بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

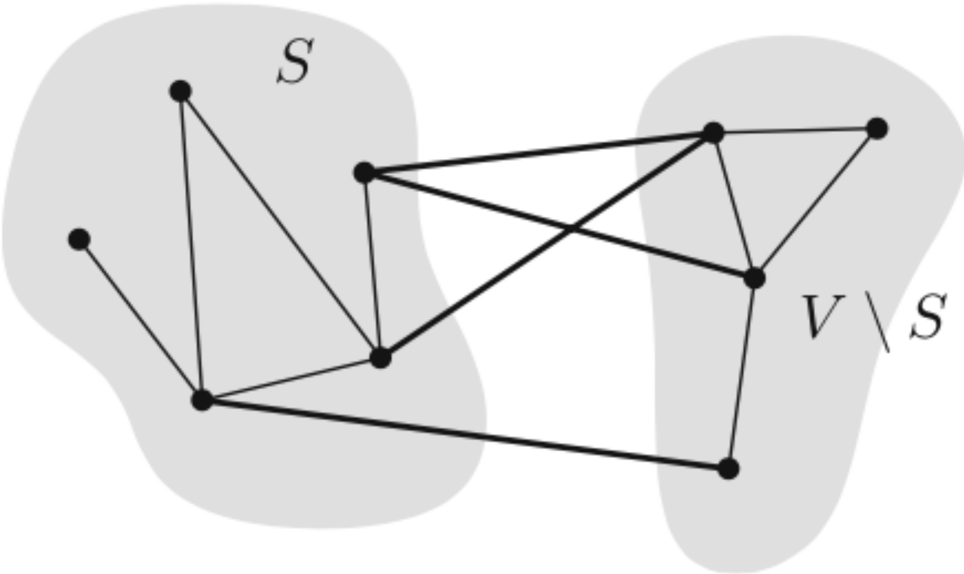
جلسه سوم: الگوریتم تقریبی برای برش بیشینه (ادامه) + برنامه‌ریزی نیمه‌معین

Project: People

الگوریتم تقریبی برای مسئله برش بیشینه

مسئله «برش بیشینه»

- ورودی: گراف
- خروجی: برش (S, V/S)
- هدف: بیشینه کردن



$$E(S, V \setminus S) =$$
$$\{e \in E : |e \cap S| = |e \cap (V \setminus S)| = 1\}$$

سخت!
NP_سخت

الگوریتم گومنز_ ویلیامسون

- مرحله ۱: برنامه‌ریزی ریاضی برای مسئله
- مرحله ۲: آرام‌سازی
- مرحله ۳: تبدیل آرام‌سازی به برنامه‌ریزی نیمه‌معین
- مرحله ۴: گرد کردن (محاسبه جواب نهایی)
- مرحله ۵: محاسبه اتلاف گرد کردن

مرحله ۲ : آرام‌سازی

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i=1,\dots,n. \end{array}$$

$$z_i$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{u}_i \in S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j}{2} \\ \text{subject to} & \mathbf{u}_i \in S^{n-1}, \quad i=1,2,\dots,n. \end{array}}$$

مرحله ۳: تبدیل آرام‌سازی به برنامه‌ریزی نیمه‌معین

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j}{2} \\ \text{subject to} & \mathbf{u}_i \in S^{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

$$x_{ij} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j$$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-x_{ij}}{2} \\ \text{subject to} & x_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

1. Compute an almost optimal solution $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*$ of the vector program

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j}{2} \\ \text{subject to} & \mathbf{u}_i \in S^{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

   This is a solution that satisfies

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{SDP}(G) - 5 \cdot 10^{-4} \geq \mathsf{Opt}(G) - 5 \cdot 10^{-4},$$

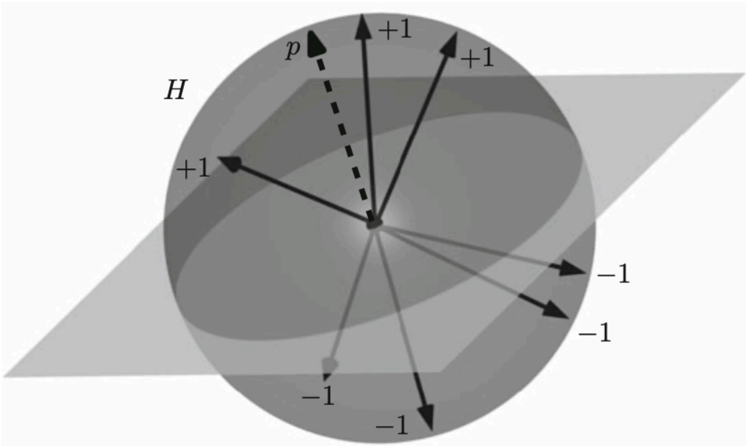
   and it can be found in polynomial time by semidefinite programming and Cholesky factorization.
2. Choose $\mathbf{p} \in S^{n-1}$ uniformly at random, and output the cut induced by

$$S := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon \mathbf{p}^T\mathbf{u}_i^* \geq 0\}.$$

- انتخاب صفحه: انتخاب بردار p عمود بر صفحه
- دو طرف صفحه:

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

-



ما = $\sum_{\{i,j\}\in E} \mathbb{P}[\mathrm{sgn}(pu_i) \neq \mathrm{sgn}(pu_i')]$

$$\mathrm{OPT}(G) - \epsilon \leq \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - {\mathbf{u}_i^*}^T \mathbf{u}_j^*}{2}$$

مرحله ۵:

محاسبه اتلاف

گرد کردن

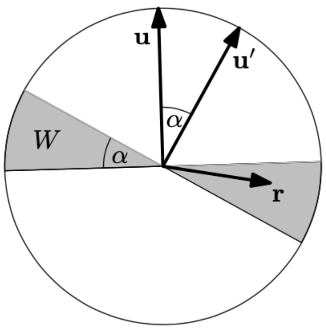
مرحله ۵: محاسبه اتلاف گرد کردن

1.4.1 Lemma. *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in S^{n-1}$. *The probability that* (1.5) *maps* $\mathbf{u}$ *and* $\mathbf{u}'$ *to different values is*

$$\frac{1}{\pi} \arccos \mathbf{u}^T \mathbf{u}'.$$

- اثبات:
  - r: تصویر p روی صفحه u و u’
  - pu و ru هم علامتند
  - pu’ و ru’ هم علامتند
  - r: زاویه‌ای با توزیع یکنواخت دارد.

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



مرحله ۵: محاسبه اتلاف گرد کردن

1.4.1 Lemma. *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in S^{n-1}$. *The probability that* (1.5) *maps* $\mathbf{u}$ *and* $\mathbf{u}'$ *to different values is*

$$\frac{1}{\pi} \arccos \mathbf{u}^T \mathbf{u}'.$$

ما $= \sum_{\{i,j\}\in E} \mathbb{P}[\mathrm{sgn}(pu_i) \neq \mathrm{sgn}(pu_i')] = \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{\pi}$

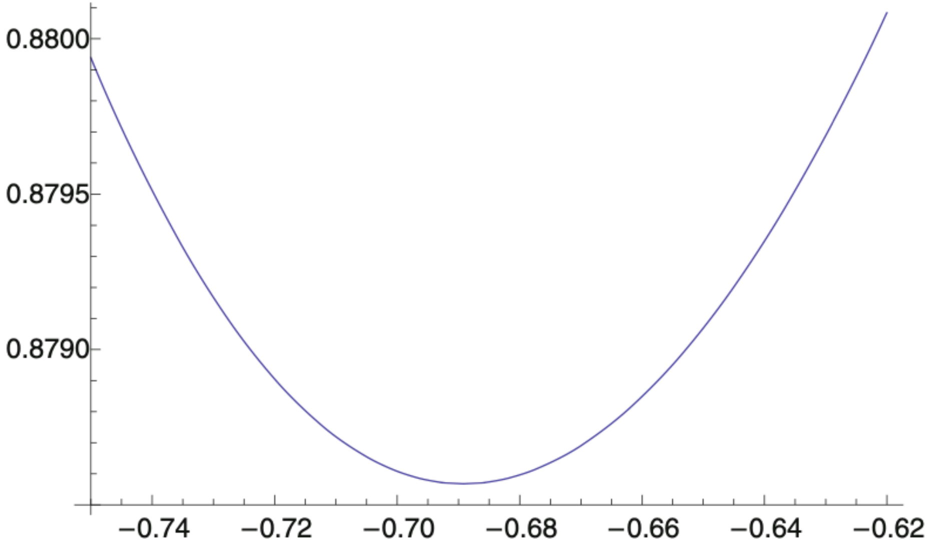
$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

؟

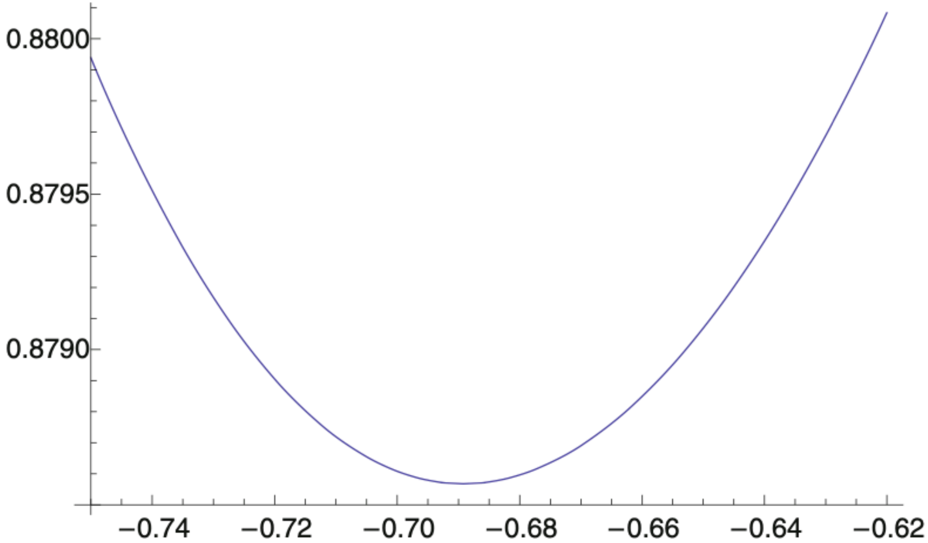
$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq \delta \; \frac{1-z}{2}.$$

$$z \in [-1, 1]$$

$$f(z) = \frac{2\arccos(z)}{\pi(1-z)}$$



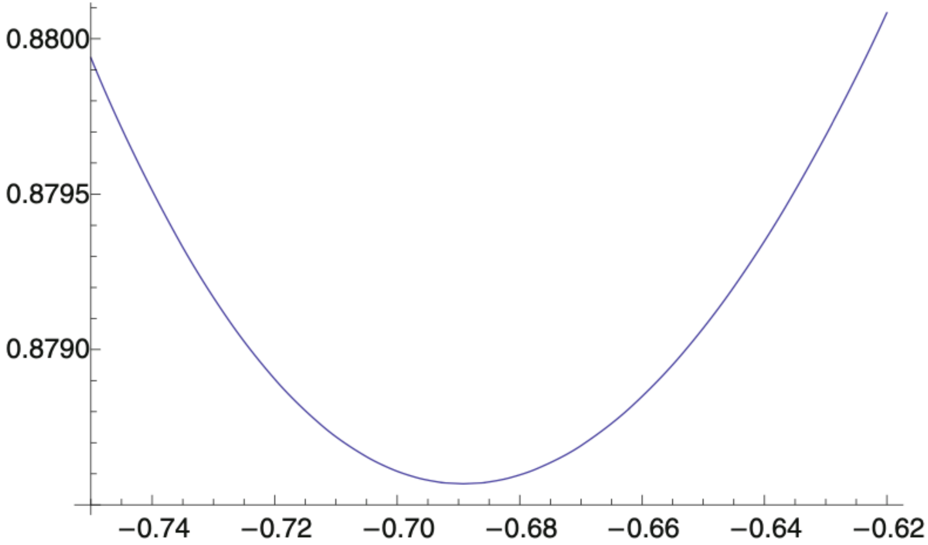
$$f(z) = \frac{2\arccos(z)}{\pi(1-z)}$$



$$f(z) = \frac{2\arccos(z)}{\pi(1-z)}$$

$$\boxed{z^* \approx -0.68915773665}$$

$$f(z^*) \approx 0.87856720578 > 0.8785672$$



$$f(z) = \frac{2\arccos(z)}{\pi(1-z)}$$

$$\boxed{z^* \approx -0.68915773665}$$

$$f(z^*) \approx 0.87856720578 > 0.8785672$$

1.4.2 Lemma. *For all* $z \in [-1, 1]$,

$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq 0.8785672\,\frac{1-z}{2}.$$

$$ما = \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{\pi} \geq 0.8785672 \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{2}$$

ما =

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{\pi} \geq 0.8785672 \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{2}$$

$$\geq 0.8785672(\mathsf{Opt}(G) - \varepsilon)$$

ما =

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{\pi} &\geq 0.8785672 \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{2} \\
&\geq 0.8785672(\mathsf{Opt}(G) - \varepsilon) \\
&\geq 0.878\mathsf{Opt}(G),
\end{aligned}
$$

جمع بندی

1.4.3 Theorem. *Algorithm* `GWMaxCut` *is a randomized* 0.878*-approximation algorithm for the* MaxCut *problem.*

1. Compute an almost optimal solution $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*$ of the vector program

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j}{2} \\ \text{subject to} & \mathbf{u}_i \in S^{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

   This is a solution that satisfies

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{SDP}(G) - 5 \cdot 10^{-4} \geq \mathsf{Opt}(G) - 5 \cdot 10^{-4},$$

   and it can be found in polynomial time by semidefinite programming and Cholesky factorization.

2. Choose $\mathbf{p} \in S^{n-1}$ uniformly at random, and output the cut induced by

$$S := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \mathbf{p}^T\mathbf{u}_i^* \geq 0\}.$$

برنامه‌ریزی نیمه‌معین

Project: People

$$\mathrm{SYM}_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : x_{ij} = x_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\mathrm{SYM}_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : x_{ij} = x_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

2.2.1 Fact. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$. The following statements are equivalent.*

(i) *M is positive semidefinite, i.e., all the eigenvalues of M are nonnegative.*
(ii) *$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*
(iii) *There exists a matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $M = U^T U$.*

$$\mathrm{SYM}_n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : x_{ij} = x_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

2.2.1 Fact. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$. The following statements are equivalent.*

(i) *M is positive semidefinite, i.e., all the eigenvalues of M are nonnegative.*
(ii) *$\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*
(iii) *There exists a matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ such that $M = U^T U$.*

2.2.2 Definition. PSD_n *is the set of all positive semidefinite $n \times n$ matrices.*

الگوریتم مناسب تجزیه چولسکی

- الگوریتمی چولسکی:
  - با گرفتن M، در زمان چندجمله‌ای ماتریس U را تولید می‌کند که
  - $\|U^T U - M\|_F / \|M\|_F \leq 2^{-n}$
  - زمان اجرا $O(n^3)$

بەرنامەریزی نیمەمعین

برنامه‌ریزی خطی (فرم تساوی)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

تبدیل بردار به ماتریس

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

بردار x

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

بردار x

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

تبدیل خطی روی بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

بردار x

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

بردار x

ماتریس $X \in \mathrm{SYM}_n$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

تبدیل بردار به ماتریس

ضرب داخلی بین دو بردار

ضرب داخلی بین دو ماتریس

بردار x

ماتریس $X \in \mathrm{SYM}_n$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

$$X \bullet Y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$$

ضرب داخلی بین دو بردار

ضرب داخلی بین دو ماتریس

بردار x

ماتریس $X \in \mathrm{SYM}_n$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

$$X \bullet Y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$$

ضرب داخلی بین دو بردار

ضرب داخلی بین دو ماتریس

بردار x

ماتریس $X \in \mathrm{SYM}_n$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

تبدیل خطی روی ماتریس

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

$$X \bullet Y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$$

ضرب داخلی بین دو بردار

ضرب داخلی بین دو ماتریس

بردار x

ماتریس $X \in \mathrm{SYM}_n$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{subject to} && A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

تبدیل خطی روی ماتریس

تبدیل خطی روی بردار

نامنفی بودن بردار

مثبت نیمه‌معین $X \succcurlyeq 0$

؟ برنامه‌ریزی نیمه‌معین ؟

2.4.1 Definition. *A semidefinite program in equational form is the following kind of optimization problem:*

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} = b_k, \quad k = 1, \ldots, m, \\
& X \succeq 0,
\end{array}
\tag{2.2}
$$

where the x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, are n^2 variables satisfying the symmetry conditions $x_{ji} = x_{ij}$ for all i, j, the c_{ij}, a_{ijk} and b_k are real coefficients, and

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{SYM}_n.$$

2.4.1 Definition. *A semidefinite program in equational form is the following kind of optimization problem:*

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \boxed{\begin{array}{l} C \bullet X \\ A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1, \ldots, m \\ X \succcurlyeq 0 \end{array}} \\ \text{subject to} & \end{array} \tag{2.2}$$

where the x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, are n^2 variables satisfying the symmetry conditions $x_{ji} = x_{ij}$ for all i, j, the c_{ij}, a_{ijk} and b_k are real coefficients, and

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{SYM}_n.$$

2.4.1 Definition. *A semidefinite program in equational form is the following kind of optimization problem:*

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \boxed{\begin{array}{l} C \bullet X \\ A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1,\ldots,m \\ X \succcurlyeq 0 \end{array}} \\ \text{subject to} & \end{array} \tag{2.2}$$

where the x_{ij}, $1 \le i,j \le n$, are n^2 variables satisfying the symmetry conditions $x_{ji} = x_{ij}$ for all i,j, the c_{ij}, a_{ijk} and b_k are real coefficients, and

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{SYM}_n.$$

مفاهیم:

- جواب شدنی،
- برنامه‌ریزی معین شدنی،
- ارزش برنامه‌ریزی معین $\sup\{C \bullet X : A(X) = \mathbf{b}, X \succeq 0\}$
- کران‌دار و بی‌کران
- جواب بهینه

کراندار =؟=> بهینه

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & -x_{11} & & \\
\text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\
 & X & \succeq & 0.
\end{array}
$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix}$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & -x_{11} & & \\
\text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\
& X & \succeq & 0.
\end{array}
$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix}$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & -x_{11} & & \\
\text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\
 & X & \succeq & 0.
\end{array}
$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_{11}, x_{22} \geq 0$$

کران‌دار = ؟ => بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$\Rightarrow$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \binom{1}{a} \Rightarrow 0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

$$\Rightarrow$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & -x_{11} & & \\
\text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\
& X & \succeq & 0.
\end{array}
$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$0 \leq (1 \quad a) X \binom{1}{a}$$

$$0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & -x_{11} \\
\text{subject to} & x_{12} = 1 \\
& X \succeq 0.
\end{array}
$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow x_{11}x_{22} \geq 1$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 \quad a) X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_{11}x_{22} \leq 0 \Rightarrow x_{11}x_{22} \geq 1$$

کران‌دار =؟=> بهینه

$$\begin{array}{lrcl} \text{Maximize} & -x_{11} & & \\ \text{subject to} & x_{12} & = & 1 \\ & X & \succeq & 0. \end{array}$$

$$0 \preccurlyeq X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11}, x_{22} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq x_{11} + 2a + x_{22}a^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_{11}x_{22} \leq 0 \Rightarrow x_{11}x_{22} \geq 1$$

کران‌دار
اما جواب بهینه ندارد

برنامه‌ریزی نیمه‌معین + متغیرهای مثبت

$$X \succeq 0 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$$

برنامه‌ریزی نیمه‌معین + متغیرهای مثبت

$$X \succeq 0 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$$

برنامه‌ریزی نیمه‌معین + متغیرهای مثبت

$$X \succeq 0 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$$

$$X' = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$$

برنامه‌ریزی نیمه‌معین + متغیرهای مثبت

$$X \succeq 0 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$$

$$X' = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \qquad X' \succeq 0$$

نامساوی

$$x_{23} + 5x_{15} \leq 22$$

نامساوی

$$x_{23} + 5x_{15} \leq 22$$

$$x_{23} + 5x_{15} + y = 22$$

متغیر آزاد

$$x_i \lesseqgtr 0$$

متغیر آزاد

$$x_i \lesseqgtr 0$$

$$x_i = x_i' - x_i''$$

$$x_i' , x_i'' \geq 0$$

فرم تساوی، معادل با ...

- دو سری متغیر:
  - سری اول: ماتریس مثبت نیمه‌معین
  - سری دوم: بدون قید مثبت نیمه‌معین
    - قیود تساوی، نامساوی
    - متغیرهای مثبت، یا آزاد
- قابل تبدیل
  - برنامه‌ریزی نیمه‌معین در فرم تساوی

فرم تساوی، معادل با ...

- دو سری متغیر:
  - سری اول: ماتریس مثبت نیمه‌معین
  - سری دوم: بدون قید مثبت نیمه‌معین
    - قیود تساوی، نامساوی
    - متغیرهای مثبت، یا آزاد
- قابل تبدیل
  - برنامه‌ریزی نیمه‌معین در فرم تساوی

$$
\begin{aligned}
&C \bullet X \\
&A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1,\dots,m \\
&X \succcurlyeq 0
\end{aligned}
$$

بەرنامەڕێژی

نیمەمعین

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

$$
\boxed{\begin{array}{l} C \bullet X \\ A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1,\ldots,m \\ X \succcurlyeq 0 \end{array}}
$$

- برای ما:
  - ϵ_عمیق: ماتریس شدنی X که همه ماتریس‌های با فاصله ϵ شدنی باشند

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

$$
\begin{aligned}
& C \bullet X \\
& A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1, \ldots, m \\
& X \succcurlyeq 0
\end{aligned}
$$

- برای ما:
  - ϵـ عمیق: ماتریس شدنی X که همه ماتریس‌های با فاصله ϵ شدنی باشند

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

$$
\boxed{\begin{array}{l} C \bullet X \\ A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1, \ldots, m \\ X \succcurlyeq 0 \end{array}}
$$

- برای ما:
  - ϵـ عمیق: ماتریس شدنی X که همه ماتریس‌های با فاصله ϵ شدنی باشند

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

$$
\begin{aligned}
& C \bullet X \\
& A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1, \ldots, m \\
& X \succcurlyeq 0
\end{aligned}
$$

- برای ما:
  - ϵ_عمیق: ماتریس شدنی X که همه ماتریس‌های با فاصله ϵ شدنی باشند

مروری بر الگوریتم‌ها

- روش بیضی‌گون:
  - بهترین نتیجه نظری
  - کمینه/بیشینه تابع خطی روی مجموعه محدب C با بعد کامل
  - C در یک گوی با شعاع R (داده شده) جا شود
  - C با یک دانای کل جداکننده ضعیف داده شود.
  - جوابی که با یک جواب بهینه فاصله‌اش حداکثر ϵ است

$$\boxed{\begin{array}{l} C \bullet X \\ A_k \bullet X = b_k, \quad k = 1, \ldots, m \\ X \succcurlyeq 0 \end{array}}$$

- برای ما:
  - ϵ_عمیق: ماتریس شدنی X که همه ماتریس‌های با فاصله ϵ شدنی باشند

با استفاده از روش بیضی‌گون

2.6.1 Theorem. *Let us assume that the semidefinite program (P) has rational coefficients, let R be an explicitly given bound on the maximum Frobenius norm $\|X\|_F$ of all feasible solutions of (P), and let $\varepsilon > 0$ be a rational number.*

Let us put $v_{\mathrm{deep}} := \sup\{C \bullet X : X$ an ε-deep feasible solution of (P)$\}$.

There is an algorithm, with runtime polynomial in the (binary) encoding sizes of the input numbers and in $\log(R/\varepsilon)$, that produces one of the following two outputs.

(a) *A matrix $X^* \in L$ (i.e., satisfying all equality constraints) such that $\|X^* - X\|_F \leq \varepsilon$ for some feasible solution X, and with $C \bullet X^* \geq v_{\mathrm{deep}} - \varepsilon$.*

(b) *A certificate that (P) has no ε-deep feasible solutions. This certificate has the form of an ellipsoid $E \subset L$ that, on the one hand, is guaranteed to contain all feasible solutions, and on the other hand, has volume so small that it cannot contain an ε-ball.*

با استفاده از روش بیضی‌گون

2.6.1 Theorem. *Let us assume that the semidefinite program (P) has rational coefficients, let R be an explicitly given bound on the maximum Frobenius norm $\|X\|_F$ of all feasible solutions of (P), and let $\varepsilon > 0$ be a rational number.*
Let us put $v_{\text{deep}} := \sup\{C \bullet X : X$ an ε-deep feasible solution of $(P)\}$.
There is an algorithm, with runtime polynomial in the (binary) encoding sizes of the input numbers and in $\log(R/\varepsilon)$, that produces one of the following two outputs.

(a) *A matrix $X^* \in L$ (i.e., satisfying all equality constraints) such that $\|X^* - X\|_F \le \varepsilon$ for some feasible solution X, and with $C \bullet X^* \ge v_{\text{deep}} - \varepsilon$.*

(b) *A certificate that (P) has no ε-deep feasible solutions. This certificate has the form of an ellipsoid $E \subset L$ that, on the one hand, is guaranteed to contain all feasible solutions, and on the other hand, has volume so small that it cannot contain an ε-ball.*

مشکل:
R بزرگ

الگوریتم‌های دیگر

- الگوریتم نقطه درونی (داخلی)
  - سریع در عمل
  - چند جمله‌ای در مدل RAM حقیقی

الگوریتم‌های دیگر

- الگوریتم نقطه درونی (داخلی)
  - سریع در عمل
  - چند جمله‌ای در مدل RAM حقیقی
- الگوریتم Hazan
  - چند جمله‌ای در مدل RAM حقیقی
  - وابستگی زمانی خطی به $1/\epsilon$

چرا R ممکن است بزرگ باشد: مثال

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & x_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n \end{matrix}} \end{pmatrix} \succeq 0$$

چرا R ممکن است بزرگ باشد: مثال

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & x_n
\end{pmatrix} \succeq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} \succeq 0
$$

چرا R ممکن است بزرگ باشد: مثال

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & x_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n \end{matrix}} \end{pmatrix} \succeq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} = x_i - x_{i-1}^2 \geq 0$$

چرا R ممکن است بزرگ باشد: مثال

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & x_n
\end{pmatrix} \succeq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} \succeq 0
$$

$$
\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} = x_i - x_{i-1}^2 \geq 0 \Rightarrow x_i \geq x_{i-1}^2
$$

چرا R ممکن است بزرگ باشد: مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \succeq 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$\Rightarrow\; \det \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} \\ x_{i-1} & x_i \end{pmatrix} = x_i - x_{i-1}^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x_i \geq x_{i-1}^2 \;\Rightarrow\; x_n \geq 2^{2^n}$$

پایان