Subject: Comb. Opt.
Year. Month. Date. (1)

جلسه‌ی چهارم:

max c^TX s.t. $Ax \le b$ فرم کانونی
$x \in \mathbb{R}^n$

max c^TX s.t. $Ax = b$ فرم معادله‌ای
*1 $x \geq 0$

تبدیل فرم کانونی به فرم معادله‌ای

① $a_i^T x \le b_i \longrightarrow a_i^T x + z_i = b_i$; $z_i \geq 0$ slackness var.
② $x = x^+ - x^-$ $x^+, x^- \geq 0$ (برای برقراری $x \geq 0$)

برای اینکه A (ماتریس $m \times n$) جواب داشته باشد باید بتوان آن را به فرم $\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$ دربیاوریم.

اگر سطری صفر باشد یا آن قید اضافی است یا تناقض است. پس w.l.o.g. سطری صفر نیست
سطرها مستقل خطی هستند پس حداکثر m ستون مستقل خطی داریم.

BFS (جواب پایه‌ای شدنی):
$B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ A_B = ماتریس با ستون‌هایی که شماره‌شان در B است

x یک BFS است اگر: ① شدنی باشد ② وجود داشته باشد B، $|B| = m$ که
*2 A_B معکوس‌پذیر باشد (ستون‌های مستقل) و x در تمام مؤلفه‌های غیر از B صفر باشد

~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

x_i: متغیر پایه‌ای است اگر $i \in B$ باشد و در غیر این صورت غیرپایه‌ای است.

لم ۴.۱: x BFS است $\Leftrightarrow$ ستون‌های A_K مستقل باشند $K=\{j \mid x_j > 0\}$

اثبات رفت: متناظر با x وجود دارد ماتریس A_B با این شرایط که A_B ستون‌های مستقل خطی دارد و ستون‌هایی که در $A \setminus A_B$ هستند x_i متناظرشان ($i \notin B$) صفر هستند. قرار دهید $K \subseteq B$ که شامل ستون‌های B باشد.

اثبات برگشت: می‌دانیم $|K| \le m$. اگر $|K|=m$ باشد، قرار بده $A_B := A_K$. در غیر این صورت تا زمانی که $|K|<m$ باشد پیدا کن i که $i \notin K$ و $x_i = 0$ و قرار بده $K := K \cup \{i\}$
در نهایت قرار بده $B := K$

نتیجه: با مشخص کردن B، x به طور یکتا مشخص می‌شود. معادله‌ی $A_B x_B = b$ را در نظر بگیرید، دقیقا یک جواب دارد. x حاصل یا شدنی است یا ناشدنی.
برای هر B حداکثر یک جواب شدنی داریم و تعداد BFSها حداکثر $\binom{n}{m}$ است.
پس وجود دارد (بعدا نشان می‌دهیم) الگوریتمی برای LP کراندار که همه‌ی BFS ها را چک کند با پیچیدگی $\binom{n}{m} n^3$.

Subject: Comb. Opt.
Year. Month. Date. 3

تفسیر ۱.۴ . ① اگر LP کراندار جواب شدنی داشته باشد => جواب بهینه دارد

② اگر LP کراندار جواب بهینه داشته باشد => جواب بهینه ای دارد که BFS است!

حکم جدید! اگر x یک جواب شدنی باشد => داریم $\tilde{x}$ که BFS است و $c^T\tilde{x} \geq c^T x$

اثبات تفسیر ۱.۴ با حکم جدید:

① اگر x جواب شدنی باشد طبق حکم جدید داریم $\tilde{x}$ یک BFS که جوابش از x بهتر است یا مساوی

یعنی وجود ندارد جواب شدنی که از همه BFS ها بهتر باشد پس حداقل یکی از BFS ها جواب بهینه است

② x^* را از ① داریم و وجود دارد $\tilde{x}$ که $c^T\tilde{x} \geq c^T x^*$ پس وجود دارد جواب بهینه ای که BFS است

اثبات حکم جدید: (اثبات الگوریتمی)

از بین جواب های شدنی x را در نظر بگیرید با این ویژگی که بیشترین تعداد صفر را داشته باشد و $c^T x_{\cdot} \geq c^T x$ برای جواب شدنی x.

قرار دهید k تعداد مولفه های غیر صفر x. ($A_k x_k = b$)

اگر $|k| \leq m$ یعنی x خود BFS است.

ستون های A_k مستقل خطی باشند پس

در غیر این صورت ستون های A_k را a_1, a_k در نظر بگیرید تعریف کنید $w^k \neq 0$ به طوری که:

$$w_1^k a_1 + w_2^k a_2 + \dots + w_k^k a_k = 0 \Rightarrow A_k w^k = 0 \Rightarrow Aw = 0 ;\ w_i = \begin{cases} w_i^+ & i \in k \\ 0 & i \notin k \end{cases}$$

داریم $Ax_0=b$, $Aw=b \Rightarrow A(x_0+tw)=0$
یعنی حرکت دادن x در راستای w باعث نقض شدن هیچ‌کدام از قیدها نمی‌شود، احتمالاً مگر قیدهای $x\geq 0$.
اما چون w برای a_j های غیر صفر، صفر نیست پس حرکت دادن در راستای w به طوری که $\exists \varepsilon>0$ که $x+\varepsilon w\geq$ شدنی باشد ممکن است.

فرض می‌کنیم w.l.o.g. که $c^Tw\geq 0$ (چون اگر نبود، قرار می‌دهیم $w:=-w$)

فرض می‌کنیم $w_j<0$ ، $\exists j$ پس $x'=x+\varepsilon w$ صفرهای بیشتری دارد و $c^Tx\leq c^Tx'=c^Tx+c^Tw$
که به این دلیل که اگر نبود تا بی‌نهایت می‌توانستیم در راستای w جلو برویم و قیدها حفظ شوند
که برخلاف کراندار بودن LP است.

$\therefore$ با فرض اینکه x بیشترین تعداد صفر را دارا بوده در $c^Tx\geq c^Tx_0$ صدق می‌کند

از این اثبات به یک الگوریتم می‌رسیم که با داشتن یک جواب شدنی صفرها را تا جای ممکن زیاد کنیم
تا به یک BFS برسیم.

می‌توان نشان داد برای هر BFS x ، اگر A_B را با m^2k بیت نشان داد، x_B
را می‌توان با $m\leq k^2$ نشان داد. زیرا x_B جواب معادله‌ی $A_Bx_B=b$ است.

مجموعه‌ی محدب: X محدب است $\iff \forall x,y \in X,\ tx+(1-t)y \in X \quad 0 \le t \le 1$

اشتراک تعداد متناهی مجموعه‌ی محدب، محدب است.

پوش محدب (Convex hull): اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل X

ترکیب محدب: فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_m$ m نقطه داریم. ترکیب محدب این نقاط:

$t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_mx_m \quad \sum t_i=1,\ t_i \ge 0$ نشان‌دهنده‌ی یک نقطه است

قضیه: $CH(X) =$ مجموعه‌ی ترکیب محدب‌های X ($LC(X)$)

باید نشان دهیم $LC \subseteq CH$ ① و $CH \subseteq LC$ ②

وچون CH محدب است، تمام خط داخل CH می‌افتد

اثبات ①: می‌دانیم اگر a_1 و a_2 دو نقطه باشند، LC آنها خط بین آنهاست. اگر سه نقطه باشند LC نشان داخل و روی مثلثی است که تشکیل می‌دهند. برای چهار نقطه LC به شکل هرم است.

اثبات با استقرا: فرض کنید برای n-1 نقطه X' ثابت کردیم $LC(X') \subseteq CH(X')$ حالا می‌خواهیم برای $X'+\{a_n\}$ ثابت کنیم $LC(X) \subseteq CH(X)$. فرض کنید ترکیب محدب زیر از X داده شده:

$$t_1a_1+t_2a_2+\dots+t_{n-1}a_{n-1}+t_na_n \quad \sum t_i=1,\ t_i \ge 0$$

می‌توان این ترکیب خطی را به این صورت نوشت:

$$(1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}a_1+\frac{t_2}{1-t_n}a_2+\dots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}a_{n-1}\right)+t_na_n$$

واضح است که مجموع ضرایب داخل پرانتز برابر 1 است و همگی نامنفی هستند.
پس مجموعه‌ی داخل پرانتز یک ترکیب خطی از X' است و جوابش (به نام b) هم عضو $CH(X')$ است
و اما طبق تعریف CH چون $X' \subseteq X$ است پس b در $CH(X)$ هم هست. اما ترکیب خطی
$(1-t_n)b + t_na_n$ هم عضو $CH(X)$ است (طبق ~~[illegible]~~ پایه‌ی استقرا)

ابر صفحه :

نیم فضا :

$Ax \geq b$: convex polyhedron

convex polyhedron کراندار : convex polytope

بعد polyhedron ، تعداد بعدهای جواب اشتراک ابرصفحه‌های polyhedron
که اگر اشتراک نداشته باشند ۱- قرار می‌دهیم

راس : برای polytope P ، $v \in P$ را راس می‌گوییم اگر :

$\exists c \text{ s.t. } c^T v > c^T u \quad \forall u \in P \setminus \{v\}$

قضیه: راس‌های یک polyhedron همان BFSها هستند.

اثبات ①: BFSها راس هستند.

فرض کنید x یک BFS است. باید بردار c^T را پیدا کنیم به صورتی که :

$c^T x = 0 \quad , \quad c^T y < 0 \quad \forall y \in P \setminus \{x\}$

برای اینکه $c^T x = b$ باشد، کافی است برای $x_j \neq 0$ مولفه‌ی متناظر در c^T صفر باشد
در مکان‌هایی که $x_j = 0$ مولفه‌ی c^T را ۱- می‌گذاریم.

تنها حالتی که ممکن است $c^T y = 0$ ، $y \in P \setminus \{x\}$ شود وقتی است که برای $c^T_j = -1$
داشته باشیم $y_j = 0$ اما این امکان وجود ندارد زیرا

اثبات ②: راس ها BFS هستند.

فرض کنید x یک راس است. یعنی $\exists c^T \text{ s.t. } c^Tx > c^Ty \ \forall y \in P\setminus\{x\}$

طبق قضیه ای که داشتیم وجود دارد BFS ای که جواب بهینه است.

به این صورت که اگر بردار هدف را c بگیریم و هدف $\max c^Tx$ باشد می دانیم وجود دارد یک $\tilde{x}$ BFS که $c^T\tilde{x} \geq c^Ty \ \forall y\in P$ پس $c^T\tilde{x} \geq c^Tx$ پس $\tilde{x}$ همان x است.

نقطه‌ی بحرانی: x بحرانی است اگر وجود نداشته باشد $u,v\in P$ که $u\neq v$ و $x = tu+(1-t)v$، $0<t<1$

قضیه: نقاط بحرانی همان راس ها هستند. (در polytope)

اثبات ①: راس ها نقطه‌ی بحرانی هستند.

فرض کنید x یک راس باشد پس: $\exists c \text{ s.t. } c^Tx > c^Ty \ \forall y\in P\setminus\{x\}$

اما اگر x بحرانی نباشد یعنی $\exists u,v$، $u\neq v$ که $c^Tx = (1-t)c^Tu + tc^Tv$ و $0<t<1$.

پس یکی از c^Tu یا c^Tv بزرگتر مساوی c^Tx می شود. پس x بحرانی است.

اثبات ③: نقاط بحرانی راس هستند.

عکس نقیض: اگر x راس نباشد پس x بحرانی نیست

به تعبیر دیگر: اگر x BFS نباشد پس x بحرانی نیست

اگر x BFS نباشد پس ستون هایش مستقل خطی نیست پس $\exists w \text{ s.t. } A_B w_B = 0$

و $Aw=0$ و در قسمت های قبل نشان دادیم می توان در دو جهت w به مقدار ε حرکت کرد

پس داریم $u = x+\varepsilon w$ و $v = x-\varepsilon w$ که $x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ پس x بحرانی نیست.

تفسیری که اثبات کردیم با فرض این بود که LP به فرم معادله ای است. اما در فرم کانونی تعریف BFS به چه صورت است؟

در فرم معادله ای BFS را اینگونه تعریف می کردیم که نامعادله های $x_i \geq 0$ را با قرار دادن $x_i = 0$ تبدیل به معادله کنیم تا جایی که دستگاه دقیقاً یک جواب داشته باشد.

در فرم کانونی تعبیر این است که اینقدر به صفحه های مختلف بچسبیم تا فقط یک نقطه داشته باشیم.

مثال نقض خوش دست:

$$\max \quad x_1 + y_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$

این مثال راسی ندارد!

تفسیر اصلی polytope: یک polytope محدب = پوشش محدب راس هایش

دوگانی: برای یک LP داده شده، می خواهیم سندی بسازیم که کسی ببیند جواب این LP از یک حدی بیشتر نمی شود.

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_i \geq 0 \; ; \; i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

یک حد بالا برای مقدار تابع هدف:

$$y_1(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) + y_2(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + y_m(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \leq \sum y_i b_i$$

برای اینکه داشته باشیم $\sum c_i x_i \le \sum y_j (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n)$

باید برای هر متغیری، با توجه به اینکه متغیرها مثبت اند، ضرایب سمت راست از چپ بیشتر باشد

یعنی: $\sum y_j a_{ji} \ge c_i \; ; \; i \in \{1, 2, \dots, n\}$

حالا با این شرطی که روی y ها داریم، باید سعی کنیم bound ارائه شده را tight کنیم

یعنی مینیمم کنیم $\sum y_i b_i$

یعنی:

$$\min b^T y$$
$$A^T y \ge c$$
$$y \ge 0$$

تفسیر دوگان ضعیف: برای هر جواب y دوگان و هر جواب x اصلی داریم: $c^T x \le b^T y$

اگر در اصلی $Ax = b$ داشتیم y آزاد است و اگر x آزاد بود داریم $A^T y = 0$

تفسیر قوی دوگان: فرض کنیم P مسئله‌ی اولیه و D مسئله‌ی دوگان باشد. P و D چند حالت دارند

- P و D نشدنی
- P بی‌کران و D نشدنی
- P نشدنی و D بی‌کران
- P و D شدنی: جواب بهینه‌ی P = جواب بهینه‌ی D

لم فارکاش: دقیقاً یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

1- $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \,,\; x \ge 0$

2- $\exists y \in \mathbb{R}^m : y^T A \ge 0 \;,\; y^T b < 0$

Subject:
Year.   Month.   Date. 19

صورت های دیگر لم فارکاش:

دقیقاً یکی از دو حالت زیر برقرار است:

F_1: b درون کنج $(a_1, \dots, a_n)$ است. (یعنی ترکیب خطی نامنفی این بردارهاست.
معادل است با گزاره‌ی ① در صورت قبلی لم که $Ax = b$ و $x \geq 0$)

F_2: وجود دارد صفحه‌ی h که از 0 می‌گذرد که b در پایین صفحه و a_i ها در بالای صفحه هستند
(یعنی متناظر با صفحه‌ی h یک بردار عمود بر آن وجود دارد که $x^T A \geq 0$ و $x^T b < 0$ است)

یکی دیگر از صورت های لم فارکاش:

F'': $Ax \leq b$ جواب دارد $\Longleftrightarrow$ برای هر $y \in \mathbb{R}^m$ نامنفی که $y^T A = 0^T$ باشد داشته باشیم $y^T b \geq 0$

که این گزاره معادل است با:

$Ax \leq b$ جواب نامنفی دارد $\Longleftrightarrow$ برای هر $y \in \mathbb{R}^m$ نامنفی که $y^T A \geq 0^T$ باشد داشته باشیم $y^T b \geq 0$

ادامه‌ی این جلسه در جزوه موجود نیست

: Complementary Slackness ~~[illegible]~~

Primal:	Dual:
$Ax \leq b$	$A^Ty \geq c$
$\max c^Tx$	$\min b^Ty$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

A یک ماتریس $m \times n$ است.

$c^Tx \leq b^Ty$ $\forall x,y$ feasible طبق قضیه‌ی ضعیف دوگان

$$c^Tx \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = b^Ty$$

قضیه‌ی مکمل لنگی،

$$x, y \text{ are optimum} \iff \begin{cases} y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \end{cases} \text{ AND}$$

اثبات سمت $\Leftarrow$: طبق قضیه قوی دوگان باید $c^Tx = b^Ty$ پس نامساوی‌های بالا باید حتماً در حالت تساوی رخ بدهد

اثبات سمت $\Rightarrow$: باعث می‌شود نامساوی‌ها حتماً در تساوی رخ دهند پس $c^Tx = b^Ty$ پس طبق قضیه‌ی قوی دوگان y و x بهینه‌اند.

بعضی وقت‌ها به جای بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسأله، می‌توان فرم دوگان را نوشت و در x و y شرایطی برقرار کرد که سمت راست قضیه‌ی مکمل لنگی برقرار شود و بتوانیم استدلال کنیم که x بهینه است.

Subject: Comb. Opt.
Year. Month. Date. 12

تعبیر هندسی:

فرض کنید یک توپ با حجم قابل صرف‌نظر کردن در چندوجهی برنامه‌ی اصلی انداختیم
زمانی که توپ ساکن شود در مکانی است که نیروهای وارد شده بر آن برآیندشان صفر شده‌است
اگر بردار c را بردار جاذبه در نظر بگیریم پس برآیند نیرویی که هر صفحه به طور عمود به توپ
وارد می‌کند (F) باید برابر با $-c$ باشد.
اما بردار نیروی هر صفحه در یکی از سطرهای A هست یعنی

$$F = yA = c$$
$$y \geq 0$$

صفحه‌هایی که نمی‌توانند به توپ نیرو وارد کنند (یعنی از توپ فاصله دارند) y شان صفر است
یعنی وقتی داریم $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ پس داریم $y_i = 0$
اما برای صفحه‌هایی که به توپ نیرو وارد می‌کنند معادله‌ی توپ در آن صفحه صدق می‌کند چون
به آن چسبیده (حجم توپ قابل صرفنظر) یعنی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ پس داریم $y_i > 0$