دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۹

لم فارکاش

جلسه دهم

نگارنده: ثمین نوری پور

۱ مروری بر اثبات قضیه دوگانی

قضیه دوگان: برنامه ریزی خطی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad c^T x \\ &Ax \geq b \quad \text{and} \quad x \geq \circ \end{aligned}$$

دوگان برنامه ریزی خطی به صورت زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad b^T y \\ &A^T y \geq c \quad \text{and} \quad y \geq \circ \end{aligned}$$

دوگان به دنبال یافتن کران بالا برای مسیله ی اصلی است و میخواهد کوچک ترین کران بالای ممکن را بیابد. قضیه دوگانی ضعیف به شرح زیر است:

$$c^T x \leq b^T y$$

جدول ۱: قاعده ی کلی برای تعیین دوگان به صورت جدول رسم شده تعیین می شود.

	برنامه ریزی خطی اولیه	دوال برنامه ریزی خطی
Variables	$x_1, x_2, ..., x_n$	$y_1, y_2, ..., y_m$
Matrix	A	A^T
side Right-hand	b	c
function Objective	max $c^T x$	min $b^T y$
Constraints	$\geq$ قید i دارد $\leq$ قید i دارد $=$قید i دارد	$y_i \leq 0$ $y_i \geq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \leq 0$ $x_j \geq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$\leq$ قید j دارد $\geq$ قید j دارد $=$قید j دارد

جدول ۲: حالت های ممکن دو برنامه ریزی خطی گفته شده نسبت به هم

	نشدنی	شدنی بی کران	بهینه
نشدنی	$a_1 = +$	$a_2 = +$	$a_3 = -$
شدنی بی کران	$a_4 = +$	$a_5 = -$	$a_6 = -$
بهینه	$a_7 = -$	$a_8 = -$	جواب های برابر

سطر اول حالت های برنامه ریزی خطی اولیه و ستون اول حالت های برنامه ریزی خطی ثانویه را نشان می دهد.
علامت ـ نیز به معنای امکان ناپذیر بودن و + نشانه امکان پذیر بودن است.
جدول فوق نیز متقارن است زیرا اگر با روش های گفته شده ال پی اولیه را تبدیل به یک برنامه ریزی خطی که به دنبال کمینه کردن تابع هدف است بکنیم و ال پی ثانویه را تبدیل به مسیله ی یافتن ماکسیمم بکنیم پس می توان ال پی اولیه را دوگان ال پی ثانویه در نظر گرفت.
معنای بی کران بودن برای ال پی اولیه یعنی می توان تابع هدف را بی نهایت زیاد کرد و بی کران بودن برای ال پی ثانویه یعنی می توان ان را بی نهایت کم کرد.
به کمک قضیه دوگانی ضعیف می توان تعیین کرد که امکان این که برنامه ریزی خطی اولیه بی کران شدنی باشد و برنامه ریزی خطی ثانویه نیز بی کران شدنی باشد وجود ندارد زیرا طبق دوگانی ضعیف می توانیم یک کران بالا برای برای برنامه ریزی خطی اولیه ارایه دهیم و برای برنامه ریزی خطی ثانویه نیز می توان یک کران پایین ارایه داد.پس این حالت امکان پذیر نیست.حالت های شماره ی a_5, a_6, a_8 نیز با استدلال مشابه نقض می شوند و به کمک صورت کامل قضیه دوگانی حالت های a_3, a_7 نیز حذف می شوند.حال قضیه دوگانی را اثبات می کنیم.
ابتدا برنامه ریزی خطی را به فرم معادله ای تبدیل می کنیم:

$$maximize \quad \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathrm{x}} \quad subject \quad to \quad \bar{A}\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{b} \quad and \quad \bar{\mathrm{x}} \geq 0$$
$$\bar{\mathrm{x}} = (x_1, \ldots, x_{n+m}), \bar{\mathrm{c}} = (c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0), \bar{A} = (A \mid I_m).$$

فرض می کنیم تابلوی انتهایی به شکل زیر است:

$$\frac{\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N}{z = z_0 + \mathbf{r}^T \mathbf{x}_N}$$

حال ادعا می کنیم:
$\mathbf{y}^* = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1}\right)^T$ یک جواب شدنی از مسیله ی دوگان است و $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$. با توجه به ادعای گفته شده می توانیم بگوییم اگر ال پی اولیه جواب شدنی و بهینه داشته باشد دوگان ان نیز جواب شدنی و بهینه دارد و مقدار این دو عدد با هم برابر است.
قسمت اول اثبات: متغیر هایی که در عبارت های زیر علامت بار دارند متغیر های استفاده شده در اخرین تابلو هستند. از طرفی می دانیم:

$$\bar{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$
$$\bar{\mathbf{x}}_N^* = 0$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{c}}^T\bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{x}}_B^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T\left(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}\right) = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\right)\mathbf{b} = \left(\mathbf{y}^*\right)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

در تساوی $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{c}}^T\bar{\mathbf{x}}^*$ از تعریف $\bar{\mathrm{c}} = (c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)$ استفاده شده است. و تساوی $\bar{\mathbf{c}}^T\bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{x}}_B^*$ با توجه به $\bar{\mathbf{x}}_N^* = 0$ نتیجه شده است.

قسمت دوم اثبات:
برای اثبات شدنی بودن باید نشان دهیم:

$$A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c} \text{ and } \mathbf{y}^* \geq \circ$$

از طرفی ادعای بالا معادل اثبات عبارت زیر است:

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

طبق مقدار y^* داریم:

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* = \bar{A}^T\left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\right)^T = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}\right)^T = w$$
$$\mathbf{w}_B = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_B\right)^T = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T I_m\right)^T = \bar{\mathbf{c}}_B$$
$$\mathbf{w}_N = \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N\right)^T = \bar{\mathbf{c}}_N - \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{c}}_N$$

عبارت $w_N = \bar{\mathbf{c}}_N - \mathbf{r}$ به کمک لم یک اثبات می شود.
لم ۱:
برای هر B پایه ای شدنی فقط یک تابلو وجود دارد و عبارت های زیر برای ان برقرار است:

$$\frac{\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N}{z = z_\circ + \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N}$$

$$Q = -A_B^{-1}A_N, \mathbf{p} = A_B^{-1}\mathbf{b}, z_\circ = \mathbf{c}_B^TA_B^{-1}\mathbf{b}, \quad \text{and } \mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \left(\mathbf{c}_B^TA_B^{-1}A_N\right)^T$$

ادعای بالا را اثبات می کنیم:
می دانیم فرض های زیر برقرارند:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - A_N\mathbf{x}_N$$

عبارت بالا را در A_B^{-1} ضرب می کنیم.

$$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\mathbf{x}_N$$

مقدار تابع هدف به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T\left(A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\mathbf{x}_N\right) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^TA_B^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_N^T - c_B^TA_B^{-1}A_N\right)\mathbf{x}_N \\ z &= z_\circ + \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

به کمک دو عبارت بالا نتیجه میگیریم:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{c}}^N - \left(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N\right)^T$$

۲ مثالی از دوگان

به کمک مثال زیر مفهوم دوگان در این مسیله را بیان می کنیم:
n نوع کالا ی نهایی و m نوع کالای اولیه داریم.قیمت هر کالای نهایی j ام c_j است.برای تولید یک واحد کالای نهایی j ام a_{ij} واحد کالای اولیه i لازم داریم.مقدار کالای اولیه i برابر b_i است.حال می خواهیم سود را ماکسیمم کنیم.

$$\begin{aligned} &\max\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ &(y_i)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad i = 1,\cdots,m \\ &x_j \geqslant \circ \quad j = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad j = 1, \dots, n$$
$$y_i \geqslant 0 \quad i = 1, \dots, m$$

می خواهیم به جای b_i مقدار $b_i + \epsilon_i$ را قرار دهیم.مسیله تبدیل به فرم زیر می شود:

$$\max_n \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$(y_i) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i + \epsilon_i \quad i = 1, \cdots, m$$
$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, \dots, n$$
$$\min \sum_{i=1}^{m} (b_i + \epsilon_i) y_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad j = 1, \dots, n$$
$$y_i \geqslant 0 \quad i = 1, \dots, m$$

این عدد تنها در تابع هدف دوگان ال پی مسله ی اصلی ظاهر می شود و باعث می شود مقدار بهینه دوگان $y_i \times \epsilon_i$ زیاد شود پس به کمک دوگان می توانیم پی ببریم چه قد به تابع هدف پس از تغییر قیود ال پی اولیه اضافه شده است.
پس y_i به نوعی ارزش ماده اولیه i است.

۳ لم فارکاش

لم فارکاش بیان می کند که یکی از دو حالت زیر همواره برقرار است:

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq 0 \,.$$

$$\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mathbf{y}^T A \geq 0^T \text{ and } \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0 \,.$$

برای ارایه ی تعبیر هندسی از لم فارکاش مفهومی به عنوان کنج محدب را برای بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ارایه می دهیم:

$$\{t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + t_n \mathbf{a}_n : t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0\}$$

تعبیر هندسی کنج محدب:
تعریف فوق نقطه صفر و تمامی ضرایب بردار $a_i, i = 1, \dots, n$ و تمام بردار های بین $a_i, i = 1, \dots, n$ و $a_j, j = 1, \dots, n$ را شامل می شود.
حال تعبیری هندسی برای دو حالت بیان شده لم فارکاش ارایه می دهیم:
همواره یکی از دو حالت زیر رخ می دهد.
حالت اول: نقطه ی b در کنج محدب C تولید شده توسط $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ قرار میگیرد.
حالت دوم: صفحه ی h و گذرنده از نقطه ی ۰ و به فرم

$$h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0\}$$

وجود دارد برای $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ مناسب به طوری که بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ و کنج محدب C در یک سمت صفحه حضور دارند و b در سمت دیگر صفحه قرار دارد. به طوری که $\mathbf{y}^T \mathbf{a}_i \geq 0$ برای همه ی $i = 1, 2, \dots, n$ برقرار باشد و داشته باشیم: $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$

صورت های معادل لم فارکاش عبارتند از:
صورت اول:سیستم $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ جوابی نامنفی دارد اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ با $\mathbf{y}^T A \geq 0^T$ عبارت $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$ برقرار است.

جدول ۳: نتایج لم فارکاش

	سیستم $Ax \leq b$	سیستم$Ax = b$
جواب نامنفی دارد اگر و تنها اگر	$\mathbf{y} \geq 0, \mathbf{y}^T A \geq 0 \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq 0^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$
جواب عضو $\mathbb{R}^n$ دارد اگر و تنها اگر	$\mathbf{y} \geq 0, \mathbf{y}^T A = 0 \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = 0^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

صورت دوم:سیستم $A\mathrm{x} \leq \mathrm{b}$ جوابی نامنفی دارد اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ نامنفی با $\mathbf{y}^T A \geq 0^T$ عبارت $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$. برقرار است.
صورت سوم: سیستم $A\mathrm{x} \leq \mathrm{b}$ جوابی نامنفی دارد اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ نامنفی با $\mathbf{y}^T A = 0^T$ عبارت $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$ برقرار است.
اثبات معادل بودن صورت اول و دوم لم فارکاش به شرح زیر است:
فرض می کنیم صورت اول لم فارکاش به صورت زیر است:

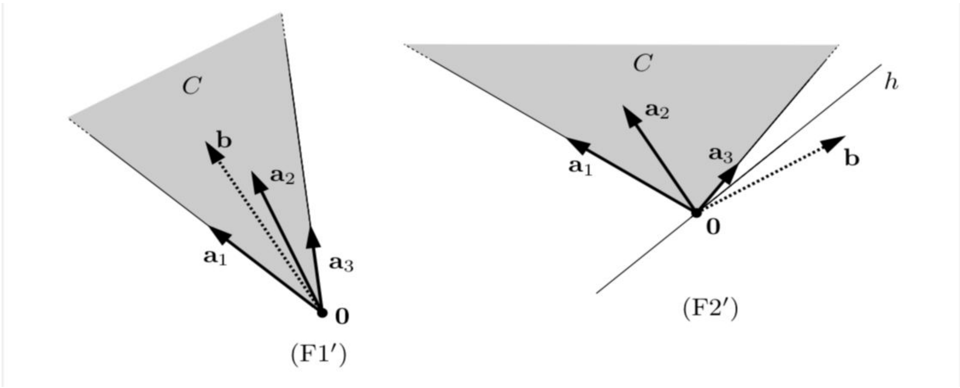
$$p_1 \iff q_1$$

فرض می کنیم صورت دوم لم فارکاش به صورت زیر است:

$$p_2 \iff q_2$$

برای اثبات معادل بودن صورت اول و دوم باید نشان دهیم: $p_1 \iff p_2$ و $q_1 \iff q_2$
از طرفی برای تبدیل کردن تساوی به نامساوی از عبارت گفته شده استفاده می کنیم.

$$Ax = b \iff Ax \leq b, Ax \geq b$$



شکل ۱: شهود هندسی لم فارکاش

۴ اثبات قضیه دوگانی با لم فارکاش

$$maximize \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad subject \quad to \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad and \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\gamma = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$
$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$$
$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \varepsilon$$

دو عبارت بالا مفهوم بهینه بودن x را می رساند. عبارت $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \varepsilon$ جواب نامنفی دارد و عبارت $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \varepsilon$ جواب نامنفی ندارد.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ -\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\gamma - \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_0 \quad \text{شدنی}$$
$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon \quad \text{نشدنی}$$

با توجه به صورت دوم لم فارکاش و این که $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$ جواب نامنفی ندارد می توانیم بگوییم عبارات زیر برقرار است:

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \quad \hat{\mathbf{y}}^T\hat{A} \geq 0^T \quad \hat{\mathbf{y}}^T\hat{\mathbf{b}}_\varepsilon < 0$$
$$A^T\mathbf{u} \geq z\mathbf{c}, \mathbf{b}^T\mathbf{u} < z(\gamma + \varepsilon)$$

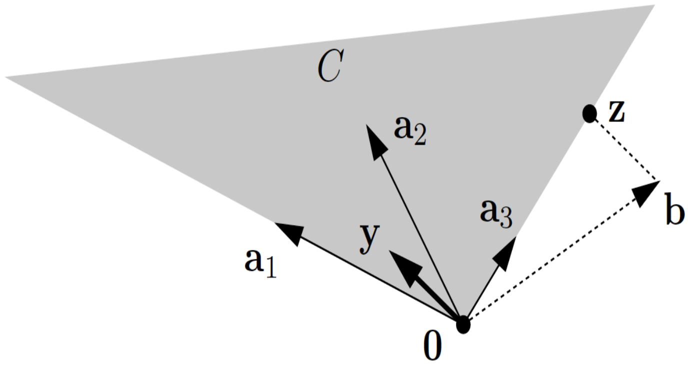
جواب کاندید شدنی زیر را به کمک لم می سازیم:

$$\mathbf{v} := \frac{1}{z}\mathbf{u} \geq 0$$
$$A^T\mathbf{v} \geq \mathbf{c}, \mathbf{b}^T\mathbf{v} < \gamma + \varepsilon$$

از طرفی طبق $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$ و صورت دوم لم فارکاش داریم که جواب $\mathbf{b}^T\mathbf{v}$ حداقل به اندازه ی γ هست. طبق دوگانی ضعیف چون مقدار تابع هدف ال پی دوگان باید بیش تر مساوی γ باشد .پس جواب ارایه داده شده شدنی و کران دار است و قبلا اثبات کردیم اگر جواب شدنی و کران دار داشته باشیم پس جواب بهینه ای وجود دارد و این جواب باید برابر γ باشد.

۵ اثبات لم فارکاش

اگر b در کنج نباشد نزدیک ترین نقطه به کنج را z در نظر میگیریم.برای این کار باید ابتدا ثابت کنیم نزدیک ترین نقطه وجود دارد.
فاصله در حقیقت تابعی است که مینیمم دارد و ان نقطه را z می نامیم. bz به بردار z عمود است.از طرفی همه a_i باید زاویه شان با bz بیش از ۹۰ باشد.پس ضرب داخلی bz در a_i مثبت و در b منفی می شود.پس bz همان بردار عمود بر صفحه ی مورد نظر است.



شکل ۲: شهود هندسی لم فارکاش