دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

اثبات لم فارکاش ــ روش بیضی‌گون

جلسه یازدهم

نگارنده: سروش زارع

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه‌ی قبل لم فارکاش[1] را بیان کردیم، و در انتها قضیه‌ی دوگانی[2] را با لم فارکاش اثبات کردیم. کلیات یک اثبات آنالیزی (بخش 6.5 از [mat07]) نیز بیان شد ولی وارد جزئیات نشدیم.

۲ مقدمه‌ی جلسه

در بخش اول جلسه سعی می‌کنیم لم فارکاش را اثبات کنیم. برای این کار روش حذف فوریه‌ـ موتسکین را بررسی می‌کنیم و به کمک آن لم فارکاش را اثبات می‌کنیم. اثبات های دیگری از لم فارکاش نیز وجود دارد که به آن‌ها نمی‌پردازیم (بخش‌های 6.5 و 6.6 از [mat07]). در بخش دوم جلسه، به روش بیضی‌گون می‌پردازیم.

1) Farkas' lemma
2) Duality

۳ نابرابری‌های ناسازگار

سوال اولیه: یک دستگاه نامعادلات چه زمانی جواب دارد؟
مثلا دو نامعادله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$۴x_۱ + x_۲ \leq ۴ \tag{۱}$$

$$-x_۱ + x_۲ \leq ۱ \tag{۲}$$

از جمع ۳ برابر (۱) و ۲ برابر (۲) داریم:

$$۱۰x_۱ + ۵x_۲ \leq ۱۴ \tag{۳}$$

در واقع با داشتن چند نامعادله، می‌توانیم ترکیب‌های مختلف آنها را درنظر بگیریم و نامعادلات جدید بسازیم. گاهی وقت‌ها، ممکن است به تناقض برسیم. مثلا در همین مثال بالا، اگر نامعادله‌ی

$$-۲x_۱ - x_۲ \leq -۳ \tag{۴}$$

را نیز داشتیم، با جمع کردن ۵ برابر (۴) و خود (۳)، خواهیم داشت:

$$۰ \leq -۱ \tag{۵}$$

که تناقض است! حدسمان این است که هرگاه چنین اتفاقی بیفتد، یعنی دستگاه نامعادلات اولیمان، جواب شدنی ندارد.
یک سوال این است که آیا برعکس این موضوع نیز درست است؟ یعنی هر وقت که دستگاه نامعادلاتمان جوابی نداشته باشد، می‌توان به همین روش بدیهی به تناقض رسید یا خیر؟
پاسخ: می‌توان با لم فارکاش نشان داد که هر گاه چنین دستگاه نامعادلاتی داشته باشیم، می‌توان به تناقض $0 \leq -1$ رسید. برای این کار از بیان رنگی زیر برای لم فارکاش استفاده شده است:

	The system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

و نتیجه را می‌توان به شکل قضیه‌ی زیر بیان کرد:

Whenever a system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ of finitely many linear inequalities is **inconsistent**, that is, there is no $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfying it, we can derive the (obviously inconsistent) inequality $0 \leq -1$ from it by the above procedure.

برهان قضیه: طبق بیان خاکستری لم فارکاش، یک $y \geq 0$ وجود دارد به طوری که $y^T A = 0$ ولی $y^T b < 0$. اگر A را همان دستگاه نامعادلاتمان درنظر بگیریم، این اتفاق یعنی یک سری ضرایب نامنفی (y) پیدا می‌شود، به صورتی که اگر با ضرایب متناظر با y سطرهای A را جمع کنیم، ضریب همه‌ی x ها ۰ می‌شود ($y^T A = 0$). از طرفی طبق $y^T b < 0$ یعنی اگر همین ضرایب را در سمت راست دستگاه نامعادلات A اعمال کنیم، به یک عدد منفی می‌رسیم. مثلا فرض کنید $y^T B = z < 0$. پس می‌توان یک عدد مثبت ($\frac{-1}{z}$) را در y ضرب کرد به طوری که در y' حاصل ، مقدار $y'^T b$ برابر با -1 خواهد بود، و $(y')^T A$ همان ۰ باقی می‌ماند، پس به تناقض بدیهی مدنظرمان ($۰ < ۱$) رسیدیم.

۴ روش حذف فوریه‌ـ موتسکین[3]

در حالتی که دستگاه معادلاتی به شکل $Ax = b$ داشتیم، به روش حذف گوسی می‌توانستیم این دستگاه را حل کنیم. حال سوال این است که اگر دستگاه نامعادلاتی به شکل $Ax \leq b$ داشته باشیم، آیا چیزی شبیه به همان روش داریم؟
در این حالت می‌توان به ازای هر متغیر x، تعدادی حد بالا و تعدادی حد پایین برای x محاسبه کرد. مثلا دستگاه نامعادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &\leq 10 \\ 3x - 6y + 3z &\leq 9 \\ 5x + 10y - z &\leq 15 \\ -x + 5y - 2z &\leq -7 \\ -3x + 2y + 6z &\leq 12 \end{aligned}$$

در هر کدام از این نامساوی‌ها، با ضرب این نامساوی در یک عدد و جدا کردن x از بقیه‌ی متغیرها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &\leq 5 + \frac{5}{2}y - 2z \\ x &\leq 3 + 2y - z \\ x &\leq 3 - 2y + \frac{1}{5}z \\ x &\geq 7 + 5y - 2z \\ x &\geq -4 + \frac{2}{3}y + 2z \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} x &\geq max(7 + 5y - 2z, -4 + \frac{2}{3}y + 2z) \\ x &\leq min(5 + \frac{5}{2}y - 2z, 3 + 2y - z, 3 - 2y + \frac{1}{5}z) \end{aligned}$$

پس می‌توان x را حذف کرد و این شرط را گذاشت که هر ۳ عبارت داخل min بزرگ‌تر مساوی با هر ۲ عبارت داخل max باشند که در مجموع ۶ نامعادله می‌شود. پس اگر دستگاه نامعادلات اولیه جواب داشته باشد، این دستگاه جدید نیز جواب دارد. می‌توان دید که برعکس این موضوع نیز برقرار است، در واقع اگر دستگاه نامعادلات جدید جواب داشته باشد، و تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} z' &= max(7 + 5y - 2z, -4 + \frac{2}{3}y + 2z) \\ y' &= min(5 + \frac{5}{2}y - 2z, 3 + 2y - z, 3 - 2y + \frac{1}{5}z) \end{aligned}$$

می‌توان x را هر عددی در بازه‌ی $[z', y']$ قرارداد تا یک جواب در دستگاه اولیه‌مان به دست آید.
پس دستگاه نامعادلات اولیه جواب دارد، اگر و تنها دستگاه نامعادلات جدیدی که از آن تولید کردیم جواب داشته باشد. می‌توان همین روند را تکرار کرد تا تک تک متغیرها حذف شوند. در نهایت یک سری نامساوی عددی به شکل زیر خواهیم داشت (مربع‌ها می‌توانند هر عددی باشند)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \square \\ &\vdots \\ 0 &\leq \square \end{aligned}$$

اگر هیچ کدام از این نامساوی‌ها تناقض نباشد، یعنی دستگاه نامعادلات اولیه‌مان جواب دارد. اگر حداقل یکی از این $\square$ ها منفی باشد، یعنی دستگاه نامعادلات اولیه جواب ندارد. نکته‌ی جالب راجع به این تکنیک این است که با یک LP شروع کرده و یک جواب شدنی برای آن پیدا می‌کنیم و در جلسات قبل اثبات کردیم که اگر الگوریتمی باشد که یک جواب برای LP پیدا کند، می‌توانیم با استفاده از آن الگوریتم، یک جواب بهینه برای LP

3) Fourier–Motzkin elimination

پیدا کنیم. در واقع این روش بسیار ساده‌تر از simplex است. منتهی مشکلی که این روش دارد این است که هر دفعه تعداد نامعادلات می‌تواند به توان ۲ برسد، و پس از n بار اجرای الگوریتم برای حذف تک تک متغیرها، تعداد نامعادلاتمان می‌تواند در اوردر $(m)^{2^n}$ باشد.

لم ۱. در هر قدم که از یک نامعادله‌ی

$$Ax \leq b \; (with \; n \; variables)$$

به یک دستگاه به شکل زیر می‌رسیم

$$A'x' \leq b' \; (with \; n-1 \; variables)$$

دو شرط زیر برقرار است:

$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ has a solution if and only if $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ has a solution, and

each inequality of $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ is a positive linear combination of some inequalities from $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

قسمت اول را که اثبات کردیم.

برهان برای قسمت دوم: فرض کنید می‌خواهیم متغیر x_1 را حذف کنیم، یک حد بالا و یک حد پایین برای x_1 را درنظر بگیرید:

$$x_1 + {a'_j}^T x' \leq b_j \implies x_1 \leq b_j - {a'_j}^T x' \tag{۶}$$

$$-x_1 + {a'_k}^T x' \leq b_k \implies x_1 \geq -b_k + {a'_k}^T x' \tag{۷}$$

$$(۶),(۷) \implies -b_k + {a'_k}^T x' \leq b_j - {a'_j}^T x' \tag{۸}$$

که با نوشتن جمله‌ی آخر به شکل استاندارد نامعادله، داریم:

$${a'_j}^T x' + {a'_k}^T x' \leq b_j + b_k$$

پس هر نامعادله‌ی جدید به شکل ترکیب مثبتی از برخی از نامعادلات قدیم به دست می‌آید (در این حالت ضرایب x_1 ، 1 و -1 یک بودند، ولی در حالت کلی نیز با تقسیم ضرایب بر یک عدد مثبت، می‌توان با همین ضرایب 1 و -1 کار کرد). هر زوج مرتب از حدهای بالا و حد پایین نیز به همین شیوه با هم ترکیب می‌شوند و یک نامعادله‌ی جدید به وجود می‌آورند. بنابراین تمام نامساوی‌های داخل $A'x' \leq b'$ به شکل ترکیب نامنفی از نامعادلات $Ax \leq b$ به دست می‌آید.

۵ اثبات لم فارکاش با استفاده از لم ۱

بیان زیر از لم فارکاش را درنظر بگیرید:

	The system $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \ge 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

می‌خواهیم آن را با کمک لم ۱ اثبات کنیم (توجه کنید که بقیه‌ی بیان‌های لم فارکاش، همانطور که برنامه ریزی‌های مختلف را به هم تبدیل می‌کردیم، با تبدیلی از این بیان به دست می‌آیند).

در قدم اول اثبات می‌کنیم که اگر دستگاه $Ax \le b$ جواب داشته باشد، قسمت خاکستری نیز برقرار است.

برهان: یک جواب فرضی دستگاه نامعادلات را $\tilde{x}$ فرض کنید. همچنین یک y درنظر بگیرید به طوری که $y \ge 0, y^TA = 0^T$. با ضرب کردن y در Ax داریم $0 = y^TA\tilde{x} \le y^Tb$. بنابراین $y^Tb \ge 0$ که همان حکم خاکستری است.

حال می‌خواهیم اثبات کنیم که اگر حکم خاکستری برقرار باشد، $Ax \le b$ شدنی است. حکم نقیض آن را اثبات می‌کنیم، در واقع **اثبات می‌کنیم که اگر $Ax \le b$ نشدنی باشد، حکم خاکستری برقرار نیست، یا به عبارتی یک $y \ge 0 : y^TA = 0^T$ وجود دارد به طوری که $y^Tb < 0$.**

برهان: روی تعداد متغیرها استقرا می‌زنیم.

پایه‌ی $n = 0$ را درنظر بگیرید. در این حالت دستگاه‌همان به شکل $0 \le b$ است. چون دستگاه نامعادلاتمان شدنی نیست، به ازای یک اندیس i داریم $b_i < 0$. y را می‌توان به این شکل ساخت که همه‌ی درایه‌های آن 0 باشد و فقط درایه‌ی i ام آن را برابر با ۱ باشد. شرط $y \ge 0$ برقرار است. شرط $y^TA = 0^T$ نیز به این دلیل که تمام درایه‌های A برابر با صفر است برقرار است (چون فرض کردیم هیچ متغیری نداریم) و با توجه به نحوه‌ی ساختن y، می‌توان دید که $y^Tb = b_i < 0$. پس حکم را به ازای $n = 0$ اثبات کردیم.

گام استقرا: فرض کنید حکم به ازای $n-1$ برقرار است. دستگاه n متغیره نامعادلات $Ax \le b$ و یک مرحله تبدیل فوریه_موتسکین را درنظر بگیرید:

$$Ax \le b \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه\_موتسکین}} A'x' \le b' \ (with\ n-1\ variables)$$

از انجایی که قبل تر اثبات کردیم که در هر مرحله تبدیل، هر نامعادله‌ی جدید به شکل ترکیب تعدادی نامعادله با ضرایب مثبت به دست می‌آید، یک تبدیل M با درایه‌های نامنفی، وجود دارد به طوری که:

$$\underbrace{(0|A') = MA}_{1}\ ,\ \underbrace{b' = Mb}_{2}$$

از آنجایی که تعداد متغیرهای دستگاه جدید یک عدد کمتر است، طبق فرض استقرا داریم:

$$\exists y' \ge 0 \quad where \begin{cases} y'^TA' = 0^T \\ y'^Tb' < 0 \end{cases} \tag{9}$$

حال قرار می‌دهیم $y = M^Ty'$. داریم :

$$y = M^Ty' \implies \begin{cases} y^TA = y'^TMA \overset{1}{=} y'^T(0|A') \overset{(9)}{=} 0^T \\ y^Tb = y'^TMb \overset{2}{=} y'^Tb' \overset{(9)}{<} 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

دلیل نامساوی سوم این است که درایه‌های y' نامنفی اند و چون هر درایه‌ی y به شکل ترکیب مثبت تعدادی از درایه‌های y به دست می‌آید، تمام درایه‌های y نیز نامنفی‌اند.

پس حکم استقرا برای دستگاه $Ax = b$ نیز اثبات شد.

۶ بیضی‌گون[4]

در فضای دو بعدی، دایره‌ای که در جهات مختلف شعاع آن تغییر کرده باشد و احتمالا مقداری چرخیده باشد، بیضی نام دارد. بیضی‌گون نیز چنین چیزی در فضای n بعدی است. به صورت ریاضی داریم :

گوی واحد در R^d: $x_1^2 + ...x_d^2 \leq 1$

بیضی‌گون در جهت راستای‌های اصلی به شعاع‌های $a_1, ...a_n$ در جهات اصلی: $(\frac{x_1}{a_1})^2 + ... + (\frac{x_d}{a_d})^2 \leq 1$

شکل ۱: سمت چپ: گوی ـ سمت راست: بیضی‌گون

می‌توان بیضی‌گون را به صورت ماتریسی نیز نشان داد:

$$x^T \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}^{-2} x \leq 1$$

اگر بیضی‌گون را با ماتریس U دوران دهیم، دوران با U^{-1} نیز در همین رابطه صدق می‌کند:

$$(U^{-1}x)^T \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}^{-2} (U^{-1}x) \leq 1$$

اگر قراردهیم

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}$$

از انجایی که A متقارن است، می‌توان یک Q تعریف کرد:

$$Q = {U^{-1}}^T (A^{-1})^T A^{-1} U^{-1}$$

4) Ellipsoid

که اگر $A^{-1}U^{-1}$ را B قراردهیم، داریم $Q = B^TB$. حال می‌توان معادله‌ای که برای بیضی‌گون نوشتیم را، به‌این شکل نوشت:

$$x^TQx \leq ۱$$

توجه کنید که

$$x^TQx = x^TB^TBx = (Bx)^T(Bx) \geq ۰$$

بیضی‌گون در حالت کلی (علاوه بر چرخش، به اندازه‌ی c نیز جابه‌جا شود) به این شکل می‌شود:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : (x-c)^TQ(x-c) \leq ۱\}$$

که Q باید یک ماتریس مثبت نیمه‌معین باشد.

۲ نکته راجع به بیضی‌گون:

- حجم بیضی‌گون با شعاع‌های $a_۱$ و ... و a_d ، $a_۱a_۲...a_d$ برابر حجم کره‌ی واحد است.
- تصویر یک بیضی‌گون تحت اثر تبدیل‌های خطی همچنان بیضی‌گون است.

۷ روش بیضی‌گون[5]

تا به حال روش simplex را دیدیم که با آن می‌توانیم LP را حل کنیم. مشکل اصلی‌ای که با simplex داریم این است که زمان اجرای آن، برای برخی از ورودی‌ها، چندجمله‌ای نیست. در این بخش روشی به نام بیضی‌گون *(ellipsoid method)* می‌بینیم که می‌توان اثبات کرد زمان اجرای آن چندجمله‌ای است. این روش را اثبات نمی‌کنیم و فقط آن را بیان می‌کنیم.

در این روش، یک برنامه‌ریزی خطی داریم و سعی می‌کنیم یک جواب شدنی برای آن پیدا کنیم. از آنجایی که قبلا نشان دادیم سختی پیدا کردن جواب و حل کردن LP مثل هم است، با این کار می‌توانیم جواب بهینه را نیز پیدا کنیم. برنامه‌ی ریزی خطی ای که ellipsoid به عنوان ورودی می‌گیرد، ۲ شرط زیر را هم باید داشته باشد:

- یک گوی به شعاع R و مرکز ۰ می‌گیرد و با این فرض که LP در این گوی جواب دارد، سعی می‌کند چنین جوابی را پیدا کند.
- حجم جواب‌های شدنی LP در این گوی به شعاع R، باید از حجم گویی به شعاع ϵ بیشتر باشد.

R و ϵ به عنوان ورودی الگوریتم بیضی‌گون به آن داده می‌شوند. حال ببینیم در این شرایط، بیضی‌گون چگونه کار می‌کند.

الگوریتم بیضی‌گون: در این توصیف از الگوریتم، برای راحتی کار فرض می‌کنیم که تمام جواب‌های LP درون گوی اولیه‌ای که با R مشخص می‌شد وجود دارند.

از گوی اولیه با شعاع R شروع می‌کنیم، سعی می‌کنیم در هر مرحله آن را کوچک کنیم به طوری که هنوز جواب‌های LP در آن باقی بماند. اگر گوی مرحله‌ی kام را با E_k نشان دهیم، داریم:

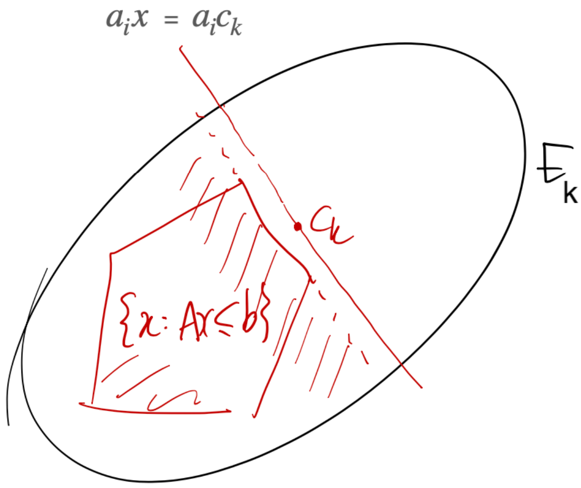
$$(E_{k+۱})_V \leq (۱-\delta)(E_k)_V \mid \delta > ۰$$

که منظور از $(E_k)_V$ حجم بیضی‌گون است. δ نیز در خود الگوریتم محاسبه می‌شود.

نحوه‌ی محاسبه‌ی δ: فرض کنید در مرحله‌ی k ام، بیضی‌گونی به شکل $E_k = (x-c_k)^TQ(x-c_k) \leq ۱$ داشته باشیم.

در ابتدا خود مرکز بیضی‌گون (c_k) را به عنوان جواب LP امتحان می‌کنیم. اگر شدنی بود، همان c_k را برمی‌گردانیم و الگوریتم به پایان می‌رسد. در غیراینصورت حداقل یکی از نامعادلات مانند $a_ix \leq b_i$ نقض شده است. صفحه‌ی $a_ix = b_i$ را درنظر بگیرید. چون c_k در LP صدق نمی‌کند، تمام نقاط شدنی LP یک طرف این صفحه قرار می‌گیرد و c_k در طرف دیگر. حال اگر نامعادله‌ی $a_ix \leq a_ic_k$ را درنظر بگیرید، می‌توان دید بخشی از بیضی‌گون که در این نامعادله صدق می‌کند، یک نیم بیضی‌گون(!) است و تمام جواب‌های شدنی LP همچنان در آن قرار دارند (زیرا تمام نقاط شدنی LP در نامعادله‌ی $a_ix \leq b_i$ صدق می‌کنند و از آنجایی که $a_ic_k > b_i$ با ترکیب این دو نتیجه می‌گیریم که $a_ix < a_ic_k$).

5) Ellipsoid method



پس کافیست در قدم بعدی الگوریتم، کوچک‌ترین بیضی گون شامل این نیم بیضی‌گون را درنظر بگیریم.
برای راحتی، می‌توان بیضی‌گون E_k را با تبدیلی مثل M به کره تبدیل کرد، و سعی‌کنیم نیم‌کره‌ی مدنظر را با بیضی‌گونی به کمترین حجم بپوشانیم. فرض کنید بیضی‌گون پیدا شده E'_{k+1} باشد. می‌توانیم تعریف کنیم $E_{k+1} = M^{-1}E'_{k+1}$ (از آنجایی که هر بیضی‌گون تحت تبدیل بیضی‌گون می‌ماند، E_{k+1} نیز بیضی‌گون است). پیدا کردن این بیضی‌گون توضیح داده نشد ولی نشان داده می‌شود که در هر مرحله، حجم بیضی‌گون E_{k+1} ، $e^{\frac{-1}{2d+2}}$ برابر حجم بیضی‌گون E_k خواهد بود (d تعداد بعدها است که عددی ثابت فرض می‌شود).

۸ بررسی زمان اجرای روش بیضی‌گون

کافی است یک k پیدا کنیم که پس از k مرحله، داشته باشیم

$$e^{\frac{-k}{2d+2}} \le (\frac{\epsilon}{R})^d$$

زیرا در این صورت پس از k مرحله اجرای الگوریتم، داریم:

$$(E_k)_V \le (E_0)_V * (e^{\frac{-1}{2d+2}})^k = (E_0)_V * e^{\frac{-k}{2d+2}} \le R^d * (\frac{\epsilon}{R})^d = \epsilon^d$$

و چون در این حالت، حجم جواب‌هایی از LP که در گوی E_K قرار دارند دیگر از ϵ^d بیشتر نیست، الگوریتم می‌تواند دیگر به دنبال جواب نگردد.
سعی می‌کنیم حدی برای k به دست بیاوریم:

$$e^{\frac{k}{2d+2}} \ge (\frac{R}{\epsilon})^d = e^{d\log(\frac{R}{\epsilon})}$$
$$\implies k \ge d(2d+2)\log(\frac{R}{\epsilon})$$

پس از این k مرحله، روش بیضی‌گون یا یک جواب پیدا کرده است یا اینکه اجازه دارد متوقف شود. پس اگر $log(\frac{R}{\epsilon})$ چند جمله‌ای باشد، این روش در زمان چند جمله‌ای کار می‌کند.

۹ حل مشکل R و ϵ

این مشکلات قابل حل است. ولی در این جلسه به آن‌ها نپرداختیم.

- مشکل R این است که نباید خیلی بزرگ باشد، وگرنه زمان اجرای الگوریتم دیگر چندجمله ای نیست. می‌توان نشان داد که یک R که خیلی بزرگ نیست پیدا می‌شود.
- مشکل ϵ این است که ممکن است جواب‌هایمان طوری باشد که هیچ ϵ نتوان پیدا کرد (مثلا جوابمان فقط یک نقطه باشد، یا بعدش از بعد R^d یا همان d کمتر باشد). در این حالت نیز می‌توان نشان داد که می‌توان شرط‌های LP اولیه را کمی relax کرد، طوری که شدنی بودن یا نشدنی بودن LP عوض نشود، ولی اگر شدنی باشد حجم جواب‌های شدنیمان کمی افزایش می‌یابد.

۱۰ جادوی Ellipsoid

نکته‌ی جالب راجع به Ellipsoid این است که تقریبا خیلی کم با خود LP کار می‌کند. در واقع تنها کاری که با LP دارد این است که بداند آیا یک نقطه‌ی x در آن صدق می‌کند یا نه، و اگر صدق نمی‌کند، یک نیم‌فضا داشته باشد که بداند تمام جواب‌های شدنی LP در این نیم فضا قرار دارد ولی خود x در آن صدق نمی‌کند. عجیبی این قضیه این است که حتی اگر تعداد قیدهای LP بسیار زیاد باشد، اگر چنین ساختاری داشته باشیم که به این دو سوال جواب دهد (مثلا یک ساختمان داده)، روش بیضی‌گون می‌تواند در زمان چند جمله‌ای کار کند.

۱۱ ارجاع و منابع

- بخش 6.7 و 7.1 از [*mat07*]
- اسلایدهای درس
- فیلم جلسه

مراجع

[mat07] Jiří matoušek and bernd gärtner. understanding and using linear programming. *Springer, 2007.*