

## پاسخ تمرین سوم

### پرسش ۱:

چند نکته را در ابتدا می‌گویم:

- برای اثبات دقیق لازم است به تام و محاسبه پذیر بودن تابع خود اشاره کنید. البته به دلیل آسان بودن اگر اشاره نکردید نمره‌ای از شما کسر نشده است. من نیز در این پرسش‌ها به این موضوع اشاره نمی‌کنم.
- همچنین به جزییات ساده دیگر نیز اشاره نمی‌کنم. برای مثال در قسمت ۱ نیاز است به امکان پذیر بودن تولید  $\Sigma^*$  یا اگر از ماشین تورینگ با یک زبان خاص استفاده می‌کنم به امکان پذیر بودن آن اشاره شود. در اینجا به دلیل سادگی در بیشتر موارد از چنین توضیحاتی صرف نظر می‌کنم.
- در این پاسخ نام مجموعه‌ی HALT به SA و INEQE به NonEmptyIntxn تغییر یافته است.

#### ۱. $\text{NonEmptyIntxn} \leq \text{SA}$

**برهان:** تابع  $e(T) = (e(T_1), e(T_2))$  را می‌خواهیم. این گونه است که مستقل از ورودی عملیات ماشین تورینگ که زبان  $L(T_1) \cap L(T_2)$  است (برای نحوه‌ی به دست آوردن به قضیه‌ی ۸.۴ مراجعه شود) را به صورت همزمان روی  $\Sigma^*$  (مشابه قضیه‌ی ۸.۹) اجرا می‌کند. اگر این اشتراک تهی نباشد زمانی خواهد بود که این ماشین متوقف شود در این صورت  $T$  نیز ورودی خود را می‌پذیرد. اگر این اشتراک تهی باشد  $T$  هیچگاه متوقف نخواهد شد.

از این رو در صورت ناتهی بودن  $L(T_1) \cap L(T_2)$  زبان  $T, \Sigma^*$  و در صورت تهی بودن  $\emptyset$  خواهد بود که به درستی اولی در SA هست و دومی نیست. ■

#### ۲. $\text{SA} \leq \text{NonEmptyIntxn}$

**برهان:** در این جا تابع  $f(e(T)) = (e(T)e(T^*))$  را در نظر می‌گیرم.  $T^*$  یک ماشین تورینگ دلخواه با زبان  $\{e(T)\}$  است. از این رو به درستی اشتراک این دو تنها زمانی ناتهی خواهد بود که  $T, e(T)$  را بپذیرد. ■

#### ۳. $\overline{\text{NonEmptyIntxn}} \not\leq \text{SA}$

**برهان خلف:** می‌دانیم که SA یک زبان بازگشتی شمارشی است ولی بازگشتی نیست.

اگر  $\overline{\text{NonEmptyIntxn}} \leq \text{SA}$  باشد طبق قسمت ۱ می‌توان نتیجه گرفت که NonEmptyIntxn بازگشتی است. از طرفی طبق قسمت ۲ نتیجه می‌شود که SA نیز بازگشتی است که این تناقض است. ■

#### ۴. $\text{SA} \not\leq \overline{\text{NonEmptyIntxn}}$

**برهان خلف:** می‌دانیم که SA یک زبان بازگشتی شمارشی است ولی بازگشتی نیست. از این رو طبق قسمت ۱ نتیجه می‌شود که NonEmptyIntxn نیز بازگشتی شمارشی است.

اگر  $\text{SA} \leq \overline{\text{NonEmptyIntxn}}$  باشد به دلیل تام بودن تابع کاهش<sup>۱</sup> نتیجه می‌شود که  $\overline{\text{SA}} \leq \text{NonEmptyIntxn}$  از طرفی طبق قسمت ۲ و بازگشتی شمارشی بودن NonEmptyIntxn نتیجه می‌شود که SA بازگشتی است که این تناقض است. ■

<sup>۱</sup>reduction