0)} = 5 \cdot 120 = 600$

Debe repartir 50 impresos tipo A y 100 tipo B para una ganancia máxima diaria de 950 soles.

Clave

Problema N.º 25

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo II con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo I es de 10 soles y el del tipo II es de 30 soles.

¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo? Dé como respuesta el costo mínimo.

- A) 100 soles
- B) 40 soles
- C) 90 soles
- D) 50 soles
- E) 110 soles

Resolución

Sean

- x : las unidades que se compran de tipo I
- y : las unidades que se compran de tipo II

Resumamos los datos en una tabla.

Comprarse	UNIDADES DE SUSTANCIA A		UNIDADES DE SUSTANCIA B		Precio
	Tipo I	Tipo II			
x	x	x	x	$10x$	
y		$5y$	y	$30y$	
			$x+5y$	$5x+y$	$10x+30y$

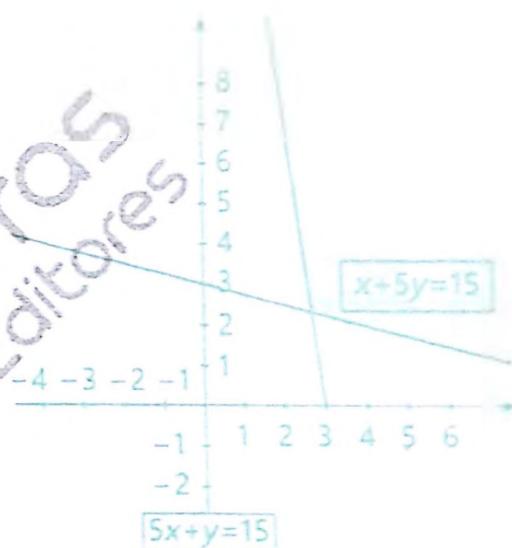
De la tabla obtenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x+5y \geq 15 \\ 5x+y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $z=10x+30y$.

Debemos hacer mínima esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Graficamos las restricciones.



El mínimo se alcanza en el punto de intersección de

$$\begin{cases} x+5y=15 \\ 5x+y=15 \end{cases}$$

es decir, en $(2,5; 2,5)$.

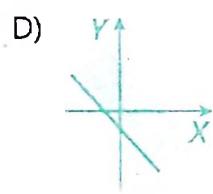
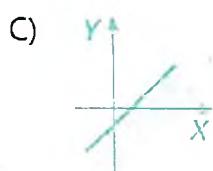
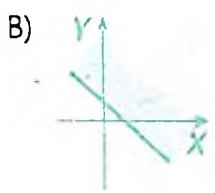
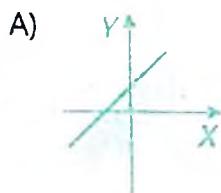
Por tanto, hay que comprar 2,5 de tipo I y 2,5 de tipo II.

El precio será de $z=10(2,5)+30(2,5)=100$ soles.

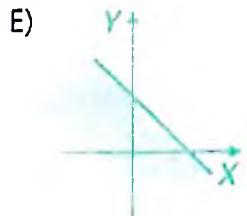
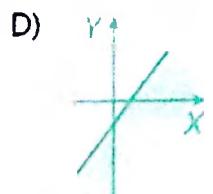
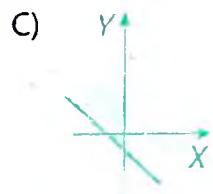
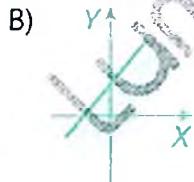
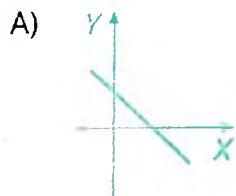
Clave A

PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Halle la región del plano determinada por la inecuación $y-x \leq 3$.

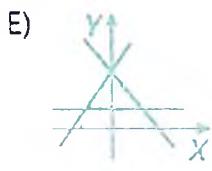
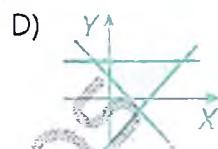
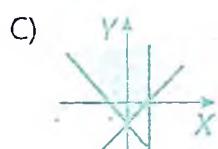
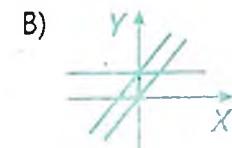


2. Halle la región del plano determinada por la inecuación $x+2y \leq 16$.



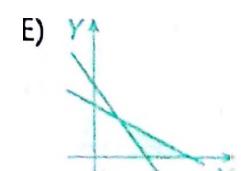
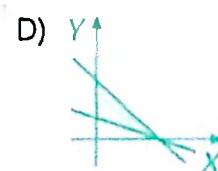
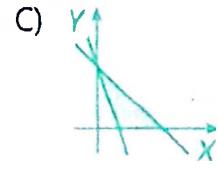
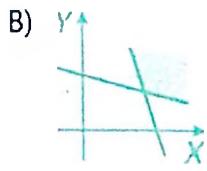
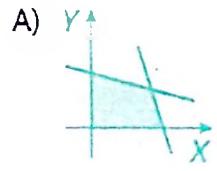
3. Represente gráficamente el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6x-y \leq 1 \\ x+y \geq -1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$



- Represente gráficamente el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y \leq 9 \\ 2x+y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



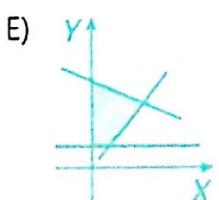
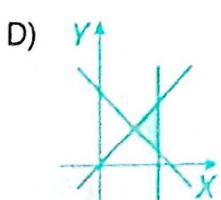
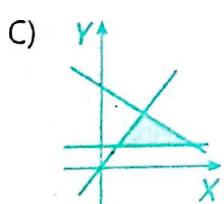
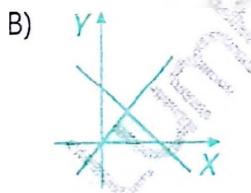
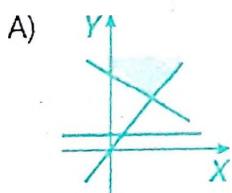
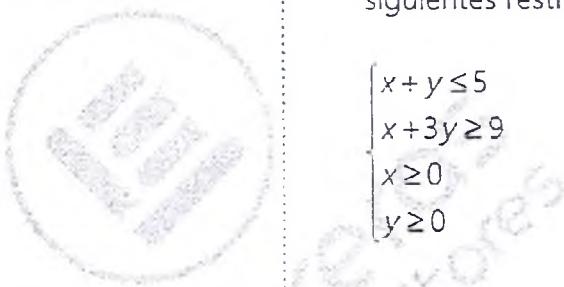
5. Determine el máximo valor de la función $f_{(x,y)}=x+3y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$

- A) 1 B) 2 C) 7
D) 4 E) 5

6. Represente la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 3 \\ x + y \leq 10 \\ 2y \geq 3x \end{cases}$$



7. Maximice la función $f_{(x,y)}=25x+20y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ 3y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 950 B) 2900 C) 2700
D) 2850 E) 1425

8. Minimice la función $f_{(x,y)}=2x+3y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 15 B) 12 C) 9
D) 3 E) 1

9. Represente la región limitada por las siguientes inecuaciones. Dé como respuesta el área de la región limitada.

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

- A) 2250 B) 1440 C) 1020
D) $\frac{81}{2}$ E) 1800

10. Maximice la función $z=3x+2y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3y \leq 24 - 2x \\ y + 2x \leq 12 \end{cases}$$

- A) 0 B) 19 C) 21
D) 25 E) 30

11. Determine el máximo valor de la función $f(x,y)=y+x$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$

- A) 2 B) 3 C) 5
D) 9 E) 20

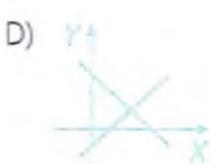
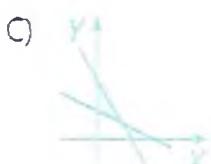
12. Maximice la función $z=3x+2y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 12 B) 20 C) 35
D) 17 E) 39

13. Halle la región del plano determinada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



14. Determine las restricciones que representan a la siguiente región factible:



A) $\begin{cases} y \leq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y \geq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} y \leq -3x + 3 \\ y \geq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} y \geq 3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ E) $\begin{cases} y \leq 3x - 3 \\ y \leq 2x - 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

15. Tenemos dos clases de mesas: una de tipo A con 2 m^2 de madera, 1 hora de trabajo y un beneficio de S/.80 cada una; y otra de tipo B con 1 m^2 de madera, 3 horas de trabajo y S/.50 de beneficio. Si hay 600 m^2 de madera y un máximo de 900 h, determine el máximo beneficio.

- A) 5000
- B) 18 000
- C) 23 000
- D) 26 400
- E) 50 000

16. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata, y se vende a 25 soles. La de tipo B se vende a 30 soles y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuál es el máximo beneficio que obtendrá?

- A) 16 00 soles
- B) 16 500 soles
- C) 17 000 soles
- D) 17 500 soles
- E) 18 000 soles

17. Determine el vértice C de la siguiente región:



- A) (0; 1)
- B) (3; 0)
- C) (4; 5)
- D) $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$
- E) $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$

18. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles, donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa, por jornada, es de 150 soles por electricista y 120 soles por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

- A) 15 electricistas y 17 mecánicos
- B) 22 electricistas y 27 mecánicos
- C) 20 electricistas y 20 mecánicos
- D) 27 electricistas y 30 mecánicos
- E) 25 electricistas y 20 mecánicos.

19. Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximice } f(x, y) = x - 2y$$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ -2x - y \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A) -8
- B) -20
- C) 0
- D) 5
- E) 20

20. Una fábrica produce polos y pantalones. Tres máquinas —de cortar, coser y teñir— se emplean en la producción. Fabricar un polo representa usar la máquina de cortar una hora; la de coser, tres horas; y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora; la de coser, una hora; y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas; la de coser once y la de cortar, siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho soles por cada polo y cinco por cada pantalón. ¿Cuál es el beneficio máximo?

- A) 40 soles
- B) 41 soles
- C) 42 soles
- D) 43 soles
- E) 44 soles



21. Una fábrica elabora dos tipos de productos; A y B. El tipo A necesita 2 obreros que trabajen un total de 20 horas para así obtener un beneficio de S/.1500 por unidad. El tipo B necesita 3 obreros que trabajen un total de 10 horas un beneficio de S/.1000 por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determine la cantidad de unidades de A y B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

- A) 6 y 21
- B) 21 y 6
- C) 35 y 12
- D) 12 y 35
- E) 5 y 9

22. Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T1 y T2, para lo cual usa tres ingredientes, A y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T1

debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C; mientras que para hacer una tarta T2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C. Si se venden las tartas T1 a 10 soles, y las tartas T2 a 23 soles, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

- A) 50 del tipo T1 y 30 del tipo T2
- B) 45 del tipo T1 y 25 del tipo T2
- C) 30 del tipo T1 y 30 del tipo T2
- D) 40 del tipo T1 y 20 del tipo T2
- E) 50 del tipo T1 y 20 del tipo T2

23. Una fábrica quiere producir bicicletas de paseo y de montaña. La fábrica dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Para construir una bicicleta de paseo se necesitan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio; y para construir una bicicleta de montaña se necesitan 2 kg de acero y otros 2 kg de aluminio. Si las bicicletas de paseo se venden a 200 dólares y las de montaña a 150 dólares, ¿cuántas bicicletas de cada tipo se deben construir para que el beneficio sea máximo?

- A) 20 bicicletas de paseo y 30 bicicletas de montaña
- B) 20 bicicletas de paseo y 40 bicicletas de montaña
- C) 25 bicicletas de paseo y 30 bicicletas de montaña
- D) 30 bicicletas de paseo y 20 bicicletas de montaña
- E) 10 bicicletas de paseo y 35 bicicletas de montaña

24. Se requiere promocionar una marca desconocida (D) de aceite, utilizando una marca conocida (C). Para ello, se hace la siguiente oferta: "Pague a solo 2,5 soles el litro de aceite C y a 1,25 soles el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más, y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D. Disponemos de un máximo de 31,25 soles". Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar?

- A) 2 litros B) 3 litros C) 4 litros
D) 5 litros E) 6 litros

25. Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar a 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A, que puede transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje, cuesta 40 000 euros; la contratación de uno del tipo B, que puede transportar a 100 personas y 15 toneladas de equipaje, cuesta 10 000 euros. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el costo sea mínimo?

- A) 4 aviones tipo A y 8 aviones tipo B
B) 5 aviones tipo A y 8 aviones tipo B
C) 4 aviones tipo A y 2 aviones tipo B
D) 6 aviones tipo A y 6 aviones tipo B
E) 7 aviones tipo A y 5 aviones tipo B

26. Un negociante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 soles. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 soles el kg y las de tipo B a 0,8 soles el kg. Sabemos que solo dispone, en su furgoneta, de espacio de transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 soles y el tipo B a 0,9 soles. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

- A) 200 kg del tipo A y 450 kg del tipo B
B) 250 kg del tipo A y 450 kg del tipo B
C) 300 kg del tipo A y 500 kg del tipo B
D) 200 kg del tipo A y 500 kg del tipo B
E) 200 kg del tipo A y 400 kg del tipo B

27. Un fabricante de pelotas obtiene una utilidad de S/.15 por cada pelota de fútbol y S/.8 por cada pelota de vóley. Para satisfacer la demanda de los distribuidores, la producción diaria de pelotas de fútbol debe ser de 10 a 30; y entre 30 y 80 pelotas de vóley. Con el fin de conservar la máxima calidad, el total de pelotas producidas no debe ser mayor de 80 diarias. ¿Cuál es la máxima utilidad que se puede obtener?

- A) S/.900
B) S/.950
C) S/.850
D) S/.800
E) S/.1000

28. Un empresario quiere invertir 100 000 soles en dos tipos de acciones: A y B. Las de tipo A tienen más riego, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal. Decide invertir como máximo 60 000 soles en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 soles en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. Si invierte 100 000 soles, ¿cuál es el beneficio anual máximo que obtendrá?

- A) 9000 soles
- B) 8800 soles
- C) 7500 soles
- D) 10 000 soles
- E) 7600 soles

29. Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 unidades de proteínas. El alimento A con tiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Si el alimento A cuesta S/.1,20 por unidad y el alimento B, S/.0,80 por unidad, ¿cuál es el costo mínimo?

- A) S/.9,5
- B) S/.9
- C) S/.8
- D) S/.8,5
- E) S/.11

30. Un ómnibus Lima-Tacna ofrece plazas para fumadores al precio de 100 soles y a no fumadores al precio de 60 soles. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador de 20 kg. Si al autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 kg, ¿cuál es el beneficio máximo?

- A) 7800 soles
- B) 8000 soles
- C) 7500 soles
- D) 10 000 soles
- E) 9000 soles

31. Las restricciones pesqueras impuestas por la Comunidad Económica Europea obligan a cierta empresa a pescar, como máximo, 2000 kilos de merluza y 2000 kilos de lenguado; además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de los 3000 kilos. Si la merluza se logra vender a 10 dólares el kilo y el lenguado a 15 dólares el kilo, ¿cuál es el máximo ingreso que se obtiene?

- A) \$40 000
- B) \$50 000
- C) \$30 000
- D) \$35 000
- E) \$18 000

32. En Ica, una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades. Halle el número de unidades de cada producto que se debe producir para alcanzar un beneficio máximo si se sabe que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 soles y cada unidad de vinagre, 2 soles.

- A) 3 de vino y 2 de vinagre
- B) 1 de vino y 2 de vinagre
- C) 4 de vino y 2 de vinagre
- D) 2 de vino y 2 de vinagre
- E) 3 de vino y 4 de vinagre

33. Una compañía fabrica mesas y sillas. Por cada silla se necesitan 20 pies de madera y 4 horas de mano de obra. Por cada mesa se necesitan 50 pies de madera y 3 horas de mano de obra. El fabricante dispone de 3300 pies de madera y de 380 horas de mano de obra. Además, obtiene una utilidad de 3 dólares por cada silla y 6 dólares por cada mesa. ¿Cuántas mesas debe fabricar para maximizar su ganancia?

- A) 15 B) 30 C) 44
D) 56 E) 40

34. Un joven reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre: La empresa A le paga 1 sol por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 2 soles por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que caben 120, y otra para los de tipo B, en la que le caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

- A) 50 soles
B) 100 soles
C) 250 soles
D) 350 soles
E) 400 soles

35. La compañía Talionia requiere producir dos clases de recuerdos de primera comunión: del tipo A y del tipo B. Cada unidad tipo A genera una ganancia de \$2, mientras que una del tipo B genera una ganancia de \$3. Para fabricar un recuerdo tipo A necesitan 2 minutos en la máquina 1 y 1 minuto en la máquina 2. Un recuerdo tipo B requiere 1 minuto en la máquina 1 y 3 minutos en la máquina 2. Hay 3 horas disponibles en la máquina 1 y 5 horas disponibles en la máquina 2 para procesar el pedido. ¿Cuántas piezas de cada tipo se deben producir para maximizar la ganancia?

- A) A=48; B=84
B) A=40; B=68
C) A=60; B=32
D) A=72; B=50
E) A=62; B=40

Claves

1	A	6	L	11	B	16	S	21	E	26	D	31
2	E	7	D	12	A	17	D	22	E	27	C	32
3	A	8	S	13	A	18	C	23	S	28	S	33
4	A	9	D	14	B	19	C	24	A	29	C	34
5	C	10	C	15	D	20	B	25	A	30	E	35

GLOSARIO

A

adición: Operación matemática en la que se unen dos o más cantidades.

álgebra: Rama de la matemática en la que se usan símbolos, letras y números para expresar relaciones entre expresiones que representan números.

B

binomio: Polinomio que consta exactamente de dos términos.

D

desigualdad: Relación entre dos números reales que permite compararlos, es decir, permite indicar cuál es mayor o menor.

divisibilidad: Un polinomio es divisible por otro si su división es exacta.

E

exponente: Es un número que indica cuántas veces debe usarse la base como factor.

I

identidad de la división: Relación que establece que el dividendo en una división es igual al producto del divisor con el cociente, sumando con el residuo.

inecuación: Desigualdad en donde hay una incógnita.

inverso multiplicativo: Si a es un número real y $a \neq 0$, entonces $1/a$ es el elemento inverso multiplicativo de a .

M

monomio: Es un polinomio de un solo término.

P

plano cartesiano: Sistema formado por dos ejes coordenados.

polinomio primo: Polinomio que no puede descomponerse como la multiplicación de al menos dos factores no constantes.

S

sistema de coordenadas cartesianas: Es un sistema gráfico que divide el plano en cuatro cuadrantes. Los puntos en el plano se identifican mediante pares ordenados.

sustracción: Es la operación matemática opuesta a la adición. El primer número de la sustracción se llama minuendo, el segundo se llama sustraendo y el resultado se llama diferencia.

T

trinomio: Es un polinomio que consta exactamente de tres términos.

V

variable: Una variable es un símbolo que representa un número de un conjunto dado de números.

BIBLIOGRAFÍA

- ACADEMIA CÉSAR VALLEJO. *Álgebra y principios del análisis*. Lima: Lumbreras Editores, 2001.
- ACADEMIA CÉSAR VALLEJO. *Compendio académico de matemática. Álgebra*. Lima: Lumbreras Editores, 2003.
- ANGEL, Allen R. *Álgebra intermedia*. México: Pearson Educación, 2008.
- ANTON, Howard. *Introducción al álgebra lineal*. México: Editorial Limusa, 2006.
- CARVALHO, P.; LIMA, E.; WAGNER, E. y A. MORGADO (2000). *La matemática de la enseñanza media* (vol. I, II y III). Lima: IMCA.
- GROSSMAN, Stanley. *Álgebra lineal*. México: McGraw Hill, 2008.
- HAEUSSLER, Ernest F. *Matemáticas para administración y economía*. México D. F.: Pearson Education, 2008.
- LAGES, Elong. *Mi profesor de matemática y otras historias*. Lima: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI, 1998.
- LARSON, Roland; HOSTETLER, Robert y Bruce EDWARDS. *Cálculo*. México: Editorial McGraw Hill, 1998.
- LEHMANN, Charles. *Álgebra*. México: Editorial Limusa, 1996.
- LEITHOLD, Louis. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (2.^a edición). México: Harla, 1994.
- POTÁPOV, M.; ALEXÁNDROV, V. y P. PASICHENKO. *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Moscú: Editorial MIR, 1980.
- SAAL, César. *Introducción al cálculo*. Lima: Editorial Gómez, 1996.
- STEWART, James y Lothar REDLIN. *Precálculo*. México: Editorial Progreso, 2007.
- SULLIVAN, Michael. *Precálculo* (4.^a edición). México: Prentice Hall, 1997.
- TSIPKIN, G. *Manual de enseñanza de la matemática media*. Moscú: Editorial MIR, 1985.
- ZILL, Dennis G. y Jacqueline M. DEWAR. *Álgebra y trigonometría* (2.^a edición). México: McGraw Hill, 1992.