دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

کابرد برنامه‌ریزی خطی در تعادل نش مخلوط بازی‌های جمع_ صفر

جلسه چهاردهم

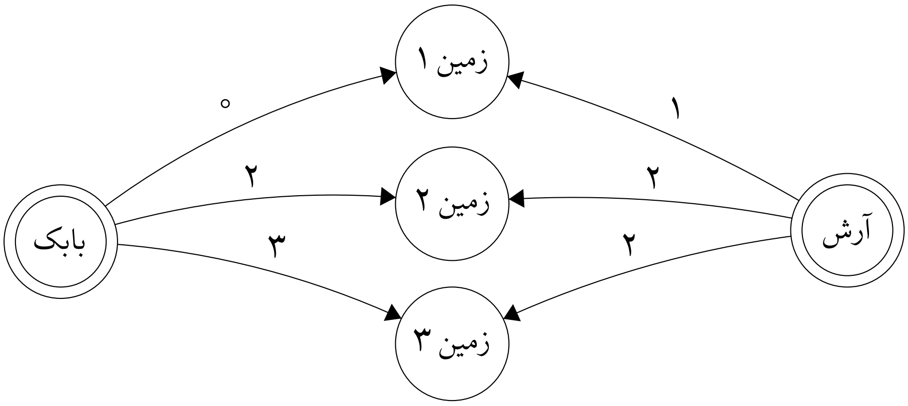
نگارنده: محمدپویا پاک‌سرشت

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسات قبل، الگوریتم‌های برای حل برنامه‌ریزی خطی گفته‌شده. (الگوریتم سیمپلکس ، بیضی‌گون و نقطه میانی) در این جلسه می‌خواهیم کاربردها دیگری از برنامه‌ریزی خطی را ببینیم.

۱.۱ تعادل نش

مثال : فرض کنید دو فرمانده داریم فرمانده آرش و فرمانده بابک که هر کدام پنج گروهان دارند.
سه زمین جنگی داریم. هر فرمانده تصمیم می‌گیرد که گروهانش را چگنه دسته‌بندی کند. و هر دسته به طور تصادفی در یکی از زمین‌ها قرار می‌گیرد. دسته‌ای برنده زمین می‌شود که تعداد گروهان بیشتری داشته‌باشد و اگر تعداد گروهان‌ها مساوی باشند زمین برنده‌ای ندارد.
که در مثال زیر یک حالت تصمیم‌گیری فرماندهان با قرارگرفتن تصادفی در سه زمین است.



(هر عدد روی یال ها تعداد گروهان ها است.)

فرماندهی برنده است که تعداد زمین بیشتری را برنده شده.(از سه زمین)

ماتریس سود آرش	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

جدول بالا جدول سود آرش است.

توضیح جدول بالا:

هر سطر حالاتی است که آرش گروهان خود را دسته‌بندی می‌کند و هر ستون حالاتی است که بابک گروهان خود را دسته‌بندی می‌کند.

اگر آرش سطر دوم و بابک ستون اول را انتخاب کند عدد متناظر در جدول بالا احتمال بردن آرش است.

اگر دسته پنج گروهانه‌ی بابک مقابل دسته صفر گروهانه‌ی آرش قرار بگیرد ، دو زمین را آرش و یک زمین را بابک می‌برد پس در کل آرش می‌برد و اگر دسته پنج گروهانه‌ی بابک مقابل دسته صفر گروهانه‌ی آرش قرار نگرد یک زمین را آرش و یک زمین را بابک می‌برد و یک زمین مساوی می‌شود.پس در این حالت برنده‌ای نداریم.

حالت اول به احتمال یک سوم رخ می‌دهد. پس احتمال بردن متناظر با سطر دوم و ستون اول برابر یک سوم است.

جدول سود بابک منفی جدول سود آرش است بدلیل اینکه هر چقدر آرش سود کند بابک همان مقدار ضرر می کند.

۱.۱.۱ استراتژی آرش:

فرض کنید آرش محتاطانه‌ترین بازی را بکند.

یعنی حالتی را انتخاب کند که با فرض اینکه بابک یک جاسوس دارد کمترین ضرر را کند.پس اگر آرش سطری را انتخاب کند بابک می تواند ستونی را انتخاب کند که سود آرش کمینه شود.

مثلا اگر آرش سطر اول را انتخاب کند بابک ستون آخر را انتخاب می‌کند که آرش بیشترین ضرر را کند.

پس آرش باید سطری را انتخاب کند که کمینه آن بیشنه باشد. که کمینه پنج سطر به ترتیب برابر $-1, -2/3, 0, -1/3, -1/3$ است. پس آرش باید سطر سوم را انتخاب کند.که سود آرش برابر صفر است.

حال فرض کنید بابک هم محتاطانه‌ترین حالت را انتخاب مکند پس باید ستونی را انتخاب کند که بیشنه آن ستون کمینه باشد. پس طبق جدول بالا بابک باید ستون سوم را انتخاب کند.

	(0,0,5)	(0,1,4)	(0,2,3)	(1,1,3)	(1,2,2)
(0,0,5)	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
(0,1,4)	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
(0,2,3)	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{0}$	0	$\frac{1}{3}$
(1,1,3)	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
(1,2,2)	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

نقطه مشخص شده در جدول بالا را در نظربگیرید.
این نقطه در یکی از محتاطانه‌ترین نقاط برای آرش و بابک است. این نقطه در سطر خود کمینه و در ستون خود بیشنه است.
اگر بابک بداند که آرش سطر سوم را انتخاب کرده اگر ستون که اتخاب کرده (ستون سوم) را تغییر بدهد بیشتر سود نمی‌کند و اگر آرش بداند که بابک ستون سوم را انتخاب کرده اگر سطری که انتخاب کرده(سطر سوم) را تغییر دهد بیشتر سود نمی‌کند.
با این استراتژی آرش و بابک اگر جاسوسی داشته‌باشند. کار جاسوس ها بی‌اثر می‌شود. به این خاصیت تعادل نش می گوییم.

تعریف ۱ (تعریف تعادل نش)**.** *حالتی (نقطه‌ای) است که به نفع هیچ کدام از طرفین نیست که بازی خود را تغییر دهند.*

بازی مشهور دیگری که می‌توان با نظریه بازی‌ها توصیفش کرد سنگ کاغذ قیچی است.

	rock	paper	scissors
rock	0	-1	1
paper	1	0	-1
scissors	-1	1	0

هر سطر حالاتی است که آرش که انتخاب می‌کند و هر ستون حالاتی است که بابک انتخاب می‌کند و سود هر کس برابر ضرر دیگری است. جدول بالا جدول سود آرش است.
هر سطری که آرش انتخاب‌کند بابک می‌تواند ستونی را انتخاب کند که سود آرش ۱− شود. و اگر بابک ستونی را انتخاب کند آرش می تواند سطری را انتخاب کند که ۱ سود کند.پس اگر حالتی را در نظر بگیریم یکی از دو نفر می‌تواند بازیش را عوض کند تا بیشتر سود ببرد. پس در این بازی تعادل نش نداریم.

۲.۱ تعادل نش مخلوط

۱.۲.۱ استراتژی مخلوط:

به جای اینکه آرش یک سطر را انتخاب کند آرش می‌تواند یک توزیع احتمالی از سطرها را انتخاب کند و بابک به جای اینکه یک ستون را انتخاب کند می‌تواند یک توزیع از ستون‌ها را انتخاب کند.
مثال: آرش هر سطر را به احتمال یک سوم انخاب کند و بابک هر ستون را به احتمال یک سوم انتخاب کند.
در این مثال فرض کند بابک توزیع سطرهای آرش را بداند پس بابک هر توزیع ستون‌ها را انتخاب کند برای هر ستون به احتمال یک سوم سود می‌کند یا به احتمال یک سوم ضرر می‌کند یا به احتمال یک سوم نه سود ونه ضرر می‌کند پس بابک با تغییر توزیع ستون‌هایش بیشتر سود نمی‌کند. به طریق مشابه اگر آرش توزیع سطرهایش را تغییر دهد بیشتر سود نمی‌کند.
به استراتژی بالا تعادل نش مخلوط می‌گویند.

در حالت کلی:

توزیع سطری(توزیع نفر اول) x است که: $\sum_{i=۱}^{m} x_i = ۱$ و $x \geq ۰$

توزیع ستونی (توزیع نفر دوم) y است که: $\sum_{j=۱}^{n} y_j = ۱$ و $y \geq ۰$

ماتریس سود نفر اول:

$$\begin{array}{c|ccccc} & y_۱ & \cdots & y_j & \cdots & y_n \\ \hline x_۱ & m_{۱,۱} & \dots & m_{۱,j} & \dots & m_{۱,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i & m_{i,۱} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & m_{m,۱} & \cdots & m_{m,j} & \dots & m_{mn} \end{array}$$

تعریف $m_{i,j}$: اگر نفر اول سطر iام را و نفر دوم ستون jام را انتخاب کند نفر اول چقدر سود می کند.(سود نفر اول برابر ضرر نفر دوم)

پس سود نفر اول: $\sum_{i,j} x_i m_{i,j} y_j = x^T M y$

اگر بابک بداند آرش چه تصمیمی گرفته‌است.(چه توریع از سطرها را انتخاب کرده) پس تصمیمی می‌گیرد(توزیع از ستون‌ها را انتخاب می‌کند) که بیشتر سود را بکند(آرش بیشترین ضرر را بکند)

پس سود آرش: $\beta(x) = \min_y x^T M y$

(یعنی بابک سعی می‌کند بدترین حالت را برای آرش انتخاب کند.)

اگر آرش بداند بابک چه تصمیمی گرفته است.(چه توریع از ستون‌ها را انتخاب کرده) پس تصمیمی می‌گیرد(توزیع از سطرها را انتخاب می‌کند) که بیشتر سود را بکند

پس سود آرش: $\alpha(y) = \max_x x^T M y$

تعریف ۲ (تعریف تعادل نش مخلوط:). *جفت $(\tilde{x}, \tilde{y})$ تعادل نش مخلوط می‌گویند اگر هر نفر توزیع نفر دیگر را بداند و با تغییر توزیعش بیشتر سود نکند.*

که x توزیع نفر اول روی سطرها و yتوزیع نفر دوم روی ستون‌ها است. پس داریم:

$$\beta(x) = x^T M y, \alpha(y) = x^T M y \Rightarrow \beta(x) = x^T M y = \alpha(y)$$

مثال:سنگ کاغذ قیچی

	rock	paper	scissors
rock	0	−1	1
paper	1	0	−1
scissors	−1	1	0

$$x = y = (۱/۳, ۱/۳, ۱/۳) \Rightarrow \beta(x) = x^T M y = \alpha(y) \quad (۱)$$

پس (x, y) در تعادل نش مخلوط قرار دارند.

لم ۳. *: برای هر استراتژی (x, y) داریم: $\beta(x) \leq x^T My \leq \alpha(y)$. درنتیجه: $\max_x \beta(x) \leq \min_y \alpha(y)$*
(مشابه قضیه دوگان ضعیف در نضریه باری‌ها)

اثبات. برای هر x داریم: $\beta(x) \leq x^T My \Leftarrow \beta(x) = \min_y x^T My$
و به طریق مشابه برای هر y داریم: $\alpha(y) \geq x^T My \Leftarrow \alpha(y) = \max_x x^T My$
در نتیجه: $\beta(x) \leq x^T My \leq \alpha(y)$
پس برای هر (x, y) طبق نامساوی بالا داریم: $\max_x \beta(x) \leq \min_y \alpha(y) \Leftarrow \beta(x) \leq \alpha(y)$ □

لم ۴. *: اگر جفت $(\tilde{x}, \tilde{y})$ در تعادل نش مخلوط باشند. پس هر دو محتاطانه‌ترین توزیع(worse-case optimal) هستند.(یعنی $\beta(\tilde{x})$ ماکسیم است و $\alpha(\tilde{y})$ مینیمم است.)*

اثبات. طبق لم۱ داریم: $\beta(x) \leq \alpha(\tilde{y}) : \forall x \Leftarrow \beta(x) \leq \alpha(y) : \forall x, y$
$\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ در تعادل نش هستند پس: $\alpha(\tilde{y}) = \beta(\tilde{x})$
از نامساوی‌های بالا بدست می‌آید: $\beta(x) \leq \beta(\tilde{x})$
پس هر دو محتاطانه‌ارین بازی را کردند.
به طریق مشابه برای y هم بدست می‌آید: $\alpha(\tilde{y}) \leq \alpha(y)$ □

لم ۵. *: اگر جفت $(\tilde{x}, \tilde{y})$ که $\beta(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{y})$ پس ($\tilde{x}$ و $\tilde{y}$) در تعادل نش مخلوط قرار دارند.*

اثبات. طبق لم۱ داریم: $\beta(x) \leq \alpha(\tilde{y}) : \forall x \Leftarrow \beta(x) \leq \alpha(y) : \forall x, y$
و طبق فرض لم۳ داریم: $\alpha(\tilde{y}) = \beta(\tilde{x})$
پس از دو نامساوی بالا نتیجه می‌شود $\beta(x) \leq \beta(\tilde{x})$
به طریق مشابه برای y هم بدست می‌آید: $\alpha(\tilde{y}) \leq \alpha(y)$
پس به نفغ هیچ‌کسی نیست که استراتژیشان را تغییر دهند پس $(\tilde{x}, \tilde{y})$ در تعادل نش مخلوط قرار دارند. □

۳.۱ قضیه مین‌مکس برای بازی‌های جمع صفر

قضیه (توری مین‌مکس برای بازی‌های جمع صفر). *برای هر بازی جمع صفر $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ محتاطانه‌ترین (worse-case optimal) وجود دارد و اگر $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ محتاطانه ترین (worse-case optimal) باشند ، پس $(\tilde{x}, \tilde{y})$ در تعادل نش مخلوط هستند و مقدار $\beta(\tilde{x}) = \tilde{x}^T M\tilde{y} = \alpha(\tilde{y})$ برای همه x و y های محتاطانه(worse-case optimal) برابر است.*

مشابه قضیه دوگان قوی در نظریه بازی‌ها.
تعبیر قضیه بالا:
مشابه دوگانی ضعیف: $\max_x \beta(x) \leq \min_y \alpha(y)$
قضیه بالا: $\beta(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{y})$
داریم: $\beta(\tilde{x}) = \max_x \min_y x^T My$ و $\alpha(\tilde{y}) = \min_y \max_x x^T My$
پس $\beta(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{y})$ معادل: $\max_x(\min_y x^T My) = \min_y(\max_x x^T My)$ است. پس فرقی ندار که اول مینم بگیرم و سپس ماکسمم یا برعکس(فرقی ندارد که چه کسی بازی را شروع می کند.)

۱.۳.۱ محاسبه $\beta(x)$

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & x^T My \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(در برنامه‌ریزی خطی بالا x ثابت است.)
محاسبه $\max \beta(x)$ از برنامه‌ریزی خطی بالا ممکن است چون که تابع ماکسیمم خطی نیست.

حال دوگان برنامه‌ریز خطی بالا را تشکیل می دهیم.

$$x_0 \quad \text{بیشینه کن}$$
$$M^T x - 1x_0 \geq 0 \quad \text{که}$$

(۱ بالا ، بردار تمام ۱ است)

جواب‌های برنامه‌ریزی اولیه و دوگان تهی نیست(شدنی هستند) پس طبق قضیه دوگانی قوی جواب مسله اولیه برابر جواب دوگان است.(برای هر x)

پس برای محاسبه $\max \beta(x)$ می توانیم ماکسیمم را برای مسله دوگان بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & x_0 \\ \text{که} \quad & M^T x - 1x_0 \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

جواب برنامه‌ریزی خطی بالا برابر $\max \beta(x)$ است.(در برنامه‌ریزی خطی بالا x متغییر است)

به طریق مشابه $\min \alpha(y)$ برابر جواب برنامه‌ریزی خطی پایین است.

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & y_0 \\ \text{که} \quad & My - 1y_0 \leq 0 \\ & \sum_{i=j}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

حال باید نشان‌دهیم جواب دو برنامه‌ریزی خطی بالا برابر است. این دو برنامه‌ریزی خطی دوگان هم هستند پس کافیست نشان دهیم هر دو شدنی هستند.

x_0 را می توان به اندازه کوچک کرد که $M^T x - 1x_0 \geq 0$ پس برنامه‌ریزی خطی $\max \beta(x)$ شدنی است.

y_0 را می توان به اندازه کوچک کرد که $My - 1y_0 \leq 0$ پس برنامه‌ریزی خطی $\min \alpha(y)$ شدنی است.

پس $\tilde{x}, \tilde{y}$ وجود دارد که $\max \beta(\tilde{x}) = \min \alpha(\tilde{y})$

۲ جمع بندی

استفاده از برنامه‌ریزی خطی در نظریه بازی‌ها و قضیه مین‌مکس و بازی‌های جمع‌ـ‌صفر خوبند.(قابل حل هستند.)
بدون نیاز به روانشناس(یعنی استراتژی‌های وجود دارد که اگر طرف مقابل بازی‌های بداند چه بازی می‌کند بازی ما فرقی نمی‌کند.)

۳ ارجاع و منابع

ویدئوی جلسه‌ی چهاردهم [دانلود]