Subject:
Date

جزوه های بهینه سازی کلاسیک

تا قبل از الگوریتم های تقریبی

Subject:
Date

ثابت می‌کنیم $\underset{\text{تطابق}}{P} = \underset{\text{تطابق نیم‌رنجز}}{Q}$. طرف $Q \subseteq P$ بدیهی است.

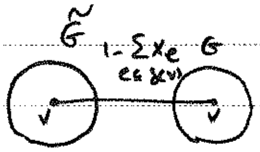
اثبات $P \subseteq Q$: فرض می‌کنیم $x \in P$ و نشان می‌دهیم $x \in Q$

ترکیب محدب

ابتدا یک G' و x' به طرق زیر در G می‌سازیم که $x' \in Q$ (تطابق کامل نیم‌رنجز) در نتیجه $x' \in Q$ (تطابق کامل نیم‌رنجز) در نتیجه x' به صورت یک ترکیب محدب تطابق کامل نوشته می‌شود در G'

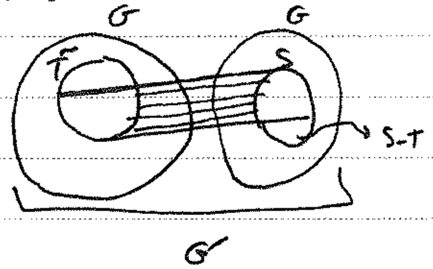
از روی این $x' = \sum \alpha_{M'} \chi_{M'}$ (تطابق کامل در G') به دست می‌آید: $x = \sum \alpha_M \chi_M$ (تطابق کامل در G) و اثبات تمام می‌شود. حالا تعریف x' و G'،

$\tilde G$ که کپی از G است را کنار G بگذار و رأس جدید G' را به این صورت بساز:



$$\sum_{e\in\delta(v)} x'_e = 1 \quad \forall v \in V(G') \quad x' \geq 0$$

حالا باید نشان بدهیم $x' \in Q$ (تطابق کامل نیم‌رنجز) پس $\sum_{e\in\delta(U)} x'_e \geq 1$ $\forall U \subseteq V$، $|U|$ فرد، $|U| \geq 3$. یک U فرد در G' در نظر بگیرید، تعدادی از رأس‌هایش در G و تعدادی دیگر در $\tilde G$ هستند. آن رأس‌هایی که در G هستند را S بنامیم و متناظرشان در $\tilde G$ را برداشته باشیم پس تعدادی هم مال آن در سطر داریم. اما اگر فرد است پس $|S|$ یا $|T|$ یکی‌شان زوج است و دیگری فرد



فرض کنیم $|S-T|$ فرد است. پس داریم:

$$\sum_{v\in V(S-T)}\sum_{e\in\delta(v)} x'_e = 2\sum_{e\in E(S-T)} x'_e + \sum_{e\in\delta(S-T)} x'_e \Rightarrow$$

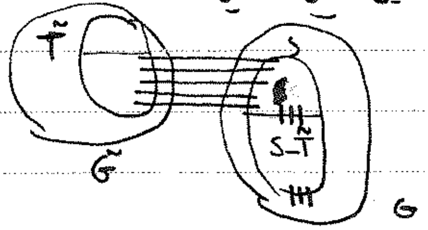
$$\sum_{e\in\delta(S-T)} x'_e = \sum_{v\in V(S-T)}\sum_{e\in\delta(v)} x'_e - 2\sum_{e\in E(S-T)} x'_e \geq |S-T| - (|S-T|-1) = 1$$

چون $\sum_{e\in\delta(v)} x'_e = 1$

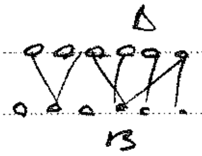
چون $|S-T|$ فرد است پس $x(E(\Theta)) \leq \lfloor \frac{1}{2}|\Theta| \rfloor$ که در ۲ ضرب شود می‌شود $|\Theta|-1$ یعنی $|S-T|-1$

از قیدهای تطابق P نیم‌رنجز

می‌خواستیم ثابت کنیم $\sum_{e\in\delta(u)} x'_e \geq 1$. تا حالا ثابت کردیم $\sum_{e\in\delta(S-T)} x'_e \geq 1$ اما مشکل اینجاست که تعدادی از یال‌هایی که از $S-T$ خارج می‌شوند به S که داخل u است می‌روند. اما یال‌هایی که به این صورت هستند متناظرشان در $\tilde{G}$ از $\tilde{T}$ خارج می‌شود. پس مشکل ثابت شد.



روش اولیه دیگران :



الگوریتم تطابق وزن دار در گراف دو بخشی . $G(A\cup B, E)$ و $\forall_{a\in A, b\in B}\ c_{ab} \geq 0$

Hungarian Algo. : برای یافتن تطابق با وزن بیشینه در گراف دو بخشی

تعریف کنید $y_a = \max_{b\in B} c_{ab}\ \ a\in A$, $y_b = 0\ \ b\in B$

گراف $G_=$ را در نظر بگیرید همان گراف G اما فقط شامل یال‌هایی که $c_{ab} = y_a + y_b$

تطابق بیشینه M را روی $G_=$ بیابید

اگر M همه‌ی راس‌ها را پوشش نده باشد $\Leftarrow$ M تطابق با وزن بیشینه است و الگوریتم پایان می‌پذیرد

قدار بعد :

$$\varepsilon = \min_{\substack{a\in S\\ b\in B-T}} \left| c_{ab} - (y_a+y_b) \right| \quad , \quad y_b := y_b + \varepsilon \ \ \forall b\in T \qquad y_a := y_a - \varepsilon \ \ \forall a\in S$$

از یک گره‌ی نپوشیده در A شروع کردیم و تلاش کردیم مسیر افزایشی بسازیم اما تا یک جایی به بن‌بست خوردیم گره‌های این مسیر را S نامیدیم. T را هم به همین صورت روی B به دست آوردیم.
که عضو A باشند

می‌خواهیم با نگاه داشتن شرط $y_a + y_b \geq c_{ab}$ ، y ها را طوری جابه‌جا کنیم که یک یال بین A , B tight شود و بتوان مسیر افزایشی را طولانی‌تر کرد. البته به طوری که بتوان tight بودن یال‌های قبلی حفظ شود.

حداکثر n ورتکس باید y را دستکاری کنیم تا یک یال افزایشی تولید شود و سایز تطابق حداقل یکی اضافه شود. از طرفی حداکثر سایز تطابق n است پس حداکثر n^2 بار باید y را دستکاری کنیم و الگوریتم پایان‌پذیر است.

درستی الگوریتم: چرا تطابق ~~بیشینه~~ کاملی که الگوریتم پیدا می‌کند همان تطابق با وزن بیشینه است؟ با قضیه‌ی دوگانی ضعیف: پوشش راس را به عنوان دوگان در نظر گرفتیم و آن را min کردیم پس مساله‌ی اولیه max شود.
طبق قضیه‌ی Konig هم می‌توان گفت که وزن تطابق هست: $\sum_{v \in A\cup B} y_v$

توضیحات بیشتر: مساله‌ی تطابق با وزن بیشینه در گراف دوبخشی:

LP: $\max c^T x$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in A\cup B$$

$$x \geq 0$$

Dual LP: $\min 1^T y$

$$y_u + y_v \geq c_{uv} \quad \forall (u,v) \in E$$

$$y \geq 0$$

الگوریتم ما یک نقطه‌ی شدنی برای دوگان پیدا کرد. سپس شرط‌هایی که در دوگان در آنها tight بود (مجموعه‌ی J) را پیدا کرد. حالا یک جواب در مساله‌ی اولیه برای x های مربوط به J پیدا کرد. یعنی برنامه‌ی زیر را حل کرد:

$\max 1^T x$

$\sum x_e = 1$

$x \geq 0$

$x_e = 0 \quad e \notin J$

با این حرکت عملا وزن‌های یال‌ها برداشته شدند.

حالا با داشتن این جواب باید یک جوری بفهمیم که در تکرار بعدی کدام یک از شرط‌های دوگان را tight کنیم. در این مثال از روی جواب تطابق ε ها را حساب کنیم.

b_ تطابق بیشینه وزن‌دار در گراف غیر دو بخشی :

P(اولیه) : $\min c^T x$ D(دوگان) : $\max b^T y$

$A x = b \geq 0$ $A^T y \leq c$

$x \geq 0$ $y \lessgtr 0$

از روی y شدنی مجموعه J از xها که مربوط به معادله‌های tight شده در D هستند را پیدا کن با $x \geq 0$ و $i \notin J$, $x_i = 0$ و $Ax = b$ را تلاش می‌کنی که برقرار کنی. اما ممکن هم هست که برقرار نشود چرا که مثلاً ممکن است حالت $x = 0$ رخ دهد و $Ax \neq b$ شود. پس تلاش می‌کنی با $Ax \leq b$ حل کنی و برای تبدیل $\leq$ به $=$ متغیرهای اضافی x_i^a را در نظر می‌گیریم و تا جایی که می‌خواهیم فاصله‌ی Ax و b را کم کنیم.

RP(Restricted P): $\min \sum x_i^a$

$\sum_j a_{ij} x_j + x_i^a = b_i$ برای هر قید i از مجموعه قیدهای $Ax = b$

$x, x^a \geq 0$

$x_i = 0 \quad i \notin J$

اگر جواب این RP صفر شود که کار تمام است. اما اگر صفر نشود دوگانش را می‌نویسیم

DRP: $\max b^T v$

$\sum a_{ij} v_j \leq 0 \quad i \in J$

$v_j \leq 1$

Subject: Comb. Opt.
Date: 31

از v^* بدست آمده y را آپدیت می‌کنیم به این صورت:

$$y := y + \varepsilon v^*$$

البته به صورتی که در شرط $A^T y \leq c$ صدق کند یعنی:

$$\varepsilon = \min_{\substack{i \notin J \\ v^* a_i > 0}} \frac{c_i - y^T a_i}{v^* a_i}$$

برای $v^* a_i > 0$.

چون داریم $b^T v^* > 0$ پس برای $\varepsilon > 0$ داریم $b^T y_{\text{جدید}} > b^T y_{\text{قدیم}}$

به این دلیل که جواب دوگانش که حل کردیم بزرگتر از صفر بود.

روش اصلی-دوگان:

$$m\left\{\begin{array}{c|c} & \overbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}^{n} \\ \hline y_1 & \\ y_2 & \\ \vdots & A \\ y_m & \end{array}\right\} X = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array}$$

$$(P): \min c^T x \qquad (D): \max b^T y$$
$$Ax = b \qquad A^T y \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad y \leq 0$$

به جای مستقیم حل کردن P، یک جواب شدنی برای (D) در نظر بگیر و با برقراری شرایط مکمل لنگی یک جواب شدنی برای P پیدا کن.

جواب شدنی D به نام y را در نظر بگیرید. یک سری معادله‌ها مشخص هستند (J) و بقیه $a_i y_i < c_i$ برای $i \notin J$. فرض کنید این معادله‌های مشخص بالا باشند:

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array} \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} x \begin{array}{c} = \\ < \end{array} c$$

شرایط مکمل لنگی باعث می‌شود فقط $x \in J$ ها در P بتوانند از ۰ بیشتر باشند یعنی داریم:

$$RP(J): \min \begin{array}{c} n \\ m \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}$$

$$m\left\{\begin{bmatrix} \overbrace{A}^{n} & \overbrace{I}^{m} \end{bmatrix}\right. \begin{bmatrix} x \\ x^a \end{bmatrix}\begin{array}{c} \}n \\ \}m \end{array} = b$$

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} x \\ \\ x^a \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

حال RP(J) را حل کن و x و x^a را به دست بیاور. اگر $x^a = 0$ پس y و x در شرایط مکمل لنگی صدق می‌کنند و x هم جواب شدنی P است. در نتیجه x جواب بهینه (P) و y جواب بهینه (D) است.
در غیر این صورت:

DRP(J): $\max\ b^T v$

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array}\begin{bmatrix} A^T \\ I \end{bmatrix} v \begin{array}{c} \le \\ \gtrless \\ \le \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n \\ \}m \end{array} \leadsto \begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array}\begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} v \begin{array}{c} \le \\ \gtrless \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad v \le 1$$

حال v^* را پیدا کن دیگر y نشدنی جدید برای (D) باز: $y_{جدید} \leftarrow y_{قدیم} + \epsilon v$

داریم $b^T v^* > 0$ پس با $\epsilon > 0$ داریم: $b^T y_{جدید} = b^T y_{قدیم} + \epsilon b^T v^*$

که نشان می‌دهد $b^T y_{جدید} > b^T y_{قدیم}$ یعنی در راستای افزایش تابع هدف D حرکت کرده‌ایم

اما حداکثر مقدار ϵ چقدر می‌تواند باشد؟

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array}\begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \underbrace{y_{قدیم}}_{\le} + \underbrace{\epsilon v^*}_{\gtrless} \le c$$

$\le 0 \rightarrow$ برای y جدید هم شرط برقرار ✓

$\le \rightarrow$ - - - ✓

$\ge \rightarrow$ - - - آیا؟

پس باید داشته باشیم: $\epsilon a_i v^* + a_i y_{قدیم} \le c_i \quad i \notin J \quad a_i v > 0$

$$\Rightarrow \epsilon \le \frac{c_i - a_i y_{قدیم}}{a_i v^*}$$

پس ϵ می‌شود مقدار min عبارت سمت راست برای انواع $i \notin J$ ها ($a_i v > 0$). اگر هیچ i بدین ترتیب نبود یعنی حد بالایی برای ϵ نداریم پس D نامتناهی و P ناشدنی است.

به این ترتیب یک y جدید و J جدید به دست می‌آید و x همچنان جواب شدنی برای J جدید در RP(J) است.

چه زمانی شرط $\epsilon v^* >$ $a_i y_{قدیم}$ مثبت؟ یعنی نامساوی آید؟ زمانی که قبلاً مکمل لنگی x_i مقدارش صفر باشد. اما چون $i \notin J$ پس x قبلاً صفر بوده و بازهم در شرط‌ها صدق می‌کند.

*1

Subject:
Date

مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر از S به T در گراف جهت‌دار

$$(P)\quad \min\ c^T x$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow S \\ \\ \leftarrow T \end{matrix}$$

یال از u به v

$$\begin{array}{c|c} & \\ u - & \cdots\cdots +1 \\ v - & \cdots\cdots -1 \end{array}$$

A ماتریس وقوع گراف جهت‌دار

$$x \in \mathbb{R}^{|E|},\ x \geq 0$$

* ۲ شرط ۱- دار آخر اضافه است به این دلیل که از شرط‌های دیگر بدست می‌آید. با حذف آن ماتریس A سطرهایش مستقل خطی می‌شوند پس می‌نویسیم:

$$(P):\ \min\ c^T x \qquad\qquad (D):\ \max\ y_s$$

$$A'x = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow \text{A بجز T}$$

$$A^T y \leq c \rightsquigarrow \forall e\ u \to v:\ y_v - y_u \leq c_{vu}$$

$$y \lessgtr 0 \quad y_t = 0$$

$$RP(J):\ \min\ x_1^a$$

$$[A \mid I]\begin{bmatrix} x \\ \hline x^a \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{array}{c} J - \\ \bar{J} - \end{array}\begin{bmatrix} -x- \\ \hline x_a \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$DRP(J):\ \max\ V_s$$

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array}\begin{bmatrix} A^T - - \end{bmatrix} V \begin{array}{c} \leq \\ \vdots \\ \lessgtr \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$V \leq 1 \quad V_t = 0$$

$$\downarrow$$

$$\forall e \in J:\ e: a \to b$$

$$V_a - V_b \leq 0$$

$$e \notin J:\ e: a \to b$$

$$V_a, V_b \lessgtr 0$$

$$V \leq 1,\ V_t = 0$$

← چون $V_t = 0$ پس انتهای دریال‌های J که به t راه دارند باید v شان ۰ شود پس آن یال‌های دیگر v که t را به هم وصل کنند باید صفر شوند پس جواب DRP(J) هم باید صفر شود (یعنی جواب RP(J) هم صفر است) در غیر این صورت باید جواب ۱ شود چون $V \leq 1$

برای مسالهی کوتاهترین مسیر یک الگوریتم بر پایهی روش اولیه-دوگان ارائه دهید

$$P:\ \min\ c^T x$$

$$\text{راس‌ها}\Big\{\overbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}}^{\text{یال‌ها}}_{m\times m} \quad \overset{\text{یال‌ها}}{\uparrow}\ x = \overset{\text{راس‌ها}}{\uparrow}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow s \\ \\ \\ \leftarrow t \end{matrix}$$

$m\times 1$ $\quad n\times 1$

$x \geqslant 0$

ماتریس وقوع گراف

$$\begin{array}{c} \\ u \\ v \end{array}\begin{bmatrix} & e=(u,v) & \\ \cdots & -1 & \cdots \\ \cdots & +1 & \cdots \end{bmatrix}$$

قیدهای آن چیست؟ قیدها ام:

$a_i x = b_i$

مجموع ورود و خروج از راس i با انتخاب یال‌های x $\rightarrow$ وجود یک مسیر از s به t

(میزان ورود و خروج از راس‌های میانی 0 است، به t یک بار وارد می‌شویم، از s یک بار خارج می‌شویم)

$$D:\ \max\ y_t - y_s$$

$$\text{یال‌ها}\Big\{\overbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & A^T & \\ & & \end{bmatrix}}^{\text{راس‌ها}} y \leqslant c$$

$y \lesseqgtr 0$

$$\begin{array}{c} \\ e=(u,v) \end{array}\begin{bmatrix} u & & v \\ \cdots -1 & \cdots & +1 \cdots \end{bmatrix}$$

قیدهای آن چیست؟ قیدها ام:

$a_i^T y \leqslant c_i$

$y_v - y_u \leqslant c_i$

$e_i = (u,v)$

برای هر یال مقدار y ای که خارج می‌شود باید همراه مقدار c_i بعلاوه‌ی مقدار y ای که دارد شود باشد.

قید ۸ ام:

$RP(J)\quad \min 1^T x^a$ $\quad a_i x + x^a_i = b_i$

برای هر راس قیدی نوشتیم حالا مقدار x:

$$\begin{array}{c} \\ \text{راس ها} \end{array}\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{\text{یال ها}} & \overbrace{\quad}^{\text{راس ها}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \end{array}\right.\begin{bmatrix} x \\ x^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

x: یال ها، x^a: راس ها

$e \notin J \to x_e = 0$

$e \in J \to x_e \geq 0$

$$\begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array}\begin{bmatrix} x \\ x^a \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

وجود مسیر از s به t که خروجی فعلی وجود که از طور در قرار است یا ندارم. پس باید خروج را زیاد ترکنیم!

$DRP(J)\quad \max z_t - z_s$ $\quad e \in J: \quad a_i^T z \leq 0$

$$\text{یال ها}\left\{\begin{array}{c} J \\ \vdots \\ \bar{J} \end{array}\right.\overbrace{\begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix}}^{\text{راس ها}} z \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$z_v - z_u \leq 0 \to z_u \geq z_v$

$e \in (u,v) \quad z \leq 1$

$z \leq 1$

z ها در طول مسیر کاهشی هستند ومی خواهیم تفاضل این دو را افزایش دهیم

به z_t ، z_s وصل باشد $\Rightarrow z_t \leq z_s \Rightarrow z_t - z_s \leq 0$ $\max$ در صفر اتفاق می افتد

به z_t ، z_s وصل نباشد $\Rightarrow z_s \to -\infty \Rightarrow$ $\max$ در $+\infty$ اتفاق می افتد پس مسأله RP infeasible می شود

به آن شرط x_e را به مسأله اضافه کنیم این شکل درست می شود.

یک الگوریتم ترکیبی برای حل RP, DRP ارائه دهید.

برای مسئله‌ی تطابق کامل با وزن کمینه در گراف دوبخشی با روش اولیه‌دوگان الگوریتم ارائه دهید.

$P:\ \min c^T x$

$\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v\in V$

$x_e \geq 0$

$D:\ \max 1^T y$

$y_v + y_u \leq c_e \quad \forall e=(u,v)\in E$

$y \gtrless 0$

$RP(J)\ \min 1^T x^a$

$\sum_{e\in\delta(v)} x_e + x^a_v = 1 \ \forall v\in V$

$x^a \geq 0 \quad x_e \geq 0 \ e\in J$

$x_e = 0 \quad e\notin J$

$DRP(J)\ \max 1^T z$

$z_v + z_u \leq 0 \quad \forall e=(u,v)\in J$

$z \leq 1$

در DRP از بین یال‌هایی که در J هستند رأس‌هایشان مجموعشان حداکثر صفر است. برای یال‌هایی که عضو J هستند z را می‌توان ۱+ گذاشت. برای رأس‌های عضو J اگر یکی ۱+ باشد آن یکی را ۱- قرار دهیم. این حالت را ادامه می‌دهیم که در هر یال ۱- باشد که حل می‌شود. کافی است رأس‌هایی را انتخاب کنیم که تعدادشان کمترین باشد و یال‌ها را پوشش دهند تا مقدارشان را ۱- بگذاریم. پس باید یک min vertex cover در گراف دوبخشی بدون وزن پیدا کنیم که بلدیم پیدا کنیم!

۷) الگوریتم برای حل RP پیدا کنید.

چون در RP(J) ماتریس ضرایب کاملاً تک‌پیمانه‌ای است پس x^aها و x_eها عدد صحیح هستند. چون برای هر v داریم $\sum_{e\in\delta(v)} x_e + x^a_v = 1$ پس x^a_v برابر ۱ است اگر رأس v پوشیده نباشد و ۰ است اگر پوشیده باشد. پس هدف کمینه کردن تعداد رأس‌های نپوشیده است. یعنی یافتن تطابق بیشینه بدون وزن البته فقط با استفاده از یال‌های عضو J.

Subject: Comb. Opt.
Date
40

$$(P)\ \min c^T x \qquad (D)\ \max b^T y \qquad (RP)\ \min 1^T x^a \qquad (DRP)\ b^T z$$

$$Ax = b \qquad A^T y \leq c \qquad [A \mid I]\begin{bmatrix} x \\ x^a \end{bmatrix} = b \qquad A^T z \leq 0 \ \ z \in J$$

$$x \geq 0 \qquad y \lessgtr 0 \qquad \begin{array}{c} J \\ \bar{J} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ x^a \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \geq \end{array} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad z \leq 1$$

هدف ما فعلا این است که با داشتن یک روش برای حل LP های آسان‌تر، بتوانیم LP های سخت‌تر را حل کنیم

برای مثال آسانی RP نسبت به P این است که در آن هدف وزن نداریم
نسبت به DRP چه بهتری داریم در اینجا معمولا مساله به فرمی در می آید که مثلا انتخاب
می کنیم کدام z ها 1 باشند و کدام 0 باشند. پس می توان مساله را به صورت ترکیباتی حل کرد.

مساله‌ی max-flow:

$$\max f$$

$$Ax = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow s \\ \\ \\ \\ \leftarrow t \end{array}$$

$$0 \leq x \leq w$$

در ماتریس وقوع برای $e=(u,v)$ در ستون e مقدار در سطر uمان -1 و مقدار در سطر v $+1$ است. در کل می خواهیم جریان f- از s بیرون برود و جریان $+f$ در t دریافت شود و مجموع جریان ورودی و خروجی بقیه رئوس 0 باشد

حالا متغیرها را به سمت چپ تساوی انتقال می دهیم

$$\max f$$

$$\begin{bmatrix} A & \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$x \leq w \qquad \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \geq 0$$

نکته ی جالب اینجاست که اگر این مساله را به جای (D) ببینیم، (DRP) مساله ترکیباتی ای می شود که حل کردنش برای ما راحت است (مساله‌ی وجود مسیر از s به t)

حالا می خواهیم فرم مساله را به صورت فرم استاندارد در بیاوریم به شکل (D)

$\max f$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix} \\ \hline I & \\ \hline -I & \\ \hline & -1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این مساله های تساوی $\leq$ در نظر گرفت چون با فرض $\leq$ داریم در طول مسیر مقدار جریان کاهش می یابد پس داریم $flow(s) \leq flow(t)$ اما چون این دو مقدار دقیقاً برابر با $|f|$ قرار داریم پس نامساوی فقط تساوی رخ می دهد.

حالا $DRP(J)$ را می نویسیم:

(DRP) $\max f$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix} \\ \hline I & \\ \hline -I & \\ \hline & -1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این قیدها هم جزو J هستند چون فقط در آنها = رخ می دهد

$$\begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \leq 1$$

$\boxed{\text{یک سری از این شرط‌ها معمولاً نیست}}$ پس یا قرار است $f = 0$ به دست بیاوریم یا $f = 1$. اگر $f = 0$ باشد که یعنی RP همان min اش صفر اتفاق افتاده و اگر $f = 1$ باشد همان مسائل پیدا کردن مسیرات.

یک الگوریتم ترکیبیاتی برای حل مسالهی تطابق کامل وزن دار در گراف غیردوبخشی ارائه دهید

(D) $\max \; 1^T y + 1^T z$

$$\sum_{\substack{e\in\delta(u) \\ 3\le|u| \\ |u| \text{ فرد}}} z_u + \sum_{e\in\delta(v)} y_v \le w \quad \forall e\in E$$

$-z\le 0$

$z \geq 0 \quad y \leq 0$

(DRP) $\max \; 1^T y' + 1^T z'$

$$\sum z'_u + \sum y'_v \le 0 \quad e\in J$$

$$-z'_u \le 0 \quad e\in J,\ e\in\delta(u)$$

$$y'_v \le 1 \quad \forall v\in V$$

$$z'_u \le 1 \quad \forall u\subseteq V \quad |u|\ge 3,\ |u| \text{ فرد}$$

z ها ۰ هستند L . برای زیر مجموعه های فرد عضوی V که یالی از آنها خارج نمی شود
z را برابر با L می گذاریم و برای u هایی که یالی از آنها خارج می شود z را ۰ می گذاریم
و y را هم صفر می گذاریم.

مسالهٔ تطابق کامل وزن‌دار در گراف غیر دوبخشی (با وزن کمینه):

(P) $\min c^T x$

$y_{\{v\}} \leftarrow \sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v\in V$

$y_u \leftarrow \sum x_e - s_u = 1 \quad \forall u\subseteq V$, $|u|$ فرد، $|u|\geq 3$

$x \geq 0$

(D) $\max \sum_{u\subseteq V,\ |u|\ \text{فرد}} y_u$

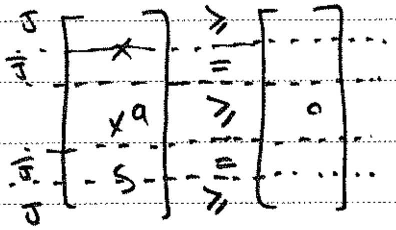
$\sum_{e\in\delta(u)} y_u \leq c_e \quad \forall e\in E$ ، $u\subseteq V$، $|u|$ فرد

$-y_u \leq 0$ ، $u\subseteq V$، $|u|$ فرد، $|u|\geq 3$

RP(J) $\min \sum x^a_i$

$\sum x_e + x^a_{\{v\}} = 1 \quad \forall v\in V$

$\sum x_e + x^a_u - s_u = 1 \quad \forall u\subseteq V$، $|u|$ فرد، $|u|\geq 3$



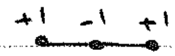
DRP(J) $\max \sum_{u\subseteq V,\ |u|\ \text{فرد}} z_u$

$\sum_{e\in\delta(u)} z_u \leq 0 \quad e\in J$ ، $|u|$ فرد، $u\subseteq V$

$z_u \leq 1$ ، $|u|$ فرد، $u\subseteq V$

$-z_u \leq 0$ ، $|u|$ فرد، $3\leq |u|$، $u\subseteq V$، $u\in J$

مثال ابتدایی:



در کل هدف این است که یک y خوب و یک x خوب بیابیم که در شرایط مکمل لنگی صدق کنند. طبیعی است که در نظر داشته باشیم تعداد زیادی y را صفر کنیم (چون در یک BFS تعداد صفرها زیاد است). بیاییم از همان ابتدا u های خاصی محدود کنیم. مثلاً u هایی که تودرتو باشند را اجازه دهیم $y_u \neq 0$ و برای بقیه‌شان $y_u = 0$ قرار دهیم.

مجموعه‌های Laminar: به خانواده‌ای (F) از مجموعه‌های V، Laminar گوییم اگر:

$\forall u,v\in F \quad u\subseteq v$ or $v\subseteq u$ or $v\cap u=\emptyset$

سوال: اندازه‌ی F حداکثر چقدر است؟ ابتدا همه‌ی راس‌های V را عضو F بگیرید. سپس کوچکترین مجموعه‌ای که با این V های تکی می‌توان ساخت را در نظر بگیرید. این مجموعه عضو F است. آن را منقبض کنید

در نتیجه تعداد زیر مجموعه هایی که هم اکنون در دست داریم یکی کم می شود (حداقل ۱). پس در کل می توان $|V|-1$ بار حداکثر این حرکت را انجام داد. از قبل هم $|V|$ تا عضو در F داشتیم در کل می شود حداکثر $2|V|-1$. (اگر مجموعه ی تهی را هم در نظر بگیریم $2|V|$ عضوی می شود)

الگوریتم: قرار دهید: $M=\emptyset$ یک تطابق بدی گراف G (که فقط از یال های $E_=$ استفاده می کند)

$y=0$ یک جواب شدنی برای مساله ی دوگان

$\Omega=\{\{v\} \mid v\in V\}$ یک خانواده ی لامینار

* $\leftarrow$ M درخت تناوبی را در گراف می سازید

اگر مسیر افزایشی پیدا شد $\leftarrow$ M را افزایش دهید (در گرافی که شکوفه هایش منقبض شده است)

اگر به دور فرد برخوردیم آن را منقبض می کنیم و به جای این دور فرد عضوی که اعضایش [illegible] C است (به نام u) قرار می دهیم $\Omega \leftarrow \Omega+\{u\}$ و تعریف می کنیم y_u را که $y_u \leftarrow 0$ ولی در آینده اجازه می دهیم این y_u مقدار غیر صفر هم بگیرد.

اگر مسیر افزایشی پیدا نشد $\leftarrow$ اگر M تطابق کامل باشد جواب مساله است. از الگوریتم خارج شو

M - درخت تناوبی را در نظر بگیرید و از ریشه درخت به ترتیب y های متناظر با گره/شکوفه هایی که می بینید را $+1$ و -1 قرار دهید. چون تعداد $+1$ ها همیشه از -1 ها بیشتر است پس در راستای افزایش ϵy دائم حرکت می کنیم (این $+1$ و -1 ها مولفه های z هستند)

یعنی باید قرار دهیم $y \leftarrow \epsilon z+y$ $\epsilon>0$

حالا چه قیدهایی هستند که با حرکت کردن در راستای z ممکن است نقض شوند (که حدود ϵ را برای ما تعیین می کنند) اگر بین گره هایی که z آن ها $+1$ است یالی وجود داشته باشد که در $E_=$ نباشد، اینکه دو طرفش $+1$ باشد می تواند قید را نقض کند. اما چون این یال ها در $E_=$ نیستند یعنی این قیدها tight نشده است. یعنی وجود دارد یک ϵ که اگر به این اندازه در راستای z حرکت کنیم این قیدها نقض نشوند.

مشکل دیگر این است که جایی که $\epsilon = \epsilon_4$ است ممکن است u نماینده‌ی یک شکوفه باشد و آن $y_u = 0$ باشد نمی‌توانیم ϵ پیدا کنیم که قید $y_u \geq 0$ را نقض نکند. راه‌حل این است که u را باز کنیم و از G' خارج کنیم یعنی $G' \leftarrow G' - \{u\}$ یعنی از مجموعه‌ای که اضافه داشتیم u هایی را که y شان صفر به‌همراه حذف می‌کنیم.

حالا بعد از اعمال این تغییرات مجموعه‌ی C را به‌روزرسانی کن

پس از انجام این عملیات به مرحله‌ی ستاره‌ی الگوریتم برگرد

سوال: چرا بعد از به‌روزرسانی M داخل شکوفه‌ها را به‌روزرسانی نمی‌کنیم در عمل آن‌ها را خراب نگه می‌داریم؟ به این دلیل که اگر آن‌ها را باز کنیم از مجموعه‌ی G' باید خارج کنیم و مجبور می‌شویم y شان را صفر کنیم.

نکته: باز کردن یک شکوفه در کل به تعداد متناهی در طول الگوریتم انجام می‌شود به این دلیل که شکوفه‌ها فقط با تغییر در M ممکن است خراب شوند و تعداد شکوفه‌ها در هر دوران حداکثر $|V|$ است.

مورد کلیدی که باید اثبات کنیم این است که وقتی یک تطابق کامل M برای گراف با استفاده از یال‌های تنگ پیدا کردیم، باید ثابت کنیم که این تطابق بهینه است. (اثبات درستی الگوریتم)
یعنی باید نشان دهیم شرایط مکمل لنگی برای جوابی که پیدا کردیم برقرار است.

اولاً یال‌هایی که در تطابق استفاده می‌کنیم تنگ هستند یعنی برای آن‌ها داریم: $\forall e \in E(M): c_e = \sum_{e \in \delta(u)} y_u$

ازطرفی برای u هایی که $y_u > 0$ باشد داریم: $\sum_{e \in \delta(u)} x_e = 1$ چون [illegible]
این u ها در G' هستند پس در گراف حاضر منقبض شده‌اند و دقیقاً یک یال تطابق به آن‌ها وصل است.

تطابق کامل با وزن کمینه در گراف غیر دوبخشی:

(P) $\min c^T x$

$$\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v\in V$$

$$\sum x_e - s_u = 1 \quad \forall u \subseteq V$$ ، $|u|$ فرد و $|u|\geq 3$

$$x \geq 0$$

(D) $\max \sum_{\substack{u\subseteq V \\ |u|\text{ فرد}}} y_u$

$$\sum_{\substack{e\in\delta(u) \\ u\subseteq V,\ |u|\text{ فرد}}} y_u \leq c_e \quad \forall e\in E$$

$$-y_u \leq 0$$ ، $|u|$ فرد، $|u|\geq 3$، $u\subseteq V$

الگوریتم بر پایه‌ی روش اولیه دوگان برای یافتن تطابق کامل با وزن کمینه در گراف غیر دوبخشی:

مقداردهی اولیه:

$\Omega = \{\{v\} \mid v\in V\}$. در Ω یک خانواده‌ی لامینار از زیرمجموعه‌های فرد عضوی V نگه داری کنیم و قرار دهیم $y_u = 0$ ، $u \notin \Omega$. دقت کنید که $|\Omega| \leq 2|V|$ می‌باشد.

$Y = 0$. این یک جواب شدنی برای (D) است.

مجموعه‌ی J را برابر با یال‌هایی قرار بده که با Y قیدشان در (D) tight هستند.

$M=\emptyset$ قرار بده. M نشان دهنده‌ی یک تطابق با استفاده از یال‌های عضو J است.

تا زمانی که M تطابق کامل نیست مراحل زیر را تکرار کن:

۱- M-درخت تناوبی روی G' را بساز (G' گراف القایی G روی یال‌های عضو J است)

2- اگر مسیر افزایشی در M پیدا شد، مسیر افزایشی را روی M اعمال کن و به مرحله 1 بازگرد.

Subject: Comb. Opt.
Date

3- اگر غنچه‌ای مانند B پیدا کردی، B را منقبض کن ، $\Omega \leftarrow \Omega \cup B$ ، $y_B \leftarrow 0$
و به مرحله 1 الگوریتم برگرد.

4- مقادیر زیر را حساب کن:

$\varepsilon_1 = \min\{y_B \mid B \in \Omega\}$ $B\in O\}$ در اینجا O مجموعه‌های زیرغنچه‌ای که فاصله فرد دارای M ـ درخت‌های تناوبی دارند

$$\varepsilon_2 = \min\Big\{ c_e - \Big(\sum_{\substack{u\in A\\ A\in E}} y_A + \sum_{\substack{v\in B\\ B\notin E}} y_B\Big) \;\Big|\; e\notin J,\ e=(u,v),\ |A| \text{ فرد و } |B| \text{ فرد},\ A,B\subseteq V \Big\}$$

که E مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های از V است که در M ـ درخت‌های تناوبی فاصله‌شان تا ریشه زوج است. اگر مقدار ثابت ε را به y های اعضای E اضافه کنیم، برای یال‌هایی که یک سرشان در یکی از اعضای E و سر دیگرشان بیرون از E باشد، برای اینکه در قیدهای دوگان صدق کنند حداکثر به مقدار ε_2 می‌توان y را برای اعضای E افزایش داد.

به طور مشابه برای یال‌هایی که دو سرشان در E قرار دارد:

$$\varepsilon_3 = \min\Big\{ \Big(c_e - \Big(\sum_{\substack{u\in A\\ A\in E}} y_A + \sum_{\substack{v\in B\\ B\in E}} y_B\Big)\Big)\times \frac{1}{2} \;\Big|\; e\notin J,\ e=(u,v),\ |A| \text{ فرد},\ |B| \text{ فرد},\ A,B\subseteq V \Big\}$$

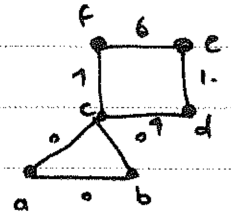
ضریب $\frac{1}{2}$ به این دلیل است که اگر مقدار ε را به y برای اعضای E اضافه کنیم، مقدار $\sum_{\substack{e\in\delta(u)\\ u\subseteq V,\ |u| \text{ فرد}}} y_u$ در یال e به اندازه‌ی 2ε افزایش می‌یابد.

حالا ε را قرار بده: $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

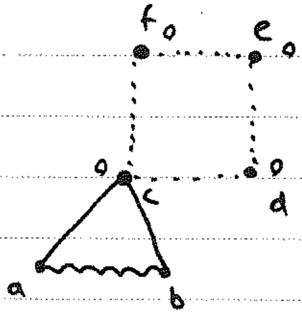
اگر $\varepsilon = \varepsilon_1$ باشد به دلیل اینکه ε_1 بوده، شکوفه‌ی B که $B\in O$، $B\in\Omega$ و $y_B = 0$ بوده را در نظر بگیرید. B را باز کنید، $\Omega \leftarrow \Omega \setminus B$ ، $y_B \leftarrow 0$

اگر $\varepsilon \neq \varepsilon_1$ باشد قرار بده: $y_A \leftarrow y_A + \varepsilon$ ، $y_B \leftarrow y_B - \varepsilon$ برای $A\in E$، $B\in O$ و مجموعه‌ی J را به روز کن
و به مرحله 1 الگوریتم برگرد.

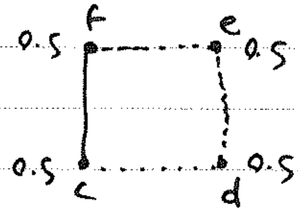
مثال زیر را در نظر بگیرید:



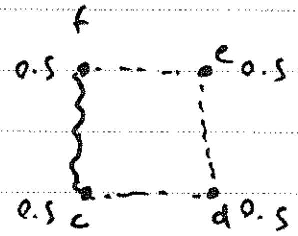
یال های تطابق را با ~~~ و یال های تنگ را
با ــــ و یال هایی که تنگ نیستند را با ....
نشان می دهیم. y_A را برای هر A روی شکل نوشته ام:



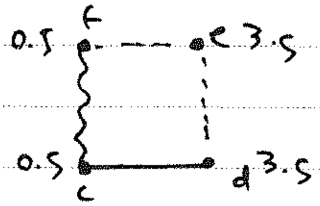
گام اول: ساختن یک M-درخت متناوب با شروع از
راس c.
شکوفه ی پیدا شده را منقبض می کنیم و نام آن را
c می گذاریم.
سایر M-درخت های متناوب، تک راس های e و f و d
می باشند.
$\varepsilon = 0.5$ بدست می آید که یال (c,f) را tight می کند.



گام دوم: ساختن M-درخت متناوب با شروع از راس f
مسیر افزایشی یافت شده را اعمال می کنیم



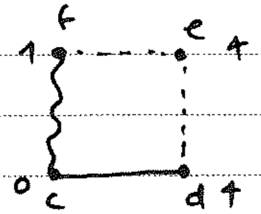
گام سوم: M-درخت های متناوب شامل تک راس های e
و d را ساخته و ε را محاسبه می کنیم. $\varepsilon = 3$
یال (c,d) را tight می کند.



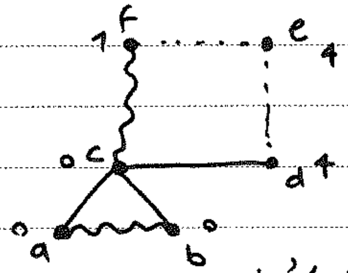
گام چهارم: M-درخت متناوب تک راس e و M-درخت
متناوب با شروع از راس d را می سازیم. $\varepsilon = 0.5$

Subject: Comb. Opt.

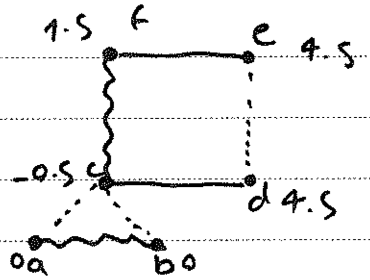
Date 50



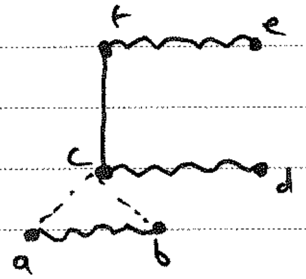
گام پنجم: M درخت تناوبی تک راسی e و M درخت تناوبی با شروع از d را داریم. اما $\varepsilon = 0$ محاسبه می‌شود که دلیل آن وجود شکوفه‌ی c با $y_c = 0$ به عنوان راس فرد است. پس شکوفه را باز می‌کنیم.



حال ε را حساب می‌کنیم (برای M درخت های تناوبی با شروع از e و d). $\varepsilon = 0.5$ و یال (f,e) tight می‌شود در حالی که یال های (c,b) و (c,a) slack می‌شوند



گام ششم: M درخت تناوبی با شروع از d را می‌سازیم. مسیر افزایشی پیدا می‌شود که آن را اعمال می‌کنیم



گام هفتم:

تطابق به دست آمده کامل است پس الگوریتم را خاتمه می‌دهیم.

نشان می دهیم این الگوریتم در زمان چندجمله ای پایان می پذیرد.

اجرای الگوریتم را به دوران های تقسیم کنید که در هر دوران سایز تطابق M ثابت است و در گذر به دوران بعدی (با یافتن و اعمال کردن مسیر افزایشی) سایز M یک واحد اضافه می شود. چون سایز تطابق کامل $\frac{|V|}{2}$ است پس حداکثر $\frac{|V|}{2}$ دوران داریم.

حال رفتار الگوریتم را در هر دوران بررسی می کنیم.
در هر بار اجرای الگوریتم یا مسیر افزایشی پیدا می کنیم (که به دوران بعدی می رویم) یا یک یال به G اضافه می کنیم یا یک شکوفه را منقبض می کنیم و یا یک شکوفه را باز می کنیم.

حداکثر $|V|$ بار می توانیم شکوفه جمع کنیم. تعداد شکوفه هایی که باز می شوند حداکثر به تعداد شکوفه هایی است که در دوران قبلی تولید شده اند. به این دلیل که تنها با تغییر در M (گذر به دوران بعدی) ممکن است شکوفه های از مجموعه‌ی E به مجموعه‌ی O بروند. پس حداکثر $2|V|$ تا شکوفه در هر دوران باز می شود.

آن یال جدیدی که tight کرده باشیم حالت های زیر ممکن است رخ دهند:

۱- یال tight شده دو سرش در یک درخت E باشد ← شکوفه‌ی جدید تولید می شود ← حداکثر $|V|$ شکوفه می توان تولید کرد پس حداکثر $|V|$ یال E به E tight می شوند.

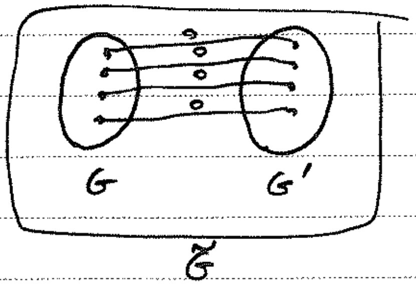
۲- یال tight شده در E دو درخت متفاوت باشد ← مسیر افزایشی پیدا می شود ← گذر به دوران بعد

۳- بین E یک درخت تناوبی و به مجموعه ای خارج از درخت های تناوبی برود ← درخت تناوبی گسترش می یابد ← حداکثر $|V|$ بار می توان این کار را انجام داد.

پس $O(n)$ دوران داریم که در هر کدام $O(n)$ عملیات انجام می‌شود پس در کل $O(n^2)$ عملیات انجام می‌دهیم. با فرض اینکه هر کدام از این عملیات در زمان چندجمله‌ای قابل انجام باشد، زمان اجرای کل الگوریتم چندجمله‌ای خواهد بود.

می‌توان با استفاده از الگوریتمی که برای تطابق کامل کمینه G داریم، تطابق کامل بیشینه G' را حساب کنیم که G' همان G است که وزن یال‌هایش وزن یال‌های G ضرب در -1 است.

با استفاده از تطابق کامل بیشینه می‌توان تطابق بیشینه در هر گراف G را حل کرد. به این صورت که $\tilde{G}$ را قرار دهید G به همراه یک کپی از G به نام G' که بین هر دو راس v با v' یک یال با وزن 0 قرار داده شده.



تطابق بیشینه‌ی کامل در $\tilde{G}$، تطابق بیشینه‌ی G را به دست می‌دهد.

Subject:
Date

*1 : صفحه‌ی 33 : اگر $j \notin J$ ، $v^* a_j$ را مقایسه کنیم و همه کمتر مساوی ۰ باشد، پس $y_{جدید} := y_{قدیم} + \varepsilon v^*$ برای هر $\varepsilon > 0$ در شرط دوگان صدق می‌کند و چون می‌دانیم v^* در جهت افزایش (D) است، پس D نامتناهی و P ناشدنی است.

پس باید بررسی کنیم که $y_{جدید}$ در قیدهای دوگان صدق کند. برای $j \in J$ ها قیدها نقض نمی‌شوند ولی برای $j \notin J$ ها باید یک ε مناسب پیدا کنیم. برای $j \in J$ ها داریم:

$$y_{جدید} a_j - c_j = (y_{قدیم} + \varepsilon v^*) a_j - c_j = \underbrace{(y_{قدیم} a_j - c_j)}_{=0} + \varepsilon \underbrace{(v^* a_j)}_{\le 0} \le 0$$

$=0$ می‌شود زیرا برای $j \in J$ این شرط در (D) tight بوده است.

≤ 0 می‌شود طبق قیدهایی که در DRP داریم

پس فارغ از اینکه ε چه مقداری داشته باشد برای $j \in J$ داریم $y_{جدید} a_j - c_j \le 0$ یعنی در (D) صدق می‌کند. اما برای $j \notin J$ دو حالت داریم. اگر $v^* a_j < 0$ باشد باز هم بدون بررسی کردن می‌توان گفت این قید نقض نمی‌شود. اما برای $v^* a_j > 0$ باید ε مناسب انتخاب شود.

*2 : صفحه‌ی 34 : دقت کنید اگر قیدی را در (P) حذف کنید باید متغیر معادل آن در (D) را برابر با صفر قرار دهید.

Subject:
Date