مسئله‌ی 8.1.6 :

پایه‌ی استقرا: $n=1$

گام: باید ثابت کنیم که می‌توان 2^{n+2} عدد 2^{n+1} ساخت به طوری که این اعداد حداقل در 2^{n} مرتبه اختلاف داشته باشند.

فرض استقرا این است که می‌توان 2^{n+1} عدد 2^{n} رقمی ساخت به طوری که حداقل در 2^{n-1} مرتبه اختلاف دارند.

این اعداد را به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{n+1}}$ نام‌گذاری می‌کنیم.

دو مجموعه‌ی عدد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$A = \{a_1a_1, a_2a_2, \ldots, a_{2^{n+1}}a_{2^{n+1}}\}$$

$$B = \{a'_1a_1, a'_2a_2, \ldots, a'_{2^{n+1}}a_{2^{n+1}}\}$$

a'_i همان a_i است با این تفاوت که رقم‌های 2 به 1 تبدیل شده اند و برعکس.

باید ثابت کنیم که $A \cup B$، 2^{n+2} عدد 2^{n+1} رقمی هستند (تا این جا که بدیهی است) که حداقل در 2^{n} رقم تفاوت دارند.

اعدادی که تولید می‌شوند چند حالت دارند که همگی را باید بررسی کنیم.

1 : a_ia_i , a_ja_j $(i \neq j)$

حداقل در 2^{n} رقم اختلاف دارند. ($2^{n-1} \times 2$)

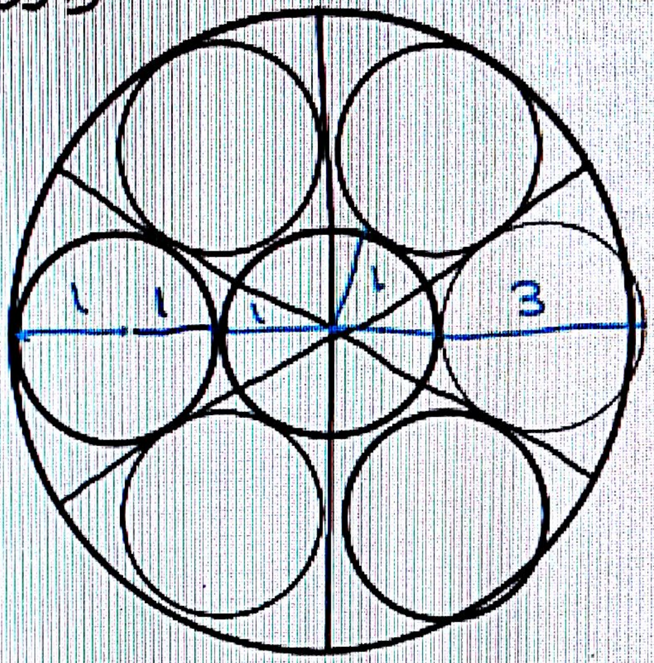
2 : a'_ia_i , a'_ja_j → // // //

3 : a'_ia_i , a_ia_i → دقیقاً در 2^{n} رقم اختلاف دارند.

4 : a'_ia_i , a_ja_j → // // //

مسئله ی 6.1.6:

پایه: $n=1$. طبق شکل زیر، می توان 7 دایره به شعاع 1 را در یک دایره به شعاع 3 قرار داد



گام: فرض: می توان 7^k دایره به شعاع واحد را داخل یک دایره به شعاع 3^k جا داد.

حکم: می توان 7^{k+1} دایره به شعاع واحد را داخل یک دایره به شعاع 3^{k+1} جا داد.

اثبات: همانند کاری که در فرض استقرا انجام دادیم، در این جا می توانیم 7 دایره به شعاع 3^k را در داخل دایره ای به شعاع 3^{k+1} قرار دهیم.

داخل هر کدام از این 7 دایره، طبق فرض استقرا، می توانیم 7^k دایره قرار دهیم.

$7 \times 7^k = 7^{k+1} \rightarrow$ حکم استقرا ثابت شد.

مسئله ی ۹.۱.۶:

ج) $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$

پایه ی استقرا: $n=1 \Rightarrow 1\times 1! = 2! - 1 = 1 \quad \checkmark$

گام: فرض: $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + k\times k! = (k+1)! - 1$

حکم: $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + k\times k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$\Leftarrow$ 2 طرف فرض را با $(k+1)(k+1)!$ جمع می کنیم.

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! =$$

$$= (k+1)!\,(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1 \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ حکم گام استقرا با استفاده از فرض آن ثابت شد.

مسئله‌ی ماشین‌های دور دایره و بنزین

P : چون فرض شده است بنزین کافی برای یک دور کامل وجود دارد بنابراین حکم برای $n=1$ برقرار است ما حالا هم حکم را برای $k+1$ ثابت کنیم. ماشینی را در نظر می‌گیریم که بتواند با حرکت در جهتی دلخواه (مثلاً جهت ساعت) بتواند به اولین ماشین بعد از خود برسد و واضح است که چنین ماشینی وجود دارد زیرا در غیر این صورت بنزین کافی برای یک دور کامل در ماشین‌ها وجود نخواهد داشت که خلاف فرض است. حال اگر این ماشین را A بنامیم و ماشین بعد از آن را B بنامیم در این صورت به عنوان گام استقرا تمام بنزین B را به A اضافه می‌کنیم و ماشین B را حذف می‌کنیم در این صورت با توجه به فرض استقرا برای k ماشین، می‌توان ماشینی را انتخاب کرد که با شروع از آن می‌توان یک دور کامل زد و به طور واضح با شروع از این ماشین نیز می‌توان در بین $k+1$ ماشین هم، یک دور کامل زد زیرا هنگامی که به A برسیم، طبق تعریف A می‌توانیم تا B (که حذف شده بود) حرکت کنیم، و ادامه‌ی مسیر همانند فرض استقرا است (یعنی مقدار بنزین ما از B به بعد هنگامی که $k+1$ ماشین داریم و هنگامی که B حذف شده، برابر است) بنابراین می‌توان یک دور کامل زد

۹) طبق فرض سؤال، همه‌ی x_i ها نامنفی هستند

a) $$x_1 \cdots x_{n-1}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n$$

$$\rightarrow (x_1 \cdots x_{n-1})\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n$$

$$\rightarrow X_1 \cdots X_{n-1} \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\rightarrow p(n) \rightarrow p(n-1)$$

b) $$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

$$x_{n+1} \cdots x_{2n} \leqslant \left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n$$

$$\rightarrow x_1 \cdots x_{2n} \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n \times \left(\frac{x_{n+1}\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n \quad (*)$$

$P(2)$:

$$(x_1+\cdots+x_n)(x_{n+1}+\cdots x_{2n}) \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots x_{2n}}{2}\right)^2$$

دو طرف نامساوی را بر n^2 تقسیم کنیم و به توان n می‌رسانیم

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)^{2n} \quad (**)$$

از 2 رابطه‌ی مشخص شده در صفحه‌ی قبل داریم:

$$x_1 \cdots x_{2n} \leq \left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)^{2n}$$

c) $p(n), p(2) \rightarrow p(2n)$

$\rightarrow p(2), p(2) \Rightarrow p(4)$

$p(4), p(2) \rightarrow p(8)$

به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که $p(2^n)$ برقرار است.

از رابطه‌ی قسمت الف نیز نتیجه می‌گیریم که رابطه برای n های
کوچک‌تر از 2^n برقرار است $\rightarrow$ پس برای هر عددی برقرار است
(به ازای هر عددی یک 2^n وجود دارد که از آن بزرگ‌تر باشد)

سوال ۶: Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be positive real numbers such that $a_1 \cdots a_n = 1$. Prove, without using the arithmetic versus geometric inequality, that $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$.

حل: پایه‌ی استقرا: $n=1$: $a_1 = 1 \Rightarrow 2 = 1+a_1 \geq 2^1$.

فرض استقرا: $n=k$: حکم برای $n=k$ صادق است.

استقرا: $n=k+1$: ابتدا ثابت می‌کنیم a_i و a_j وجود دارد به طوری که: $a_i \geq 1$ و $a_j \leq 1$.

اگر وجود نداشته باشد به صورتی که: $a_i \geq 1$ ، یعنی: $\forall\, 1 \leq k \leq n : a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} a_k < 1$ ✗.

به روش مشابه ثابت می‌شود که a_j هم وجود دارد.

$$\Rightarrow (1-a_j)(a_i-1) \geq 0 \Rightarrow a_i + a_j \geq 1 + a_i \cdot a_j \Rightarrow 1 + a_i + a_j + a_i \cdot a_j \geq 2(1 + a_i \cdot a_j)$$

$$\rightarrow (1+a_i)(1+a_j) \geq 2(1+a_i \cdot a_j) \quad (\text{رابطه‌ی } (*))$$

با فرض سوال داریم: $a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_{n+1} \cdot (a_i \cdot a_j) = 1$

در نتیجه با فرض استقرا می‌توان نوشت: $(1+a_1)\cdots(1+a_{i-1})(1+a_{i+1})\cdots(1+a_{j-1})(1+a_{j+1})\cdots(1+a_{n+1})(1+a_i \cdot a_j) \geq 2^n$

$$\rightarrow (1+a_1)\cdots(1+a_{i-1})(1+a_{i+1})\cdots(1+a_{j-1})(1+a_{j+1})\cdots(1+a_{n+1}) \times 2(1+a_i \cdot a_j) \geq 2^{n+1}$$

و رابطه‌ی $(*)$

$$(1+a_1)\cdots(1+a_{n+1}) \geq 2^{n+1} \quad \blacksquare$$

2.36 : اثبات با استقرای روی n :

پایه استقرا: $n=1$: $\;1+a_1=2\geqslant 2^1$ ✓ $\;\Leftarrow a_1=1$

گام استقرا: $P(n)\to P(n+1)$: داریم $a_1a_2\cdots a_{n+1}=1$ که a_i ها اعداد حقیقی مثبت هستند. نشان می‌دهیم $(1+a_1)\cdots(1+a_{n+1})\geqslant 2^{n+1}$. قرار دهید $a_n^*=a_na_{n+1}$ $\Leftarrow$ $a_1a_2\cdots a_n^*=1$

حال داریم:

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})=(1+a_1)\cdots(1+a_n^*+a_n+a_{n+1})$$
$$=\underbrace{(1+a_1)\cdots(1+a_n^*)}_{=A}+\underbrace{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})(a_n+a_{n+1})}_{=B}$$

طبق فرض استقرا داریم $A\geqslant 2^n$. حال کافیست نشان دهیم $B\geqslant 2^n$. برای اثبات $B\geqslant 2^n$ ، از استقرا روی n استفاده می‌کنیم:

حکم: اگر a_i ها $1\leq i\leq n+1$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $a_1a_2\cdots a_{n+1}=1$ ، آنگاه $(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})(a_n+a_{n+1})\geqslant 2^n$.

$n=1$: $\;a_1+a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$ ✓ $\;\Leftarrow a_2=\frac{1}{a_1}\;\Leftarrow a_1a_2=1$

زیرا $a_1>0$ و $a_1^2-2a_1+1=(a_1-1)^2\geqslant 0$

$P(n)\to P(n+1)$: فرض کنید داریم $a_1a_2\cdots a_{n+1}a_{n+2}=1$:

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)(a_{n+1}+a_{n+2})=(1+a_1)\cdots(a_{n+1}+a_na_{n+2}+a_{n+2}+a_na_{n+1})$$
$$=\underbrace{(1+a_1)\cdots(a_{n+1}+a_na_{n+2})}_{=C}+\underbrace{(1+a_1)\cdots(a_{n+2}+a_na_{n+1})}_{=D}$$

داریم $C\geqslant 2^n$ ، زیرا $a_n^*=a_na_{n+2}$ قرار دهید و از فرض استقرا استفاده کنید. همچنین $D\geqslant 2^n$ ، زیرا قرار دهید $a_n^*=a_na_{n+1}$ و از فرض استقرا استفاده کنید.

$$\Longrightarrow (1+a_1)\cdots(1+a_n)(a_{n+1}+a_{n+2})\geqslant 2^n+2^n=2^{n+1} ✓$$

✓

پس نشان دادیم که $B\geqslant 2^n$.

$$\Longrightarrow (1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})\geqslant 2^n+2^n=2^{n+1}$$

2.36

پایه: $n=1 \leftarrow a_1 = 1 \leftarrow 2 = 1+a_1 \geq 2^1$

فرض: $a_1 a_2 \dots a_k = 1$ ، $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) \geq 2^k$

حکم: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq 2^{k+1}$

اثبات: $a_k a_{k+1} = a'_k$

$$\rightarrow a_1 a_2 \dots a_k^* = 1$$

$$(1+a_1)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) = (1+a_1)\dots(1+a_k^*+a_k+a_{k+1})$$

$$= \underbrace{(1+a_1)\dots(1+a_k^*)}_{\geq 2^k \text{ طبق فرض استقرا}} + (1+a_1)\dots(1+a_{k-1})(a_k+a_{k+1})$$

کافی است نشان دهیم که سایر عبارت هم از 2^k بزرگتر است تا مجموعشان از 2^{k+1} بزرگتر باشد.

اگر a_i ها (i از 1 تا $k+1$) اعداد + حقیقی باشند و $a_1 \dots a_{k+1} = 1$ ،
باید ثابت کنیم که $(1+a_1)\dots(1+a_{k-1})(a_k+a_{k+1}) \geq 2^k$

از استقرا استفاده می کنیم:

$k=1 \leftarrow$ $a_1 a_2 = 1 \rightarrow (a_1+a_2)(1+a_1) = a_1 + a_1^2 + a_2 + 1$

$$= 1 + a_1^2 + \underbrace{a_1 + \frac{1}{a_1}}_{\geq 2} \geq 2 \checkmark$$

اثبات گام استقرای دوم: فرض می کنیم که $a_1 \dots a_{n+1} a_{n+2} = 1$

$$\rightarrow (1+a_1)\dots(1+a_n)(a_{n+1}+a_{n+2}) = (1+a_1)\dots(a_{n+1}+a_n a_{n+2} + a_{n+2} + a_n a_{n+1}) = (1+a_1)\dots(a_{n+1}+a_n a_{n+2}) +$$

$$+\underbrace{(1+a_1)\cdots(a_{k+2}+a_k a_{k+1})}_{B}$$

$A \geqslant 2^k$ ، زیرا $a_k^* = a_k a_{k+2}$ ، و طبق فرض استقرا ثابت می‌شود.

$B \geqslant 2^k$ ، زیرا $a_k^* = a_k a_{k+1}$ ، " " " .

$$\rightarrow (1+a_1)\cdots(1+a_k)(a_{k+1}+a_{k+2}) \geqslant 2^k + 2^k = 2^{k+1} \checkmark$$

$$\Rightarrow (1+a_1)\cdots(a_k+1)(1+a_{k+1}) \geqslant 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

پس حکم ثابت شد.