

به نام خداوند رحمت‌گر مهربان  
آنالیز الگوریتم (بهار ۱۳۹۴) - امتحان میان‌ترم

زمان: ۱ ساعت و ۳۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

برای تمام سوال‌ها درستی الگوریتم‌هایی که ارائه می‌دهید را اثبات کنید و زمان اجرای آن‌ها را محاسبه کنید.

سوال ۱ (تنوع طلبی): فرض کنید یک درخت به ما داده شده که روی هر راس آن یک عدد نوشته شده است. الگوریتمی با مرتبه زمانی چندجمله‌ای ارائه کنید که مسیری را در این درخت پیدا کند که بیشترین تعداد اعداد متفاوت روی راس‌های آن نوشته شده باشد.

سوال ۲ (ستاره‌شناسی): در یک جمعیت رابطه آشنایی یک طرفه است، یعنی ممکن است فرد اولی فرد دومی را بشناسد در حالی که فرد دوم فرد اول را نشناسد. در این جمعیت به فردی ستاره می‌گوییم که همه او را بشناسند و او هیچ کسی را نشناسد. فرض کنید در هر مرحله می‌توانیم دو فرد را انتخاب کنیم و از فرد اول پرسیم «آیا فرد دوم را می‌شناسی؟». الگوریتمی ارائه بدهید که در یک جمعیت  $n$  نفری با حداکثر  $2n - 2$  سوال فرد ستاره را پیدا کند و یا بگوید فرد ستاره‌ای در جمعیت حضور ندارد.

سوال ۳ (افراز به سه مجموعه هم‌جمع): فرض کنید مجموعه  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  داده شده است که  $a_i$ ها اعداد طبیعی هستند. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان  $A$  را به سه زیرمجموعه  $A_1, A_2, A_3$  و  $A_3$  افراز کرد به طوری که مجموع عناصر هر سه زیر مجموعه با یکدیگر برابر باشد. برای حل این مساله الگوریتمی از مرتبه چند جمله‌ای ارائه کنید.

سوال ۴ (صرفه‌جویی در سوخت): در کشوری  $n$  شهر وجود دارد که بین برخی از این شهرها جاده‌های دو طرفه وجود دارد. تنها برخی از شهرها در این کشور پمپ بنزین دارند. علی ماشینی دارد که ظرفیت باک آن  $k$  لیتر است. هم‌چنین فرض کنید برای پیمودن هر جاده ماشین علی ۱ لیتر بنزین مصرف می‌کند.

فرض کنید اطلاعات شهرها، پمپ بنزین‌ها، جاده‌ها، ظرفیت باک ماشین علی، شهری که علی با ماشینش در آن حاضر است، و شهر مقصد علی به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که با دانستن این اطلاعات بگوید آیا علی می‌تواند از شهری که در آن حاضر است به شهر مقصد برسد یا خیر. مرتبه اجرای الگوریتم شما باید  $O(|V|^3)$  باشد.

می‌توانید فرض کنید بین هر دو شهر حداکثر یک جاده است. فرض کنید علی نمی‌تواند بنزین را در جای دیگری به جز باک ماشین ذخیره کند و فرض کنید حرکت در شهر تقریباً بدون مصرف بنزین انجام می‌شود. در ابتدا باک ماشین علی پر است.

(امتیازی) الگوریتم خود را به گونه‌ای تغییر دهید که میزان مصرف سوخت را کمینه کند. مرتبه زمان اجرای الگوریتم شما باید همان  $O(|V|^3)$  باشد. اگر برای این قسمت الگوریتم ارائه بدهید، لازم نیست برای بخش اول سوال الگوریتم دیگری ارائه کنید.

سوال ۵ (حذف برای ظاهر شدن): دو رشته  $s$  و  $t$  داده شده‌اند. می‌خواهیم کوتاه‌ترین رشته متوالی از  $s$  را پیدا کنیم که با حذف آن یک زیررشته متوالی برابر با  $t$  در  $s$  ظاهر شود. الگوریتمی برای این کار با زمان اجرای  $O(|s| + |t|)$  ارائه دهید.

موفق باشید