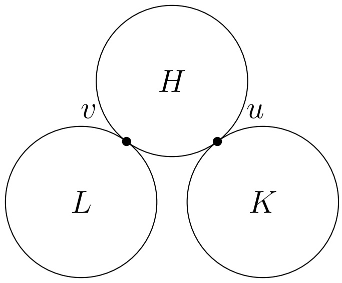
به نام خدا

(دومین) آزمون پایان‌ترم ریاضیات گسسته

وقت آزمون: ۲ ساعت — ۸ تیر ۱۳۹۳

مسئله ۱: (۲ نمره) فرض کنید گراف G داده شده که شامل سه زیر گراف H، K، و L به شکل زیر است و زیرگراف H به K دقیقا در ۱ راس با نام v و H با L نیز دقیقا در ۱ راس به نام u (u و v یکی نیستند) اشتراک دارند. در ضمن یالی نیز بین راس‌های $H-u$ و L و راس‌های $H-v$ و K نیست. همچنین راس‌های K و L نیز یالی به یکدیگر ندارند. ثابت کنید عدد رنگی گراف G برابر است با بیشینه عدد رنگی H و K و L یعنی $\chi(G)=\max\{\chi(H),\chi(K),\chi(L)\}$.



مسئله ۲: (۳ نمره) فرض کنید G یک گراف ساده n راسی است. ثابت کنید به ازای عدد طبیعی $۲ \leq k \leq n$ می‌توان k راس پیدا کرد که درجه‌هایشان کم‌تر از $k-۱$ با همدیگر اختلاف داشته باشد.

مسئله ۳: (۳ نمره) ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی $n>۱$ می‌توان n خانه از یک جدول n در n را طوری پر کرد که این خانه‌های پر شده از لحاظ قوانین مربع لاتین مشکلی نداشته باشند، یعنی اعداد هم سطر و هم ستون تکراری نباشند و اعداد به کار رفته اعداد طبیعی نا بزرگتر از n باشند، ولی نتوان این مربع را کامل کرد، یعنی به یک مربع لاتین کامل تبدیل کرد.

مسئله ۴: (۳ نمره) در یک کشور هر دو شهر یا با راه هوایی و یا با راه‌آهن (و نه هردو) با یکدیگر متصل‌اند. ثابت کنید می‌توان تمامی راه‌های هوایی یا تمامی راه‌های آهن را از بین برد به طوری‌که بعد از آن می‌توان از هر شهری به هر شهری با راه‌های باقی‌مانده سفر کرد.

مسئله ۵: (۵ نمره) ۴۵ ضلعی منتظمی مفروض است. آیا می‌توان راس‌های آن را با اعداد ۰ تا ۹ طوری شماره‌گذاری کرد که به ازای هر دو عدد مختلف، ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهایش با این دو عدد شماره‌گذاری شده باشد؟

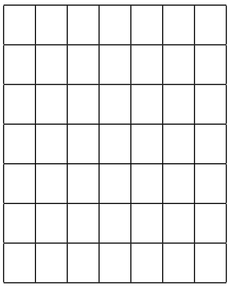
مسئله ۶: (۵ نمره) هشت رُخ در صفحه شطرنج طوری قرار دارند که همدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید تعداد رُخ‌هایی که در خانه‌های سیاه هستند، زوج است.

مسئله ۷: (۵ نمره) فرض کنید G گراف ساده‌ای است که هیچ زیرگراف القایی که با $C_۴$ و $P_۴$ هم‌ریخت باشد ندارد. ثابت کنید G شامل راسی است که به همه دیگر راس‌ها وصل است.

راهنمایی: زیرگراف القایی زیر گرافی است که با حذف چند راس به دست می‌آید. یعنی شامل تمامی یال‌های بین راس‌های باقی‌مانده می‌شود.

مسئله ۸: (۷ نمره) یک جدول ۷ در ۷ داریم. می‌خواهیم پشت سر هم در خانه‌های خالی جدول مهره قرار دهیم به صورتی که در هر نوبت تنها می‌توانیم در خانه‌ای مهره قرار بدهیم که حداکثر یکی از همسایه‌های آن خانه قبلا دارای مهره‌ای باشد. همسایه یک خانه، خانه‌ای است که با آن یک ضلع مشترک دارد، یعنی هر خانه حداکثر می‌تواند ۴ همسایه داشته باشد. حداکثر چند مهره می‌توان در خانه‌های جدول گذاشت؟

> راهنمایی: جواب ۳۶ است. ابتدا یک جواب با ۳۶ مهره پیدا کنید. سپس نشان دهید بیش از ۳۶ مهره نمی‌توان در خانه‌های جدول قرار داد. برای اینکه نشان دهید نمی‌توان بیش از ۳۶ مهره در خانه‌های جدول قرار داد، یک گراف از روی جدول بسازید و نشان دهید به هر صورتی و با هر ترتیبی که مهره‌ها در خانه‌های جدول قرار بگیرد تمام راس‌های هیچ دوری در گراف نمی‌تواند شامل مهره باشد. و سپس با فرض خلف نشان دهید اگر ۳۷ مهره در خانه‌های جدول قرار بگیرد حتما راس‌های مربوطه در گراف مربوط به جدول حداقل یک دور خواهد بود.



نکات:

- شما می‌توانید شش سوال را انتخاب کرده و حل کنید. توجه کنید که اگر برای بیش از شش سوال در برگه راه حل بنویسید، اولین شش سوالتان تصحیح خواهد شد. در نتیجه در انتخاب سوال‌ها دقت کنید ولی خیلی وقت تلف پرش از سوالی به سوال دیگر نکنید.
- در تمامی مسئله‌ها سعی کنید گزاره‌هایی را که ادعایشان را می‌کنید اثبات کنید.

موفق باشید