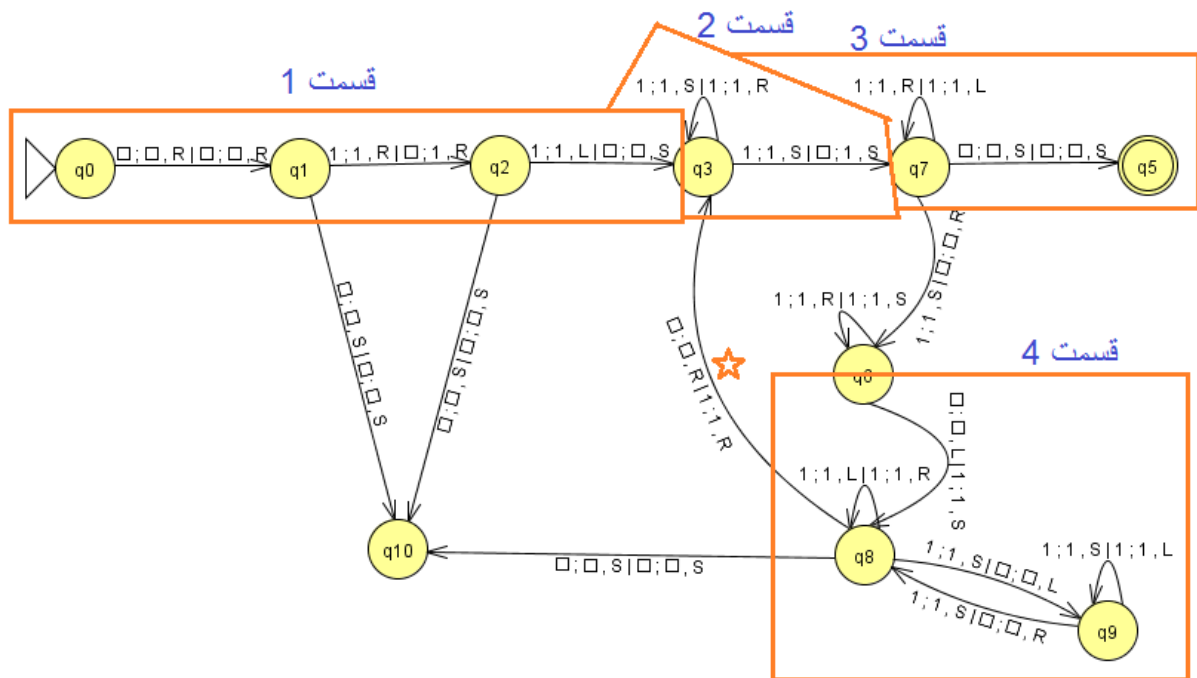


## تکلیف سری یک درس نظریه ی محاسبه

جواب سوال ۱:  
ابتدا دیاگرام را می آوریم:



توضیح روش حل: مسئله به این صورت حل شده است که برای عدد داده شده، از عدد ۲ شروع می کنیم، آن را در نوار ۲ قرار داده و بررسی می کنیم که آیا عدد مورد نظر بر دو بخش پذیر است یا نه. در صورت منفی بودن جواب، در نوار ۲، یک واحد به ۲ اضافه کرده و به عدد ۳ می رسمیم و بخش پذیری عدد مورد نظر را بر عدد جدید (۳) بررسی می کنیم و این رویه را ادامه می دهیم، در صورتی که عدد مورد نظر، عددی اول باشد، در نهایت، در نوار ۲ به همان عدد مورد نظر می رسمیم و به وضعیت توقف (halt) می رویم.

توضیح دیاگرام:

در قسمت ۱، از دلتای موجود در دو نوار عبور کرده، سپس عدد ۱ را در نوار ۲ قرار می دهیم.

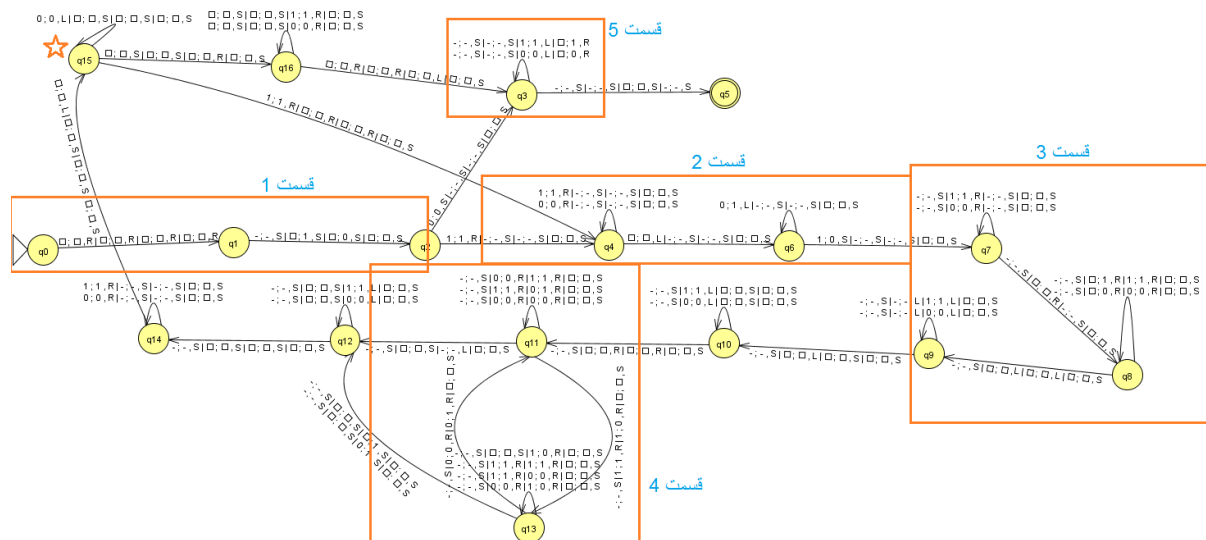
در قسمت ۲، یک واحد به عدد موجود در نوار ۲ اضافه می کنیم.

در قسمت ۳، در صورتی که عدد موجود در نوار ۲، با عدد موجود در نوار ۱ برابر شده باشد، توقف می کنیم. (رشته پذیرفته می شود)

در قسمت ۴، بررسی می شود که آیا عدد موجود در نوار ۱ بر عدد موجود در نوار ۲ بخش پذیر است یا نه. (به این طریق بررسی شده که در نوار ۱، در هر مرحله، به اندازه ی عدد موجود در نوار ۲، head نوار ۱ جلو می رود تا ببینیم در نهایت باقی مانده می آوریم یا نه).

سپس توسط transition ای که با ستاره مشخص شده است، وارد مرحله ی بررسی عددی با یک واحد بزرگتر از عدد موجود در نوار ۲، می شویم. به وضعیت  $q_{10}$  نیازی نداریم، اما وجودش، برای درک شرایطی که به crash می رسیم، مناسب است.

جواب سوال ۲:  
ابتدا دیاگرام را می آوریم:



توضیح روش حل: مسئله به این صورت حل شده است که نوار ۲ و نوار ۳ برای کار کردن مورد استفاده قرار گرفته اند، و نهایتاً جواب در نوار ۴ قرار می گیرد.

به این طریق که در مرحله ی  $t$  ام، عدد  $t-2$  ام از دنباله ی فیبوناچی در نوار ۲ و عدد  $t-1$  ام از دنباله ی فیبوناچی در نوار ۳ قرار دارد، (به جز ابتدای کار که نوار ها برای اجرای الگوریتم آماده سازی می شوند). از عدد موجود در نوار ۱ به عنوان یک شمارنده استفاده می کنیم و هر مرحله یک واحد از آن کم می کنیم. سپس عدد  $t-1$  ام موجود در نوار ۳ را در انتهای نوار ۲ کپی می کنیم که آنرا از دست ندهیم. پس از آن، عدد  $t-2$  ام با عدد  $t-1$  جمع شده و عدد  $t$  ام بدست آمده و در نوار ۳ با عدد قبلی جایگزین شده است. (اعداد موجود در نوارهای ۲ و ۳ برای راحتی کار، به صورت وارونه (به طور مثال به جای ۱۰۱۰۰، عدد ۰۰۱۰۱ ذخیره شده است) قرار دارند، اما جواب مسئله در نوار ۴ به صورت صحیح قرار می گیرد.) در صورتی که شمارنده به صفر نرسیده باشد، دوباره یک واحد از شمارنده کم می کنیم و مراحل بالا را برای وضعیت جدید تکرار می کنیم. این روند با به صفر رسیدن شمارنده، به پایان می رسد و عدد خواسته شده در نوار ۴ قرار خواهد داشت.

توضیح دیاگرام:

در قسمت ۱، نوار ها برای اجرای الگوریتم آماده سازی می شوند.

در قسمت ۲، یک واحد از عدد موجود در نوار ۱ که به عنوان شمارنده استفاده می شود، کم می شود.

در قسمت ۳، برای این که عدد موجود در نوار ۳ را از دست ندهیم (جمع دو عدد را در همان نوار ۳ می نویسیم و

عدد قبلی از دست می رود) آنرا در انتهای نوار ۲، کپی می کنیم. (با جدا کننده ی یک دلتا).  
در قسمت ۴، عدد موجود در نوار ۲ با عدد موجود در نوار ۳ جمع شده و در نوار ۳ ذخیره می شود. (این جمع نیز، از آنجا که دو عدد مورد نظر طبق توضیح بالا، وارونه اند، به صورت وارونه انجام می گیرد).  
به کمک state ای که با ستاره نشان داده شده است، تصمیم گیری می شود که آیا شمارنده به صفر رسیده است یا نه.  
در قسمت ۵، شمارنده به صفر رسیده و عدد موجود در نوار ۳ را به صورت وارونه در نوار ۴ (نوار خروجی) قرار می دهیم، سپس به وضعیت halt می رویم.

جواب سوال ۳:

$$M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma, q_1, \delta_1)$$

$$M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, q_2, \delta_2)$$

ماشین تورینگ غیرقطعی  $M'$  را به صورت زیر طراحی می کنیم:

$$M' = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$$

معرفی  $\delta$ : تمامی انتقال های  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را داریم، اما انتقال هایی که در  $\delta_1$  موجود است و به وضعیت halt رفته است را به وضعیت  $q_2$  می بریم و وضعیت halt مربوط به  $M_1$  را با تمامی انتقال هایی که به آن رفته، حذف می کنیم.  
نواری به نام X و نواری به نام Y داریم، تا موقعی که در وضعیت های  $Q_1$  هستیم، نوار X را نوار ورودی و در مدتی که در وضعیت های  $Q_2$  هستیم، نوار Y را نوار ورودی در نظر می گیریم. پس اگر  $M_1$  تا  $n_1$  و  $M_2$  تا  $n_2$  نوار داشته باشد، اکنون  $n_1 + n_2 + 1$  (یک نوار هم همان نوار ورودی اصلی است) تا نوار داریم. در ابتدای کار، اگر طول رشته ی ورودی، m باشد،  $m+1$  حالت برای شکستن آن به دو رشته ی  $m_1$  و  $m_2$  به طوری که  $m_1 m_2$  رشته ی ورودی باشد، وجود دارد، این  $m+1$  حالت را در  $m+1$  جهان موازی اجرا کرده و  $m_1$  را در نوار X و  $m_2$  را در نوار Y قرار داده به وضعیت  $q_1$  می رویم.

می دانیم متناظر با هر ماشین تورینگ غیرقطعی مانند  $M'$ ، ماشین تورینگ قطعی مانند M وجود دارد.

به این ترتیب ماشین تورینگ M مشخص گردید.

اثبات اینکه  $L(M) \subseteq L(M_1)L(M_2)$ : اگر رشته ای مانند S توسط  $M'$  پذیرفته شود، از وضعیت  $q_1 \in Q_1$  به وضعیت halt رسیده است. از طرفی، برای رفتن از مجموعه ی  $Q_1$  به مجموعه ی  $Q_2$  حتما باید از وضعیت  $q_2$  عبور کرد، پس  $S_1$  و  $S_2$  وجود دارند به طوری که  $S = S_1 S_2$  بوده و  $S_1 \in L(M_1)$  می باشد. از طرفی از وضعیت های  $Q_2$  نمی توان به وضعیت های  $Q_1$  برگشت. پس  $S_2 \in L(M_2)$  خواهد بود. در نتیجه  $S \in L(M_1)L(M_2)$  است، پس  $L(M') \subseteq L(M_1)L(M_2)$  است. اما گفتیم که متناظر با ماشین تورینگ غیرقطعی  $M'$ ، ماشین تورینگ قطعی M را داریم که  $L(M) = L(M')$  است، پس  $L(M) \subseteq L(M_1)L(M_2)$  است.

اثبات اینکه  $L(M_1)L(M_2) \subseteq L(M)$ : برای هر رشته ی  $S_1 \in L(M_1)$  و  $S_2 \in L(M_2)$  داریم:

وقتی  $S_1 S_2$  را به عنوان ورودی به  $M'$  دهیم، در یکی از جهان های موازی،  $S_1$  در X و  $S_2$  در Y قرار می گیرد، در نتیجه، رشته ی  $S_1 S_2$  توسط  $M'$  پذیرفته می شود، پس  $L(M_1)L(M_2) \subseteq L(M')$  است، از طرفی گفتیم که متناظر با ماشین تورینگ غیرقطعی  $M'$  ماشین تورینگ قطعی M را داریم به طوری که  $L(M) = L(M')$  است، پس  $L(M_1)L(M_2) \subseteq L(M)$  است، با توجه به دو نتیجه ی بدست آمده، نتیجه ی زیر، حاصل می شود:

$$L(M) = L(M_1)L(M_2)$$

جواب سوال ۴:

این مسئله از دو قسمت تشکیل شده است:

اثبات این که توان محاسباتی ماشین تورینگ قدیمی، بیشتر یا مساوی توان محاسباتی ماشین تورینگ جدید است:

برای یک ماشین تورینگ جدید دلخواه مانند  $N$ ، ماشین تورینگ قدیمی  $T$  را می سازیم به نحوی که همان کاری را که ماشین  $N$  در نهایت انجام می دهد، انجام دهد. در ماشین  $T$  ابتدای نوار را با یک حرف جدید که تا به حال استفاده نشده، علامت گذاری می کنیم و حواسمان هست که این همان  $\Delta$  است، (یعنی اگر در transition ای با این خانه کار داریم، transition را براساس تغییر ایجاد شده، تغییر می دهیم). حال باید تکلیف  $R$  و reset را مشخص کنیم، اگر در  $N$  از  $R$  استفاده شده بود، ما نیز در  $T$  از  $R$  استفاده می کنیم، اما اگر بین دو state دلخواه به نام های  $p$ ،  $q$ ، از reset استفاده شده بود، در  $T$  از  $p$  به state ای جدید می رویم و به کمک یک transition از این state به خودش، بدون تغییر نوار به ابتدای نوار می رویم، (ابتدای نوار را با یک حرف خاص مشخص کرده بودیم). و در نهایت، به وضعیت  $q$  می رویم. (در پایان کار پیش از crash یا halt در صورت نیاز، حرف ابتدای نوار را به همان  $\Delta$  تبدیل می کنیم). به این ترتیب نشان دادیم که توان محاسباتی ماشین تورینگ قدیمی، بیش از مساوی توان محاسباتی ماشین تورینگ جدید است.

اثبات این که توان محاسباتی ماشین تورینگ جدید، بیشتر یا مساوی توان محاسباتی ماشین تورینگ قدیمی است: برای یک ماشین تورینگ قدیمی دلخواه مانند  $T$ ، ماشین تورینگ جدید  $N$  را می سازیم به نحوی که همان کاری را که ماشین  $T$  در نهایت انجام می دهد، انجام دهد. در  $N$ ، برای هر حرفی که در نوار نوشته می شود (حرف های مجموعه  $\Gamma$  که با عنوان حروف مجموعه  $A$  در نظر می گیریم) حرفی جدید معرفی می کنیم (به طور مثال برای  $a$ ، حرف  $\bar{a}$  که با عنوان حروف مجموعه  $B$  در نظر می گیریم). پس از هر انتقال، head، مکان اصلی که باید باشد را نشان نخواهد داد و در ابتدای نوار قرار خواهد داشت و برای مشخص شدن جایگاه head، هر خانه ای از نوار که به جای حرف از مجموعه  $A$ ، حرف متناظرش از مجموعه  $B$  قرار گرفته باشد، head حقیقتاً به خانه ی بعدی آن در حال اشاره کردن است. حال باید تکلیف  $R$  و  $L$  و  $S$  را مشخص کنیم.

بررسی  $R$ : همان طور که گفته شد، در  $N$  اکنون head روی خانه ی اول نوار است، پس خانه ها را بدون آن که محتویاتشان را تغییر دهد، با  $R$  طی می کند تا به حرفی برسد که از مجموعه  $A$  نباشد، بلکه از  $B$  باشد، این حرف را تبدیل به حرف متناظرش از مجموعه  $A$  می کند، سپس با  $R$  به خانه ای می رسد که باید محتویاتش را براساس transition ای که در  $T$  بود، تغییر دهد، این کار را انجام می دهد، اما حرفی که در این خانه قرار می گیرد از مجموعه  $B$  بوده و حرف متناظر با حرف مورد نظر می باشد. حال، طبق فرضی که کرده بودیم، reset انجام شده و head به ابتدای نوار می رود.

بررسی  $S$ : همان طور که گفته شد، در  $N$  اکنون head روی خانه ی اول نوار است، پس خانه ها را بدون آن که محتویاتشان را تغییر دهد، با  $R$  طی می کند تا به حرفی برسد که از مجموعه  $A$  نباشد، بلکه از  $B$  باشد، از این حرف نیز با  $R$  بدون تغییر دادن، عبور کرده به خانه ای می رسد که باید محتویاتش را بر اساس transition ای که در  $T$  بود، تغییر دهد، این کار را انجام می دهد و حرفی که در این خانه قرار می گیرد از مجموعه  $A$  خواهد بود. حال، طبق فرضی که کرده بودیم، reset انجام شده و head به ابتدای نوار می رود.

بررسی  $L$ : همان طور که گفته شد، در  $N$  اکنون head روی خانه ی اول نوار است، اگر حرف خانه ی اول نوار، از مجموعه  $B$  باشد، crash می کنیم، (چرا که با این  $L$  حقیقتاً از نوار خارج شده ایم) در غیر این صورت آن را به حرف متناظرش از  $B$  تبدیل کرده و reset می کنیم. حال در مرحله ی دوم، با  $R$  به خانه ی سمت راست می رویم، اگر محتویاتش از مجموعه  $B$  باشد، آن را به حرف متناظرش از مجموعه  $A$  تبدیل کرده، با  $R$  یک خانه ی دیگر به راست می رویم و به خانه ای می رسیم که باید محتویاتش بر اساس transition ای که در  $T$  بود، تغییر کند، این کار را انجام می دهیم و حرفی که در این خانه قرار می دهیم از مجموعه  $A$  خواهد بود. حال، طبق فرضی که کرده بودیم، reset را انجام داده و head را به ابتدای نوار می بریم. به این ترتیب، عمل  $L$  انجام شده است. اما اگر در مرحله ی دوم که با  $R$  به خانه ی سمت راست آمدیم، محتویاتش از مجموعه  $A$  بود، آن را به حرف متناظرش از مجموعه  $B$  تبدیل کرده، reset کرده و با حرکت به سمت جلو به خانه ی قبلی اش می رسیم که محتویاتش

از مجموعه  $B$  است، آنرا به حرف متناظر از مجموعه  $A$  تبدیل می کنیم و با  $R$  یک خانه به سمت راست می رویم، به این ترتیب، نقطه ی بررسی ما در نوار یک واحد جلو رفت و با ادامه ی این روند به یک خانه قبل از جایگاه حقیقی  $head$  رسیده، محتویاتش را با حرف متناظرش از مجموعه  $A$  جایگزین کرده، با  $R$  یک خانه ی دیگر به راست می رویم و به خانه ای می رسیم که باید محتویاتش بر اساس  $transition$  ای که در  $T$  بود، تغییر کند، این کار را انجام می دهیم و حرفی که در این خانه قرار می دهیم از مجموعه  $A$  خواهد بود. حال، طبق فرضی که کرده بودیم،  $reset$  را انجام داده و  $head$  را به ابتدای نوار می بریم. به این ترتیب، عمل  $L$  انجام شده است. به این ترتیب نشان دادیم که توان محاسباتی ماشین تورینگ جدید، بیشر یا مساوی توان محاسباتی ماشین تورینگ قدیمی است.

با توجه به دو نتیجه ی بدست آمده، نتیجه ی زیر، حاصل می شود:  
توان محاسباتی ماشین تورینگ جدید، با ماشین تورینگ قدیمی، یکسان است.