گسترش، برش تُنُک، و نظریه طیفی گراف (پاییز ۹۶-۹۵)

تمرین دوم

منظور از مقدار ویژهٔ اول و بردار ویژهٔ اول یعنی بزرگ‌ترین مقدار ویژه و بردار ویژهٔ مربوط به آن. به همین ترتیب دومین بردار و مقدار ویژه در این تمرین به کار برده می‌شود.

سوال ۱

اثباتی که در کلاس برای درست بودن الگوریتم روش توان بر روی آن تاکید کردیم، حالتی بود که مقدار ویژهٔ اول و دوم ماتریس با هم متفاوت باشد.

۱. اگر در روش توان مقدار ویژهٔ اول و دوم با هم برابر باشد آیا الگوریتم روش توان بردار ویژهٔ اول را پیدا می‌کند؟ آیا بردار ویژهٔ اول را پیدا می‌کند؟

۲. اگر مقدار ویژهٔ اول و دوم با هم برابر باشند و مقدار ویژهٔ سوم با آن‌ها برابر نباشد، نشان دهید چگونه الگوریتم را تغییر دهیم که هر دو بردار ویژهٔ اول و دوم را بیابد. اگر فکر می‌کنید این سوال خیلی هم درست نیست، کمی آن را تغییر دهید تا کاملا درست شود و سپس الگوریتم را ارائه دهید.

سوال ۲: روش تکرارشوندهٔ نسبت رایلی

این سوال سخت است، اختیاری است، و سعی کنید با کمک منابع اینترنتی حل کنید.
در روش توان، هر دفعه بردار را در ماتریس A ضرب می‌کنیم. فرض کنید الگوریتم را به صورت زیر تغییر دهیم

$v_0 = \text{uniform random sample from } \{-1,1\}^n$
for $k = 1, 2, \ldots, t$ **do**
  $\mu_{k-1} = r(q_{k-1})$
  Solve: $(A - \mu_{k-1} I) z_k = q_{k-1}$
  $q_k = \frac{z_k}{||z_k||_2}$
  $\mu_k = q_k^T A q_k$
end for

که

$$r(u) = \frac{u^T A u}{u^T u}$$

و خروجی الگوریتم q_t به عنوان بردار ویژه و μ_t به عنوان مقدار ویژهٔ اول است.

۱. اثبات کنید الگوریتم فوق به صورت صحیح کار می‌کند و مقدار ویژه و بردار ویژه اول ماتریس A را تقریب می‌زند.

۲. نشان دهید الگوریتم فوق سریع‌تر از روش توان به بردار ویژهٔ اول میل می‌کند.

۳. آیا می‌توان از روش فوق برای یافتن بردار ویژهٔ دوم استفاده کرد؟

۴. آیا می‌توان از روش فوق برای یافتن دومین کوچکترین بردار ویژهٔ ماتریس لاپلاسین گراف استفاده کرد؟

۵. آیا می‌توان از روش فوق برای یافتن دومین کوچکترین بردار ویژهٔ لاپلاسینی استفاده کرد که مقدار ویژهٔ مربوط به آن خیلی کوچک است؟

موفق باشید