

به نام خداوند رحمت‌گر مهربان

## پیچیدگی محاسبات (بهار ۱۳۹۴) - آزمون جبرانی

نام و نام خانوادگی: \_\_\_\_\_ زمان: هر سوال ۱۰ دقیقه

پاسخ سوال‌ها را مختصر بنویسید.

سوال ۱: (فصل ۱) ثابت کنید زبان زیر تصمیم‌ناپذیر است.

$$\{ \langle M \rangle \mid \text{حداکثر } 2n^2 \text{ است} \}$$

سوال ۲: (فصل ۲) فرض کنید  $L_1, L_2 \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ . ثابت کنید  $L_1 \oplus L_2 \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ ، که  $L_1 \oplus L_2$  که  $L_1$  و  $L_2$  هستند.

سوال ۳: (فصل ۳) ایده اثبات قضیه سلسله مراتب زمانی غیرقطعی را بنویسید (جزئیات زیاد باعث از دست دادن نمره می‌شود!).

سوال ۴: (فصل ۴) به یاد بیاورید که برای اثبات  $\text{NSPACE}(S(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(S(n))})$ ، گراف پیکربندی مربوط به محاسبه  $M$  روی یک ورودی  $x$  را، که  $M$  یک ماشین تورینگ غیرقطعی با حافظه  $S(n)$  است می‌ساختیم و چک می‌کردیم که آیا از پیکربندی شروط  $C_{\text{start}}$  مسیری به پیکربندی پذیرش  $C_{\text{start}}$  وجود دارد یا خیر.

بیان کنید که این چک کردن را چگونه می‌توان با یک ماشین تورینگ انجام داد به طوری که اثبات قضیه کامل شود. به طور خاص، اگر از یک الگوریتم کلاسیک جستجو در گراف استفاده می‌کنید، نشان دهید چگونه می‌توان این الگوریتم را با ماشین تورینگ پیاده‌سازی کرد که زمان اجرای آن برای اثبات قضیه کافی باشد.

سوال ۵: (فصل ۵) به طور شهودی بیان کنید چرا نمی‌توان

$$\forall u_1 \in \{0, 1\}^n \exists u_2 \in \{0, 1\}^n \forall u_3 \in \{0, 1\}^n \phi(u_1, u_2, u_3)$$

را به صورت

$$\forall u_1 \in \{0, 1\}^n \forall u_3 \in \{0, 1\}^n \exists u_2 \in \{0, 1\}^n \phi(u_1, u_2, u_3)$$

نوشت.

سوال ۶: (فصل ۶) زبان  $L$  را تنگ<sup>۱</sup> می‌گوییم اگر یک چندجمله‌ای  $p$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $n$  داشته باشیم  $|L \cap \{0, 1\}^n| \leq p(n)$ . ثابت کنید هر زبان تنگ در  $\text{P/poly}$  است.

<sup>۱</sup>sparse

سوال ۷: (فصل ۷) سکه‌ای فرضی را در نظر بگیرید که در صورت انداخته شدن، به احتمال  $\rho$  خط می‌آید. آیا داشتن چنین سکه‌ای قدرت محاسباتی بیشتری نسبت به سکه معمولی به ما می‌دهد؟ برحسب مقدار  $\rho$  بحث کنید.

سوال ۸: (فصل ۸) نشان دهید در تعریف اثبات‌های تعاملی اگر شرط صحت<sup>۲</sup> را به صورت زیر تغییر دهیم آنگاه مسئله‌هایی که اثبات‌های تعاملی دارند در رده پیچیدگی NP هستند.

$$x \notin L \Rightarrow \forall P \Pr[out_V \langle V, P \rangle(x) = 1] = 0$$

می‌توانید از نکاتی که در کلاس گفته شده یا در کلاس ذکر شده (به جز همین نکته) استفاده کنید.

سوال ۹: (فصل ۱۱) اثبات کنید به ازای دو بردار متفاوت  $u, v \in \{0, 1\}^n$  دو بردار  $WH(u)$  و  $WH(v)$  دقیقاً در نیمی از مولفه‌ها با هم متفاوتند.

موفق باشید

---

<sup>۲</sup> Soundness