دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

برنامه‌ریزی صحیح: تطابق وزن‌دار کامل در گراف دوبخشی

جلسه چهارم

نگارنده: سنا نادعلی

۱ مروری بر مباحث گذشته

تاکنون با برنامه‌ریزی خطی آشنا شده‌ایم. دریافتیم که برنامه‌ای به صورت زیر یک برنامه‌ریزی خطی است:

$$c^T x \quad \text{کمینه کن/بیشینه کن}$$
$$Ax \leq b \quad \text{که}$$

به طور کلی یک برنامه‌ریزی خطی از تعدادی متغیر حقیقی‌مقدار، تعدادی قید خطی و یک تابع هدف تشکیل شده‌است. هدف مقداردهی متغیرها به گونه‌ای است که قیود برقرار باشند و تابع هدف بیشینه یا کمینه شود.

۲ برش رول‌های کاغذ

یک کارخانه تولید کاغذ، رول‌های کاغذ با عرض استاندارد ۳ متر تولید می کند. اما مشتریان می‌خواهند رول‌های کاغذ با عرض کوتاه‌تر خریداری کنند و کارخانه مجبور است این نوع رول‌ها را از رول‌های ۳متری برش دهد. سفارشی شامل ۹۷ رول کاغذ با عرض ۱۳۵ سانتی‌متر، ۶۱۰ رول کاغذ با عرض ۱۰۸ سانتی‌متر، ۳۹۵ رول کاغذ با عرض ۹۳ سانتی متر و ۲۱۱ رول کاغذ با عرض ۴۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. حداقل چند رول کاغذ ۳متری لازم است برای این سفارش برش داده‌شود. این رول‌ها باید چگونه برش داده‌شوند؟

حال سعی می‌کنیم برنامه‌ریزی خطی ارائه دهیم که این مسئله را حل کند. ابتدا تمام حالت‌هایی را مشخص می‌کنیم که می‌توان یک رول کاغذ ۳متری را، به رول‌های کاغذ با عرض‌های ۱۳۵ سانتی‌متر، ۱۰۸ سانتی‌متر، ۹۷ سانتی‌متر یا ۴۲ سانتی‌متری برش داد. حال کافی‌ست بدانیم چند

رول کاغذ را لازم است به هر یک از این روش‌ها برش داد به طوری که از رول‌های حاصل بتوان سفارش مورد نظر را آماده کرد. در زیر تمام این حالت‌ها آمده‌است. دقت داشته‌باشید که کافی‌ست تمام حالاتی را بررسی کنیم که کمتر از ۴۲ سانتی‌متر از رول کاغذ ۳متری تلف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&P_۱ : ۲ \times ۱۳۵\\
&P_۲ : ۱۳۵ + ۱۰۸ + ۴۲\\
&P_۳ : ۱۳۵ + ۹۳ + ۴۲\\
&P_۴ ۱۳۵ + ۳ \times ۴۲\\
&P_۵ : ۲ \times ۱۰۸ + ۲ \times ۴۲\\
&P_۶ : ۱۰۸ + ۲ \times ۹۳\\
&P_۷ : ۱۰۸ + ۹۳ + ۲ \times ۴۲\\
&P_۸ : ۱۰۸ + ۴ \times ۴۲\\
&P_۹ : ۳ \times ۹۳\\
&P_{۱۰} : ۲ \times ۹۳ + ۲ \times ۴۲\\
&P_{۱۱} : ۹۳ + ۴ \times ۴۲\\
&P_{۱۲} : ۷ \times ۴۲
\end{aligned}
$$

حال برای $i = ۰, ..., ۱۲$، x_i را تعداد رول‌های کاغذ ۳متری که به روش P_i برش داده‌می‌شوند تعریف می‌کنیم. به وضوح برای $i = ۰, ..., ۱۲$ شرط $x_i \geq ۰$ باید برقرار باشد.

هر رول کاغذ ۳متری که به روش $p_۱$ برش داده‌می‌شود دو رول ۱۳۵ سانتی‌متری ساخته‌می‌شود. بنابراین $۲x_۱$ رول کاغذ ۱۳۵سانتی‌متری از روش $p_۱$ حاصل می‌شود. به همین ترتیب می‌توان تعداد کل رول‌های کاغذ ۱۳۵سانتی‌متری را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$
۲ \times x_۱ + ۱ \times x_۲ + ۱ \times x_۳ + ۱ \times x_۴ + ۰ \times x_۵ + ۰ \times x_۶ + ۰ \times x_۷ + ۰ \times x_۸ + ۰ \times x_۹ + ۰ \times x_{۱۰} + ۰ \times x_{۱۱} + ۰ \times x_{۱۲}
$$

که ضریب هر یک از x_iها مشخص می‌کند برش دادن یک رول ۳متری به روش p_i چند رول ۱۳۵سانتی‌متری تولید می‌کند. برای این که بتوانیم سفارش را برآورده کنیم این مقدار باید حداقل برابر ۹۷ باشد. بنابراین جواب برنامه‌ریزی خطی باید در قیود زیر صدق کند:

$$
\begin{aligned}
&۲x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \geq ۹۷\\
&x_۲ + ۲x_۵ + x_۶ + x_۷ + x_۸ \geq ۶۱۰\\
&x_۳ + ۲x_۶ + x_۷ + ۳x_۹ + ۲x_{۱۰} + x_{۱۱} \geq ۳۹۵\\
&x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ + ۲x_۵ + ۲x_۷ + ۴x_۸ + ۲x_{۱۰} + ۴x_{۱۱} + ۷x_{۱۲} \geq ۲۱۱\\
&x_i \geq ۰, \quad i = ۰, ..., ۱۲
\end{aligned}
$$

برای تکمیل برنامه‌ریزی خطی کافی‌ست تابع هدف را نیز مشخص کنیم. می‌خواهیم تعداد کل رول‌های کاغذ ۳متری کمینه شود. تعداد این رول‌ها برابر است با $\sum_{i=۱}^{۱۲} x_i$. بنابراین کافی‌ست برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنیم:

$$
\begin{aligned}
\text{کمینه کن} \quad & \sum_{i=۱}^{۱۲} x_i\\
\text{که} \quad & ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \geq ۹۷\\
& x_۲ + ۲x_۵ + x_۶ + x_۷ + x_۸ \geq ۶۱۰\\
& x_۳ + ۲x_۶ + x_۷ + ۳x_۹ + ۲x_{۱۰} + x_{۱۱} \geq ۳۹۵\\
& x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ + ۲x_۵ + ۲x_۷ + ۴x_۸ + ۲x_{۱۰} + ۴x_{۱۱} + ۷x_{۱۲} \geq ۲۱۱\\
& x_i \geq ۰, \quad i = ۰, ..., ۱۲
\end{aligned}
$$

اگر برنامه‌ریزی خطی فوق را حل کنیم، نتیجه می‌شود $x_۱ = ۴۸/۵$. یعنی باید نصف یک رول کاغذ ۳متری را به روش $P_۱$ برش دهیم! این کار تقریباً بی‌معنی‌ست. در واقع چیزی که لازم بود در نظر بگیریم شرط صحیح بودن متغیرها بود. اما چنین شرطی را نمی‌توانستیم در برنامه‌ریزی خطی

بگنجانیم. به نظر می‌رسد به نوع دیگری از برنامه‌ریزی نیاز داریم که بسیار مشابه برنامه‌ریزی خطی‌ست اما متغیرهای آن تنها مقادیر صحیح اتخاذ می‌کنند. در ادامه به تفصیل به این موضوع می‌پردازیم.

۳ برنامه‌ریزی صحیح

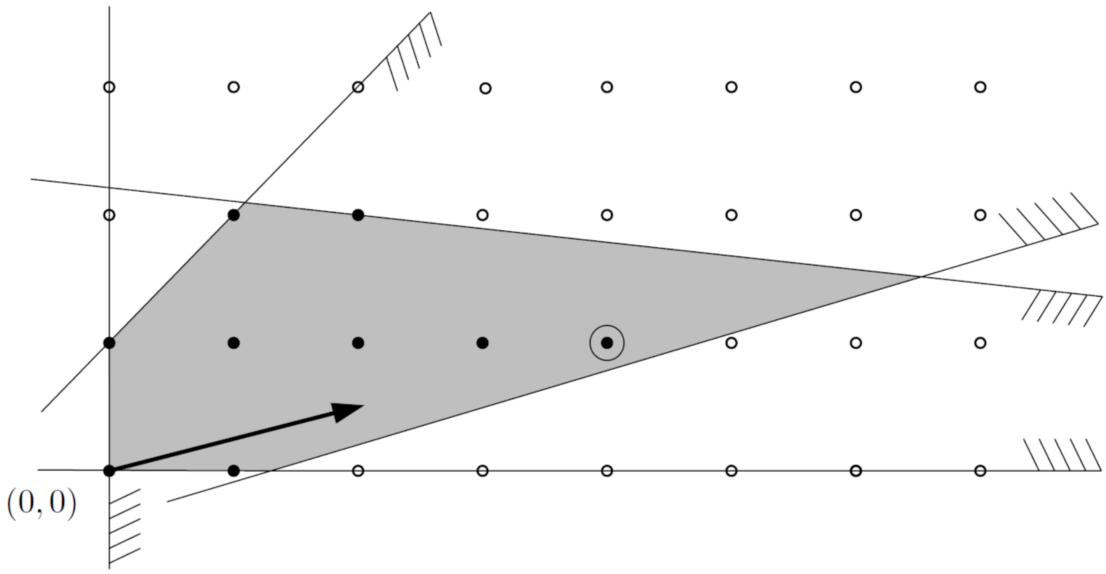
تاکنون دریافتیم که برنامه‌ریزی که به شکل زیر قابل نوشتن است یک برنامه‌ریزی خطی است:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T x \\ \text{که} & Ax \leq b \end{array}$$

در مسئله برش رول‌های کاغذ دیدیم که به نوعی از برنامه‌ریزی نیاز داریم که تابع هدف و قیود آن خطی باشد اما متغیرهای آن تنها بتوانند مقادیر صحیح اتخاذ کنند. به این نوع از برنامه‌ریزی‌ها، برنامه‌ریزی صحیح[1] می‌گویند. در واقع برنامه ریزی که به فرم زیر قابل نوشتن باشد برنامه‌ریزی صحیح نامیده‌می‌شود:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T x \\ \text{که} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

مجموعه جواب‌های شدنی یک برنامه‌ریزی صحیح دیگر یک چندوجهی محدب نیست. بلکه تنها نقاط با مختصات صحیح را شامل می‌شود. در شکل زیر شمایی از یک برنامه‌ریزی صحیح در دو بعد آورده‌شده‌است. نقاط توپر مجموعه جواب‌های شدنی چنین برنامه‌ریزی هستند.



متأسفانه حل برنامه‌ریزی صحیح از حل برنامه‌ریزی خطی سخت‌تر است. گزاره زیر این موضوع را روشن‌تر می‌کند.

گزاره ۱. *برنامه‌ریزی صحیح یک مسئله NP-Hard است.*

اثبات. در ادامه، تنها ایده اثبات این گزاره را بیان می‌کنیم. به این منظور مسئله SAT را به برنامه‌ریزی صحیح کاهش می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم هر نمونه از مسئله SAT به یک برنامه‌ریزی صحیح تبدیل می‌شود. در این صورت اگر مسئله برنامه‌ریزی صحیح حل شود، مسئله SAT نیز حل شده‌است. از طرفی می‌دانیم مسئله SAT یک مسئله NP است . پس برنامه‌ریزی صحیح یک مسئله NP-Hard خواهدبود.

ابتدا به توضیح مسئله SAT می‌پردازیم. اگر تعدادی متغیر یا نقیض متغیر با هم OR شوند، یک **عبارت** ساخته‌می‌شود. اگر چند عبارت با هم AND شوند یک **فرمول**(در واقع نوع خاصی از فرمول که در اینجا با لفظ فرمول به آن اشاره می‌کنیم) حاصل می‌شود. برای مثال f یک فرمول است.

$$f = (x_۱ \vee x_۲ \vee x_۳) \wedge (x_۳ \vee \neg x_۴)$$

[1] Integer Programming

مسئله SAT به این سوال پاسخ می‌دهد که برای یک فرمول داده‌شده آیا می‌توان متغیرها را به گونه‌ای مقداردهی کرد که مقدار این فرمول True شود. به عبارت دیگر فرمول داده‌شده f ارضاپذیر است یا خیر.

ایده اثبات را با استفاده از فرمول f توضیح می‌دهیم. برنامه‌ریزی صحیحی طراحی می‌کنیم که اگر حل شود، مسئله SAT نیز حل شود. برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، y_i را به گونه‌ای مقدار می دهیم که ارزش متغیر x_i در f را مشخص کند. یعنی $y_i = ۱$ معادل True بودن متغیر x_i است. بنابراین y_i باید تنها مقادیر ۰ و ۱ را بتواند اتخاذ کند. کافی‌ست قیود $۰ \leq y_i \leq ۱$ و $y_i \in \mathbb{Z}$ را برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ در نظر بگیریم. اگر f ارضاپذیر باشد یعنی مقداردهی برای متغیرهای f وجود دارد که همه عبارات آن True شود. اگر عبارت $x_۱ \vee x_۲ \vee x_۳$ ارضا شده‌باشد یعنی حداقل یکی از متغیرهای آن True شوند، یعنی یکی از $y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ باید برابر ۱ شود. کافی‌ست قید $y_۱ + y_۲ + y_۳ \geq ۱$ را به قیود برنامه‌ریزی صحیح اضافه کنیم. برای عبارت دیگر نیز قید $y_۳ + (۱ - y_۴) \geq ۱$ را در نظر می‌گیریم. برنامه‌ریزی صحیح نهایی به صورت زیر خواهدبود:

$$
\begin{aligned}
\text{بیشینه کن} \quad & y_۱ \\
\text{که} \quad & y_۱ + y_۲ + y_۳ \geq ۱ \\
& y_۳ + (۱ - y_۴) \geq ۱ \\
& y_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& y_i \leq ۱, \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{aligned}
$$

کافی‌ست برنامه‌ریزی صحیح فوق جواب شدنی داشته‌باشد. به همین دلیل اهمیت چندانی ندارد که تابع هدف آن را چه انتخاب کنیم. این ایده را می‌توان به هر فرمول دلخواه تعمیم داد. □

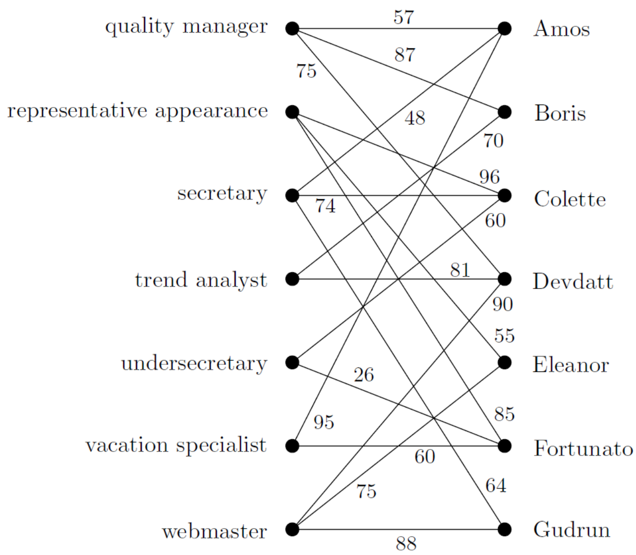
سؤال. *برنامه‌ریزی صحیحی بنویسید که با کمک آن بتوان مسئله SAT را به ازای ورودی زیر حل کرد.*

$$f' = (x_۱ \vee \neg x_۲) \wedge (\neg x_۱ \vee x_۲ \vee x_۳) \wedge \neg x_۱$$

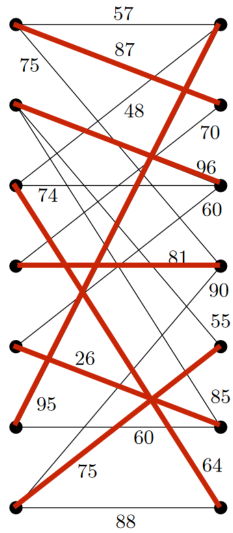
۴ زمانی که برنامه‌ریزی خطی کافی‌ست!

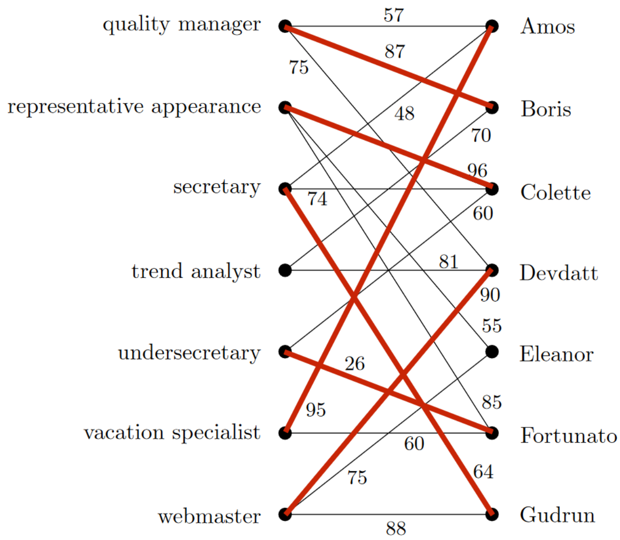
۱.۴ تطابق کامل با وزن بیشینه در گراف دوبخشی

یک شرکت مشاوره به دنبال استخدام هفت نفر برای هفت موقعیت شغلی در شرکت است. به این منظور پرسشنامه‌ای طراحی شده و از افراد خواسته‌شده تا این پرسشنامه را پر کنند. با توجه به پاسخ‌های افراد به هر نفر در هر یک از شغل‌هایی که مایل است در آن‌ها کار کند نمره‌ای از ۰ تا ۱۰۰ داده‌می‌شود. این اطلاعات به طور خلاصه در گراف زیر آمده‌اند. حال می‌خواهیم به هر فرد دقیقاً یک شغل نسبت دهیم به طوری که مجموع امتیازات افراد در شغل‌شان بیشینه شود. به عبارت دیگر می خواهیم در گراف دوبخشی زیر تطابق کامل با بیشترین وزن را در صورت وجود پیدا کنیم.



اولین استراتژی برای حل این مسئله می‌تواند این باشد که به افراد، به ترتیب، شغلی که در آن بهترین عملکرد را دارند نسبت دهیم. همانطور که در شکل سمت راست می‌بینید این روش به پیدا کردن یک تطابق کامل نمی‌انجامد، در صورتی که این گراف تطابق کامل دارد که در شکل سمت چپ نشان داده‌شده‌است.





در ادامه به دنبال نوشتن برنامه‌ریزی صحیحی هستیم که این مسئله را حل کند.

فرض می‌کنیم گراف $G = (V, E)$ یک گراف دوبخشی وزن‌دار با تابع وزن $w : E \to \mathbb{R}$ باشد. برای هر $e \in E$، x_e متغیری‌ست که نشان می‌دهد e در تطابق ظاهر می‌شود یا نه. در واقع x_e تنها یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را می‌تواند اتخاذ کند و e در تطابق ظاهر می‌شود، اگر و تنها اگر $x_e = 1$ باشد. برای این که مطمئن شویم یک تطابق داریم، باید بررسی کنیم که هیچ رأسی روی دو یال از تطابق نباشد. بنابر این قید زیر را به قیودمان اضافه می‌کنیم:

$$\sum_{e \in E:\, v \in e} x_e = 1, \quad v \in V$$

هدفمان بیشینه کردن وزن تطابق است. یعنی می‌خواهیم عبارت $\sum_{e \in E} w_e x_e$ را بیشینه کنیم. بنابراین برنامه‌ریزی صحیح نهایی به این صورت خواهدبود:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{که} \quad & \sum_{e \in E:\, v \in e} x_e = 1, \quad v \in V \\ & x_e \in \{0, 1\}, \quad e \in E \end{aligned}$$

در برنامه‌ریزی صحیح فوق، شرط $x_e \in \{0, 1\}$ را با شرط ضعیف‌تر $0 \le x_e \le 1$ جایگزین می‌کنیم. به این کار **آرام‌سازی**[2] و به برنامه‌ریزی خطی که حاصل می‌شود برنامه خطی آرام‌سازی‌شده[3] گفته می‌شود.

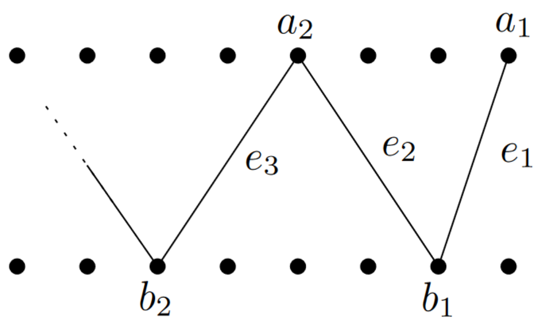
$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{که} \quad & \sum_{e \in E:\, v \in e} x_e = 1, \quad v \in V \\ & 0 \le x_e \le 1, \quad e \in E \end{aligned}$$

قضیه زیر به عبارتی بیان می کند حل برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی‌شده کافی‌ست.

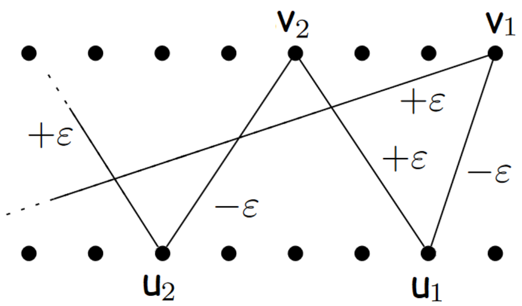
قضیه ۲. *فرض می‌کنیم گراف $G = (V, E)$ یک گراف دوبخشی وزن‌دار با تابع وزن $w : E \to \mathbb{R}$ باشد. در این صورت اگر برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی‌شده جواب شدنی داشته‌باشد، حداقل یک جواب بهینه صحیح نیز دارد.*

---
[2] relaxation
[3] LP relaxation

اثبات. در ابتدا دقت کنید که فضای جواب برنامه‌ریزی خطی آرام سازی‌شده، کران‌دار است(چرا؟) بنابراین اگر این برنامه‌ریزی جواب شدنی داشته‌باشد، جواب بهینه نیز دارد. جواب بهینه‌ای از برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی‌شده در نظر بگیرید که تعداد متغیرهای آن که مقادیر صحیح گرفته‌اند بیشینه باشد. این جواب را x^* می‌نامیم. اگر همه مؤلفه‌های x^* صحیح باشند قضیه اثبات می‌شود. پس فرض کنید حداقل یک مؤلفه مقدار ناصحیح گرفته‌باشد. یعنی یالی مانند $e_۱$ وجود دارد که $x^*_{e_۱}$ ناصحیح باشد:



یکی از دو سر این یال مانند $b_۱$ را در نظر بگیرید. با توجه به قیود برنامه‌ریزی آرام‌سازی‌شده، جمع مقادیر متغیرهای نظیر یال‌هایی که از این رأس می‌گذرند برابر با ۱ است. پس یال دیگری مانند $e_۲$ از $v_۱$ می‌گذرد که متغیر نظیر آن ناصحیح باشد. سر دیگر این یال را $a_۳$ بنامید. این استدلال برای $a_۳$ نیز قابل بیان است. اگر این استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم،در نهایت به رأسی می‌رسیم که پیش از این به آن برخورد کرده‌ایم. بنابراین دوری مانند $C = v_۱ f_۱ u_۲ f_۲ ... u_{۲k} f_{۲k} v_۱$ پیدا خواهیم‌کرد که متغیرهای نظیر همه یال‌های آن مقادیر ناصحیح دارند. دقت داشته‌باشید لزومی ندارد دور C از یال $e_۱$ بگذرد.



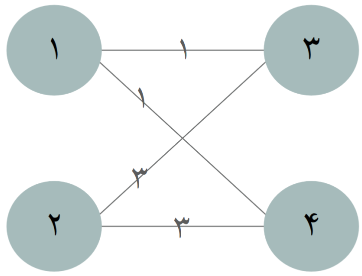
یک ϵ دلخواه در نظر می‌گیریم. به متغیرهای نظیر یال‌های این دور یکی‌درمیان مقادیر $\epsilon+$ و $\epsilon-$ اضافه می‌کنیم و این مقداردهی جدید را $\tilde{x}$ می‌نامیم. دقت داریم از آنجایی که گراف دوبخشی است دور فرد ندارد پس این کار ممکن است. منظور از $w(\tilde{x})$ و $w(x^*)$ حاصل تابع هدف برای این مقداردهی‌هاست. بنابراین می‌توان نوشت:

$$w(\tilde{x}) = \sum_{e \in E} w_e \tilde{x}_e = \sum_{e \in E} w_e x^*_e + \epsilon \sum_{i=۱}^{۲k} (-۱)^i w_{e_i} = w(x^*) + \Delta\epsilon$$

اگر $\Delta > ۰$ باشد، می‌توان ϵ را مقداری مثبت و به اندازه کافی کوچک قرار داد به طوریکه حاصل $\Delta\epsilon$ مثبت شود که با بهینه‌بودن x^* تناقض دارد. همچنین اگر $\Delta < ۰$ باشد، می‌توان ϵ را مقداری منفی و به اندازه کافی کوچک(از نظر قدرمطلق) قرار داد به طوریکه حاصل $\Delta\epsilon$ مثبت شود که باز با بهینه‌بودن x^* تناقض دارد. پس $\Delta = ۰$ است. حال می‌توان ϵ را به گونه‌ای انتخاب کرد که تعداد متغیرهای ناصحیح x^* از $\tilde{x}$ بیشتر باشد اما همچنان در قیود مسئله صدق کند که این نیز با فرض تناقض دارد. پس همه مؤلفه‌های x^* صحیح بوده‌است. $\square$

اثبات فوق در واقع الگوریتمی برای پیدا کردن جواب‌های برنامه‌ریزی صحیح از روی جواب‌های برنامه‌ریزی خطی به ما می‌دهد.

سؤال. *یک جواب بهینه غیرصحیح برای برنامه‌ریزی خطی‌ای پیدا کنید که مسئله تطابق کامل با وزن بیشینه را در گراف زیر حل می‌کند. همچنین استدلال کنید چرا این جواب بهینه است.*



۵ ارجاع و منابع

برای مطالعه بیشتر می‌توانید به [GM07] مراجعه نمایید.

مراجع

[GM07] Bernd Gärtner and Jiří Matoušek. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.