بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه هفدهم

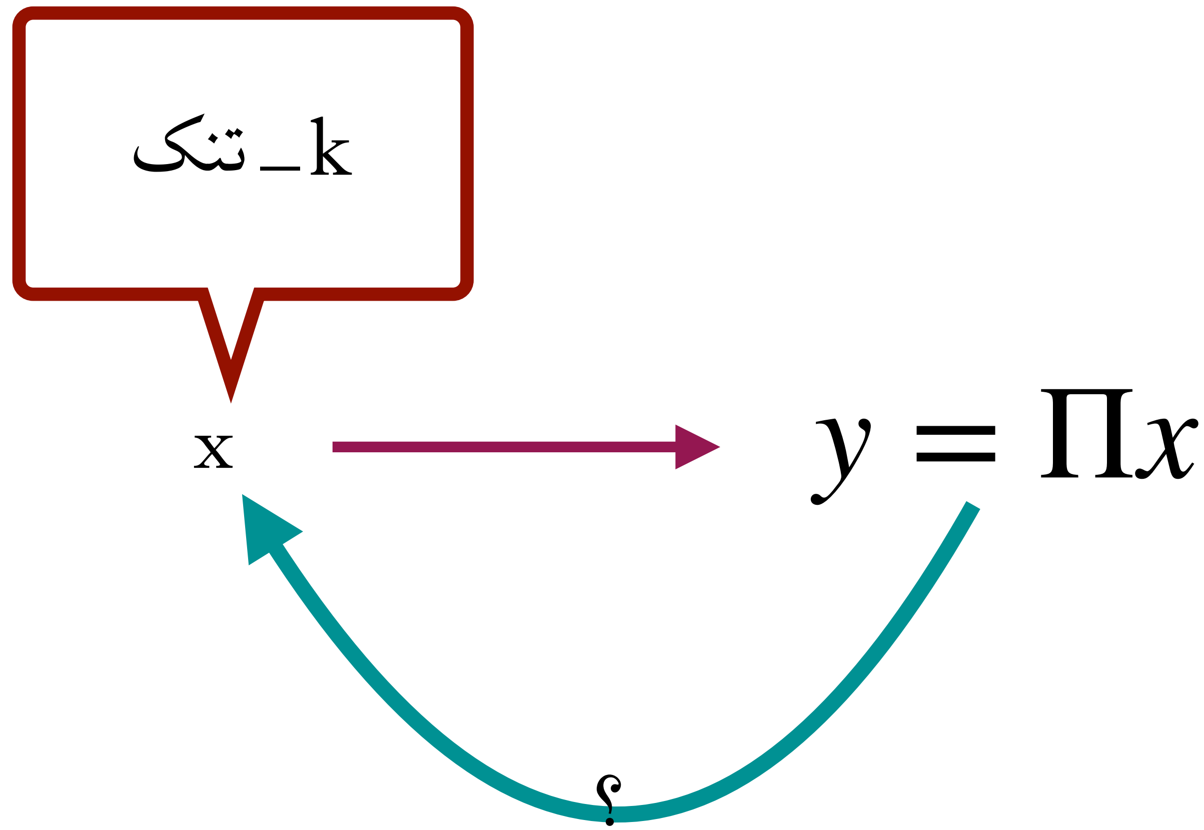
خلاصه‌سازی برای مه‌داده

احساس فشردگی

احساس فشردگی

الگوریتم کمینه نرم ۱

انگیزش



انگیزش

k_تنک

$x \longrightarrow y = \Pi x$

؟

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min \|z\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

انگیزش

k_تنک

$$x \longrightarrow y = \Pi x$$

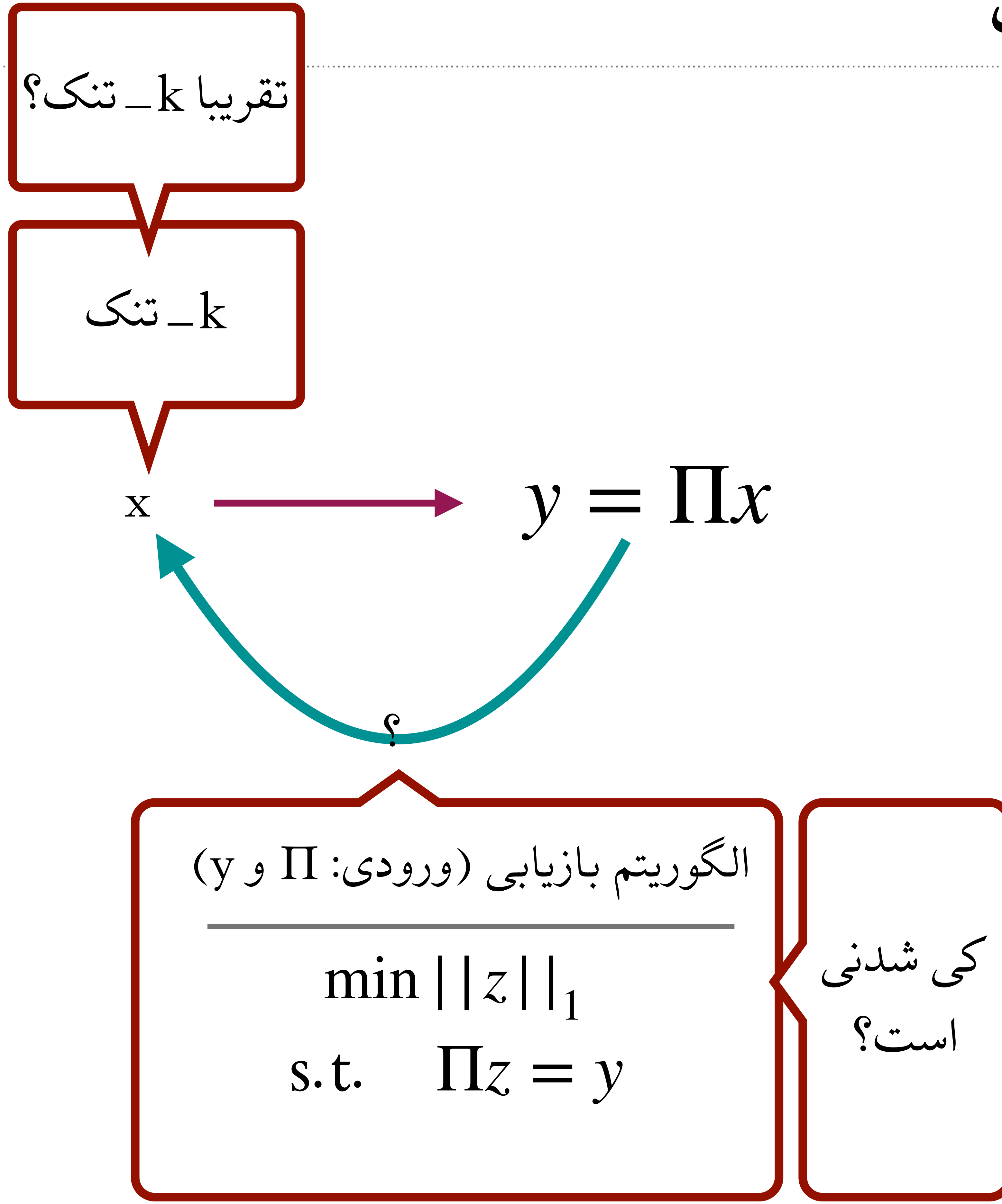
؟

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1$$
$$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

کی شدنی است؟

انگیزش



تقریبا k_تنک؟
k_تنک
x
$y = \Pi x$
؟
الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)
$\min \|z\|_1$
$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$
کی شدنی است؟

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

$$\sup_{T \subset [n] |T| = k} \|I_k - (\Pi^{(T)})^* \Pi^{(T)}\| < \delta,$$

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

مثال: RIP با احتمال مثبت: برای $m = \Omega(\delta^{-2} k \log^4 n)$

$$\sqrt{\frac{d}{m}} S H$$

ماتریس نمونه‌گیری:
m سطر، هر سطر یک ±۱

ماترس هادامار $\times \frac{1}{\sqrt{d}}$

Definition 1 *An $m \times n$ matrix A satisfies a* null-space property *of order k with constant C if for any $\eta \in \Re^n$ such that $A\eta = 0$, and any set $T \subset \{1 \ldots n\}$ of size k, we have*

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$$

where $-T$ denotes a complement of T.

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

Definition 1 *An* $m \times n$ *matrix* A *satisfies a* null-space property *of order* k *with constant* C *if for any* $\eta \in \Re^n$ *such that* $A\eta = 0$*, and any set* $T \subset \{1 \ldots n\}$ *of size* k*, we have*

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$$

where $-T$ *denotes a complement of* T*.*

Lemma 1 *Suppose that* A *satisfies RIP of order* $(c+2)k$ *with constant* δ*,* $c > 1$*. Then* A *satisfies the nullspace property of order* $2k$ *with constant* $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$*.*

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که (2+c)k_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که (2+c)k_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|$=۲k

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که (2+c)k_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=۲k

η که Aη=0:

$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=۲k

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c>1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1+\sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که $(2+c)k$_تنک:

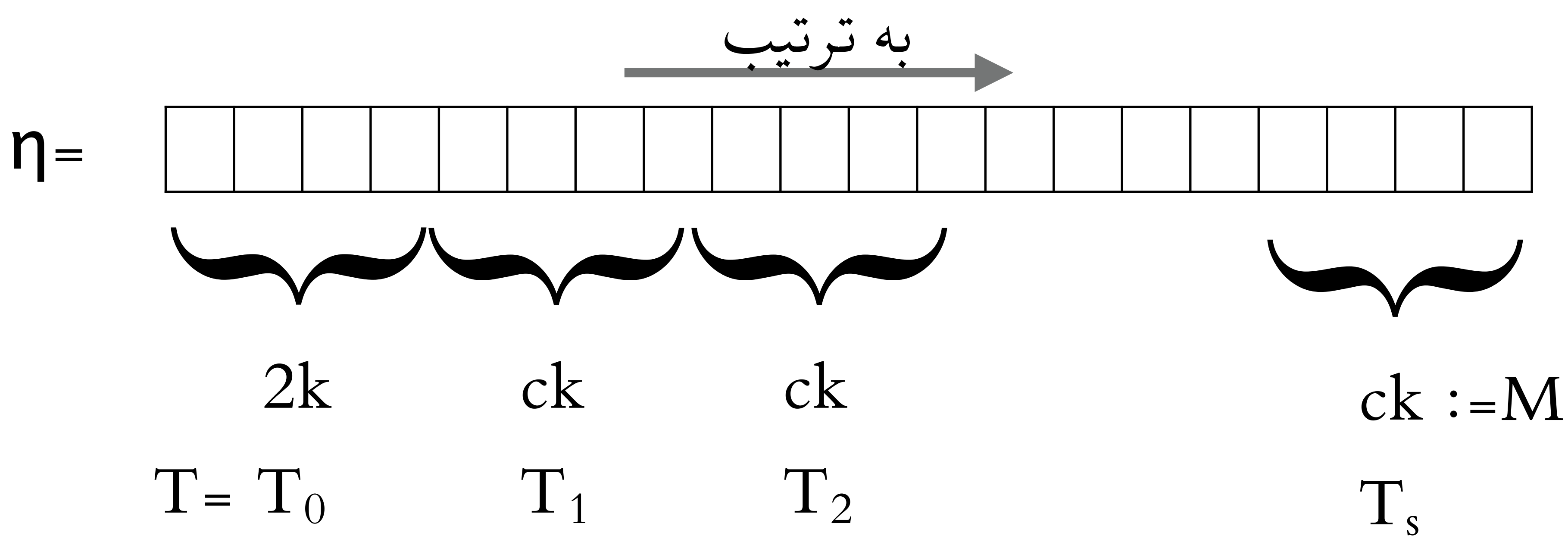
$$1-\delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \le C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=$۲k

η که Aη=0:

$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=$۲k



؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1\rangle \le ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\ \|\eta_T\|_2$$

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1 \rangle \le ||x||_2 \sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2} \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \le ||\eta_{T0} + \eta_{T1}||_2$$

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1\rangle \leq ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \leq ||\eta_{T0} + \eta_{T1}||_2$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0} + \eta_{T1})||_2$$

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1\rangle \le ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\begin{aligned}
\|\eta_T\|_2 &\le ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2 \\
&\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2 \\
&\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2
\end{aligned}$$

$$1-\delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x,1\rangle \le ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \le ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2$$

$$1-\delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

$$\le \quad (1-\delta)^{-1}\sum_{j=2}^{s}\|A\eta_{T_j}\|_2$$

مثلثی

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x,1\rangle \leq ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\begin{aligned}
\|\eta_T\|_2 &\leq ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2 \\
&\leq \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2 \\
&\leq \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2 \\
&\leq \quad (1-\delta)^{-1}\sum_{j=2}^{s}\|A\eta_{T_j}\|_2 \\
&\leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2
\end{aligned}$$

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

مثلثی

$$\|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\le\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\; i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\, i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2}$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\; i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;= \|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$\forall\; i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;= \|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\sum_{j=1}^{s}\|\eta_{T_j}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\, i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;=\|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\sum_{j=1}^{s}\|\eta_{T_j}\|_1$$

$$=\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \;\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\Downarrow$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \le \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\Downarrow$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\Downarrow$$

ck :=M

$$\|\eta\|_1 \le [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \le \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

ck :=M

$$\|\eta\|_1 \le [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

ck :=M

$$\|\eta\|_1 \leq \ [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

ck :=M

$$\|\eta\|_1 \leq \ [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$Err_1^k(x) := ||x_{tail(k)}||_1$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=۲k$

$\eta = x^* - x$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$Err_1^k(x) := ||x_{tail(k)}||_1$$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T| = ۲k$

$$\eta = x^* - x$$

$$x \to \Pi x$$

الگوریتم بازیابی

$$x^* = \arg \min_{z:\Pi z = \Pi x} ||z||_1$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$Err_1^k(x) := ||x_{tail(k)}||_1$$

η که $A\eta=0$:

برای هر $|T|=2k$ $||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$

$$\eta = x^* - x$$

$$x \to \Pi x$$

الگوریتم بازیابی

$$x^* = \arg \min_{z:\Pi z = \Pi x} ||z||_1$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$Err_1^k(x) := ||x_{tail(k)}||_1$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=۲k

$$\eta = x^* - x$$

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$$

$$x \to \Pi x$$

الگوریتم بازیابی

$$x^* = \arg \min_{z:\Pi z = \Pi x} ||z||_1$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$Err_1^k(x) := ||x_{tail(k)}||_1$$

$\eta = x^* - x$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T| = ۲k$

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$x \rightarrow \Pi x$$

الگوریتم بازیابی

$$x^* = \arg \min_{z:\Pi z = \Pi x} ||z||_1$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

لم ۱:

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

لم ۱:

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x_T^*\|_1 + \|x_{-T}^*\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\geq \|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$$\geq - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

لم ۱:

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\geq \quad \|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$$\geq \quad -\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

لم ۱:

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x_T^*\|_1 + \|x_{-T}^*\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$\geq$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$\geq$

$$- \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \|\eta_T\|_1 + 2\|x_{-T}\|_1 = \|\eta_T\|_1 + 2Err_1^k(x)$$

لم ۱:

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$\wedge|$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$\wedge|$

$$-\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \|\eta_T\|_1 + 2\|x_{-T}\|_1 = \|\eta_T\|_1 + 2Err_1^k(x)$$

$\wedge|$

$$(C-1)\|\eta_{-T}\|_1$$

لم ۱:

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

احساس فشردگی

روش تکراری

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1$$
$$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

الگوریتم بازیابی با خطا (ورودی: Π و y و α)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad ||\Pi z - y||_2 \leq \alpha$$

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1$$
$$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1$$
$$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, *then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1$$
$$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \le O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\, T \ge 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \le O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\text{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\text{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\text{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

کران قدیمی

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\text{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, *then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\text{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\text{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \leq O(\frac{1}{\sqrt{k}}).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

خطای اندازه‌گیری

الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)

$$\min ||z||_1 \quad \text{s.t.} \quad \Pi z = y$$

$$||\hat{x} - x||_2 \le O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\ T \ge 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

هزینه سرعت

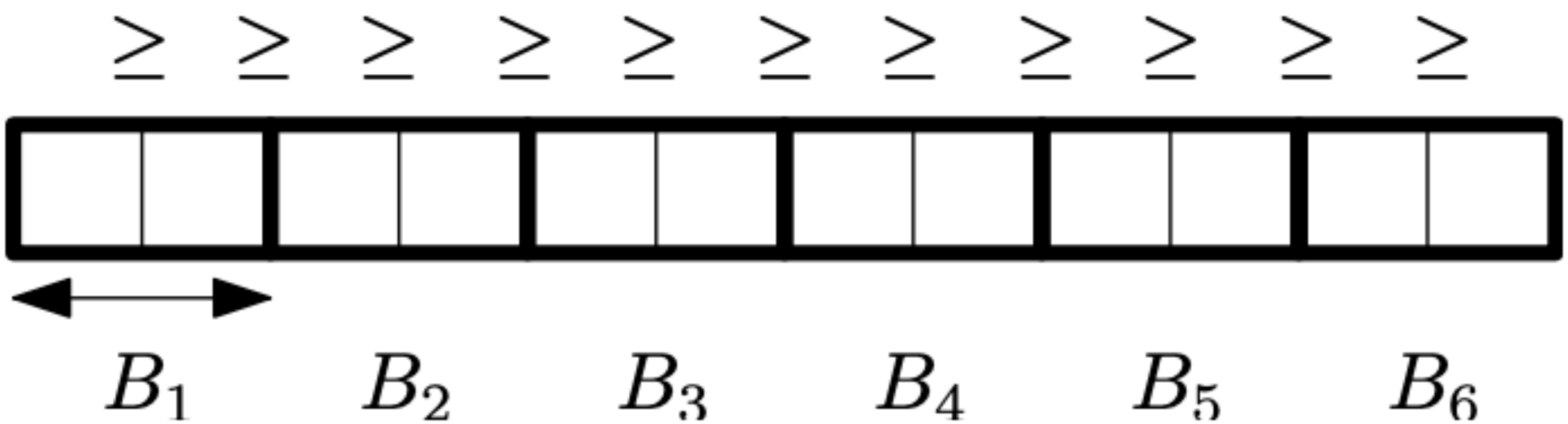
(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

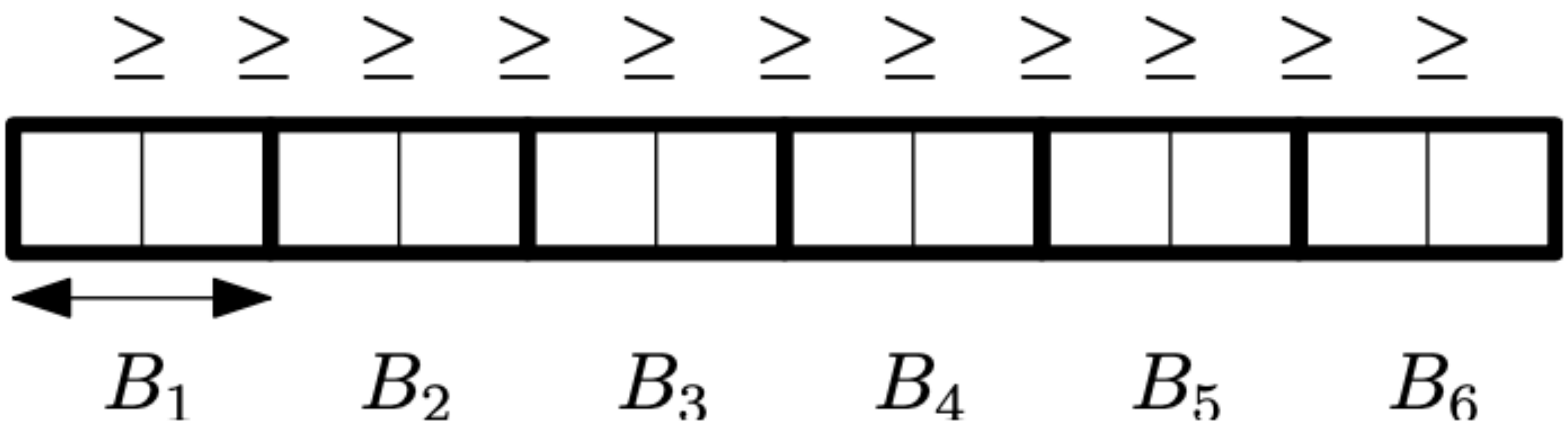
خطای اندازه‌گیری

Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$

Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$

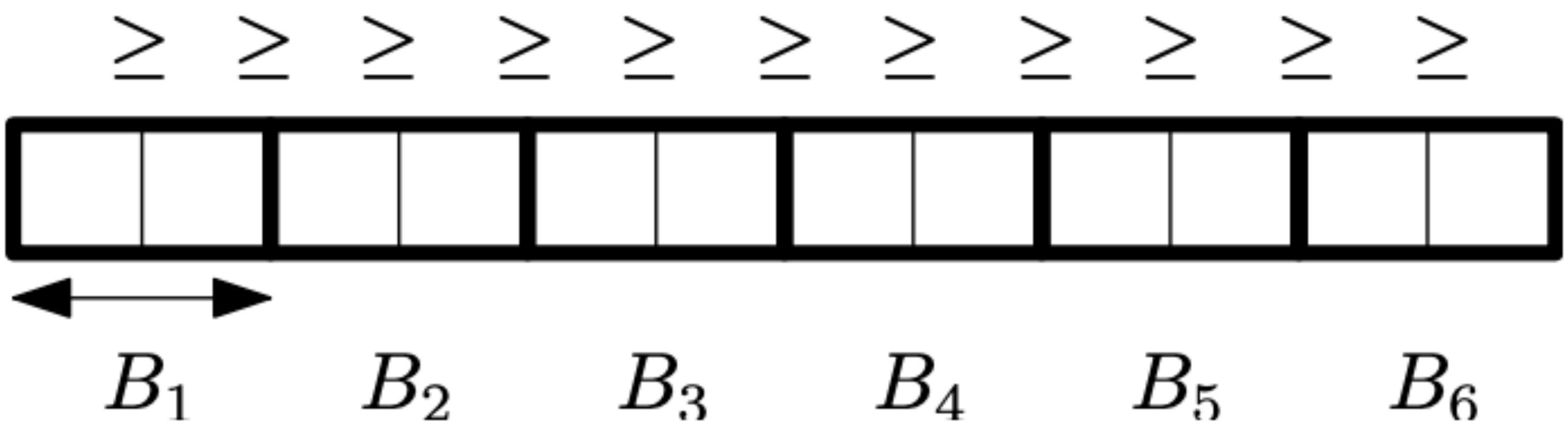


Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$



$|x_j| \leq \frac{1}{k}\sum_{i\in B_{t-1}} |x_i| = \frac{1}{k}||x_{B_{t-1}}||_1$ (از مجموعه قبلی)

Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$



$|x_j| \leq \frac{1}{k}\sum_{i\in B_{t-1}}|x_i| = \frac{1}{k}||x_{B_{t-1}}||_1$ (از مجموعه قبلی)

$$||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2^2 = \sum_{t=3}^{n/k}||x_{B_t}||_2^2 \leq \sum_{t=3}^{n/k} k\cdot\left(\frac{||x_{B_{t-1}}||_1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}\sum_{t=2}^{n/k}||x_{B_t}||_1^2$$

Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$

$$||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2^2 = \sum_{t=3}^{n/k} ||x_{B_t}||_2^2 \leq \sum_{t=3}^{n/k} k \cdot (\frac{||x_{B_{t-1}}||_1}{k})^2 = \frac{1}{k} \sum_{t=2}^{n/k} ||x_{B_t}||_1^2$$

Claim 56. $||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$

$$||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2^2 = \sum_{t=3}^{n/k} ||x_{B_t}||_2^2 \leq \sum_{t=3}^{n/k} k \cdot (\frac{||x_{B_{t-1}}||_1}{k})^2 = \frac{1}{k}\sum_{t=2}^{n/k} ||x_{B_t}||_1^2$$

$$||x_{\mathsf{tail}(2k)}||_2 \leq \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\sum_{t=2}^{n/k} ||x_{B_t}||_1^2} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \rightarrow x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

هزینه سرعت

(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

خطای اندازه‌گیری

فرض می‌کنیم x: k–تنک

فرض می‌کنیم x: k_ تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

فرض می‌کنیم x: k_ تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

$$||\tilde{e}||_2 \underset{\triangle\text{-inequality}}{\leq} ||e||_2 + ||\Pi x_{\mathsf{tail}(k)}||_2$$

فرض می‌کنیم x: k_ تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

$$||\tilde{e}||_2 \underset{\triangle\text{-inequality}}{\leq} ||e||_2 + ||\Pi x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 = ||e||_2 + ||\sum_{t=2} \Pi x_{B_t}||_2$$

فرض می‌کنیم x: k_ تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

$$||\tilde{e}||_2 \underset{\triangle\text{-inequality}}{\leq} ||e||_2 + ||\Pi x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 = ||e||_2 + ||\sum_{t=2} \Pi x_{B_t}||_2$$

$$\leq ||e||_2 + \sum_{t=2} ||\Pi x_{B_t}||_2$$

فرض می‌کنیم x: k_ تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

$$||\tilde{e}||_2 \underset{\triangle\text{-inequality}}{\leq} ||e||_2 + ||\Pi x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 = ||e||_2 + ||\sum_{t=2} \Pi x_{B_t}||_2$$

$$\leq ||e||_2 + \sum_{t=2} ||\Pi x_{B_t}||_2 \overset{\textbf{RIP}}{\leq} ||e||_2 + (1+\varepsilon)\sum_{t=2} ||x_{B_t}||$$

فرض می‌کنیم x: k_تنک

$$\Pi x + e = \Pi(x_{\mathsf{head}(k)} + x_{\mathsf{tail}(k)}) + e = \Pi x_{\mathsf{head}(k)} + \underbrace{(\Pi x_{\mathsf{tail}(k)} + e)}_{\tilde{e}}$$

$$||\tilde{e}||_2 \underset{\triangle\text{-inequality}}{\leq} ||e||_2 + ||\Pi x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 = ||e||_2 + ||\sum_{t=2} \Pi x_{B_t}||_2$$

$$\leq ||e||_2 + \sum_{t=2} ||\Pi x_{B_t}||_2 \overset{\textbf{RIP}}{\leq} ||e||_2 + (1+\varepsilon)\sum_{t=2} ||x_{B_t}||$$

$$\leq ||e||_2 + \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{k}} ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Algorithm 1 Iterative Hard Thresholding (IHT).

function $\mathrm{IHT}(\Pi, y(= \Pi x + e), k, T)$
    $x^{[1]} \leftarrow 0$
    for $t = 1 \cdots T$ **do**
        $x^{t+1} \leftarrow H_k(x^{[t]} + \Pi^\top (y - \Pi x^{[t]}))$ ▷ Hard thresholding operator (project $a^{[t+1]}$ on $x_{\text{head}}(k)$)
    end for
    return x^{T+1}
end function

Hk: k_تنک‌ساز

تحلیل الگوریتم HIT:

$$r^{[t]} := x - x^{[t]}$$

فاصله تا جواب

تحلیل الگوریتم HIT:

فاصله تا جواب

$$r^{[t]} := x - x^{[t]}$$

$$\|r^{[t+1]}\|_2 = \|x - x^{[t+1]}\|_2$$

تحلیل الگوریتم HIT:

$$r^{[t]} := x - x^{[t]}$$

فاصله تا جواب

$$\|r^{[t+1]}\|_2 = \|x - x^{[t+1]}\|_2$$

$$\vdots$$

$$\leq \frac{1}{2}\|r^{[t]}\|_2 + 3\|e\|_2$$

تحلیل الگوریتم HIT:

$$r^{[t]} := x - x^{[t]}$$

فاصله تا جواب

$$\|r^{[t+1]}\|_2 = \|x - x^{[t+1]}\|_2$$

$$\vdots$$

$$\leq \frac{1}{2}\|r^{[t]}\|_2 + 3\|e\|_2$$

$$\leq 2^{-t}\|x\|_2 + 3(\textstyle\sum_{i=0}^{t-1} 2^{-i})\|e\|_2$$

تحلیل الگوریتم HIT:

$$r^{[t]} := x - x^{[t]}$$

فاصله تا جواب

$$\|r^{[t+1]}\|_2 = \|x - x^{[t+1]}\|_2$$

$$\vdots$$

$$\leq \frac{1}{2}\|r^{[t]}\|_2 + 3\|e\|_2$$

$$\leq 2^{-t}\|x\|_2 + 3(\textstyle\sum_{i=0}^{t-1} 2^{-i})\|e\|_2$$

$||r^{[0]}||_2$

< 6

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, *then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

هزینه سرعت

کران (تقریبا) قدیمی

کران قدیمی

خطای اندازه‌گیری

$$2^{-t}||x||_2 + 6||e||_2$$

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$*, then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

هزینه سرعت

(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

خطای اندازه‌گیری

$$2^{-t}||x||_2 + 6||e||_2 \ + \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

$$x^{[t]} \to x^{[t+1]}$$

Theorem 55 ([BD09]). *If* Π *satisfies* $(\varepsilon, 3k)$*-RIP for* $\varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, *then* $\forall\ T \geq 1$

$$||x^{[T+1]} - x||_2 \lesssim 2^{-T}||x||_2 + ||x_{\mathsf{tail}(k)}||_2 + \frac{1}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1 + ||e||_2$$

فاصله تا جواب

هزینه سرعت

(تقریبا) کران قدیمی

کران قدیمی

خطای اندازه‌گیری

زمان:

$$2^{-t}||x||_2 + 6||e||_2 \ + \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{k}}||x_{\mathsf{tail}(k)}||_1$$

احساس فشردگی

مدلی

حفظ فاصله برای بردارهای ۳k_تنک

x -> y=Πx

x: k_تنک، k عدد

$$\Omega_{n,k} = \binom{[n]}{k}$$

Algorithm 1 Iterative Hard Thresholding (IHT).

function IHT$(\Pi, y(=\Pi x + e), k, T)$

  $x^{[1]} \leftarrow 0$

  for $t = 1 \cdots T$ **do**

    $x^{t+1} \leftarrow H_k(x^{[t]} + \Pi^\top(y - \Pi x^{[t]}))$ ▷ Hard thresholding operator (project $a^{[t+1]}$ on $x_{\text{head}}(k)$)

  end for

  return x^{T+1}

end function

حفظ فاصله برای بردارهای ۳k_تنک

x -> y=Πx

x: k_تنک، k عدد

$$\Omega_{n,k} = \binom{[n]}{k}$$

x: عضو M

Algorithm 1 Iterative Hard Thresholding (IHT).

function IHT$(\Pi, y(=\Pi x + e), k, T)$
  $x^{[1]} \leftarrow 0$
  for $t = 1 \cdots T$ **do**
    $x^{t+1} \leftarrow H_k(x^{[t]} + \Pi^\top(y - \Pi x^{[t]}))$ ▷ Hard thresholding operator (project $a^{[t+1]}$ on $x_{\text{head}}(k)$)
  end for
  return x^{T+1}
end function

حفظ فاصله برای بردارهای ۳k_تنک

x -> y=Πx

x: k_تنک، k عدد

$$\Omega_{n,k} = \binom{[n]}{k}$$

حفظ فاصله برای بردارهای سه‌تا M

x -> y=Πx

x: عضو M

Algorithm 1 Iterative Hard Thresholding (IHT).

function IHT($\Pi, y(=\Pi x + e), k, T$)

  $x^{[1]} \leftarrow 0$

  for $t = 1 \cdots T$ **do**

    $x^{t+1} \leftarrow H_k(x^{[t]} + \Pi^{\top}(y - \Pi x^{[t]}))$ ▷ Hard thresholding operator (project $a^{[t+1]}$ on $x_{\text{head}}(k)$)

  end for

  return x^{T+1}

end function

حفظ فاصله برای بردارهای ۳k_تنک

x -> y=Πx

x: k_تنک، k عدد

$$\Omega_{n,k} = \binom{[n]}{k}$$

حفظ فاصله برای بردارهای سه‌تا M

x -> y=Πx

x: عضو M

Algorithm 2 Model Based Iterative Hard Thresholding (MB-IHT).

function IHT$(\Pi, y(= \Pi x + e), k, T)$
  $x^{[1]} \leftarrow 0$
  for $t = 1 \cdots T$ **do**
    $x^{[t+1]} \leftarrow P_{\mathcal{M}}(x^{[t]} + \Pi^\top(y - \Pi x^{[t]}))$ ▷ Hard thresholding operator (project $a^{[t+1]}$ on $\mathcal{M}$)
  end for
  return x^{T+1}
end function