بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه بیستم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

مرور

تعریف:

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

تعریف:

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n} \omega^{-uj}$$

تعریف:

تبدیل معکوس فوریه

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n} \omega^{-uj}$$

تعریف:

$$F^{-1}_{ju} = \omega^{uj}$$

$$a = F^{-1}\hat{a}$$

تبدیل معکوس فوریه

فضای فرکانس

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

Theorem 72 (time-shift/phase-shift). *Let $a, \hat{a}$ be defined as above and $a', \hat{a}'$ be new signal and the corresponding Fourier coefficients. For any $b = 0, 1, \ldots, n-1$, we have*

$$\forall j = 0, 1, \ldots, n-1,\ a_j' = a_j \omega^{bj} \Leftrightarrow \forall u = 0, 1, \ldots, n-1,\ \hat{a}_u' = \hat{a}_{u-b}.$$

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

تبدیل فوریه تنک

تعریف مسئله (تبدیل فوریه تنک):

ورودی: بردار a

هدف: یافتن $\hat{a}'$ که

K_ بزرگ‌ترین مولفه‌ها

کارآیی الگوریتم ما

$$\|\hat{a} - \hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a} - \hat{a}^{(k)}\|_2$$

خطای ذاتی = نوفه

در زمان: O(k log n)

تبدیل فوریه تنک

تعریف مسئله (تبدیل فوریه تنک):

ورودی: بردار a

هدف: یافتن $\hat{a}'$ که

کارآیی الگوریتم ما

K_بزرگ‌ترین مولفه‌ها

$$\|\hat{a} - \hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a} - \hat{a}^{(k)}\|_2$$

خطای ذاتی = نوفه

در زمان: O(k log n)

خواندن ورودی O(n)

k=۱ و بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$a_j = \sum_{u=0}^{n} \hat{a}_u w^{uj}$$

k=۱ و بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$a_j = \sum_{u=0}^{n} \hat{a}_u w^{uj}$$

k=۱ و بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$a_j = \sum_{u=0}^{n} \hat{a}_u w^{uj}$$

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

$$a_j = \hat{a}_u \omega^{uj}$$

k=۱ و بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$a_j = \sum_{u=0}^{n} \hat{a}_u w^{uj}$$

$$a_j = \hat{a}_u \omega^{uj}$$

$$a_0 = \hat{a}_u$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \omega^u$$

با نوفه (نویز)

نوفه ذاتی

هدف: $\|\hat{a}-\hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2$

با نوفه (نویز)

نوفه ذاتی

هدف: $\|\hat{a}-\hat{a}'\|_2 \leq C\cdot\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2$

طبیعتا باید:

$$C\cdot\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2 < \|\hat{a}\|_2$$

با نوفه (نویز)

نوفه ذاتی

هدف: $\|\hat{a}-\hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2$

طبیعتا باید:

$$C \cdot \|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2 < \|\hat{a}\|_2$$

$$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$$

e=1/(C²-1)

با نوفه (نویز)

نوفه ذاتی

هدف: $\|\hat{a}-\hat{a}'\|_2 \leq C\cdot\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2$

طبیعتا باید:

$$C\cdot\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2 < \|\hat{a}\|_2$$

وگرنه $\hat{a}'=0$ جواب خوبی است

$$\sum_{u'\neq u}\hat{a}_{u'}^2 < \epsilon\cdot\hat{a}_u^2$$

$e=1/(C^2-1)$

بازیابی بیت ۰

لم:

$$u=2v+b \begin{cases} \text{زوج:} & a_{n/2} = 1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2} = -1 \end{cases}$$

بازیابی بیت ۰

لم:

$$\text{u=2v+b} \left\{ \begin{array}{ll} \text{زوج:} & a_{n/2} = 1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2} = -1 \end{array} \right.$$

$$a_{n/2} = \hat{a}_u \omega^{un/2}$$

بازیابی بیت ٥

لم:

$$u=2v+b \begin{cases} \text{زوج:} & a_{n/2} = 1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2} = -1 \end{cases}$$

$$a_{n/2} = \hat{a}_u \omega^{un/2} = \hat{a}_u \omega^{vn+bn/2}$$

بازیابی بیت ۰

لم:

$$u=2v+b \begin{cases} \text{زوج:} & a_{n/2}=1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2}=-1 \end{cases}$$

$$a_{n/2}=\hat{a}_u\omega^{un/2}=\hat{a}_u\omega^{vn+bn/2}=\hat{a}_u\omega^{bn/2}=\hat{a}_u(-1)^b.$$

بازیابی بیت ۰

لم:

$$u=2v+b \quad \begin{cases} \text{زوج:} & a_{n/2} = 1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2} = -1 \end{cases}$$

$$a_{n/2} = \hat{a}_u \omega^{un/2} = \hat{a}_u \omega^{vn+bn/2} = \hat{a}_u \omega^{bn/2} = \hat{a}_u (-1)^b.$$

$$b_0 = 0 \Leftrightarrow |a_0 - a_{n/2}| < |a_0 + a_{n/2}|$$

$$a_0 = \hat{a}_u$$

بازیابی بیت ۰

لم:

$$u=2v+b \left\{ \begin{array}{ll} \text{زوج:} & a_{n/2} = 1 \\ \text{فرد:} & a_{n/2} = -1 \end{array} \right.$$

$$a_{n/2} = \hat{a}_u \omega^{un/2} = \hat{a}_u \omega^{vn+bn/2} = \hat{a}_u \omega^{bn/2} = \hat{a}_u (-1)^b.$$

$$b_0 = 0 \Leftrightarrow |a_0 - a_{n/2}| < |a_0 + a_{n/2}|$$

$$a_0 = \hat{a}_u$$

$$b_0 = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2}| < |a_r + a_{r+n/2}|$$

تصادفی‌سازی‌تر

بازیابی بیت ۱

۱ـ فرض: $b_0=0$

بازیابی بیت ۱

۱ــ فرض: $b_0=0$

اگر نبود، u را جابجا می‌کنیم.

$$a'_j = a_j\omega^j$$

۰ یا ۲

بازیابی بیت ۱

۱ــ فرض: $b_0=0$

اگر نبود، u را جابجا می‌کنیم.

$$a'_j = a_j\omega^j$$

۰ یا ۲

۲- $u = 4v' + b_1$

$$b_1 = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/4}| < |a_r + a_{r+n/4}|$$

بازیابی بیت ۱

۱ـ فرض: $b_0=0$

اگر نبود، u را جابجا می‌کنیم.

$$a'_j = a_j\omega^j$$

۰ یا ۲

۲- $u = 4v' + b_1$

$$b_1 = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/4}| < |a_r + a_{r+n/4}|$$

۳ـ بیت i

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

اثبات حالت نوفه‌ای

$$a_j = \hat{a}_u \omega^{uj} + \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

$\mu_j :=$

نوفه حوزه زمان

Claim 74. *For any* $t = 1, 2, \ldots, \log n$, *as long as* $2(|\mu_{t,1}| + |\mu_{t,2}|) < |\hat{a}_u|$, *then the estimation of the* t*th bit of* u *is correct.*

Claim 74. *For any* $t = 1, 2, \ldots, \log n$, *as long as* $2(|\mu_{t,1}| + |\mu_{t,2}|) < |\hat{a}_u|$, *then the estimation of the* t*th bit of* u *is correct.*

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow \left|a_r - a_{r+n/2^i}\right| < \left|a_r + a_{r+n/2^i}\right|$$

Claim 74. *For any* $t = 1, 2, \ldots, \log n$, *as long as* $2(|\mu_{t,1}| + |\mu_{t,2}|) < |\hat{a}_u|$, *then the estimation of the* t*th bit of* u *is correct.*

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow \left|a_r - a_{r+n/2^i}\right| < \left|a_r + a_{r+n/2^i}\right|$$

$$\begin{aligned} a_{j_{t,1}} - a_{j_{t,2}} &= \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} - \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} - \mu_{j_{t,2}}) \\ a_{j_{t,1}} + a_{j_{t,2}} &= \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} + \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} + \mu_{j_{t,2}}) \end{aligned}$$

Claim 74. *For any* $t = 1, 2, \ldots, \log n$, *as long as* $2(|\mu_{t,1}| + |\mu_{t,2}|) < |\hat{a}_u|$, *then the estimation of the* t*th bit of* u *is correct.*

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

$$a_{j_{t,1}} - a_{j_{t,2}} = \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} - \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} - \mu_{j_{t,2}})$$
$$a_{j_{t,1}} + a_{j_{t,2}} = \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} + \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} + \mu_{j_{t,2}})$$

۲ یا ۰

Claim 74. *For any* $t = 1, 2, \ldots, \log n$*, as long as* $2(|\mu_{t,1}| + |\mu_{t,2}|) < |\hat{a}_u|$*, then the estimation of the* t*th bit of* u *is correct.*

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

$$a_{j_{t,1}} - a_{j_{t,2}} = \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} - \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} - \mu_{j_{t,2}})$$
$$a_{j_{t,1}} + a_{j_{t,2}} = \hat{a}_u(\omega^{j_{t,1}} + \omega^{j_{t,2}}) + (\mu_{j_{t,1}} + \mu_{j_{t,2}})$$

۲ یا ۰

< ۴ تا |mu|

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq$$

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a} - \hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a} - \hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq$$

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

نوفه حوزه فرکانس

نوفه حوزه فرکانس

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a} - \hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a} - \hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq$$

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

نوفه حوزه فرکانس

نوفه حوزه فرکانس

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a} - \hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a} - \hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq \frac{16 \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2}{\hat{a}_u^2} \leq 16\epsilon$$

$$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$$

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

نوفه حوزه فرکانس

نوفه حوزه فرکانس

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a} - \hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a} - \hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq \frac{16 \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2}{\hat{a}_u^2} \leq 16\epsilon$$

$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$

$< 1/3$

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

نوفه حوزه فرکانس

نوفه حوزه فرکانس

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a}-\hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq \frac{16 \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2}{\hat{a}_u^2} \leq 16\epsilon$$

$$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$$

$< 1/3$

تکرار log log n بار برای هر بیت: احتمال خطای یک بیت < ⅓ log n

$$\mu_j := \sum_{u' \neq u} \hat{a}_u \omega^{uj'}$$

نوفه حوزه فرکانس

نوفه حوزه فرکانس

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^2 = \|\mu\|_2^2 = \|F^{-1}(\hat{a}-\hat{a}^{(1)})\|_2^2 = n\|\hat{a}-\hat{a}^{(1)}\|_2^2 = n \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{E}[\mu_{j_{t,1}}^2] = \mathbb{E}[\mu_{j_{t,2}}^2] = \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2$$

$$\mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}| > \frac{|\hat{a}_u|}{4}] = \mathbb{P}[|\mu_{j_{t,b}}|^2 > \frac{|\hat{a}_u|^2}{16}] \leq \frac{16 \sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2}{\hat{a}_u^2} \leq 16\epsilon$$

$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$

$< 1/3$

تکرار log log n بار برای هر بیت: احتمال خطای یک بیت < 1/3 log n

تکرار همه درست => 2/3

تقریب خود $\hat{a}_u$

$$a_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}} = \hat{a}_u + \mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}$$

تقریب خود $\hat{a}_u$

$$a_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}} = \hat{a}_u + \mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}$$

تقریب خود $\hat{a}_u$

$$a_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}} = \hat{a}_u + \mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}$$

$$|\mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}| =$$

تقریب خود $\hat{a}_u$

$$a_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}} = \hat{a}_u + \mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}$$

$$\boxed{|\mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}| = |\mu_{j_{t,b}}| \leq |\hat{a}_u|/4}$$

تقریب خود $\hat{a}_u$

$$a_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}} = \hat{a}_u + \mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}$$

$$|\mu_{j_{t,b}}/\omega^{uj_{t,b}}| = |\mu_{j_{t,b}}| \leq |\hat{a}_u|/4$$

تقریب ¼

مرور: حالت k=1 با نوفه

$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$

الگوریتم:

۱ــ محاسبه b_{i-1}:

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

۲ــ صفر کردن b_{i-1}

مرور: حالت k=1 با نوفه

$$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$$

الگوریتم:

۱ــ محاسبه b_{i-1}:

log log n بار

$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

۲ــ صفر کردن b_{i-1}

مرور: حالت k=1 با نوفه

$\sum_{u' \neq u} \hat{a}_{u'}^2 < \epsilon \cdot \hat{a}_u^2$

الگوریتم:

۱ـ محاسبه b_{i-1}:

log log n بار

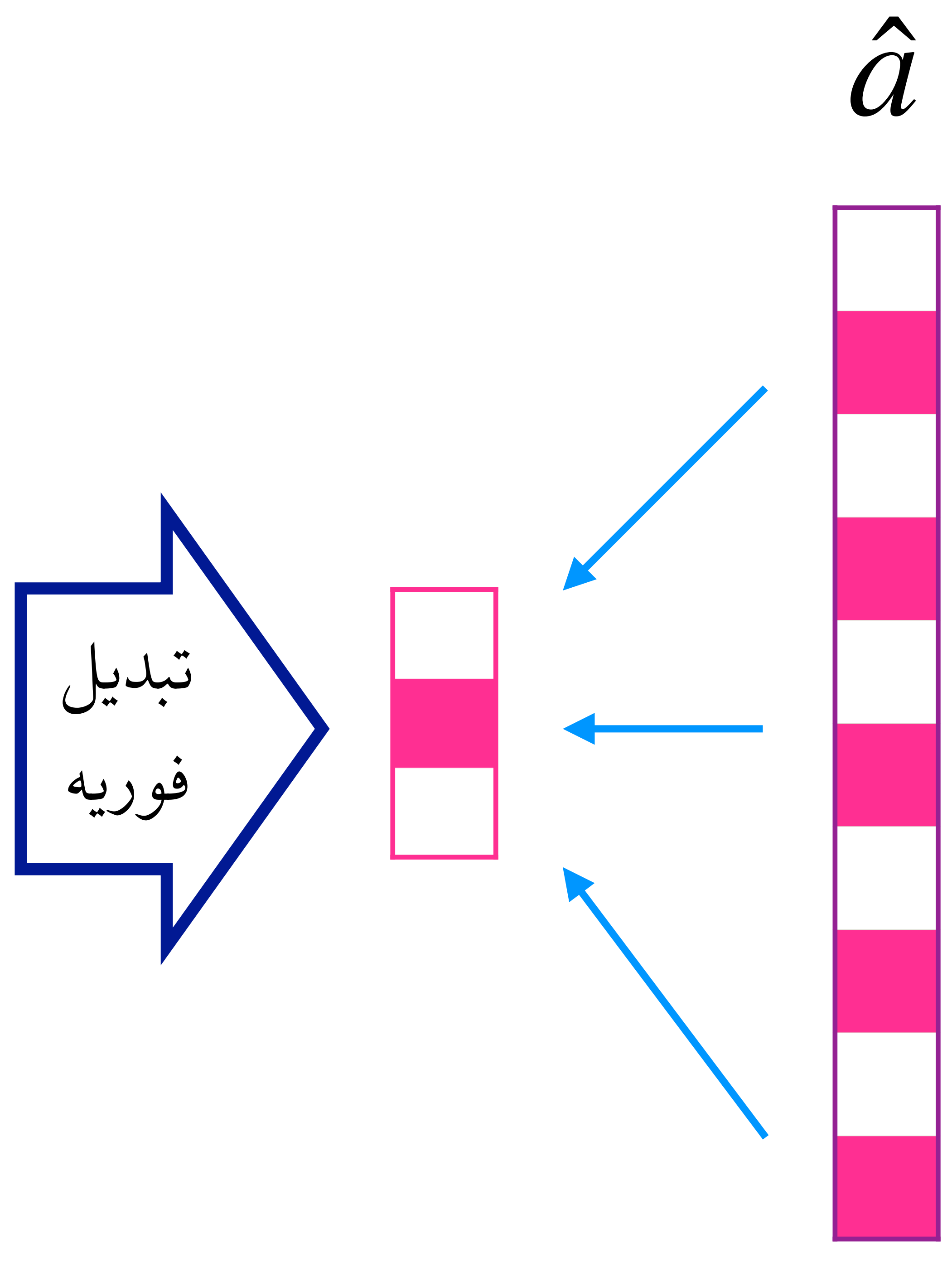
$$b_{i-1} = 0 \Leftrightarrow |a_r - a_{r+n/2^i}| < |a_r + a_{r+n/2^i}|$$

۲ـ صفر کردن b_{i-1}

زمان اجرا: O(log n x log log n)

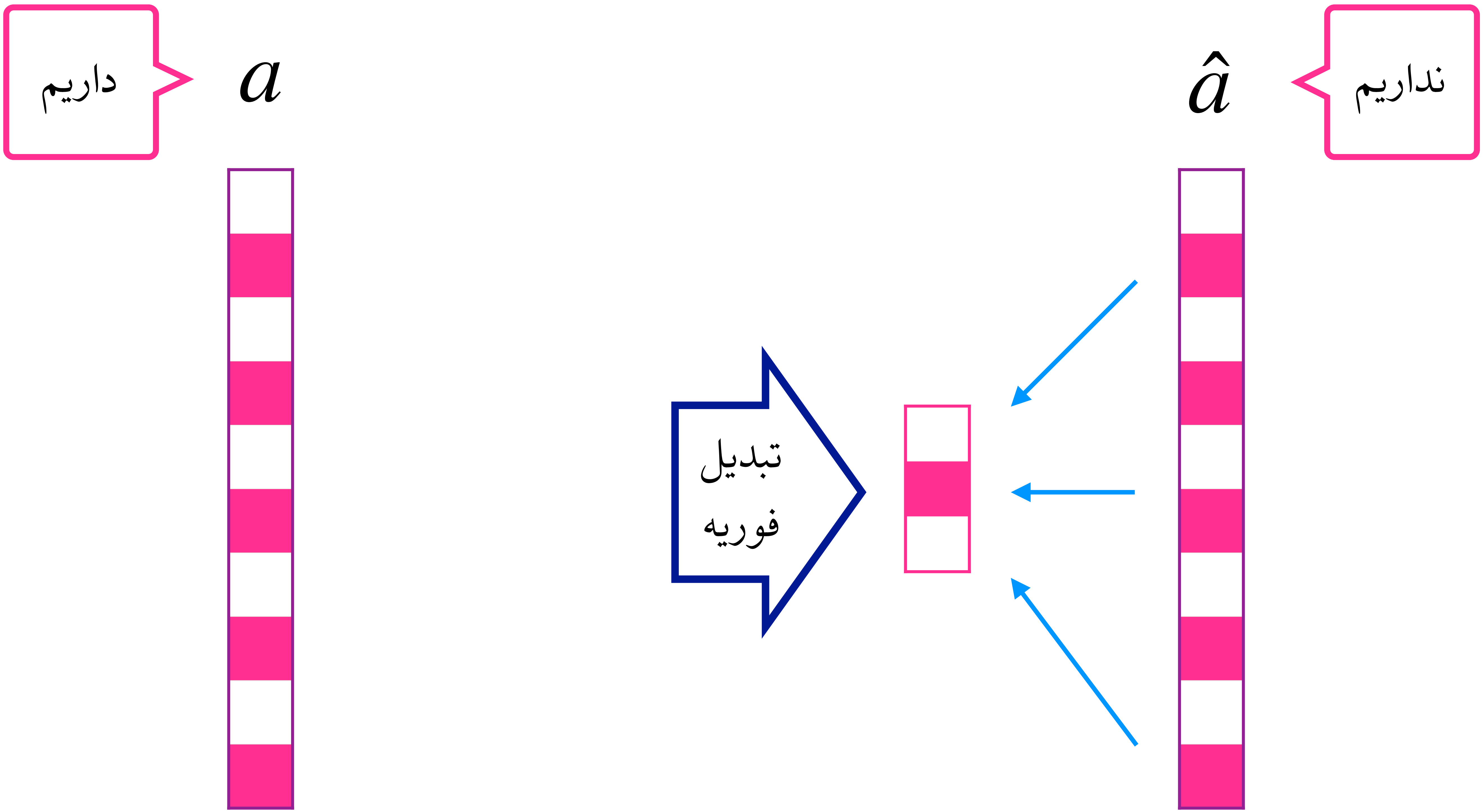
حالت k>1 ولی بدون نوفه

ایده اصلی: درهم‌سازی در حوزه فرکانس!



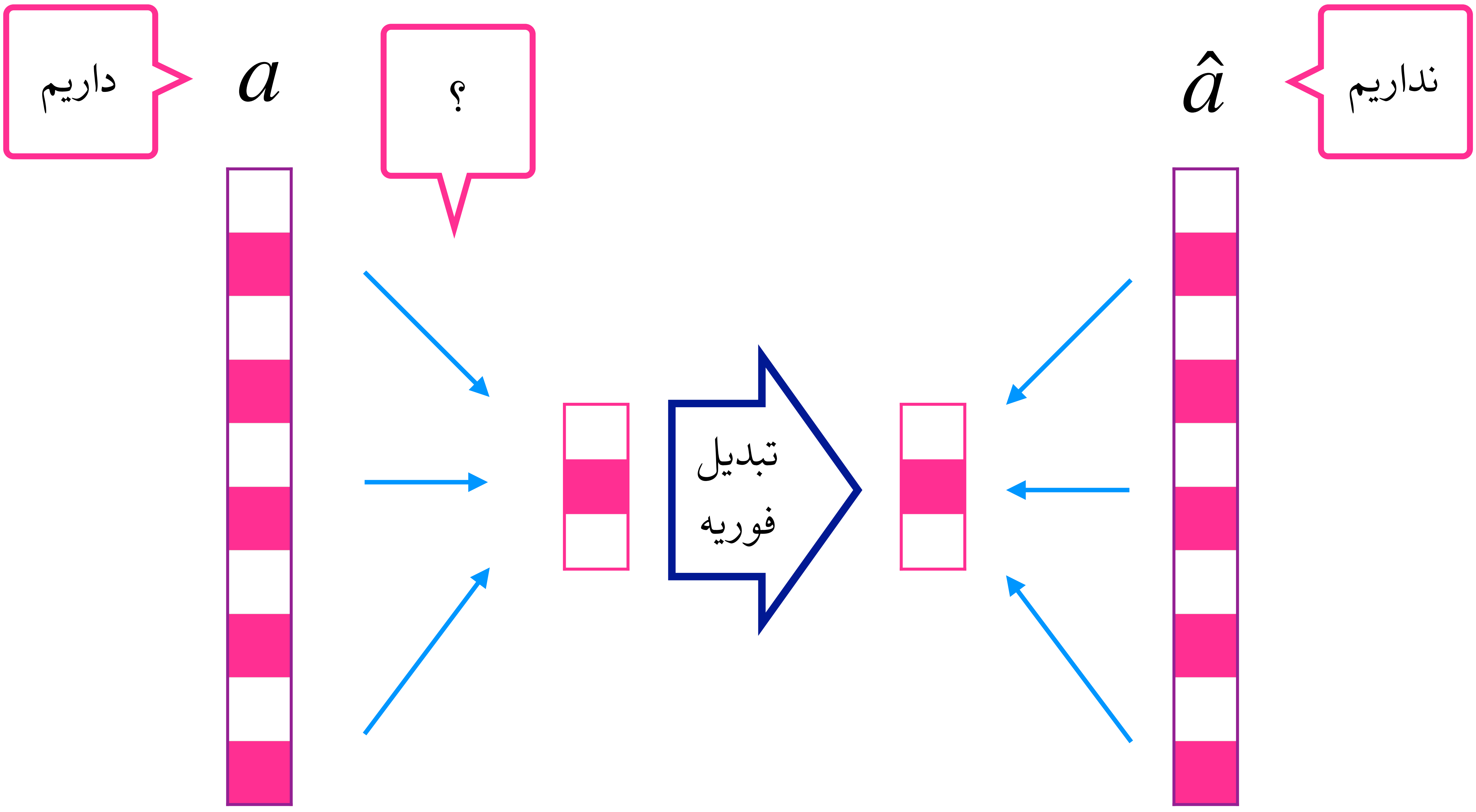
حالت $k>1$ ولی بدون نوفه

ایده اصلی: درهم‌سازی در حوزه فرکانس!



حالت k>1 ولی بدون نوفه

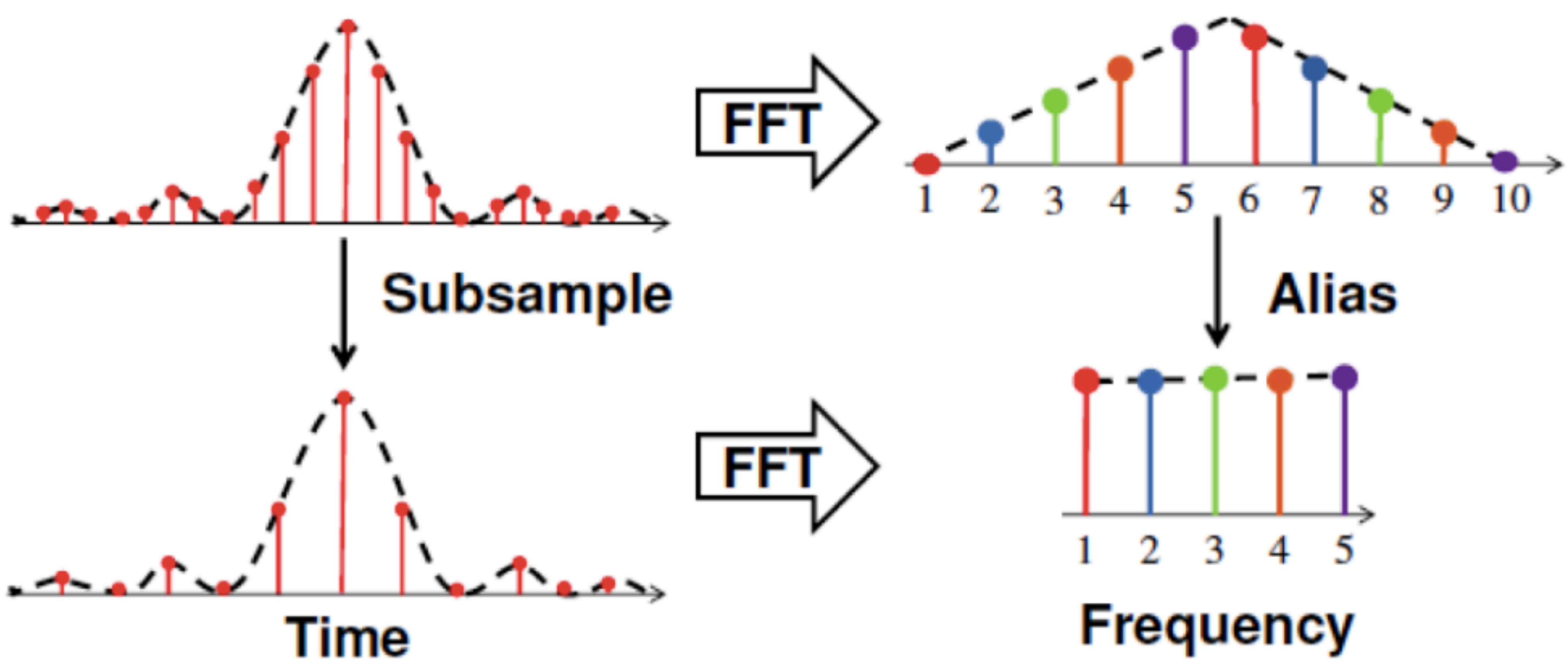
ایده اصلی: درهم‌سازی در حوزه فرکانس!



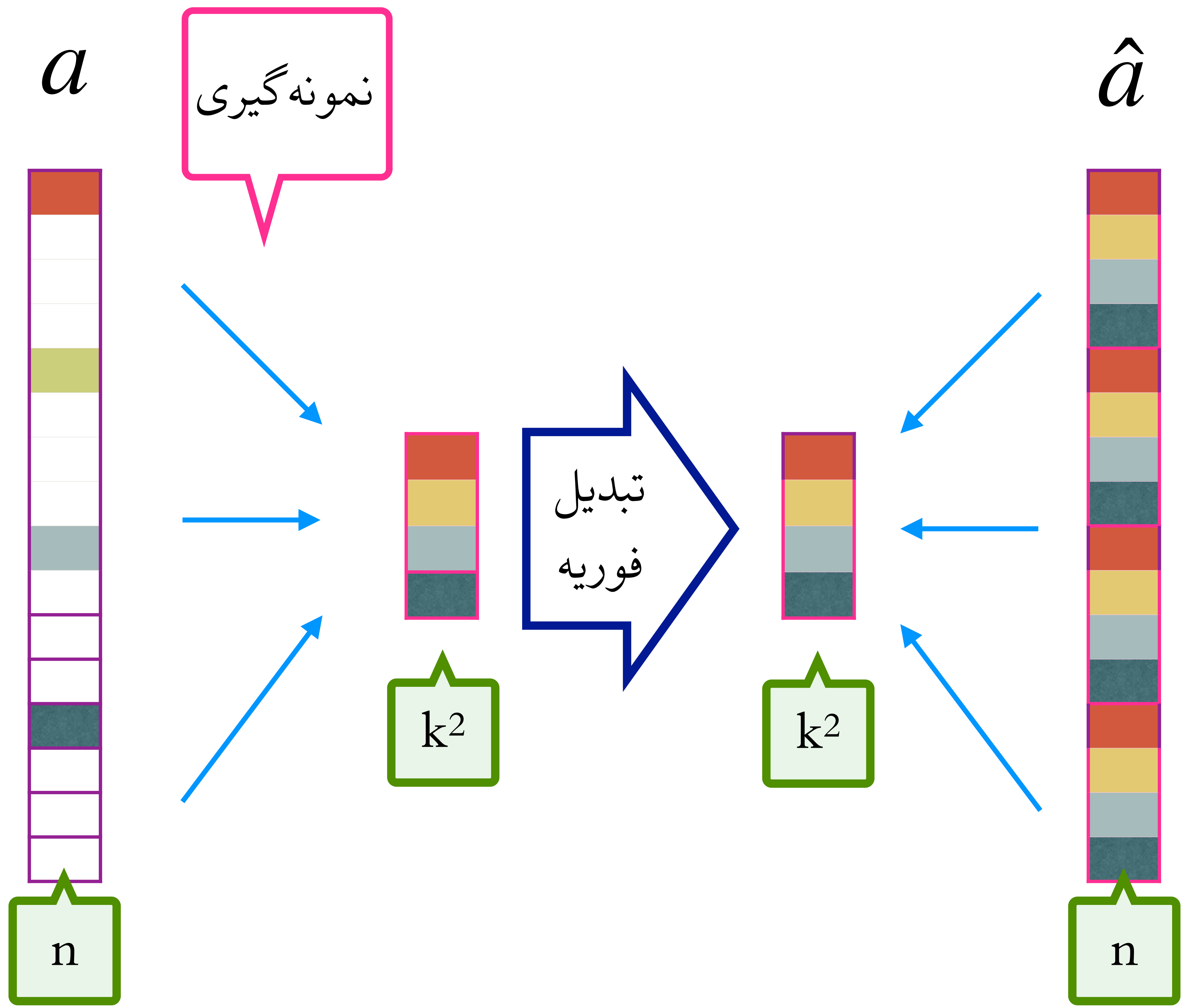
ایده اصلی: درهم‌سازی در حوزه فرکانس!

Theorem 75 (Aliasing Theorem). *Given a signal* $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ *of length* n *and a parameter* $L \in \mathbb{N}_+$ *that divides* n*, consider the vector* $a' = (a_0, a_L, a_{2L}, \ldots,)$ *with* n/L *entries. Then,*

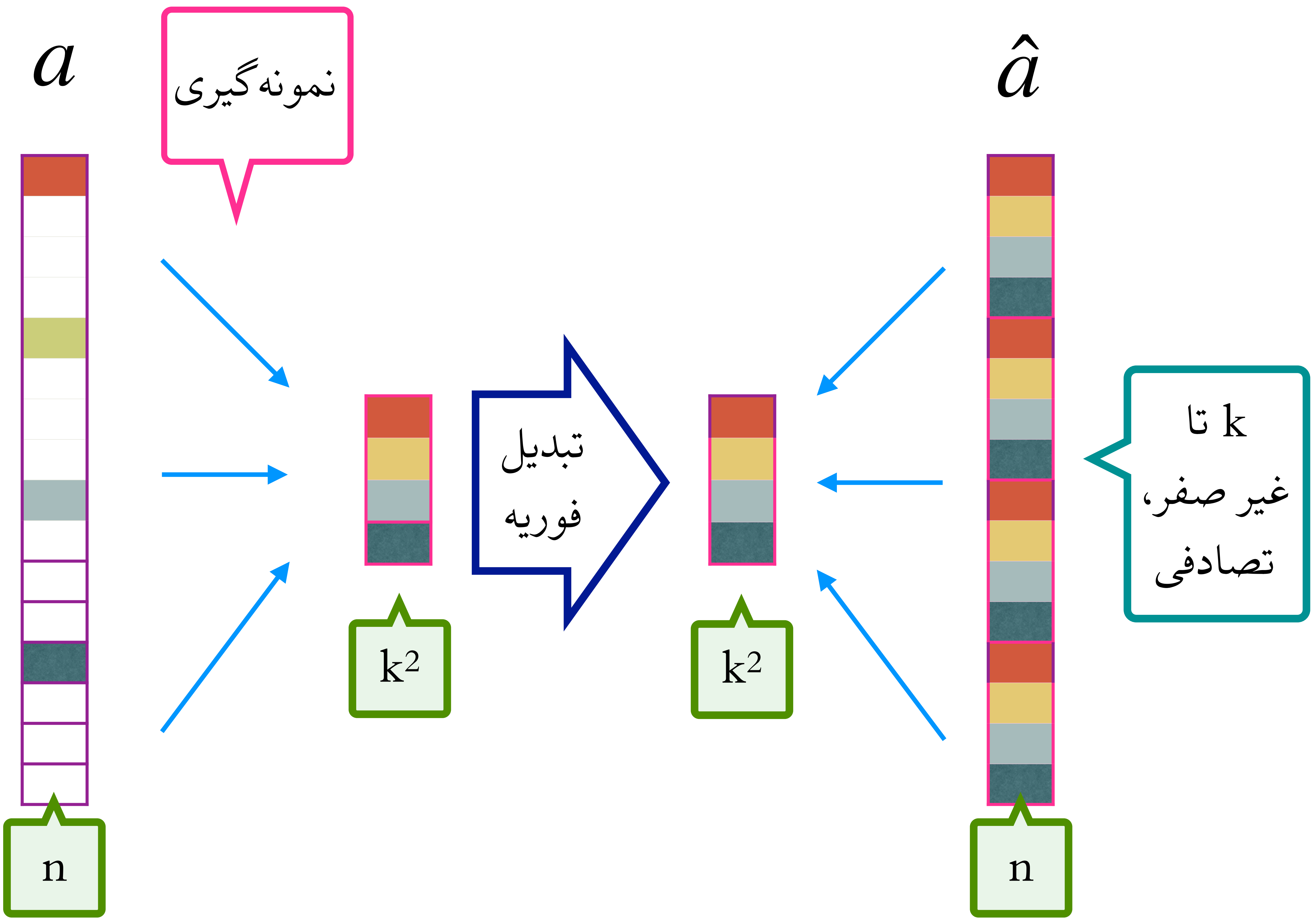
$$\hat{a}'_u = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{a}_{u+\frac{n}{L}\cdot l}.$$



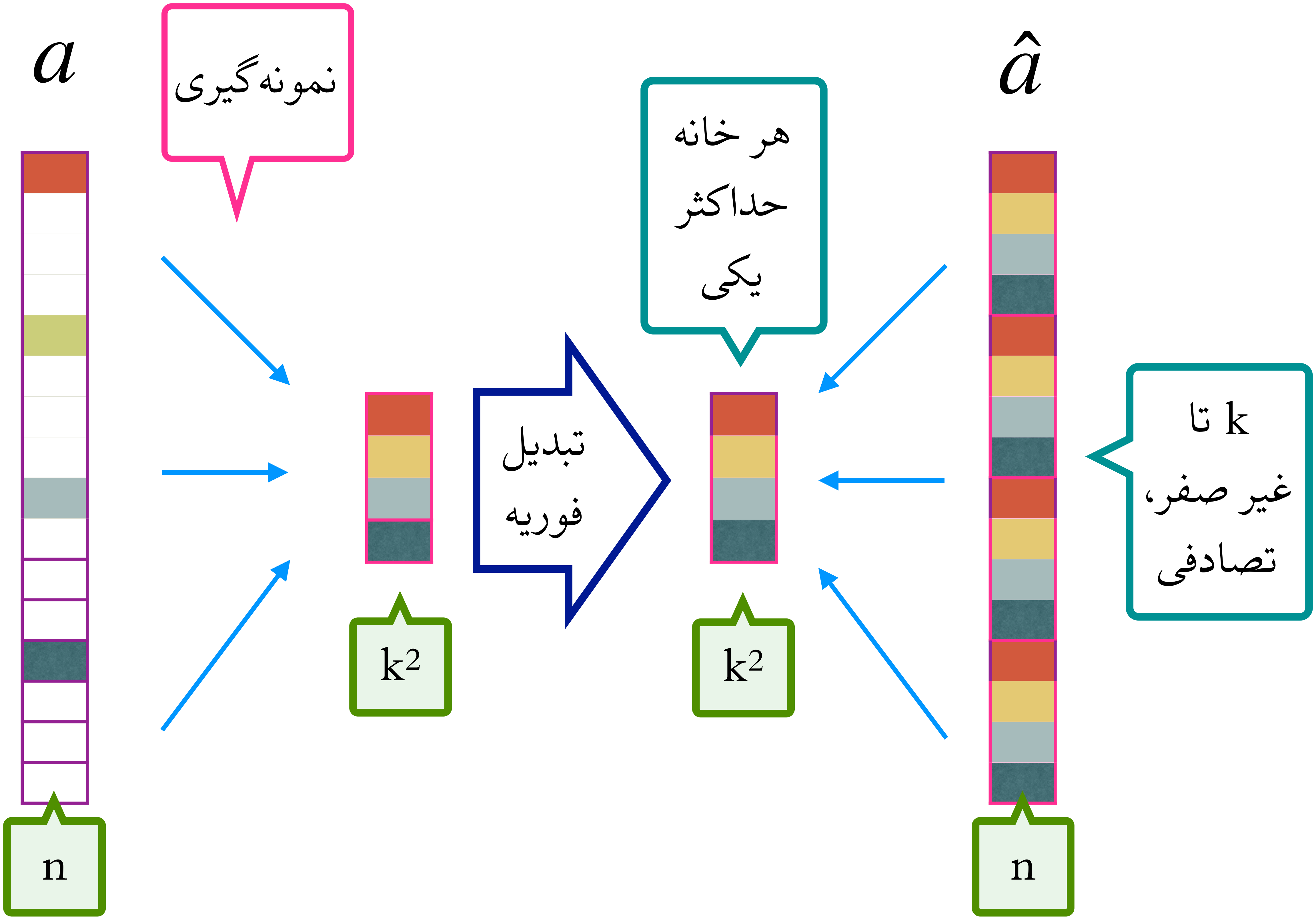
حالت k>1 ولی بدون نوفه



حالت k>1 ولی بدون نوفه



حالت k>1 ولی بدون نوفه



الگوریتم AliasingFFT(a)

Algorithm 3 Aliasing FFT.

function $\textsc{AliasingFFT}(a)$

  $L \leftarrow n/k^2$

  Sample two corresponding sequences of signals, each of length k^2

  $\mathbf{a}' \leftarrow \{a_0, a_L, a_{2L}, \ldots\}$

  $\mathbf{a}'' \leftarrow \{a_1, a_{L+1}, a_{2L+1}, \ldots\}$

  Run FFT on $\mathbf{a}'$ and $\mathbf{a}''$ to obtain $\hat{\mathbf{a}}'$ and $\hat{\mathbf{a}}''$

  Recover $\hat{\mathbf{a}}$ by applying Two Point Sampling for each non-zero $\hat{\mathbf{a}}'_u$

   return $\hat{\mathbf{a}}$

end function

الگوریتم AliasingFFT(a)

Algorithm 3 Aliasing FFT.

function ALIASINGFFT(a)

$L \leftarrow n/k^2$

Sample two corresponding seq *length* k^2

$$\hat{\mathbf{a}}'_u = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{a}_{u+\frac{n}{L}\cdot l}$$

$\mathbf{a}' \leftarrow \{a_0, a_L, a_{2L}, \ldots\}$

$\mathbf{a}'' \leftarrow \{a_1, a_{L+1}, a_{2L+1}, \ldots\}$

Run FFT on $\mathbf{a}'$ and $\mathbf{a}''$ to obtain $\hat{\mathbf{a}}'$ and $\hat{\mathbf{a}}''$

Recover $\hat{\mathbf{a}}$ by applying Two Point Sampling for each non-zero $\hat{\mathbf{a}}'_u$

return $\hat{\mathbf{a}}$

end function

الگوریتم AliasingFFT(a)

Algorithm 3 Aliasing FFT.

function ALIASINGFFT(a)

$L \leftarrow n/k^2$

Sample two corresponding seq … *length* k^2

$\mathbf{a}' \leftarrow \{a_0, a_L, a_{2L}, \ldots\}$

$$\hat{\mathbf{a}}'_u = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{a}_{u+\frac{n}{L}\cdot l}$$

$\mathbf{a}'' \leftarrow \{a_1, a_{L+1}, a_{2L+1}, \ldots\}$

$$\hat{\mathbf{a}}''_u = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{a}_{u+\frac{n}{L}\cdot l}\,\omega^{u+l\cdot\frac{n}{L}}$$

Run FFT on $\mathbf{a}'$ and $\mathbf{a}''$ to obt …

Recover $\hat{\mathbf{a}}$ by applying Two P … n-zero $\hat{\mathbf{a}}'_u$

return $\hat{\mathbf{a}}$

end function