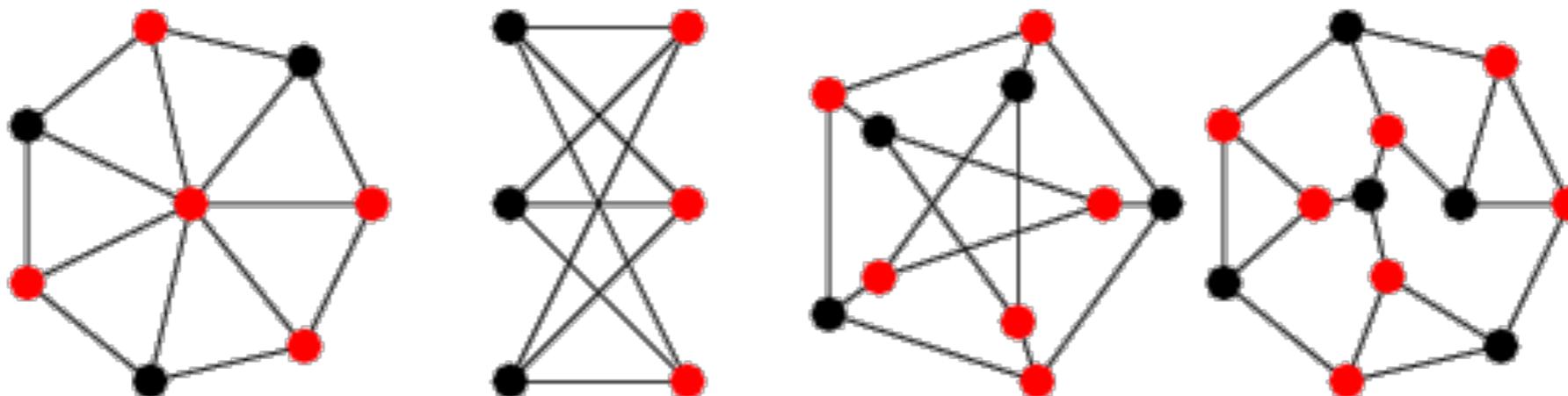


# جلسه پنجم

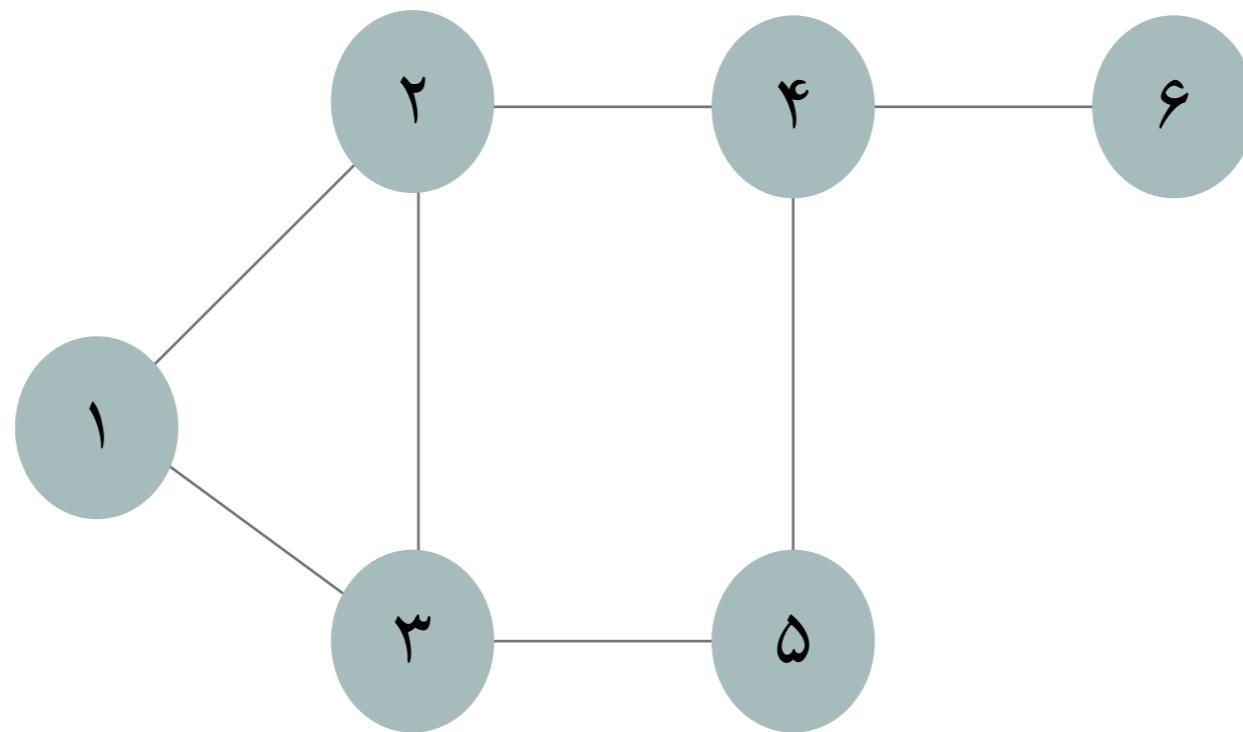
درس تحقیق در عملیات

## کوچکترین پوشش راسی

یا کسی برنامه‌ریزی خطی نسبتاً کافی است



مثال: پوشش راسی کمینه را پیدا کنید

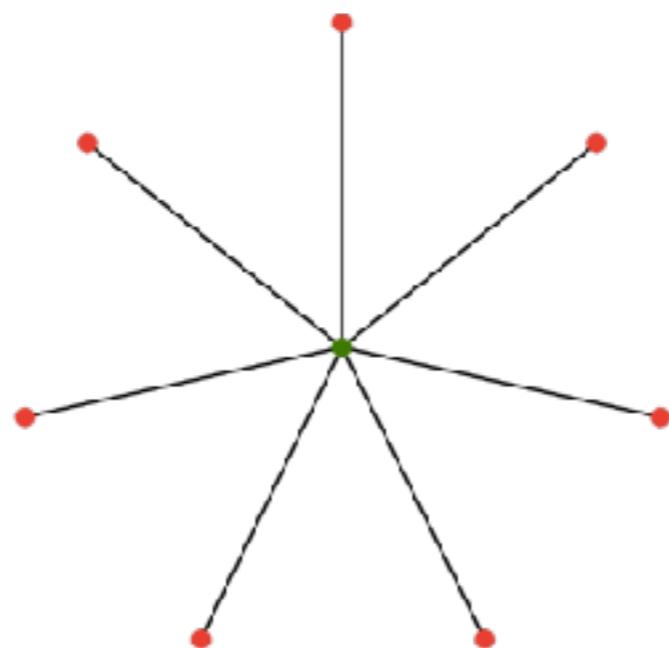


$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{subject to} & x_u + x_v \geq 1 \quad \text{for every edge } \{u, v\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \text{for all } v \in V.\end{array}$$

It is known that finding a minimum vertex cover is a computationally difficult (NP-hard) problem. We will describe an approximation algorithm based on linear programming that always finds a vertex cover with at most twice as many vertices as in the smallest possible vertex cover.



الگوريتم حريصانه ؟!



It is known that finding a minimum vertex cover is a computationally difficult (NP-hard) problem. We will describe an approximation algorithm based on linear programming that always finds a vertex cover with at most twice as many vertices as in the smallest possible vertex cover.



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{subject to} & x_u + x_v \geq 1 \quad \text{for every edge } \{u, v\} \in E \\ & 0 \leq x_v \leq 1 \quad \text{for all } v \in V.\end{array}$$

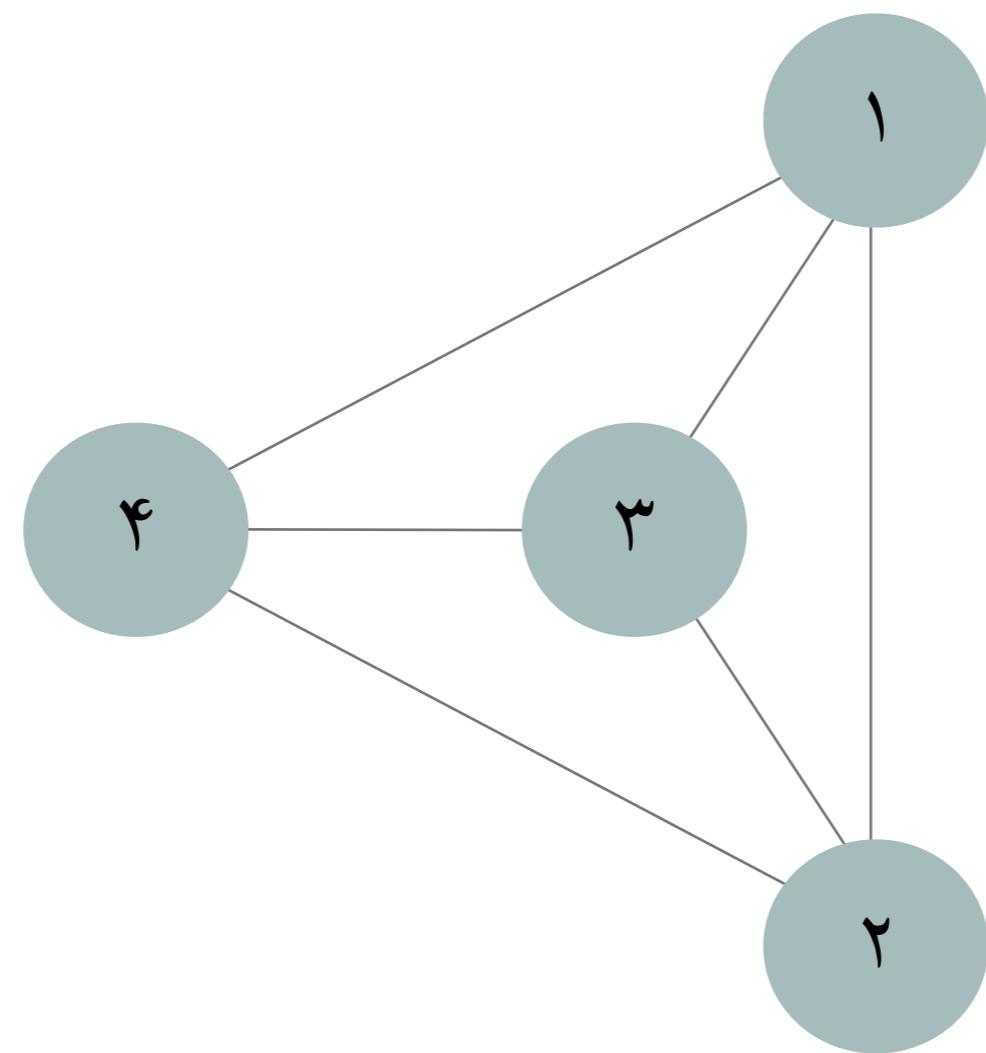
$$S_{\text{LP}} = \{v \in V : x_v^* \geq \tfrac{1}{2}\}$$

$$|S_{\text{LP}}| = \textstyle{\sum_{v \in S_{\text{LP}}} 1} \leq \textstyle{\sum_{v \in V} 2x_v^*}$$

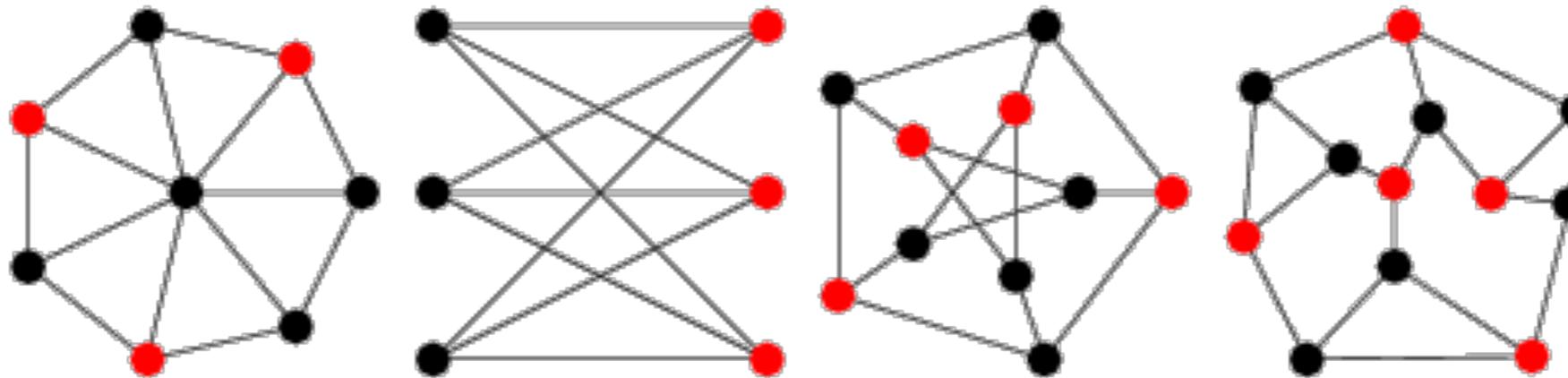
$$|S_{\text{LP}}| \leq 2 \cdot \sum_{v \in V} x_v^* \leq 2 \cdot \sum_{v \in V} \tilde{x}_v = 2 \cdot |S_{\text{OPT}}|.$$

# جلسه ۵ کوئیزک ۱

- برنامه‌ریزی خطی برای پوشش راسی گراف زیر را بنویسید

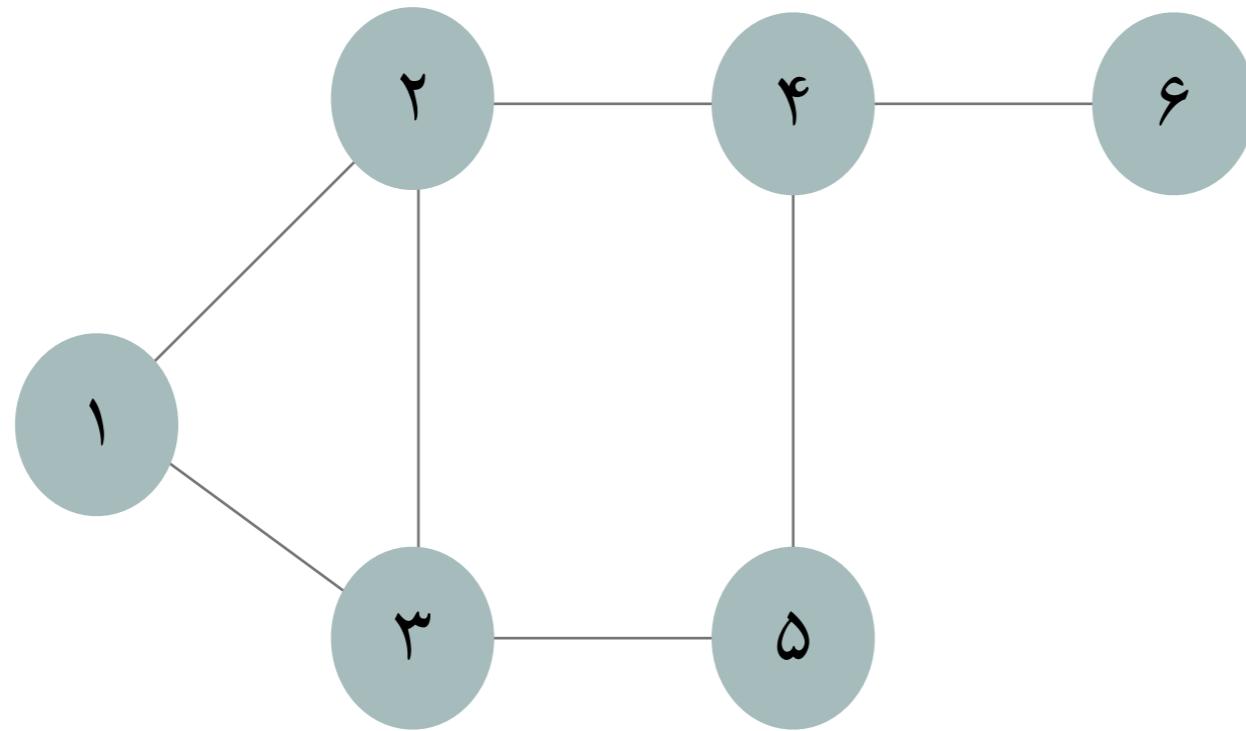


## بزرگ‌ترین مجموعه مستقل

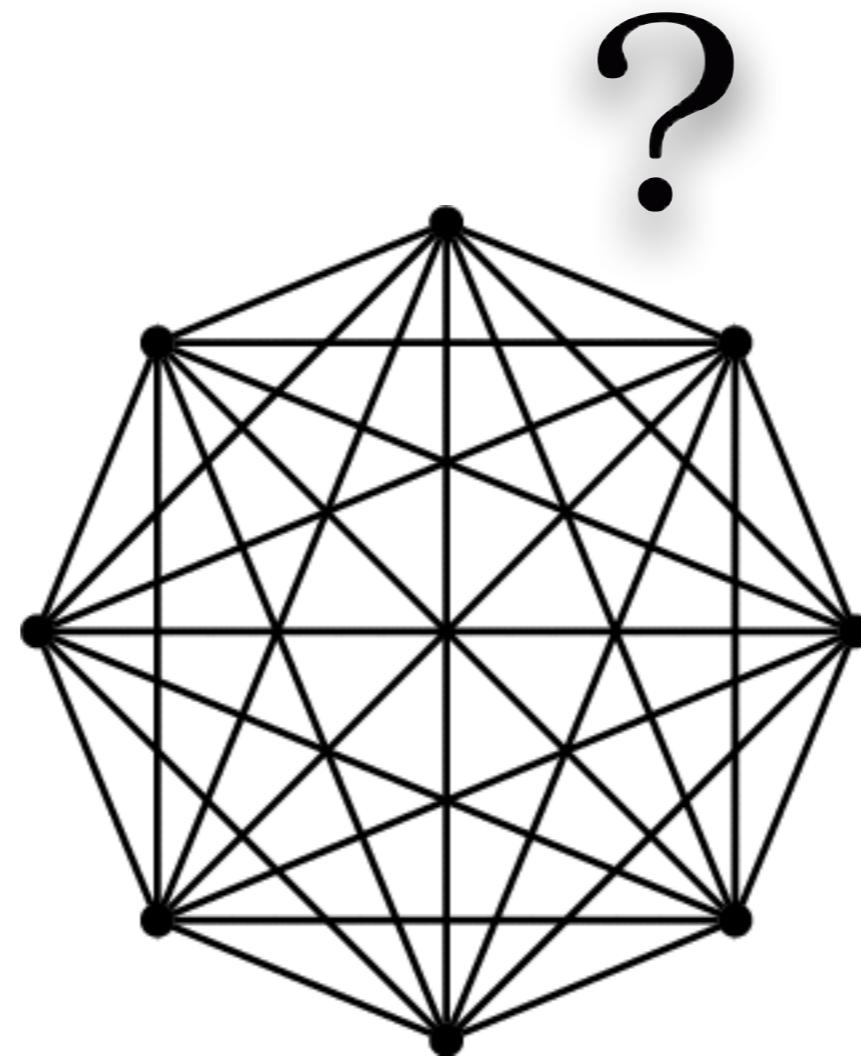


مثال: بزرگ‌ترین مجموعه مستقل را پیدا کنید – جلسه ۵ کوئیزک ۲

---



$$\begin{array}{ll}\text{Maximize} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{subject to} & x_u + x_v \leq 1 \quad \text{for each edge } \{u, v\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \text{for all } v \in V.\end{array}$$



J. Håstad: Clique is hard to approximate within  $n^{1-\varepsilon}$ ,  
Acta Mathematica 182(1999) 105–142,



# نظریه برنامه‌ریزی خطی

---

فرم کانونی

maximize  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  subject to  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ .

**Equational form of a linear program:**

Maximize     $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$   
subject to     $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$   
                 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 3x_1 - 2x_2 \\ & \text{subject to} && 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & && x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & && x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

maximize  $3x_1 - 2x_2$   
subject to  $2x_1 - x_2 \leq 4$    
 $x_1 + 3x_2 \geq 5$   
 $x_2 \geq 0.$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \quad x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \quad x_3 \geq 0$$

$$-x_1 - 3x_2 + x_4 = -5. \quad x_4 \geq 0$$

maximize      subject to

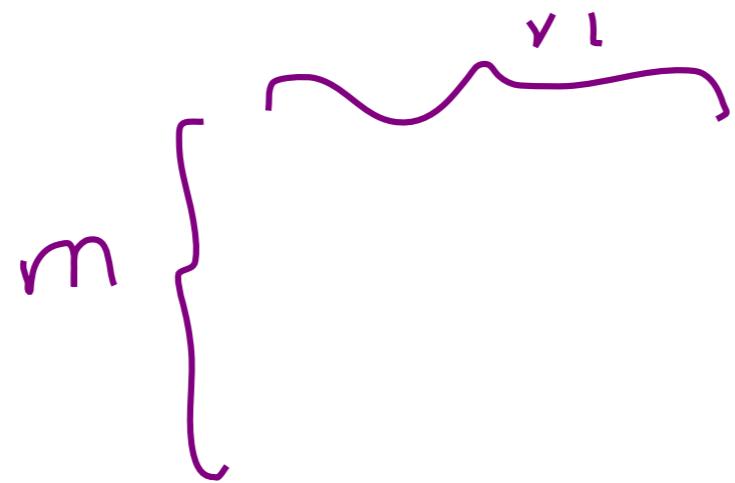
$$\begin{aligned}
 & 3x_1 - 2x_2 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\
 & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
 & x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$y_1 - z_1 \quad y_1 \geq 0, z_1 \geq 0$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \quad x_3 \geq 0$   
 $-x_1 - 3x_2 + x_4 = -5. \quad x_4 \geq 0$

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & 3y_1 - 3z_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & -y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = -5 \\ & y_1 \geq 0, z_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.\end{array}$$

تعداد معادله‌های جدید

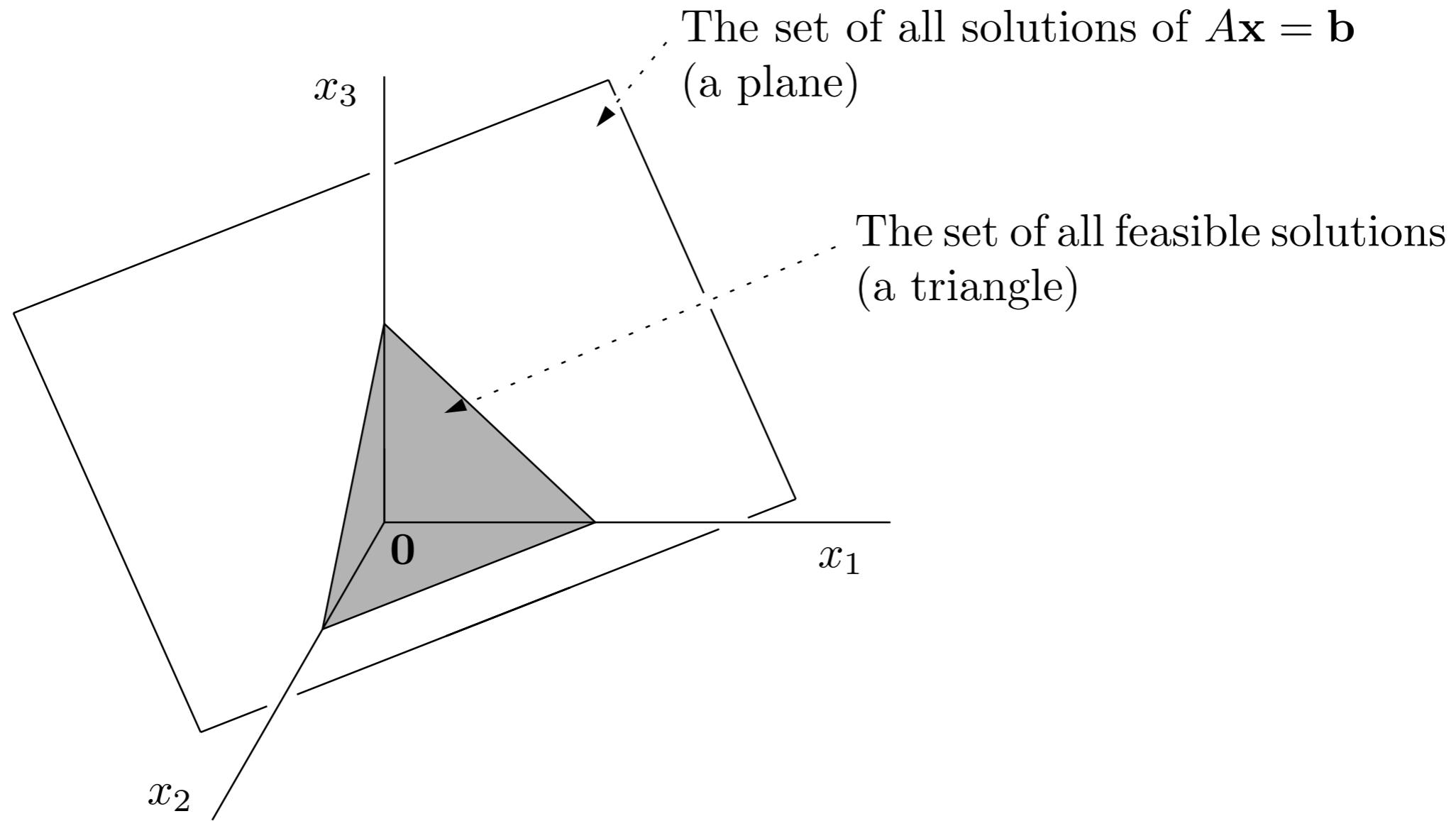
تعداد متغیرهای جدید



$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & 3y_1 - 3z_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & -y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = -5 \\ & y_1 \geq 0, z_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.\end{array}$$

$m$  تعداد معادله‌های جدید

$n+m$  تعداد متغیرهای جدید

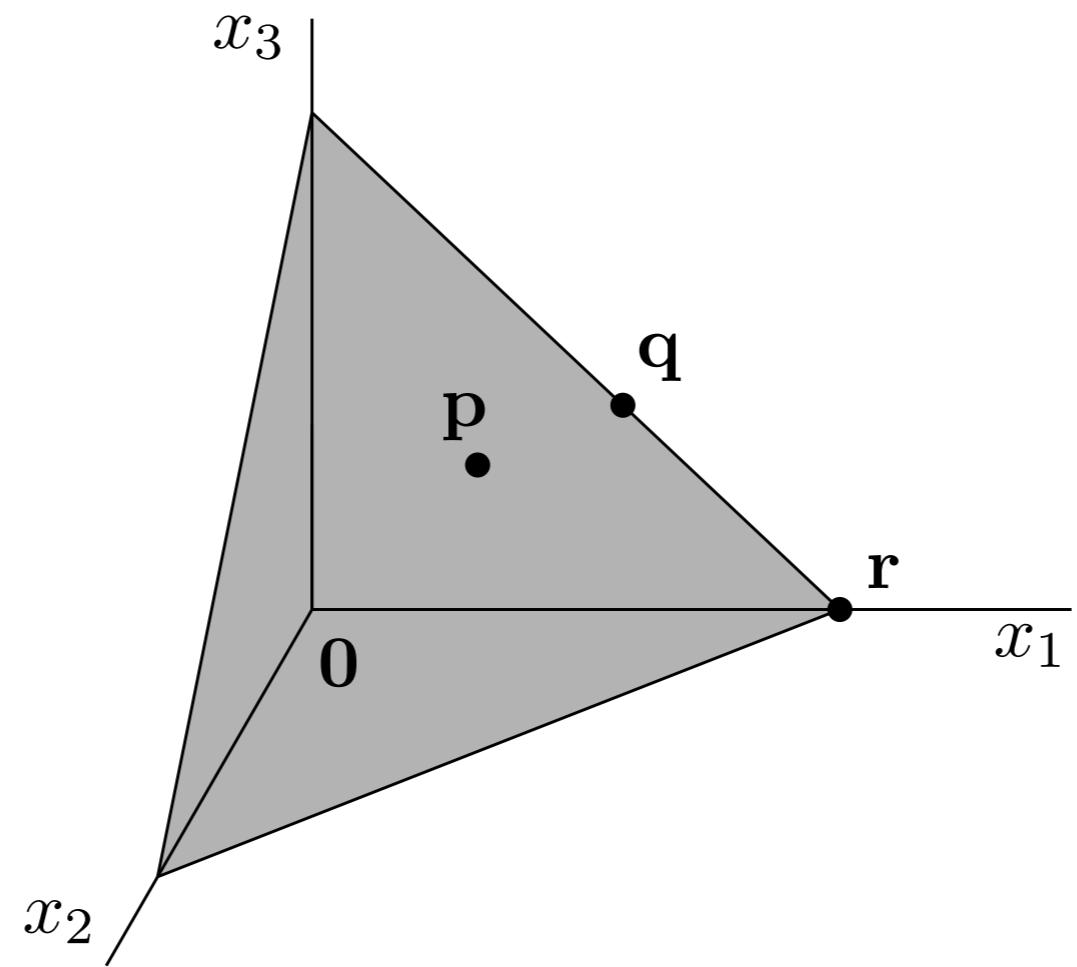


**Assumption:** We will consider only linear programs in equational form such that

- the system of equations  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has at least one solution, and
- the rows of the matrix  $A$  are linearly independent.



جواب  
شدنی پایه‌ای



$$A=\left(\begin{array}{ccccc}1&5&3&4&6\\0&1&3&5&6\end{array}\right)$$

$$B = \{2,4\}$$

$$A_B=\left(\begin{array}{cc}5&4\\1&5\end{array}\right)$$

$$\mathbf{x} \;=\; (3,5,7,9,11)$$

$$B = \{2,4\}$$

$$\mathbf{x}_B=(5,9)$$

## جواب‌های شدنی پایه‌ای

A **basic feasible solution** of the linear program

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

is a feasible solution  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  for which there exists an  $m$ -element set  $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  such that

- the (square) matrix  $A_B$  is nonsingular, i.e., the columns indexed by  $B$  are linearly independent, and
- $x_j = 0$  for all  $j \notin B$ .

متغیر پایه‌ای، متغیر غیرپایه‌ای

## مثال‌هایی برای بررسی جواب شدنی پایه‌ای

$$x = 00 \mid 00 \rightarrow B = \{1, 3\} \rightarrow \checkmark$$

$$x = 120 \mid 00 \rightarrow B = \{1, 2\} \rightarrow \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = 10110 \rightarrow x \text{ لFS}$$

$$x = 0010 \leftarrow \rightarrow x \text{ LFS}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

جواب شدنی  $\mathbf{x}$

پایه‌ای  $\mathbf{x}$        $\longleftrightarrow$       ستون‌های مستقل  $A_K$

$$K = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : x_j > 0\}$$

جواب شدنی  $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$  پایه‌ای  $\longleftrightarrow$  ستون‌های مستقل  $A_K$

$$K = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : x_j > 0\}$$

$\exists B, |B| \leq m \rightarrow K \subseteq B \stackrel{\textcircled{1}}{\rightarrow} \delta$

$m = |K|$  را  $\nexists$  کر: ستون‌های  $\checkmark$

یک جواب شدنی پایه‌ای به طور یکتا با  $B$  مشخص می‌شود

حداکثر یک جواب شدنی پایه‌ای



$B$

یک جواب شدنی پایه‌ای به طور یکتا با  $B$  مشخص می‌شود

حداکثر یک جواب شدنی پایه‌ای  $\xleftarrow{} B$

$$A_B X_B = b \rightarrow \text{کن گل}.$$

## قضیه

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

۱) اگر مساله جواب شدنی داشته باشد و تابع هدف از بالا کراندار

باشد جواب بھینه دارد

۲) اگر مساله جواب بھینه داشته باشد جواب پایه‌ای شدنی بھینه

دارد