دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

کاربرد برنامه‌ریزی خطی در حل دستگاه معادلات خطی تنک

جلسه هجدهم

نگارنده: محمد شاه‌وردی کندری

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه گذشته کاربردهایی از برنامه‌ریزی خطی در کدها بیان شد و در این جلسه قصد داریم به کاربرد برنامه‌ریزی خطی در حل دستگاه‌های تنک [1] بپردازیم.

۲ مسئله بازیابی داده‌ها

۱.۲ معرفی مسئله

فرض کنید می‌خواهیم k عدد حقیقی از یک مبدا برای یک مقصد ارسال کنیم و این ارسال داده‌ها با خطا روبروست به این شکل که هر تعداد عدد که ارسال کنیم می‌دانیم که حداکثر ۰٫۰۸ اعداد ممکن است با خطا به مقصد برسند و این خطا هم از هیچ شرطی پیروی نمی‌کند و اعداد ممکن است به هر عدد دیگری تغییر کنند. حال می‌خواهیم روشی بیابیم که بتوان این داده‌های همراه با خطا را بازیابی کرد.

۲.۲ ایده حل مسئله

ایده‌های مختلفی می‌توان برای حل این مسئله در نظر گرفت مثلا اینکه هر یک از اعداد را چندین بار ارسال کنیم و در مقصد با توجه به اینکه چه اعدادی تکرار شده‌اند اعداد اصلی را بدست بیاوریم اما این ایده جواب نمی‌دهد زیرا اگر k بزرگ باشد مجبور به ارسال تعداد زیادی عدد هستیم در

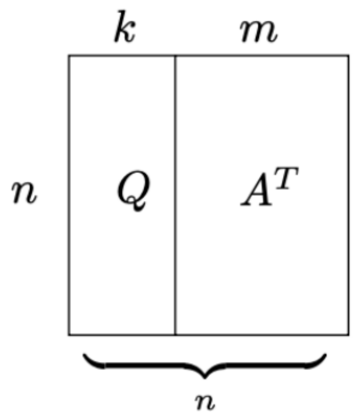
[1] Sparse

این صورت تعداد اعدادی که ممکن است اشتباه به مقصد برسند نیز افزایش می‌یابد بنابراین ممکن است تعداد زیادی از این خطاها مربوط به یکی از اعداد باشد که در این صورت ما موفق به بازیابی آن عدد نخواهیم بود.

ایده اصلی حل این مسئله به این شکل است که به جای ارسال خود اعداد تعدادی ترکیب خطی از اعداد را ارسال می‌کنیم و سعی می‌کنیم با این ترکیب خطی‌ها اعداد اولیه را بیابیم. بطور دقیق‌تر فرض کنید داده‌های اصلی را در بردار w قرار داده‌ایم. در این صورت یک ماتریس $Q_{n\times k}$ در نظر می‌گیریم و بردار z را ارسال می‌کنیم که برابر است با $z = Qw$. در مقصد ما بردار $\tilde{z} = Qw + x$ را دریافت می‌کنیم که در آن x همان خطاست و طبق فرض ما حداکثر ۰/۰۸ از درایه‌هایش غیرصفر هستند.

دقت کنید که اگر x را داشته باشیم آنگاه مقدار $Qw = \tilde{z} - x$ را داریم و اگر Q را طوری انتخاب کرده باشیم که هر k سطر آن مستقل خطی باشند آنگاه می‌توان با انتخاب k تا از سطرهای آن یک ماتریس وارون پذیر بدست آورد و از معادله بالا مقدار بردار w قابل محاسبه است. اما از آنجا که x را نداریم کار سخت‌تر است و از ایده دیگری استفاده می‌کنیم:

فضای پوچ[۲] ماتریس Q را در نظر بگیرید و فرض کنید A ماتریسی باشد که سطرهایش تشکیل یک پایه متعامد برای این فضا باشد بنابراین با توجه به اینکه $rank(Q) = k$ پس سایز ماتریس‌ها به شکل زیر خواهد بود:



که در آن $m = n - k$. حال با توجه به نحوه انتخاب A می‌دانیم ضرب داخلی هریک از سطرهای آن با هریک از ستون‌های Q برابر با صفر است پس داریم $AQ = ۰$. بنابراین داریم:

$$A\tilde{z} = A(Qw + x) = AQw + Ax = Ax$$

و از آنجا که ما مقدار $A\tilde{z}$ را داریم پس مقدار Ax را نیز داریم بنابراین کافی است با داشتن $b = Ax$ مقدار x را بیابیم چرا که اگر مقدار بردار x را بیابیم بنابر آنچه گفتیم می‌توان بردار w را یافت.

بنابراین مسئله ما به حل یک معادله خطی تبدیل شده است اما مشکل اینجاست که اندازه ماتریس A ، $(n-k)\times n$ است پس جواب ما یک زیرفضای k بعدی خواهد بود بنابراین قادر به یافتن x درحالت کلی نیستیم و باید از این فرض که حداکثر ۸ درصد از درایه‌های x غیرصفر هستند استفاده کنیم. برای این کار از قضیه زیر استفاده می‌کنیم که نشان می‌دهد اگر ماتریس ما یک ویژگی خاص داشته باشد آنگاه معادله حداکثر یک جواب با شرط گفته شده خواهد داشت:

قضیه. اعداد طبیعی n, m, r و ماتریس A با ابعاد $m \times n$ مفروض هستند. در این صورت دستگاه معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب x دارد که تعداد درایه‌های ناصفرش کمتر مساوی r است، اگر و فقط اگر هر ۲r ستون دلخواه از ماتریس A مستقل خطی باشند.

اثبات. یک طرف قضیه بالا که نیاز داریم را ثابت می‌کنیم، اینکه اگر ماتریس A ویژگی گفته شده را داشته باشد آنگاه جواب یکتاست. برای اثبات این موضوع با برهان خلف فرض کنید دو جواب $x_۱, x_۲$ داریم که تعداد درایه‌های ناصفر هریک حداکثر r تاست. دراین صورت داریم:

$$A(x_۱ - x_۲) = ۰ \Rightarrow \text{یک ترکیب خطی از } ۲r \text{ تا ازستون‌های } A \text{ برابر با صفر است}$$

دلیل این موضوع هم این است که حاصل ضرب یک بردار در یک ماتریس برابر با برداری است که ترکیب خطی‌ای از ستون‌های آن است و از طرف دیگر بردار $x_۱ - x_۲$ حداکثر ۲r درایه ناصفر دارد پس ترکیب خطی گفته شده حداکثر روی ۲r تا از ستون‌هاست و این موضوع با فرض صورت قضیه تناقض دارد پس چیزی که می‌خواستیم ثابت شد.

بنابراین فهمیدیم که اگر ماتریس A شرایط قضیه را داشته باشد مشکل جواب‌های متعدد حل خواهد شد. حال در مسئله اصلی می‌توانیم A را یک ماتریس $(۲r + k) \times ۲r$ در نظر بگیریم که هر ۲r ستونش از هم مستقل باشند و Q را هم ماتریس $k \times (۲r + k)$ در نظر بگیریم به گونه‌ای که

[۲] Null space

ستون‌های آن در کنار سطرهای ماتریس A یک پایه برای فضای $2r+k$ بعدی باشند(مقدار n را برابر با $2r+k$ گرفته‌ایم) در این صورت سطرهای A بر ستون‌های Q عمود خواهند بود. از طرفی برای تولید ماتریس A با این ویژگی، بدون اثبات گفته شد که اگر A را بطور تصادفی ایجاد کنیم(مثلا درایه‌هایش را بطور تصادفی از یک توزیع نرمال بگیریم) با احتمال ۱ شرط موجود در قضیه بالا را خواهد داشت پس در تولید کردن ماتریس‌های A, Q مشکلی نداریم و تنها مشکل حل نشده این است که چگونه این بردار یکتای x را بیابیم؟

۳.۲ حل دستگاه تنک

برای بردار دلخواه x تابع $\|x\|_0$ را برابر با تعداد درایه‌های غیرصفر x می‌گیریم. طبق آنچه گفتیم مسئله ما یافتن بردار x است که

$$Ax = b \qquad \|x\|_0 \leq r$$

اما از آنجا که کلا تابع $\|x\|_0$ تابع خوب و تمیزی نیست، حتی محدب هم نیست، نمی‌توانیم این مسئله را درحالت کلی حل کنیم و باید ایده دیگری بزنیم. ایده دیگر ما حل کردن یک مسئله دیگر نزدیک به مسئله اصلی است.

به جای تابع بددست $\|.\|_0$ از تابع $\|.\|_1$ استفاده می‌کنیم که در آن $\|x\|_1 = \Sigma_{i=1}^{n}|x_i|$ ، که این مسئله با برنامه‌ریزی خطی زیر معادل است:

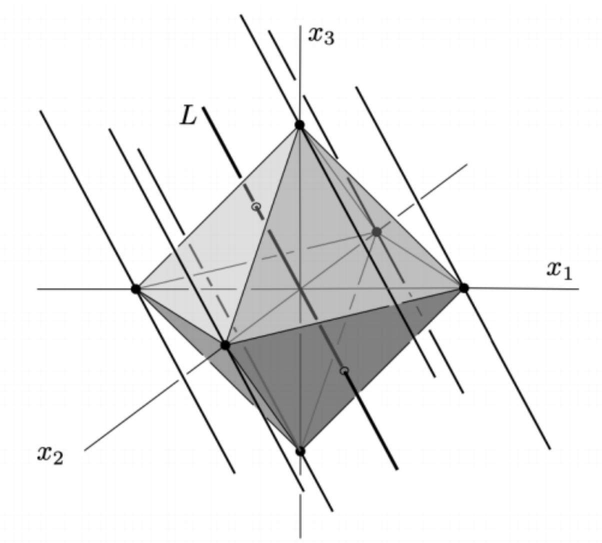
$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & -u \leq x \leq u \\ & u, x \in R^n, u \geq 0 \end{aligned}$$

زیرا تابع هدف کمینه کردن مجموع u_i هاست پس همه تا جایی کوچک می‌شوند که یکی از نامساوی‌های سطر سوم به تساوی تبدیل شوند و این معادل با این است که در جواب بهینه خواهیم داشت $\forall i: u_i = |x_i|$ پس پاسخ این برنامه‌ریزی خطی همان پاسخ مسئله ماست. حال باید بررسی کنیم که جواب این مسئله جدید چه ارتباطی با جواب مسئله اصلی ما دارد که در این راستا قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه. فرضا n عددی طبیعی است و $m = \lfloor 0/75n \rfloor$ و همچنین فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ تصادفی است، به این شکل که درایه‌هایش بطور مستقل از توزیع نرمال $N(0,1)$ انتخاب شده‌اند، در این صورت این ماتریس با احتمال حداقل $1 - e^{-cm}$ ، که در آن $c > 0$ مقداری ثابت است، دارای ویژگی زیر است:

اگر $b \in \mathbb{R}^n$ یک بردار باشد که دستگاه $Ax = b$ حداکثر دارای یک جواب x با حداکثر $0/08n$ درایه ناصفر باشد،آنگاه این جواب با جواب برنامه‌ریزی خطی بالا یکسان است.

بنابراین با انتخاب تصادفی ماتریس A و یک مقدار n بزرگ با احتمال زیاد می‌توانیم توقع داشته باشیم که بردار x واقعی را می‌یابیم و از روی آن می‌توانیم بردار w را بازیابی کنیم. تعبیر هندسی این قضیه هم به این شکل است که زیرفضای $Ax = b$ را در نظر بگیرید، برای پیدا کردن نقطه‌ای روی این زیرفضا که کمترین مقدار $\|.\|_1$ را دارد می‌توانیم فرض کنیم که سادک(مجموعه نقاطی از فضا که مقدار $\|.\|_1$ آن‌ها باهم برابر است یا به عبارت دیگر شکل گوی واحد برای این نرم) با شعاع صفر داریم و شروع به افزایش دادن شعاع آن می‌کنیم تا جایی که اولین نقطه‌ی آن به زیرفضای گفته شده برخورد کند که با توجه به شکل سادک به احتمال زیاد این نفطه برخورد یکی از گوشه‌هاست و این یعنی تعداد زیادی از درایه‌هایش صفر هستند و این شهود قضیه را تایید می‌کند. شکل زیر سادک را در فضای سه بعدی نشان می‌دهد:



۳ ارجاع و منابع

۱. ویدئو جلسه هجدهم درس