دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

اثبات لم فارکاش و روش بیضی‌گون

جلسه یازدهم

نگارنده: زهرا طهرانی نسب

مروری بر مباحث گذشته

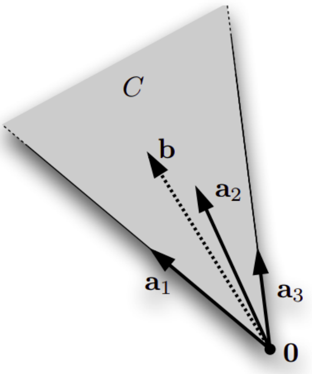
لم فارکاش

لم فارکاش درباره این که چه زمانی یک برنامه‌ریزی خطی جواب دارد صحبت می‌کند.

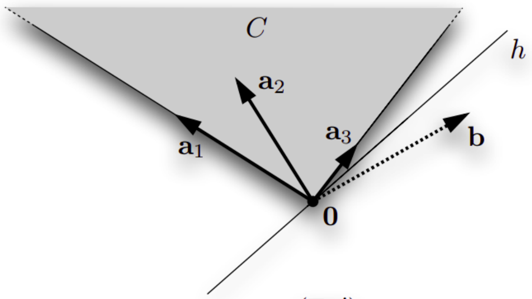
توصیف هندسی لم فارکاش

بردار b یا در کنج تولید شده توسط $a_1, a_2, ..., a_n$ قرار دارد و یا صفحه ای وجود دارد که b یک سمت آن و $a_1, a_2, ..., a_n$ در سمت دیگر آن قرار می‌گیرند. و یا به توصیف جبری یک بردار y وجود دارد که:

$$y^T A \geq o^T, y^T b < 0$$



(F1′)



(F2′)

لم فارکاش را می‌توان به همه ی حالت های مختلف برنامه‌ریزی خطی تعمیم داد و لم فارکاش میگفت در هر کدام از این حالت ها یک شرط لازم و کافی برای جواب داشتن برنامه‌ریزی خطی ارائه شده است.

	The system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

سپس درباره این صحبت کردیم که با وجود اینکه لم فارکاش فقط درباره وجود جواب صحبت می‌کند و دوگانی درباره بهینه بودن جواب هم صحبت می‌کند، اما لم فارکاش از قضیه دوگانی ضعیف تر نیست و می‌توان دوگانی را از لم فارکاش نتیجه گرفت.

نگاه منطقی به لم فارکاش

اگر چند نامعادله داشته باشیم از ترکیب آن ها می‌توانیم نامعادلات دیگری بسازیم. گاهی می‌توانیم از ترکیب نامعادلات به یک تناقض بدیهی برسیم که در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که برنامه‌ریزی خطی ما جواب شدنی ندارد.

مثلا اگر داشته باشیم:

$$۴x_۱ + x_۲ \leq ۴ \tag{۱}$$

$$-x_۱ + x_۲ \leq ۱ \tag{۲}$$

$$-۲x_۱ - x_۲ \leq -۳ \tag{۳}$$

از ترکیب دو نامعادله ی اول می‌توانیم به نامعادله ی زیر برسیم (۳ برابر اولی به اضافه ۲ برابر دومی):

$$۱۰x_۱ + ۵x_۲ \leq ۱۴ \tag{۴}$$

که با جمع کردن ۵ برابر نامعادله ی (۳) و نامعادله ی (۴) می‌توانیم به نامعادله ی زیر برسیم که یک تناقض بدیهی ست:

$$۰ \leq -۱ \tag{۵}$$

می‌دانیم اگر از ترکیب نامعادلات به یک تناقض بدیهی برسیم، برنامه‌ریزی خطی ما جواب ندارد. حال سوال اینجاست که آیا برعکس آن هم درست است؟ یعنی آیا می‌توان گفت که اگر در برنامه‌ریزی خطی جواب شدنی نداشته باشیم می‌توانیم از ترکیب نا ممعادلات به یک تناقض بدیهی برسیم؟ می‌توان با استفاده از لم فارکاش این موضوع را نشان داد:

Whenever a system $Ax \leq b$ of finitely many linear inequalities is inconsistent, that is, there is no $x \in \mathbb{R}^n$ satisfying it, we can derive the (obviously inconsistent) inequality $0 \leq -1$ from it by the above procedure. [lp07]

از لم فارکاش داریم:
اگر $Ax \leq b$ جواب شدنی نداشته باشد یک $y \geq ۰$ وجود دارد که $y^T A = ۰$ و $y^T b < ۰$ یعنی یک ترکیب خطی از نامعادلات $Ax \leq b$ وجود دارد که سمت چپ آن صفر و سمت راست آن منفی شود.

$$
\begin{aligned}
& Ax \leq b \\
\implies & y^T Ax \leq y^T b \\
\implies & ۰ \leq y^T b < ۰
\end{aligned}
$$

دو طرف نامعادله را بر $|y^T b|$ تقسیم میکنیم:

$$\implies ۰ \leq -۱$$

روش حذف فوریه‌ـ موتسکین

$$
\begin{aligned}
۲x - ۵y + ۴z &\leq ۱۰ \\
۳x - ۶y + ۳z &\leq ۹ \\
۵x + ۱۰y - z &\leq ۱۵ \\
-x + ۵y - ۲z &\leq -۷ \\
-۳x + ۲y + ۶z &\leq ۱۲
\end{aligned}
$$

می‌توانیم از نامعادلات بالا، نامعادلات زیر را نتیجه بگیریم (x را به یک سمت می‌بریم و بر ضریب x تقسیم می‌کنیم):

I.

$$
\begin{aligned}
x &\leq ۵ + \frac{۵}{۲}y - ۲z \\
x &\leq ۳ + ۲y - z \\
x &\leq ۳ - ۲y + \frac{۱}{۵}z \\
x &\geq ۷ + ۵y - ۲z \\
x &\geq -۴ + \frac{۲}{۳}y + ۲z
\end{aligned}
$$

.II

$$max(۷ + ۵y - ۲z, -۴ + \frac{۲}{۳}y + ۲z) \leq min(۵ + \frac{۵}{۲}y - ۲z, ۳ + ۲y - z, ۳ + ۲y + \frac{۱}{۵}z)$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
۷ + ۵y - ۲z &\leq ۵ + \frac{۵}{۲}y - ۲z \\
۷ + ۵y - ۲z &\leq ۳ + ۲y - z \\
۷ + ۵y - ۲z &\leq ۳ - ۲y + \frac{۱}{۵}z \\
-۴ + \frac{۲}{۳}y + ۲z &\leq ۵ + \frac{۵}{۲}y - ۲z \\
-۴ + \frac{۲}{۳}y + ۲z &\leq ۳ + ۲y - z \\
-۴ + \frac{۲}{۳}y + ۲z &\leq ۳ - ۲y + \frac{۱}{۵}z.
\end{aligned}$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
\frac{۵}{۲}y &\leq -۲ \\
۳y - z &\leq -۴ \\
۷y - \frac{۱۱}{۵}z &\leq -۴ \\
\frac{۱۱}{۶}y + ۴z &\leq ۹ \\
\frac{۴}{۳}y + ۳z &\leq ۷ \\
\frac{۸}{۳}y + \frac{۹}{۵}z &\leq ۷.
\end{aligned}$$

اگر معادلات Iجواب شدنی داشته باشد معادلات II نیز جواب شدنی خواهد داشت و برعکس.
و به همین ترتیب می‌توان متغیر های دیگر را حذف کرد. آخرین معادله که متغیری ندارد اگر درست باشد، همه ی برنامه‌ریزی های قبلی جواب دارند و اگر به تناقض رسیدیم هیچ کدام جواب ندارند. و به این ترتیب می‌توان یک جواب شدنی برای برنامه‌ریزی خطی ارائه داد.
مشکلی که در این روش وجود دارد این است که ممکن است در هر مرحله تعداد معادلات دو برابر شود و در نهایت به $m^{۲^n}$ معادله برسیم.

$$Ax \leq b \ (n \ variables) \rightarrow A'x' \leq b' \ (n - ۱ \ variables)$$

> $Ax \leq b$ has a solution if and only if $A'x' \leq b'$ has a solution, and each inequality of $A'x' \leq b'$ is a positive linear combination of some inequalities from $Ax \leq b$. [lp07]

اثبات (قسمت اول)

$$Ax \leq b \quad a_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in C \\ -1 & \text{if } i \in F \\ 0 & \text{if } i \in L \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_۱ + a_j'^T x' \leq b_j &\implies x_۱ \leq b_j - a_j'^T x' \\ -x_۱ + a_k'^T x' \leq b_k &\implies -b_k + a_k'^T x' \leq x_۱ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -b_k + a_k'^T x' \leq b_j - a_j'^T x' \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_j'^T x' + a_k'^T x' &\leq b_j + b_k \\ j \in C, k &\in F. \end{aligned}$$

نشان دادیم همه ی نامعادله‌های $A'x' \leq b'$ از ترکیب نامنفی نامعادله های $Ax \leq b$ ساخته شده اند.

اثبات (قسمت دوم)

$$Ax \leq b \overset{feasible}{\Longleftrightarrow} A'x' \leq b'$$

($\Longrightarrow$) کمی بالاتر اثبات کردیم. ✓

($\Longleftarrow$) برای اثبات این قسمت داریم:

$$\max_{k\in F}\left(\mathbf{a'}_k^T\tilde{\mathbf{x}}' - b_k\right) \underset{\overset{\uparrow}{\mathrm{x}_1}}{\leq} \min_{j\in C}\left(b_j - \mathbf{a'}_j^T\tilde{\mathbf{x}}'\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \mathbf{a'}_j^T\tilde{\mathbf{x}}' &\leq b_j, \quad j \in C,\\ -\tilde{x}_1 + \mathbf{a'}_k^T\tilde{\mathbf{x}}' &\leq b_k, \quad k \in F. \end{aligned}$$

اثبات لم فارکاش

$$Ax \leq b \ (n \ variables) \rightarrow A'x' \leq b' \ (n - ۱ \ variables)$$

$Ax \leq b$ has a solution if and only if $A'x' \leq b'$ has a solution, and each inequality of $A'x' \leq b'$ is a positive linear combination of some inequalities from $Ax \leq b$. [lp07]

$$Ax \leq b$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall y \geq \circ, y^TA = \circ \Rightarrow y^Tb \geq \circ$$

($\Longrightarrow$) برای اثبات این قسمت داریم:

$$\begin{array}{r} A\widetilde{x} \leq b \\ \forall y \geq \circ \quad satisfies \quad y^TA = \circ^T \end{array} \quad \Rightarrow \quad \circ = y^TA\widetilde{x} \leq y^Tb$$

($\Longleftarrow$) برای اثبات این قسمت داریم:

برای اثبات این قسمت، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. یعنی اگر $Ax \leq b$ نشدنی باشد آنگاه $\exists y \geq \circ, y^TA = \circ^T, y^Tb < \circ$

$$Ax \leq b \text{ نشدنی } \xrightarrow{\text{حکم}} y \geq \circ, y^TA = \circ^T, and\ y^Tb < \circ$$

استقراء روی تعداد متغیر ها:

پایه : $n = 0 \quad 0 \leq b$

اگر $b \geq \circ$ نشدنی باشد یعنی حداقل یکی از مولفه های b منفی است. مثلا $b_i < \circ$. متغیر y را به این شکل تشکیل می‌دهیم:

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i \\ 1 & \text{if } j = i \end{cases}$$

در نتیجه $y^T b < \circ$

$$Ax \leq b \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه- موتزکین}} A'x' \leq b'$$
$$(\circ | A') = MA, \quad b' = Mb.$$

$$y = M^T y' \to \begin{cases} y^T A = y'^T MA = y'^T(\circ|A') = \circ^T \\ y^T b = y'^T Mb = y'^T b' < \circ \\ y \geq \circ \quad (y' \geq \circ) \end{cases}$$

مشکل اصلی ای که با روش سیمپلکس داشتیم این بود که زمان اجرای آن برای همه‌ی ورودی ها چند جمله‌ای نیست. یعنی ممکن است با تعداد کمی نامعادله زمان اجرای آن بسیار زیاد باشد. یکی از روش‌های جالب دیگری که برای حل LP ارائه شد روش بیضی‌گون بود.

بیضی‌گون چیست؟

گوی واحد در $\mathbb{R}^d$

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2 \leq 1$$

بیضی‌گون در جهت راستا های اصلی

$$(\frac{x_1}{a_1})^2 + ... + (\frac{x_d}{a_d})^2 \leq 1$$

می‌توان بیضی‌گون را به فرم ماتریسی نیز نشان داد:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & a_d \end{bmatrix}$$

$$x^T A^{-2} x \leq 1$$

اگر بیضی‌گون بالا را با ماتریس دوران U دوران دهیم خواهیم داشت:

$$(U^{-1}x)^T A^{-2}(U^{-1}x) \leq 1$$
$$x^T Q x \leq 1$$
$$Q = U^{-1T}A^{-1T}A^{-1}U^{-1} = B^T B$$
$$x^T Q x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) \geq 0$$

بیضی‌گون در حالت کلی(با در نظر گرفتن جا به جایی)

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : (x-c)^T Q (x-c) \leq 1\}$$

$c \in \mathbb{R}^d$ یک بردار دلخواه

Q یک ماتریس مثبت نیمه معین است.

(ماتریس مثبت نیمه معین ماتریسی است که مقدار ویژه های آن نامنفی باشد.)

نکته۱: حجم بیضی‌گون با شعاع های اصلی $a_1, a_2, ...a_d$ برابر $a_1 a_2 ... a_d$ برابر حجم گوی واحد است.

نکته۲: تصویر بیضی‌گون تحت اثر تبدیل های خطی همچنان بیضی‌گون است.

اثبات نکته ۲:

$$T(E) = \{x : T^{-1}x \in E\}$$
$$= \{y : (T^{-1}y - c)^T Q (T^{-1}y - c) \leq 1\}$$
$$(T^{-1}(y - c'))^T Q (T^{-1}(y - c')) \leq 1$$
$$(y - c')^T (T^{-1})^T Q T^{-1} (y - c') \leq 1$$

که $(T^{-1})^T Q T^{-1}$ یک ماتریس مثبت نیمه معین است.

روش بیضی‌گون (Ellipsoid method)

می‌توان ثابت کرد که زمان اجرای این روش چند جمله ایست. علاوه بر این یک خاصیت بسیار کاربردی در علوم کامپیوتر دارد: اگر یک LP داشته باشید که تعداد قیود آن چند جمله ای نباشد(حتی نامتناهی باشد) اما یک خواص خوبی داشته باشد، می‌توان با روش بیضی‌گون در زمان چند جمله ای آن LP را حل کرد.

الگوریتم بیضی‌گون با گرفتن یک LP به ما می‌گوید که LP جواب دارد یا خیر و اگر جواب داشت یک جواب شدنی به ما می‌دهد.

داشتیم که سختی یافتن یک جواب شدنی به اندازه یافتن یک جواب بهینه برای LP است. برنامه‌ریزی خطی ای که به الگوریتم بیضی‌گون می‌دهیم باید دو شرط زیر را داشته باشد.

- یک مقدار R می‌گیرد و اگر LP در یک گوی به شعاع R و مرکز ۰ جواب شدنی داشته باشد، یک جواب شدنی برمیگرداند.
- یک ϵ می‌گیرد و اگر حجم فضای جواب های شدنی از حجم یک گوی به شعاع ϵ کمتر بود اجازه دارد بگوید جواب ندارد (یعنی ممکن است بگوید جواب ندارد و یا جوابی برگرداند).

الگوریتم بیضی‌گون

فرض کنید ورودی ها شرط های خواسته شده را دارند.

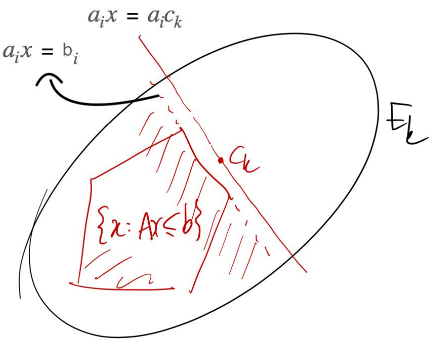
در این الگوریتم در هر مرحله یک بیضی‌گون E_n می‌سازیم که مجموعه ی جواب ها را در بر بگیرد.

$$E_0, E_1, E_2, ..., E_n$$

$E_۰$: گوی با شعاع R
برای سادگی فرض کنید همه ی جواب ها در $E_۰$ است.
در هر مرحله از روی قید های LP بیضی‌گون را کوچک می‌کنیم به طوری که مجموعه ی جواب ها (مجموعه ی P) همواره درون بیضی‌گون بماند.

$$V(E_{k+۱}) \leq (۱-\delta)V(E_k)$$

V : حجم
پس از تعدادی مرحله، یا یک جواب شدنی برای LP پیدا می‌کنیم و یا حجم بیضی‌گون از حجم یک گوی به شعاع ϵ کمتر می‌شود و می‌گوییم LP جواب ندارد.
هر بیضی‌گونی به شکل $(x-c_k)^T Q (x-c_k) \leq ۱$ می‌باشد که c_k مرکز بیضی‌گون است. c_k را در نامعادلات LP می‌گذاریم. اگر صدق کرد، یک جواب یافته ایم و در غیر این صورت حداقل یک نامعادله ی $a_i x \leq b_i$ از برنامه‌ریزی خطی، وجود دارد که c_k در آن صدق نکند و صفحه ی $a_i x = a_i c_k$وجود دارد که از مرکز c_k می‌گذرد و کل P یک سمت آن قرار دارد.



یک نیمه بیضی‌گون خواهیم داشت که همه ی جواب ها را در بر دارد. حال می‌خواهیم یک بیضی‌گون جدید پیدا کنیم که شامل این نیمه بیضی‌گون شود.
مسئله: پوشاندن نیم کره با بیضی‌گون با کمترین حجم (در حقیقت می‌توانیم با یک تبدیل خطی بیضی‌گونی که با آن سر و کار داشته ایم را تبدیل به کره کنیم و آن صفحه کره را نصف می‌کند. حال می‌خواهیم کوچکترین بیضی‌گون شامل این نیم کره را پیدا کنیم و بعد روی این بیضی‌گون به دست آمده تبدیل معکوس می‌زنیم تا بیضی‌گون جدید نیم بیضی‌گون قبلی را بپوشاند. توجه کنید که بیضی‌گون تحت تبدیل خطی همواره بیضی‌گون می‌سازد). حجم این بیضی‌گون جدید $e^{-\frac{۱}{۲d+۲}}$ برابر حجم بیضی‌گون قبلی است (d عدد ثابت است).

تعداد مراحل لازم برای اجرای الگوریتم

$$e^{-\frac{k}{۲d+۲}} \leq (\frac{\epsilon}{R})^d$$
$$e^{\frac{k}{۲d+۲}} \geq (\frac{R}{\epsilon})^d = e^{d \ln \frac{R}{\epsilon}}$$
$$k \geq d(۲d+۲) \ln \frac{R}{\epsilon}$$

اگر R و ϵ مناسب باشند، ($\ln \frac{R}{\epsilon}$ چند جمله ای باشد،) تعداد مراحل لازم برای اجرای الگوریتم، چند جمله ای خواهد بود.

حل مشکل یافتن R و ϵ

If a solution exists, then there is a not too large solution. [lp07]

می‌توان نشان داد که اگر LP یک جواب داشته باشد، حتما جوابی دارد که خیلی بزرگ نیست.

If a solution exists, then the solution set of a slightly relaxed system contains a small ball.
let us put $\eta = 2^{-5\varphi}, \epsilon = 2^{-6\varphi}$ [lp07]
φ : تعداد بیت های کل ورودی است.

اگر همه ی b_i ها را به مقدار η اضافه کنید، شدنی یا نشدنی بودن نقاط عوض نمی‌شود ولی اگر شدنی باشند، حجم فضای شامل نقاط شدنی حداقل $\epsilon = ۲^{-۶\varphi}$ می‌شود.

- با اینکه در بیضی‌گون اعداد رادیکالی داریم که ممکن است گویا نباشد، اما در کامپیوتر ممکن است نتوانیم این اعداد را نشان دهیم و برای حل این مشکل می‌توان بیضی‌گون را کمی بزرگ تر گرفت به طوری که همه ی اعداد گویا باشند.
- می‌توانستیم صفحه را از مرکز بیضی‌گون رد نکنیم و از همان صفحه ی $a_i x = b_i$ استفاده کنیم، اما به علت پیچیده تر شدن محاسبات این کار را نکردیم.

مسئله ی جدا سازی و جادوی Ellipsoid

تنها کاری که روش بیضی‌گون با LP داشت این بود که

۱. یک جواب c_k به LP می‌داد و می‌خواست بداند در LP صدق می‌کند یا خیر.

۲. اگر صدق نمی‌کرد یک نیم فضا می‌گرفت که c_k بیرون آن و مجموعه ی P درون آن بود.

پس الگوریتم نیاز به دسترسی مستقیم به LP ندارد و اگر یک ساختمان داده داشته باشیم که این کار را برایش انجام دهد، الگوریتم کار میکند. و اگر یک LP داشته باشیم که تعداد قید های آن نمایی باشد یا حتی نامتناهی باشد ولی اگر یک نقطه به ساختمان داده بدهیم بتواند بگوید که در کدام یک از قید ها صدق نمی‌کند در این صورت الگوریتم بیضی‌گون کار می‌کند و زمان اجرای آن چند جمله ای است و این نکته ی بسیار جالبی ست که در حل مسائل از آن زیاد استفاده می‌کنیم.

ارجاع و منابع

بخش های 6.7 و 7.1 از [lp07].

مراجع

[lp07] *Jiří matoušek and bernd gärtner. understanding and using linear programming (sections 6.7 and 7.1).* Springer, 2007.