بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه بیست و یکم: CSP (۲)

Project: People

مسئله k-CSP

- عبارت شامل تعدادی بند
- هر بند یک عبارت منطقی برروی k متغیر
  - عبارت منطقی = $P: D^k \to \{\mathsf{False}, \mathsf{True}\}$
  - مجموعه توابع مورد قبول: $\mathscr{P}$
    - مثال: یای چند لیترال
- تعمیم: متغیرها بتوانند مقدار از مجموعه D بگیرند
  - مثال: $D = \{\mathsf{False}, \mathsf{True}\}$

مسئله k-CSP

- عبارت شامل تعدادی بند
- هر بند یک عبارت منطقی برروی k متغیر
  - عبارت منطقی = $P: D^k \to \{\text{False}, \text{True}\}$
  - مجموعه توابع مورد قبول: $\mathscr{P}$
    - مثال: یای چند لیترال
- تعمیم: متغیرها بتوانند مقدار از مجموعه D بگیرند
  - مثال: $D = \{\text{False}, \text{True}\}$

مثال خاص: 3-SAT

عبارت‌های قابل قبول

متغیرهای هر بند

$$k\text{-CSP}[\mathcal{P}]$$

عبارت‌های قابل قبول

متغیرهای هر بند

$$k\text{-CSP}[\mathcal{P}]$$

مثال:

$$P_1(x_1, x_2, x_3) \wedge P_2(x_2, x_1, x_4) \wedge \cdots \wedge P_m(x_3, x_5, x_1)$$

A *class of constraint satisfaction problems* k-CSP$[\mathcal{P}]$ is specified by

- A finite domain D
- A natural number k (the arity)
- A set $\mathcal{P}$ of k-ary predicates over D

k and $|D|$ are usually treated as *constants*. An *instance* of k-CSP$[\mathcal{P}]$ is

$$P_1(x_{i_{11}}, x_{i_{12}}, \ldots, x_{i_{1k}}) \wedge P_2(x_{i_{21}}, x_{i_{22}}, \ldots, x_{i_{2k}}) \wedge \cdots$$

$$\wedge P_m(x_{i_{m1}}, x_{i_{m2}}, \ldots, x_{i_{mk}}),$$

where $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{P}$ and $i_{11}, i_{12}, \ldots, i_{mk} \in \{1, 2, \ldots, n\}$. An *assignment* for this instance is an n-tuple $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$, and the generalized clause $P_\ell(x_{i_{\ell 1}}, \ldots, x_{i_{\ell k}})$ is *satisfied* by that assignment if $P_\ell(a_{i_{\ell 1}}, \ldots, a_{i_{\ell k}}) = \mathsf{True}$.

آرام‌سازی پایه‌ای، مثال

The basic semidefinite relaxation of MAX-2-SAT shown for the formula $(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3)$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e}-\mathbf{t}_2) + (\mathbf{e}-\mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \\ & + (\mathbf{e}-\mathbf{t}_2)^T\mathbf{t}_4 + (\mathbf{e}-\mathbf{t}_2)^T(\mathbf{e}-\mathbf{t}_4) + \mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_4 \\ & + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e}-\mathbf{t}_3) + \mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_3 + (\mathbf{e}-\mathbf{t}_1)^T(\mathbf{e}-\mathbf{t}_3) \\ \text{subject to} & \mathbf{e}^T\mathbf{e} = 1 \\ & \mathbf{t}_i^T(\mathbf{e}-\mathbf{t}_i) = 0 \text{ for all } i. \end{array}$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$y_i = +1 \quad x_i = \text{True}$$
$$y_i = -1 \quad x_i = \text{False}$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$y_i = +1 \quad x_i = \mathsf{True}$$
$$y_i = -1 \quad x_i = \mathsf{False}$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

قید xi = True یا False

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$y_i = +1 \quad x_i = \text{True}$$

$$y_i = -1 \quad x_i = \text{False}$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

قید xi = True یا False

$$y_i^2 = 1$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_i = +1$$

$$y_i = +1 \quad x_i = \text{True}$$

$$y_i = -1 \quad x_i = \text{False}$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

قید xi = True یا False

$$y_i^2 = 1$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_i = +1 \qquad y_i = +1 \quad x_i = \text{True}$$

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_i = -1 \qquad y_i = -1 \quad x_i = \text{False}$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

قید True = xi یا False

$$y_i^2 = 1$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

روش دیگر مدل‌سازی GW

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_i = +1 \qquad y_i = +1 \quad x_i = \text{True}$$

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_i = -1 \qquad y_i = -1 \quad x_i = \text{False}$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

قید True = xi یا False

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \qquad y_i^2 = 1$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i)$$

بهتر کردن شکاف صحیح

شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$x_1 \vee x_2$$

بیشینه: $$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T \mathbf{t}_2$$

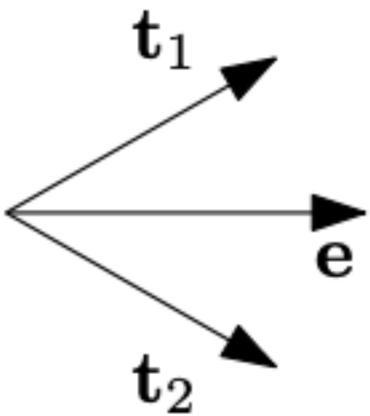
$$\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1$$

شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$\mathbf{t}_1 := \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{e} := (1, 0)$$



$$\mathbf{t}_2 := \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

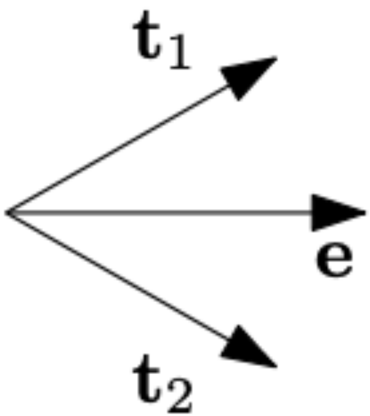
شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$\mathbf{t}_1 := \left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{e} := (1, 0)$$



$$\mathbf{t}_2 := \left(\tfrac{3}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

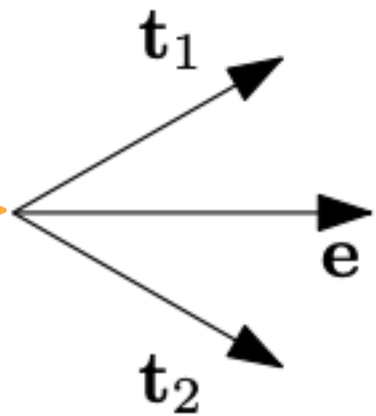
شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$\mathbf{t}_1 := \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{e} := (1, 0)$$



$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2$$

$$\mathbf{t}_2 := \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

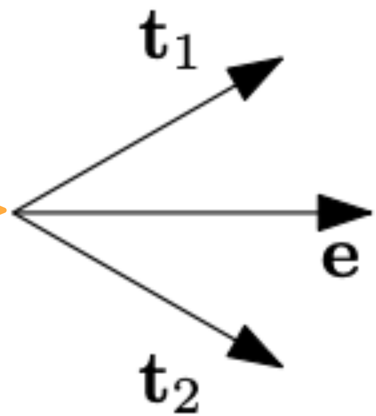
شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$\mathbf{t}_1 := \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{e} := (1, 0)$$



$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2$$

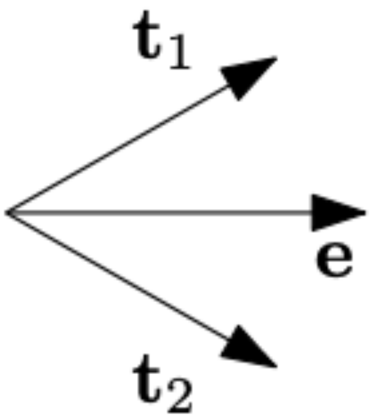
$$= 9/8$$

$$\mathbf{t}_2 := \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

شکاف صحیح آرام‌سازی پایه‌ای

$$\mathbf{t}_1 := \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{e} := (1, 0)$$



$$\mathbf{t}_2 := \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2$$

$$= 9/8$$

شکاف صحیح آرام‌سازی
پایه‌ای =<

$$x_1 \vee x_2$$

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T \mathbf{t}_2$$

$$\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

$$x_1 \vee x_2$$

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T \mathbf{t}_2$$

$$\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0$$

ایده: این شرط را اضافه کنیم:

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T \mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$(\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) \geq 0$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$(\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) \geq 0$$

$$\mathbf{v}_i = 2\mathbf{t}_i - \mathbf{e},\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$(\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) \geq 0$$

$$\mathbf{v}_i = 2\mathbf{t}_i - \mathbf{e},\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{e}$$

$$(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)^T(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2) \geq 0$$

$$\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) + (\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T\mathbf{t}_2 \leq 1$$

$$(\mathbf{e} - \mathbf{t}_1)^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_2) \geq 0$$

$$\mathbf{v}_i = 2\mathbf{t}_i - \mathbf{e},\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{e}$$

$$(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)^T(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2) \geq 0$$

زاویه v2-v0-v1 کمتر مساوی ۹۰ درجه

قیدهای مثلثی

Let us consider the basic semidefinite relaxation of a 2-CSP, with the unit vector $\mathbf{e}$ representing the constant 1 and with values of the variables represented by the vectors $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$. Then by the *triangle constraints for* $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}_i$, *and* $\mathbf{t}_j$ we mean the following (valid) constraints:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0.
\end{aligned}$$

قیدهای مثلثی

Let us consider the basic semidefinite relaxation of a 2-CSP, with the unit vector $\mathbf{e}$ representing the constant 1 and with values of the variables represented by the vectors $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$. Then by the *triangle constraints for* $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}_i$, *and* $\mathbf{t}_j$ we mean the following (valid) constraints:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0.
\end{aligned}
$$

برنامه‌نویسی **کانونی** = برنامه‌نویسی پایه‌ای + قیدهای مثلثی

- الگوریتم گردکردن مناسب روی آرام‌سازی پایه‌ای + قیدهای مثلثی
  - الگوریتم 0.940ـ تقریب

- الگوریتم گردکردن مناسب روی آرام‌سازی پایه‌ای + قیدهای مثلثی
  - الگوریتم 0.940 ـ تقریب

- اگر P!=NP، هیچ الگوریتم 0.954 ـ تقریب وجود ندارد

- الگوریتم گردکردن مناسب روی آرام‌سازی پایه‌ای + قیدهای مثلثی
  - الگوریتم 0.940 ـ تقریب

- اگر P!=NP، هیچ الگوریتم 0.954 ـ تقریب وجود ندارد
- اگر UGC، هیچ الگوریتم 0.943 ـ تقریب وجود ندارد

هیچ نامساوی محلی دیگری فایده ندارد!

- نامساوی محلی

$$a_1\mathbf{e}^T\mathbf{t}_i + a_2\mathbf{e}^T\mathbf{t}_j + b\mathbf{t}_i^T\mathbf{t}_j + c \geq 0,$$

- معتبر:
  - به ازای هر جواب شدنی درست باشد

ادعا: هر نقطه که در قیدهای مثلثی صدق کند، در هر قید معتبر محلی صدق می‌کند

ادعا: هر نقطه که در قیدهای مثلثی صدق کند، در هر قید معتبر محلی صدق می‌کند

$$\xi_1 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_i, \xi_2 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_j, \xi_3 = \tilde{\mathbf{t}}_i^T \tilde{\mathbf{t}}_j$$

ادعا: هر نقطه که در قیدهای مثلثی صدق کند، در هر قید معتبر محلی صدق می‌کند

$$\xi_1 = \tilde{\mathbf{e}}^T\tilde{\mathbf{t}}_i, \xi_2 = \tilde{\mathbf{e}}^T\tilde{\mathbf{t}}_j, \xi_3 = \tilde{\mathbf{t}}_i^T\tilde{\mathbf{t}}_j$$

ادعا: نقاطی که در قیود مثلثی صدق می‌کنند، باید در هر قید معتبر محلی صدق کنند.

ادعا: هر نقطه که در قیدهای مثلثی صدق کند، در هر قید معتبر محلی صدق می‌کند

$$\xi_1 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_i, \xi_2 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_j, \xi_3 = \tilde{\mathbf{t}}_i^T \tilde{\mathbf{t}}_j$$

ادعا: نقاطی که در قیود مثلثی صدق می‌کنند، باید در هر قید معتبر محلی صدق کنند.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
\mathbf{t}_i^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\
(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0.
\end{aligned}$$

ادعا: هر نقطه که در قیدهای مثلثی صدق کند، در هر قید معتبر محلی صدق می‌کند

$$\xi_1 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_i, \xi_2 = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{t}}_j, \xi_3 = \tilde{\mathbf{t}}_i^T \tilde{\mathbf{t}}_j$$

ادعا: نقاطی که در قیود مثلثی صدق می‌کنند، باید در هر قید معتبر محلی صدق کنند.

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 \geq 0\} \\ &\xi_1 - \xi_3 \geq 0 \\ &\xi_2 - \xi_3 \geq 0 \\ &1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \geq 0 \end{aligned}$$

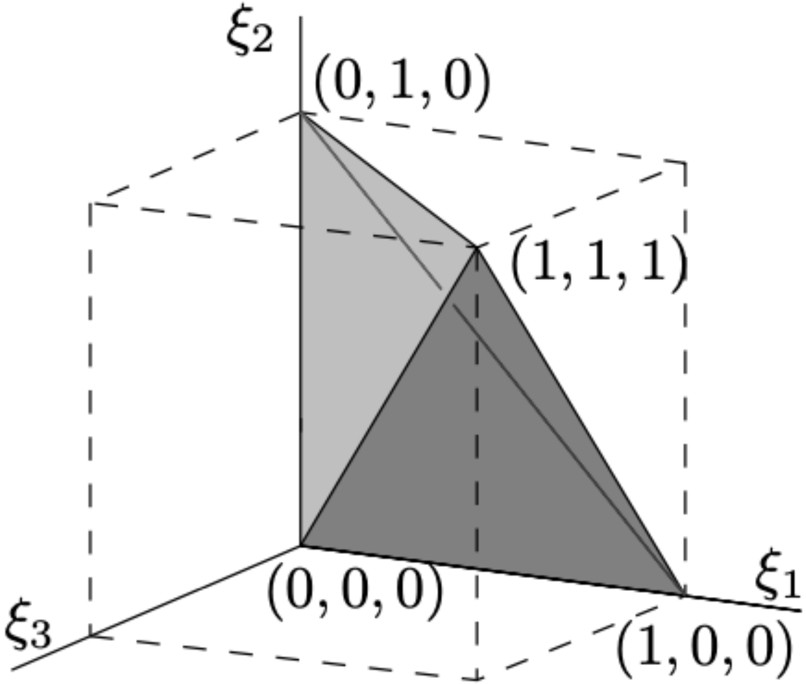
$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\ \mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0 \\ (\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T \mathbf{t}_j &\geq 0 \\ (\mathbf{e} - \mathbf{t}_i)^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_j) &\geq 0. \end{aligned}$$

$$H_1 := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 \geq 0\}$$

$$\xi_1 - \xi_3 \geq 0$$

$$\xi_2 - \xi_3 \geq 0$$

$$1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \geq 0$$



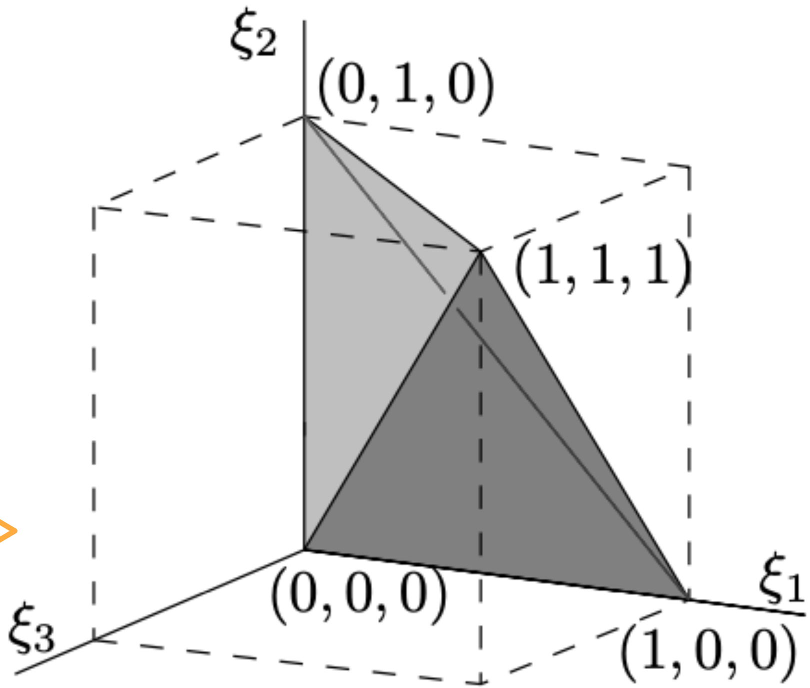
$H_1 := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 \geq 0\}$

$\xi_1 - \xi_3 \geq 0$

$\xi_2 - \xi_3 \geq 0$

$1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \geq 0$

قیدهای مثلثی پوش محدب را
می‌سازند

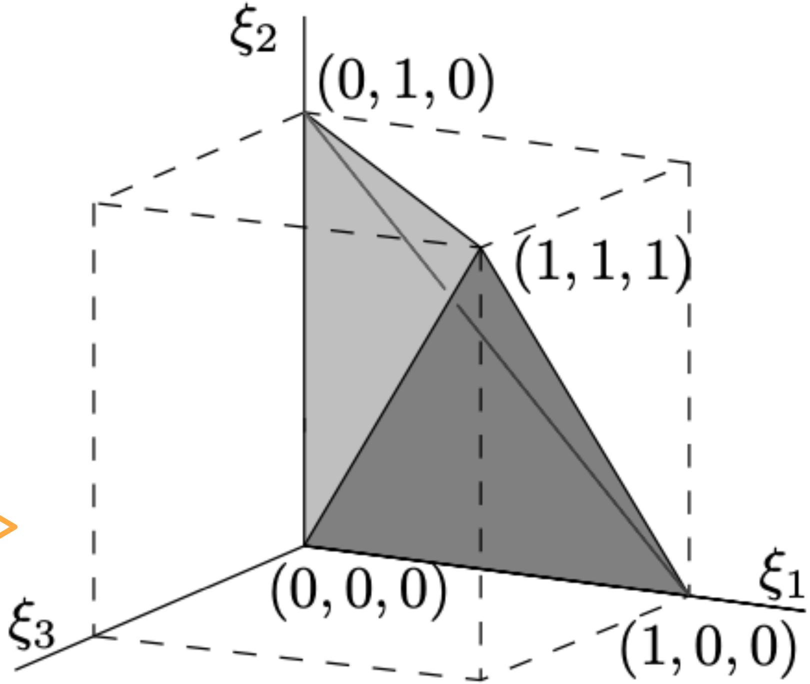


$$H_1 := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 \geq 0\}$$

$$\xi_1 - \xi_3 \geq 0$$

$$\xi_2 - \xi_3 \geq 0$$

$$1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \geq 0$$



قیدهای مثلثی پوش محدب را می‌سازند

همه قیدهای معتبر (چون خطی‌اند) باید شامل این نقاط باشند.

هیچ نامساوی محلی دیگری فایده ندارد!

- نامساوی محلی

$$a_1\mathbf{e}^T\mathbf{t}_i + a_2\mathbf{e}^T\mathbf{t}_j + b\mathbf{t}_i^T\mathbf{t}_j + c \geq 0,$$

- معتبر:
  - به ازای هر جواب صحیح درست باشد

در نهایت

- اگر UGC:
  - همین برنامه‌نویسی کانونی بهترین برنامه‌ریزی است!

الگوریتم سریع برای حل SDP:

- اگر جواب مسئله αm باشد،
  - الگوریتم یک جواب $(\alpha - \epsilon)m$ پیدا می‌کند
  - در زمان $O(m\varepsilon^{-C_1}(\log n)^{C_2})$

با جمله‌های بیش از دو متغیره چه کنیم؟

جمله شامل سه متغیر

$$(x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7)$$

؟؟؟ $t_2(e - t_5)t_7$

ایده: جمله شامل سه متغیر

$$(x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7)$$

ایده: جمله شامل سه متغیر

$$(x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7)$$

۸ متغیر جدید به ازای هر بند:

$$z_{1,\omega} \geq 0, \text{ where } \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^3$$

ایده: جمله شامل سه متغیر

$$(x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7)$$

۸ متغیر جدید به ازای هر بند:

$$z_{1,\omega} \geq 0, \text{ where } \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^3$$

یکی از حالت‌ها درست است:

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^3} z_{1,\omega} = 1.$$

$$x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7$$

تابع هدف:

$$z_{1,\mathsf{FFF}} + z_{1,\mathsf{FFT}} + z_{1,\mathsf{FTT}} + z_{1,\mathsf{TFF}} + z_{1,\mathsf{TFT}} + z_{1,\mathsf{TTF}} + z_{1,\mathsf{TTT}}$$

$$x_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_7$$

تابع هدف:

$$z_{1,\mathsf{FFF}} + z_{1,\mathsf{FFT}} + z_{1,\mathsf{FTT}} + z_{1,\mathsf{TFF}} + z_{1,\mathsf{TFT}} + z_{1,\mathsf{TTF}} + z_{1,\mathsf{TTT}}$$

این‌ها را چگونه حساب کنیم؟

$$x_2 = \mathsf{True}$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{e}^T \mathbf{t}_2,$$

$$x_2 = \mathsf{True}$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{e}^T \mathbf{t}_2,$$

$$x_2 = \mathsf{False}$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathrm{F}} z_{1,\omega} = \mathbf{e}^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2)$$

$$x_2 = \text{True}$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{e}^T \mathbf{t}_2,$$

$$x_2 = \text{False}$$

بی‌فایده

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathrm{F}} z_{1,\omega} = \mathbf{e}^T (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2)$$

$$x_2 \wedge x_5$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}, \omega_2 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_5$$

$$x_2 \wedge x_5$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}, \omega_2 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_5$$

$$\overline{x}_2 \wedge x_5$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}, \omega_2 = \mathrm{F}} z_{1,\omega} = (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2)^T \mathbf{t}_5$$

$$x_2 \wedge x_5$$

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}, \omega_2 = \mathsf{T}} z_{1,\omega} = \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_5$$

$$\overline{x}_2 \wedge x_5$$

بی‌فایده

$$\sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3 : \omega_1 = \mathsf{T}, \omega_2 = \mathrm{F}} z_{1,\omega} = (\mathbf{e} - \mathbf{t}_2)^T \mathbf{t}_5$$

The canonical semidefinite relaxation of a Boolean Max-k-CSP$[\mathcal{P}]$

Vector variables: $\mathbf{e}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$.
Scalar variables: $z_{\ell,\omega}$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize } \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^k :\, P_\ell(\omega)=\mathsf{T}} z_{\ell,\omega} \\
&\text{subject to } \mathbf{e}^T\mathbf{e} = 1 \\
&\qquad \mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0 \qquad 1 \le i \le n \\
&\qquad z_{\ell,\omega} \ge 0 \qquad 1 \le \ell \le m,\ \omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^k \\
&\qquad \textstyle\sum_\omega z_{\ell,\omega} = 1 \qquad 1 \le \ell \le m \\
&\qquad \sum_{\omega:\, \omega_j = \mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_{\ell j}} \quad 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j \le k \\
&\qquad \sum_{\omega:\, \omega_j = \omega_{j'} = \mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{t}_{i_{\ell j}}^T \mathbf{t}_{i_{\ell j'}} \\
&\qquad\qquad 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j < j' \le k.
\end{aligned}
$$

هیچ نامساوی محلی دیگری فایده ندارد!

- نامساوی محلی

$$a_1\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_1} + a_2\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_2} + a_3\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_3} + b_{12}\mathbf{t}_{i_1}^T\mathbf{t}_{i_2} + b_{13}\mathbf{t}_{i_1}^T\mathbf{t}_{i_3} + b_{23}\mathbf{t}_{i_2}^T\mathbf{t}_{i_3}$$
$$+ c + \sum_{\omega\in\{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^3} d_\omega z_{\ell,\omega} \geq 0$$

- معتبر:
  - به ازای هر جواب صحیح درست باشد

با متغیرهای غیر دو حالته چه کنیم؟

متغیرهای بیش از دو حالت

$$D = \{1, 2, \ldots, q\}$$

متغیرهای بیش از دو حالت

$$D = \{1, 2, \ldots, q\}$$

برای حالت‌های مختلف متغیر ti:

$$\mathbf{t}_{i,1}, \mathbf{t}_{i,2}, \ldots, \mathbf{t}_{i,q}$$

متغیرهای بیش از دو حالت

$$D = \{1, 2, \ldots, q\}$$

برای حالت‌های مختلف متغیر ti:

$$\mathbf{t}_{i,1}, \mathbf{t}_{i,2}, \ldots, \mathbf{t}_{i,q}$$

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

متغیرهای بیش از دو حالت

$$D = \{1, 2, \ldots, q\}$$

برای حالت‌های مختلف متغیر ti:

$$\mathbf{t}_{i,1}, \mathbf{t}_{i,2}, \ldots, \mathbf{t}_{i,q}$$

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{t}_{i,a} = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{t}_{i,b} = 0 \text{ for all } b \neq a,\ b \in D$$

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

$$\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,a} = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,b} = 0 \text{ for all } b \neq a,\ b \in D$$

قیدی به جای قید بالا:

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

$$\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,a} = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,b} = 0 \text{ for all } b \neq a,\, b \in D$$

قیدی به جای قید بالا:

$$\sum_{a\in D} \mathbf{t}_{i,a} = \mathbf{e}$$

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

$$\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,a} = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,b} = 0 \text{ for all } b \neq a,\ b \in D$$

قیدی به جای قید بالا:

مناسب SDP نیست.

$$\sum_{a \in D} \mathbf{t}_{i,a} = \mathbf{e}$$

فقط یکی از حالت‌ها درست باشد:

$$\mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,a} = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i,b} = 0 \text{ for all } b \neq a,\ b \in D$$

قیدی به جای قید بالا:

مناسب SDP نیست.

$$\sum_{a\in D}\mathbf{t}_{i,a} = \mathbf{e}$$

قید مناسب SDP:

$$\left\|\mathbf{e} - \sum_{a\in D}\mathbf{t}_{i,a}\right\|^2 = 0$$

الگوریتم سریع برای حل SDP:

- زمان

$$O(m(k^{|D|}/\varepsilon)^{C_1}(\log n)^{C_2})$$

پایان