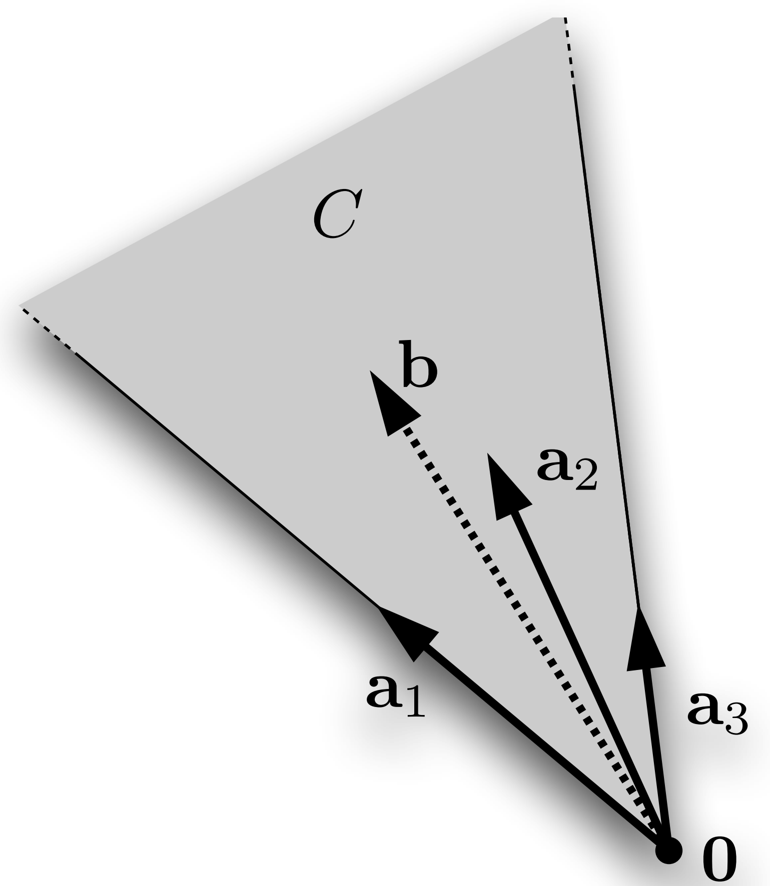
بسم الله الرحمن الرحیم

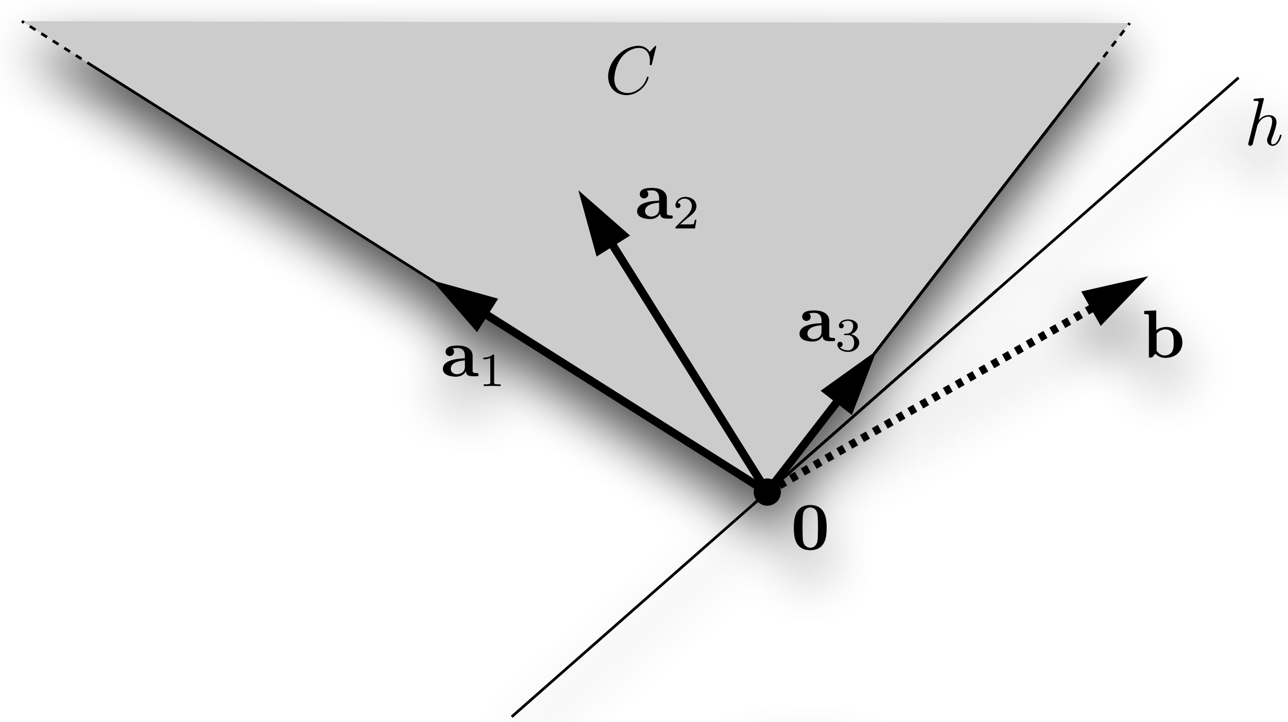
جلسه یازدهم

درس تحقیق در عملیات



C
$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{0}$

(F1′)



C
h
$\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{0}$

(F2′)

	The system $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

duality from Farkas lemma

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ -\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\gamma - \varepsilon \end{pmatrix}$$

شدنی

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_0 \quad x \geq 0$$

نشدنی

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon \quad x \geq 0$$

(ii) *The system* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *has a nonnegative solution if and only if every nonnegative* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *with* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *also satisfies* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$.

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \quad \hat{\mathbf{y}}^T \hat{A} \geq \mathbf{0}^T \quad \hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon < 0$$

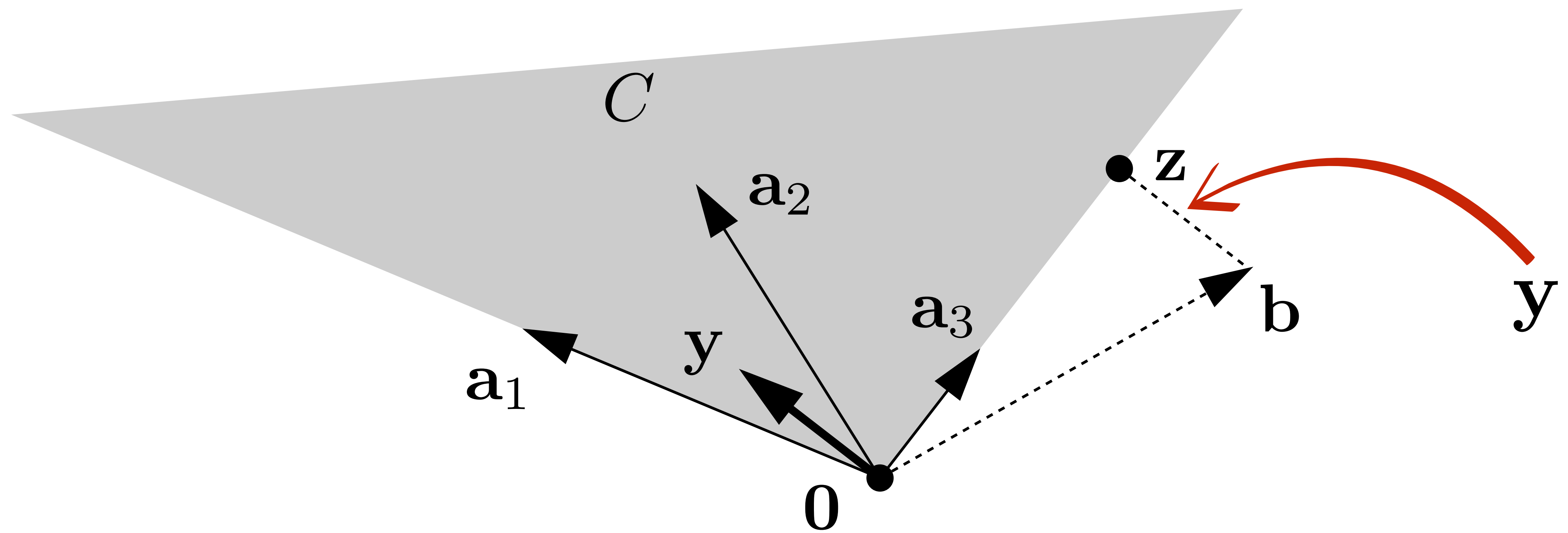
$$A^T \mathbf{u} \geq z\mathbf{c}, \;\; \mathbf{b}^T \mathbf{u} < z(\gamma + \varepsilon)$$

$$\mathbf{v} := \frac{1}{z}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

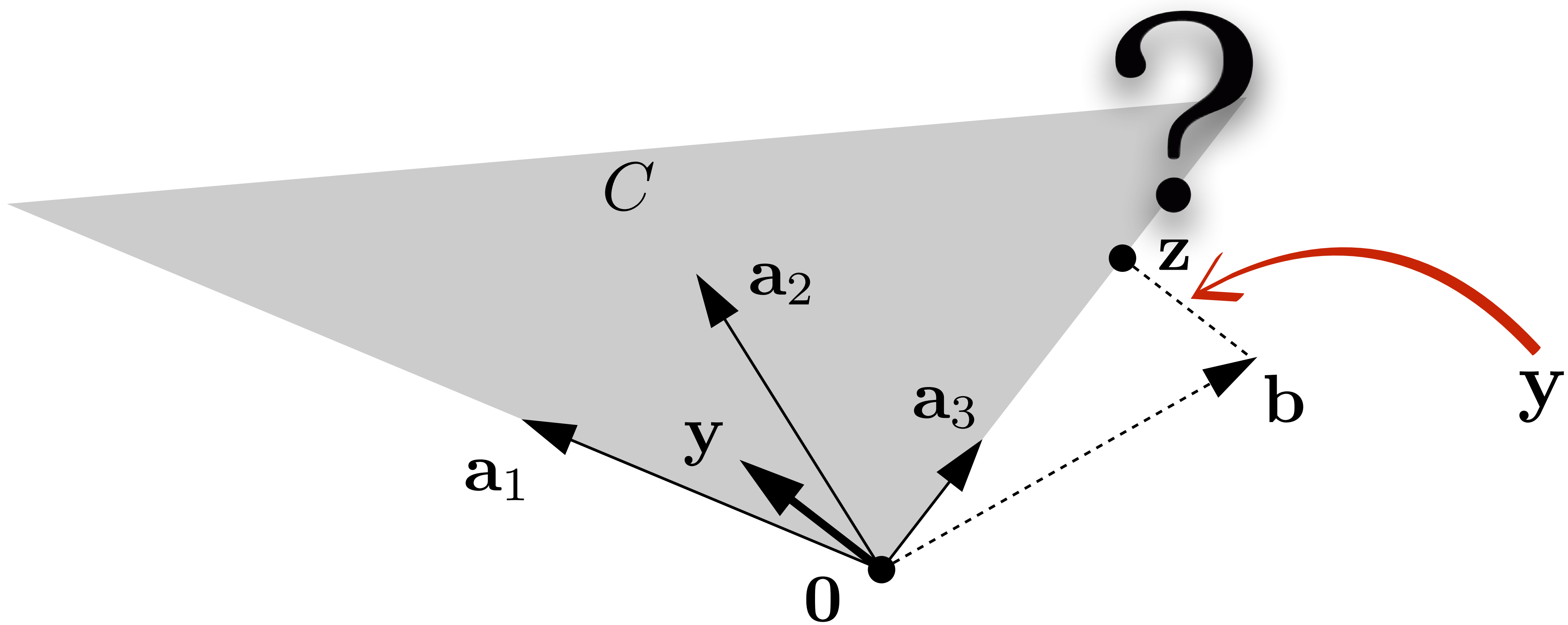
$$A^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c}, \;\; \mathbf{b}^T \mathbf{v} < \gamma + \varepsilon.$$

شدنی،
بهینه، b0

Farkas Lemma: An Analytic Proof



Farkas Lemma: An Analytic Proof



Lemma. *Let C be a convex cone in $\mathbb{R}^m$ generated by finitely many vectors $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, and let $\mathbf{b} \notin C$ be a point. Then there exists a point $\mathbf{z} \in C$ nearest to $\mathbf{b}$ (it is also unique but we won't need this).*

Lemma. *Let $X \subseteq \mathbb{R}^m$ be a nonempty closed set and let $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ be a point. Then X has (at least one) point nearest to $\mathbf{b}$.*

Lemma. *Every finitely generated convex cone is closed.*

Lemma. *Every primitive cone P in $\mathbb{R}^m$ is closed.*

Lemma. *Let C be a convex cone in $\mathbb{R}^m$ generated by finitely many vectors $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Then C can be expressed as a union of finitely many primitive cones.*

نگاه منطقی به لم فارکاش

نابرابری‌های ناسازگار!

$$4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

نابرابری‌های ناسازگار!

$$4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$\downarrow$$

$$10x_1 + 5x_2 \leq 14.$$

نابرابری‌های ناسازگار!

$$4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-2x_1 - x_2 \leq -3$$

$$10x_1 + 5x_2 \leq 14.$$

نابرابری‌های ناسازگار!

$$4x_1 + x_2 \le 4$$

$$-x_1 + x_2 \le 1$$

$$-2x_1 - x_2 \le -3$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 14$$

$$0 \le -1$$

Whenever a system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ of finitely many linear inequalities is **inconsistent**, that is, there is no $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfying it, we can derive the (obviously inconsistent) inequality $0 \leq -1$ from it by the above procedure.

	The system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

Whenever a system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ of finitely many linear inequalities is **inconsistent**, that is, there is no $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfying it, we can derive the (obviously inconsistent) inequality $0 \leq -1$ from it by the above procedure.

روش حذف فوریه– موتسکین

روش حذف فوریه ـ موتسکین

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
x & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
x & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
x & \geq & 7 & + & 5y & - & 2z \\
x & \geq & -4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max(7 + 5y - 2z, -4 + \tfrac{2}{3}y + 2z) \\
&\quad \leq \min(5 + \tfrac{5}{2}y - 2z, 3 + 2y - z, 3 - 2y + \tfrac{1}{5}z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7+5y-2z &\leq 5+\tfrac{5}{2}y-2z \\
7+5y-2z &\leq 3+2y-z \\
7+5y-2z &\leq 3-2y+\tfrac{1}{5}z \\
-4+\tfrac{2}{3}y+2z &\leq 5+\tfrac{5}{2}y-2z \\
-4+\tfrac{2}{3}y+2z &\leq 3+2y-z \\
-4+\tfrac{2}{3}y+2z &\leq 3-2y+\tfrac{1}{5}z.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrcr}
\frac{5}{2}y & & & \leq & -2 \\
3y & - & z & \leq & -4 \\
7y & - & \frac{11}{5}z & \leq & -4 \\
-\frac{11}{6}y & + & 4z & \leq & 9 \\
-\frac{4}{3}y & + & 3z & \leq & 7 \\
\frac{8}{3}y & + & \frac{9}{5}z & \leq & 7.
\end{array}
$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \text{(n variables)}$$

$$\downarrow$$

$$A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}' \quad \text{(n–1 variables)}$$

$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ has a solution if and only if $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ has a solution, and

each inequality of $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ is a positive linear combination of some inequalities from $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

اثبات (قسمت اول)

$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \qquad a_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in C \\ -1 & \text{if } i \in F \\ 0 & \text{if } i \in L. \end{cases}$$

$$x_1 + \mathbf{a'}_j^T \mathbf{x'} \le b_j \quad \Rightarrow \quad x_1 \le b_j - \mathbf{a'}_j^T \mathbf{x'}$$

$$-x_1 + \mathbf{a'}_k^T \mathbf{x'} \le b_k \quad \Rightarrow \quad -b_k + \mathbf{a'}_k^T \mathbf{x'} \le x_1$$

$$\Downarrow$$

$$-b_k + \mathbf{a'}_k^T \mathbf{x'} \le b_j - \mathbf{a'}_j^T \mathbf{x'}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a'}_j^T \mathbf{x'} + \mathbf{a'}_k^T \mathbf{x'} \le b_j + b_k, \quad j \in C,\ k \in F.$$

معادلات جدید، ترکیبی نامنفی از معادلات قدیم

اثبات (قسمت دوم)

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$ شدنی $$A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$$

شدنی

شدنی

$$\max_{k\in F}\left(\mathbf{a}'^{T}_{k}\tilde{\mathbf{x}}' - b_k\right) \leq \min_{j\in C}\left(b_j - \mathbf{a}'^{T}_{j}\tilde{\mathbf{x}}'\right)$$

x_1

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \mathbf{a}'^{T}_{j}\tilde{\mathbf{x}}' &\leq b_j, \quad j \in C, \\ -\tilde{x}_1 + \mathbf{a}'^{T}_{k}\tilde{\mathbf{x}}' &\leq b_k, \quad k \in F. \end{aligned}$$

اثبات لم فارکاش

با روش حذف فوریه_ موتسکین

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \text{(n variables)}$$

$$\downarrow$$

$$A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}' \quad \text{(n–1 variables)}$$

$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ has a solution if and only if $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ has a solution, and

each inequality of $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ is a positive linear combination of some inequalities from $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

✓

جواب داشتن ==> به ازای هر y ...

$A\tilde{x} \leq b$

$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ satisfies $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ $\longrightarrow$ $0 = y^T A\tilde{x} \leq y^T b$

جواب داشتن <== به ازای هر y ...

$A x \leq b$ $\xrightarrow{\text{حکم}}$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T, \quad \text{and } \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$

نشدنی

	The system $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

جواب داشتن ==> به ازای هر y ...

$A\tilde{x} \le b$

$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$ satisfies $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$

$$0 = y^T A\tilde{x} \le y^T b$$

جواب داشتن <== به ازای هر y ...

$Ax \le b$

نشدنی

حکم

$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T, \quad \text{and } \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0.$$

جواب داشتن <== به ازای هر y ...

$Ax \le b$ نشدنی

حکم

$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T, \quad \text{and } \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$$

استقراء روی تعداد متغیرها:

پایه: n=0 $\quad \mathbf{0} \le \mathbf{b}$

گام:

$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$

تبدیل فوریه‌ـ موتزکین

$A'\mathbf{x}' \le \mathbf{b}'$

$$\boxed{(\mathbf{0} \,|\, A') = MA, \quad \mathbf{b}' = M\mathbf{b}.}$$

$$\mathbf{y} = M^T \mathbf{y}' \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{y}^T A = \mathbf{y}'^T MA = \mathbf{y}'^T (\mathbf{0} \,|\, A') = \mathbf{0}^T \\ \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{y}'^T M\mathbf{b} = \mathbf{y}'^T \mathbf{b}' < 0, \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \\ \boxed{\mathbf{y}' \ge \mathbf{0}} \end{cases}$$

روش بیضی‌گون

به نام خدا

مقدار گزاره روش بیضی‌گون (Ellipsoid Method)

چی؟

گوی واحد در $\mathbb{R}^d$:
$$x_1^2 + \cdots + x_d^2 \le 1$$

بیضی‌گون‌ها در جهت راستاهای اصلی :
با طول‌های $a_1 - a_d$ کشیده
$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_d}{a_d}\right)^2 \le 1$$

$$x^T \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}^{-2} x \le 1$$

اگر بیضی‌گون بالا را دوران بدهیم ...
(ماتریس دوران U)
$$(U^{-1}x)^T \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}^{-2} (U^{-1}x) \le 1$$

$$x^T Q x \le 1$$

$$Q = U^{-T}(A^{-1})^T A^{-1} U^{-1} = B^T B \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}$$

$$x^T Q x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) \ge 0$$

تعریف بیضی‌گون‌ها :

$$E = \{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; (x-c)^T Q (x-c) \le 1 \}$$

$c \in \mathbb{R}^d$ بردار دلخواه و Q یک ماتریس مثبت معین است .

(i) حجم بیضی‌گون با شعاع‌های اصلی $a_1, \dots, a_d$ ، $a_1 \cdots a_d$ برابر حجم گوی واحد است

(ii) تصویر یک بیضی‌گون تحت اثر تبدیل خطی همچنان بیضی‌گون است!

$$T(E) = \{x : T^{-1}x \in E\}$$

$$= \{y : (T^{-1}y - c)^T Q (T^{-1}y - c) \leq 1\}$$

$$(T^{-1}(y - c'))^T Q (T^{-1}(y - c')) \leq 1$$

$$(y - c')^T \underbrace{(T^{-1})^T Q T^{-1}} (y - c') \leq 1$$

مسئله یافتن جواب برای یک دستگاه نابرابر خطی

$$Ax \le b \qquad (*)$$

؟

فرض ۱) همه جواب‌های (*) در یک توپ بزرگ شعاع R قرار دارند.

~~فرض ۲) اگر یک توپ شعاع r در مجموعه جواب‌های (*) جا دارد.~~

حجم مجموعه جواب از حجم توپ شعاع r بیشتر است.

مسئله یافتن جواب برای یک دستگاه نابرابری‌ها

$$Ax \leq b \quad (*)$$

?

P

~~فرض (۱) همه جواب‌های (*) در یک گوی به شعاع R قرار دارند~~

~~فرض (۲) اگر یک گوی به شعاع ε در حجم جواب‌های (*) جا دارد.~~

~~حجم ناحیه جواب از حجم گوی به شعاع ε بیشتر است.~~

٤: حجم محدوده شدنی حداقل اندازه گویی به شعاع ϵ باشد

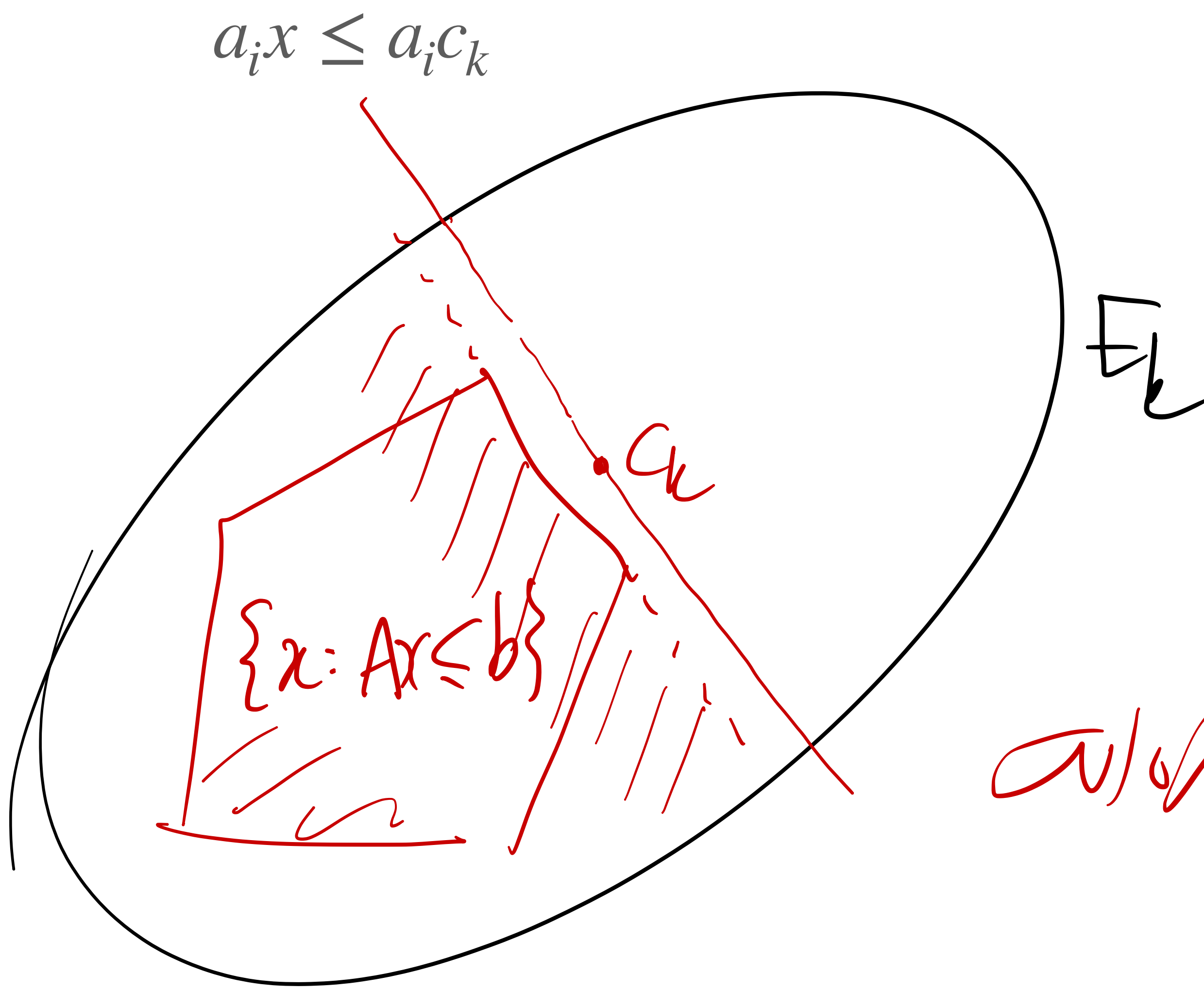
الگوریتم بیضی‌گون: در هر مرحله یک بیضی‌گون E_k می‌سازیم که مجموعه جواب‌ها را در بر بگیرد.

$$E_0, E_1, E_2, \dots$$

E_0: کره‌ی شعاع R

$$\text{حجم}(E_{k+1}) \le (1-\delta)\,\text{حجم}(E_k)$$

هر وقت مرکز E_k در مجموعه جواب نباشد، از آن یک گام جلو رفت.



اگر مرکز E_k، c_k

درون مجموعه جواب نباشد ...

و اینکه یکی از نابرابری‌ها نقض شده است

$$a_i x \le b_i$$

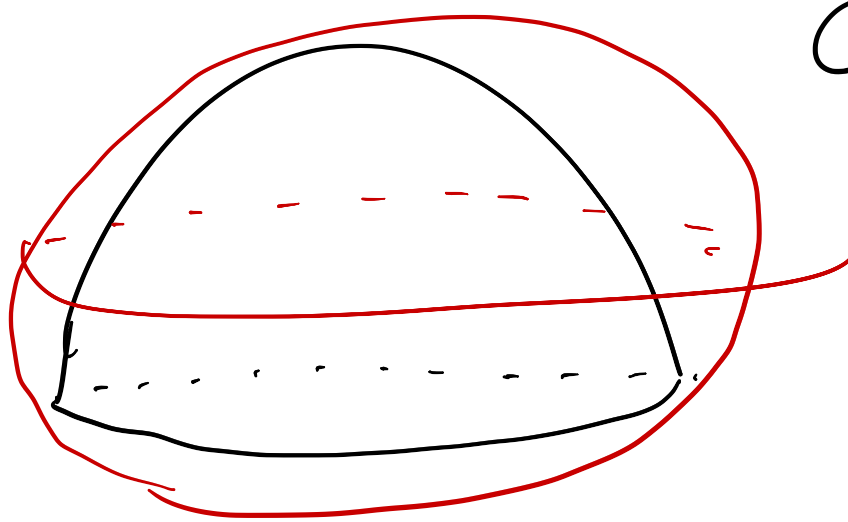
با استفاده این نابرابری در مرکز بیضی‌گون یک نصف بیضی‌گون (!) خواهیم داشت که

همه جواب‌ها را در بر دارد.

کافی است E_{k+1} را طوری پیدا کنیم که این نصف بیضی‌گون را در بر بگیرد

مثال

پوشاندن نیم کره با یک بیضی‌گون با کمترین حجم!



جواب کران $e^{\frac{-1}{2d+2}}$ برابر حجم توپ است.

$$e^{-\frac{k}{2d+2}} \leq \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^d$$

$$e^{\frac{k}{2d+2}} \geq \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^d = e^{d \log \frac{R}{\varepsilon}}$$

$$k \geq d(2d+2) \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)$$

حل مشکل R و e

(E1) (If a solution exists, then there is a not too large solution.)

(E2) (If a solution exists, then the solution set of a slightly relaxed system contains a small ball.) Let us put $\eta = 2^{-5\varphi}$, $\varepsilon = 2^{-6\varphi}$, and

مسئله جداسازی

دسترسی روش بیضی‌گون به نامعادله‌ها:

دانای کل

$$Ax \leq b$$

آیا c در برنامه‌ریزی صدق می‌کند؟

اگرنه: یک $a_i x \leq b_i$ که c در آن صدق نمی‌کند را برگردان

تا وقتی که بتوان دانای کل را ساخت، حتی اگر تعداد نامعادله‌ها نمایی، یا حتی نامتناها باشد
روش بیضی‌گون سریع جواب را پیدا می‌کند