دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

روش نقطه درونی

جلسه سیزدهم

نگارنده: سارا سرفراز

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسات گذشته به معرفی روش بیضی گون پرداختیم که در این روش یک بیضی گون انتخاب میکنیم که فضای شدنی مسئله به طور کامل در آن قرار داشته باشد و در هر مرحله بررسی می کنیم که آیا مرکز بیضی گون در فضای شدنی مسئله قرار دارد یا خیر. هم چنین با استفاده از این روش به حل مسئله برش بیشینه در گراف پرداختیم. در این جلسه روش جدیدی به نام نقطه درونی ارائه می دهیم.

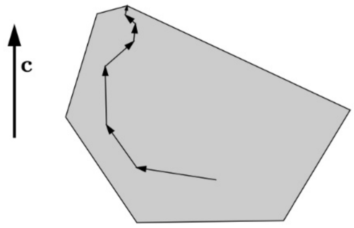
۲ ویژگی های روش نقطه درونی

۱)این روش نسبت به روش سیمپلکس زمان اجرای بهتری دارد و در عمل برای برنامه ریزی های بزرگ سریع تر از سیمپلکس است. (زمان اجرای این روش چند جمله ای است)
۲) برای برنامه ریزی های بزرگ استفاده میشود.
۳)علاوه بر برنامه ریزی های خطی در حل برنامه ریزی محدب نیز استفاده می شود.
یک برنامه ریزی محدب به صورت زیر نوشته می شود که در آن f یک تابع محدب و c یک مجموعه محدب است. (تابع محدب تابعی است که خط واصل بین هر دو نقطه روی نمودار تابع، در بالای نمودار قرار گیرد.)

$$inf\,\{f(x) : x \in c\}$$

۳ روش نقطه درونی

با توجه به اینکه روش بیضی گون در خارج از چند وجهی و سیمپلکس روی مرزچند وجهی حرکت می کردند، همانطور که از اسم روش نقطه درونی انتظار می رود این روش از نقطه ای درون چند وجهی شروع شده و به سمت کنج حرکت می کند به نحوی که در انتها به نقطه بهینه برسد.



برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{بیشینه کن} \quad f(x) = c^T x$$
$$\text{که} \quad Ax \leq b$$

مسیر مرکزی به شکل زیر تعریف می شود:

$$f_\mu(x) = c^T x + \mu \sum_{i=۱}^{m} ln(b_i - a_i x)$$

واضح است که اگر μ را برابر با صفر قرار دهیم این تابع همان تابع هدف برنامه ریزی خطی می شود پس در حقیقت هدف پیدا کردن نقطه بهینه $f_۰(x)$ است که همان جواب مسئله اصلی ماست.
برای اینکه کمی شهود بگیریم، مرز های چند وجهی را دیواره هایی فرض کنید که بر نقاط درون چند وجهی فشار وارد میکنند و μ را پارامتر میزان این فشار در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $b_i - a_i x$ فاصله از دیواره هاست پس هرچه این فاصله کمتر شود، فشار دیواره ها بیشتر می شود و اگر μ بزرگ باشد، نقطه بهینه در مرکز چند وجهی قرار می گیرد.
دقت کنید که این تابع روی مرز های چند وجهی تعریف نشده است.

قضیه: : اگر P کراندار و درون دار(دارای نقطه ای که روی هیچ یک از دیواره ها نیست) باشد و $\mu > ۰$ آنگاه $f_\mu(x)$ دقیقا یک بیشینه در P دارد.
اثبات: مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\{x \in int(P) : f_\mu(x) \geq f_\mu(x_۰)\}$$

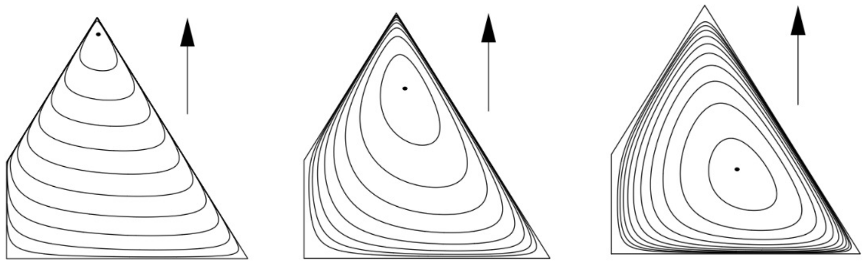
این مجموعه بسته و کران دار(زیرا اشتراک با P دارد و اشتراک با یک مجموعه کران دار، کراندار است) است یعنی فشرده است و با توجه به اینکه تابع پیوسته روی مجموعه فشرده نقطه بیشینه دارد، وجود نقطه بیشینه ثابت می شود.
حال برای اثبات یکتایی این نقطه بیشینه از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید xو y دو نقطه بیشینه اند.

$$f_\mu(x) = f_\mu(y)$$

با توجه به اینکه P محدب است پس تمام نقاط روی خط بین x و y شدنی اند. با توجه به اینکه لگاریتم تابعی اکیدا مقعر است پس تابع f_μ نیز اکیدا مقعر است که یعنی مقدار تابع f_μ برای هر نقطه بین x و y از $f_\mu(x)$ و $f_\mu(y)$ بیشتر است که با بیشینه بودن $f_\mu(x)$ و $f_\mu(y)$ تناقض دارد پس فرض خلف باطل بوده و $f_\mu(x)$ تنها یک نقطه بیشینه دارد.

ایده کلی

ابتدا نقطه ای درون چند وجهی پیدا می کنیم و μ را به تدریج کم میکنیم و نقطه بهینه f_μ جدید را به دست می آوریم تا در نهایت به نقطه ای روی دیواره که در واقع همان نقطه بهینه برنامه ریزی خطی است برسیم.



μ بزرگ   μ کم‌تر   μ خیلی کم

۴ یک ابزار کمکی

ضرایب لاگرانژی

برنامه ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f(x) \\ \text{که} \quad & g_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\} \end{aligned}$$

که $f(x)$ لزوما خطی نیست.

قضیه: x بهینه است اگر و تنها اگر y وجود داشته باشد که:

$$g_1(x) = g_2(x) = ... = g_m(x) = 0,\ \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x)$$

ضرایب لاگرانژی برای مسأله ی ما

برنامه ریز خطی ما به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و برنامه ریزی مسیر درونی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f_\mu(x) = c^T x + \mu \sum_{i=1}^{n} ln x_j \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

حال شرایط لاگرانژی را برای مسئله مان به صورت زیر مینویسیم:

$$g_1(x) = g_2(x) = ... = g_m(x) = 0,\ \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x)$$

و قرار دهید:

$$g_i(x) = b_i - a_i x = 0, \ \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

دقت کنید با توجه به اینکه برای $x < 0$ تابع هدف تعریف شده نیست، قید $x \geq 0$ را حذف می کنیم.
با توجه به قیود بالا داریم:

$$Ax = b,$$
$$\nabla f(x) = c + \mu(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x) = A^T y$$

اگر $\mu(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n})$ را برابر s قرار دهیم، داریم: (برنامه ریزی *)

$$AX = b$$
$$A^T y - s = c$$
$$(s_1 x_1, s_2 x_2, ..., s_n x_n) = \mu 1$$
$$x, s \geq 0$$

که طبق قضیه ای که بالا تر بیان شد، جواب شدنی این برنامه ریزی همان جواب بهینه f_μ می باشد. حال برنامه ریزی بالا را برای $\mu = 0$ در نظر بگیرید:

$$\mu = 0 \Rightarrow s^T x = 0$$
$$s = A^T y - c$$
$$0 = s^T x = y^T Ax - c^T x = y^T b - c^T x \Rightarrow y^T b = c^T x$$

که این همان قضیه دوگانی می باشد:

کمینه کن	$b^T y$	بیشینه کن	$c^T x$
که	$A^T y \geq c$	که	$AX = b$
	$y \in R^m$		$x \geq 0$

لم
$\mu > 0$: اگر $x > 0$ جواب اولیه و $y > 0$ جواب دوگان شدنی که $s = A^T y - c > 0$ آنگاه برنامه ریزی * جواب یکتای $x^* = x^*(\mu)$ و $y^* = y^*(\mu)$ و $s^* = s^*(\mu)$ دارد که $x^*(\mu)$ جواب یکتای بیشینه کن f_μ به شرط $Ax = b$ است.

۵ ایده ی الگوریتم نقطه درونی

- μ را برابر ۱ قرار بده.
- یک جواب اولیه x و yو s پیدا کن.
- یک تغییر کوچک روی μ ایجاد کن.
- یک تغییر کوچک روی x, y, s ایجاد کن.
  $\triangle s = +s$ و$\triangle x = +x$ و $\triangle y = +y$

با جایگذاری نقاط جدید در قیود داریم:

$$A(x + \triangle x) = b$$
$$A^T(y + \triangle y) - (s + \triangle s) = c$$
$$((s_1 + \triangle s_1)(x_1 + \triangle x_1), ..., (s_n + \triangle s_n)(x_n + \triangle x_n) = \mu_{\text{new}} 1$$
$$(x + \triangle x), (s + \triangle s) > 0$$

پس از تقریب درجه ۱:

$$A\triangle x = \circ$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = \circ$$
$$(s_۱\triangle x_۱ + x_۱\triangle s_۱, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu_{\text{new}}۱ - (s_۱x_۱, ..., s_nx_n)$$

۶ الگوریتم نقطه درونی

۱) قرار دهید$\mu = ۱$ و y و s و x را بیابید به طوری که:

$$Ax = b$$
$$A^Ty - s = c$$
$$x, s > \circ$$
$$cdist_\mu(x, s) < \sqrt{۲}$$

که در آن:

$$cdist_\mu(x, s) = \parallel (\rho(s_۱x_۱, \mu), ..., \rho(s_nx_n, \mu)) \parallel$$
$$\rho(a, \mu) = \sqrt{a/\mu} - \sqrt{\mu/a}$$

۲) تا زمانی که $\mu \geq \epsilon$: مراحل ۳ و ۴ را تکرار کنید و زمانی که $\mu < \epsilon$ ، x را به عنوان جواب تقریبا بهینه ارائه دهید و متوقف شوید.
۳) μ را با $\mu(۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{n}})$ جایگزین کنید.
۴)$\triangle s$ و $\triangle y$ و $\triangle x$ را از حل دستگاه زیر به دست آورید.

$$A\triangle x = \circ$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = \circ$$
$$(s_۱\triangle x_۱ + x_۱\triangle s_۱, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu۱ - (s_۱x_۱, ..., s_nx_n)$$

سپس قرار دهید:

$$x = x + \triangle x$$
$$y = y + \triangle y$$
$$s = s + \triangle s$$

و به مرحله ۲ باز گردید.

۱.۶ شروع الگوریتم

مانند روش سیمپلکس ابتدا برنامه ریزی زیر که جواب بدیهی دارد را حل میکنیم و سپس برنامه ریزی اصلی را حل میکنیم.

$$Ax - \tau b \leq \circ$$
$$-A^Ty + \tau c \leq \circ$$
$$b^Ty - c^Tx \leq \circ$$
$$x, y, \tau \geq \circ$$

۷ تحلیل زمان اجرا

اگر nتعداد معادلات و L تعداد بیت ها باشد:

- تعداد مراحل: $O(\sqrt{n}L)$
- کران پایین $O(\sqrt{n}logn)$ مرحله برای تمام الگوریتم های نقطه درونی
- درعمل در lgn مرحله انجام می شود