دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

# تحقیق در عملیات ۱

**محمّد هادی فروغمند اعرابی**

پاییز ۱۳۹۹

## پاسخ کوییز چهارم

**نگارنده: پیمان ناصری**

## جواب ۱:

آ) ماتریس بازی سود بازیگر سطری (= ضرر بازیگر ستونی) را نشان می دهد. بازیگر ستونی تحت هر شرایطی ( به این معنا که بازیگر سطری کدام بازی $R_i$ را انتخاب می کند) به نفعش هست ستون $C_1$ را به جای ستون $C_2$ انتخاب کند، چون ضرر کمتری می کند. با این استدلال (استراتژی مغلوب و غالب) برای هر دو ماتریس به شکل رو به رو تبدیل می شود .

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} q & 1-q \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

ابتدا $C_4$ در برابر $C_1$ مغلوب می شود. سپس $R_2$ در برابر $R_1$ و بعد از آن $C_3$ در برابر $C_2$.

ب)

$$\max\ y$$

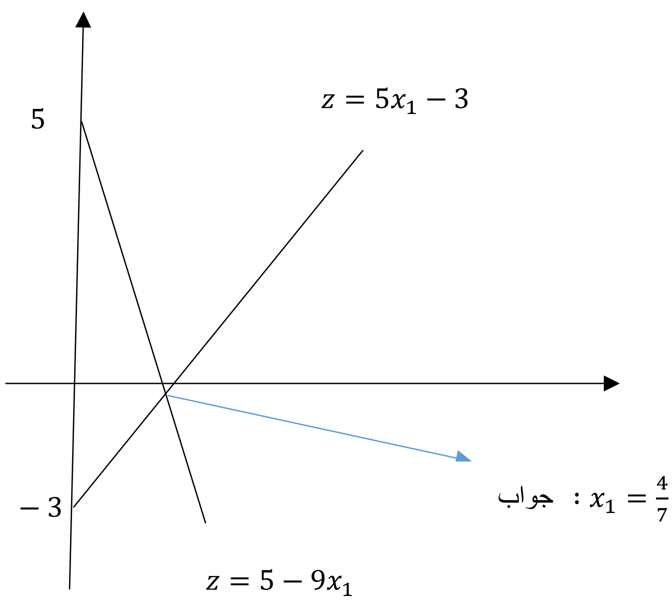
$$S.t \quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - y \geq 0 \\ &x_1 + x_2 = 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ج) $x_2 = 1 - x_1$ :

$$\max\ y$$

$$S.t \quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - y \geq 0 \\ &0 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

د)




در نتیجه بازیکن سطری با احتمال $\frac{4}{7}$، $R_1$ و با احتمال $\frac{3}{7}$، $R_3$ را انتخاب می کند.

ه)

سود نفر ستونی= $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \frac{-1}{7}$

## جواب ۲:

آ)

برای هر یال $e$ متغیر $x_e$ را تعریف می کنیم که این یال در زیرگراف باشد یا نباشد. پس $\forall e \in E \quad x_e \in \{0,1\}$.

می خواهیم وزن گردش را بیشینه کنیم. هم چنین برای هر راس $v$ تعداد یال هایی که انتخاب شده و به آن وارد شده اند، باید با تعداد یال های انتخاب شده ای که از آن خارج شده اند برابر باشد.

$$Max \sum_{e} w_e x_e$$

$$S.t \qquad \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e$$

ب)

شرط $\forall e \in E \quad x_e \in \{0,1\}$ را به صورت $0 \leq x_e \leq 1$ ریلکس می کنیم. برای هر راس هم باید داشته باشیم:

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e$$

ماتریس $A$ را یک ماتریس $m \times n$ بگیرید که هر سطر متناظر با یک راس است و اگر بین راس $i$ و $j$ یال وجود نداشته باشد درایه $i,j$ را $0$ و اگر وجود داشته باشد بسته به این که به یال $i$ وارد یا از ان خارج شده باشد به ترتیب $1$ و $-1$ بگیرید. در این صورت $AX = 0$ که $X$ همان ماتریس یال هاست.

شرط $x_e \leq 1$ را می توان به فرم معادل $x_e + y_e = 1$ که $x_e, y_e \geq 0$ بیان کرد. $I_m$ را ماتریس همانی $m \times m$ بگیرید.

$$(I_m | I_m) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{e_1} \\ \vdots \\ x_{e_m} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{e_1} \\ \vdots \\ y_{e_m} \end{pmatrix}$$

حال دو شرط سوال به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

که منظور از $0$ در ماتریس بالا ماتریس $m \times n$ با درایه های صفر است و هم چنین $\binom{X}{Y} \geq 0$.

ج)

با استقرا روی اندازه زیر ماتریس نشان می دهیم ماتریسی که در هر ستون آن دقیقا یک $+1$ و یک $-1$ وجود دارد و بقیه درایه ها $0$ هستند، تک پیمانه ای است.

اگر $n = 1$ حکم درست است، چون همه درایه ها $0, +1, -1$ هستند.

فرض کنید حکم برای زیر ماتریس های با اندازه کمتر از $k$ یعنی زیر ماتریس های $s \times s$ که $s \leq k - 1$ درست باشد. حال یک زیر ماتریس $k \times k$ بگیرید. اگر یک ستون داشته باشد که همه درایه ها ضفر باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است و حکم ثابت می شود. اگر یک ستون باشد که $+1$ نداشته باشد، پس چون در هر ستون دقیقا یک $-1$ وجود دارد پس بقیه درایه های آن ستون از زیر ماتریس صفر هستند. پس دترمینان زیرماتریس برابر است با $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان زیر ماتریسی از آن زیرماتریس که از حذف سطر و ستون شامل $-1$ که درایه ی $i + j$ هست، بدست می آید. حال طبق فرض استقرا دترمینان زیر ماتریس زیر ماتریس برابر $0, +1, -1$ می باشد پس دترمینان زیر ماتریس برابر $0, +1, -1$ است. اگر یک ستون باشد که $-1$ نداشته باشد استدلال مشابه هست.

اگر همه ستون های زیر ماتریس $+1, -1$ داشته باشند آنگاه چون در هر ستون زیر ماتریس دقیقا یک $+1$ و یک $-1$ وجود دارد، پس جمع همه سطر های زیر ماتریس صفر است . پس سطر های زیر ماتریس وابسته خطی اند و در نتیجه دترمینان زیرماتریس صفر است.  پس ماتریس $A$ در قسمت **ب** کاملا تک پیمانه ای است. پس طبق قضیه کتاب ماتریس زیر هم کاملا تک پیمانه ای است.

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix}$$

د)

برنامه خطی قسمت **ب**  به صورت زیر است:

$$Max \sum_e w_e x_e$$

$$BX = b$$

$$X \geq 0$$

چون ماتریس $B$ کاملا تک پیمانه ای است، پس ریوس چند وجهی $BX = b$ صحیح هستند پس برنامه خطی بالا روی این چند وجهی جواب صحیح دارد، پس برای حل مساله اصلی کافی است مساله ریلکس شده آنرا حل کنیم و جواب در زمان چند جمله ای بدست می آید.