بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه شانزدهم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

تجزیه SVD:

Theorem 42. *Every real matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with $rank(A) = r$ can be written as:*

$$A = U\Sigma V^T \tag{12.10}$$

where $U \in \mathbb{R}^{n\times r}, V \in \mathbb{R}^{d\times r}, U^TU = I, V^TV = I$ *and* $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$. *Here,* σ_i *are called singular values.*

رادیکال مقدار ویژه‌های A^TA

Theorem 42. *Every real matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with $rank(A) = r$ can be written as:*

$$A = U\Sigma V^T \tag{12.10}$$

where $U \in \mathbb{R}^{n\times r}, V \in \mathbb{R}^{d\times r}, U^TU = I, V^TV = I$ and $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$. Here, σ_i are called singular values.

Theorem 42. *Every real matrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ *with* $rank(A) = r$ *can be written as:*

$$A = U\Sigma V^T \tag{12.10}$$

where $U \in \mathbb{R}^{n \times r}, V \in \mathbb{R}^{d \times r}, U^T U = I, V^T V = I$ *and* $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$. *Here,* σ_i *are called singular values.*

Definition 46. *Given a matrix* $M = U\Sigma V^T$ *(with* $U\Sigma V^T$ *as* M*'s SVD), we define the* ***pseudoinverse*** *of* M *as* $M^+ = V\Sigma^{-1}U^T$.

Claim 49. $A(A^T A)^+ A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

Claim 49. *$A(A^TA)^+A^T$ is the orthogonal projection onto $Colspace(A)$.*

اثبات:

Claim 49. $A(A^TA)^+A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

اثبات:

$A = U\Sigma V^T$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

Claim 49. $A(A^TA)^+A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A(A^TA)^+A^T =$$

Claim 49. *$A(A^TA)^+A^T$ is the orthogonal projection onto $Colspace(A)$.*

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$$

$$A(A^TA)^+A^T =$$

Claim 49. $A(A^TA)^+A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$$

$$(A^TA)^+ = V\Sigma^{-2}V^T$$

$$A(A^TA)^+A^T =$$

Claim 49. *$A(A^TA)^+A^T$ is the orthogonal projection onto $Colspace(A)$.*

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$$

$$(A^TA)^+ = V\Sigma^{-2}V^T$$

$$A(A^TA)^+A^T = U\Sigma V^T(V\Sigma^{-2}V^T)V\Sigma U^T$$

Claim 49. $A(A^TA)^+A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$$

$$(A^TA)^+ = V\Sigma^{-2}V^T$$

$$A(A^TA)^+A^T = U\Sigma V^T(V\Sigma^{-2}V^T)V\Sigma U^T = UU^T$$

Claim 49. $A(A^TA)^+A^T$ *is the orthogonal projection onto* $Colspace(A)$.

اثبات:

$$A = U\Sigma V^T$$

U: پایه‌های زیرفضای A

پایه‌های ستون‌های A

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$$

$$(A^TA)^+ = V\Sigma^{-2}V^T$$

$$A(A^TA)^+A^T = U\Sigma V^T(V\Sigma^{-2}V^T)V\Sigma U^T = UU^T$$

۱ـ ضرب داخلی در پایه‌ها

۲ـ ضرایب پایه

مرور: نشاندن زیرفضا

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مرور: نشاندن زیرفضا

Definition 6.2.1. Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a linear subspace. Then $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is an *ε-subspace embedding for E* if

$$\forall x \in E,\ (1-\varepsilon)\|x\|_2^2 \le \|\Pi x\|_2^2 \le (1+\varepsilon)\|x\|_2^2.$$

Definition 6.2.8. An *(ε, d, δ)-oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m \times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim \mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top (\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مثال: رگرسیون

مسئله رگرسیون

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

مسئله رگرسیون

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$

n>>d و

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

مسئله رگرسیون با کم‌ترین مربعات

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \|X\beta - y\|_2$$

$$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

$$y \in \mathbb{R}^n$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = \underbrace{y^{\perp}}_{} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\parallel}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\parallel}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2. \end{aligned}$$

حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned} \|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2. \end{aligned}$$

آن‌چه دست ماست

حل:

در زیرفضای
ستون‌های X

در زیرفضای
عمود بر
ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned} \|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2. \end{aligned}$$

آنچه دست
ماست

$$\boxed{X\beta = y^{\|}}$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آنچه دست ماست

$X\beta = \hat{y}^{\|}$

تصویر y: $X(X^{\top}X)^{+}X^{\top}y$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\parallel}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\parallel}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آن‌چه دست ماست

$$\beta^{LS} = (X^{\top}X)^{+}X^{\top}y$$

تصویر y: $X(X^{\top}X)^{+}X^{\top}$y

$$X\beta = \grave{y}^{\parallel}$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

$$\beta^{LS} = (X^{\top}X)^{+}X^{\top}y$$

آن‌چه دست ماست

تصویر y: $X(X^{\top}X)^{+}X^{\top}$y

$$X\beta = \grave{y}^{\|}$$

زمان؟

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

$$\xrightarrow{\Pi X,\ \Pi y}$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

تصویر y: $(X^\top X)^+ X^\top y$.

$\Pi X, \Pi y$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

تصویر y: $(X^\top X)^+ X^\top y$.

$\Pi X, \Pi y$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

تصویر y: $((\Pi X)^\top (\Pi X))^+ (\Pi X)^\top \Pi y$.

Lemma 6.3.1. *Define* $E := span(cols(X), y)$*. Suppose* Π *is an* ε*-subspace embedding for* E*. Then*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin\,\|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

Lemma 6.3.1. *Define* $E := span(cols(X), y)$. *Suppose* Π *is an* ε*-subspace embedding for* E. *Then*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin\,\|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

$$(1-\varepsilon)\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \|\Pi X\tilde{\beta}^{LS} - \Pi y\|_2^2$$

نشاندن

Lemma 6.3.1. *Define* $E := span(cols(X), y)$. *Suppose* Π *is an* ε*-subspace embedding for* E. *Then*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin\,\|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

$$(1-\varepsilon)\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \|\Pi X\tilde{\beta}^{LS} - \Pi y\|_2^2$$

نشاندن

$$\leq \|\Pi X\beta^{LS} - \Pi y\|_2^2$$

کمینه بودن

Lemma 6.3.1. *Define* $E := span(cols(X), y)$. *Suppose* Π *is an* ε-*subspace embedding for* E. *Then*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

$$(1-\varepsilon)\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \|\Pi X\tilde{\beta}^{LS} - \Pi y\|_2^2$$

نشاندن

$$\leq \|\Pi X\beta^{LS} - \Pi y\|_2^2$$

کمینه بودن

$$\leq (1+\varepsilon)\|X\beta^{LS} - y\|_2^2$$

نشاندن

Theorem 6.3.2. *Given $X \in \mathbb{R}^{n \times d}, y \in \mathbb{R}^n$, in time $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, with probability at least $9/10$ one can compute $\tilde{\beta}^{LS}$ satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

Theorem 6.3.2. *Given* $X \in \mathbb{R}^{n\times d}, y \in \mathbb{R}^n$, *in time* $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, *with probability at least* $9/10$ *one can compute* $\tilde{\beta}^{LS}$ *satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

$((\Pi X)^\top(\Pi X))^+(\Pi X)^\top \Pi y$:y تصوير

Theorem 6.3.2. *Given $X \in \mathbb{R}^{n\times d}, y \in \mathbb{R}^n$, in time $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, with probability at least $9/10$ one can compute $\tilde{\beta}^{LS}$ satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathbb{P}_{\Pi\sim\mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

تصوير y: $((\Pi X)^\top(\Pi X))^+(\Pi X)^\top \Pi y$

Theorem 6.3.2. *Given $X \in \mathbb{R}^{n \times d}, y \in \mathbb{R}^n$, in time $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, with probability at least $9/10$ one can compute $\tilde{\beta}^{LS}$ satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m \times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

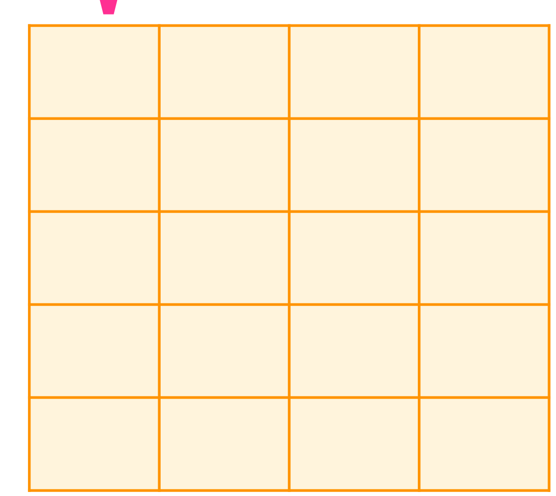
$$\mathbb{P}_{\Pi \sim \mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top (\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

تصویر y: $((\Pi X)^\top (\Pi X))^+ (\Pi X)^\top \Pi y$

یک ±۱ در هر ستون (در سطر h(i))

با احتمال ۱/۲

Π



Theorem 6.3.2. *Given* $X \in \mathbb{R}^{n \times d}, y \in \mathbb{R}^n$, *in time* $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, *with probability at least* $9/10$ *one can compute* $\tilde{\beta}^{LS}$ *satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m \times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim \mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top (\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

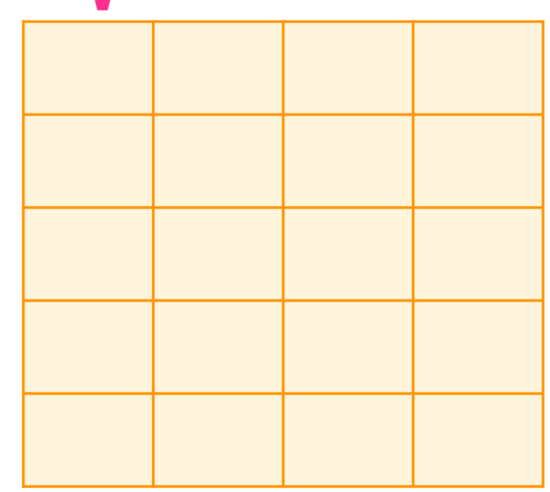
تصویر y: $((\Pi X)^\top (\Pi X))^+ (\Pi X)^\top \Pi y$

یک ±۱ در هر ستون
(در سطر h(i))

با احتمال ۱/۲

$m = d^2/\epsilon^2$

Π



Theorem 6.3.2. *Given $X \in \mathbb{R}^{n \times d}, y \in \mathbb{R}^n$, in time $O(nnz(X) + n) + poly(d/\varepsilon)$, with probability at least $9/10$ one can compute $\tilde{\beta}^{LS}$ satisfying*

$$\|X\tilde{\beta}^{LS} - y\|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|X\beta^{LS} - y\|_2^2.$$

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m \times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi \sim \mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

تصویر y: $((\Pi X)^\top(\Pi X))^+(\Pi X)^\top \Pi y$

زمان اجرا:

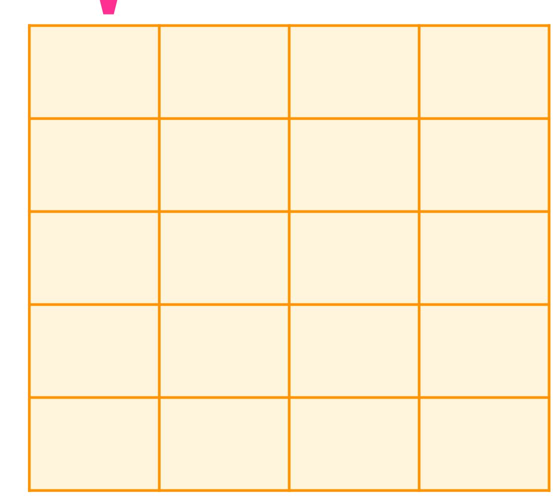
یک ±۱ در هر ستون

(در سطر h(i))

با احتمال ۱/۲

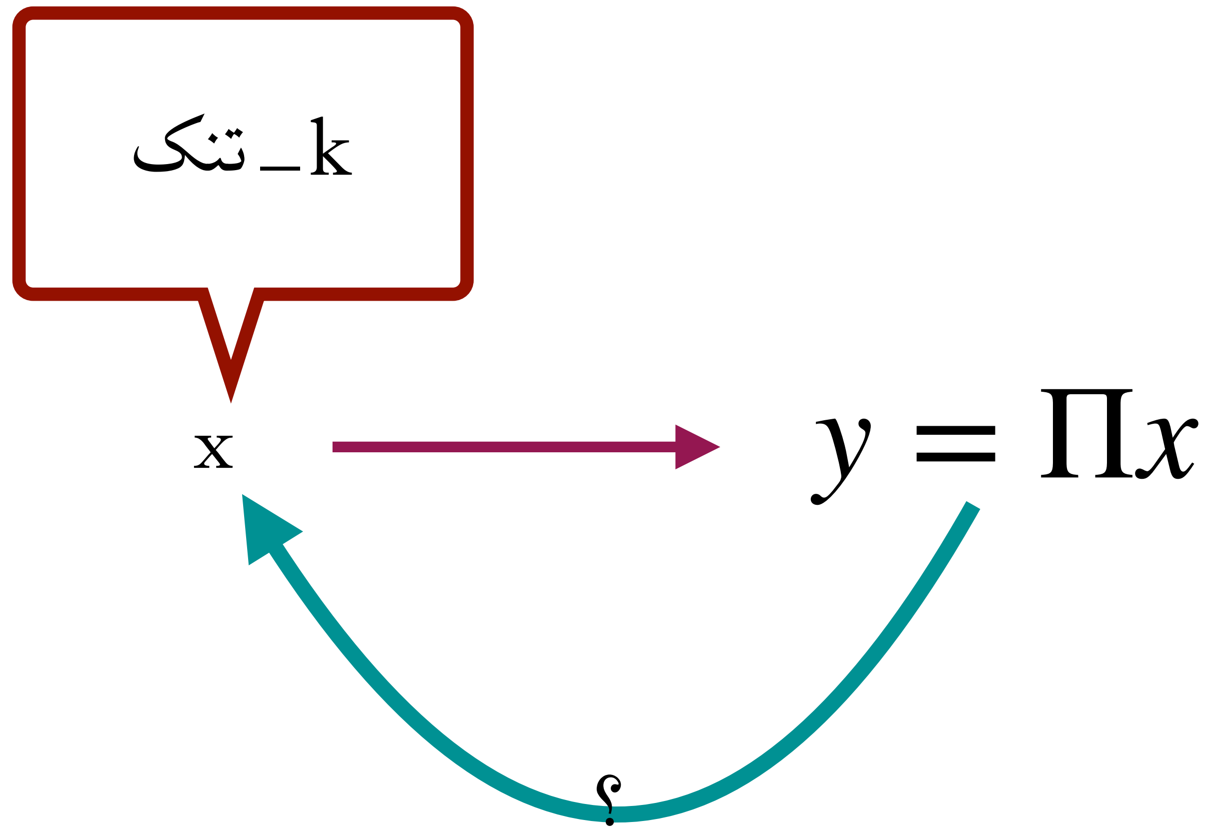
$m = d^2/\epsilon^2$

Π

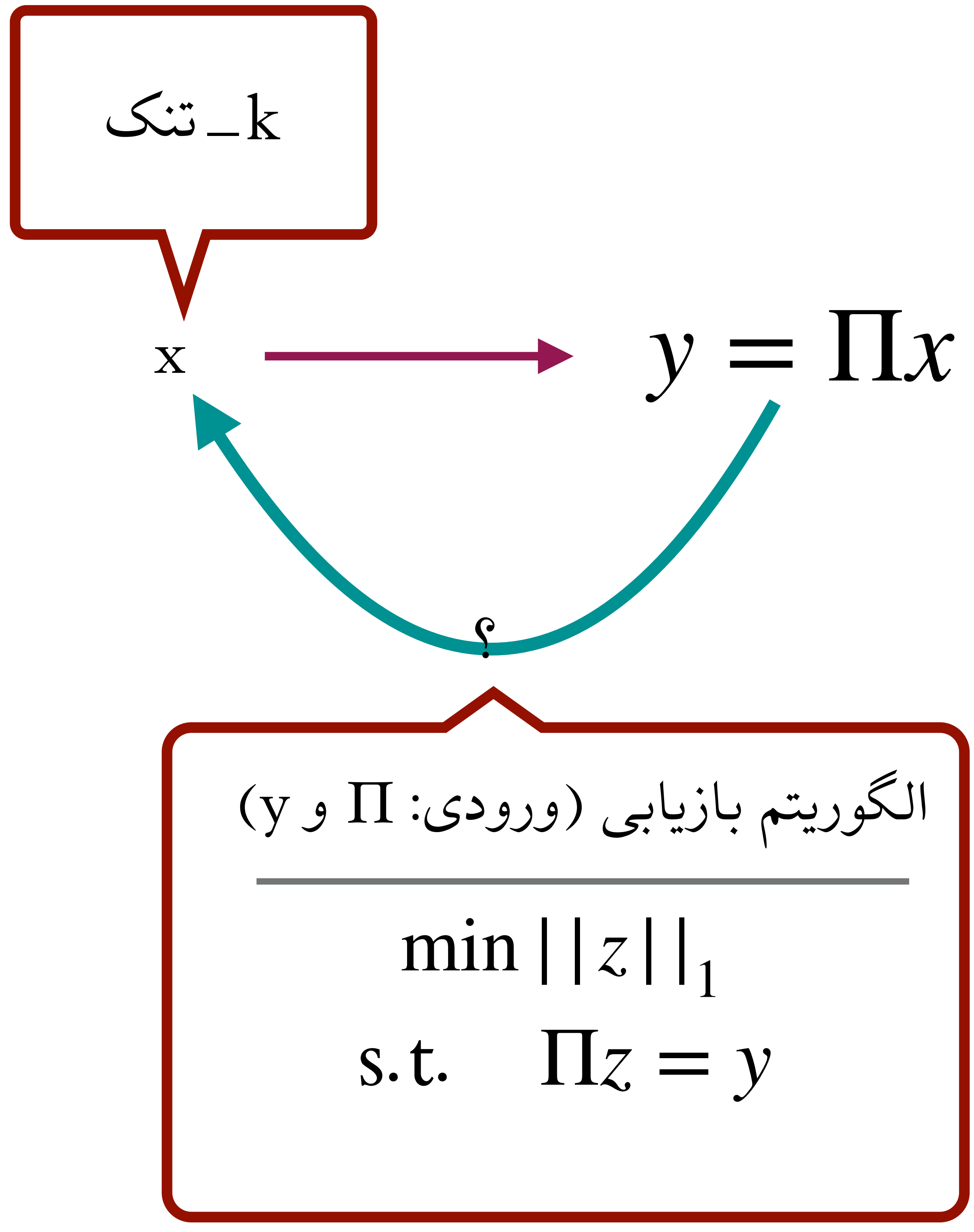


احساس فشردگی

انگیزش

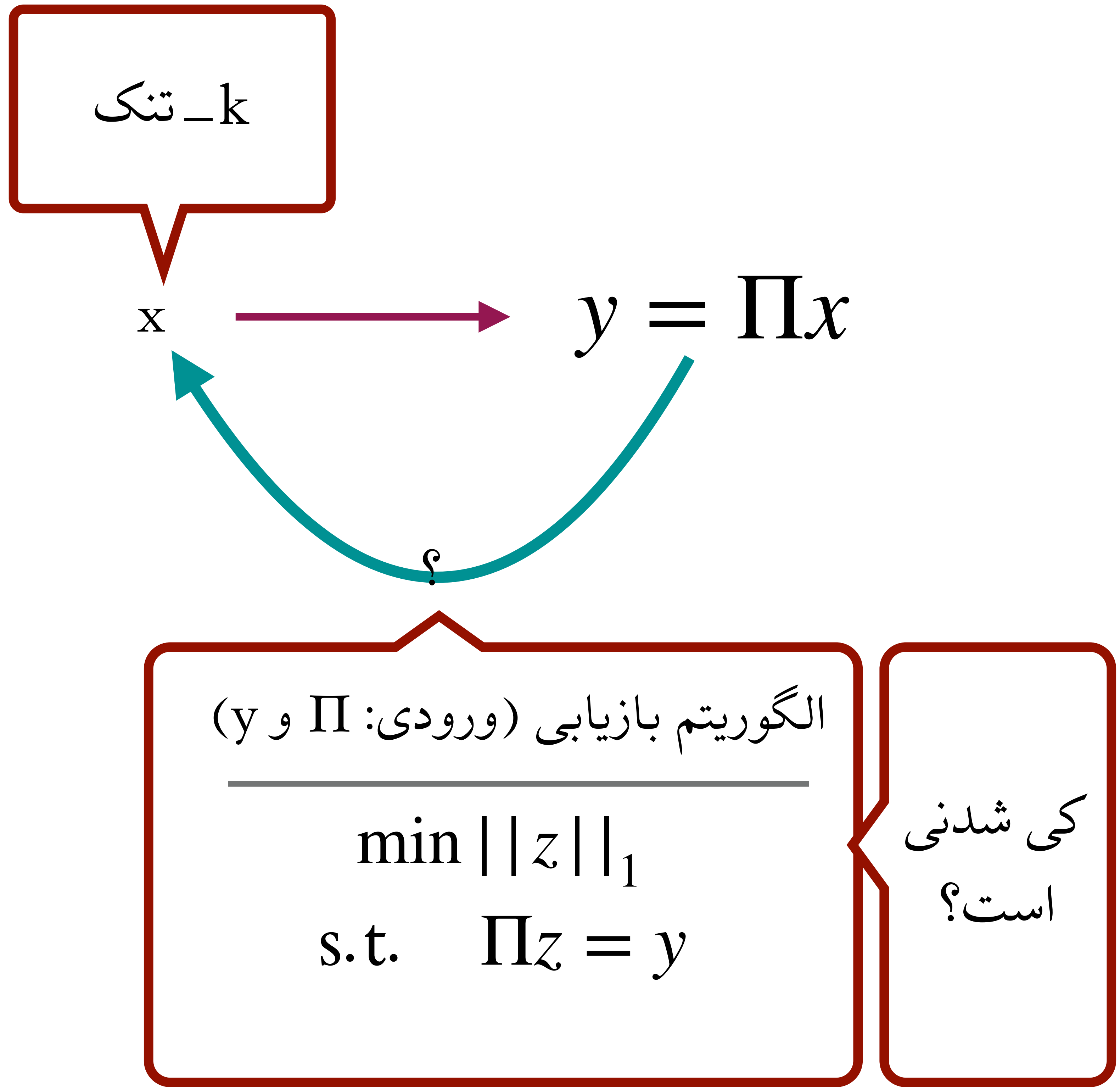


انگیزش

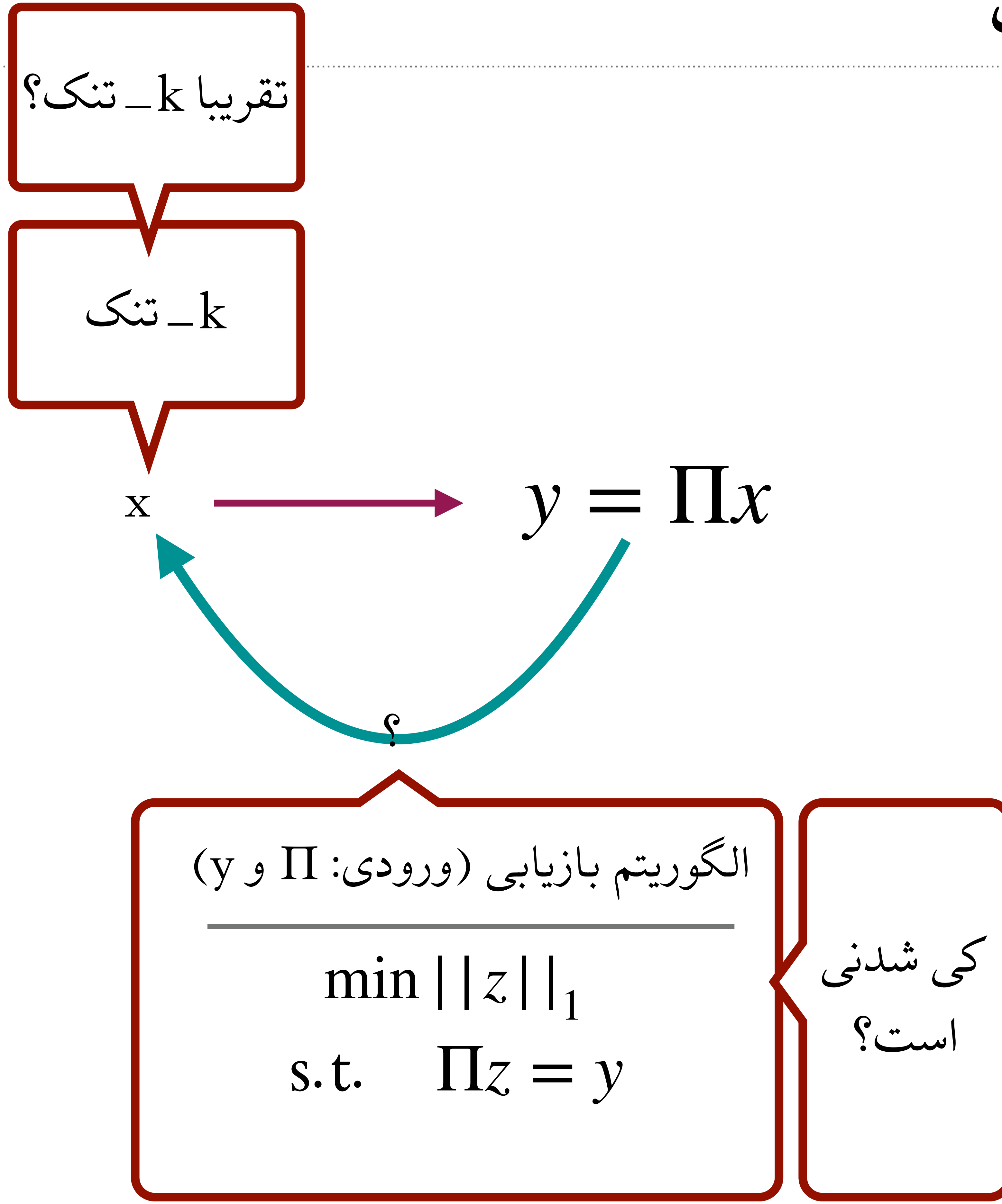


k_تنک
x
$y = \Pi x$
؟
الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)
$\min ||z||_1$
$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$

انگیزش


k_ تنک
x
$y = \Pi x$
؟
الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)
$\min ||z||_1$
$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$
کی شدنی است؟

انگیزش



تقریبا k_تنک؟
k_تنک
x
$y = \Pi x$
؟
الگوریتم بازیابی (ورودی: Π و y)
$\min ||z||_1$
$\text{s.t.} \quad \Pi z = y$
کی شدنی است؟

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

$$\sup_{T \subset [n] |T| = k} \|I_k - (\Pi^{(T)})^* \Pi^{(T)}\| < \delta,$$

Definition 1 *An $m \times n$ matrix A satisfies a* null-space property *of order k with constant C if for any $\eta \in \Re^n$ such that $A\eta = 0$, and any set $T \subset \{1 \ldots n\}$ of size k, we have*

$$\|\eta\|_1 \leq C \|\eta_{-T}\|_1$$

where $-T$ denotes a complement of T.

Definition 28. *We say a matrix* $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *satisfies the* (ε, k)-restricted isometry property *(or* RIP *for short) if for all* k*-sparse vectors* x *of unit Euclidean norm,*

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

Definition 1 *An* $m \times n$ *matrix* A *satisfies a* null-space property *of order* k *with constant* C *if for any* $\eta \in \Re^n$ *such that* $A\eta = 0$*, and any set* $T \subset \{1\ldots n\}$ *of size* k*, we have*

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$$

where $-T$ *denotes a complement of* T*.*

Lemma 1 *Suppose that* A *satisfies RIP of order* $(c+2)k$ *with constant* δ*,* $c>1$*. Then* A *satisfies the nullspace property of order* $2k$ *with constant* $C = 1+\sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$*.*

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که (2+c)k_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که $(2+c)k$_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|$=۲k

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که (2+c)k_تنک:

$$1 - \delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1 + \delta.$$

η که Aη=0:

$||\eta||_1 \le C||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=۲k

η که Aη=0:

$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=۲k

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

x که $(2+c)k$_تنک:

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

η که $A\eta=0$:

$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$ برای هر $|T|=۲k$

η که $A\eta=0$:

$\|\eta_T\|_1 \leq (C-1)\|\eta_{-T}\|_1$ برای هر $|T|=۲k$

به ترتیب

$\eta =$

$$\underbrace{\quad}_{2k} \; \underbrace{\quad}_{ck} \; \underbrace{\quad}_{ck} \; \cdots \; \underbrace{\quad}_{ck\,:=M}$$

$T = T_0$ $\quad T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_s$

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1 \rangle \le ||x||_2 \sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x,1\rangle \leq ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \leq ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2$$

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1 \rangle \leq ||x||_2 \sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \leq ||\eta_{T0} + \eta_{T1}||_2$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta} ||A(\eta_{T0} + \eta_{T1})||_2$$

$$1 - \delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1 + \delta.$$

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1\rangle \le ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \le ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2$$

$$1-\delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

؟

$$||\eta_T||_1 \leq (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x,1\rangle \leq ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \leq ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2$$

$$1-\delta \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq 1+\delta.$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

$$\leq \quad (1-\delta)^{-1}\sum_{j=2}^{s}\|A\eta_{T_j}\|_2$$

مثلثی

؟

$$||\eta_T||_1 \le (C-1)||\eta_{-T}||_1$$

ورود نرم ۲

$$||x||_1 = \langle x, 1\rangle \le ||x||_2\sqrt{2k}$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}\|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \le ||\eta_{T0}+\eta_{T1}||_2$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T0}+\eta_{T1})||_2$$

$$1-\delta \le \|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

$$\le \frac{1}{1-\delta}||A(\eta_{T2}+\cdot+\eta_{Ts})||_2$$

$$A\sum_j \eta_j = 0$$

$$\le \quad (1-\delta)^{-1}\sum_{j=2}^{s}\|A\eta_{T_j}\|_2$$

مثلثی

$$\le \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

$$\|\Pi x\|_2^2 \le 1+\delta.$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\le\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\ i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\; i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2}$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\, i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;=\|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\, i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;=\|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\sum_{j=1}^{s}\|\eta_{T_j}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_2 \;\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)\sum_{j=2}^{s}\|\eta_{T_j}\|_2$$

بازگشت به نرم ۱

$$\forall\; i \in T_{j+1} \qquad |\eta_i| \leq \|\eta_{T_j}\|_1/M$$

$$\|\eta_{T_{j+1}}\|_2 \leq (M(\|\eta_{T_j}\|_1/M)^2)^{1/2} \;= \|\eta_{T_j}\|_1/M^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &\leq\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\sum_{j=1}^{s}\|\eta_{T_j}\|_1 \\ &=\; (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1 \end{aligned}$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \leq \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \leq (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

ck :=M

$$\|\eta_T\|_1 \leq [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2} \ \|\eta_T\|_2$$

$$\|\eta_T\|_2 \quad \le \quad (1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_T\|_1 \le (2k)^{1/2}(1-\delta)^{-1}(1+\delta)/M^{1/2}\|\eta_{-T}\|_1$$

ck :=M

$$\|\eta_T\|_1 \le [1+(1-\delta)^{-1}(1+\delta)(2/c)^{1/2}]\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 1 *Suppose that A satisfies RIP of order $(c+2)k$ with constant δ, $c > 1$. Then A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C = 1 + \sqrt{2/c}(1+\delta)(1-\delta)$.*

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2 - C} Err_1^k(x)$$

$Err_1^k(x) := ||x_{-T}||_1$

T: k بزرگ‌ترین اندیس‌های η

$\eta = x^* - x$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=k$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$Err_1^k(x) := ||x_{-T}||_1$

T: k بزرگ‌ترین اندیس‌های η

$\eta = x^* - x$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=k$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$Err_1^k(x) := ||x_{-T}||_1$

T: k بزرگ‌ترین اندیس‌های η

$\eta = x^* - x$

η که A η=0:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر |T|=k

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

$Err_1^k(x) := ||x_{-T}||_1$

T: k بزرگ‌ترین اندیس‌های η

$\eta = x^* - x$

η که $A\eta=0$:

$||\eta||_1 \leq C||\eta_{-T}||_1$ برای هر $|T|=k$

$$\|\eta\|_1 \leq C\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x_T^*\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

حكم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\geq \|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$$\geq -\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\geq$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$$\geq$$

$$-\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\geq \|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

$$\geq -\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \|\eta_T\|_1 + 2\|x_{-T}\|_1 = \|\eta_T\|_1 + 2Err_1^k(x)$$

حکم:

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \frac{2}{2-C} Err_1^k(x)$$

$$\|x^*_T\|_1 + \|x^*_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

∧|

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1$$

∧|

$$-\|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1$$

$$\eta = x^* - x$$

$$\|x_T\|_1 - \|\eta_T\|_1 - \|x_{-T}\|_1 + \|\eta_{-T}\|_1 \leq \|x_T\|_1 + \|x_{-T}\|_1$$

$$\|\eta_{-T}\|_1 \leq \|\eta_T\|_1 + 2\|x_{-T}\|_1 = \|\eta_T\|_1 + 2Err_1^k(x)$$

∧|

$$(C-1)\|\eta_{-T}\|_1$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$

Lemma 2 *Assume A satisfies the nullspace property of order $2k$ with constant $C < 2$. Then for x^* that minimizes $\|x^*\|_1$ subject to $Ax^* = Ax$ we have*

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{2C}{2-C} Err_1^k(x)$$