8.

$$Q_0 = \alpha \; ; \; Q_1 = \beta \; ; \; Q_2 = \frac{1+\beta}{\alpha} \; ; \; Q_3 = \frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \; ; \; Q_4 = \frac{1+\alpha}{\beta}$$

15+ 100

$$Q_5 = \frac{1+\frac{1+\alpha}{\beta}}{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = \alpha \; ; \quad Q_6 = \frac{1+\alpha}{\frac{1+\alpha}{\beta}} = \beta \; ; \quad \Rightarrow$$

هر سطر همانند سطر اول تکرار می‌شود.

$$\Rightarrow \quad Q_n = \begin{cases} \alpha & \text{if } n \overset{5}{\equiv} 0 \\ \beta & \text{if } n \overset{5}{\equiv} 1 \\ \frac{1+\beta}{\alpha} & \text{if } n \overset{5}{\equiv} 2 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \text{if } n \overset{5}{\equiv} 3 \\ \frac{1+\alpha}{\beta} & \text{if } n \overset{5}{\equiv} 4 \end{cases}$$

۲.

$$\begin{cases} g(1) = \alpha \\ g(2n) = 3g(n) + \gamma n + \beta_0 \\ g(2n+1) = 3g(n) + \gamma n + \beta_1 \end{cases} \longrightarrow \quad g(n) = A(n)\,\alpha + B(n)\,\gamma + C(n)\,\beta_0 + D(n)\,\beta_1$$

$$2n = (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2 \xrightarrow{b_0 = 0} n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1)_2$$

$$2n+1 = (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2 \xrightarrow{b_0 = 1} n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1)_2$$

$$g\big((b_m \cdots b_0)_2\big) = 3g\big((b_m \cdots b_1)_2\big) + \gamma \cdot (b_m \cdots b_1)_2 + \beta_{b_0}$$

$$= 3\Big(3g\big((b_m \cdots b_2)_2\big) + \gamma \cdot (b_m \cdots b_2)_2 + \beta_{b_1}\Big) + \gamma \cdot (b_m \cdots b_1)_2 + \beta_{b_0}$$

$$= 3^2 g\big((b_m \cdots b_2)_2\big) + \gamma \cdot \Big(3\,(b_m \cdots b_2)_2 + (b_m \cdots b_1)_2\Big) + 3\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$$

$$= 3^2\Big(3g\big((b_m \cdots b_3)_2\big) + \gamma \cdot (b_m \cdots b_3)_2 + \beta_{b_2}\Big) + \gamma \cdot \Big(3(b_m \cdots b_2)_2 + (b_m \cdots b_1)_2\Big) + 3\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$$

$$= 3^3 g\big((b_m \cdots b_3)_2\big) + \gamma \cdot \Big(3^2 (b_m \cdots b_3)_2 + 3^1 (b_m \cdots b_2)_2 + (b_m \cdots b_1)_2\Big) + 3^2 \beta_{b_2} + 3^1 \beta_{b_1} + 3^0 \beta_{b_0}$$

$- n \geq 1 \Rightarrow b_m \neq 0 \Rightarrow g(b_m) = g(1) = \alpha$

$$\Rightarrow g(n) = 3^m g(b_m) + \gamma\cdot\left((b_m\cdots b_1)_2 + 3(b_m\cdots b_2)_2 + \cdots + 3^{m-1}(b_m)_2\right) + \left(3^0\beta_{b_0} + 3^1\beta_{b_1} + \cdots + 3^m\beta_{b_m}\right)$$

$$= 3^m\alpha + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{m} 3^{i-1}(b_m\cdots b_i) + \sum_{i=0}^{m-1} 3^i\beta_{b_i}$$

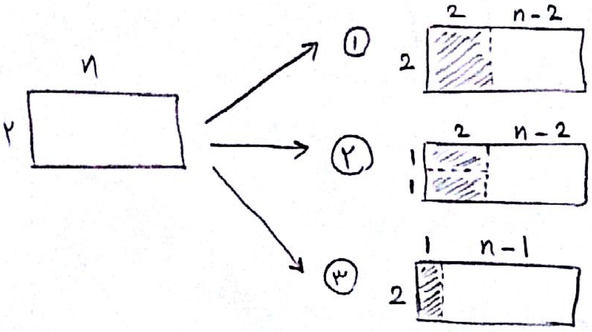
$$\Rightarrow g\left((b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2\right) = 3^m\alpha + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{m} 3^{i-1}(b_m\cdots b_i) + \sum_{i=0}^{m-1} 3^i\beta_{b_i}$$

b_0

✓ به ازای این رابطه برای $g(n)$ داریم: $g(1)=\alpha$ ، $g(2n+j) = 3g(n) + \gamma\cdot n + \beta_j$

9.1.9 :

می‌خواهیم یک جدول $2\times n$ را با 2×2 ، 1×2 بپوشانیم. حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:



① تعداد راه‌های پوشاندن $= a_{n-2}$

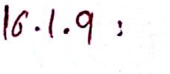
② تعداد راه‌های پوشاندن $= a_{n-2}$

③ تعداد راه‌های پوشاندن $= a_{n-1}$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-1} \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

10.1.9 :

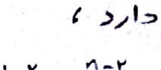
کلمات n حرفی با شرایط ذکر شده در مسئله را به ۲ دسته تقسیم می‌کنیم:



① کلماتی که با حرف b شروع می‌شوند ← در این حالت تعداد کلمات $= t_{n-1}$

② کلماتی که با حرف a شروع می‌شوند: حال دو حالت داریم:

Ⅰ حرف بعد از a ، b باشد ← در این حالت تعداد کلمات $= t_{n-2}$



Ⅱ حرف بعد از a ، a باشد ← در این حالت چون aa در ابتدا وجود دارد، n-2 حرف بعدی هر کدام دو حالت دارند ← تعداد کلمات در این حالت $= 2^{n-2}$

$\Rightarrow$ تعداد کل کلمات $= t_{n-1} + t_{n-2} + 2^{n-2}$

$h(1) = \alpha$

$h(2n+j) = 4h(n) + \gamma_j n + \beta_j \qquad j=0,1 \qquad n \geq 1$

if $\quad 2n = (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2 \xrightarrow{b_0 = 0} n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1)_2$

if $\quad 2n+1 = (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2 \xrightarrow{b_0 = 1} n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1)_2$

$$\Rightarrow h\big((b_m \cdots b_0)_2\big) = 4h\big((b_m \cdots b_1)_2\big) + \gamma_{b_0} \cdot (b_m \cdots b_1)_2 + \beta_{b_0}$$

$$= 4\Big(4h\big((b_m \cdots b_2)_2\big) + \gamma_{b_1} \cdot (b_m \cdots b_2)_2 + \beta_{b_1}\Big) + \gamma_{b_0} \cdot (b_m \cdots b_1)_2 + \beta_{b_0}$$

$$= 4^2 h\big((b_m \cdots b_2)_2\big) + 4^1 \gamma_{b_1} (b_m \cdots b_2)_2 + 4^0 \gamma_{b_0} (b_m \cdots b_1)_2 + 4^1 \beta_{b_1} + 4^0 \beta_{b_0}$$

$$\vdots$$

$$= \big[4^m h(b_m)\big] + \big[4^0 \gamma_{b_0} \cdot (b_m \cdots b_1)_2 + 4^1 \gamma_{b_1} \cdot (b_m \cdots b_2)_2 + \cdots + 4^{m-1} \gamma_{b_{m-1}} \cdot (b_m)_2\big] + \big[4^0 \beta_{b_0} + \cdots + 4^{m-1} \beta_{b_{m-1}}\big]$$

- $n \geq 1 \Rightarrow b_m \neq 0 \Rightarrow h(b_m) = h(1) = \alpha$

$\Rightarrow$

$$h\big(\underbrace{(b_m \cdots b_0)_2}_{=n}\big) = 4^m \alpha + \sum_{i=1}^{m} 4^{i-1} \gamma_{b_{i-1}} \cdot (b_m \cdots b_i)_2 + \sum_{i=0}^{m-1} 4^i \beta_{b_i}$$

به ازای این رابطه برای $h(n)$ داریم :

$$\begin{cases} h(1) = \alpha \\ h(2n+j) = 4h(n) + \gamma_j n + \beta_j & n \geq 1 \end{cases}$$