دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۴

روش اولیه-دوگان

جلسه‌های ۲ تا ۳

نگارنده: امیر عزیزی جیرآبادی

در این جلسه قصد داریم یک شیوه کلی، روش اولیه-دوگان[۱]، برای طراحی الگوریتم‌های کارا برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی ارائه کنیم. اساس الگوریتم‌هایی مانند:

- الگوریتم دایکسترا[۲] برای یافتن کوتاه‌ترین $s-t$ مسیر در گراف وزن‌دار با وزن‌های نامنفی
- الگوریتم مجارستانی[۳] برای مساله تخصیص منابع[۴]
- الگوریتم فورد-فالکرسُن[۵] برای مساله شار بیشینه

روش اولیه-دوگان می‌باشد.

۱ قضیه مکمل لنگی

قضیه مکمل لنگی[۶] یکی از مهمترین‌هایی است که رابطه‌ی بین جواب‌های بهینه دستگاه اولیه و دوگان آن دستگاه برقرار می‌کند. دستگاه اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c^t x & \\ \text{به شرط} & Ax \geq b \geq 0 & (P) \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های حقیقی می‌باشد. دوگان دستگاه فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشنه کن} & w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b^t y & \\ \text{به شرط} & y^t A \leq c & (D) \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

از قضیه قوی اولیه-دوگان می‌دانیم دستگاه (P) جواب بهینه x^* دارد اگر و تنها اگر دستگاه (D) جواب بهینه y^* داشته‌باشد؛ همچنین داریم:

$$z^* = c^t x^* = (y^*)^t b = w^*$$

حال فرض کنید رابطه‌ی sاُم دستگاه اولیه بصورت اکید برقرار بوده و نیز $y_s^* > 0$ باشد:

$$\begin{aligned} z^* &= c^t x^* \\ &\geq \left((y^*)^t A\right) x^* \\ &= (y^*)^t \left(A x^*\right) \\ &= \left(\sum_{j \neq s} y_j^* \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^*\right) + y_s^* \sum_{i=1}^{n} a_{is} x_i^* \\ &\geq \left(\sum_{j \neq s} y_j^* b_j\right) + y_s^* \sum_{i=1}^{n} a_{is} x_i^* \\ &> \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^* = w^* \end{aligned}$$

[۱] Primal-Dual Method
[۲] Dijkstra Algorithm
[۳] Hungarian Algorithm
[۴] Assignment Problem
[۵] Ford-Fulkerson Algorithm
[۶] Complementry Slackness Theorem

بنابراین اگر یکی از متغیرها در دستگاه دوگان (اولیه) بزرگتر از صفر باشد، رابطه‌ی متناظر با آن متغیر در دستگاه دوگان (اولیه) بصورت تساوی برقرار خواهدبود. از طرفی اگر داشته‌باشیم:

$$\begin{array}{ll} \text{برای هر } s: & x_s^* > 0 \Rightarrow (y^*)^t A_s = \sum_{i=1}^{m} a_{is} y_i^* = c_s \\ \text{برای هر } r: & y_t^* > 0 \Rightarrow A^r x^* = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j^* = b_r \end{array} \quad \text{(شروط مکمل لنگی)}$$

که در آن A_i ستون iاُم و A^j نیز سطر jاُم ماتریس A می‌باشند:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A^1 \\ \hline A^2 \\ \hline \vdots \\ \hline A^m \end{array} \right]$$

اگر $I = \{i | x_i^* > 0\}$ و $J = \{j | y_j^* > 0\}$ باشند:

$$\begin{aligned} c^t x^* &= \sum_{s \in I} c_s x_s^* + \sum_{s \notin I} c_s x_s^* \\ &= \sum_{s \in I} \left((y^*)^t A_s \right) x_s^* + 0 \\ &= \sum_{s \in I} \left(\sum_{r \in J} y_r^* a_{rs} \right) x_s^* \\ &= \sum_{r \in J} y_r^* \left(\sum_{s \in I} a_{rs} x_s^* \right) \\ &= \sum_{r \in J} y_s^* (A^r x^*) + 0 \\ &= \sum_{r \in J} y_s^* b_s + \sum_{r \notin J} y_s^* b_s = (y^*)^t b \end{aligned}$$

پس دوباره با استفاده از قضیه قوی اولیه-دوگان نتیجه می‌گیریم جواب‌های شدنی که در شروط مکمل لنگی صدق می‌کنند بهینه خواهند بود.
مطالب این بخش را می‌توان در قضیه زیر خلاصه کرد:

قضیه ۱ (مکمل لنگی). *اگر دستگاه‌های (P) و (D) به ترتیب دستگاه‌های اولیه و دوگان مطابق نمادگذاری قبل بوده و x^* و y^* به ترتیب دو جواب شدنی از (P) و (D) باشند:*

x^* و y^* جواب‌های بهینه هستند اگر و تنها اگر شروط مکمل لنگی برقرار باشند.

۲ روش اولیه-دوگان

با توجه به قضیه مکمل لنگی که در بخش قبل مطرح شد، برای یافتن جواب یک دستگاه برنامه‌ریزی خطی، دوگان آن را تشکیل داده زوج جواب‌های اولیه دوگانی را جست‌وجو کنیم که در شروط مکمل لنگی صدق می‌کنند. از آنجایی که در این درس اغلب به دنبال یک جواب صحیح مقدار مناسب و نه لزوما جواب بهینه برای برنامه‌ریزی خطی داده شده هستیم؛ در جست‌وجو جواب مناسب برای مساله ترکیبیاتی که برنامه‌ریزی خطی را برای آن انجام داده‌ایم، می‌توان اولا از برخی از شروط مکمل لنگی صرف نظر کرده و تنها شروط دستگاه دوگان را در نظر گرفت، ثانیا تنها جواب‌های صحیح را بررسی کنیم.

۱.۲ روش اولیه-دوگان ساده شده

روشی که در ادامه معرفی می‌شود تنها بدنبال جواب‌های صحیح می‌گردد:

۱: برای دستگاه دوگان D یک جواب شدنی بیاب؛ x را نیز برابر با صفر قرار بده.

۲: تعریف کن:

$$J = \{j | y^t A_j = c_j\}$$

۳: یک جواب شدنی برای (P) را چنان جست‌وجو کن که تنها برای $i \in J$ مقادیر x_i به اندازه یک عدد صحیح افزایش یافته و باقی x_i ها تغییر نکنند؛ اگر چنین جواب شدنی یافت شد، متوقف شو.

۴: در غیر اینصورت، k را چنان بیاب که رابطه $A^k x \geq b$ برای آن نقض می‌شود. مقدار y_k را چنان افزایش بده تا رابطه $y^t A_i = c_i$ برای یک i رخ دهد.

۵: برو گام دوم

۲.۲ روش اولیه-دوگان اصلی

دستگاه اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c^t x & \\ \text{به شرط} & A_{m\times n} x = b \geq 0 & (P) \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

توجه کنید که در اینجا شروط دستگاه را به شکل $Ax = b$ در نظر گرفته‌ایم. فرض کنید می‌خواهیم جواب بهینه دستگاه فوق را بیابیم؛ دوگان آن فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشنه کن} & w = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = y^t b & \\ \text{به شرط} & y^t A \leq c^t & (D) \\ & y \in \mathbb{R}^m & \end{array}$$

y را یک جواب شدنی دلخواه دستگاه دوگان انتخاب و مجموعه J را بصورت زیر تعریف کنید:

$$J = \{j | y^t A_j = c_j\}$$

اگر بتوانیم جوابی مانند x برای دستگاه اولیه بیابیم که برای هر $i \notin J$ داشته‌باشیم $x_i = 0$ آنگاه طبق قضیه‌ی مکمل لنگی جواب‌های x و y بهینه‌خواهند بود. در واقع اگر دستگاه زیر جواب شدنی داشته باشد، x و y بدست آمده بهینه خواهند بود:

$$\begin{array}{ll} \left(\sum_{j\in J} a_{ij} x_j\right) = b_i & \text{برای هر } i \\ x_j = 0 & j \notin J \\ x \geq 0 & \end{array}$$

ولی ممکن است y بهینه نباشد، و در نتیجه دستگاه فوق جوابی نخواهد داشت؛ اما می‌توان دستگاه کاهش یافته[۷] را با توجه به مجموعه J و معرفی n متغییر جدید بصورت زیر تعریف کرده و تلاش کنیم با استفاده از آن جوابی بهینه برای دستگاه‌های اولیه و دوگان بیابیم:

$$\begin{array}{llll} \text{کمینه کن} & \xi = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i & & \\ \text{به شرط} & \left(\sum_{j\in J} a_{ij} x_j\right) + \epsilon_i = b_i & \text{برای هر } i & (RP) \\ & x_j = 0 & j \notin J & \\ & x_\epsilon = (x, \epsilon) \geq 0 & & \end{array}$$

[۷] Restricted Primal

که در آن مجموعه شروط $\left(\sum_{j\in J} a_{ij}x_j\right) + \epsilon_i = b_i$ را می‌توان بصورت:

$$[A|I_{m\times m}]\left[\frac{x}{\epsilon}\right] = b$$

خلاصه کرد. اگر بتوانیم یک جواب شدنی برای (RP) بیابیم بطوریکه $\xi = 0$ باشد، چون $\epsilon \geq 0$ است؛ خواهیم داشت $\epsilon = 0$ در نتیجه داریم:

$$[A|I_{m\times m}]\left[\frac{x}{\epsilon}\right] = b \Rightarrow [A|I_{m\times m}]\left[\frac{x}{0}\right] = b$$
$$\Leftrightarrow Ax = b$$

بنابراین دستگاه اولیه جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر جواب بهینه دستگاه (RP) برابر با صفر باشد. بنابراین اگر $\xi_{\mathsf{OPT}} = 0$ جواب بهینه (P) را یافته‌ایم؛ پس می‌توان فرض کرد که $\xi_{\mathsf{OPT}} > 0$ است.
برای یافتن جواب بهینه (P) باید دستگاه (RP) را طوری تغییر داد تا جواب بهینه آن برابر با صفر شود. یعنی باید مجموعه J را طوری تغییر دهیم تا به خواسته مورد نظر برسیم. طبق تعریف J نیز تنها به جواب دستگاه دوگان وابسته است؛ بنابراین باید y را طوری تغییر داد که J به شکلی مناسبی گسترش یافته و جواب بهینه (RP) برابر با صفر شود. برای این منظور دوگان (RP) در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشنه کن} & w' = \sum_{i=1}^{m} b_i v_i = v^t b & \\ \text{به شرط} & v^t A_j \leq 0 & j\in J \ \text{برای} \quad (DRP) \\ & v^t \leq 1 & \\ & v \in \mathbb{R}^m & \end{array}$$

اگر v_{OPT} جواب بهینه دستگاه فوق باشد؛ y^* را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y^* = y + \theta \cdot v_{\mathsf{OPT}}$$

که در آن $\theta \in \mathbb{R}_+$ است. اگر بتوان θ را طوری انتخاب کرد که y^* جواب شدنی باشد:

$$\begin{aligned}(y^*)^t b &= y^t b + \theta \cdot (v_{\mathsf{OPT}} b)\\ &= w + \theta \cdot \xi_{\mathsf{OPT}} > w\end{aligned}$$

بنابراین y^* جواب بهتری از y می‌باشد. مطابق آنچه گفته‌شد هر چه θ بزرگتری انتخاب بکنیم، به همان میزان y^* جواب بهتری خواهد بود. در ادامه می‌خواهیم بررسی کنیم در چه صورتی y^* جواب شدنی از دستگاه (D) می‌باشد. اگر $v^t_{\mathsf{OPT}}A_j \leq 0$ باشد $(y^*)^t A_j \leq y^t A_j \leq c_j$ خواهد بود؛ در غیر اینصورت اگر $j \in J$ باشد، چون v_{OPT} جواب (DRP) است $v^t_{\mathsf{OPT}}A_j \leq 0$ ولی فرض کرده‌ایم $v^t_{\mathsf{OPT}}A_j > 0$ پس $j \notin J$ بنابراین:

$$y^t A_j + \theta \cdot v^t_{\mathsf{OPT}} A_j \leq c_j \Leftrightarrow \theta \leq \frac{c_j - y^t A_j}{v^t_{\mathsf{OPT}} A_j}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \min_{j\notin J;\, v^t_{\mathsf{OPT}}A_j > 0} \frac{c_j - y^t A_j}{v^t_{\mathsf{OPT}} A_j}$$

از آنچه گفته‌شد گزاره‌های زیر را می‌توان به سادگی نتیجه گرفت:

گزاره ۲. *اگر برای هر j داشته‌باشیم:*

$$v^t_{\mathsf{OPT}} A_j \leq 0$$

(D) بی کران و (P) بدون جواب شدنی خواهدبود.

اثبات. زیرا θ را می‌توان به دلخواه بزرگ انتخاب کرد. □

گزاره ۳. *اگر $\xi_{OPT} > 0$ و برای هر $j \notin J$ داشته‌باشیم:*

$$v^t_{OPT} A_j \leq 0$$

(D) بی کران و (P) بدون جواب شدنی خواهدبود.

اثبات. زیرا مشابه گزاره قبلی θ را می‌توان به دلخواه بزرگ انتخاب کرد. □

۳.۲ علت توقف روش اولیه-دوگان در متناهی گام

۴.۲ جواب شدنی برای دستگاه دوگان

در قسمت قبل هیچ توضیحی در مورد چگونگی یافتن جواب شدنی اولیه برای دستگاه دوگان ارائه نکردیم. اما به سادگی می‌توان یک جواب شدنی برای آن یافت:

$$(D)\qquad \begin{array}{ll} \text{بیشنه کن} & w = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = y^t b \\ \text{به شرط} & y^t A \leq c^t \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

اگر $c \geq 0$ باشد $y = 0$ بوضوح یک جواب شدنی است. پس فرض کنیم i موجود باشد که $c_i < 0$ است. b_{m+1} را طوری در نظر بگیرید که مقدار آن از مجموعه همه‌ی جواب‌های ممکن (P) بیشتر باشد. البته این کار بخاطر لم زیر عملی است.

لم ۴. *اگر x یک جواب پایه‌ای[8] برای دستگاه (P) باشد:*

$$|x_i| \leq m!\alpha^{m-1}\beta$$

$$\alpha = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\beta = \max_{j} |b_j|$$

حال متغیر جدید x_{m+1} را با هزینه $c_{m+1} = 0$ در نظر بگیرید و رابطه $\sum_{i=1}^{m+1} x_i = b_{m+1}$ را به شروط (P) اضافه کنید. بوضوح جواب دستگاه بدست آمده تغییر نکرده است. حال اگر دوگان دستگاه جدید را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشنه کن} & w' = y^t b + y_{m+1} b_{m+1} & \\ \text{به شرط} & y^t y^t A_j + y_{m+1} \leq_j & \text{برای هر } j \\ & y_{m+1} \leq 0 & \end{array}$$

یک جواب شدنی برای آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} y_i = 0 & 1 \leq i \leq m \\ y_{m+1} = \min\limits_{j; c_j < 0} c_j & \end{array}$$

۵.۲ اهمیت روش اولیه-دوگان

آنچه که باعث اهمیت روش اولیه-دوگان می‌شود این است که در برخی از موارد (DRP) معادل یک مساله بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشد که الگوریتم کارایی برای آن سراغ داریم؛ در نتیجه با استفاده از این روش برای طراحی یک الگوریتم کارا برای مساله متناظر (P)، چندین بار الگوریتم ترکیبیاتی متناظر با (DRP) را، که اغلب معادل انتخاب تعدادی x_i است، را اجرا کرده و جواب بهینه (P) را می‌یابیم.

	اصلی	کاهش یافته
اولیه	(P) کمینه کن $z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c^t x$ به شرط $A_{m\times n}x=b\geq 0$، $x\geq 0$	(RP) کمینه کن $\xi=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i$ به شرط $\left(\sum_{j\in J} a_{ij}x_j\right)+\epsilon_i=b_i$ برای هر i، $x_j=0$ $j\notin J$، $x_\epsilon=(x,\epsilon)\geq 0$
دوگان	(D) بیشنه کن $w=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j = y^t b$ به شرط $y^t A\leq c^t$، $y\in\mathbb{R}^m$	(DRP) بیشنه کن $w'=\sum_{i=1}^{m} b_i v_i = v^t b$ به شرط $v^t A_j\leq 0$ برای $j\in J$، $v^t\leq 1$، $v\in\mathbb{R}^m$

جدول ۱: دستگاه‌های روش اولیه دوگان

بطور خلاصه در روش اولیه دوگان برای طراحی یک الگوریتم برای یک مساله ترکیبیاتی:

۱: ابتدا (P) را تشکیل بده.

۲: دوگان (P) یعنی (D) تشکیل داده و یک جواب شدنی برای آن بیاب؛ اگر $c\geq 0$ باشد $y=0$ جواب شدنی است.

۳: دستگاه (RP) را تشکیل بده.

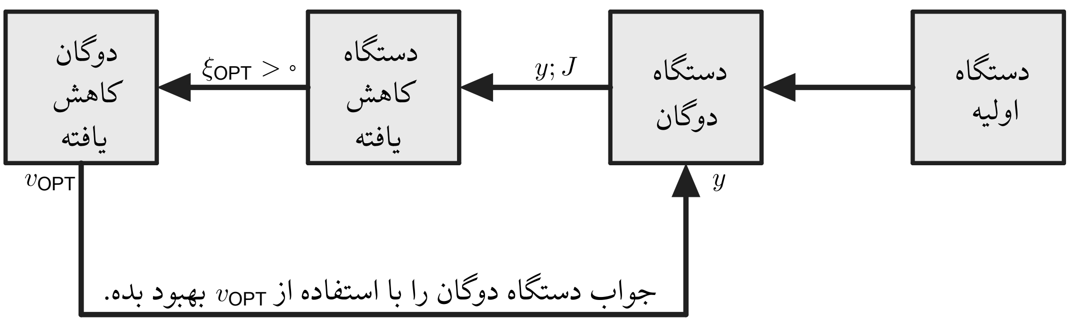
۴: جواب بهینه (DRP) را بیاب[9]:

۴.۱: اگر $v^t_{\mathrm{OPT}}b=0$ بود؛ y جواب بهینه (D) است.

۴.۲: در غیر اینصورت قرار بده $A\leftarrow\left\{\frac{c_j-y^tA_j}{v^t_{\mathrm{OPT}}A_j}\mid j\notin J; v^t_{\mathrm{OPT}}A_j>0\right\}$

۴.۲.۱: اگر A تهی بود؛ (D) بی‌کران بوده و (P) جواب شدنی ندارد.

۴.۲.۲: در غیراین‌صورت قرار بده $\theta\leftarrow\min\limits_{a\in A} a$ و $y\leftarrow y+\theta\cdot v_{\mathrm{OPT}}$؛ برو گام دوم.



شکل ۱: روش اولیه-دوگان

[8] Basic Solution

[9] اغلب معادل یک مساله ترکیبیاتی است.

۳ کوتاهترین $s-t$ مسیر

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف جهتدار است. $A_{|V|\times|E|}$ را نیز ماتریس وقوع G گیرید. اگر s و t دو راس دلخواه و $c\in\mathbb{R}^{|E|}$ بردار وزن یال‌های G باشند؛ کوتاه‌ترین مسیر از s به t را معادل خواهد بود با جواب دستگاه زیر:

$$\begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & z=c^tx & \\ \text{به شرط} & Ax=b=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\\vdots\\0\\-1\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l}\leftarrow s \text{ راس}\\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow t \text{ راس}\end{array} & (P1) \\ & x\in\mathbb{R}_+^{|E|} & \end{array}$$

در واقع هر یک از شروط دستگاه فوق شکل $x\left(\delta^+(v)\right)-x\left(\delta^-(v)\right)=b_v$، می‌باشند که میزان شار گذرنده از هر راس را نشان می‌دهد. می‌دانیم جواب‌های بهینه این دستگاه صحیح است. دوگان آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشینه کن} & y_s-y_t & \\ \text{به شرط} & y^tA\le c^t & (D1) \\ & y\in\mathbb{R}^{|V|} & \end{array}$$

۱.۳ دستگاه اولیه و دوگان آن

در ادامه تلاش می‌کنیم صورت بندی بهتری نسبت به دستگاه‌های $(P1)$ و $(D1)$ برای مساله کوتاه‌ترین $s-t$ مسیر ارائه کنیم. فرض کنید بخواهیم دستگاه $(D1)$ را با فرض $y_t=\alpha$ حل کنیم. در اینصورت دستگاه فوق معادل خواهد بود با:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشینه کن} & y_s-\alpha & \\ \text{به شرط} & y^tA\le c^t & (D_\alpha) \\ & y\in\mathbb{R}^{|V|} & \\ & y_t=\alpha & \end{array}$$

زیرا y جواب شدنی $(D1)$ است اگر و تنها اگر $y+(\alpha-y_t)\cdot\bar{y}$ جواب شدنی برای D_α باشد، که در آن:

$$\bar{y}=(1,1,\cdots,1)$$

است. مطابق آنچه در قسمت قبلی گفته‌شد دستگاه‌های $(D1)$ و D_α معادلند. برای سادگی α را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{lll} \text{بیشینه کن} & y_s & \\ \text{به شرط} & y^tA\le c & (D_0) \\ & y\in\mathbb{R}^{|V|} & \\ & y_t=0 & \end{array}$$

پس اگر A^* زیرماتریس $(|V|-1)\times|E|$ از A که در آن سطر متناظر با راس t حذف شده‌است، دستگاه‌های $(P1)$ و (D_0) معادل خواهند بود با:

$$\begin{array}{lll|lll} \text{کمینه کن} & z=c^tx & & \text{بیشینه کن} & y_s & \\ \text{به شرط} & A^*x=\bar{b} & (P) & \text{به شرط} & y^tA^*\le c^t & (D) \\ & & & & y\in\mathbb{R}^{|V|} & \\ & x\in\mathbb{R}_+^{|E|} & & & y_t=0 & \end{array}$$

که در آن $\bar{b}$ بصورت زیر تعریف شده‌است:

$$\bar{b} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow s \text{ راس} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

۲.۳ دستگاه کاهش یافته و دوگان آن

اگر y یک جواب شدنی برای (D) باشد قرار دهید:

$$J = \{(u, v) \in E \mid y_u - y_v = c_e\}$$

در این‌صورت دستگاه کاهش یافته بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} \text{کمینه کن} & \xi = \sum_{v \in V; v \neq t} \epsilon_v & \\ \text{به شرط} & A^* x + \epsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow s \text{ راس} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & (RP) \\ & x_e = 0 & e \notin J \\ & x_\epsilon = (x, \epsilon) \in \mathbb{R}_+^{|E|} & \end{array}$$

همچنین دوگان دستگاه کاهش یافته بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{llll} \text{بیشنه کن} & \pi_s & & \\ \text{به شرط} & \pi_u - \pi_v \leq 0 & \text{برای } (u, v) \in J & (DRP1) \\ & -\pi_v \leq 0 & \text{برای } (t, v) \in J & \\ & \pi_u \leq 0 & \text{برای } (u, t) \in J & \\ & \pi_v \leq 1 & \text{برای هر } v \in V \setminus \{t\} & \\ & \pi \in \mathbb{R}^{|V|-1} & & \end{array}$$

بوضوح دستگاه فوق با دستگاه زیر معادل است:

$$\begin{array}{llll} \text{بیشنه کن} & \pi_s & & \\ \text{به شرط} & \pi_u - \pi_v \leq 0 & \text{برای } (u, v) \in J & (DRP) \\ & \pi_v \leq 1 & \text{برای هر } v \in V & \\ & \pi_t = 0 & & \\ & \pi \in \mathbb{R}^{|V|} & & \end{array}$$

۳.۳ جواب بهینه (DRP)

در ادامه می‌خواهیم جوابی بهینه برای (DRP) بیابیم. برای یافتن π بهینه دو حالت را در نظر می‌گیریم:

توسط یال‌های J مسیری از s به t **موجود نباشد:** طبق شروط (DRP) در این حالت $\pi_s \leq 1$ است. پس اگر بتوانیم بردار π چنان بیابیم که $\pi_s = 1$ باشد، جواب بهینه (DRP) خواهد بود. در واقع در این حالت چنین جوابی را ارائه خواهیم کرد.

توسط یال‌های J مسیری از s به t **موجود باشد:** در این حالت سعی خواهیم کرد نشان دهیم y که یافته‌ایم بهینه است.

۱.۳.۳ حالتی که مسیر موجود نیست

اگر از طریق یال‌های J مسیری از s به t وجود نداشته نباشد؛ بردار $\bar{\pi}^t = [\bar{\pi}_v]_{1\times|V|}$ که بصورت زیر تعریف می‌شود، شروط (DRP) را ارضا کرده و نیز $\bar{\pi}_s = 1$ است:

$$\bar{\pi}_v = \begin{cases} 1 & \text{اگر توسط یال‌های موجود در } J \text{ از } s \text{ به } v \text{ مسیری باشد.} \\ 0 & \text{اگر توسط یال‌های موجود در } J \text{ از } v \text{ به } t \text{ مسیری باشد.} \\ 1 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

از آنجایی که توسط یال‌های J از s به t مسیری موجود نیست، $\bar{\pi}$ خوش تعریف است. طبق تعریف $\bar{\pi}_u - \bar{\pi}_v \in \{-1,0,1\}$ می‌باشد. مطابق روش اولیه-دوگان θ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta &\leftarrow \min_{(u,v)\notin J;\bar{\pi}^t A^*_{(u,v)}>0} \frac{c_{(u,v)}-(y^t A^*_{(u,v)})}{\bar{\pi}^t A^*_{(u,v)}} \\ &\leftarrow \min_{(u,v)\notin J;\bar{\pi}_u-\bar{\pi}_v>0} \frac{c_{(u,v)}-(y_u-y_v)}{\bar{\pi}_u-\bar{\pi}_v} \\ &\leftarrow \min_{(u,v)\notin J} c_{(u,v)} - (y_u - y_v) \end{aligned}$$

پس باید y را بصورت $y \leftarrow y + \theta \cdot \bar{\pi}$ باز تعریف کرده و مجموعه J را دوباره تشکیل دهیم.

۲.۳.۳ حالتی که مسیر موجود است

در این حالت با توجه به لم زیر اگر مسیری از s به t توسط یال‌های J موجود باشد y بهینه را یافته‌ایم.

لم ۵. *اگر توسط یال‌های J مسیری از s به t موجود باشد $\xi_{OPT} = \pi_s^{OPT} = 0$ خواهدبود.*

اثبات. مسیر $P = \langle s, v_1, v_2, \cdots, v_k, t\rangle$ توسط یال‌های موجود در J در نظر بگیرید. طبق شروط (DRP) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \pi_s - \pi_{v_1} &\le 0 \\ \pi_{v_i} - \pi_{v_{i+1}} &\le 0 \quad 1 \le i \le k-1 \text{ برای} \\ \pi_k - \pi_t &\le 0 \\ \pi_t &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\pi_s - \pi_{v_1}) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \pi_{v_i} - \pi_{v_{i+1}}\right) + (\pi_{v_k} - \pi_t) \le 0$$

$$\Rightarrow \pi_s \le 0$$

از طرفی برای $\pi = 0$ مقدار $\pi_s = 0$ نیز رخ می‌دهد. □

۴.۳ الگوریتم

اگر در مرحله‌ای از اجرایی روش اولیه-دوگان J شامل مسیری از s به t مانند $P = \langle s, v_1, v_2, \cdots, v_k, t\rangle$ شد؛ مسیر بدست آمده کوتاه‌ترین مسیر (های) خواهدبود. چون $P \in J$ است، داریم:

$$\left.\begin{aligned} & y_s - y_{v_1} = c_{(s,v_1)} \\ & y_{v_i} - y_{v_{i+1}} = c_{(v_i,v_{i+1})} \qquad 1 \le i \le k-1 \text{ برای} \\ & y_k - y_t = c_{(k,t)} \\ & y_t = 0 \qquad y \text{ جواب شدنی برای } D \text{ است.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_s - y_{v_1}) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} y_{v_i} - y_{v_{i+1}}\right) + (y_{v_k} - y_t) = \sum_{e\in P} c_e$$

$$\Rightarrow y_s = \sum_{e\in P} c_e$$

همچنین در قسمت‌های قبل گفتیم که y_s در این حالت مقدار بهینه است؛ پس علاوه بر مقدار بهینه حداقل یک مسیر بهینه نیز می‌توانیم بیابیم. الگوریتم حاصل از روش اولیه-دوگان بصورت زیر خواهد بود:

۱: y را جوابی شدنی برای (D) انتخاب کن.

۲: J را مجموعه‌ی یال‌هایی قرار بده که $c_{(u,v)} = y_u - y_v$ است.

۳: اگر مسیری از s به t در J موجود نیست:

۳.۱: $\theta \leftarrow \min\limits_{(u,v)\notin J} c_{(u,v)} - (y_u - y_v)$

۳.۲: $y \leftarrow y + \theta \cdot \bar{\pi}$

۳.۳: برو گام دوم.

۴: در غیر این صورت:

۴.۱: P را مسیری از s به t در J انتخاب کن.

۴.۲: P کوتاه‌ترین مسیر s به t در G است.

۵.۳ نکاتی پیرامون الگوریتم اولیه-دوگان

در هر مرحله از اجرای الگوریتم فوق $\overrightarrow{J_t}$ را مجموعه همه رئوسی مانند u قرار دهید که مسیری از u به t توسط یال‌های J موجود باشد. با استفاده از این نماد گذاری می‌توان در بردار $\bar{\pi}$ را بصورت زیر نوشت:

$$\bar{\pi}_v = \begin{cases} ۰ & v \in \overrightarrow{J_t} \\ ۱ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اگر در یک مرحله از اجرای الگوریتم راس u وارد مجموعه $\overrightarrow{J_t}$ شود، مقدار y_u تغییر نخواهد کرد؛ زیرا $\bar{\pi}_u = ۰$ است. همچنین اگر $(u,v) \in J$ باشد که $\{u,v\} \subset \overrightarrow{J_t}$ است. چون مقادیر y_v و y_u در ابتدای دور بعدی الگوریتم تغییر نمی‌کنند پس باز هم خواهیم داشت:

$$y_u - y_v = c_{(u,v)} \Rightarrow (u,v) \in J$$

و در نتیجه $\{u,v\} \subset \overrightarrow{J_t}$. یعنی اگر یک راس وارد مجموعه $\overrightarrow{J_t}$ تا انتهای اجرای الگوریتم عضو آن خواهد بود. با کمک استدلالی مشابه لم ۵ می‌توان نشان داد مقدار y_u برای $u \in \overrightarrow{J_t}$ طول کوتاه‌ترین مسیر از u به t را در G نشان می‌دهد. بطور مشابه اگر $\overleftarrow{J_s}$ را مجموعه‌ی رئوسی تعریف کنیم که از s به آن‌ها مسیر موجود باشد؛ آن‌گاه اگر راسی وارد این مجموعه شود تا انتهای الگوریتم از آن خارج نخواهدشد و نیز اگر $(u,v) \in J$ باشد که $\{u,v\} \subset \overrightarrow{J_s}$ است چون مقادیر y_u و y_v هر دو به یک میزان افرایش می‌یابند:

$$y_u - y_v = c_{(u,v)} \Rightarrow (u,v) \in J$$

مشابه لم ۵ برای $u \in \overrightarrow{J_s}$ مقدار $y_s - y_u$ طول کوتاه‌ترین مسیر از s به u است.

۶.۳ الگوریتم دایکسترا

اگر G گرافی با وزن نامنفی باشد می‌خواهیم الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر را بصورت بهینه‌تری پیاده‌سازی کرد. در واقع تلاش می‌کنیم مجموعه $\overrightarrow{J_s}$ بدون استفاده از y و بصورت استقرایی محاسبه کنیم. فرض کنیم $\overrightarrow{J_s}$ مجموعه‌ی رئوسی باشد که کوتاه‌ترین مسیر از s به آن‌ها در G تا این مرحله محاسبه کنیم.
برای $u \in V_G$ کوتاه‌ترین مسیر از s به u را که تا به حال یافته‌ایم با d_u نشان می‌دهیم. چون وزن یال‌ها نامنفی هستند s عضوی از $\overrightarrow{J_s}$ بوده و $d_s = ۰$ خواهد بود. اگر $u \in \overrightarrow{J_s}$ باشد، F_u را مجموعه راس‌هایی مانند v خارج از $\overrightarrow{J_s}$ گیرید که $(u,v) \in E_G$ است؛ برای هر $u \in \overrightarrow{J_s}$ مجموعه F_u همه راس‌های خارج از $\overrightarrow{J_s}$ گیرید که از u به آن‌ها مسیر موجود است. برای هر $v \in F_u$

مقدار d_v را برابر با کمینه مقدار فعلی آن و $d_u + c_{(u,v)}$ قرار دهید.
اگر $w \in \bigcup_{u\in \overrightarrow{J_s}} F_u$ راسی با d_w کمینه باشد، d_w نشان‌گر کوتاه‌ترین مسیر از s به w در G خواهد بود. زیرا اگر بتوانیم مسیر کوتاه‌تری از d_w مانند $P = \langle s, u_1, u_2, \cdots, u_k, w\rangle$ بیابیم؛ $P_i = \langle s, u_1, u_2, \cdots, u_i\rangle$ نیز باید کوتاه‌ترین از s به u_k باشد. i را کوچک‌ترین مقداری بگیرید که $u_i \in \overrightarrow{J_s}$ باشد.چون برای هر $v \in F_{u_i}$ مقدار d_v را برابر با کمینه d_v و $d_{u_i} + c_{(u,v)}$ قرار داده‌ایم، هزینه P_i برابر با d_{u_i} خواهد بود. از طرفی $w, u_{i+1} \in \bigcup_{u\in \overrightarrow{J_s}} F_u$ ولی d_w کمینه بود پس $d_w \leq d_{u_{i+1}}$ است. ولی هزینه‌ی مسیر P با توجه به نامنفی بودن وزن یال‌ها حداقل برابر با $d_{u_{i+1}}$ است. بنابراین هزینه P نمی‌تواند کمتر از d_w باشد.
بنابراین توانستیم $\overrightarrow{J_s}$ را گسترش بدهیم.

۴ شار بیشینه

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهتدار است. $A_{|V|\times|E|}$ را نیز ماتریس وقوع G گیرید. اگر s و t دو راس دلخواه و $c \in \mathbb{R}^{|E|}$ بردار ظرفیت یال‌های G باشند؛ شار از s به t به اندازه f معادل خواهد بود با دستگاه زیر:

$$Ax = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow s \text{ راس} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow t \text{ راس} \end{array} \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R}_+^{|E|}$$

برای یافتن شار بیشینه می‌توان دستگاه فوق را بصورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & f \\ \text{به شرط} & Ax + f\cdot d \leq 0 \\ & x \leq c \\ & -x \leq 0 \\ & (x, f) \geq 0 \end{array}$$

که در آن

$$d = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow s \text{ راس} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow t \text{ راس} \end{array} \end{array}$$

است. در هر جواب شدنی برای دستگاه فوق خواهیم داشت:

$$Ax + f\cdot d = 0$$

زیرا اگر راس v موجود باشد که $A^v x + f\cdot d^v < 0$ است، آنگاه:

$$\begin{aligned} &[1, 1, \cdots, 1] \times (Ax + f\cdot d) = ([1, 1, \cdots, 1] \times A)x + f\cdot([1, 1, \cdots, 1] \times d) \\ &\Rightarrow \sum_{u\in V} A^u x + f\cdot d^u = 0 \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم $A^v x + f \cdot d^v < ۰$ است، که نتیجه می‌دهید باید $w \in V$ موجود باشد که $A^w x + f \cdot d^w < ۰$ است؛ ولی از x جواب شدنی دستگاه بود.
دستگاه فوق را می‌توان بصورت زیر خلاصه نویسی کرد:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & f \\ \text{به شرط} & (A^*)^t \left[\frac{x}{f}\right] \le \begin{bmatrix} ۰ \\ \hline c \\ \hline ۰ \end{bmatrix} = c^* \\ & (x^t, f) \ge ۰ \end{array}$$

که در آن

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c|c} A^t & I_{|E|\times|E|} & -I_{|E|\times|E|} \\ \hline d^t & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

است.

۱.۴ دستگاه (DRP)

برای استفاده از روش اولیه-دوگان برای حل مساله شار بیشینه این بار به جای اینکه برنامه ریزی خطی مساله به عنوان دستگاه اولیه در نظر بگیریم؛ آن را دستگاه دوگان می‌گیریم:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & f \\ \text{به شرط} & [x^t|f]A^* \le (c^*)^t \quad (D) \\ & (x^t, f) \ge ۰ \end{array}$$

اگر $[x^t|f]$ جوابی شدنی از (D) و J مجموعه‌ی همه jهایی باشد که $[x^t|f]A^*_j = (c^*)^t_j$ است، دوگان دستگاه کاهش بصورت زیرخواهد بود:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & f \\ \text{به شرط} & [v^t|f]A^*_j \le ۰ \qquad j \in J \quad (DRP) \\ & (v^t, f) \le ۱ \\ & (v^t, f) \in \mathbb{R}^{|E|+۱} \end{array}$$

طبق تعریف J برابر با همه‌ی یال‌هایی مانند e است که $x_e = c_e$ یا $-x_e = ۰$ و همچنین همه‌ی رئوسی مانند v است که $A^v x + f \cdot d_v = ۰$ می‌باشد[۱۰]. از طرفی از مطالب قسمت قبل می‌دانیم برای هر جواب شدنی (D) رابطه $Ax + fd = ۰$ برقرار است؛ بنابراین همه رئوس G در J قرار دارند. پس دستگاه فوق را بصورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{array}{rll} \text{بیشینه کن} & f & \\ \text{به شرط} & Av + f \cdot d \le ۰ & \qquad (DRP) \\ & -v_e \le ۰ & x_e = ۰ \\ & v_e \le ۰ & x_e = c_e \\ & (v^t, f) \le ۱ & \\ & (v^t, f) \in \mathbb{R}^{|E|+۱} & \end{array}$$

****** چرا جواب بیشینه غیر صفر معادل مسیر افزوده است؟

[۱۰] همان طور قبلا تعریف کردیم A^v نظیر سطر v ماتریس A است.