بسم الله الرحمن الرحیم

بهینه‌سازی ترکیبیاتی - برنامه‌ریزی خطی و صحیح

ترم پاییز – ۱۳۹۴-۹۵

تعریف درس

- سریع‌تر پیش می‌رویم
- تفاوت با درس الگوریتم‌های تقریبی
  - فهم در مقابل روش
  - شناخت چند وجهی‌ها :مثال
- مباحث احتمالی جدید
  - ماترويد

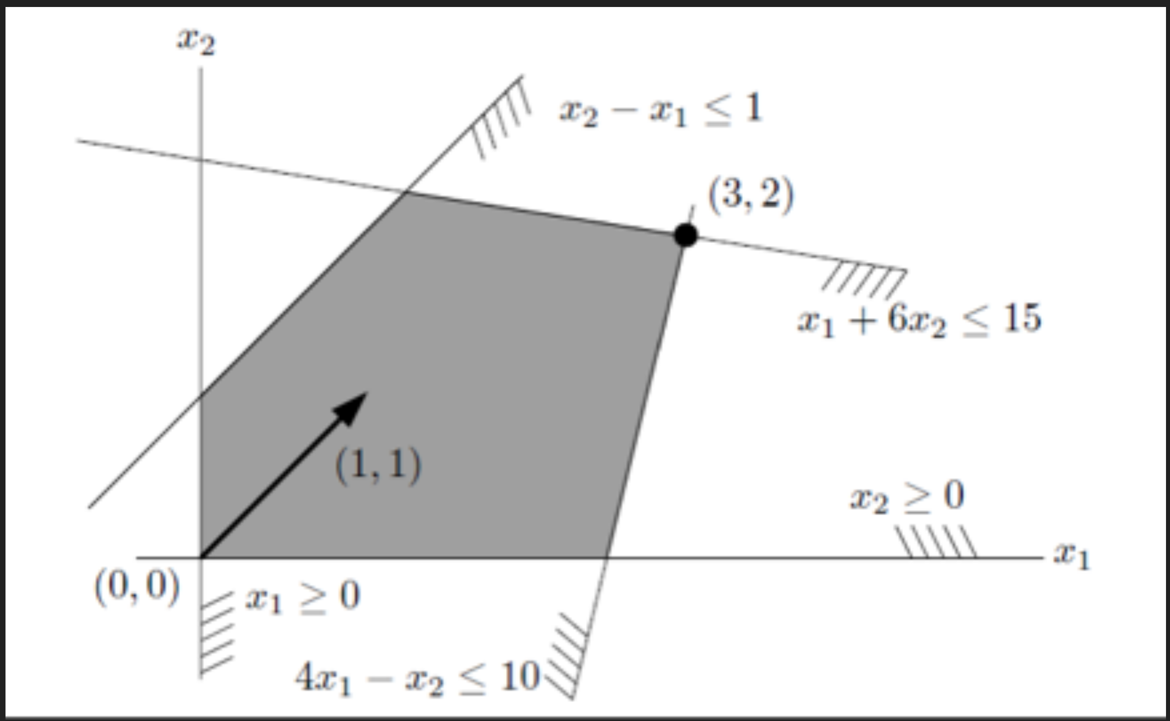
مثال برنامه‌ریزی خطی

Maximize $x_1 + x_2$

among all vectors $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfying the constraints

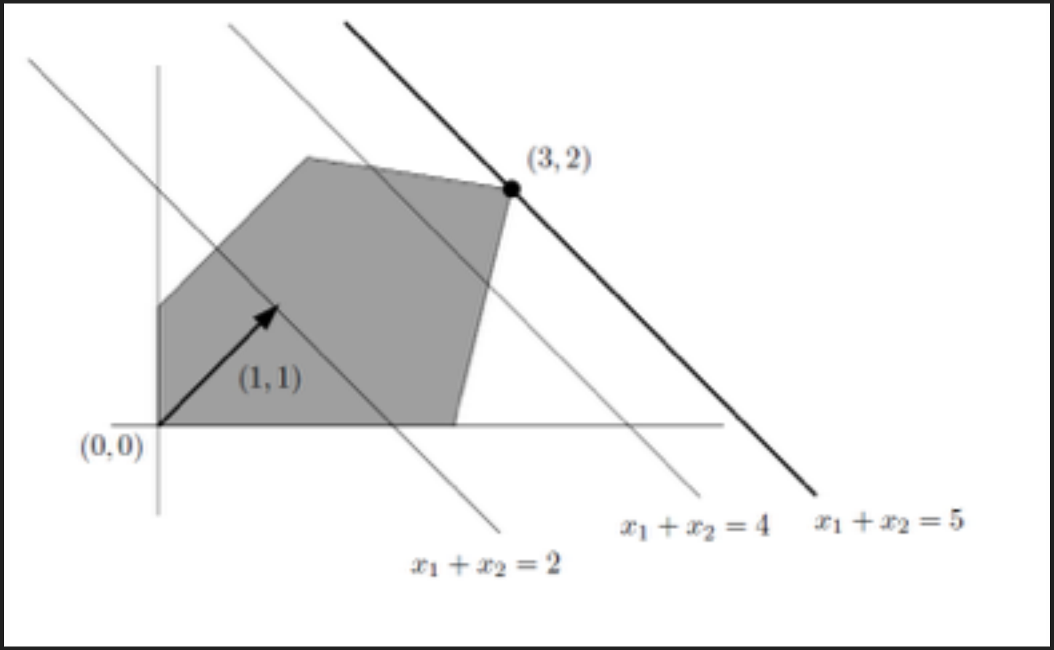
$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_2 - x_1 &\leq 1 \\
x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\
4x_1 - x_2 &\leq 10.
\end{aligned}
$$

مثال برنامه‌ریزی خطی - چندوجهی



$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0\\
x_2 - x_1 &\leq 1\\
x_1 + 6x_2 &\leq 15\\
4x_1 - x_2 &\leq 10.
\end{aligned}
$$

مثال برنامه‌ریزی خطی-چندوجهی-تابع هدف



Maximize $x_1 + x_2$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

- تساوی

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

- تساوی

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

- تساوی

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

- تساوی

$$x_1 + 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

تبدیل معادله‌ها به یک صورت

- جهت نامساوی

$$x_1 + 3x_2 \geq 7.$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

- تساوی

$$x_1 + 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -7,$$

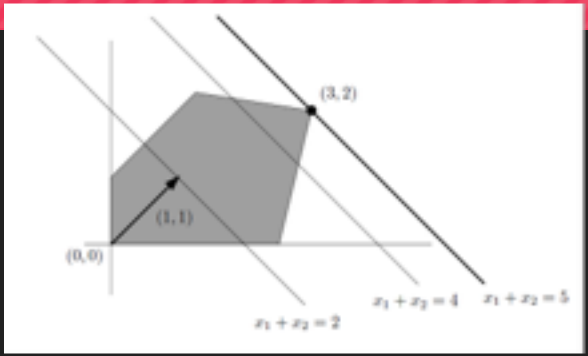
- تبدیل همه به تساوی

تعریف برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)

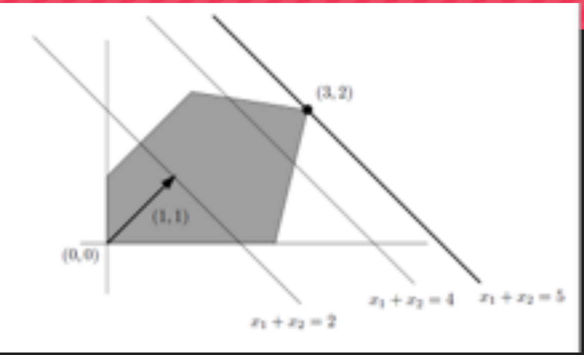
- فرم کنونیکال

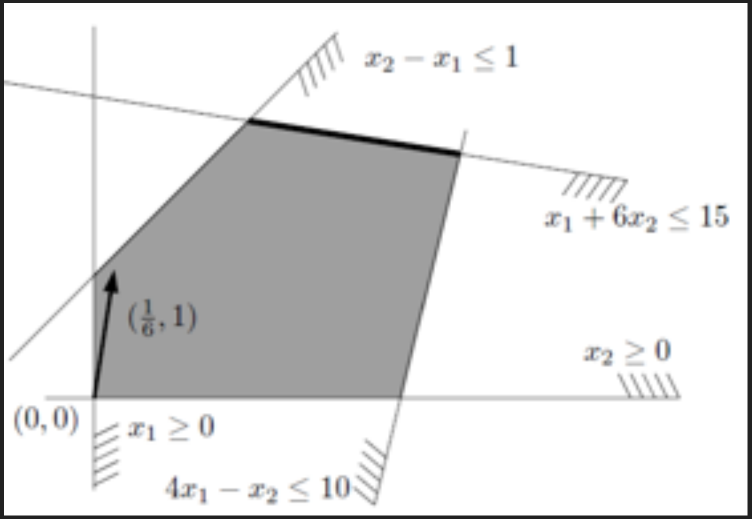
Maximize the value of	$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
among all vectors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfying	$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$,

انواع جواب‌ها

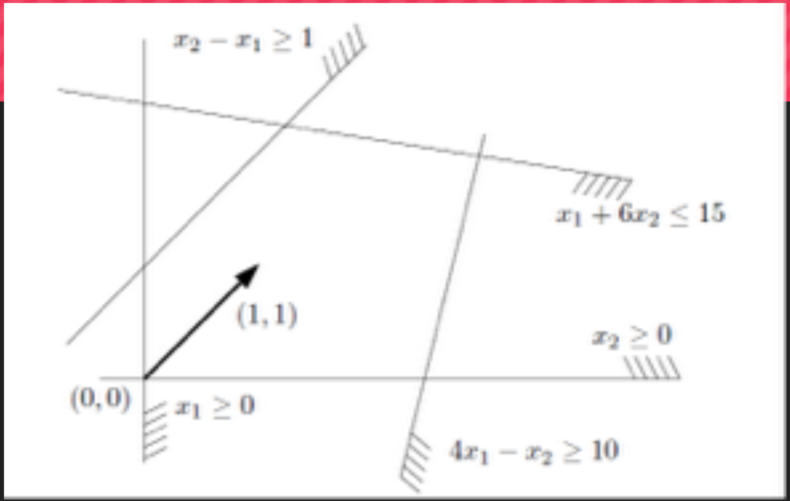


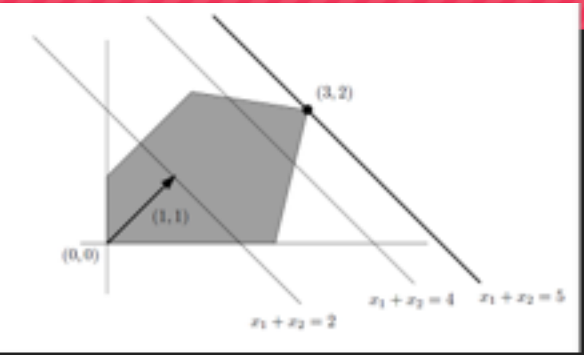
انواع جواب‌ها

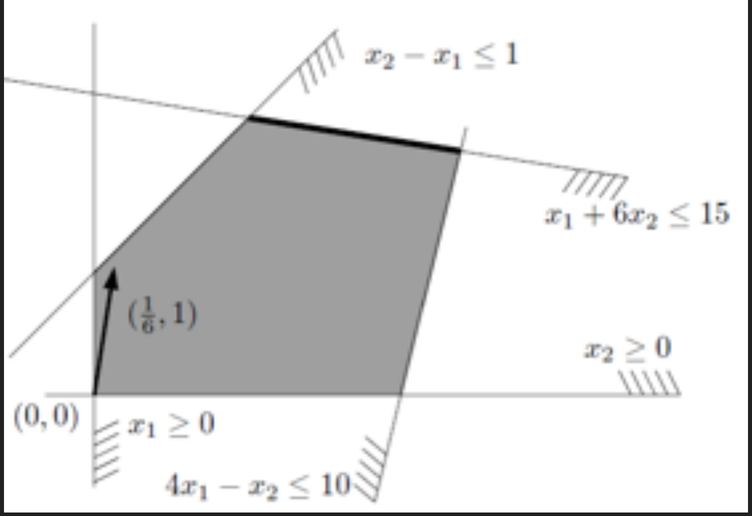




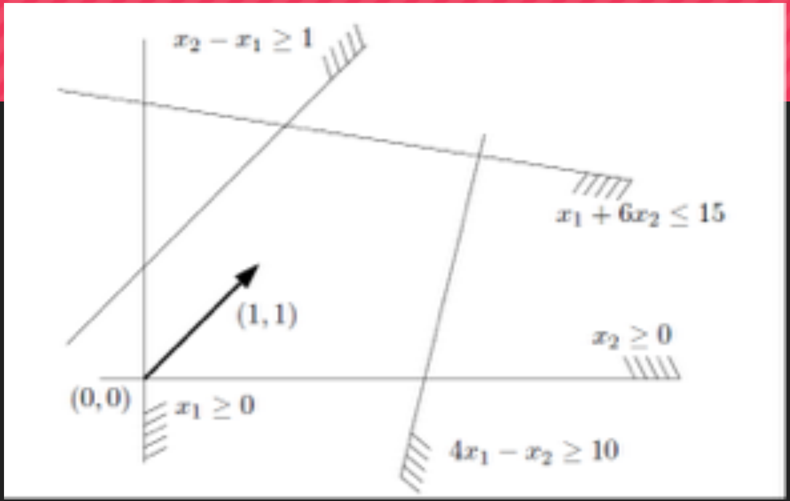
انواع جواب‌ها

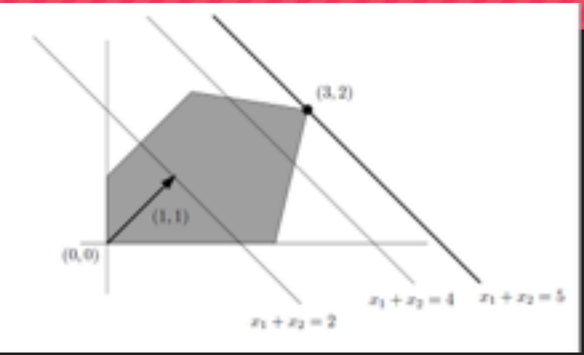


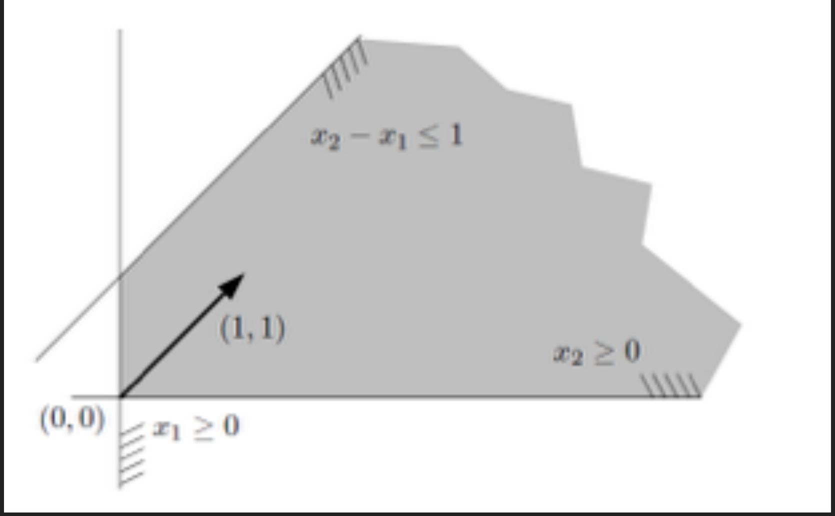


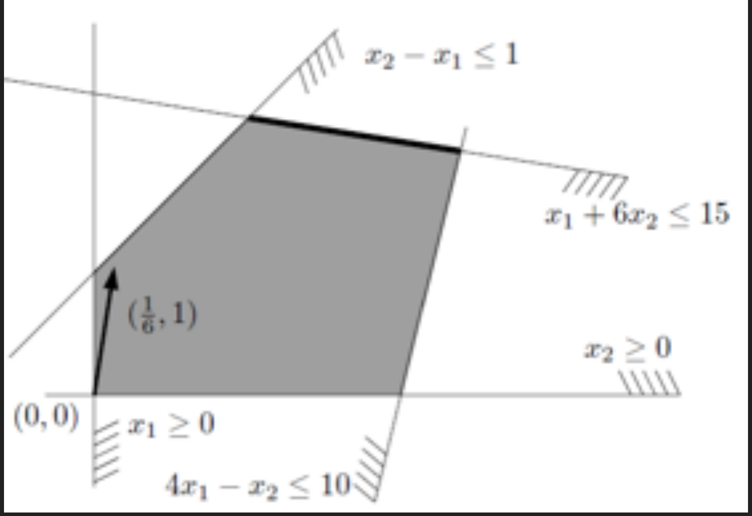


انواع جواب‌ها









مسئله LP در P است

Maximize the value of $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

among all vectors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfying $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$,

- الگوریتم simplex
  - چند جمله‌ای نیست
- الگوریتم ellipsoid
- الگوریتم interior point

مثال برای برنامه‌ریزی خطی

مسئله رژیم غذایی

Food	Carrot, Raw	White Cabbage, Raw	Cucumber, Pickled	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

مسئله رژیم غذایی

Food	Carrot, Raw	White Cabbage, Raw	Cucumber, Pickled	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

- هدف: کم‌هزینه‌ترین غذای کامل

مسئله رژیم غذایی – برنامه‌ریزی خطی

Food	Carrot, Raw	White Cabbage, Raw	Cucumber, Pickled	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

مسئله رژیم غذایی – برنامه‌ریزی خطی

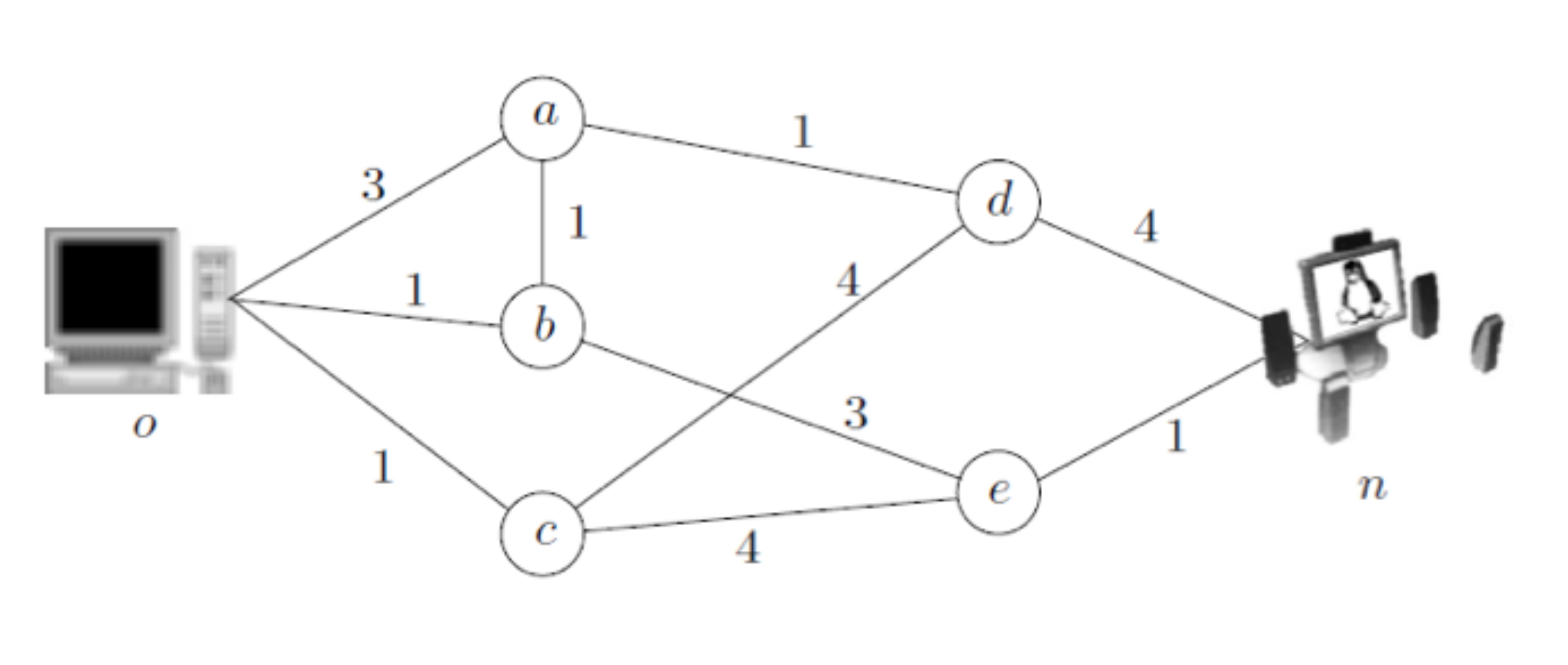
Food	Carrot, Raw (x_1)	White Cabbage, Raw (x_2)	Cucumber, Pickled (x_3)	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

مسئله رژیم غذایی – برنامه‌ریزی خطی

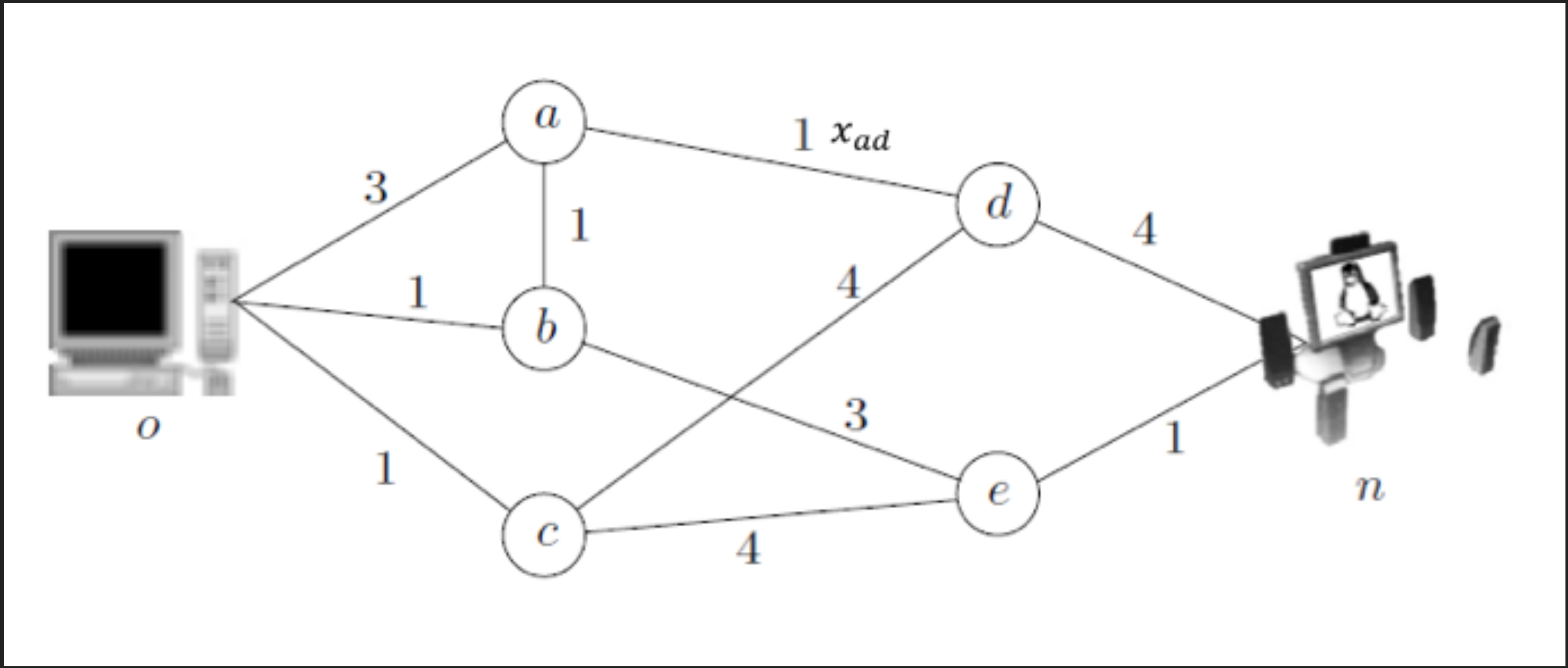
Food	Carrot, Raw (x_1)	White Cabbage, Raw (x_2)	Cucumber, Pickled (x_3)	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & 0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3 \\
\text{subject to} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0 \\
& 35x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \geq 0.5 \\
& 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
& 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4.
\end{array}
$$

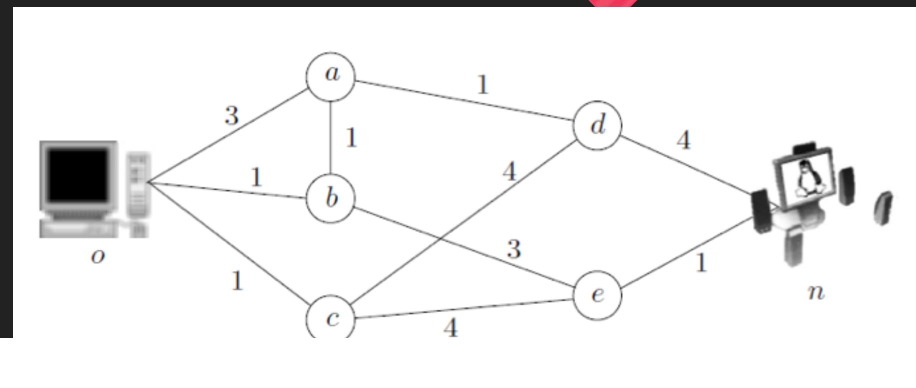
مسئله شار بیشینه



مسئله شار بیشینه



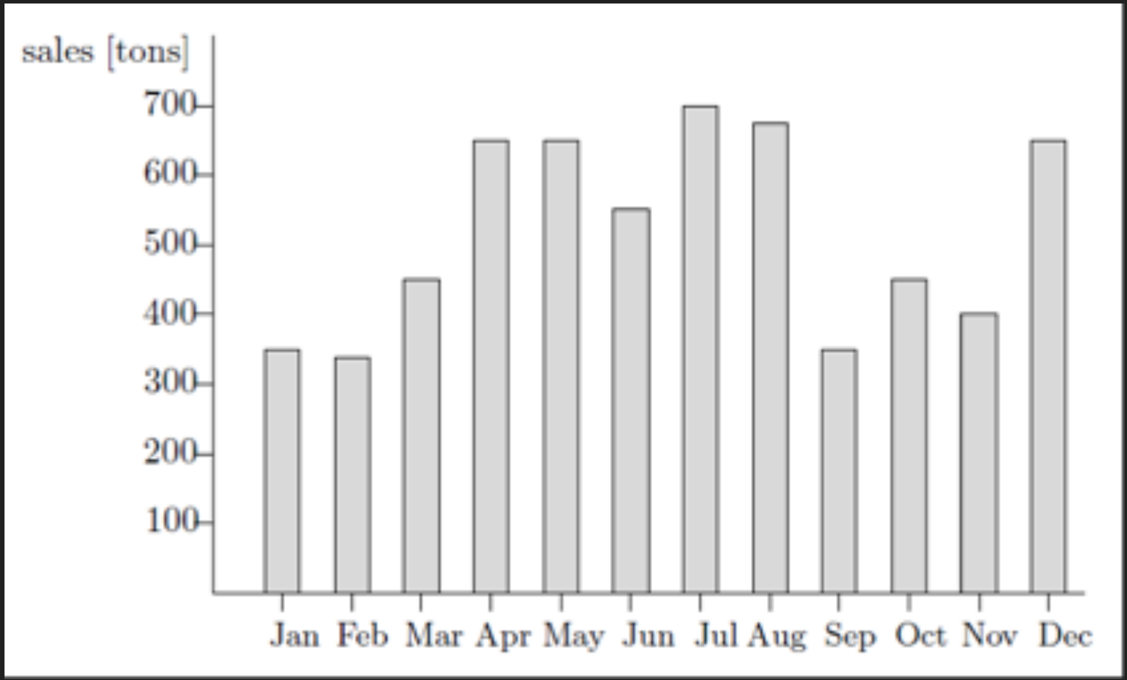
مسئله شار بیشینه – برنامه‌ریزی خطی



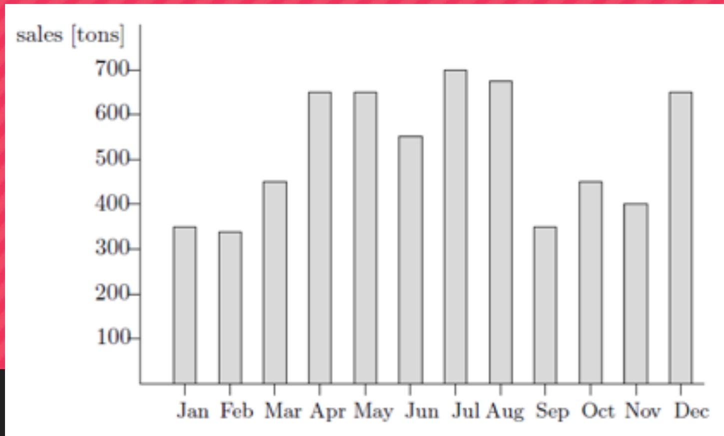
$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & x_{oa} + x_{ob} + x_{oc} \\
\text{subject to} & -3 \le x_{oa} \le 3, \quad -1 \le x_{ob} \le 1, \quad -1 \le x_{oc} \le 1 \\
& -1 \le x_{ab} \le 1, \quad -1 \le x_{ad} \le 1, \quad -3 \le x_{be} \le 3 \\
& -4 \le x_{cd} \le 4, \quad -4 \le x_{ce} \le 4, \quad -4 \le x_{dn} \le 4 \\
& -1 \le x_{en} \le 1 \\
& \qquad x_{oa} = x_{ab} + x_{ad} \\
& x_{ob} + x_{ab} = x_{be} \\
& \qquad x_{oc} = x_{cd} + x_{ce} \\
& x_{ad} + x_{cd} = x_{dn} \\
& x_{be} + x_{ce} = x_{en}.
\end{array}
$$

مسئله انبار

- ذخیره و تولید متوازن‌تر
- (یخچال) هزینه ذخیره
  - ۲۰ تومان
- هزینه تغییر تولید
  - ۵۰ تومان



نیاز بازار به بستنی



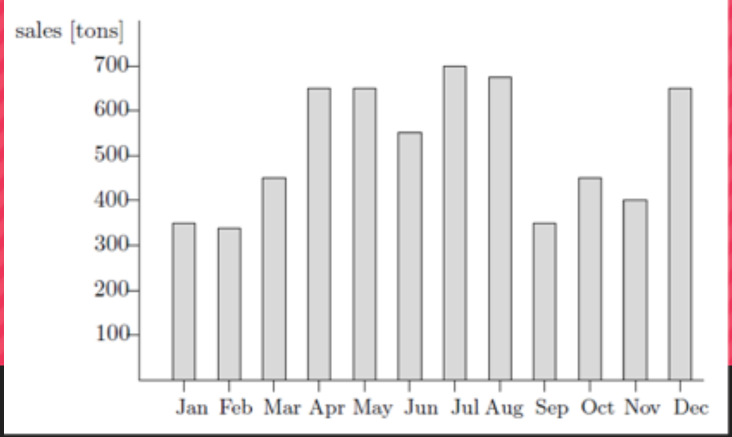
- d_i: میزان نیاز بازار در ماه i (عدد ثابت)
- x_i: تولید در ماه i
- s_i: ذخیره در انتهای ماه i
- رفع نیاز بازار:

$$x_i + s_{i-1} \geq d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

- مقدار ذخیره صحیح

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{12} = 0$$



- d_i: میزان نیاز بازار در ماه i (عدد ثابت)
- x_i: تولید در ماه i
- s_i: ذخیره در انتهای ماه i
- رفع نیاز بازار:

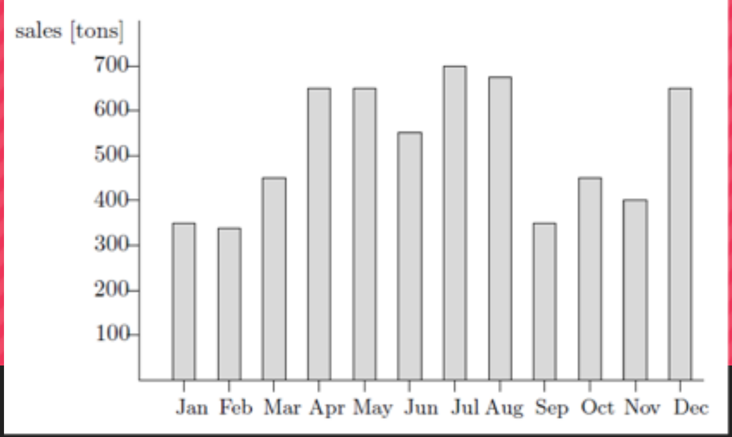
$$x_i + s_{i-1} \geq d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

- مقدار ذخیره صحیح

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{12} = 0$$

غیر خطی!



- تابع هدف: کمینه

- d_i: میزان نیاز بازار در ماه i (عدد ثابت)
- x_i: تولید در ماه i
- s_i: ذخیره در انتهای ماه i
- رفع نیاز بازار:

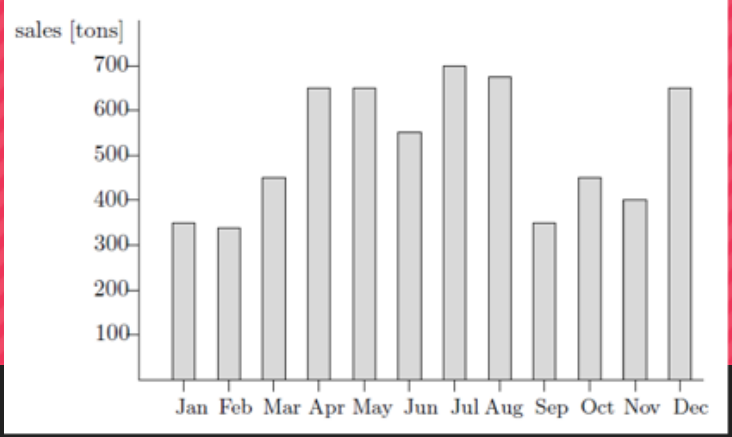
$$x_i + s_{i-1} \geq d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

- مقدار ذخیره صحیح

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{12} = 0$$

غیر خطی!



- d_i: میزان نیاز بازار در ماه i (عدد ثابت)
- x_i: تولید در ماه i
- s_i: ذخیره در انتهای ماه i
- رفع نیاز بازار:

$$x_i + s_{i-1} \geq d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

- مقدار ذخیره صحیح

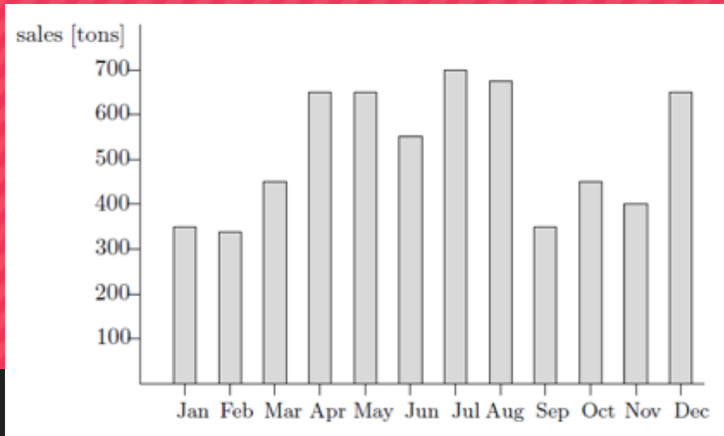
$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{12} = 0$$

- تابع هدف: کمینه

$$50 \sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}| + 20 \sum_{i=1}^{12} s_i,$$

غیر خطی!



- d_i: میزان نیاز بازار در ماه i (عدد ثابت)
- x_i: تولید در ماه i
- s_i: ذخیره در انتهای ماه i
- رفع نیاز بازار:

$$x_i + s_{i-1} \geq d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

- مقدار ذخیره صحیح

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 12.$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{12} = 0$$

- تابع هدف: کمینه

$$50 \sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}| + 20 \sum_{i=1}^{12} s_i,$$

$$x_0 = 0$$

غیر خطی!

تکنیک برخورد با قدر مطلق

$$|x_i - x_{i-1}|$$

y_i میزان افزایش

z_i میزان کاهش

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$$

$$|x_i - x_{i-1}| = y_i + z_i$$

تکنیک برخورد با قدر مطلق

$$|x_i - x_{i-1}|$$

میزان افزایش y_i

میزان کاهش z_i

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$$

$$|x_i - x_{i-1}| = y_i + z_i$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & 50\sum_{i=1}^{12} y_i + 50\sum_{i=1}^{12} z_i + 20\sum_{i=1}^{12} s_i \\
\text{subject to} & x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_0 = 0 \\
& s_0 = 0 \\
& s_{12} = 0 \\
& x_i, s_i, y_i, z_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12.
\end{array}$$

تکنیک برخورد با قدر مطلق

y_i میزان افزایش

$|x_i - x_{i-1}|$

z_i میزان کاهش

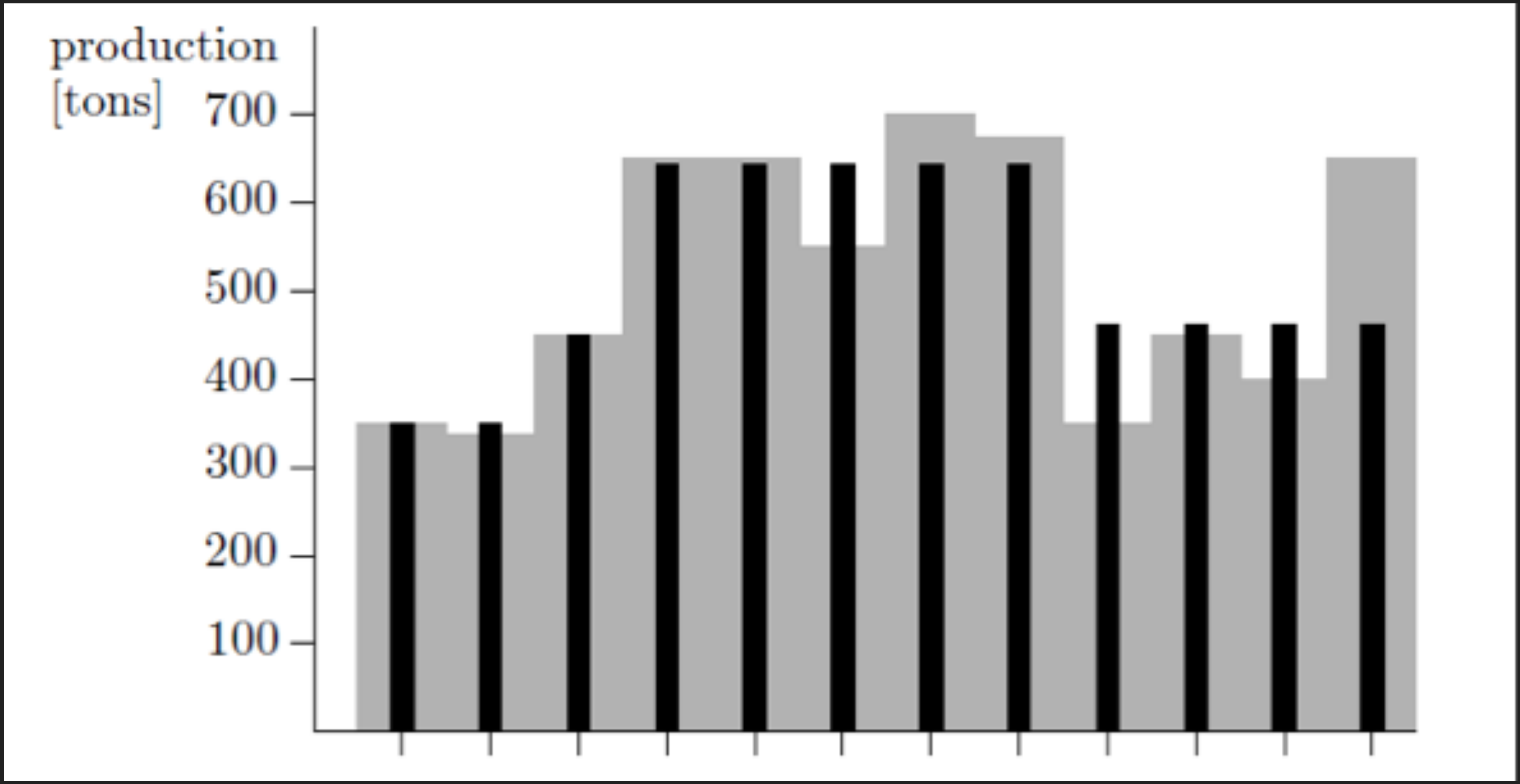
اینجا خوب است!

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & 50\sum_{i=1}^{12} y_i + 50\sum_{i=1}^{12} z_i + 20\sum_{i=1}^{12} s_i \\
\text{subject to} & x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_0 = 0 \\
& s_0 = 0 \\
& s_{12} = 0 \\
& x_i, s_i, y_i, z_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12.
\end{array}
$$

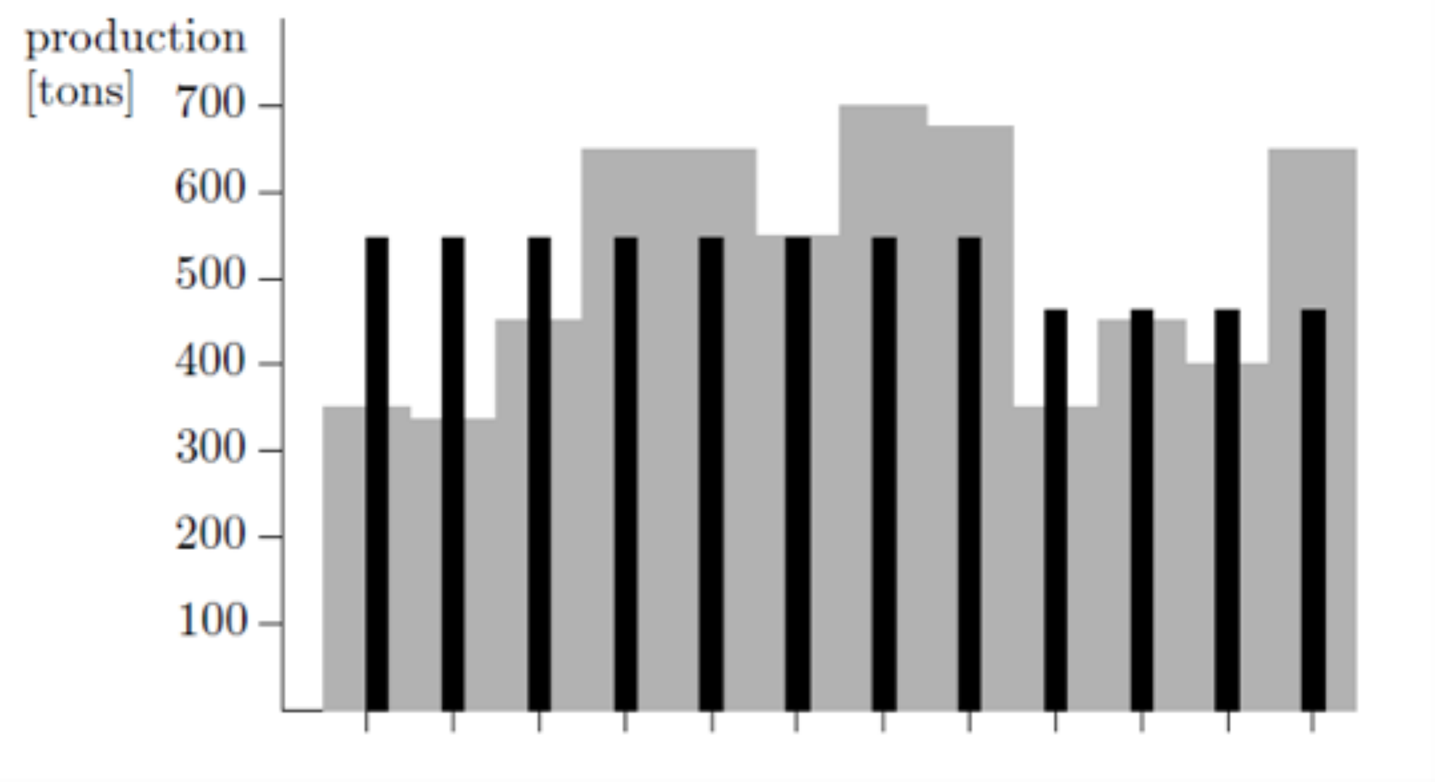
$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$$

$$|x_i - x_{i-1}| = y_i + z_i$$

جواب بهینه



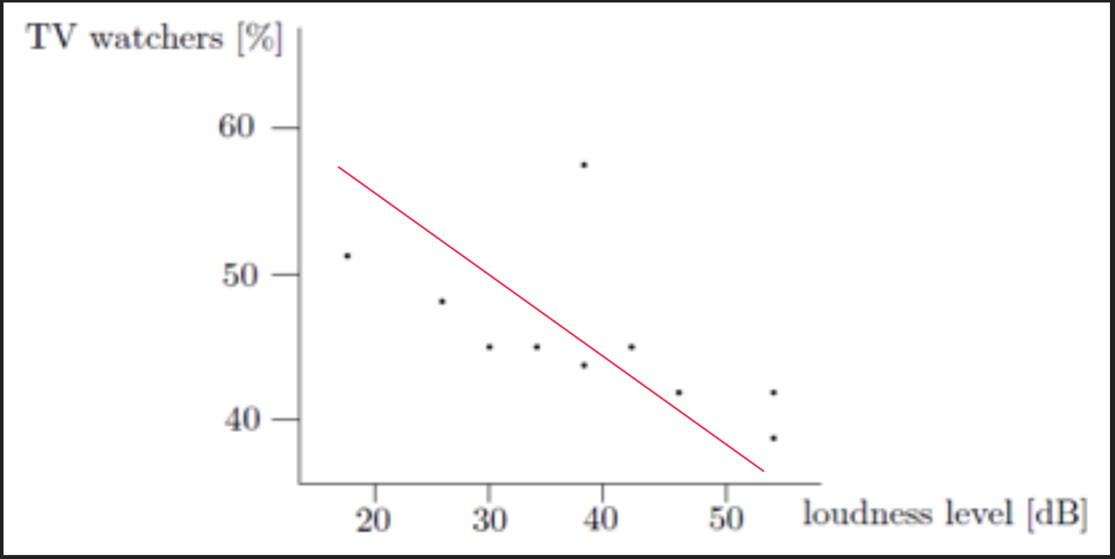
جواب بهینه برای یخچال مجانی



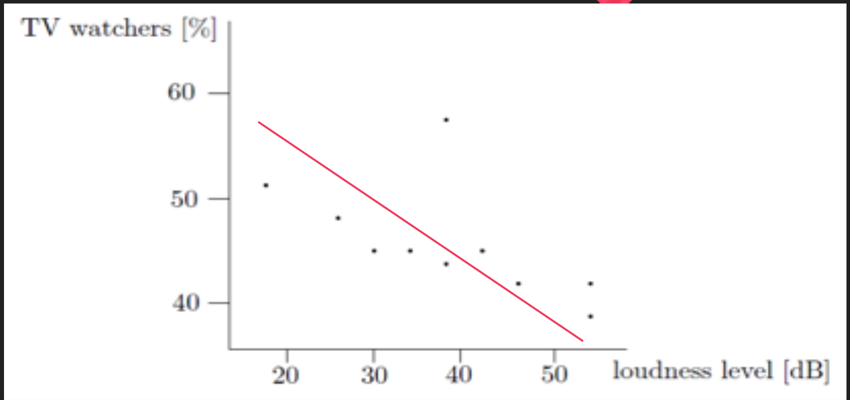
برازش خط

- یافتن خط با :هدف
کمترین فاصله با نقاط

$$\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|.$$

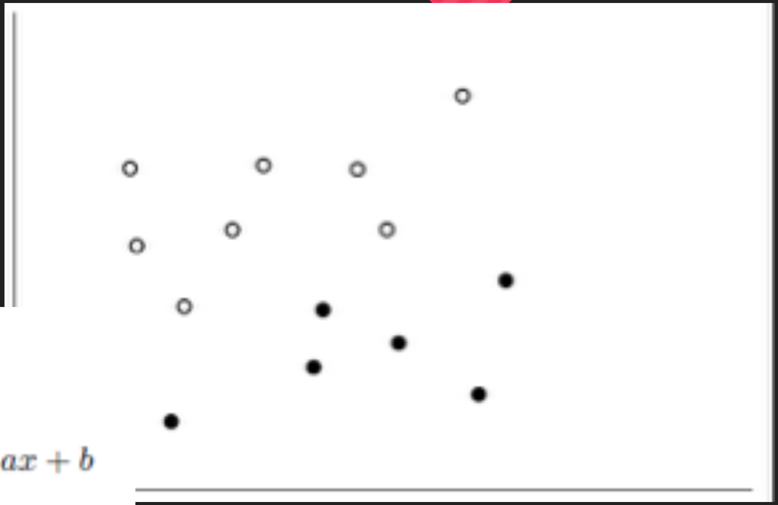


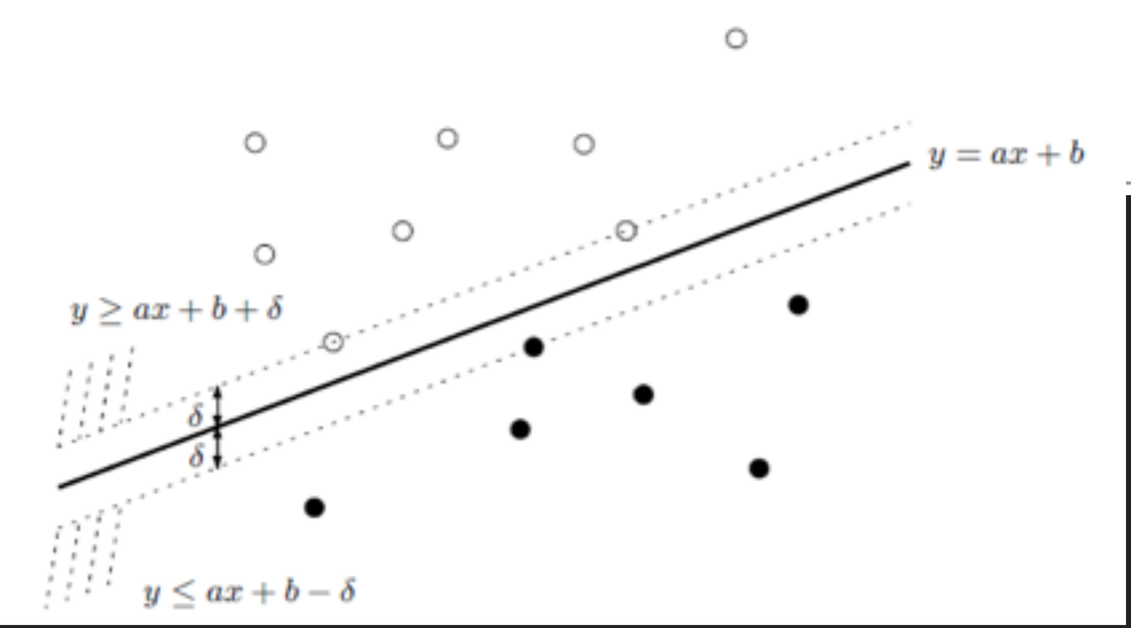
برازش نقاط – برنامه‌ریزی خطی



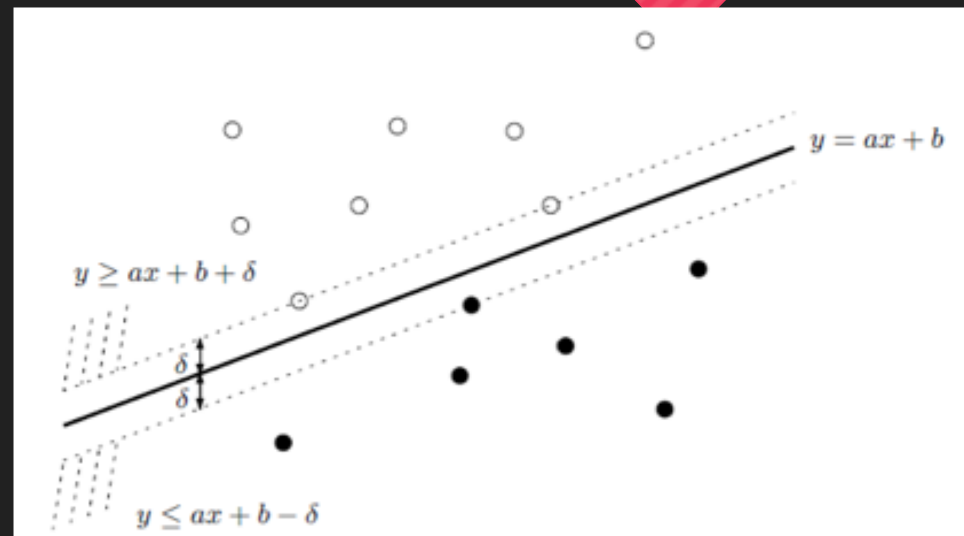
$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimize} & e_1 + e_2 + \cdots + e_n & \\
\text{subject to} & e_i \geq ax_i + b - y_i & \text{for } i = 1, 2, \ldots, n \\
& e_i \geq -(ax_i + b - y_i) & \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

جداسازی نقاط



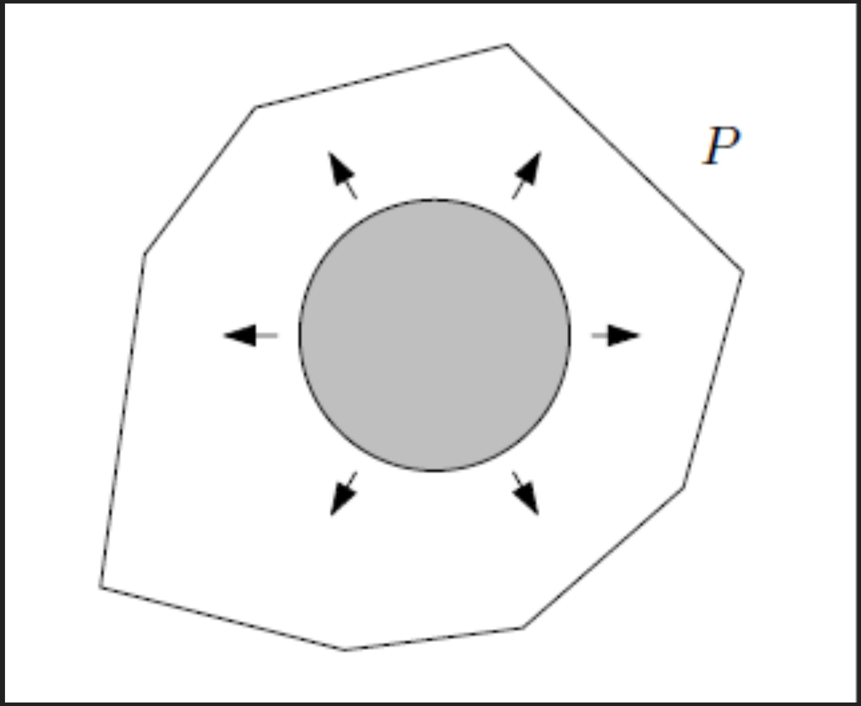


جداسازی نقاط – برنامه‌ریزی خطی



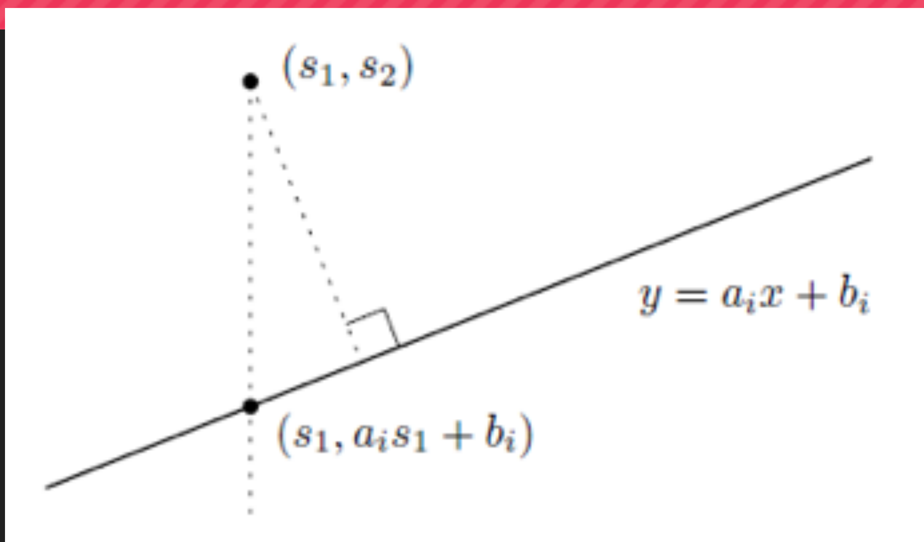
$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \delta & \\
\text{subject to} & y(\mathbf{p}_i) \geq ax(\mathbf{p}_i) + b + \delta & \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \\
 & y(\mathbf{q}_j) \leq ax(\mathbf{q}_j) + b - \delta & \text{for } j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

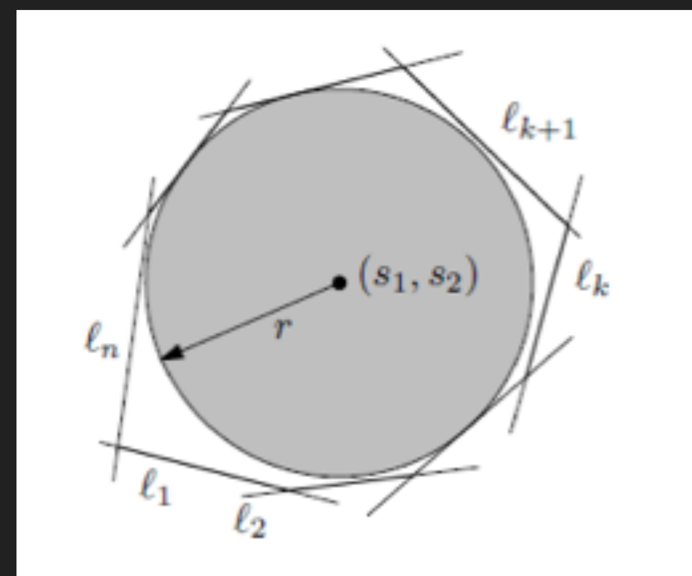
بزرگترین دایره در یک چندوجهی محدب



بزگترین دایره محاط

- خطهای بالا و خطهای پایین

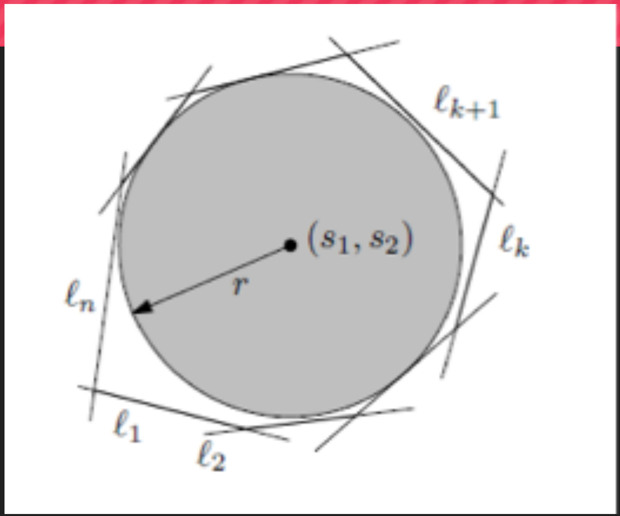




فاصله تا خط i ام

$$\frac{s_2 - a_i s_1 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}}.$$

بزرگترین دایره محاط - برنامه‌ریزی خطی



$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad r \\
&\text{subject to} \quad \frac{s_2 - a_i s_1 - b_i}{\sqrt{a_i^2+1}} \geq \ \ r \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, k \\
&\qquad\qquad\quad \frac{s_2 - a_i s_1 - b_i}{\sqrt{a_i^2+1}} \leq -r \quad \text{for } i = k+1, k+2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

مسئله برش کاغذ

- کاغذهای ۳ متری
- سفارش:

- 97 rolls of width 135 cm,
- 610 rolls of width 108 cm,
- 395 rolls of width 93 cm, and
- 211 rolls of width 42 cm.

- هدف:
- مصرف کمترین تعداد کاغذ

برش کاغذ – برنامه‌ریزی خطی

برش‌های مختلف

P1:	2×135	P7:	$108 + 93 + 2 \times 42$
P2:	$135 + 108 + 42$	P8:	$108 + 4 \times 42$
P3:	$135 + 93 + 42$	P9:	3×93
P4:	$135 + 3 \times 42$	P10:	$2 \times 93 + 2 \times 42$
P5:	$2 \times 108 + 2 \times 42$	P11:	$93 + 4 \times 42$
P6:	$108 + 2 \times 93$	P12:	7×42

- 97 rolls of width 135 cm,
- 610 rolls of width 108 cm,
- 395 rolls of width 93 cm, and
- 211 rolls of width 42 cm.

برش کاغذ - برنامه‌ریزی خطی

برش‌های مختلف

P1:	2×135	P7:	$108 + 93 + 2 \times 42$
P2:	$135 + 108 + 42$	P8:	$108 + 4 \times 42$
P3:	$135 + 93 + 42$	P9:	3×93
P4:	$135 + 3 \times 42$	P10:	$2 \times 93 + 2 \times 42$
P5:	$2 \times 108 + 2 \times 42$	P11:	$93 + 4 \times 42$
P6:	$108 + 2 \times 93$	P12:	7×42

$$x_3 + 2x_6 + x_7 + 3x_9 + 2x_{10} + x_{11} \geq 395.$$

- 97 rolls of width 135 cm,
- 610 rolls of width 108 cm,
- 395 rolls of width 93 cm, and
- 211 rolls of width 42 cm.

برش کاغذ - برنامه‌ریزی خطی

برش‌های مختلف

P1:	2×135	P7:	$108 + 93 + 2 \times 42$
P2:	$135 + 108 + 42$	P8:	$108 + 4 \times 42$
P3:	$135 + 93 + 42$	P9:	3×93
P4:	$135 + 3 \times 42$	P10:	$2 \times 93 + 2 \times 42$
P5:	$2 \times 108 + 2 \times 42$	P11:	$93 + 4 \times 42$
P6:	$108 + 2 \times 93$	P12:	7×42

$$x_3 + 2x_6 + x_7 + 3x_9 + 2x_{10} + x_{11} \geq 395.$$

- 97 rolls of width 135 cm,
- 610 rolls of width 108 cm,
- 395 rolls of width 93 cm, and
- 211 rolls of width 42 cm.

جواب بهینه

$x_1 = 48.5$ $x_5 = 206.25$ $x_6 = 197.5$

جواب غیر صحیح!

جواب بهینه

$x_1 = 48.5$ $x_5 = 206.25$ $x_6 = 197.5$

- گرد کردن

!جواب غیر صحیح

454 rolls

$x_1 = 49$, $x_5 = 207$, and $x_6 = 198$

جواب بهینه $x_1 = 48.5$ $x_5 = 206.25$ $x_6 = 197.5$

جواب غیر صحیح!

- گرد کردن

$x_1 = 49$, $x_5 = 207$, and $x_6 = 198$

454 rolls

453 rolls.

جواب بهینه

$x_1 = 48.5$ $x_5 = 206.25$ $x_6 = 197.5$

جواب غیر صحیح!

- گرد کردن

$x_1 = 49,\ x_5 = 207,$ and $x_6 = 198$ 454 rolls

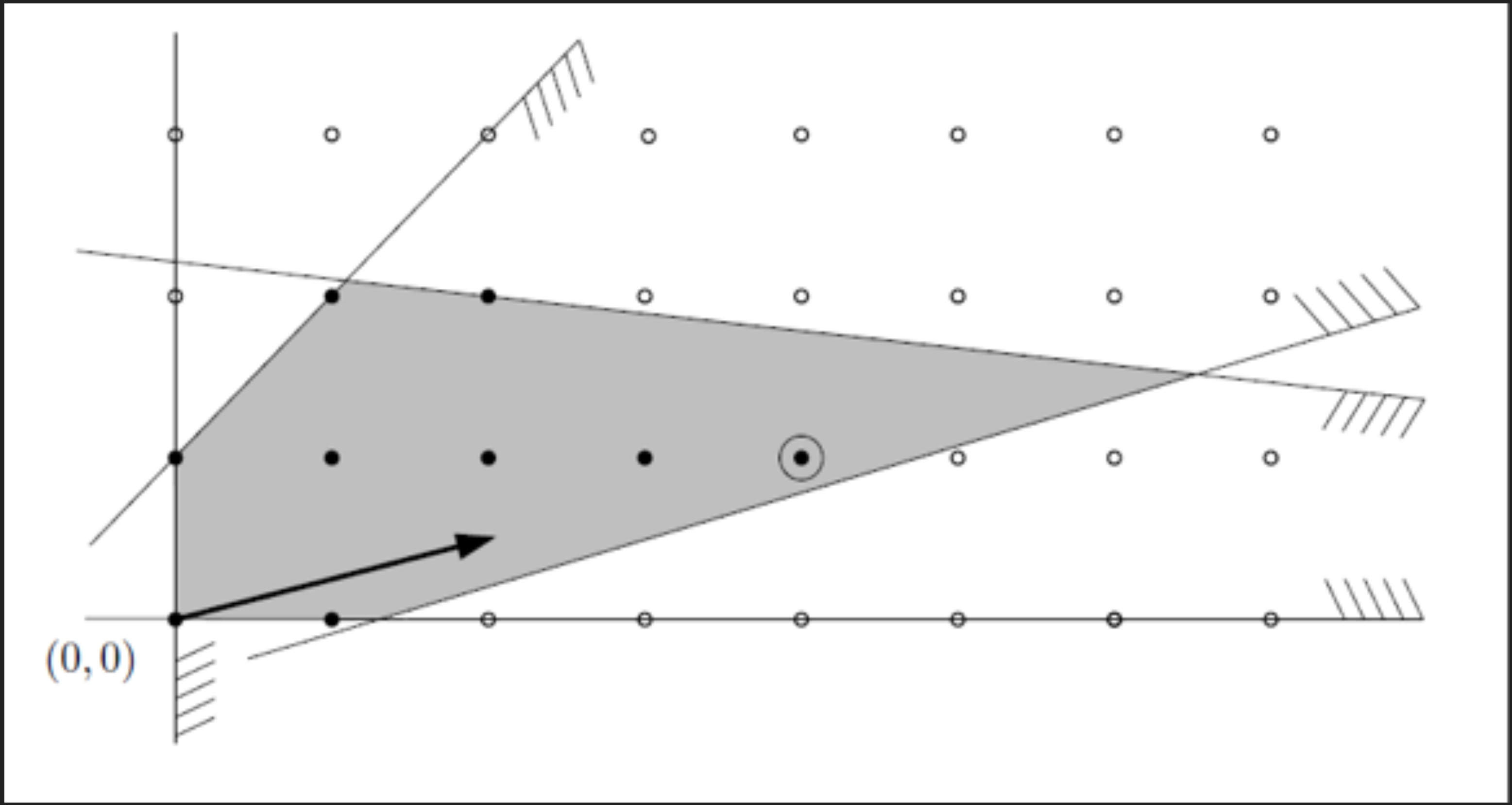
$x_1 = 49,\ x_5 = 207,\ x_6 = 196,$ and $x_9 = 1$ 453 rolls.

برنامه‌ریزی صحیح

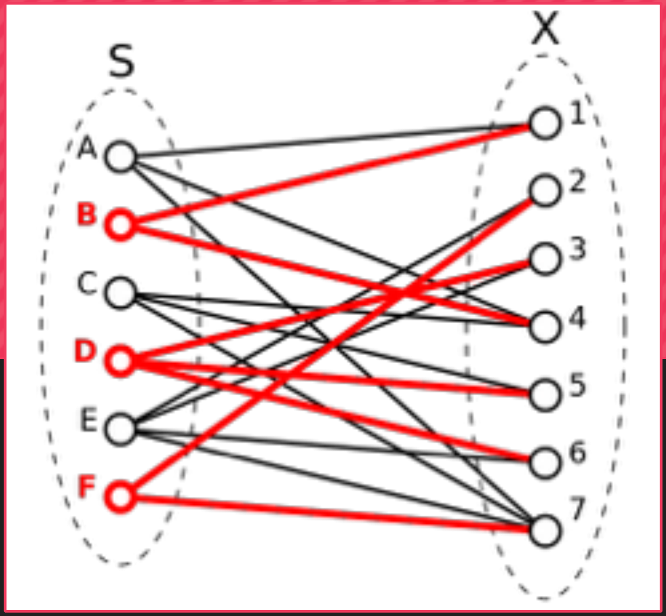
An integer program:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n. \end{array}$$

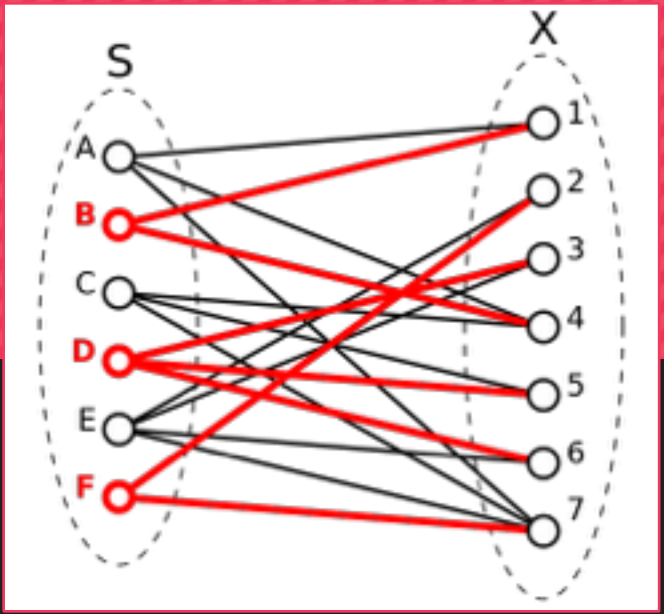
چند وجهی برنامه‌ریزی صحیح



حداقل، دقیقا، حداکثر

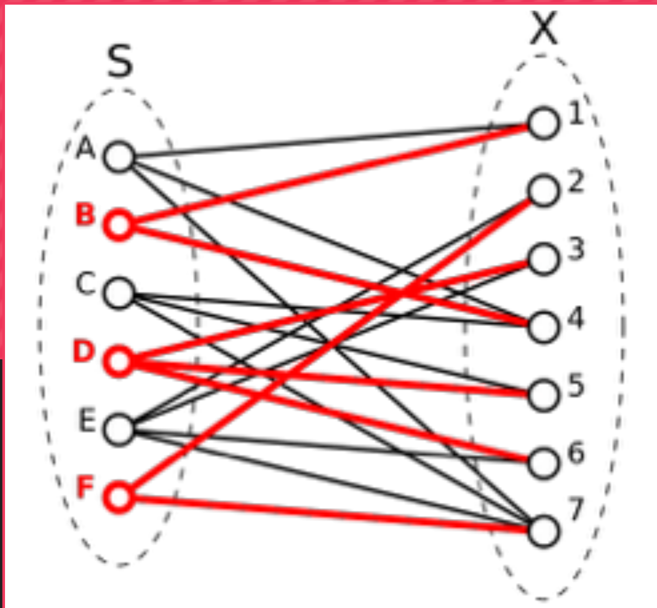


حداقل، دقیقا، حداکثر



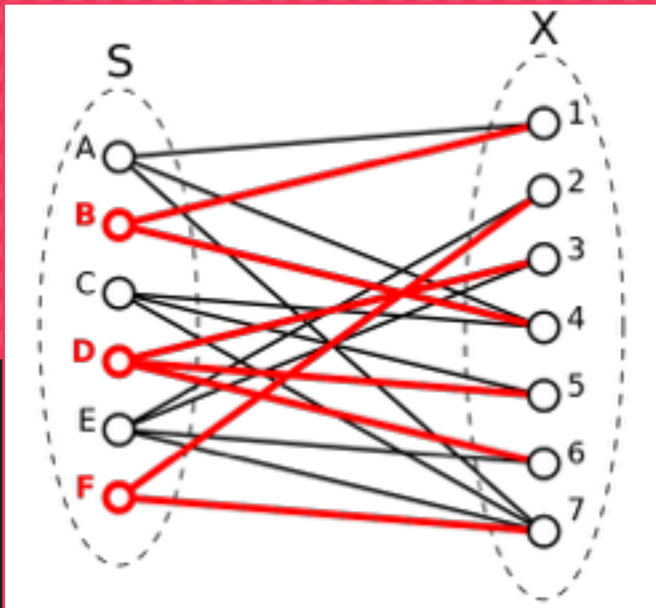
- حداقل یکی از همسایه‌ها

حداقل، دقیقا، حداکثر



- حداقل یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \sim v} x_v \geq 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$



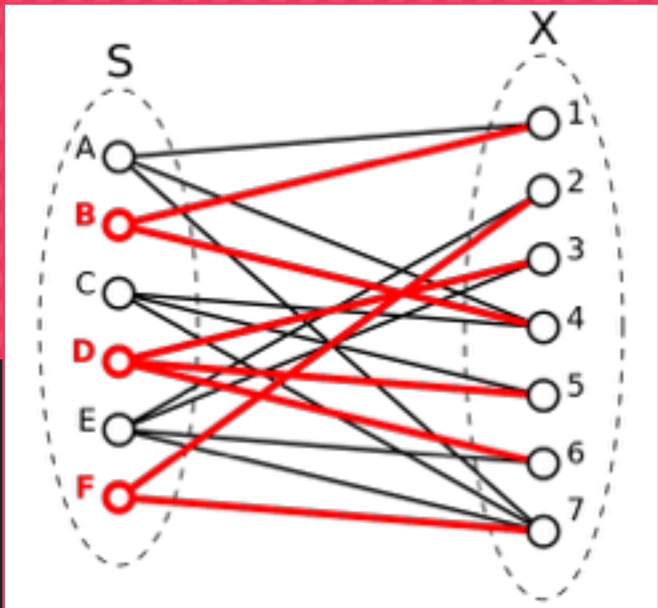
حداقل، دقیقا، حداکثر

- حداقل یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v \geq 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

- دقیقا یکی از همسایه‌ها

حداقل، دقیقا، حداکثر



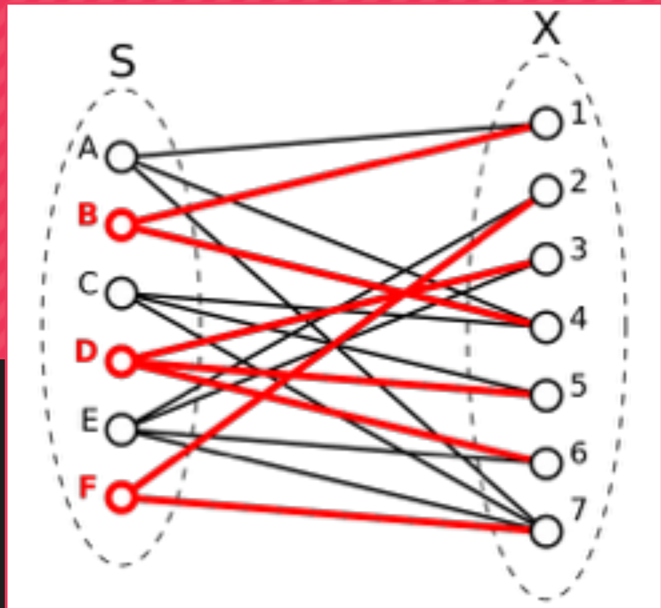
- حداقل یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v \geq 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

- دقیقا یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v = 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

حداقل، دقیقا، حداکثر



- حداقل یکی از همسایه‌ها

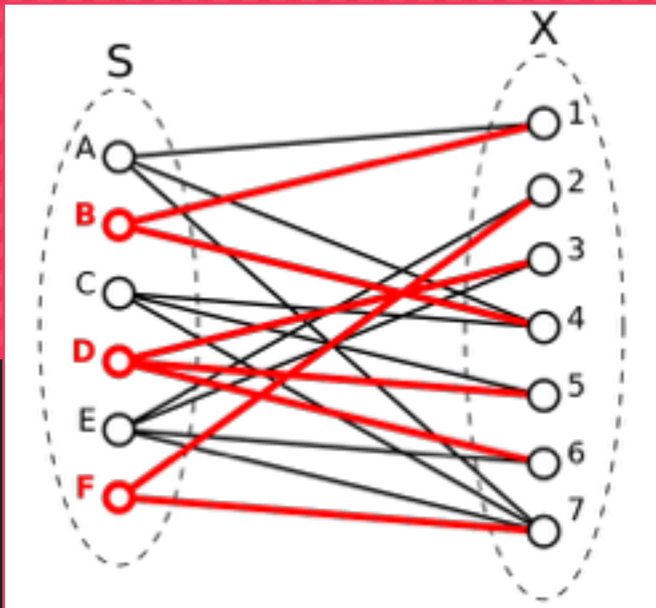
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{v \in S} x_v & \\
\text{subject to} & \sum_{v: u \multimap v} x_v \geq 1 & \text{for all } u \in X \\
 & x_v \in \{0,1\} & \text{for all } v \in S
\end{array}
$$

- دقیقا یکی از همسایه‌ها

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{v \in S} x_v & \\
\text{subject to} & \sum_{v: u \multimap v} x_v = 1 & \text{for all } u \in X \\
 & x_v \in \{0,1\} & \text{for all } v \in S
\end{array}
$$

- حداکثر یکی از همسایه‌ها

حداقل، دقیقا، حداکثر



- حداقل یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v \geq 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

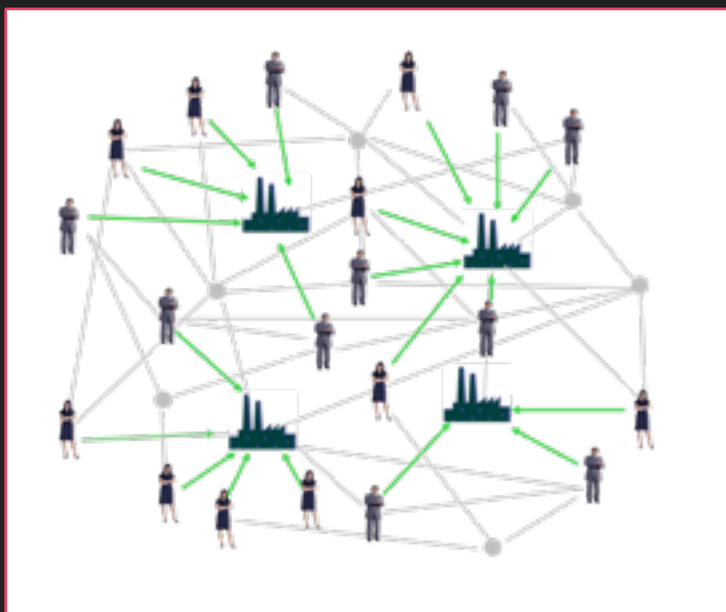
- دقیقا یکی از همسایه‌ها

minimize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v = 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

- حداکثر یکی از همسایه‌ها

maximize	$\sum_{v \in S} x_v$	
subject to	$\sum_{v: u \multimap v} x_v \leq 1$	for all $u \in X$
	$x_v \in \{0,1\}$	for all $v \in S$

مسئله مکان‌یابی تجهیزات



- n مکان بالقوه برای تجهیزات
  - هزینه احداث تجهیزات در مکان j: c_j
- m مشتری
  - هزینه ارسال مشتری i به به مکان j: d_{ij}
- هدف: کم‌ترین هزینه برای خدمت به همه

مسئله مکان‌یابی تجهیزات - برنامه‌ریزی خطی

- y_j انتخاب تجهیزات
- x_{ij} خدمات رسانی به مشتری i توسط تجهیزات j

مسئله مکان‌یابی تجهیزات – برنامه‌ریزی خطی

- y_j انتخاب تجهیزات
- x_{ij} خدمات رسانی به مشتری i توسط تجهیزات j

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, i \\
& x_{ij} \le y_j, & \forall\, i, j. \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, & \forall\, i, j.
\end{aligned}
$$

مسئله مکان‌یابی تجهیزات - برنامه‌ریزی خطی

- y_j انتخاب تجهیزات
- x_{ij} خدمات رسانی به مشتری i توسط تجهیزات j

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, i \\
& x_{ij} \le y_j, & \forall\, i, j. \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, & \forall\, i, j.
\end{array}
$$

اگر انتخاب شده، ارسال کن!

$x_{ij} \leq y_j$

مسئله مکانیابی تجهیزات
دو نوع فرمولبندی

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, i \\
& x_{ij} \le y_j, & \forall\, i, j. \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, & \forall\, i, j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, i \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m y_j, & \forall\, j \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, & \forall\, i, j.
\end{aligned}
$$

نه فقط ۰ و ۱

$x \in \{ a_1, a_2, \dots , a_m \}$

$x = \Sigma_j a_j y_j$

$\Sigma_j y_j = 1,$

$y_j \in \{0, 1\}$

«و» و «یا»

«و» و «یا»

- $(a^T x \geq b)$ و $(c^T x \geq d)$

«و» و «یا»

- ($a^T x \geq b$) و ($c^T x \geq d$)

$a^T x \geq b$

$c^T x \geq d$

«و» و «یا»

$a^T x \geq b$

$c^T x \geq d$

- $(a^T x \geq b)$ و $(c^T x \geq d)$

- $(a^T x \geq b)$ یا $(c^T x \geq d)$

«و» و «یا»

- $(a^Tx \geq b)$ و $(c^Tx \geq d)$

$$a^Tx \geq b$$
$$c^Tx \geq d$$

- $(a^Tx \geq b)$ یا $(c^Tx \geq d)$

$$a^Tx \geq b - My,$$
$$c^Tx \geq d - M(۱ - y)$$
$$y \in \{۰, ۱\}$$

«و» و «یا»

- $(a^T x \geq b)$ و $(c^T x \geq d)$

$$a^T x \geq b$$
$$c^T x \geq d$$

- $(a^T x \geq b)$ یا $(c^T x \geq d)$

$$a^T x \geq b - My,$$
$$c^T x \geq d - M(1 - y)$$
$$y \in \{0, 1\}$$

- بیشتر از ۲ تا؟

متغیرهای بولی

متغیرهای بولی

- نه: ($y_۳ = !x_۱$)

متغیرهای بولی

- نه: $(y_3 = !x_1)$
- $y_3 = 1 - x_1$

متغیرهای بولی

- نه: $(y_3 = !x_1)$
  - $y_3 = 1 - x_1$
- و: $(y_1 = x_1 \&\& x_2)$

متغیرهای بولی

- نه: ($y_۳ = !x_۱$)
  - $y_۳ = ۱ - x_۱$
- و: ($y_۱ = x_۱ \;\&\&\; x_۲$)
  - $x_۱ + x_۲ - ۱ \leq ۱$، $y_۱ \leq x_۱$، $y_۱ \leq x_۲$، $۰ \leq y_۱ \leq ۱$

متغیرهای بولی

- نه: $(y_3 = !x_1)$
  - $y_3 = 1 - x_1$
- و: $(y_1 = x_1 \&\& x_2)$
  - $x_1 + x_2 - 1 \leq 1$، $y_1 \leq x_1$، $y_1 \leq x_2$، $0 \leq y_1 \leq 1$
- یا: $(y_1 = x_1 || x_2)$

متغیرهای بولی

- نه: $(y_3 = !x_1)$
  - $y_3 = 1 - x_1$
- و: $(y_1 = x_1 \&\& x_2)$
  - $x_1 + x_2 - 1 \leq 1$، $y_1 \leq x_1$، $y_1 \leq x_2$، $0 \leq y_1 \leq 1$
- یا: $(y_1 = x_1 || x_2)$
  - $y_2 \leq x_1 + x_2$، $y_2 \geq x_1$، $y_2 \geq x_2$، $0 \leq y_2 \leq 1$

برنامه‌ریزی صحیح NP–سخت است

برنامه‌ریزی صحیح NP–سخت است

- کاهش (تقلیل) یک مسئله NP–تمام:
  - مسئله SAT

برنامه‌ریزی صحیح NP-سخت است

- کاهش (تقلیل) یک مسئله NP-تمام:
  - مسئله SAT

- آیا NP-تمام است؟
  - مسئله تصمیم

برنامه‌ریزی صحیح NP-سخت است

- کاهش (تقلیل) یک مسئله NP-تمام:
  - مسئله SAT

مسئله SAT:

$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_1$

minimize 1

subject to:

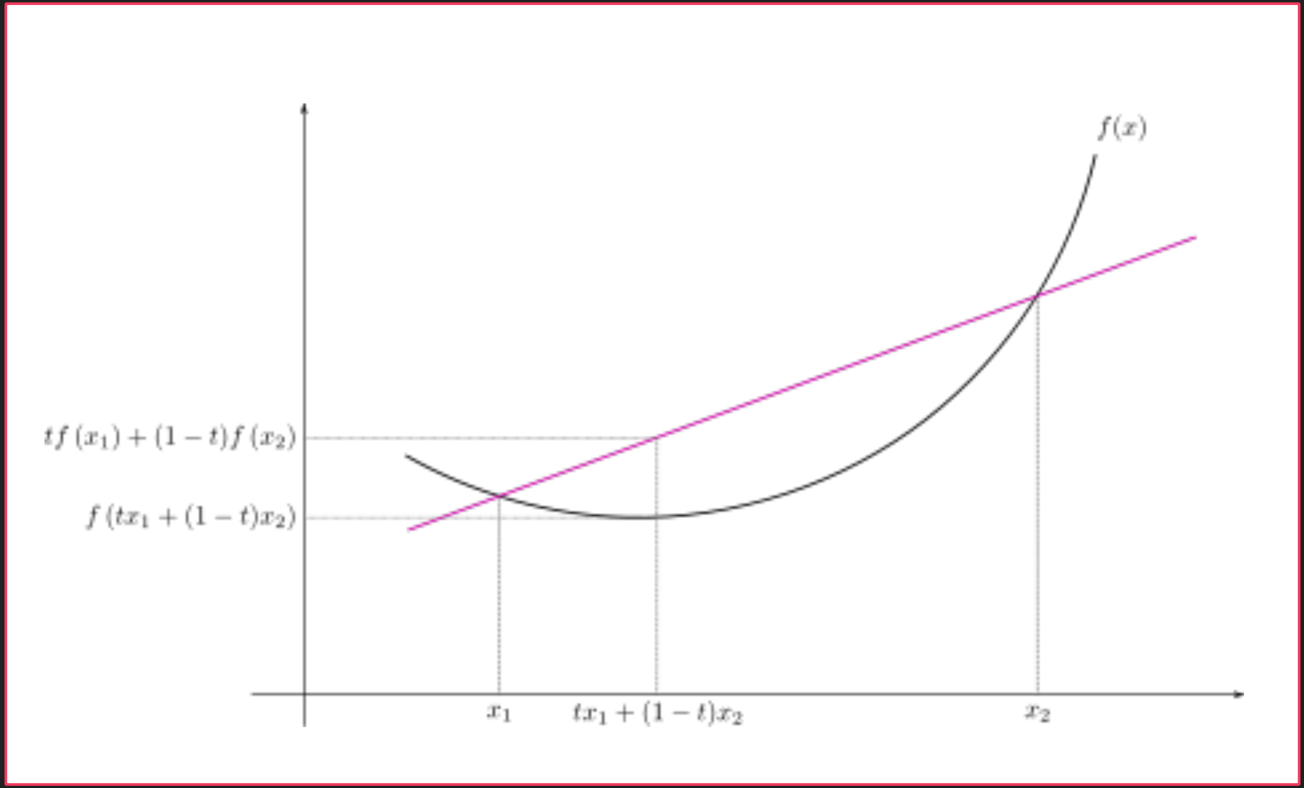
$x_1 + (1-x_2) \geq 1$

$1-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

$1-x_1 \geq 1$

- آیا NP-تمام است؟
  - مسئله تصمیم

تابع محدب، محدب قطعه–قطعه خطی



تابع محدب قطعه–قطعه خطی

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \max_{i=1,\ldots,m} (\mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i) \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

تابع محدب قطعه-قطعه خطی

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,m} (\mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i) \\
\text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimize} & z & & \\
\text{subject to} & z & \geq & \mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i, \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b},
\end{array}
$$

قدر مطلق

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i z_i & & & \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} & \\ & x_i & \leq & z_i, & i = 1, \ldots, n, \\ & -x_i & \leq & z_i, & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

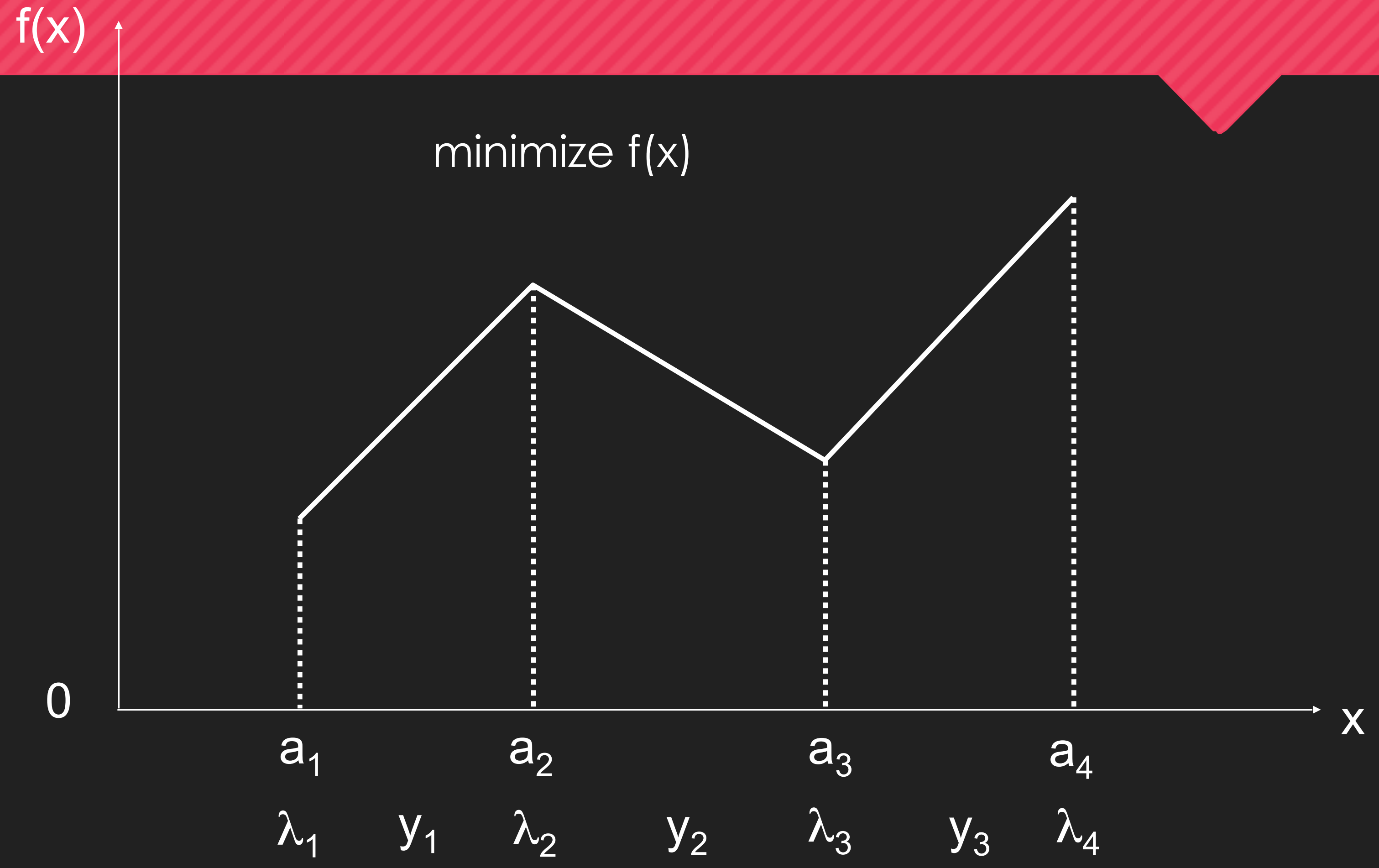
قدر مطلق، روش دوم

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

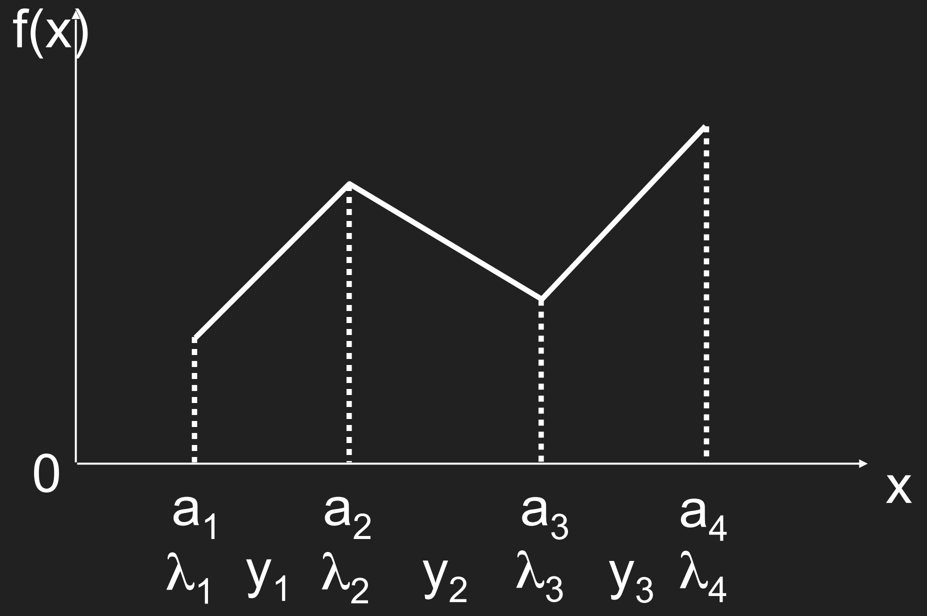
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i^+ + x_i^-) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x}^+ - \mathbf{A}\mathbf{x}^- \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

where $\mathbf{x}^+ = (x_1^+, \ldots, x_n^+)$ and $\mathbf{x}^- = (x_1^-, \ldots, x_n^-)$.

تابع قطعه-قطعه خطی (غیر محدب)



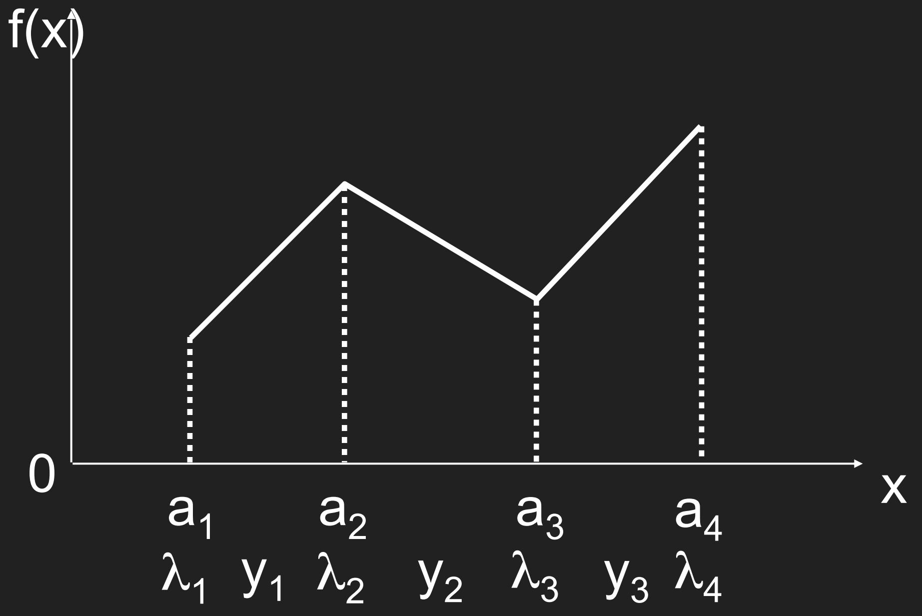
تابع قطعه-قطعه خطی (غیر محدب)



تابع قطعه-قطعه خطی (غیر محدب)

$x = \Sigma_{i = 1, \ldots, k} \; \lambda_i \, a_i$

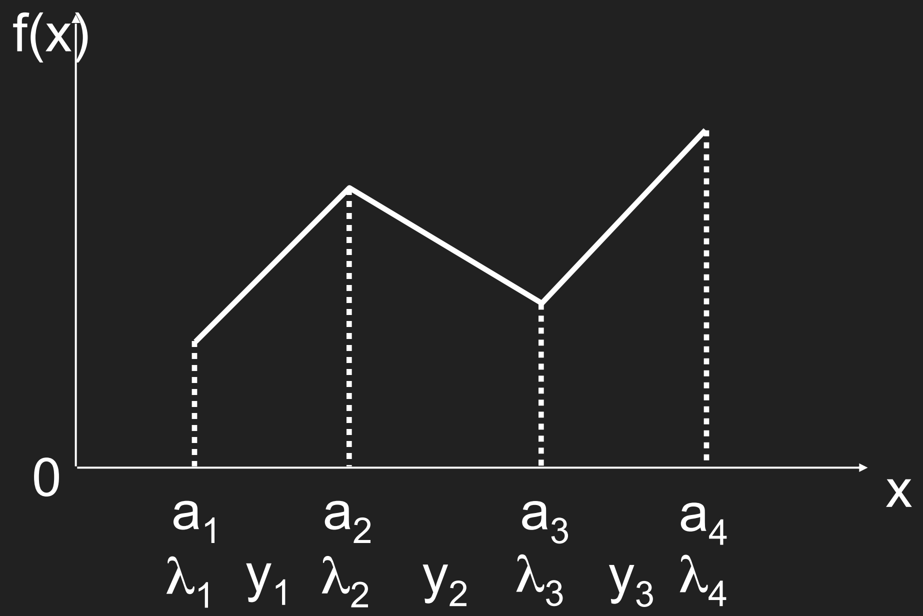
$f(x) = \Sigma_{i = 1, \ldots, k} \; \lambda_i \, f(a_i)$



تابع قطعه-قطعه خطی (غیر محدب)

$x = \Sigma_{i = 1, \dots, k} \lambda_i a_i$

$f(x) = \Sigma_{i = 1, \dots, k} \lambda_i f(a_i)$



minimize $\quad \Sigma_i \lambda_i f(a_i)$

subject to $\quad \Sigma_i \lambda_i = ۱ ,$

$\lambda_۱ \leq y_۱ ,$

$\lambda_i \leq y_{i-۱} + y_i , \quad i = ۲, \dots, k$

$\lambda_k \leq y_{k-۱} ,$

$\Sigma_i y_i = ۱ ,$

$\lambda_i \geq ۰ ,$

$y_i \in \{۰, ۱\}$

مسئله کوله پشتی مربعی

ضرب

maximize

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} x_i x_j$$

subject to $$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W,$$

$$x_j \in \{0,1\}$$ for all $$1 \leq j \leq n$$

مسئله کوله پشتی مربعی

maximize

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} x_i x_j$$

subject to $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W,$

$x_j \in \{0, 1\}$ for all $1 \leq j \leq n$

ضرب

$y \leq x_1$

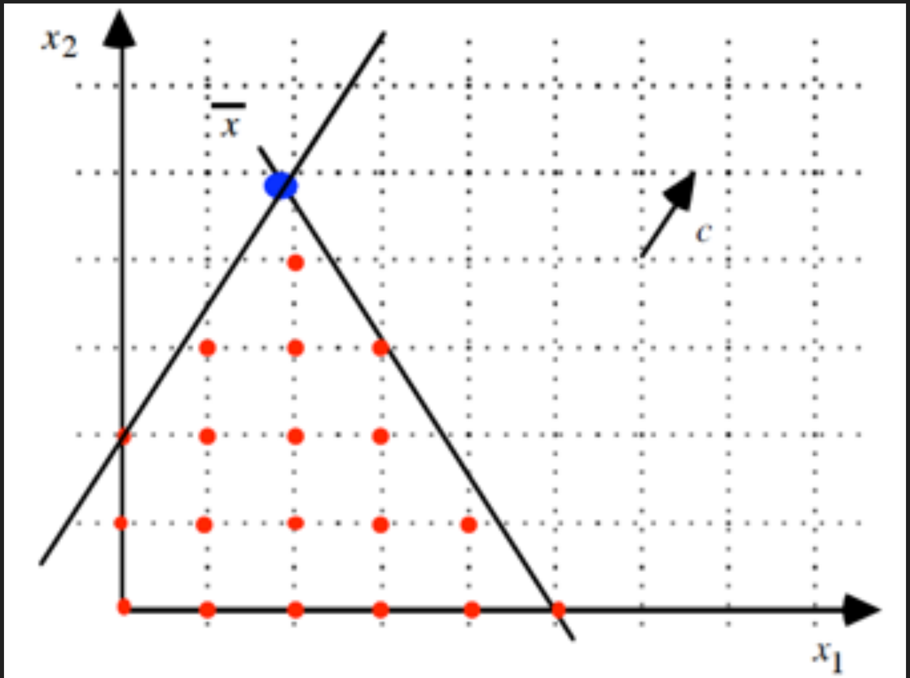
$y \leq x_2$

$y \geq x_1 + x_2 - 1$

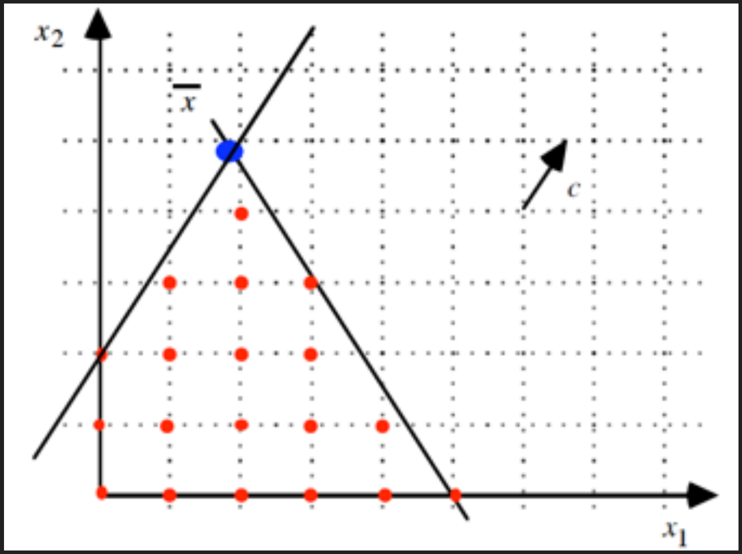
y binary

انتخاب فرمول‌بندی مناسب

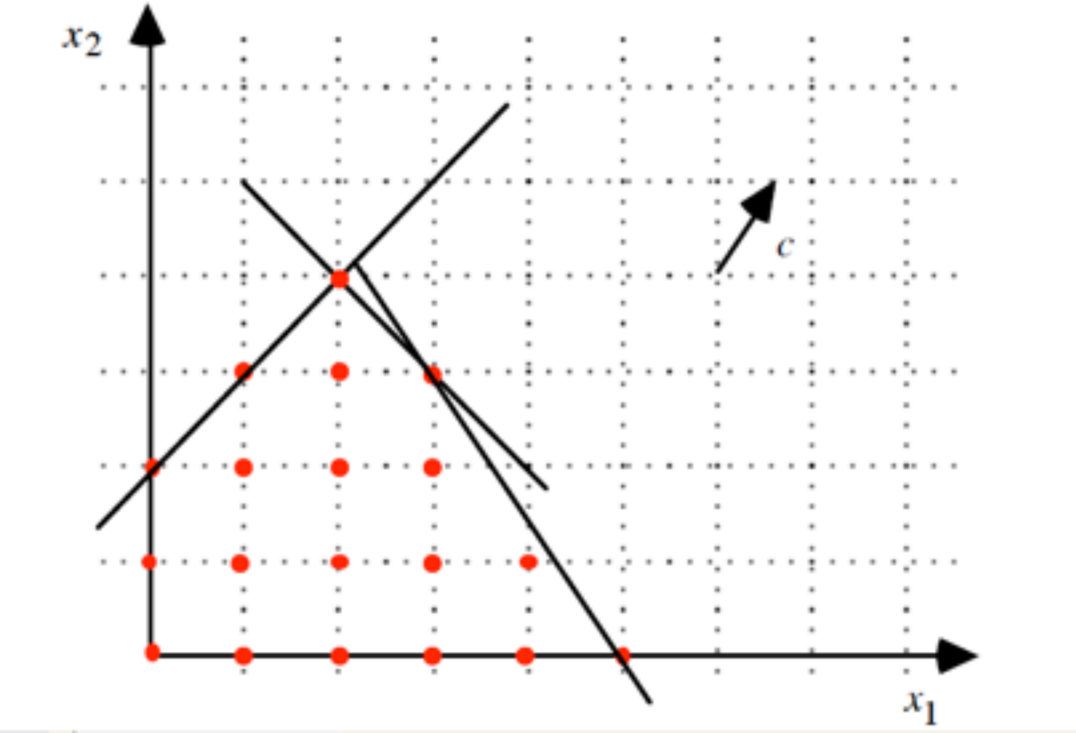
$$\begin{array}{llll} \max & x_1 + & 0.64\, x_2 & \\ & 50x_1 + & 31x_2 & \le 250 \\ & 3x_1 - & 2\, x_2 & \ge -4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ integers.} & & \end{array}$$



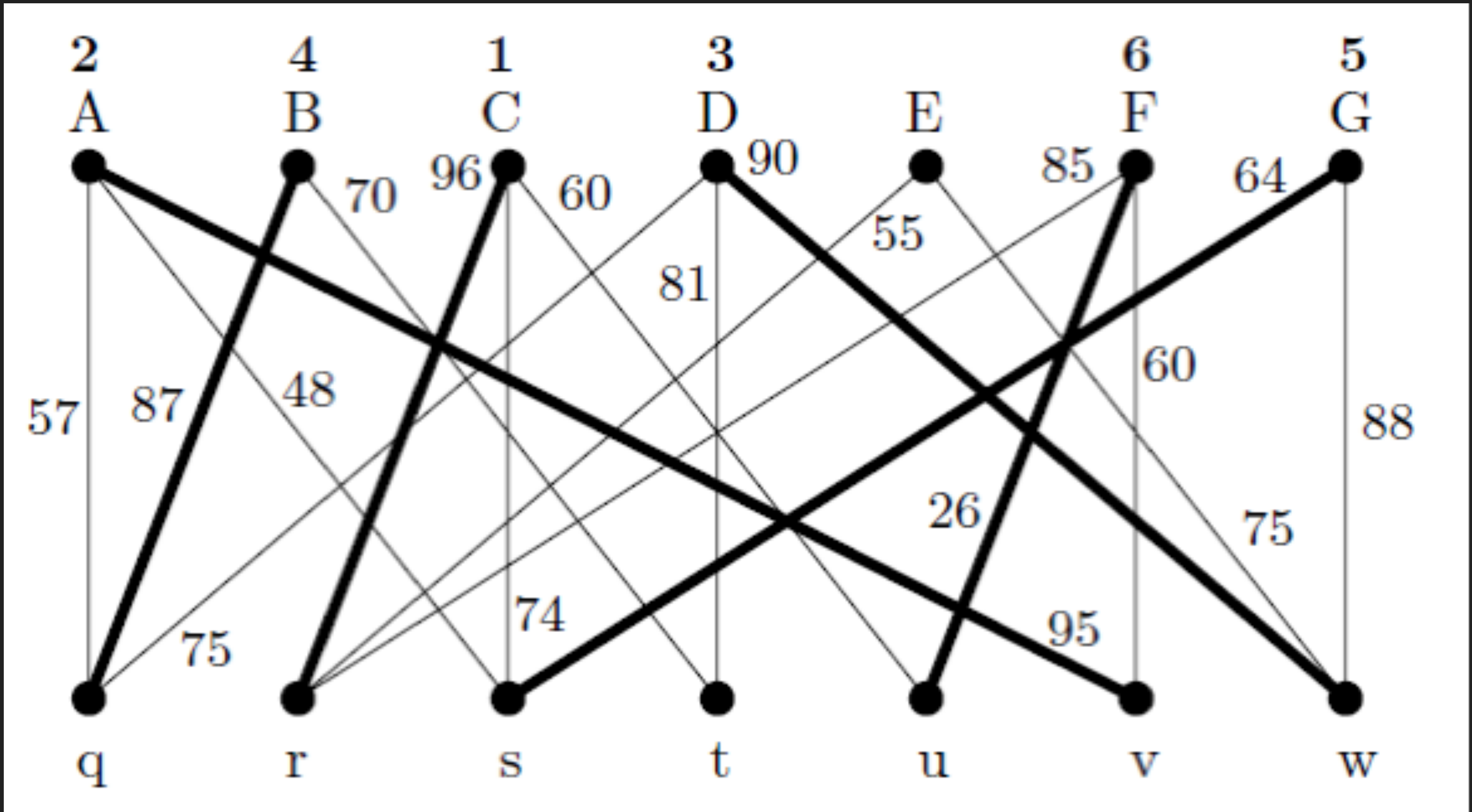
$$\begin{array}{llcll} \max & x_1 + & 0.64\, x_2 & & \\ & 50x_1 + & 31x_2 & \le & 250 \\ & 3x_1 - & 2\, x_2 & \ge & -4 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \ge 0 \text{ integers.}} \end{array}$$



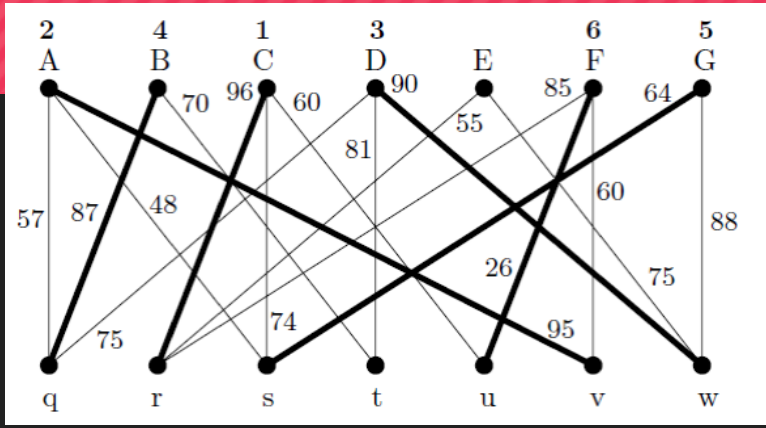
$$\begin{array}{llcll} \max & x_1 + & 0.64\, x_2 & & \\ & -x_1 + & x_2 & \le & 2 \\ & x_1 + & x_2 & \le & 6 \\ & 3x_1 + & 2\, x_2 & \le & 15 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \ge 0 \text{ integers.}} \end{array}$$



تطابق کامل بیشینه وزن‌دار



برنامه‌ریزی صحیح - تطابق کامل بیشینه وزن‌دار



maximize $\sum_{e\in E} w_e x_e$

subject to $\sum_{e\in E:v\in e} x_e = 1$ for each vertex $v \in V$, and

$x_e \in \{0,1\}$ for each edge $e \in E$.

Maximize $\sum_{e\in E} w_e x_e$

subject to $\sum_{e\in E:v\in e} x_e = 1$ for each vertex $v \in V$, and

$0 \le x_e \le 1$ for each edge $e \in E$.

رابطه IP و LP

- جواب LP بهتر از IP است.
- اگر LP جواب نداشته باشد
- اگر جواب داشت ...

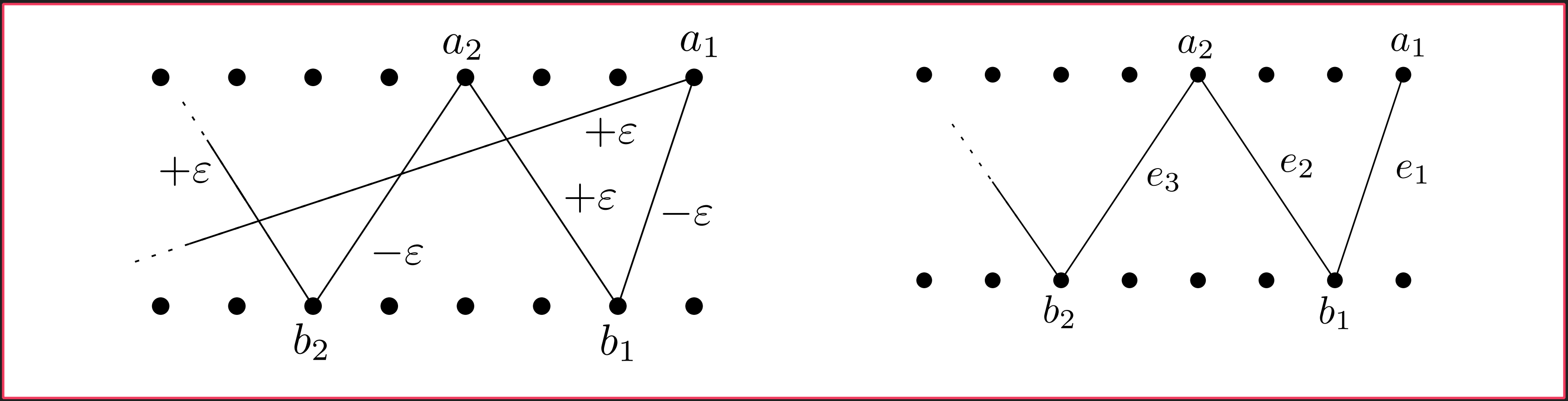
$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \sum_{e\in E} w_e x_e \\
\text{subject to} & \sum_{e\in E: v\in e} x_e = 1 \text{ for each vertex } v \in V, \text{ and} \\
 & x_e \in \{0,1\} \text{ for each edge } e \in E.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \sum_{e\in E} w_e x_e \\
\text{subject to} & \sum_{e\in E: v\in e} x_e = 1 \text{ for each vertex } v \in V, \text{ and} \\
 & 0 \le x_e \le 1 \text{ for each edge } e \in E.
\end{array}
$$

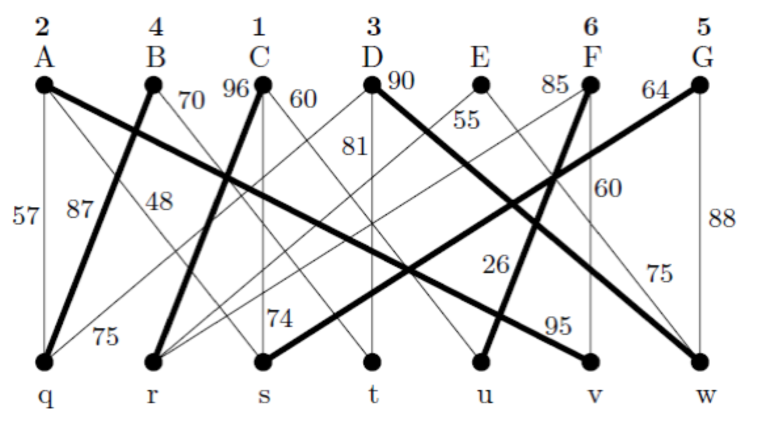
اثبات: اگر جواب داشت، یک جواب بهینه صحیح هست

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{e\in E} w_e x_e \\ \text{subject to} & \sum_{e\in E: v\in e} x_e = 1 \text{ for each vertex } v \in V, \text{ and} \\ & 0 \le x_e \le 1 \text{ for each edge } e \in E. \end{array}$$

- جواب با بیشترین متغیر صحیح



الگوریتم بر اساس این قضیه؟



مجموعه مستقل بیشینه

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \sum_{v\in V} x_v & \\
\text{subject to} & x_u + x_v \le 1 & \text{for each edge } \{u,v\}\in E, \text{ and} \\
 & x_v \in \{0,1\} & \text{for all } v\in V.
\end{array}
$$

- فاصله جواب بهینه و
- گراف کامل: |V|/۲

J. Håstad: Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$, *Acta Mathematica* 182(1999) 105–142,

با تشکر

- با تشکر

- ادامه
  - ... آشنایی با چندوجهی‌ها