دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

تحقیق در عملیات ۱

آزمونک دوم

نگارنده: سینا کلانترزاده

۱ چند تعریف

در مورد یک چندوجهی محدب
آ) تعریف وجه را بنویسید.
ب) تعریف رأس را بنویسید.
ج) تعریف نقطه گوشه‌ای را بنویسید.
د) تعریف جواب شدنی پایه‌ای را بنویسید.

۱.۱ پاسخ‌ها

آ) در یک چندوجهی محدب، مجموعه نقاط B را یک وجه می‌نامیم هر گاه تابع خطی C موجود باشد که برای همه نقاط عضو B مقدار ماکسیمم S را اتخاذ کند و برای دیگر نقاط چندوجهی مقداری کم‌تر از S را اتخاذ کند.

ب) وجه ۰ بعدی در یک چندوجهی را رأس می‌نامیم.

ج) در یک چندوجهی نقطه $X = (x_1, ..., x_n)$ را گوشه‌ای می‌نامیم هرگاه نتوان آن را به صورت ترکیب محدب هیچ دو نقطه دیگری از چندوجهی

نمایش داد.

د) در برنامه‌ریزی خطی بیشینه کردن C^TX با قیدهای $AX = b$ و $X \geq 0$، نقطه $X \in \mathbb{R}^k$ را جواب پایه‌ای شدنی می‌نامیم هرگاه یک مجموعه m عضوی $B \subseteq \{1, ..., n\}$ موجود باشد به طوری که:

(i) m برابر تعداد سطرهای A باشد.

(ii) ماتریس A_B وارون‌پذیر باشد به این معنا که ستون‌هایی شماره‌شان در B آمده است با یکدیگر مستقل باشند.

(iii) به ازای هر $j \notin B$ داشته باشیم $x_j = 0$.

۲ تحدب وجه

اثبات کنید وجه یک چندوجهی محدب، محدب است.

۱.۲ پاسخ

فرض کنید T وجه مذکور باشد، می‌دانیم تابع خطی C موجود است که به ازای هر $x \in T$ مقدار ماکسیمم S را اتخاذ می‌کند و همچنین به ازای هر $x \in T$ داریم: $Ax \leq b$ (نامعادله‌های چندوجهی) و $x \geq 0$.

نشان می‌دهیم هر ترکیب محدب دو نقطه دلخواه $z, w \in T$ عضو T است.

فرض کنید $q = rw + (1-r)z$ $(a \leq r \leq 1)$ یک ترکیب محدب دلخواه از w و z باشد داریم:

(i) $w, z, r, (1-r) \geq 0 \Rightarrow rw, \ (1-r)z \geq 0 \Rightarrow rw + (1-r)z \geq 0$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
Aw \leq b, \ Az \leq b, \ r \geq 0, \ 1-r \geq 0 \ &\Rightarrow rAw + (1-r)Az \leq rb + (1-r)b = b \\
&\Rightarrow A(rw + (1-r)z) \leq b \\
&\Rightarrow Aq \leq b.
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
C^Tw = S, \ C^Tz = S \ &\Rightarrow rC^Tw = rS, \ (1-r)C^Tz = (1-r)S \\
&\Rightarrow rC^Tw + (1-r)C^Tz = S \\
&\Rightarrow C^T(rw + (1-r)z) = S \\
&\Rightarrow C^Tq = S.
\end{aligned}
$$

سپس q قیود عضو T بودن را دارا می‌باشد پس $q \in T$ پس T محدب است.

۳ جواب شدنی آغازین

می خواهیم یک جواب شدنی برای برنامه‌ریزی زیر پیدا کنید. بدین منظور یک برنامه‌ریزی خطی دیگر می‌نویسیم. آن برنامه‌ریزی خطی را بنویسید.

$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + x_2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

۱.۳ پاسخ

متغیرهای x_5 و x_6 را به ترتیب به نامعادله‌ی اول و دوم اضافه می‌کنیم تا تبدیل به معادله شوند:

$$\begin{aligned} \max\ & -x_5 - x_6 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ & 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + x_6 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

حال در فرم معادله‌ای بالا $(0,0,0,0,2,12)$ یک جواب پایه‌ای شدنی می‌باشد و می‌توانیم با بدست آوردن تابلوی این جواب الگوریتم سیمپلکس را آغاز کنیم و در آخر جواب پایه‌ای شدنی دریافت کنیم اگر ماکسیمم $-x_5 - x_6$ صفر شد که یک جواب شدنی داریم و با دادن آن به سیمپلکس ماکسیمم تابع برنامه‌ریزی خطی‌مان بدست می‌آید در غیراینصورت برنامه‌ریزی خطی سوال جواب شدنی ندارد.

۴ اطلاعات اضافی به کمک رسم تابلو

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max\ & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\ s.t.\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9000 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

آ) بدون حل کردن برنامه‌ریزی خطی نشان دهید که جواب بهینه‌ای برای مسئله وجود دارد که در آن $x_3 = 0$.

ب) با توجه به نکته قبلی، تابلوی بهینه برای برنامه‌ریزی خطی مسئله اصلی مسئله تولید کنید.

۱.۴ پاسخ‌ها

آ) فرض کنید $X = (x_1, x_2, x_3)$ جواب بهینه‌ای برای مسئله باشد پس داریم:

$$\begin{aligned} & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 = S \quad \text{(ماکسیمم تابع هدف)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 9000 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $x_3 > 0$ نشان می‌دهیم $X^* = (x_1, x_2 + \frac{x_3}{3}, 0)$ نیز جوابی بهینه است:

$$\begin{aligned}
&10x_1 + 15(x_2 + \frac{x_3}{3}) + 5(0) = S\\
&3x_1 + 3(x_2 + \frac{x_3}{3}) + (0) \le 9000\\
&x_1 + 2(x_2 + \frac{x_3}{3}) + 2(0) \le 4000 \quad (*)\\
&x_1, (x_2 + \frac{x_3}{3}), (0) \ge 0.
\end{aligned}$$

برهان $(*)$:

$$x_1 + 2(x_2 + \frac{x_3}{3}) + 2(0) = x_1 + 2x_2 + 2\frac{x_3}{3} < x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4000.$$

حال به وضوح $X = (0, 0, 0)$ یک جواب شدنی برای برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم تابع هدف کران‌دار است:

$$\begin{aligned}
&x_1 \le 3000 \rightarrow 10x_1 \le 3000\\
&x_2 \le 3000 \rightarrow 15x_2 \le 45000\\
&x_3 \le 9000 \rightarrow 5x_3 \le 45000\\
&\Rightarrow 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \le 120000.
\end{aligned}$$

پس طبق قضیه‌ای برنامه‌ریزی خطی مذکور جواب شدنی بهینه دارد و بالاتر ثابت کردیم با وجود این فرض جوابی وجود دارد که $x_3 = 0$.

ب) ابتدا با اضافه کردن متغیرهای مثبت x_4 و x_5 به برنامه‌ریزی خطی فوق، آن را تبدیل به فرم معادله‌ای می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\max\ & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3\\
s.t.\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9000\\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4000\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.
\end{aligned}$$

حال تابلوی متناظر با $B = \{4, 5\}$ را تشکیل می‌دهیم:

	p	x_1	x_2	x_3
x_4	9000	-3	-3	-1
x_5	4000	-1	-2	-2
z	0	10	15	5

حال می‌خواهیم x_1 را به مجموعه‌ی پایه‌مان اضافه کنیم. معادله اول محدودیت $x_1 \le 3000$ را ایجاد می‌کند و معادله دوم محدودیت $x_1 \le 4000$ پس x_4 باید از مجموعه پایه‌مان حذف شود:

	p	x_2	x_3	x_4
x_1	3000	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
x_5	1000	-1	$\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	3000	5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-10}{3}$

حال می‌خواهیم x_2 را به مجموعه پایه‌مان اضافه کنیم. معادله اول محدودیت $x_2 \le 3000$ را ایجاد می‌کند و معادله دوم محدودیت $x_2 \le 1000$ پس x_5 باید از مجموعه پایه‌مان حذف شود:

	p	x_3	x_4	x_5
x_1	2000	$\frac{4}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1
x_2	1000	$-\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
z	35000	$\frac{-20}{3}$	$\frac{-5}{3}$	-5

چون ضرایب در تابع هدف منفی هستند پس تابلوی فوق، تابلوی بهینه است.

۵ اطلاعات تابلو

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\max\ & ۲x_۱ + ۳x_۲ - ۴x_۳ \\ s.t.\ & x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۳ \\ & -x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ + x_۵ = ۱ \\ & x_i \geq ۰,\ \forall i \in \{۱,۲,۳,۴,۵\}.\end{aligned}$$

تابلوی زیر برای برنامه‌ریزی خطی بالا را در نظر بگیرید

	p	x_2	x_3	x_4
x_1	3	1	-2	-1
x_5	A	-2	-7	-1
z	B	5	-8	-2

توجه کنید که در تابلوی بالا در ستون‌های مربوط به $x_۲$ و $x_۳$ و $x_۴$ خود نام متغیرها حذف شده و فقط ضرایبشان مشخص شده است. مقدار A و B چقدر باید باشد؟

۱.۵ پاسخ

داریم:

$$\begin{aligned}& x_۱ = ۳ + x_۲ - ۲x_۳ - x_۴ \\ & x_۵ = ۱ + x_۱ - ۳x_۲ - ۵x_۳ \ \Rightarrow\ x_۵ = ۴ - ۲x_۲ - ۷x_۳ - x_۴ \\ & \Rightarrow A = ۴.\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}& z = ۲x_۱ + ۳x_۲ - ۴x_۳ \ \Rightarrow\ z = ۶ + ۵x_۲ - ۸x_۳ - ۲x_۴ \\ & \Rightarrow B = ۶.\end{aligned}$$

۶ اطلاعات تابلویی دیگر

فرض کنید یک برنامه‌ریزی خطی داریم که تابع هدف آن به صورت زیر است:

$$z = ۴x_۱ + ۵x_۲ - x_۴ - ۳x_۵,$$

در یکی از مراحل اجرای الگوریتم سیمپلکس تابلو به صورت زیر است:

	p	x_1	x_3	x_4
x_2	1	-3	-2	-4
x_5	3	1	-3	-2
z	-4	A	-1	-15

مقدار A چقدر است؟

۱.۶ پاسخ

$$x_2 = 1 - 3x_1 - 2x_3 - 4x_4$$
$$x_5 = 3 + x_1 - 3x_3 - 2x_4$$
$$z = 4x_1 + 5x_2 - x_4 - 3x_5 \;\Rightarrow\; z = -4 - 14x_1 - x_3 - 15x_4$$
$$\Rightarrow A = -14.$$

۷ چند قدم سیمپلکس

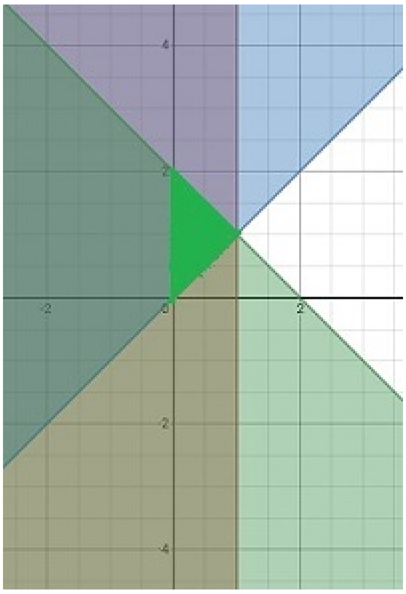
برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + x_2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 - x_2 \le 0 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

آ) در یک شکل ناحیه شدنی و قیود را مشخص کنید.
ب) در شکل تمامی جواب‌های شدنی پایه‌ای را مشخص کنید.
ج) از بین جواب‌های شدنی پایه‌ای کدام بهینه هستند؟
د) برنامه‌ریزی خطی را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی به شکل معادله‌ای بنویسید. متغیرهای جدید را با s نام‌گذاری کنید.
ه) یک تابلو که در آن $x_1 = x_2 = 0$ است را رسم کنید.
و) این تابلو معادل کدام نقطه در شکلی است که در قسمت اول رسم کرده‌اید؟
ز) مجموعه پایه را در این تابلو مشخص کنید.
ح) می‌خواهیم یک عملیات لولا را روی تابلو اجرا کنیم. چه انتخاب‌هایی برای اضافه کردن به پایه داریم؟
ط) متغیر با بیشترین ضریب را به عنوان متغیر لولا انتخاب کنید و عملیات لولا را انجام بدهید. تابلوی جدید را رسم کنید.
ی) تابلوی جدید معادل چه پایه‌ای است؟
ک) تابلوی جدید معادل چه نقطه‌ای در شکل است؟
ل) در این تابلو چه متغیری را می‌توانیم به عنوان متغیر لولا به پایه اضافه کنید؟
م) هنگام اضافه کردن این متغیر لولا، چه گزینه‌هایی به عنوان پایه بعدی داریم؟
ن) کدام یک از پایه‌های بعدی بهینه هستند؟ (با توجه به شکل استدلال کنید.)

۱.۰.۷ پاسخ‌ها

آ) مثلث سبز رنگ فضای جواب را نشان می‌دهد.



ب) جواب‌های پایه‌ای شدنی آن‌هایی هستند که صفر بیشتری دارند: $(۰,۰)$، $(۲,۰)$ و $(۱,۱)$.

ج) $(۱,۱)$ بهینه است زیرا $۲x_۱ + x_۲ = ۳$ می‌شود و نسبت به بقیه بزرگ‌تر است.

د)

$$
\begin{aligned}
\max\ & ۲x_۱ + x_۲ \\
s.t.\ & x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \\
& x_۱ - x_۲ + x_۴ = ۰ \\
& x_۱ + x_۵ = ۱ \\
& x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

و $S = \{x_۳, x_۴, x_۵\}$.

ه)

	p	x_1	x_2
x_3	2	-1	-1
x_4	0	-1	1
x_5	1	-1	0
z	0	2	1

و) نقطه $(۰,۰)$.

ز) $B = \{۳,۴,۵\}$.

ح) دو انتخاب x_1 و x_2 چون ضریب هر دو در z مثبت است.

ط) x_1 بیشترین ضریب را دارد:

	p	x_2	x_4
x_3	2	−2	1
x_1	0	1	−1
x_5	1	−1	1
z	0	3	−2

ی) $B = \{3, 1, 5\}$.

ک) $X = (0, 0, 2, 0, 1)$ که همان $(0, 0)$ است.

ل) متغیر x_2 را باید اضافه کنیم چون تنها متغیر با ضریب مثبت در تابع هدف است.

م) معادله اول و سوم برای x_2 محدودیت ایجاد می‌کنند یعنی معادلات متناظر با x_3 و x_5.

ن) پایه $B = \{1, 2, 3\}$، چون باید از نقطه $(0, 1)$ به $(0, 0)$ برویم.