بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه چهاردهم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

ضرب ماتریس

ضرب ماتریس معمولی

$$A = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & a_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & a_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rule{2cm}{0.4pt} & a_n^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & b_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_n^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

ضرب ماتریس معمولی

$$A = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & a_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & a_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rule{2cm}{0.4pt} & a_n^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & b_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_n^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

هدف: محاسبه $A^\top B$

ضرب ماتریس معمولی

$$A = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & a_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & a_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & b_1^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_2^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rule{2cm}{0.4pt} & b_n^\top & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

هدف: محاسبه $A^\top B$

الگوریتم ضرب دقیق ماتریس مربعی

زمان: $O(n^{\omega})$

0. $\omega = 3$
1. $\omega < \log_2 7$ (Strassen)
2. $\omega < 2.376$ (Coppersmith, Winograd)
3. $\omega < 2.374$ (Stothevs)
4. $\omega < 2.3728642$ (Vassilevke-Williams)
5. $\omega < 2.3728639$ (Le Gell)

هدف تقریبی

$$A = \begin{pmatrix} \text{———} & a_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & a_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & a_n^\top & \text{———} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

صورت مسئله:

$$C \simeq A^\top B$$

خروجی C که:

$$\|A^T B - C\|_X < \varepsilon, \text{with probability} > 1 - \delta$$

هدف تقریبی

$$A = \begin{pmatrix} \text{———} & a_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & a_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & a_n^\top & \text{———} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

صورت مسئله:

$$C \simeq A^\top B$$

خروجی C که:

$$\|A^T B - C\|_X < \varepsilon, \text{with probability} > 1-\delta$$

$$X: \begin{cases} \|M\|_F = \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|M\| = \sup_{\|x\|=1} |x^T M x| \end{cases}$$

پیشنهاد؟

$$A = \begin{pmatrix} \text{——} & a_1^\top & \text{——} \\ \text{——} & a_2^\top & \text{——} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{——} & a_n^\top & \text{——} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{——} & b_1^\top & \text{——} \\ \text{——} & b_2^\top & \text{——} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{——} & b_n^\top & \text{——} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

صورت مسئله: $C \simeq A^\top B$

خروجی C که: $\|A^T B - C\|_X < \varepsilon, \text{with probability} > 1 - \delta$

پیشنهاد؟

روش اول: نمونه‌گیری

ضرب ماتریس = صورت جمعی

$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^\top B =$$

ضرب ماتریس = صورت جمعی

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

$$\begin{pmatrix} \text{———} & a_1^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^\top B =$$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,k}$$

ضرب ماتریس = صورت جمعی

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$$\begin{pmatrix} \text{———} & a_1^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$$B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$A^\top B =$$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_j[i] b_j[k]$$

ضرب ماتریس = صورت جمعی

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $\qquad$ $B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$$\begin{pmatrix} \text{———} & a_1^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{———} & b_1^\top & \text{———} \\ \text{———} & b_2^\top & \text{———} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{———} & b_n^\top & \text{———} \end{pmatrix}$$

$$A^\top B =$$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_j[i] b_j[k] = \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j^T)_{i,k}$$

ضرب ماتریس = صورت جمعی

$$A \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{——} & a_1^\top & \text{——} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{——} & b_1^\top & \text{——} \\ \text{——} & b_2^\top & \text{——} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{——} & b_n^\top & \text{——} \end{pmatrix}$$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_j[i] b_j[k] = \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j^T)_{i,k}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

نمونه‌گیری از جمع

$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

مشکل: اگر فقط یک i مهم داشتیم؟

نمونه‌گیری از جمع

$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

مشکل: اگر فقط یک i مهم داشتیم؟

نمونه‌گیری از جمع

پیشنهاد؟

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

i با احتمال p_i

پیشنهاد؟

مشکل: اگر فقط یک
i مهم داشتیم؟

نمونه‌گیری از جمع

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$$A^\top B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^\top$$

نمونه‌گیری از جمع

مشکل: اگر فقط یک
i مهم داشتیم؟

پیشنهاد؟

i با احتمال p_i

ماتریس نمونه‌گیری Π

انتخاب چند i تصادفی، با احتمال‌های
مربوطه

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{m}} \left. \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_1}}} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_m}}} & 0 \end{pmatrix}}^{n} \right\} m$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{m}} \left. \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_1}}} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_m}}} & 0 \end{pmatrix}}^{n} \right\} m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$\Pi A \in \mathbb{R}^{m \times d}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

$$\Pi B \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{m}} \left. \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_1}}} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_m}}} & 0 \end{pmatrix}}^{n} \right\} m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times p} \qquad\qquad B \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

$$\Pi A \in \mathbb{R}^{m \times d} \qquad\qquad \Pi B \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

خروجی ما: $$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{m}} \left.\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_1}}} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{i_m}}} & 0 \end{pmatrix}}^{n}\right\}m$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ $\qquad$ $B \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$\Pi A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ $\qquad$ $\Pi B \in \mathbb{R}^{m \times p}$

خروجی ما: $C = (\Pi A)^T \Pi B = \dfrac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \dfrac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$

تصادفی

تصادفی i_k

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

مرحله ۱: امید

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

n

$C = (\Pi A)^T \Pi B$ خوب است:

مرحله ۱: امید

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\, \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} p_j \frac{a_j b_j^T}{p_j} = A^T B}$$

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

مرحله ۱: امید

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

$$\mathbb{E}\, \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} p_j \frac{a_j b_j^T}{p_j} = A^T B$$

$$\mathbb{E}\, C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}\, \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}} = A^T B$$

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

$C = (\Pi A)^T \Pi B$ خوب است:

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

$$p_i \propto \|a_i\|_2 \|b_i\|_2$$

احتمال انتخاب i

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

$$p_i \propto \|a_i\|_2 \|b_i\|_2 \quad \xrightarrow{?} \quad \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2} < \frac{C}{\varepsilon^2 m}$$

احتمال انتخاب i

خوب است: $C = (\Pi A)^T \Pi B$

$$C = (\Pi A)^T \Pi B = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i_k} b_{i_k}^T}{p_{i_k}}$$

مرحله ۲: واریانس

هدف: $\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2) < \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2}$$

$$p_i \propto \|a_i\|_2 \|b_i\|_2 \quad \xrightarrow{?} \quad \frac{\mathbb{E}\,\|C - A^T B\|_F^2}{\varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2} < \frac{C}{\varepsilon^2 m}$$

احتمال انتخاب i

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

$$\mathbb{E}\,\|(\Pi A)^\top(\Pi B) - A^\top B\|_F^2 = \sum_{i,j}\mathbb{E}\left(\sum_{r=1}^{m}(Z_r - \mathbb{E}\,Z_r)_{i,j}\right)^2$$

$$Z_r = \frac{1}{m}\frac{a_{i_r}b_{i_r}^\top}{p_{i_r}}$$

$$= \sum_{i,j} Var\left[\sum_{r=1}^{m}(Z_r)_{i,k}\right]$$

$$= \sum_{i,j}\sum_{r=1}^{m} Var[(Z_r)_{i,j}]$$

$$Z_{i,j} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{(a_k)_i(b_k)_i}{p_k}$$

$$\begin{aligned}
Var[Z_{i,j}] &\leq \mathbb{E}\,Z_{i,j}^2 \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{(a_k)_i^2(b_k)_j^2}{p_k^2} \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k)_i^2(b_k)_j^2}{\|a_k\|_2\|b_k\|_2}\cdot\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2\|b_t\|_2\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\,\|(\Pi A)^\top(\Pi B) - A^\top B\|_F^2 \stackrel{\leq}{=} \sum_{i,j}\sum_{r=1}^{m} Var[(Z_r)_{i,j}]$$

$$\boxed{Var[Z_{i,j}] \leq \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k)_i^2(b_k)_j^2}{\|a_k\|_2\|b_k\|_2}\cdot\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2\|b_t\|_2\right)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2\|b_t\|_2\right)\cdot\sum_{k}\left(\sum_{i,j}\frac{(a_k)_i^2(b_k)_j^2}{\|a_k\|_2\|b_k\|_2}\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2\|b_t\|_2\right)\cdot\left(\sum_{k}\|a_k\|_2\|b_k\|_2\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2\|b_t\|_2\right)^2\\
&\leq \frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{n}\|a_t\|_2^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n}\|b_t\|_2^2\right) \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}\\
&= \frac{\|A\|_F^2\|B\|_F^2}{m}
\end{aligned}$$

تا اینجا:

الگوریتم:

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

تا اینجا:

الگوریتم:

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

پیشنهاد؟

تا اینجا:

الگوریتم:

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

پیشنهاد؟

معمولا این کار را می‌کردیم:

η=۱/۳

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

میانه؟

$$m \propto \log \frac{1}{\eta}$$

تا اینجا:

الگوریتم:

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

پیشنهاد؟

معمولا این کار را می‌کردیم:

η=۱/۳

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

میانه؟

$$m \propto \log \frac{1}{\eta}$$

1. Run the above algorithm many times independently with $\eta = \frac{1}{3}$
2. Obtain $C_1, \ldots, C_t$, $t = \Theta(\lg \frac{1}{\delta})$
3. Pick C_i that is accurate enough.

تا اینجا:

الگوریتم:

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

پیشنهاد؟

معمولا این کار را می‌کردیم:

η=۱/۳ $m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$

میانه؟

$$m \propto \log \frac{1}{\eta}$$

1. Run the above algorithm many times independently with $\eta = \frac{1}{3}$
2. Obtain $C_1, \ldots, C_t$, $t = \Theta(\lg \frac{1}{\delta})$
3. Pick C_i that is accurate enough.

چگونه؟

$$\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

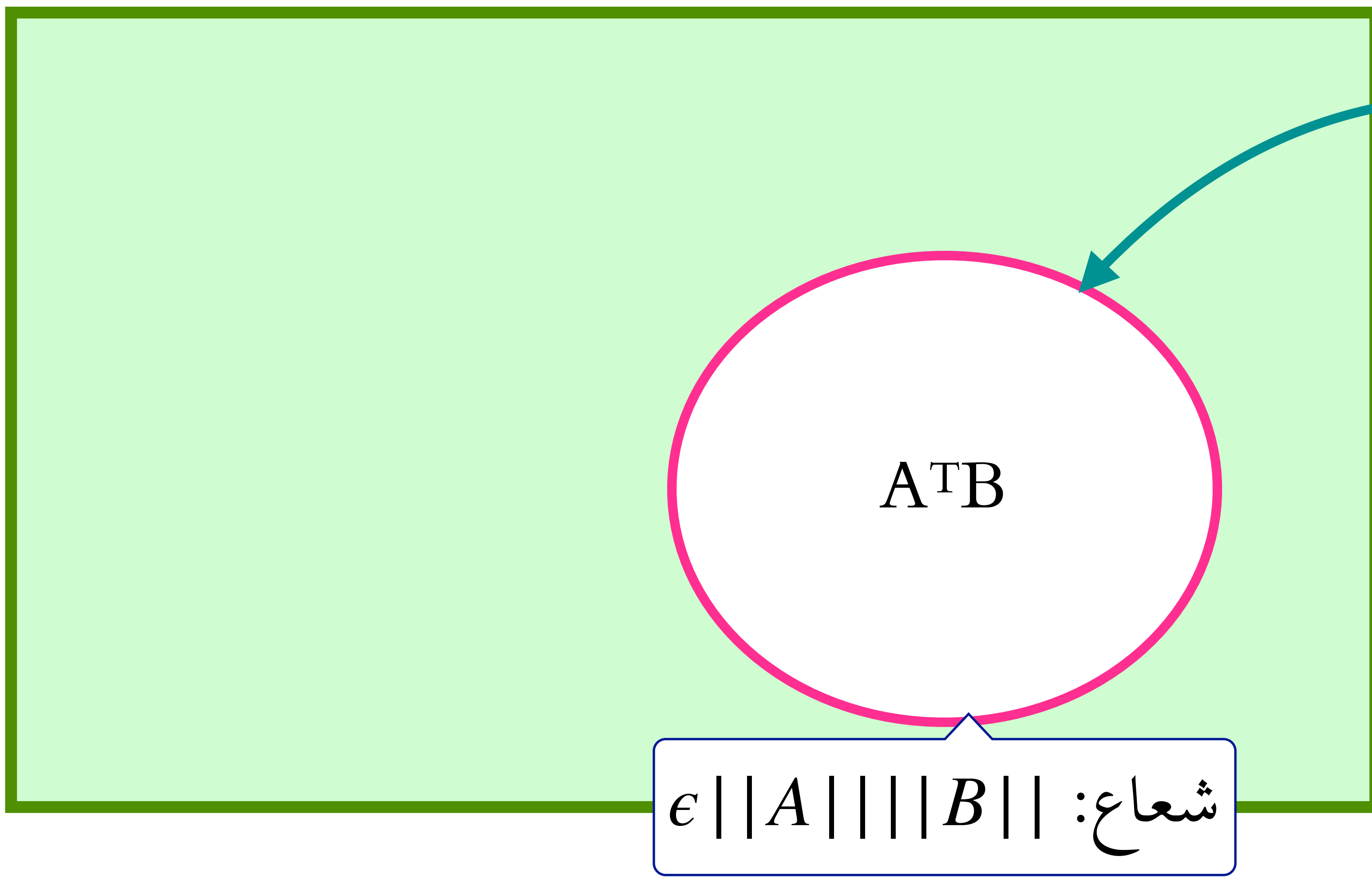
آزمودن یک Ci:
خیلی سخت!

$$\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

آزمودن یک Ci:

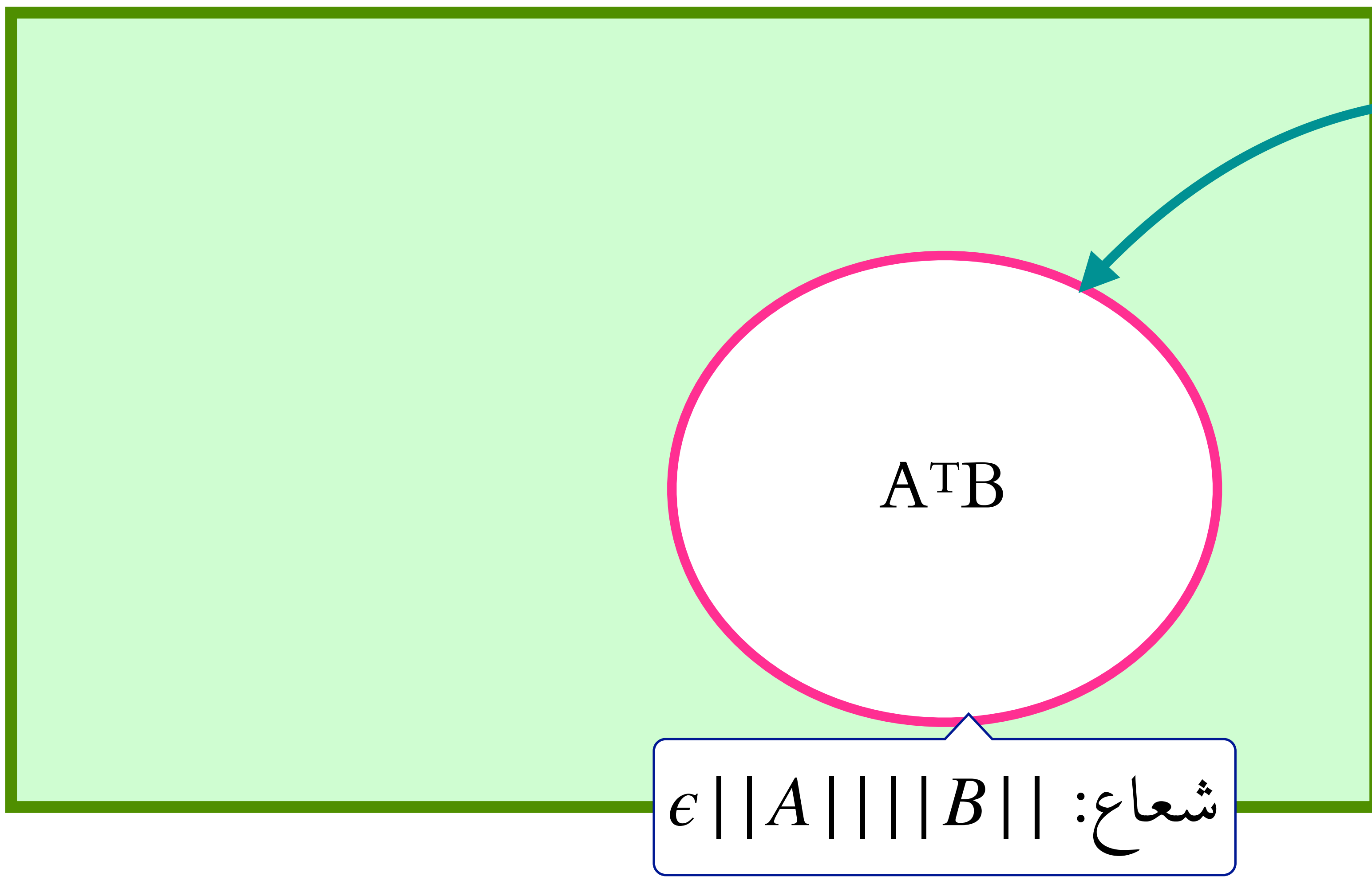
خیلی سخت!

هر کدام از C_i به احتمال ۲/۳



$$\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

آزمودن یک Ci:
خیلی سخت!



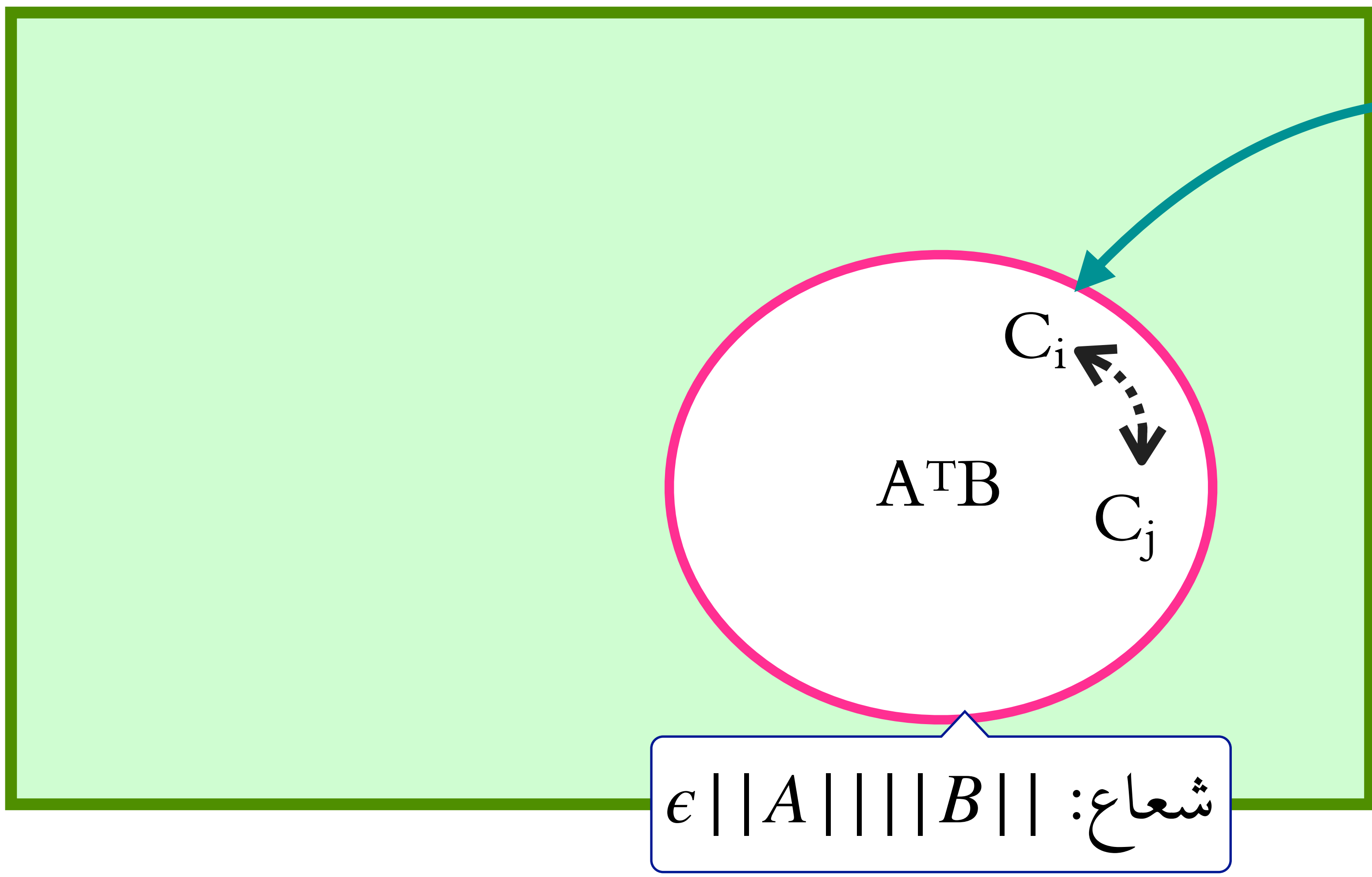
هر کدام از C_i به احتمال ۲/۳

حداقل $t/2$ به
احتمال خوب

$$\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

آزمودن یک Ci:
خیلی سخت!

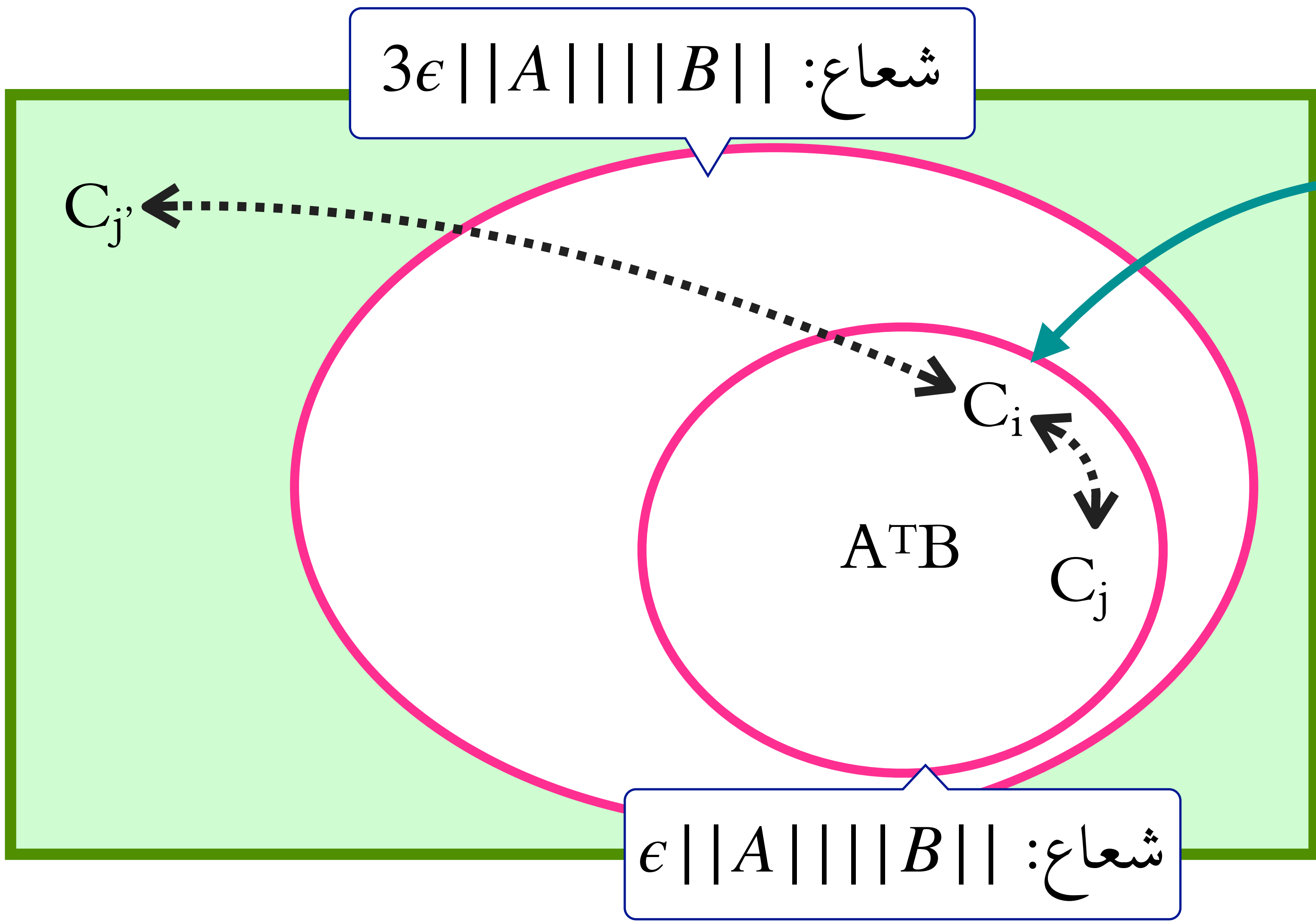
هر کدام از C_i به احتمال ۲/۳



حداقل t/2 به
احتمال خوب

$$\|C - A^T B\|_F^2 > \varepsilon^2 \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

آزمودن یک Ci:
خیلی سخت!

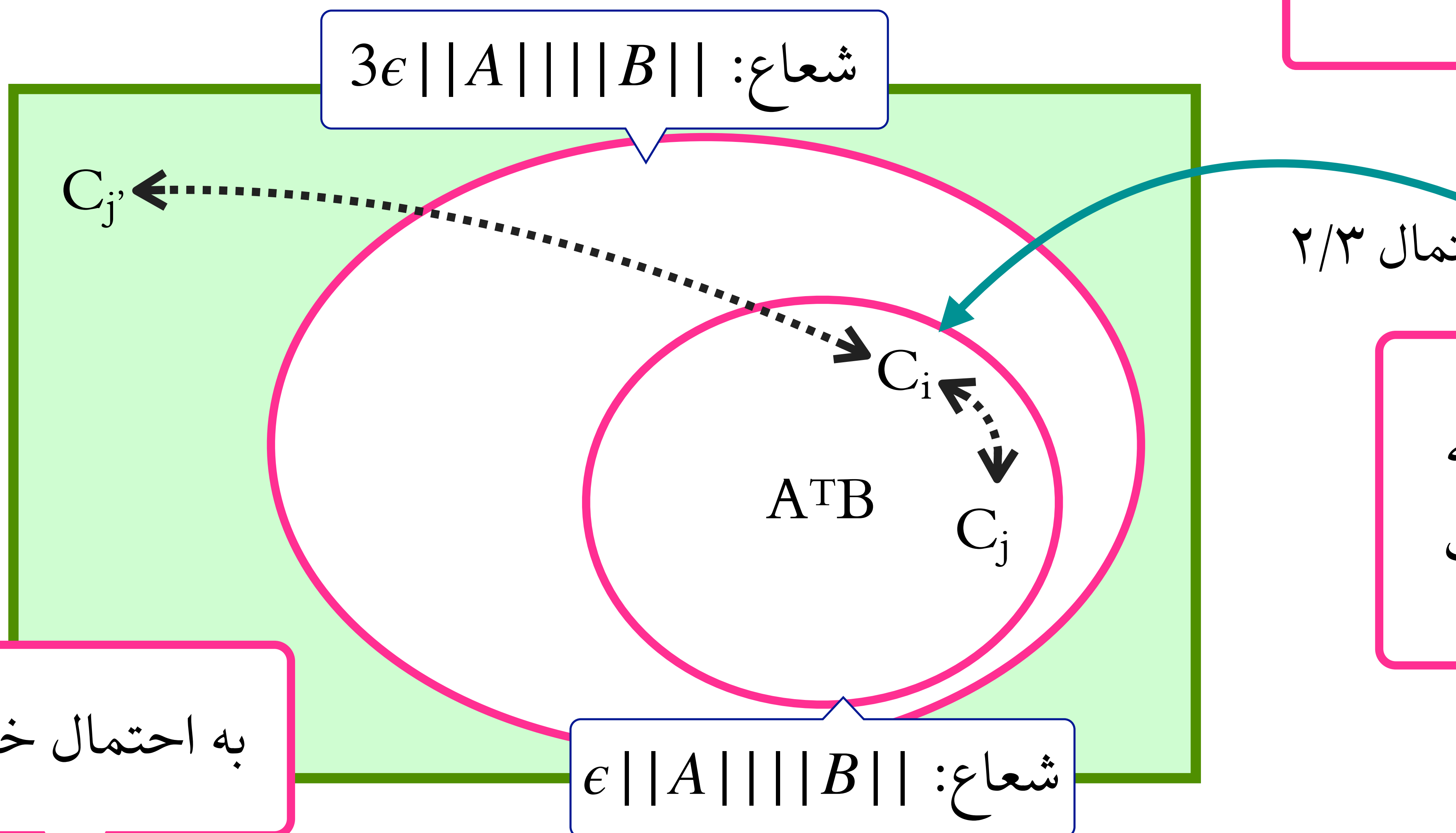


هر کدام از C_i به احتمال ۲/۳

حداقل $t/2$ به
احتمال خوب

$$\|C-A^TB\|_F^2 > \varepsilon^2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

آزمودن یک Ci:
خیلی سخت!



هر کدام از C_i به احتمال ۲/۳

حداقل t/2 به
احتمال خوب

به احتمال خوب

$$S_i = |\{j : \|C_i - C_j\|_F \leq 2\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F\}|$$

اگر C_i خوب <== $S_i \geq \frac{t}{2}$

اگر C_i خوب نباشد <== $S_i < \frac{t}{2}$

زمان اجرا

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

- تولید ΠA و ΠB
  - کم‌تر از خود ماتریس‌ها

زمان اجرا

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

- تولید ΠA و ΠB
  - کم‌تر از خود ماتریس‌ها
- هر ضرب ΠA و ΠB
  - $O(pd\,\epsilon^{-2}) = O(pmd)$

$$\boxed{m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}}$$

زمان اجرا

$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times d}$

- تولید ΠA و ΠB
  - کم‌تر از خود ماتریس‌ها
- هر ضرب ΠA و ΠB
  - $O(pd\,\epsilon^{-2}) = O(pmd)$
- اجرای مستقل برای t تا AΠ و BΠ
  - همه ضرب‌ها: $O(pd \log 1/\delta\ \epsilon^{-2})$

$$\boxed{m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}}$$

$$\boxed{t = O(\log 1/\delta)}$$

زمان اجرا

$A \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times d}$

- تولید ΠA و ΠB
  - کم‌تر از خود ماتریس‌ها
- هر ضرب ΠA و ΠB
  - $O(pd\,\epsilon^{-2}) = O(pmd)$
- اجرای مستقل برای t تا AΠ و BΠ
  - همه ضرب‌ها: $O(pd \log 1/\delta\ \epsilon^{-2})$
- انتخاب Ci خوب
  - $O(pd \log^2 1/\delta)$

$$m \geq \frac{C}{\varepsilon^2 \eta}$$

$t = O(\log 1/\delta)$

روش دوم: خلاصه‌سازی خطی غافل

انگیزه

- روش قبلی:

$$p_i \propto \|a_i\|_2 \|b_i\|_2$$

احتمال انتخاب i

- این روش: Π را مستقل از A و B

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*−JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

معادل است با: $\| \|\Pi z\|_2^2 - 1 \|_p \leq \varepsilon \delta^{1/p}$

$(\mathbb{E}[Z^p])^{1/p}$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and D is a distribution over Π. D satisfies the $(\varepsilon, \delta, p)-$JL moment property if for any x of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}\left|\|\Pi x\|_2^2 - 1\right|^p < \varepsilon^p \delta$.

معادل است با: $\left\| \|\Pi z\|_2^2 - 1 \right\|_p \leq \varepsilon \delta^{1/p}$

$(\mathbb{E}[Z^p])^{1/p}$

1. Dense sub-Gaussian matrix: $(\varepsilon, \delta, \lg \frac{1}{\delta})-$ JLMP, with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\delta}$
2. AMS sketch matrix: $(\epsilon, \delta, 2)-$ JLMP with $m \simeq 1/\epsilon^2\delta$.
3. Fast JL matrix: $(\epsilon, \delta, \lg(\frac{n}{\delta}))-$ JLMP with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon} \lg \frac{1}{\delta}$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*–JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

3. Fast JL matrix: $(\epsilon, \delta, \lg(\frac{n}{\delta}))-$ JLMP with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon} \lg \frac{1}{\delta}$

Theorem 5.3.1. *As long as* $m \simeq \varepsilon^{-2}\log(1/\delta)$ *and* $s \simeq \varepsilon m$,

$$\forall z : \|z\|_2 = 1,\ \mathbb{P}_{\Pi}(|\|\Pi z\|_2^2 - 1| > \varepsilon) < \delta.$$

$$\mathbb{E}\,|Z|^p = \int_0^\infty p x^{p-1} P(|Z| > x)dx$$

ادامه ...

Definition 37. *$\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and D is a distribution over Π. D satisfies the (ε, δ, p)–JL moment property if for any x of unit norm, we have $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p\delta$.*

DJL: $$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p}$$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*–JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p\delta$.

DJL: $$\mathbb{P}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p}$$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

DJL: $$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p} < \delta$$

Claim 38. *If Π comes from (ε, δ, p)–JLMP, $p \geq 1$, then $\forall x, y$ of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

¿

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

؟

Claim 38. *If Π comes from $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$, $p \geq 1$, then $\forall x, y$ of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \quad ؟$$

چون JLMP امید اندازه را نگه می‌دارد.

پس: ضرب را تبدیل به فاصله

$$||x-y||_2^2 = ||x||_2^2 + ||y||_2^2 - 2\langle x, y\rangle$$

چون JLMP امید اندازه را نگه می‌دارد.

پس: ضرب را تبدیل به فاصله

$$||x - y||_2^2 = ||x||_2^2 + ||y||_2^2 - 2\langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* (ε, δ, p)*−JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP*, $p \geq 1$, *then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\begin{aligned} &\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \\ &\quad \leq \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi x\|_2^2 - 1 \Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi y\|_2^2 - 1 \Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2 \Big\|_p \end{aligned}$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP*, $p \geq 1$, *then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\| \|\Pi x\|_2^2 - 1 \right\|_p + \frac{1}{2}\left\| \|\Pi y\|_2^2 - 1 \right\|_p + \frac{1}{2}\left\| \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2 \right\|_p$$

$\frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$ $\frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$ $||(x-y)||_2^2 \cdot \frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\underset{\Pi \sim D}{\mathbb{P}}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$\boxed{M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B}$$

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon \delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

?

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$$

$$\boxed{X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\|\,\|M\|_F^2\right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\|\sum_{i,j} M_{ij}^2\right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

?

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi\frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi\frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \Big\| \|M\|_F^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

ai: ستون i از A^T

bj: ستون j از B

؟

$$M_{ij}^2 = (\langle \Pi a_i, \Pi b_j \rangle - \langle a_i, b_j \rangle)^2$$

$$= \left(\left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle \right)^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \Big\|\|M\|_F^2\Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \Big\|\sum_{i,j} M_{ij}^2\Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \le (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

؟

ai: ستون i از A^T

bj: ستون j از B

$$M_{ij}^2 = (\langle \Pi a_i, \Pi b_j\rangle - \langle a_i, b_j\rangle)^2$$

$$= \left(\left\langle \Pi\frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi\frac{b_j}{\|b_j\|}\right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|}\right\rangle\right)^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi\frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi\frac{b_j}{\|b_j\|}\right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|}\right\rangle$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\ &\leq \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2
\end{aligned}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\ &\leq \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\ &= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \\
&\leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&\le \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \\
&\le (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \\
&= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \left(\sum_i ||a_i||_2^2 \right) \cdot \left(\sum_j ||b_j||_2^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \le (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \sum_{i,j} \left\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}}$$

$$= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2$$

$$= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \left(\sum_i ||a_i||_2^2 \right) \cdot \left(\sum_j ||b_j||_2^2 \right)$$

$$= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 ||A||_F^2 \cdot ||B||_F^2$$

$$\left\|\sum_{i,j} M_{ij}^2\right\|_{\frac{p}{2}} \leq (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 ||A||_F^2 \cdot ||B||_F^2$$

$$\mathbb{E}\|M\|_F^p = \left\|\|M\|_F^2\right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\|\sum_{i,j} M_{ij}^2\right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

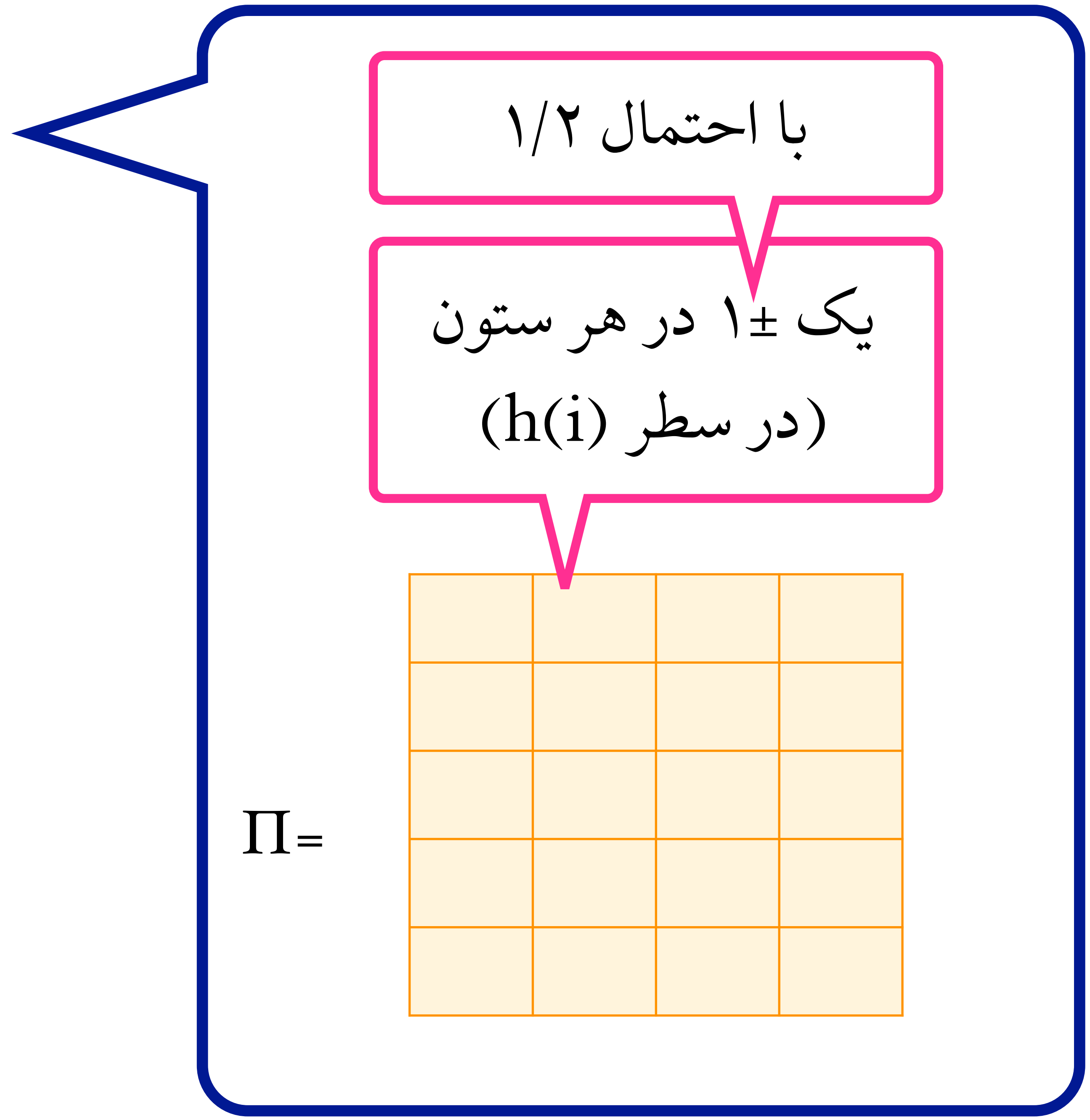
Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

الگوریتم:

- یک Π تصادفی
- همه چیز خوب است!

D: CountSketch



Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi\sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F) < \delta$$

D: CountSketch

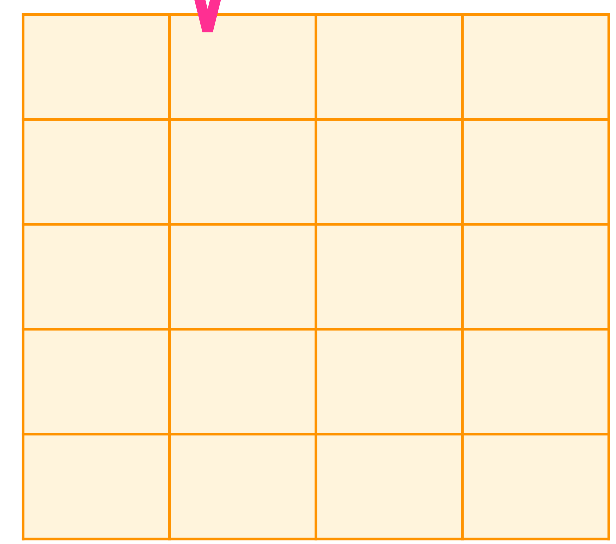
$(\varepsilon, \delta, 2)-$JLMP for $m \simeq \frac{1}{\varepsilon^2 \delta}$

با احتمال ۱/۲

یک ±۱ در هر ستون

(در سطر h(i))

$\Pi =$



Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

D: CountSketch

$(\varepsilon, \delta, 2)-\text{JLMP for } m \simeq \frac{1}{\varepsilon^2 \delta}$

اجرای $O(\log 1/\delta)$ بار

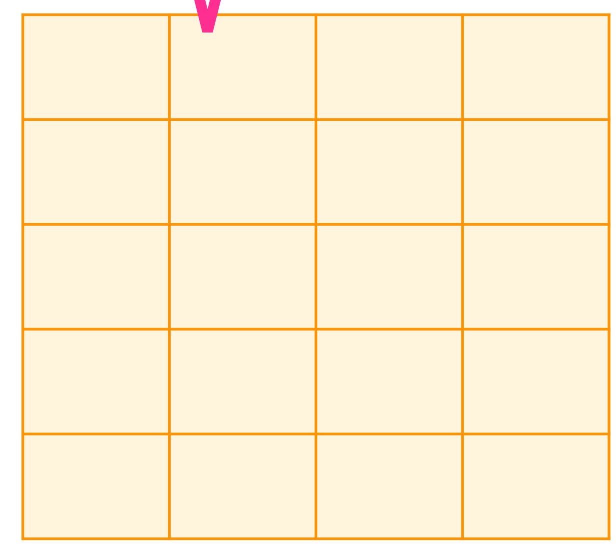
<==

زمان اجرا: $O(pd \log^2 1/\delta)$

با احتمال ۱/۲

یک ±۱ در هر ستون

(در سطر h(i))

$\Pi =$ 

Theorem 39. *Suppose D has* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP for* $p \geq 2$, *then for* A, B *as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

جمع‌بندی: ضرب ماتریس

- هدف:

$$P_{\Pi\sim D}(\|A^TB - (\Pi A)^T\Pi B\|_F > 3\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F) < \delta$$

- روش ۱: روش نمونه‌گیری
  - زمان: $O(pd \log^2 1/\delta)$

- روش ۲: روش A و B_ غافل
  - زمان: $O(pd \log^2 1/\delta)$