دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

دوگانی

جلسه نهم

نگارنده: مریم محمدی یکتا

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسات قبلی، با الگوریتم سیمپلکس آشنا شدیم و دیدیم با اینکه الگوریتم جالبی دارد، اما ریزه‌کاری‌های زیادی دارد که آن‌ها را بررسی کردیم. در ضمن گفتیم نسخه‌ای از الگوریتم سیمپلکس وجود دارد که در زمان متناهی ما را به جواب بهینه می‌رساند (با استفاده از الگوریتم bland). در این جلسه به بررسی دوگانی می‌پردازیم.

۲ دوگانی

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{که} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

جواب این برنامه‌ریزی خطی ۴٫۷۵ است اما می‌خواهیم با استفاده از نامعادله‌هایی که در قیود داریم، یک کران بالا برای تابع هدف بیابیم. با توجه به اینکه $x_1, x_2 \geq 0$ داریم:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

پس اگر این برنامه‌ریزی خطی را داشته باشیم، بدون حل کردن آن، می‌توانیم یک کران بالا برای تابع هدف با استفاده از قید اول ارائه بدهیم. اما

می‌توان این کران بالا را دقیق‌تر کرد. با ساده کردن قید اول داریم $۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۶$ پس:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۶$$

و در نتیجه ۶ یک کران بالای بهتر برای تابع هدف است. اما این کران را می‌توان بهتر هم کرد:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ = \frac{۱}{۳}(۴x_۱ + ۸x_۲) + \frac{۱}{۳}(۲x_۱ + x_۲) \leq ۵$$

که این کران بسیار به مقدار بیشینه تابع هدف نزدیک است. اما آیا می‌توان به کرانی رسید که دقیقا با این مقدار بیشینه برابر باشد؟ پس به دنبال بهترین کرانی هستیم که با استفاده از قیود برای تابع هدف به دست می‌آید.

فرض کنید با جمع ضرایبی از قیودی که داریم، به نامعادله‌ی $d_۱x_۱ + d_۲x_۲ \leq h$ رسیده باشیم به طوری که $d_۱ \geq ۲, d_۲ \geq ۳$ در این صورت خواهیم داشت $۲x_۱ + ۳x_۲ \leq d_۱x_۱ + d_۲x_۲ \leq h$ و h یک کران بالا برای تابع هدف است و ما به پیدا کردن بهترین کران بالا یعنی کمترین h هستیم. فرض کنید $d_۱x_۱ + d_۲x_۲ \leq h$ از جمع کردن $y_۱$ برابر قید اول با $y_۲$ برابر قید دوم و $y_۳$ برابر قید سوم به دست آمده باشد:

$$\begin{cases} y_۱ \times (۴x_۱ + ۸x_۲ \leq ۱۲) \\ y_۲ \times (۲x_۱ + x_۲ \leq ۳) \\ y_۳ \times (۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴) \\ y_۱, y_۲, y_۳ \geq ۰ \end{cases} \implies (۴y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳)x_۱ + (۸y_۱ + y_۲ + ۲y_۳)x_۲ \leq (۱۲y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳)$$

(شرط $y_۱, y_۲, y_۳ \geq ۰$ برای این گذاشته شده که جهت نامساوی‌ها تغییر نکند.) پس $d_۱, d_۲, h$ را برحسب $y_۱, y_۲, y_۳$ داریم. اگر بتوانیم $y_۱, y_۲, y_۳$ را طوری انتخاب کنیم که شرط‌های $d_۱ \geq ۲, d_۲ \geq ۳$ برقرار باشد، به یک کران بالا برای برنامه‌ریزی خطی اصلی می‌رسیم که می‌خواهیم تا جای ممکن کوچک باشد. در نتیجه به یک برنامه‌ریزی خطی جدید مانند زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{ll} \text{کمینه کن} & ۱۲y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳ \\ \text{که} & ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳ \geq ۲ \\ & ۸y_۱ + y_۲ + ۲y_۳ \geq ۳ \\ & y_۱, y_۲, y_۳ \geq ۰ \end{array}$$

دیدیم هر جواب شدنی برای برنامه‌ریزی خطی دوم، یک کران بالا برای برنامه‌ریزی خطی اول به ما می‌دهد. از قضا جواب برنامه‌ریزی خطی دوم، همان ۴/۷۵ است. پس در این مورد، جواب برنامه‌ریزی خطی دوم نه تنها کران بالایی برای بیشینه‌ی تابع هدف برنامه‌ریزی اول است، بلکه برابر آن است.

به برنامه‌ریزی خطی اول، برنامه‌ریزی خطی اولیه [1] وبه برنامه‌ریزی خطی دوم، دوگان [2] می‌گوییم.

در حالت کلی فرض کنید یک برنامه‌ریزی خطی به شکل زیر داشته باشیم

$$\text{بیشینه کن} \quad c^Tx \quad \text{که} \, Ax \leq b, \quad x \geq ۰ \quad (P)$$

برای نوشتن دوگان این برنامه، هر سطر از $Ax \leq b$ را در یک متغیر مثبت جدید ضرب می‌کنیم و با هم جمع می‌زنیم تا به یک نامعادله‌ی جدید برسیم. در این نامعادله‌ی جدید می‌خواهیم ضریب x_i از ضریب x_i در c^Tx بیشتر باشد تا بتوانیم c^Tx را با آن تقریب بزنیم و در ضمن می‌خواهیم مقدار ثابت این نامعادله، تا حد امکان کم باشد. پس دوگان این برنامه‌ریزی خطی مانند زیر است:

$$\text{کمینه کن} \quad b^Ty \quad \text{که} \, A^Ty \geq c \quad y \geq ۰ \quad (D)$$

قضیه دوگانی ضعیف [3]

فرض کنید x یک جواب شدنی برای برنامه‌ریزی اولیه‌ی P و y یک جواب شدنی برای دوگان آن، D باشد.

$$\begin{array}{llcll} \text{بیشینه کن} & c^Tx & \qquad & \text{کمینه کن} & b^Ty \\ \text{که} & Ax \leq b & & \text{که} & A^Ty \geq c \\ & x \geq ۰ \quad (P) & & & y \geq ۰ \quad (D) \end{array}$$

در این صورت داریم $c^Tx \leq b^Ty$

اثبات: دیدیم b^Ty یک کران بالا برای تابع هدف P است، پس همواره $c^Tx \leq b^Ty$.

[1] primal
[2] dual
[3] weak duality

قضیه دوگانی قوی

فرض کنید P یک برنامه‌ریزی خطی و دوگان آن D باشد:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشینه کن} & c^T x & \\ \text{که} & Ax \leq b & \\ & x \geq \circ & (P) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & b^T y & \\ \text{که} & A^T y \geq c & \\ & y \geq \circ & (D) \end{array}$$

در این صورت برای P و D دقیقا یکی از ۴ حالت زیر رخ می‌دهد:

- نه P و نه D جواب شدنی دارد.
- P جواب شدنی ندارد و D بی‌کران است.
- D جواب شدنی ندارد و P بی‌کران است.
- هر دوی P و D جواب شدنی دارند. در این صورت هر دو جواب بهینه دارند و اگر x^* جواب بهینه‌ی P و y^* جواب شدنی D باشد، داریم

$$c^T x^* = b^T y^*$$

یعنی بیشینه‌ی $c^T x$ با کمینه‌ی $b^T y$ برابر است.

پیدا کردن یک جواب شدنی

در الگوریتم سیمپلکس، دیدیم برای حل یک برنامه‌ریزی خطی، ابتدا نیاز داریم یک جواب شدنی از آن داشته باشیم. می‌خواهیم نشان دهیم الگوریتم پیدا کردن جواب شدنی به اندازه‌ی حل کردن یک برنامه‌ریزی خطی دشوار است. فرض کنید الگوریتم A را داشته باشیم که برای هر برنامه‌ریزی خطی مانند زیر

$$\begin{array}{lll} \text{بیشینه کن} & c^T x & \\ \text{که} & Ax \leq b & \\ & x \geq \circ & (P) \end{array}$$

یک جواب شدنی از آن را (در صورت وجود) پیدا می‌کند. می‌خواهیم با استفاده از A الگوریتم A' را طوری بسازیم که برنامه‌ریزی خطی حل کند. دوگان این برنامه‌ریزی خطی را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & b^T y & \\ \text{که} & A^T y \geq c & \\ & y \geq \circ & (D) \end{array}$$

از روی P و D، برنامه‌ریزی خطی جدید زیر را می‌سازیم:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & c^T x \\ \text{که} & Ax \leq b \\ & A^T y \geq c \\ & c^T x \geq b^T y \\ & x, y \geq \circ \end{array}$$

با توجه به ضیه‌ی دوگانی ضیف، همواره $c^T x \leq b^T y$ پس اگر شرط $c^T x \geq b^T y$ برقرار باشد، باید داشته باشیم $c^T x = b^T y$ و طبق قضیه‌ی دوگانی قوی، این اتفاق در نقاط بهینه‌ی P و D می‌افتد بنابراین اگر یک جواب شدنی برای این برنامه‌ریزی خطی جدید پیدا کنیم، x و y ای که پیدا می‌کنیم به ترتیب جواب‌های بهینه‌ی P و D هستند. توانستیم الگوریتم A' را طوری پیدا کنیم که برنامه‌ریزی خط حل کند. در نتیجه پیدا کردن جواب شدنی برای برنامه‌ریزی خطی به اندازه‌ی حل برنامه‌ریزی خطی دشوار است.

دوگان برای همه

دیدیم برای یک برنامه‌ریزی در فرم کانونی، چگونه می‌توان دوگان نوشت، اما دوگان را می‌توان برای هر برنامه‌ریزی خطی‌ای نوشت. فرض کنید برنامه‌ریزی خطی‌ای داریم که قید i م آن به شکل زیر باشد:

$$a_{i۱}x_۱ + a_{i۲}x_۲ + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} b_i \quad (C_i)$$

در دوگان به ازای هر کدام از قیدها، یک متغیر جدید در نظر می‌گرفتیم و این قیدها را در متغیر متناظرشان ضرب می‌کردیم تا یک کران بالا برای برنامه‌ریزی خطی اولیه به دست آوریم. بنابراین اگر y_i متغیر مربوط به قید C_i باشد، شرط زیر را برای علامت y_i داریم:

$$\begin{Bmatrix} y_i \geq 0 \\ y_i \leq 0 \\ y_i \in \mathbb{R} \end{Bmatrix} \text{ if we have } \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} \text{ in } \quad C_i$$

در ضمن علامت قیود دوگان هم بر اساس علامت متغیرهای برنامه‌ریزی اولیه طوری مشخص می‌شود که y_j ها یک کران بالا برای برنامه‌ریزی اولیه ایجاد کنند:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} c_j$$

$$\text{if} \quad x_j \quad \text{satisfies} \quad \begin{Bmatrix} x_j \geq 0 \\ x_j \leq 0 \\ x_j \in \mathbb{R} \end{Bmatrix}$$

به صورت خلاصه، طریقه‌ی دوگان گرفتن از یک برنامه‌ریزی خطی در جدول زیر آمده:

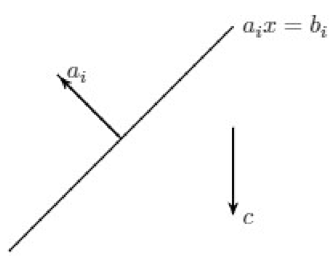
	برنامه‌ریزی اولیه	برنامه‌ریزی دوگان
متغیرها	$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_m$
ماتریس	A	A^T
سمت راست قیدها	b	c
تابع هدف	$\max c^T x$	$\min b^T y$
محدودیت‌ها	محدودیت i مین شرط $\begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix}$	محدودیت i مین متغیر $\begin{Bmatrix} y_i \geq 0 \\ y_i \leq 0 \\ y_i \in \mathbb{R} \end{Bmatrix}$
محدودیت‌ها	محدودیت j مین متغیر $\begin{Bmatrix} x_j \geq 0 \\ x_j \leq 0 \\ x_j \in \mathbb{R} \end{Bmatrix}$	محدودیت j مین شرط $\begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix}$

تفسیر فیزیکی دوگان

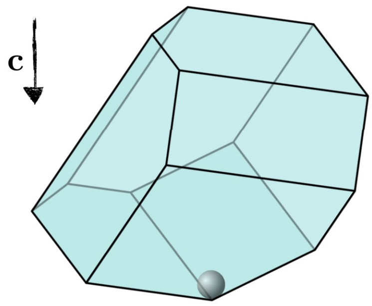
یک برنامه‌ریزی خطی و دوگانش را در نظر بگیرید و فرض کنید در فضای سه بعدی هستیم (که مطمئن باشیم همه‌ی قوانین فیزیکی در برقرار است).

$$\begin{aligned} &\text{بیشینه کن} \quad c^T x \\ &\text{که} \quad Ax \leq b \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^3 \quad (P) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\text{کمینه کن} \quad b^T y \\ &\text{که} \quad A^T y = c \\ &\qquad y \geq 0 \quad (D) \end{aligned}$$

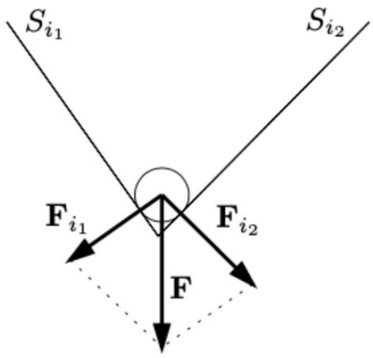
دیدیم هر یک از قیود، یک نیم‌فضا هستند که با یکی از ابرصفحه‌های $Ax = b$ مشخص می‌شوند، در ضمن بردار a_i بر ابرصفحه‌ی $a_i x = b_i$ عمود است. فرض کنیم در این فضای سه بعدی، جاذبه در جهت بردار c است و به جای نقطه‌ی x یک توپ داریم که درون فضای شدنی این برنامه‌ریزی خطی قرار دارد.



اگر توپ را داخل فضای شدنی رها کنیم، به علت محدب بودن فضای شدنی، پایین می‌افتد تا به نقطه‌ی بهینه برسد. فرض کنید این‌طور نباشد و توپ در جایی گیر کند که آن نقطه بهینه نباشد (به بیان ساده‌تر نقطه‌ای وجود داشته باشد که بیش‌تر در جهت c باشد). به علت محدب بودن فضای شدنی، خطی که مکان فعلی توپ را به این نقطه که بیش‌تر در جهت c ست وصل می‌کند، کاملا داخل فضای شدنی قرار دارد، پس توپ می‌تواند بیش‌تر سقوط کند که با فرض گیر کردن توپ تناقض دارد. خب پس فرض می‌کنیم توپ در جایی متوقف شده که جوابِ بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی است.



جایی که توپ ایستاده را در نظر بگیرید. از هر وجه که توپ با آن تماس دارد، نیرویی به توپ وارد می‌شود که جمع این نیروها باید جاذبه را خنثی کند. در ضمن نیرویی که هر وجه به توپ وارد می‌کند راستای بردار عمود بر آن صفحه است. با توجه به اینکه معادله‌های ما به فرم $a_i x \le b_i$ هستند، پس جهت بردارهای عمود بر صفحات به سمت بیرون چندوجهی هستند (هم جهت با F_{ij} ها در شکل زیر).



فرض کنید D مجموعه‌ی صفحاتی باشد که با توپ تماس دارند. پس می‌دانیم اعداد y_i^* وجود دارند که $\sum_{i\in D} y_i^* a_i = c$ برای بقیه صفحات که با توپ در تماس نیستند، تعریف کنید $y_i^* = 0$. اگر y^* را بردار همه‌ی این y_i^* ها در نظر بگیریم، y^* یک جواب شدنی برای دوگان است و $(y^*)^T A = c$ پس از روی یک جواب بهینه در برنامه‌ریزی اولیه مانند x^* به یک جواب شدنی برای دوگان رسیدیم. نشان می‌دهیم مقدار تابع‌های هدف در برنامه‌ریزی اولیه و دوگان آن برای x^* و y^* یکی‌است. در این صورت قضیه‌ی قوی دوگانی در سه بعد ثابت می‌شود. عبارت $(y^*)^T(Ax^* - b)$ را در نظر بگیرید. مولفه‌های y^* را تفکیک کنید:

- اگر $i \notin D$، در این صورت $y_i^* = 0$ و در نتیجه مولفه‌ی جمله‌ای که از ضرب y_i^* به دست می‌آید برابر صفر است.
- اگر $i \in D$ یعنی توپ با صفحه‌ی i م در تماس بوده، و چون فرض می‌کنیم توپ بسیار کوچک است، پس در واقع روی این صفحه قرار دارد و داریم $a_i x^* = b_i$، بنابراین سطر i م $Ax^* - b$ برابر است با $a_i x^* - b_i = 0$ پس جمله‌ای که از ضرب y_i^* به دست می‌آید همچنان 0 است.

پس در کل داریم $(y^*)^T(Ax^* - b) = 0$ بنابراین $(y^*)^T b = (y^*)^T A x^*$ و همان‌طور که در پاراگراف قبل دیدیم، $(y^*)^T A = c$ پس $(y^*)^T b = (y^*)^T A x^* = cx^* = b^T y^*$ و چون تابع هدف در دوگان همیشه کران بالایی برای تابع هدف برنامه‌ریزی اولیه است، پس با توجه به تساوی $cx^* = b^T y^*$ پس جواب بهینه‌ی دوگان (در صورت وجود) برابر است با جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی اولیه (در صورت وجود).

اثبات روش دوگانی به کمک سیمپلکس

ابتدا چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم:

- فرض کنید یک برنامه‌ریزی اولیه و دوگانش هر دو بی‌کران باشند. چون برنامه‌ریزی خطی اولیه حداقل یک جواب شدنی دارد، این جواب شدنی کران پایینی برای دوگان است، پس دوگان کران پایین دارد و در ضمن فضای شدنی آن ناتهی است. در نتیجه حتما جواب بهینه دارد که مخالف فرضی‌ست که در ابتدا کردیم. پس این حالت رخ نمی‌دهد.
- فرض کنید برنامه‌ریزی اولیه کراندار و شدنی باشد و دوگان بی کران. در این صورت همانند حالت قبلی به تناقض می‌رسیم، پس این حالت نیز رخ نمی‌دهد.
- اگر دوگان کراندار و شدنی باشد و برنامه‌ریزی اولیه بی‌کران، مانند حالت قبلی به تناقض می‌رسیم.
- اگر نه برنامه‌ریزی اولیه جواب شدنی داشته باشد نه دوگان آن، یکی از حالات قضیه‌ی دوگانی قوی رخ داده و نیازی به بررسی کردن نداریم. پس فرض کنید این حالت نیز رخ نمی‌دهد.
- اگر برنامه‌ریزی اولیه جواب شدنی نداشته باشد و دوگان آن بی‌کران باشد یا برعکس، در این صورت نیز یکی از حالات قضیه‌ی دوگانی قوی رخ داده و نیازی به بررسی بیشتر نیست. پس فرض کنید این حالت نیز رخ نمی‌دهد.

برنامه‌ریزی

$$\text{بیشینه کن} \quad c^T x \quad \text{که} \, Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

را در نظر بگیرید. برای حل کردن این برنامه‌ریزی خطی به کمک روش سیمپلکس، آن را به فرم معادله‌ی بازنویسی می‌کردیم:

$$\text{بیشینه کن} \quad \bar{c}^T \bar{x} \quad \text{که} \, \bar{A}\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0$$

$$\bar{x} = (x_1, ..., x_{n+m})$$

$$\bar{c} = (c_1, ..., c_n, 0, 0, ..., 0)$$

$$\bar{A} = (A|I_n)$$

و الگوریتم سیمپلکس در هر مرحله تابلویی مانند زیر نگه می‌داشت و آن را تغییر می‌داد:

$$\frac{x_B = P + Qx_N}{z = z_0 + r^T x_N}(*)$$

و وقتی به جواب بهینه می‌رسیدیم، $0 \leq r$. فرض کنید $*$ تابلوی نهایی باشد و x^* جواب نهایی این تابلو باشد و B مجموعه‌ی اندیس‌هایی باشد که x_B ناصفر باشد. نشان می‌دهیم $y = (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1})^T$ یک جواب شدنی برای دوگان است و $c^T x^* = b^T y^*$. در این صورت قضیه‌ی دوگانی قوی ثابت می‌شود.

اثبات. قسمت اول اثبات: تابلوی نهایی را در نظر بگیرید. دیدیم در این تابلو $\bar{x_N}^* = 0$ و $\bar{x_B}^* = P + Q\bar{x_N}^*$ در واقع متغیرهای $\bar{x}_B$ را با تعدادی عملیات سطری به سمت چپ منتقل کرده‌ایم. پس داریم $\bar{x_B}^* - Q\bar{x_N}^* = P$ یا به زبان ماتریس‌ها، ماتریس Q' وجود دارد به طوری که

$$I\bar{x_B}^* - Q'\bar{x_N}^* = P$$

در واقع انگار تابلوی اولیه را در یک $\bar{A_B}^{-1}$ ضرب کرده‌ایم تا به تابلوی نهایی رسیده‌ایم. پس $\bar{x_B}^* = \bar{A_B}^{-1} b$ و می‌دانستیم $\bar{x_N} = 0$. چون $\bar{c} = (c_1, ..., c_n, 0, ..., 0)$ پس $c^T x^* = \bar{c}^T \bar{x^*}$ و از طرفی چون مولفه‌هایی از x^* که اندیس آن‌ها در B نیست، 0 هستند بنابراین

$$c^T x^* = \bar{c}^T \bar{x^*} = \bar{c_B}^T \bar{x}^*_B = \bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1} b = (y^*)^T b = b^T y^*$$

قسمت دوم اثبات: نشان می‌دهیم y^* شدنی‌ست یعنی $y^* \geq 0, A^T y^* \geq c$

طبق تعریف y^* داریم $y^* \geq 0$. پس کافی‌ست نشان دهیم $\bar{A}^T y^* \geq \bar{c}$. به جای y^* مقدار آن‌را جایگذاری می‌کنیم پس $\bar{A}^T y^* = \bar{A}^T (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1})^T = (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1} \bar{A})^T$، اگر تعریف کنیم $w = (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1} \bar{A})^T$، کافی‌ست نشان دهیم $w \geq c$. به ستون‌های B از w دقت کنید. داریم:

$$w_B = (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1} \bar{A_B})^T = (\bar{c_B}^T I)^T = c_B$$

پس در این سطرها، مقدار w و c برابر است. در سطرهای N از w داریم:

$$w_B = (\bar{c_B}^T \bar{A_B}^{-1} \bar{A_N})^T = \bar{c_N} - r \leq \bar{c_N}$$

و اثبات کامل شد.

بنابراین با استفاده از این اثبات، برای هر مجموعه‌ی B که الگوریتم سیمپلکس از روی برنامه‌ریزی خطی اولیه به ما می‌دهد، یک جواب بهینه برای برنامه‌ریزی دوگان به دست می‌آوریم.