СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

С. В. Сидоров[1], Т. Г. Смирнова[2], Г. В. Уткин[3]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

[1]sergey.sidorov@itmm.unn.ru, [2]tatyana.smirnova@itmm.unn.ru, [3]german.utkingu@gmail.com

Мы приводим основные свойства отношений порядка, изучаемых в курсе дискретной математики, иллюстрируя их примерами, и предлагаем несколько интересных задач.

Ключевые слова: дискретная математика, отношение порядка, частичный порядок, линейный порядок, диаграмма Хассе.

Введение

Напомним (см., например, [1, 2]), что *бинарным отношением* (или *отношением*) *на множестве* A называется любое подмножество декартова квадрата $A^2 = A\times A$. Другими словами, бинарное отношение $R \subseteq A^2$ (если R непусто) состоит из каких-то упорядоченных пар (x, y) элементов множества A. Если $(x, y) \in R$, то принято это записывать в виде xRy. Последняя запись больше соответствует «духу» понятия бинарного отношения, поскольку она более естественным образом указывает, что элемент x находится в отношении R с элементом y (более привычной и естественной является, например, запись $2 < 3$, нежели $(2, 3) \in <$). Запись $(x, y) \notin R$ равносильна записи $x\not R y$.

Если множество A конечно, то и любое отношение на нём конечно и может быть задано перечислением пар элементов, находящихся в этом отношении. В качестве примера рассмотрим отношение $<$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Это отношение можно задать как множество пар $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Одним из наглядных способов представления бинарного отношения R на множестве A является *граф отношения*. Это ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества A, а рёбра задаются элементами отношения R. Вершины обычно изображаются кружками или точками. Если xRy, то из вершины x проводится дуга, направленная к вершине y. На рисунке 1 изображён граф рассмотренного выше отношения $<$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

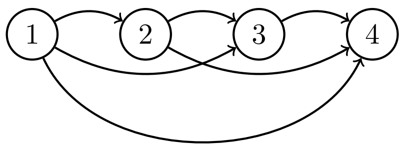

Рис. 1. Граф отношения $<$

В приложениях часто встречаются бинарные отношения со специальными свойствами. Ниже перечислены важнейшие типы бинарных отношений.

Определение 1. Отношение $R \subseteq A^2$ называется *рефлексивным*, если xRx для любого $x \in A$.

Определение 2. Отношение $R \subseteq A^2$ называется *симметричным*, если для любых $x, y \in A$ из условия xRy следует yRx, или более формально,

$$\forall x, y \in A \ \ (xRy \Rightarrow yRx).$$

Определение 3. Отношение $R \subseteq A^2$ называется *антисимметричным*, если для любых $x, y \in A$ из одновременного выполнения условий xRy и yRx следует $x = y$, или более формально,

$$\forall x, y \in A \ \ (xRy \text{ и } yRx) \Rightarrow (x = y).$$

Определение антисимметричности можно переписать и по-другому:

$$\forall x, y \in A \ \ (x \neq y) \Rightarrow (x\not{R}y \text{ или } y\not{R}x).$$

Определение 4. Отношение $R \subseteq A^2$ называется *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in A$ из одновременного выполнения условий xRy и yRz следует xRz, или более формально,

$$\forall x, y, z \in A \ \ (xRy \text{ и } yRz) \Rightarrow xRz.$$

В приведённых определениях встречается знак импликации $\Rightarrow$ и логические связки «и», «или». Зачастую студенты испытывают трудности, сталкиваясь с подобной математической символикой, поскольку не владеют в нужном объёме знаниями в области математической логики. А эти знания абсолютно необходимы для правильного понимания математических определений и доказательств различных фактов. Студентам бывает непросто осознать, когда сложносочинённые математические высказывания являются истинными, а когда ложными, исходя из истинностных значений входящих в них более простых высказываний.

Типичным примером подобного рода, с которым год из года приходится сталкиваться, является импликация $U \Rightarrow V$ высказываний U («посылка») и V («заключение»). Математическая логика в некоторых моментах кажется контринтуитивной и противоречащей здравому смыслу, например, $(0 \Rightarrow 1) = 1$, т. е. «из лжи следует истина», или $(0 \Rightarrow 0) = 1$, т. е. «из лжи следует ложь». Ниже приведены таблицы истинности высказываний $U \Rightarrow V$ и $(U \wedge V) \Rightarrow W$ (которые, например, входят в определения симметричных, антисимметричных и транзитивных бинарных отношений).

U	V	$U \Rightarrow V$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

U	V	W	$(U \wedge V) \Rightarrow W$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Таблица 1. Таблицы истинности высказываний $U \Rightarrow V$ и $(U \wedge V) \Rightarrow W$

Для того, чтобы студентам это осознать, а не принимать как непознаваемую данность, можно приводить примеры, когда из ложной посылки с помощью правил логического вывода можно доказать как истинное, так и ложное заключение. Мы не будем здесь приводить примеры такого типа, а ограничимся лишь одним забавным аналогом примера, который часто приводит в своих лекциях А. М. Райгородский (см. [3, стр. 105]). Утверждение «все крокодилы в реке Волга имеют красный цвет» разумеется истинно, поскольку и посылка «крокодил находится в реке Волга», и заключение «крокодил имеет красный цвет» ложны.

После этого уже не должно составлять труда уяснить, что, например, бинарное отношение $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ на множестве $\{1,2,3\}$ является и рефлексивным, и симметричным, и антисимметричным, и транзитивным.

Кроме того, является полезным дать студентам задание записать отрицание какого-нибудь определения. Например, записать определение неантисимметричного или нетранзитивного бинарного отношения.

Отношение $R \subseteq A^2$ не является *антисимметричным*, если

$$\exists x, y \in A \;\; (x \neq y \text{ и } xRy \text{ и } yRx).$$

Отношение $R \subseteq A^2$ не является *транзитивным*, если

$$\exists x, y, z \in A \;\; (xRy \text{ и } yRz \text{ и } x\not{R}z).$$

1. Отношения порядка. Частичный и линейный порядки

Определение 5. Отношение $R \subseteq A^2$ называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. При этом говорят, что R — порядок на A и (A, R) — упорядоченное множество.

Если R — порядок на A и xRy, то говорят, что элемент x *предшествует* элементу y (или x *не превосходит* y). Элементы x и y *сравнимы*, если выполняется xRy или yRx.

Определение 6. Порядок $R \subseteq A^2$ называется *линейным*, если $\forall x, y \in A$ $(xRy$ или $yRx)$, т.е. все элементы множества A сравнимы. Порядок $R \subseteq A^2$ называется *частичным*, если $\exists x, y \in A$ $(x\not{R}y$ и $y\not{R}x)$, т.е. существуют несравнимые элементы.

Пример 1. Рассмотрим примеры линейных и частичных порядков.

1. Отношение равенства $=$ на любом множестве (частичный порядок).

2. Отношения $\leqslant$ или $\geqslant$ на числовых множествах $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ (линейный порядок).

3. Отношение делимости[1] $\mid$ на множестве $\mathbb{N}$ или на любом подмножестве $A \subseteq \mathbb{N}$ (частичный порядок на $\mathbb{N}$).

4. Отношение включения $\subseteq$ на булеане 2^U или на любом семействе S подмножеств множества U (частичный порядок на 2^U, если $|U| \geqslant 2$).

Пример 2. Пусть на множестве A задан *линейный* порядок, который в этом примере будем обозначать символом $\leqslant$. Зададим при этом порядки на множестве A^n двумя принципиально разными способами.

1. *Покомпонентный порядок* $\leqslant_n$ на A^n :

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant_n (y_1, \ldots, y_n) \iff x_i \leqslant y_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2. *Лексикографический порядок*[2] $\preceq$ на A^n :

$$(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 < y_1 \text{ или } \exists k, \begin{cases} x_1 = y_1, \\ \ldots \\ x_k = y_k, \\ x_{k+1} < y_{k+1}. \end{cases}$$

Легко проверить, что покомпонентный порядок — частичный (если $n \geqslant 2$ и $|A| \geqslant 2$), а лексикографический порядок — линейный.

Заметим, что если $A = \{0, 1\}$, то отношение покомпонентного порядка $\leqslant_n$ на множестве двоичных строк A^n можно проинтерпретировать как отноше-

[1] Отношение делимости задаётся следующим образом: x *делит* y (или y *делится на* x), если существует такое целое k, что $y = kx$. Это отношение обозначается так: $x \mid y$.

[2] Здесь запись $a < b$ означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$.

ние включения на n-элементном множестве $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, если каждому подмножеству $X \subseteq U$ поставить в соответствие его *характеристический вектор* $\chi(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$, где

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in X, \\ 0, & \text{если } u_i \notin X. \end{cases}$$

Пусть X и Y — подмножества в универсе U и $\chi(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\chi(Y) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда

$$X \subseteq Y \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(X) \leqslant_n \chi(Y).$$

2. Диаграмма Хассе

Определение 7. Пусть $R \subseteq A^2$ — порядок на множестве A и $x, y \in A$, $x \neq y$. Говорят, что элемент x *непосредственно предшествует* элементу y и пишут xR^*y, если

$$xRy \text{ и } \nexists z,\ z \neq x,\ z \neq y,\ (xRz \text{ и } zRy).$$

Отношение R^* называется *отношением непосредственного предшествования.*

Пример 3. Рассмотрим упорядоченное множество $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. Тогда элемент $x \in \mathbb{Z}$ непосредственно предшествует элементу $x+1$, т. е. $x \leqslant^* x+1$.

Совершенно другая ситуация будет для упорядоченного множества $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. В этом случае $\leqslant^* = \varnothing$, поскольку если $x \leqslant y$, то $x \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y$.

Определение 8. Пусть R — порядок на A и $x, y \in A$, $x \neq y$, xRy. Последовательность попарно различных элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ — *цепочка* между x и y, если $z_1 = x$, $z_n = y$, $z_k R z_{k+1}$ для $k = 1, \ldots, n-1$.

Теорема 1. *Пусть R — порядок на конечном множестве A; $x, y \in A$, $x \neq y$. Тогда*

$$xRy \Longleftrightarrow \exists \text{ цепочка } z_1, z_2, \ldots, z_n \in A \text{ между } x \text{ и } y \text{ такая, что}$$

$$z_k R^* z_{k+1} \text{ для } k = 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Следует из транзитивности отношения R.

($\Rightarrow$) Множество A конечное, поэтому существует лишь конечное число цепочек между x и y. Выберем среди всех таких цепочек цепочку максимальной длины

$$x = z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = y.$$

Если таких цепочек несколько, то выберем любую из них. Докажем, что эта цепочка и есть искомая. Предположим противное, что существует такое $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, что $z_k \cancel{R^*} z_{k+1}$. Это значит, что $z_k R z_{k+1}$, но элемент z_k не является непосредственным предшественником элемента z_{k+1}, т. е. $\exists w \in A$, $w \neq z_k$, $w \neq z_{k+1}$, $z_k R w$ и $w R z_{k+1}$. Но тогда мы получили цепочку $z_1, \ldots, z_k, w, z_{k+1}, \ldots, z_n$ длины $n+1$ между x и y. Противоречие. ∎

Эта теорема показывает, что отношение непосредственного предшествования R^* полностью определяет исходный порядок R на конечном множестве A.

Граф отношения R^* — *диаграмма Хассе*[3] для порядка R. Вершины диаграммы соответствуют элементам множества A, и если xR^*y, то вершина x помещается ниже вершины y и соединяется с ней линией (неориентированным ребром), а не дугой. По диаграмме Хассе можно однозначно восстановить граф исходного отношения порядка.

Пример 4. Задан линейный порядок $(A, \leqslant)$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$. На рисунке 2 построены его граф и диаграмма Хассе.

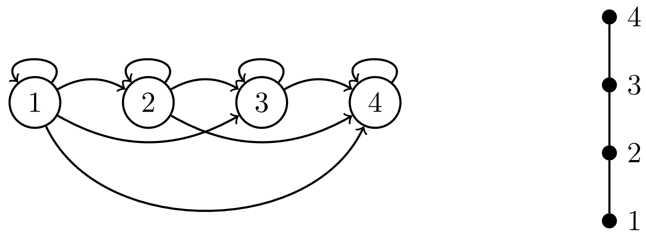

Рис. 2. Граф линейного порядка $\leqslant$ (слева) и его диаграмма Хассе (справа)

Пример 5. На рисунке 3 построены граф и диаграмма Хассе для упорядоченного множества $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$.

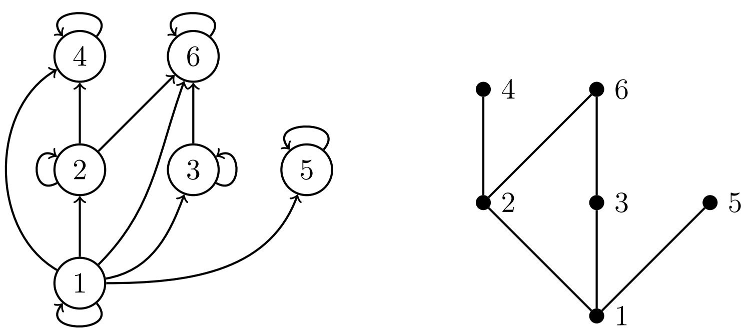

Рис. 3. Граф частичного порядка | (слева) и его диаграмма Хассе (справа)

[3]Хельмут Ха́ссе (1898–1979) — немецкий математик. Родился в г. Кассель, Германия. После окончания старшей школы служил в военно-морском флоте. После службы начал учёбу в Гёттингенском университете в 1918 году, а в 1920 году переехал в Марбург, чтобы учиться под руководством Курта Гензеля. В 1921 году защитил диссертацию, содержащую результат, известный позднее как теорема Хассе — Минковского о квадратичных формах над числовым полем.

Пример 6. Диаграмма Хассе для отношения $\leqslant_n$ на множестве двоичных строк $\{0,1\}^n$ длины n называется n-мерным *булевым кубом* (на рисунке 4 изображён трёхмерный булев куб). Как и отмечалось выше, диаграммы Хассе для отношения $\subseteq$ на множестве $2^{\{a,b,c\}}$ и отношения $\leqslant_3$ на множестве $\{0,1\}^3$ одинаковы, т. е. $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$ и $(\{0,1\}^3, \leqslant_3)$ изоморфны[4].

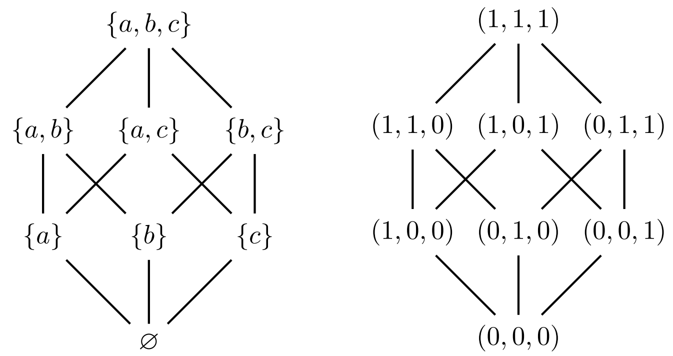

Рис. 4. Диаграммы Хассе отношения $\subseteq$ на множестве $2^{\{a,b,c\}}$ (слева) и отношения $\leqslant_3$ на множестве $\{0,1\}^3$ (справа)

Определение 9. Пусть R — порядок на множестве A.

$x \in A$ — *максимальный элемент* (*maximal element*), если $\nexists y \in A$, $y \neq x$, xRy (нет элемента, большего, чем x).

$x \in A$ — *минимальный элемент* (*minimal element*), если $\nexists y \in A$, $y \neq x$, yRx (нет элемента, меньшего, чем x).

$x \in A$ — *наибольший элемент* (*greatest element*), если $\forall y \in A$, yRx (все элементы меньше x).

$x \in A$ — *наименьший элемент* (*least element*), если $\forall y \in A$, xRy (все элементы больше x).

Пример 7. Найдём минимальные и максимальные, наименьшие и наибольшие элементы для отношений, рассмотренных в примерах 4 и 5.

Для линейно упорядоченного множества $(\{1,2,3,4\}, \leqslant)$ элемент 1 является минимальным и наименьшим, а элемент 4 — максимальным и наибольшим.

Для частично упорядоченного множества $(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$ элемент 1 является минимальным и наименьшим, а элементы 4, 5, 6 — максимальные. Наибольшего элемента не существует.

Теорема 2. *Пусть (A,R) — упорядоченное множество.*

1. *Если $g \in A$ — наибольший, то g максимальный. Если $l \in A$ — наименьший, то l минимальный.*

---

[4]Упорядоченные множества (A,R) и (B,S) изоморфны, если существует биекция $f\colon A \to B$, сохраняющая отношение порядка, т.е. $\forall x,y \in A \quad xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$. Будем записывать это так: $(A,R) \cong (B,S)$ или более кратко $R \cong S$, если A и B ясны из контекста.

2. *Если $g \in A$ — наибольший, то он единственен. Если $l \in A$ — наименьший, то он единственен.*

3. *В любом конечном упорядоченном множестве существуют максимальные и минимальные элементы* (*но не всегда существуют наибольшие и наименьшие*).

Доказательство. 1. Пусть $g \in A$ — наибольший. Если он не максимальный, то $\exists y \in A$, $y \neq g$, gRy. Получили противоречие с определением наибольшего.

2. Пусть $g_1, g_2 \in A$ — наибольшие элементы. Тогда $g_1 R g_2$ (т. к. g_2 наибольший) и $g_2 R g_1$ (т. к. g_1 наибольший), поэтому $g_1 = g_2$ по свойству антисимметричности.

3. Пусть (A, R) — конечное упорядоченное множество. Возьмём любой элемент $x_1 \in A$. Если x_1 не максимальный, то $\exists x_2 \neq x_1$, $x_1 R x_2$. Если x_2 не максимальный, то $\exists x_3 \neq x_2$, $x_2 R x_3$. При этом $x_1 \neq x_3$, поскольку в противном случае $x_1 R x_2$, $x_2 R x_1$, т. е. $x_1 = x_2$ — противоречие. Продолжая этот процесс, на k-м шаге получим цепочку $x_1, \ldots, x_k$. Такой процесс закончится за конечное число шагов. На последнем шаге получим один из максимальных элементов. ∎

3. Перечисление отношений порядка на конечном множестве

Естественным является вопрос о количестве отношений порядка на конечном n-элементном множестве A. Обозначим это количество через d_n. Поскольку для любого порядка R однозначно строится диаграмма Хассе и наоборот, по любой диаграмме Хассе однозначно восстанавливается порядок R, то задача свелась к подсчёту всевозможных диаграмм.

Подсчёт числа всех диаграмм Хассе на n вершинах, т. е. вычисление d_n, — трудная классическая проблема (см. [4, стр. 59–60], [5, стр. 155–156], [6]). До сих пор неизвестны простые точные или рекурсивные формулы для d_n. Даже асимптотические оценки величины d_n при $n \to \infty$ приводят к очень трудной комбинаторной задаче (см. [7], [8]).

При небольших значениях n ($n = 1, 2, 3$) не составляет труда нарисовать все диаграммы Хассе и подсчитать d_n (см. рис. 5, 6, 7). Это перечисление является хорошим упражнением для студентов. Но для бóльших значений n нет никакой возможности нарисовать все такие диаграммы.

В таблице 2 приведены несколько первых членов последовательности d_n (последовательность $A001035$ в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [9]). Видим, что значения d_n растут очень быстро с ростом n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_n	1	3	19	219	4231	130023	6129859	431723379	44511042511

Таблица 2. Начальные значения последовательности d_n

Рис. 5. Диаграмма Хассе для $n = 1$ ($d_1 = 1$)

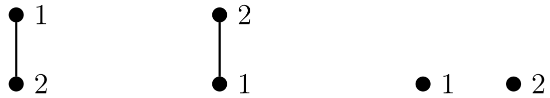

Рис. 6. Диаграммы Хассе для $n = 2$ ($d_2 = 3$)

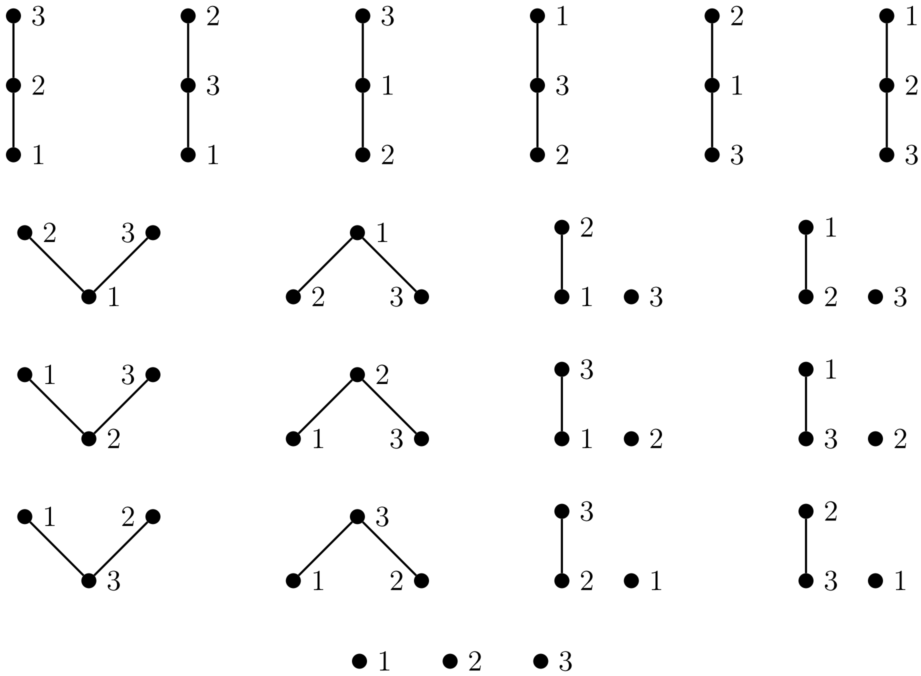

Рис. 7. Диаграммы Хассе для $n = 3$ ($d_3 = 19$)

4. Задачи

1. На множестве A определено бинарное отношение R :

$$xRy \Longleftrightarrow x \text{ делит } 2y.$$

Установите, является ли R отношением порядка на множестве A. Если является, то найдите все минимальные и максимальные элементы.

1) $A = \{1, 3, 4, 5, 12, 20\}$; 2) $A = \{2, 3, 9, 27, 81\}$;
3) $A = \{2, 3, 4, 5, 12, 36\}$; 4) $A = \{3, 5, 7, 11, 13\}$.

2. На множестве A определено бинарное отношение R :

$$xRy \Longleftrightarrow |x-y|(x-7)(y-2) \geqslant 0.$$

Установите, является ли R отношением порядка на множестве A. Если является, то найдите все минимальные и максимальные элементы.

1) $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; 2) $A = \{1, 3, 5, 8, 12\}$;
3) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. На множестве $\mathbb{Z}^2$ определено отношение $\leqslant_2$:

$$(x_1, y_1) \leqslant_2 (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2.$$

Докажите, что $\leqslant_2$ — отношение частичного порядка. Найдите все минимальные и максимальные относительно $\leqslant_2$ элементы в множестве A.

1) $A = \{(x, y) \mid x \leqslant 5, y \leqslant 3\}$; 2) $A = \{(x, y) \mid -2 \leqslant x + y \leqslant 3\}$;
3) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$.

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{N}$ определено отношение R :

$$xRy \Longleftrightarrow nx \leqslant y \text{ или } x = y.$$

Докажите, что R — отношение порядка. Найдите все минимальные и максимальные относительно R элементы в множествах:

1) $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $(n = 2)$; 2) $A_2 = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(n = 1)$;
3) $A_2 = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(n \geqslant 2,\ k < n)$;
4) $A_2 = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(n \geqslant 2,\ k \geqslant n)$; 5) $A_3 = \mathbb{N}$.

5. На множестве $\mathbb{N}$ определено отношение R :

$$xRy \Longleftrightarrow x^y \leqslant y^x.$$

1) Является ли R отношением порядка на множестве $\mathbb{N}$?
2) Найти максимальные по включению подмножества $A \subseteq \mathbb{N}$, на которых R является отношением порядка. Будет ли при этом R линейным порядком? Найти максимальные, минимальные, наибольшие и наименьшие элементы в A относительно R.

6. Доказать, что любое отношение порядка R на множестве A можно реализовать как отношение включения $\subseteq$ на некотором семействе S подмножеств множества A, т.е. для любого упорядоченного множества (A, R) существует такое $S \subseteq 2^A$, что $(A, R) \cong (S, \subseteq)$.

7. Привести примеры различных порядков на счётном множестве, для которых отношения непосредственного предшествования совпадают.

8. Пусть R — линейный порядок на конечном множестве A. Доказать, что:

1) в A существуют единственные минимальный и максимальный элементы;

2) для любого элемента $x \in A$, который не является минимальным, существует, причём единственный, непосредственный предшественник;
3) диаграмма Хассе линейного порядка R представляет собой путь.

9. Заметим, что условие конечности множества A в задаче **8** является существенным, поскольку есть примеры даже счётных линейно упорядоченных множеств, для которых эти утверждения неверны. Приведите такие примеры.

10. Пусть S — семейство подмножеств конечного множества A. Доказать, что упорядоченное множество $(S, \subseteq)$ изоморфно некоторому $(M, |)$, где $M \subseteq \mathbb{N}$.

5. Ответы, указания, решения

1. 1) Отношение частичного порядка, элемент 1 — минимальный и наименьший, элементы 12 и 20 — максимальные, наибольшего элемента нет.
2) Отношение линейного порядка, элемент 2 — минимальный и наименьший, элемент 81 — максимальный и наибольший.
3) Не является отношением порядка: рефлексивно, не антисимметрично, т. к. $2R4$ и $4R2$, но $2 \neq 4$, не транзитивно, т. к. $4R2$ и $2R3$, но $4\not R3$.
4) Отношение частичного порядка, каждый элемент и минимальный, и максимальный, наименьшего элемента нет, наибольшего элемента нет.

2. 1) Отношение частичного порядка, элемент 7 — минимальный и наименьший, элементы $3, 4, 5, 6$ — максимальные, наибольшего элемента нет.
2) Не является отношением порядка: рефлексивно, не антисимметрично, т. к. $8R12$ и $12R8$, но $8 \neq 12$, не транзитивно, т. к. $8R3$ и $3R1$, но $8\not R1$.
3) Отношение частичного порядка, элемент 7 — минимальный и наименьший, элемент 2 — максимальный и наибольший.

3. 1) Минимальных элементов и наименьшего нет, элемент $(5, 3)$ — максимальный и наибольший.
2) Множество минимальных элементов — $\{(x, -2-x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$, множество максимальных элементов — $\{(x, 3-x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$, наименьшего и наибольшего элементов нет.
3) Элементы $(-5, 0)$, $(0, -5)$, $(-3, -4)$, $(-4, -3)$ — минимальные, элементы $(5, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ — максимальные, наименьшего и наибольшего элементов нет.

4. 1) 1 — наименьший и минимальный, а $4, 5, 6$ — максимальные элементы, наибольших нет.
2) 1 — наименьший и минимальный, а k — максимальный и наибольший.
3) Все элементы из A_2 и минимальные, и максимальные. При $k \geqslant 2$ наибольших и наименьших нет.
4) Элемент $x_{max} \in A_2$ — максимальный тогда и только тогда, когда

$$\nexists y \in A_2 \ (y \neq x_{max} \text{ и } nx_{max} \leqslant y),$$

т. е.
$$\nexists y \in A_2 \ \left(y \neq x_{max} \text{ и } x_{max} \leqslant \frac{y}{n} \right).$$

Если $x_{max} \leqslant \frac{k}{n}$, то условие максимальности не выполняется, поскольку существует, например, $y = k$ (причём $y = k \neq x_{max}$, поскольку $n \geqslant 2$), для которого $x_{max} \leqslant \frac{y}{n} = \frac{k}{n}$. Для остальных значений x_{max}, т. е. для всех, которые удовлетворяют двойному неравенству

$$\frac{k}{n} < x_{max} \leqslant k, \quad \text{т. е.} \ \left[\frac{k}{n}\right] + 1 \leqslant x_{max} \leqslant k,$$

условие максимальности выполняется. Действительно, в противном случае, существовал бы некоторый $y \neq x_{max}$, для которого $x_{max} \leqslant \frac{y}{n}$. Но $y \leqslant k$, поэтому $x_{max} \leqslant \frac{k}{n}$, а это противоречит условию $\frac{k}{n} < x_{max} \leqslant k$. Таким образом, все максимальные элементы удовлетворяют неравенству
$$\left[\frac{k}{n}\right] + 1 \leqslant x_{max} \leqslant k.$$

Элемент $y_{min} \in A_2$ — минимальный тогда и только тогда, когда

$$\nexists x \in A_2 \ (x \neq y_{min} \text{ и } nx \leqslant y_{min}).$$

Если $y_{min} \geqslant n$, то условие минимальности не выполняется, т. к. существует, например, $x = 1$ (причём $x = 1 \neq y_{min}$, поскольку $n \geqslant 2$), для которого $n \cdot 1 \leqslant y_{min}$. Для остальных значений y_{min}, т. е. для всех, которые удовлетворяют неравенству $1 \leqslant y_{min} \leqslant n-1$ условие минимальности выполняется. Действительно, в противном случае, существовал бы некоторый $x \neq y_{min}$, для которого $nx \leqslant y_{min}$. Используя неравенства $x \geqslant 1$ и $y_{min} \leqslant n-1$ получаем противоречие: $n \leqslant nx \leqslant y_{min} \leqslant n-1$. Следовательно, все минимальные элементы удовлетворяют неравенству
$$1 \leqslant y_{min} \leqslant n-1.$$

5) Если $n \geqslant 2$, то элементы $1, 2, \ldots, n-1$ — минимальные. Если $n = 1$ или $n = 2$, то элемент 1 — наименьший. Максимальных и наибольших элементов нет.

5. 1) Рефлексивность очевидна. Транзитивность вытекает из следующей цепочки неравенств. Если $x^y \leqslant y^x$ и $y^z \leqslant z^y$, то

$$(x^z)^y = x^{yz} \leqslant y^{xz} = (y^z)^x \leqslant (z^y)^x = z^{xy} = (z^x)^y,$$

т. е. $(x^z)^y \leqslant (z^x)^y$, поэтому $x^z \leqslant z^x$. Но свойство антисимметричности не выполняется на $\mathbb{N}$, поскольку $2^4 = 4^2$, т.е. $2R4$ и $4R2$. Итак, R не является порядком на $\mathbb{N}$.

2) Пусть $M \subseteq \mathbb{N}$. Получили (см. решение задачи **5.** 1), что R — порядок на M тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in M \ \ (x^y = y^x \ \Rightarrow \ x = y).$$

Докажем, что на множестве натуральных чисел уравнение $x^y = y^x$ имеет только два решения: $x = 2, y = 4$ и $x = 4, y = 2$. Отсюда будет следовать, что (M, R) — упорядоченное множество только в том случае, если $2 \notin M$ или $4 \notin M$. Докажем, что если $x > y > 2$, то $x^y < y^x$. Для этого достаточно показать, что

$$(y+1)^y < y^{y+1}, \text{ что равносильно } \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y < y,$$

которое элементарно доказывается по индукции (база индукции $y = 3$). Докажем, что при $y = 2$ и $x \geqslant 5$ верно неравенство $x^y < y^x$, т.е. $x^2 < 2^x$. Действительно, при $x \geqslant 5$ имеем

$$2^x = 1 + x + C_x^2 + \ldots + C_x^2 + x + 1 \geqslant 2 + 2x + x(x-1) = x^2 + x + 2 > x^2.$$

Для остальных значений непосредственно проверяем $1^2 < 2^1$, $2^2 = 2^2$, $3^2 > 2^3$, $4^2 = 2^4$. Если же $y = 1$, то $x^1 > 1^x$ для $x \geqslant 2$. Таким образом,

$$(x \neq y, \ x^y = y^x) \iff (x = 4, y = 2 \text{ или } x = 2, y = 4).$$

Итак, множества $A = \mathbb{N} - \{2\}$ и $B = \mathbb{N} - \{4\}$ максимальные по включению подмножества в $\mathbb{N}$, на которых отношение R является порядком (даже линейным порядком). В обоих множествах A и B элемент 1 — наименьший, а элемент 3 — наибольший.

6. Рассмотрим отображение

$$f\colon A \to 2^A,$$

сопоставляющее каждому элементу $x \in A$ множество $f(x)$ элементов, предшествующих элементу x, т. е.

$$f(x) = \{a \in A \mid aRx\} \in 2^A.$$

Тогда

$$xRy \iff f(x) \subseteq f(y).$$

Действительно, если xRy, то для любого $a \in f(x)$ имеем aRx, поэтому в силу транзитивности aRy, т. е. $a \in f(y)$. Обратно, если $f(x) \subseteq f(y)$, то поскольку $x \in f(x)$ (в силу рефлексивности), то $x \in f(y)$, поэтому xRy. Таким образом, искомое семейство подмножеств $S = f(A)$. Убедимся, что $f\colon A \to S$ — биекция. Действительно, конструкция семейства $S = f(A)$ означает сюръективность. Инъективность вытекает из того, что равенство $f(x) = f(y)$ влекло бы $x, y \in f(x) = f(y)$, т.е. xRy и yRx, поэтому $x = y$. Итак, $(A, R) \cong (S, \subseteq)$.

7. На множестве $\mathbb{N}$ рассмотрим два бинарных отношения R и S :

$$xRy \iff 2 \leqslant x \leqslant y \text{ или } x \geqslant 1, y = 1,$$
$$xSy \iff 2 \leqslant x \leqslant y \text{ или } x = 1, y = 1,$$

что равносильно $R = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant y\} \cup \{(x, 1) \mid x = 1, 2, \ldots\}$, а $S = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant y\} \cup \{(1, 1)\}$. Очевидно, что R и S — различные порядки, причём R — линейный, а S — частичный. Для порядка R элемент 1 — максимальный и наибольший. Для порядка S элемент 1 — максимальный (наибольших нет). Элемент 2 — минимальный и наименьший относительно обоих порядков. Кроме того, для 1 не существует непосредственного предшественника относительно R и S. Если же $x \neq 1$, то $(x-1)R^*x$ и $(x-1)S^*x$. Таким образом, $R^* = S^* = \{(x, x+1) \mid x = 2, 3, \ldots\}$. Следовательно, если множество бесконечно, то в общем случае по отношению непосредственного предшествования нельзя однозначно восстановить исходный порядок.

8. 1) Существование минимального элемента следует из Теоремы 2. Допустим, что m_1, m_2 — два различных минимальных, тогда либо m_1Rm_2, либо m_2Rm_1. Первое противоречит минимальности m_2, а второе — минимальности m_1. Аналогично доказывается единственность максимального элемента.

2) Если $x \in A$ не является минимальным, то по Теореме 1 элементу x непосредственно предшествует хотя бы один элемент. Если

$$y_1R^*x,\ y_2R^*x \text{ и } y_1 \neq y_2,$$

то поскольку порядок линейный, то получаем либо y_1Ry_2, либо y_2Ry_1. В первом случае имеем y_1Ry_2, y_2Rx — противоречие с y_1R^*x. Аналогично, во втором случае y_2Ry_1, y_1Rx — противоречие с y_2R^*x.

3) Следует из доказанных пунктов 1), 2) задачи **8**.

9. Для $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ нет ни минимальных, ни максимальных элементов. В решении задачи **7** приведён контрпример к пункту 2) задачи **8** (множество счётно).

10. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, а $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — множество первых n штук простых чисел. Сопоставим каждому a_i простое число p_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда каждому подмножеству X из семейства S соответствует произведение простых из P с показателями 0 или 1. А именно, если $\chi(X) = (x_1, \ldots, x_n)$ — характеристический вектор множества X, то этому множеству сопоставляется число

$$f(X) = p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}.$$

Очевидно, что $X \subseteq Y \iff f(X) \mid f(Y)$. Таким образом, искомое $M = \{f(X) \mid X \in S\}$.

Литература

[1] Алексеев В. Е. Дискретная математика: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. — 139 с.

http://www.unn.ru/books/met_files/Alekseev.pdf

[2] Rosen Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. — 7th ed., McGraw Hill, 2011. — 1072 p.

[3] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015. 2-е изд., доп. — 144 с.

[4] Comtet L. Advanced Combinatorics. Springer Dordrecht, 1974. — 343 p.

[5] Биркгоф Г. Теория решеток: Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

[6] Butler K. K. H. The number of partially ordered sets // J. Combin. Theory 13 (1972), 276–289.

[7] Evans J. W., Harary F. and Lynn M. S. On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ACM 10 (1967), 295-298.

[8] Kleitman D. and Rothschild B. The number of finite topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 276-282.

[9] Sloane N. J. A. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, A001035. Available at http://oeis.org/A001035.

Поступила 24.11.2022

ORDER RELATIONS IN DISCRETE MATHEMATICS COURSE

S. V. Sidorov, T. G. Smirnova, G. V. Utkin

We present the main properties of order relations studied in discrete mathematics course, illustrating them with examples, and propose several interesting problems.

Keywords: discrete mathematics, order relation, partial order, linear order, Hasse diagram.