دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

مثال‌هایی از برنامه‌ریزی خطی

جلسه دوم

نگارنده: رضا باقری

در این جلسه مقدمه‌ی برنامه‌ریزی خطی و درواقع مقدمه‌ی کتاب [JB07] را می‌گوییم.

۱ مقدمه‌ی برنامه‌ریزی خطی

در برنامه‌ریزی خطی می‌خواهیم تابعی موسوم به **تابع هدف** (مثلاً سود کارخانه) را روی همه‌ی بردارهای ممکن (بردارهایی با مؤلفه‌های همچون میزان تولید و...) بیشینه کنیم به‌طوری‌که تعدادی **قید** [۱] برقرار باشند. در برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف باید نسبت به متغیرها خطی باشد؛ همچنین قیود نیز باید به شکل عبارتی خطی بزرگ‌ترمساوی یک عدد باشند. به عبارت دقیق‌تر قیود باید آفین باشند؛ البته ممکن است در این درس با اغماض به جای قیود آفین از اصطلاح قیود خطی استفاده کنیم. یک نمونه برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به این شکل باشد:

---
[۱] Constraint

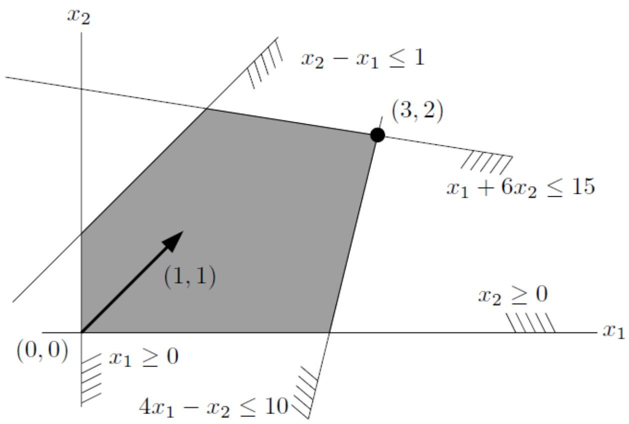
مثال ۱.

$$
\begin{aligned}
&\text{از میان همه‌ی بردارهای}\ (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ \\
\text{بیشینه کن}\quad & x_۱ + x_۲ \\
\text{که}\quad & x_۱ \geq ۰ \\
& x_۲ \geq ۰ \\
& x_۲ - x_۱ \leq ۱ \\
& x_۱ + ۶x_۲ \leq ۱۵ \\
& ۴x_۱ - x_۲ \leq ۱۰
\end{aligned}
$$

۱.۱ نمایش جبری و نمایش هندسی

اگر برنامه‌ریزی خطی ما برحسب اتفاق تنها دو متغیر داشته باشد می‌توانیم آن را بر صفحه‌ای دوبعدی ترسیم نموده و اطلاعات بسیاری از مسئله‌مان را به کمک ترسیم نمایان کنیم.

در ادامه مثال ۱، محورهای مختصات را $x_۱$ و $x_۲$ در نظر می‌گیریم و لذا هر نقطه در صفحه بیانگر یک مقدار برای زوج $(x_۱, x_۲)$ است. هر یک از قیود نیز به یک نیم‌صفحه تبدیل می‌شوند که بسته به عبارت قید، نقاط یک طرف این نیم‌صفحه قابل‌قبول و نقاط طرف دیگر غیرقابل‌قبول‌اند و در حیطه قید مذکور قرار نمی‌گیرند. برای مثال قید نخست $x_۱ \geq ۰$، نقاط مطلوب را به نیم‌صفحه‌ی سمت راست خط $x_۱ = ۰$ محدود می‌کند. اشتراک این نیم‌صفحه‌های به وجود آمده، مجموعه نقاطی است که در همه‌ی قیود ما صدق می‌کنند (نقاط خاکستری شکل ۱).



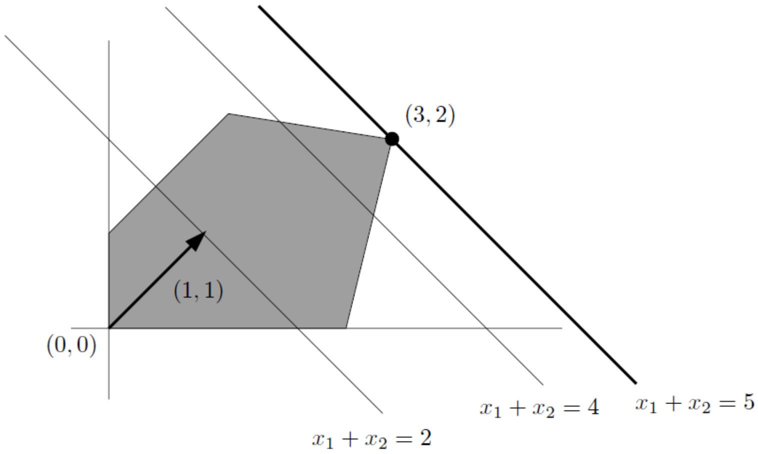
شکل ۱: نمایش هندسی مثال ۱.

تابع هدف را در این نمایش هندسی می‌توان به‌صورت یک بردار با مختصات $(x_۱, x_۲)$ نشان داد. هر چه در صفحه در راستای این بردار پیش برویم مقدار تابع هدف بیشتر می‌شود. به‌عبارت‌دیگر اگر صفحه‌ای عمود بر این بردار را در نظر بگیریم (شکل ۲) نقاط روی این صفحه همواره مقدار تابع هدفشان یکی است، اگر این صفحه را در جهت بردارمان از مبدأ دور کنیم، آخرین نقطه‌ای که این صفحه با قسمت خاکستری اشتراک دارد همان بیشینه‌ی تابع هدف است. برای کمینه کردن تابع هدف، باید این صفحه را در خلاف جهت تابع هدف حرکت دهیم. در این مثال نقطه‌ای که تابع هدف را بیشینه می‌کند نقطه $(۳, ۲)$ است.

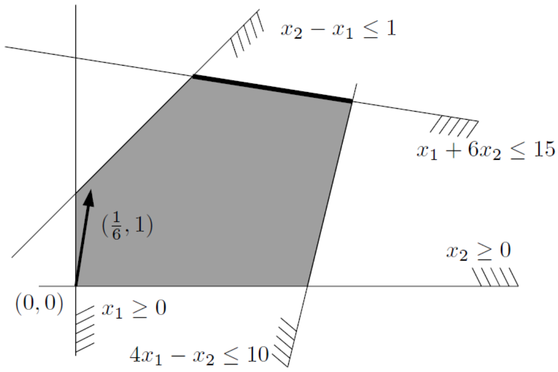
سؤال. در این برنامه‌ریزی خطی مقدار بیشینه و کمینه تابع هدف چند است؟

پاسخ: ۵ و ۰.

اگر در مثال ۱ بردار هدف متفاوت بود چه اتفاق می‌افتاد؟ فرض کنید بردار مربوط به تابع هدف $(\frac{۱}{۶}, ۱)$ باشد (شکل ۳)، مجموعه سطوح تراز خطوطی هستند که بر این بردار عمودند؛ لذا، خطوط $\frac{۱}{۶}x_۱ + x_۲ = c,\ c \in \mathbb{R}$ سطوح تراز هستند که مقدار تابع هدف روی نقاط هر یک از این سطوح، برابر c خواهند بود به‌عبارت‌دیگر با یک واحد افزودن $x_۱$ و شش واحد کاهش $x_۲$ تابع هدف ثابت می‌ماند. بنابراین تابع هدف ما $\frac{۱}{۶}x_۱ + x_۲$ خواهد بود. در این مثال جواب بهینه یک نقطه نیست؛ بلکه یک پاره‌خط از خط $x_۱ + ۶x_۲ = ۱۵$ جواب مسئله است و هر نقطه‌ای از این پاره‌خط



شکل ۲: تابع هدف درواقع سطوح ترازی را تعیین می‌کند که تابع هدف روی آن‌ها مقدار یکسانی می‌گیرد.



شکل ۳: مجموعه جواب یک پاره‌خط است.

تابع هدف ما را بیشینه می‌کند. لذا مقدار بیشینه تابع هدف $\frac{15}{6}$ است.

در بعضی از برنامه‌ریزی‌های خطی ممکن است قیود باهم اشتراکی نداشته باشند (شکل ۴). جوابی که در قیود صدق بکند را **جواب شدنی**[۲] و جوابی که در قیود صدق نکند را **جواب نشدنی**[۳] می‌نامند. همچنین، ممکن است در یک برنامه‌ریزی خطی جواب‌های شدنی بسیار باشند و تابع هدف نیز بیشینه‌ای نداشته باشد، یعنی بتوان مقدار تابع هدف را بیشتر و بیشتر کرد (شکل ۵). همان‌طور که در این مثال‌ها به‌جای توصیف جبری از توصیف هندسی عبارات برای درک بهتر مسئله استفاده کردیم در دیگر مباحث درس برنامه‌ریزی خطی نیز به فراخور مسئله از توصیف‌های مختلف برای بهتر فهمیدن مسئله کمک می‌گیریم.

۲.۱ برنامه‌ریزی خطی و جبر خطی

در حالت کلی می‌توان برنامه‌ریزی خطی با n متغیر و m قید را به‌صورت ماتریسی زیر بیان کرد:

از میان همه‌ی بردارهای $x \in \mathbb{R}^n$

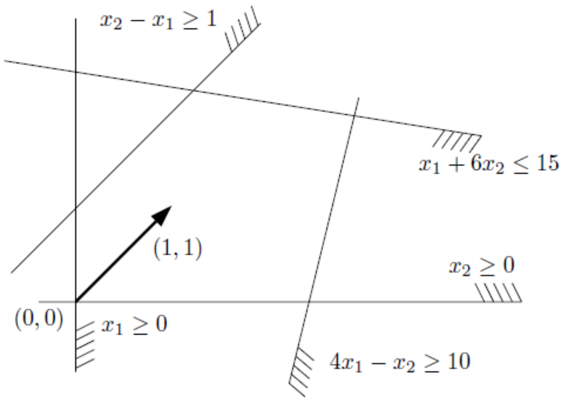
$$\text{بیشینه کن} \quad c^T x \tag{۱}$$

$$\text{که} \quad Ax \le b$$

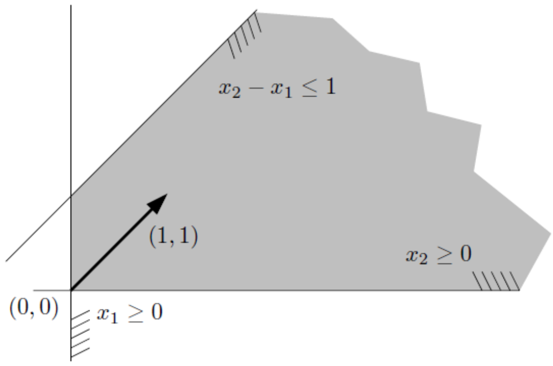
که $b \in \mathbf{R}^m$ و $c \in \mathbf{R}^n$ ، A ماتریسی است m در n.

جبر خطی و برنامه‌ریزی خطی از جهاتی بسیار به هم شبیه‌اند. در جبر خطی به حل دستگاه‌های معادلات خطی می‌پردازیم و در برنامه‌ریزی خطی با نامعادلات خطی سروکار داریم؛ در جبر خطی از روش حذف گوسی استفاده می‌کنیم و جواب، یک زیرفضای آفین خواهد بود. در برنامه‌ریزی خطی از الگوریتم سیمپلکس (Simplex) استفاده می‌کنیم و جواب، یک چندوجهی محدب خواهد بود. (جدول ۱)

[۲] feasable solution
[۳] unfeasable solution



شکل ۴: این برنامه‌ریزی خطی هیچ جواب شدنی ندارد.



شکل ۵: تابع هدف می‌تواند تا بی‌نهایت زیاد شود.

	مسئله‌ی پایه	الگوریتم	مجموعه جواب
جبر خطی	دستگاه معادلات خطی	حذف گوسی	زیرفضای آفین
برنامه‌ریزی خطی	دستگاه نامعادلات خطی	روش سیمپلکس	چندوجهی محدب

جدول ۱

۲ مثال‌هایی از برنامه‌ریزی خطی

اهمیت برنامه‌ریزی خطی ازآنجاست که مسائل برنامه‌ریزی خطی هم ازلحاظ نظری و هم در عمل در زمان سریعی قابل‌حل‌اند. در این قسمت تلاش می‌کنیم تا مسائل مختلف را با برنامه‌ریزی خطی مدل کنیم و نشان دهیم که برنامه‌ریزی خطی چقدر می‌تواند قدرتمند باشد.

۱.۲ برنامه‌ی غذایی

می‌خواهیم محتویات ظرف غذای دانشجویان را با کمترین هزینه به‌گونه‌ای تعیین کنیم که مواد مغذی مثل ویتامین آ، ویتامین سی و فیبر به میزان کافی در غذایشان موجود باشد. مواد اولیه ما هویج خام، کلم سفید خام و خیارشور هستند که قیمت هر کیلوگرم از هرکدام، در جدول ۲ قابل‌مشاهده است؛ همچنین، میزان مواد مغذی هر یک از این مواد و میزان موردنیاز از هر ماده مغذی در یک بشقاب نیز در این جدول بیان شده است.

قدم اول برای مدل‌سازی، تعیین متغیرهاست. متغیرها را به‌ترتیب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ بیانگر مقدار کیلوگرمِ هویج، کلم سفید و خیارشور در نظر می‌گیریم. یعنی فضای ما سه بعد دارد. ازآنجاکه می‌خواهیم هزینه هر بشقاب را کمینه کنیم تابع هدف را هزینه‌ی هر بشقاب در نظر می‌گیریم که برحسب متغیرهای $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ به شکل زیر قابل‌تعریف است:

$$\text{تابع هدف} \quad ۰/۷۵x_۱ + ۰/۵x_۲ + ۰/۱۵x_۳$$

ضرایب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ قیمت هر کیلوگرم از ماده اولیه است که از جدول ۲ استخراج شده اند.

	هویج، خام	کلم سفید، خام	خیارشور	میزان مورد نیاز در هر بشقاب
ویتامین آ (mg/kg)	۳۵	۰/۵	۰/۵	mg ۰/۵
ویتامین سی (mg/kg)	۶۰	۳۰۰	۱۰	mg ۱۵
فیبر غذایی (g/kg)	۳۰	۲۰	۱۰	g ۴
قیمت (€/kg)	۰/۷۵	۰/۵	۰/۱۵	–

جدول ۲

قیودی را نیز باید برقرار کنیم؛ ازجمله این‌که، میزان هر یک از مواد مغذی در یک بشقاب باید از حد مشخصی بیشتر باشد. پس برای هر یک از مواد مغذی میزان آن ماده به ازای هر بشقاب را به کمک متغیرهای x_1، x_2 و x_3 محاسبه می‌کنیم و آن را از مقدار مشخصی برگرفته از ستون آخر جدول ۲ بیشترمساوی قرار می‌دهیم. همچنین، توجه کنید که x_i ها نمی‌توانند منفی باشند چون در یک بشقاب نمی‌توان از مقدار منفی ماده اولیه استفاده کرد. لذا این قید را نیز باید ذکر کنیم. نهایتاً برنامه‌ریزی خطی ما به این شکل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{کمینه کن} \quad & 0/75x_1 + 0/5x_2 + 0/15x_3 \\
\text{که} \quad & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0 \\
& 35x_1 + 0/5x_2 + 0/5x_3 \geq 0/5 \\
& 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
& 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4
\end{aligned}$$

اگر این برنامه‌ریزی خطی را حل کنیم جواب بهینه ۰/۰۷ یورو خواهد شد که مقدار بسیار مطلوبی است و برای حصول این مقدار باید در هر بشقاب ۹/۵ گرم هویج، ۳۸ گرم کلم سفید و ۲۹۰ گرم خیارشور (!) استفاده کنیم.

به‌طور تاریخی اولین مسئله واقعی برنامه‌ریزی خطی نیز در سال ۱۹۴۷ یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بوده است که ۷۷ متغیر و ۹ قید داشته و ۱۲۰ روزنفر اجرای الگوریتم حل آن به طول انجامیده است. بعدها جورج دَنتسیگ [۴] یک مسئله برنامه غذایی با تعداد زیادی متغیر برای خود طرح کرد و با کامپیوتر آن را حل کرد. اما پاسخ بهینه پیشنهاد می‌کرد که وی باید روزانه چندین لیتر سرکه بخورد! لذا قیدی اضافه کرد که این مشکل را رفع کند و دوباره الگوریتم را اجرا کرد منتها بازهم مشکلات مشابه و جواب‌های غیر واقع‌گرایانه در جواب بهینه ظاهر می‌شدند و وی ناچار شد چندین مرتبه قیود جدید بیفزاید تا به جواب مناسبی دست‌یابد.

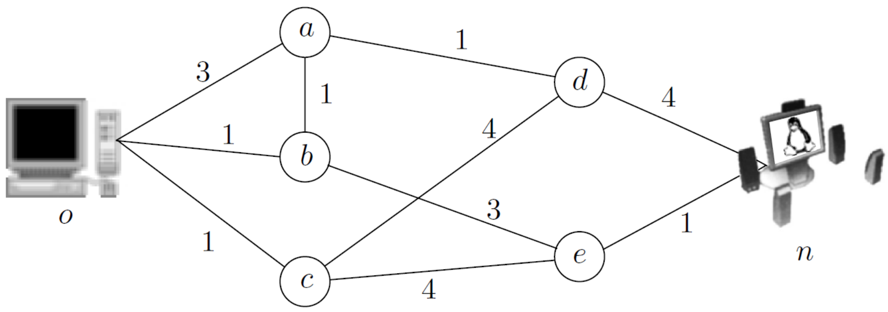
۲.۲ مسئله شار بیشینه

می‌خواهیم در یک گراف وزن‌دار، شار عبوری بیشینه بین دو رأس از این گراف را پیدا کنیم. یک مثال واقعی از این مسئله، انتقال داده بین دو کامپیوتر متصل به شبکه است؛ هر کامپیوتر، به تعدادی روتر (مسیریاب) متصل است که این روترها خود نیز به تعدادی روتر دیگر متصل‌اند و هر اتصال در این شبکه از حداکثر ظرفیت مشخصی برای انتقال داده برخوردار است. به‌عنوان‌مثال فرض کنید می‌خواهیم از کامپیوتر o به کامپیوتر n داده ارسال کنیم (شکل ۶) و به دنبال بیشینه مقداری (برحسب مگابیت بر ثانیه) هستیم که می‌توان از طریق این شبکه، داده ارسال کرد. فرض کنید که از یک یال نمی‌توان هم‌زمان در دو جهت داده انتقال داد، هرچند جلوتر نشان خواهیم داد که با نبود این فرض نیز برنامه‌ریزی خطی ما صحیح است.

قدم اول برای برنامه‌ریزی خطی انتخاب متغیرهاست. برای هر یال یک متغیر در نظر می‌گیریم که بیانگر مقدار داده عبوری از آن یال برحسب مگابیت بر ثانیه باشد. برای اینکه جهت انتقال داده در هر یال را نیز مشخص کنیم کافی است به هر یال یک جهت فرضی نسبت دهیم و مقدار مثبت متغیر آن را به معنای انتقال داده در جهت نسبت‌داده‌شده و مقدار منفی متغیر آن را به معنای انتقال داده در خلاف جهت نسبت‌داده‌شده در نظر بگیریم. پس x_{ij} را مقدار شار عبوری از رأس i به رأس j در نظر می‌گیریم که می‌تواند منفی نیز باشد.

قیود ما چه هستند؟ مشخص‌ترین قید، محدودیت ظرفیت هر یال است؛ یعنی، اگر ظرفیت یال بین دو رأس i و j برابر عدد نامنفی c باشد آنگاه محدودیت ظرفیت برای هر یال به‌صورت $c \leq x_{ij} \leq c$ بیان می‌شود. ازآنجاکه فرض کردیم انتقال داده در هر یال تنها در یک جهت ممکن است

[۴] Dantzig George



شکل ۶: مسئله شار بیشینه

تعداد متغیرهای x_{ij} به تعداد یال‌ها خواهد بود. پس باید:

$$\begin{aligned} -۳ \le x_{oa} \le ۳, &\quad -۱ \le x_{ob} \le ۱, \quad -۱ \le x_{oc} \le ۱ \\ -۱ \le x_{ab} \le ۱, &\quad -۱ \le x_{ad} \le ۱, \quad -۳ \le x_{be} \le ۳ \\ -۴ \le x_{cd} \le ۴, &\quad -۴ \le x_{ob} \le ۴, \quad -۴ \le x_{oc} \le ۴ \\ -۴ \le x_{cd} \le ۴ & \end{aligned}$$

همچنین، ازآنجاکه نمی‌خواهیم در هیچ‌یک از گره‌های میانی، شار تولید یا نابود بشود باید جمع جبری جریان‌های وارده به هر یک از گره‌های میانی صفر باشد؛ به‌عبارت‌دیگر، میزان شار ورودی به یک گره باید با میزان شار خروجی آن گره برابر باشد. به‌عنوان‌مثال برای رأس d جمع جبری جریان‌های ورودی به گره باید صفر باشد:

$$x_{ad} + x_{cd} - x_{dn} = ۰$$

توجه کنید که علامت متغیرها از روی جهت‌های قراردادی که برای یال‌ها تعیین کردیم حاصل شده است. فرض کرده‌ایم که شار از a و c به d وارد و به n خارج می‌شود. اگر x_{dn} را به‌طرف دیگر معادله ببریم مفهوم برابری شار ورودی و خروجی آشکار خواهد شد. پس قیدهای زیر را نیز باید به قیدهای پیشین بیفزاییم:

$$\begin{aligned} x_{oa} &= x_{ab} + x_{ad} \\ x_{ob} + x_{ab} &= x_{be} \\ x_{oc} &= x_{cd} + x_{ce} \\ x_{ad} + x_{cd} &= x_{dn} \\ x_{be} + x_{ce} &= x_{en} \end{aligned}$$

توجه کنید که هر تساوی را می‌توان به دو نامساوی تبدیل کرد تا قیود تساوی ما به قالب متعارف برنامه‌ریزی خطی مانند فرم کلی (۱) تبدیل شوند.

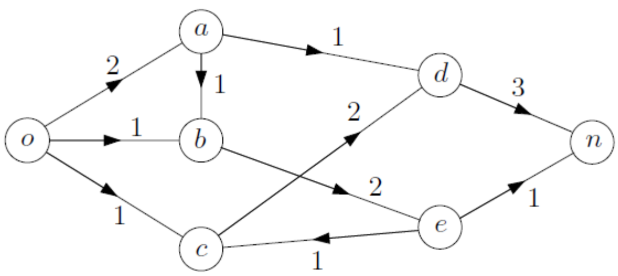
تابع هدف را می‌توانیم میزان شار خروجی از مبدأ در نظر بگیریم که سعی در بیشینه کردنش داریم؛ چراکه شار در گره‌های میانی مصرف نمی‌شود و هر مقدار شار که از مبدأ وارد شبکه شود الزاماً به مقصد می‌رسد. پس تابع هدف برابر است با:

$$x_{oa} + x_{ob} + x_{oc}$$

پس نهایتاً مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی ما به این شکل مدل می‌شود:

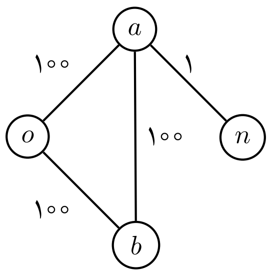
$$
\begin{array}{rl}
\text{بیشینه کن} & x_{oa} + x_{ob} + x_{oc} \\
\text{که} & -۳ \le x_{oa} \le ۳, \quad -۱ \le x_{ob} \le ۱, \quad -۱ \le x_{oc} \le ۱ \\
& -۱ \le x_{ab} \le ۱, \quad -۱ \le x_{ad} \le ۱, \quad -۳ \le x_{be} \le ۳ \\
& -۴ \le x_{cd} \le ۴, \quad -۴ \le x_{ob} \le ۴, \quad -۴ \le x_{oc} \le ۴ \\
& -۴ \le x_{cd} \le ۴, \\
& x_{oa} = x_{ab} + x_{ad} \\
& x_{ob} + x_{ab} = x_{be} \\
& x_{oc} = x_{cd} + x_{ce} \\
& x_{ad} + x_{cd} = x_{dn} \\
& x_{be} + x_{ce} = x_{en}
\end{array}
$$

جواب بهینه‌ی این مسئله ۴ است. (شکل ۷)



شکل ۷: جواب بهینه‌ی مسئله

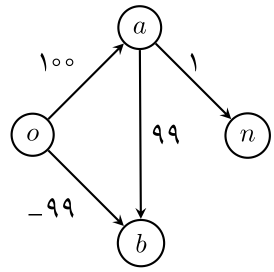
در این مسئله قیود مربوط به محدودیت ظرفیت یال‌ها و قیود مربوط به عبور شار از رئوس میانی را ذکر کرده‌ایم. اما قید دیگری نیز می‌توان افزود: این‌که شاری به مبدأ وارد نشود؛ یعنی، یال‌های خروجی از o همگی مثبت یا صفر باشند. اگر این قید را لحاظ نکنیم ممکن است به یک وضعیت خاص دچار شویم. گراف نوعیِ شکل ۸ را در نظر بگیرید. مقدار شار بیشینه از o به n مشخصاً ۱ است. اما یک جواب بهینه‌ی این برنامه‌ریزی خطی



شکل ۸: مقدار شار بیشینه از o به n در این گراف مشخصاً ۱ است.

در وضعیت شکل ۹ محقق می‌شود. در این شکل مقدار تابع هدف ۱ است اما شار اضافی زیادی از مبدأ خارج شده و به مبدأ باز می‌گردد. ممکن است وجود چنین حالت‌هایی در میان جواب‌های بهینه برای ما نگرانی ایجاد نکند؛ در غیر این صورت باید حتما قید نامنفی بودن یال‌های خروجی از o را در برنامه‌ریزی خطی‌مان درج کنیم.

در ابتدای طرح مسئله فرض کردیم که در هر یال، شار فقط در یک جهت جریان می‌یابد. اگر این فرض را نمی‌کردیم راه‌حل ما بازهم پاسخگو بود. این بار برای یال نوعی بین رئوس i و j دو متغیر x'_{ij} و x'_{ji} در نظر بگیرید که هر دو ناصفر و کوچک‌تر مساوی ظرفیت یال‌اند. یکی را انتقال شار در یک جهت از یال و دیگری را انتقال شار در جهت مخالف در نظر بگیرید. هنگامی‌که قیود ورود و خروج شار به گره‌ها را بنویسید می‌توان به‌جای $x'_{ij} - x'_{ji}$ متغیر جدید x_{ij} را گذاشت و اگر در جواب بهینه جفت x'_{ij} و x'_{ji} ناصفر بودند همواره می‌توان با کاهش یکی، دیگری را افزایش

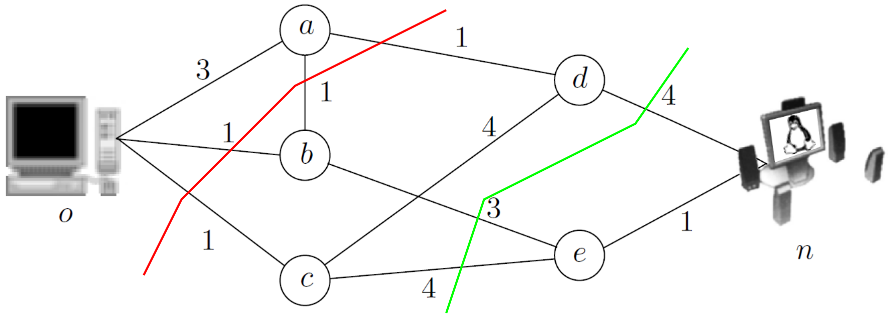


شکل ۹: تابع هدف بیشینه است اما شار اضافی زیادی از مبدأ خارج شده و به مبدأ باز می‌گردد.

داد تا یکی از این دو صفر شوند؛ لذا، هر جواب بهینه با فرض دوجهته بودن شار در هر یال، یک جواب بهینه با فرض یک‌جهته بودن شار در هر یال دارد.

شار بیشینه و برش کمینه

اگر برشی بر روی یال‌های شبکه ایجاد کنیم به‌طوری‌که شبکه به دونیم تقسیم شود می‌توان کران بالایی برای بیشینه شار عبوری پیدا کرد. به‌عنوان‌مثال در شکل ۱۰ برش سبزرنگ را در نظر بگیرید، با توجه به ظرفیت یال‌هایی که این برش آن‌ها را قطع می‌کند می‌توان گفت که بیشینه شار عبوری از این شبکه از ۱۱ بیشتر نخواهد بود (۴+۳+۴=۱۱). می‌توان برش دیگری در نظر گرفت و کران بالای دیگری پیدا کرد؛ مثلاً، برش قرمزرنگ را در نظر بگیرید. از روی این برش می‌توان گفت که شار بیشینه عبوری از شبکه نمی‌تواند از ۴ بیشتر باشد (۱+۱+۱+۱=۴). ازقضا از قبل می‌دانیم که مقدار شار بیشینه در حقیقت همان ۴ است. به این «بهترین برش» که در این مثال با شار بیشینه برابر شد **برش کمینه** می‌گویند. ارتباط شار بیشینه و برش کمینه در برنامه‌ریزی خطی عمیق‌تر است و در آینده به آن می‌پردازیم.



شکل ۱۰: برش سبزرنگ، کران بالای ۱۱ و برش قرمز رنگ که برش کمینه است، کران بالای ۴ را برای بیشینه شار عبوری شبکه تعیین می‌کند.

از لحاظ تاریخی، مسئله شار بیشینه و برش کمینه اولین بار در جستجوی راه بهینه‌ی مختل کردن شبکه ریلی شوروی توسط ارتش آمریکا مطرح شد.

مراجع

[JB07] Matoušek Jiri and Gärtner Bernd. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.