

برای حل این آزمونک می‌توانید از جزوه و کتاب استفاده کنید اما نمی‌توانید از مطالب دیگر در اینترنت استفاده کنید و نمی‌توانید با دیگران مشورت کنید.

۱ حل یک بازی

(۹ نمره)

یک بازی جمع-صفر را در نظر بگیرید که ماتریس امتیاز برای بازیگر سطری به صورت زیر است

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -6 & 8 \\ 5 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

به عبارت دیگر بازیگر سطری تلاش می‌کند امتیاز به دست آمده را بیشینه کرده و بازیگر ستونی تلاش می‌کند امتیاز به دست آمده را کمینه کند.

(آ) (۲ نمره) نشان دهید بازیگر ستونی هیچ وقت ستون C_4 را انتخاب نمی‌کند. با استدلالی مشابه نشان دهید در نهایت یک ماتریس 2×2 باقی می‌ماند که ممکن است بازیگرهای سطری و ستونی آن‌ها را انتخاب کنند.

(ب) (۳ نمره) برای ماتریس به دست آمده یک برنامه‌ریزی خطی بنویسید که استراتژی بازیگر سطری را محاسبه کند. برنامه‌ریزی شما قاعدتا باید ۳ متغیر داشته باشد.

(ج) (۱ نمره) با استفاده از اینکه یکی از قیود برنامه‌ریزی قبلی یک برابری است، یکی از متغیرها را حذف کنید و برنامه‌ریزی خطی جدیدی با دو متغیر بنویسید.

(د) (۱ نمره) با روش رسم شکل برنامه‌ریزی خطی را حل کنید و استراتژی بهینه برای بازیگر خطی را به دست بیاورید.

(ه) (۱ نمره) برای محاسبه استراتژی نفر دوم، فرض کنید نفر دوم ستون اول را به احتمال q و ستون دوم را به احتمال $1 - q$ انتخاب می‌کند. با توجه به اینکه استراتژی نفر اول را می‌دانیم، سود نفر دوم چه تابعی بر حسب q خواهد بود؟

(و) (۱ نمره) با استفاده از تابع بالا استراتژی بهینه بازیگر ستونی را پیدا کنید.

۲ رودها و دریاچه‌ها

(۸ نمره)

یک گراف جهت‌دار $D = (V, E)$ را در نظر بگیرید که به هر یال e از آن وزن w_e نسبت داده شده است. یک گردش معتبر روی این گراف یک زیرگراف D' است که در آن برای هر راس v ، $\delta_{D'}^+(v) = \delta_{D'}^-(v)$ ، که به ترتیب $\delta_{D'}^+(v)$ و $\delta_{D'}^-(v)$ برابر با درجه خروجی و درجه ورودی راس v در گراف D' است. وزن یک گردش برابر است با جمع وزن یال‌های آن گردش.

(آ) (۲ نمره) یک برنامه‌ریزی صحیح برای مسئله گردش بیشینه بنویسید.

ب) (۲ نمره) آرام‌سازی شده برنامه‌ریزی صحیح بالا را به صورت

$$\begin{aligned} Ax &= \circ \\ x &\geq \circ \end{aligned}$$

بنویسید

ج) (۲ نمره) نشان‌دهید ماتریس A در برنامه‌ریزی شما کاملاً تک‌پیمانه‌ای است.

د) (۲ نمره) یک الگوریتم با زمان اجرای چندجمله‌ای برای یافتن گردش بیشینه در گراف ارائه کنید.