به نام خدا

توان داخلی :

میخواهیم عملیات جدیدی را در گرافها تعریف کنیم که نامش " **توان داخلی"**[1] است و در نهایت تحقیق می کنیم که کاربردهای این توانهای داخلی با مسئله ی cancellation در ضرب جهتدار در ارتباطند.

چند نکته در مورد واژه های استفاده شده در این مقاله:

گراف: گرافهایی که استفاده میکنیم طوقه ممکن است داشته باشند ولی یال چندگانه ندارند.

یک طوقه در راس x با x x نمایش داده می شود.

f را که برابر با "**یک ریختی یک طرفه**" [2] از گراف G(V,E) به گراف G′=(V′,E′) تعریف می کنیم و به صورت f :G→G′ نشان داده می شود،تناظری است مانند:

f : V→V′ از مجموعه رئوس G به مجموعه رئوس G′ به طوری که

$$\{u,v\} \in E \rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$$

واژه های دیگر مانند گذر ، گذر بسته و... دقیقا همانند تعاریف اصلی آنها در گراف هستند.

- تعریف **"ضرب جهتدار"**[3] دو گراف:

در ضرب دو گراف G و H یعنی G × H مجموعه ی رئوس برابراست با V(G) × V(H)

و برای هر دو راس مانند (x,y) و (x′,y′) اگر xx′ یالی در G و yy′ یالی در H باشد این دو راس به هم متصلند.

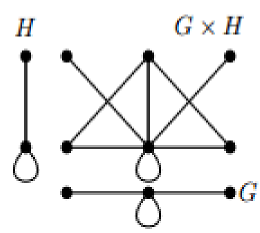

Figure 1: A direct product $G \times H$

تعمیم :

ضرب چندین گراف G_1 G_2.... G_K به طورمشابه است . طوریکه $(x_1,....,x_k)$ راسی در گراف حاصل است اگر x_i راسی در گراف G_i باشد. و دو راس$(x_1,x_2,...,x_K)$ و $(y_1,y_2,..,y_n)$ مجاورند اگر x_i y_i

[1] inner power
[2] homomorphism
[3] Direct product

یالی در G_i باشد.و اگر G_iها یکسان باشد حاصل را توان Kم G می نامیم.

تعریف توان داخلی:

Kمین توان داخلی گراف G که آن را با $G^{(k)}$ نمایش میدهیم اینگونه تعریف می شود(شماره اندیس ها به پیمانه ی k می باشد) :

$$V(G^{(k)})= \{x_0,\dots x_{k-1} : x_i \in V(G) \text{ for } 0<= i< k\}$$

$$E(G^{(k)})=\{(x_0,x_1,\dots,x_{k-1})(y_0,y_1,\dots,y_{k-1}) : x_i\, y_{i+1} \in E(G\,) \text{ and } x_i\, y_{i-1} \in E(G\,) \text{ for } 0< = i <k\}$$

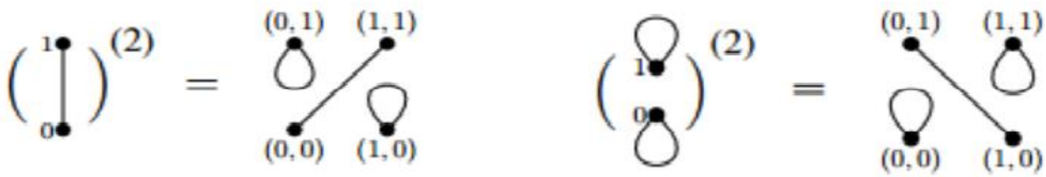

Figure2

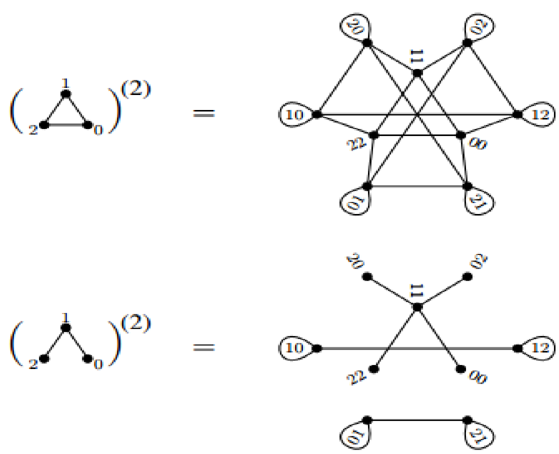

Figure 3: The inner powers $C_3^{(2)}$ and $P_3^{(2)}$. Note $G \subseteq H$ implies $G^{(k)} \subseteq H^{(k)}$.

چند قضیه با توجه به تعریف توان داخلی که در بالا بیان کردیم:

A. توان داخلی $G^{(k)}$ در راس $(x_0,x_1,\dots,x_{k-1})$ طوقه دارد اگر و تنها اگر دنباله ی $x_0,x_1,\dots,x_{k-1}, x_0$یک گذر بسته در G باشد.

B. توان داخلی $G^{(k)}$ دوبخشی است اگر و تنها اگر G دوبخشی باشد و K فرد باشد

(**ایده اثبات:یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد**)

C. توان داخلی $G^{(2)}$ همبند است اگر و تنها اگر G همبند باشد و یک دور فرد داشته باشد

(**ایده اثبات: تمرکز روی تعاریف توان داخلی و همبندی یک گراف**)

D. اگر $k>2$ باشد یک گذر در $G^{(k)}$ وجود دارد که راس $(x_0,x_1,...,x_k)$ را به راس $(y_0,y_1,...,y_k)$ متصل می کند اگر و تنها اگر برای بعضی n ها یک ریختی یک طرفه ای وجود داشته باشد:

$\Phi : P_n \times C_k \rightarrow G$ برای هر اندیس i :

$\Phi(1,i) = Xi$ and $\phi(n,i)=Yi$

(**ایده اثبات: فرض می کنیم همچین یک ریختی یک طرفه ای با ویژگی های گفته شده وجود داشته باشد و با توجه به تعریف ضرب جهتدار و توان ذاخلی اثبات می کنیم.**)

- استنباط : توان داخلی $G^{(k)}$ همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو دنباله ی Kتایی از راس های G مانند (x0,x1,...,xk-1) و (y0,y1,...,yk-1) یک ،یکریختی یک طرفه وجود دارد :

$\Phi : P_n \times C_k \rightarrow G$

که:$\Phi(1,i)= Xi$ and $\phi(n,i)=Yi$

E.برای هر دو گراف مانند G و H :

$(G\times H)^{(k)} \equiv G^{(k)} \times H^{(k)}$

(**ایده اثبات: در نظر می گیریم : $\phi(V (G \times H)^{(k)}) \rightarrow V(G^{(k)}\times H^{(k)})$ به طوری که :

$\phi(((x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_{k-1},y_{k-1}))) = ((x_0,x_1,...,x_{k-1}),(y_0,y_1,...,y_{k-1}))$ و اثبات می کنیم**)

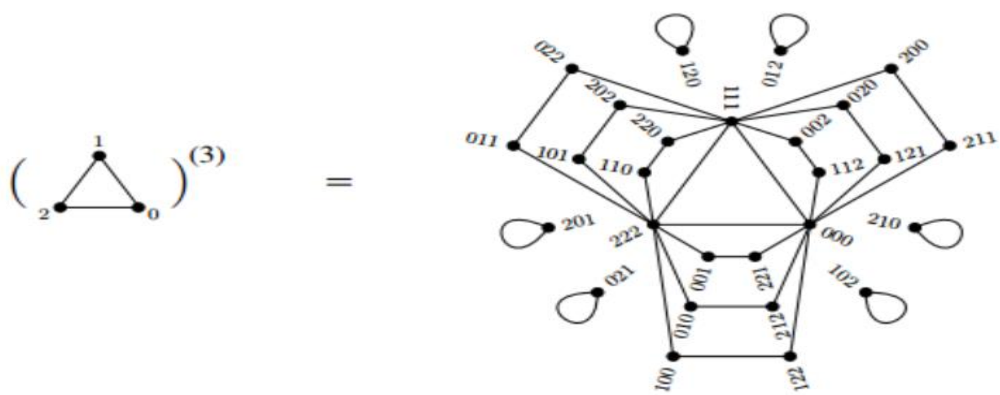

Figure 4: The inner power $C_3^{(3)}$.

:Cancellation

مسئله ی cancellation برای ضرب جهتدار در گرافها شامل تعریف حالتهایی می شود که نتیجه می دهد اگر $G\times K\equiv H\times K$ باشد در نتیجه $G\equiv H$ است.

اکنون چند نتیجه از cancellation را بیان می کنیم و کاربرد توان داخلی را در اثبات این قضیه نشان می دهیم.

تعریف: برای دو گراف G و H ، hom(G, H) نمایانگر تعداد یک ریختی های یک طرفه از G به H است.

قضیه ی زیر توسط Lovasz اثبات شد.

قضیه: اگر G و H دو گراف باشند آنگاه $G\equiv H$ اگر و تنها اگر برای هر گراف مانند X:

hom(X, A)= hom(X, B)

او همچنین به اصل زیر که اثبات ساده ای دارد اشاره کرد:

hom(X, A B) = hom(X,A) . hom(X,B)

ازاین نتیجه های زیر را استنباط کرد:

۱. اگر $G^K \equiv H^K$ آنگاه $G \equiv K$ (در اینجا منظور از توان ،توان معمولی(توان جهتدارکه همان ضرب جهتدار است) می باشد نه توان داخلی)(**ایده ی اثبات: استفاده از قضیه ی بالا**)
۲. اگر $G \times K \equiv H \times K$ و K یک طوقه داشته باشد آنگاه $G \equiv H$.

Lovasz همچنین تعمیمی از نتیجه ی دو را اثبات می کند که اگر $G \times K \equiv H \times K$ و K یک دور فرد داشته باشد آنگاه $G \equiv H$.اثبات او شامل قضیه هایی از گرافهای kبخشی می شود و تقریبا پیچیده است پس در پایان این مقاله می خواهیم تحقیق کنیم که شاید توان های داخلی که تعریف کردیم در اثباتی ساده تر برای این قضیه به ما کمک کنند.توجه داریمکه عبارت نتیجه ی ۱ اگر به جای توان ، توان خارجی باشد لزوما درست نیست در واقع figure2 نشان می دهد که ممکن است $G^{(k)} \equiv H^{(k)}$ باشد ولی G و H یک ریخت نباشند

اما در حالتی که k فرد باشد تاکنون هیچ مثال نقضی پیدا نشده است پس به حدس زیر رسیدیم.

حدس:اگرk فرد باشد و $G^{(k)} \equiv H^{(k)}$ آنگاه: $G \equiv H$

حال نشان می دهیم که با فرض درستی این حدس به اثبات ساده تری از اثباتLovasz's می رسیم.

قضیه:با فرض اینکه حدس بالا درست باشد، اگر$G\times K\equiv H\times K$ و K یک دور فرد داشته باشد آنگاه

$G \equiv H$.

اثبات: $G\times K\equiv H\times K$ وKدور فرد $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_0$ را به طول k دارد پس $(G\times K)^k\equiv(H\times K)^k$

وقضیه E که قبلا بیان کردیم نتیجه می دهد

$G^{(k)} \times K^{(k)} \equiv H^{(k)} \times K^{(k)}$

ازقضیه A نتیجه می گیریم که یک طوقه در راس $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}$ دارد و با توجه به نتیجه ی ۲ استنباط می شود:

$G^{(k)} \equiv H^{(k)} \Rightarrow G \equiv H$

لینک مقاله : http://amc-journal.eu/index.php/amc/article/viewFile/156/115