

سوال ۱: مرتبه بزرگی تابع (۳ نمره)

بزرگی مرتبه توابع بازگشتی زیر را حساب کنید.

$$T(n) = T(n/5) + 1 \quad (\text{الف})$$

$$T(n) = 9T(n/3) + n^2 \log^3 n \quad (\text{ب})$$

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 \quad (\text{ج})$$

سوال ۲: ساختمان داده‌های مقدماتی (۲ نمره)

ساختمان داده‌های و اعمال مربوط را در جدول زیر در نظر بگیرید. فرض کنید همه ساختمان داده‌ها برای نگه‌داری اعداد صحیح تولید شده‌اند. در جدول زیر مرتبه بزرگی زمان اجرای هر کدام از اعمال را بر حسب n که تعداد اعضای ساختمان داده در زمان اجرای عمل مورد نظر است را قرار دهید. نوع اشاره‌گر، یعنی نوع متغیری که به عنوان اشاره‌گر به اعضای ساختمان داده مد نظر باید استفاده شود که می‌تواند اشاره‌گر به خانه حافظه یا یک عدد صحیح باشد.

آرایه	پشته	صف	لیست پیوندی	
عدد	عدد	عدد	اشاره‌گر	نوع اشاره‌گر
$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	اضافه کردن به ابتدا
$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	اضافه کردن به انتها
$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	اضافه کردن به مکان دلخواه با داشتن اشاره‌گر به مکان قبلی
$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	جستجو

سوال ۳: مرتبه ادغامی – درجی (۲ نمره)

```
function MergeInsertionSort(A, s, e) {
    if (e - s > log(|A|)) {
        MergeInsertionSort(A, s, (s + e)/2)
        MergeInsertionSort(A, (s + e)/2, e)
        Merge(A, s, (s + e)/2, e)
    } else {
        InsertionSort(A, s, e)
    }
}
```

فرض کنید در الگوریتم بالا، تابع Merge دو زیرآرایه داده شده را ادغام می‌کند و نتیجه را در همان مکان قرار می‌دهد.

(الف) تابع بازگشتی بیشینه زمان اجرای الگوریتم را بنویسید.

(ب) مرتبه بزرگی تابع را محاسبه کنید.

سوال ۴: کلاس شمارنده (۴ نمره)

```
class Counter {
    int i = 0;
    void inc() {
        if (random(2^i, 2^(i+1)) == 0)
            i++;
    }

    int get() {
        return 2^i;
    }
};
```

فرض کنید تابع $\text{random}(x, y)$ یک عدد تصادفی در بازه اعداد x تا $y - 1$ تولید می‌کند. و a^b به معنی a به توان b است.

نشان دهید، پس از n بار صدازدن تابع $\text{inc}()$ از یک متغیر از نوع کلاس Counter، امید ریاضی مقداری که تابع $\text{get}()$ برمی‌گرداند، برابر با n است.

راهنمایی: یک متغیر تصادفی X تعریف کنید که خروجی تابع را مشخص می‌کند و آن را به صورت جمع n متغیر تصادفی بنویسید.

این کلاس به چه دردی می‌خورد؟

موفق باشید