دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی محاسبه

تمرین شماره‌ی ۲: توابع محاسبه‌پذیر و زبان‌های بازگشتی

سؤال ۱

نشان دهید مجموعه $L \subseteq \Sigma^*$ یک مجموعه‌ی بازگشتی است اگر و تنها اگر تابع محاسبه پذیر و تام صعودی مثل $f : \Sigma^* \longrightarrow L$ وجود داشته باشد که برد آن L باشد.

$\Leftarrow$

فرض کنید $L = \{l_0, l_1, \dots\}$ زبانی بازگشتی باشد. پس ماشین تورینگی مثل T_L وجود دارد که L را تصمیم[۱] می‌گیرد. تابع محاسبه‌پذیر، تام[۲] و صعودی $f : \Sigma^* \longrightarrow L$ را می‌سازیم:

$$(\forall w \in \Sigma^*) \quad f(w) = \begin{cases} l_0 & w \leq l_1 \\ w & w \in L \\ f(w-1) & w \notin L \end{cases}$$

(منظور از $w-1$ کلمه‌ی قبل از w در ترتیب کانونیکال است).

اولاً f محاسبه‌پذیر است؛ ماشین تورینگی مانند T_f را توصیف می‌کنیم که f را محاسبه می‌کند. T_f به این صورت کار می‌کند:

[۱] decide
[۲] total

الگوریتم ۱ T_f

۱: **با ورودی** w:

۲: w را به T_L بده

۳: اگر T_L، w را پذیرفت خروجی را برابر w قرار بده

۴: کلمات Σ^* را با شروع از ϵ به T_L بده

۵: $l_0 \rightarrow$ اولین کلمه‌ای که T_L آن را می‌پذیرد

۶: اگر $w < l_0$ خروجی را برابر l_0 قرار بده

۷: درغیر اینصورت $w-1$ را به عنوان ورودی به خودت بده و خروجی آن را به عنوان خروجی روی نوار بنویس

چون تمام مراحل اجرای T_f محاسبه‌پذیر است (چرا؟) پس T_f محاسبه‌پذیر می‌باشد. به وضوح f تام و صعودی است.

$\Rightarrow$

برعکس فرض کنید تابع محاسبه‌پذیر تام صعودی f با برد L باشد. پس ماشین تورینگی مانند T_f وجود دارد که f را محاسبه می‌کند. نشان می‌دهیم L بازگشتی است. برای تصمیم‌گیری L شمارنده[۳]ی E_L را به صورت زیر می‌سازیم:

الگوریتم ۲ E_L

۱: شروع کن

۲: اعضای Σ^* را به ترتیب کانونیکال با شروع از ϵ به T_f بده

۳: خروجی را به نوارت اضافه کن

چون E_L فقط اعضای L (خروجی‌های f) را چاپ می‌کند، یک شمارنده برای L است. همچنین E_L اعضای L را به ترتیب صعودی می‌شمارد، زیرا f صعودی است. از طرفی طبق قضیه‌ای می‌دانیم هر زبانی که شمارنده‌ی صعودی داشته باشد بازگشتی است. بنابراین L بازگشتی است.

■

[۳] enumerator

سؤال ۲

نشان دهید که اگر $L \subseteq \Sigma^*$ نامتناهی و بازگشتی شمارشی باشد آنگاه L یک زیرمجموعه‌ی بازگشتی نامتناهی دارد.

زیرمجموعه‌ای از L ارائه می‌دهیم که بازگشتی باشد. چون L بازگشتی شمارشی است پس یک شمارنده مانند E دارد. E' را اینگونه تعریف می‌کنیم :

E' همان E است، با این تفاوت که قبل از نوشتن هر $w \in L$ روی نوار خروجی، چک می‌کند که آیا w از کلمه‌ی نوشته شده‌ی قبلی بزرگ‌تر هست یا نه، اگر بزرگ‌تر بود w را روی نوار می‌نویسد.

واضح است که E' زیرمجموعه‌ای از L مثل L' را می‌شمارد. ثابت می‌کنیم L' نامتناهی است. اگر اینطور نباشد یعنی در فرآیند شمارش L، E از جایی به بعد کلمه‌ای بزرگ‌تر از آخرین کلمه‌ی نوشته شده نمی‌نویسد. یعنی L عضو بیشینه دارد. یعنی L متناهی است که تناقض است. پس E' زیرمجموعه‌ای نامتناهی از L را با ترتیب صعودی می‌شمارد. پس زبان این شمارنده بازگشتی است. ■

سؤال ۳

نشان دهید که اگر $L \subset \Sigma^*$ نامتناهی و بازگشتی شمارشی باشد، آنگاه L زیرمجموعه‌ای نامتناهی دارد که بازگشتی شمارشی نیست و همچنین یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از L وجود دارد که بازگشتی شمارشی است ولی بازگشتی نیست.

قبلاً ثابت کرده‌ایم که تعداد همه‌ی زیرمجموعه‌های Σ^* ناشمارا است. با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد تعداد زیرمجموعه‌های L ناشمارا است. از آن‌جایی که تعداد زبان‌های RE شمارا است پس زیرمجموعه‌ای از L وجود دارد که بازگشتی شمارشی نیست.

اگر L بازگشتی شمارشی باشد اما بازگشتی نباشد، خودش یک پاسخ است.

حال فرض کنید $L = \{l_0, l_1, \dots\}$ بازگشتی و $\Sigma^* = \{w_0, w_1, \dots\}$ مرتب‌شده‌ی کانونیکال Σ^* باشد. دراینصورت تابع محاسبه‌پذیر تام اکیداً صعودی زیر وجود دارد که بردش L است:

$$(\forall i \in \mathcal{N}) \quad f(w_i) = l_i$$

چون f اکیداً صعودی است، یک‌به‌یک است و در نتیجه f^{-1} نیز یک تابع یک‌به‌یک است. پس مسئله‌ی عضویت یک عضو Σ^* مانند w در یک زبان دلخواه معادل است با مسئله‌ی عضویت $f(w)$ در نقش آن زبان تحت f.

حال زبان SA را در نظر بگیرید:

$$SA = \{\langle T\rangle | \langle T\rangle \in L(T)\}$$

می‌دانیم SA بازگشتی شمارشی است اما بازگشتی نیست. بنابراین نقش SA تحت f زیرمجموعه‌ای نامتناهی، بازگشتی شمارشی و غیربازگشتی از L می‌باشد. ■

سؤال ۴

نشان دهید مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌های L روی $\{0,1\}$ که L و L' هیچ‌کدام بازگشتی شمارشی نیستند ناشمارا است.

فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌های روی Σ^* باشد. فرض کنید

$$A_1 = \{L \subseteq \Sigma^* | (L \in RE) \wedge (L' \in RE)\}$$
$$A_2 = \{L \subseteq \Sigma^* | (L \in RE) \wedge (L' \notin RE)\}$$
$$A_3 = \{L \subseteq \Sigma^* | (L \notin RE) \wedge (L' \notin RE)\}$$

A_i ها A را افراز می‌کنند. بنابراین داریم

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

می‌دانیم $|A|$ ناشماراست. همچنین چون تعداد زبان‌های بازگشتی شمارشی شمارا است، پس تعداد اعضای A_1 و A_2 نیز شمارا هستند. بنابراین تعداد اعضای A_3 یعنی تعداد زبان‌هایی که هم خودشان و هم مکملشان بازگشتی شمارشی نیستند ناشمارا است.

■

سؤال ۵

فرض کنید تعدادی دایره روی صفحه وجود دارد.

الف) اگر هر نقطه از صفحه داخل حداکثر شمارا دایره قرار گیرند آنگاه حداکثر شمارا دایره در صفحه قرار دارد.

برای هر نقطه‌ی با مختصات گویای p تعریف کنید

$$A_p = \{C | \text{است } C \text{ درون } p\}$$

چون بین هر دو عدد حقیقی بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد، درون هر دایره نیز بی‌نهایت نقطه با مختصات گویا وجود دارد. بنابراین مجموعه‌ی کل دایره‌ها برابر است با:

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q}^2} A_p$$

چون برای هر p، p در تعدادی شمارا دایره وجود دارد و چون تعداد p ها شمارا است، پس تعداد کل دایره‌ها شمارا است. ■

ب) اگر مرکز هیچ دایره ای در دایره‌ی دیگری نباشد، آنگاه حداکثر شمارا دایره در صفحه قرار دارد.

شعاع همه‌ی دایره‌ها را نصف کنید. در اینصورت هیچ دو دایره‌ای اشتراکی نخواهند داشت. بنابراین هر نقطه از صفحه درون حداکثر شمارا دایره قرار می‌گیرد و طبق قسمت قبلی تعداد دایره‌ها شمارا است. ■