

به نام خدا



نظریه محاسبه

خرداد ۱۳۹۵

تمرین سری پنجم

نام استاد: محمدهادی فروغمند اعرابی

۱ سوال یک

برای تابع یک به یک $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وارون آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} m+1 & f(m) = n \\ 0 & \forall m \in \mathbb{N} : f(m) \neq n \end{cases}$$

نشان دهید تابع یک به یک و بازگشتی $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ^۱ وجود دارد که $F(n)$ یک تابع بازگشتی مقدماتی^۲ نیست ولی $F^{-1}(n)$ یک تابع بازگشتی مقدماتی است.

۲ سوال دو

الف) نشان دهید تابع $OT: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ که به صورت زیر تعریف می شود بازگشتی است:

$OT(m, n, t) = v$ اگر و تنها اگر خروجی ماشین تورینگ با کد m بر روی ورودی n بعد از t مرحله برابر با v باشد.

ب) نشان دهید تابعی مثل $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ که به صورت زیر تعریف می شود، بازگشتی است:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=0}^{2n} OT(\langle F \rangle, i, 2^i) \bmod 2 = 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$\langle F \rangle$ کد ماشین تورینگ است که F را محاسبه می کند.

^۱ Recursive

^۲ Primitive Recursive

۳ سوال سه

نشان دهید تابع بازگشتی $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که مجموعه نقاط ثابت آن تصمیم ناپذیر است.

$$Fix_f = \{e \in \mathbb{N} | \Phi_{f(e)} \simeq \Phi_e\}$$

۴ سوال چهار

تعریف ۱ $W_a^{(n)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n | \Phi_a^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow \right\}$

عدد ثابت $n \geq 1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تابع محاسبه پذیر s وجود دارد به طوری که:

$$W_{s(x)}^{(n)} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^n | y_1 + \dots + y_n = x\}$$

۵ سوال امتیازی

نشان دهید کلاس توابع بازگشتی جزئی^۳ کوچکترین کلاس توابعی می باشد که شامل $\mathbf{S}(n) = n+1$ ، $\mathbf{Z}(n) = 0$ ، \mathbf{P}_i^k ، $+(m, n) = m+n$ ، $\times(m, n) = m \times n$ ، $=(m, n)$ و

$$\mathbf{Fib}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ \mathbf{Fib}(n-1) + \mathbf{Fib}(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

است که تحت عملیات های ترکیب^۴ و عملگر- μ ^۵ بسته است.

Partial Recursive^۳
Composition^۴
 μ -Operator^۵