بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه بیست و چهارم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

تصویر تصادفی ویژگی‌ها برای یادگیری هسته

یادآوری: مسئله رگرسیون

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

یادآوری: مسئله رگرسیون

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

$X \in \mathbb{R}^{n\times d}$

و n>>d

یادآوری: مسئله رگرسیون با کم‌ترین مربعات

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin}\, \|X\beta - y\|_2$$

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$y \in \mathbb{R}^{n}$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned} \|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2. \end{aligned}$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned}\|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.\end{aligned}$$

آن‌چه دست ماست

یادآوری: حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned}\|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2\end{aligned}$$

آن‌چه دست ماست

$$X\beta = y^{\|}$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2$$

آنچه دست ماست

$$X\beta = y^{\|}$$

تصویر y: $X(X^\top X)^{+}X^\top \mathrm{y}$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آن‌چه دست ماست

$$\beta^{LS} = (X^\top X)^{+} X^\top y$$

تصویر y: $X(X^\top X)^{+} X^\top \mathrm{y}$

$$X\beta = y^{\|}$$

یادآوری: حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\parallel}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\parallel}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آنچه دست ماست

$$\beta^{LS} = (X^\top X)^+ X^\top y$$

تصویر y: $X(X^\top X)^+ X^\top$y

$$X\beta = \hat{y}^{\parallel}$$

زمان؟

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^{+} A^\top b$$

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

$$x = I_k \cdot (A^\top A)^+ A^\top b$$

$$x = (A^\top A)(A^\top A)^+ (A^\top A)^+ A^\top b$$

می‌توان در نظر گرفت: $x = A^\top y$

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

x: چه ترکیب خطی از ویژگی‌ها = جواب

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

2 age + 3 weight

x: چه ترکیب خطی از ویژگی‌ها = جواب

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

2 age + 3 weight

x: چه ترکیب خطی از ویژگی‌ها = جواب

فراتر از خطی؟ مثلا ضرب دو ویژگی؟

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

x: چه ترکیب خطی از ویژگی‌ها = جواب

2 age + 3 weight

فراتر از خطی؟ مثلا ضرب دو ویژگی؟

1 age + 2 weight
+ 3 age x weight
+ ½ age^2

یادآوری رگرسیون

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

x: چه ترکیب خطی از ویژگی‌ها = جواب

2 age + 3 weight

فراتر از خطی؟ مثلا ضرب دو ویژگی؟

1 age + 2 weight
+ 3 age x weight
+ ½ age^2

افزودن توان‌های
دو ویژگی‌ها

فراتر از خطی: درجات بالاتر

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^{+} A^\top b$$

فراتر از خطی: درجات بالاتر

ویژگی‌ها

+ توان ۲ ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^{+} A^\top b$$

فراتر از خطی: درجات بالاتر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

ویژگی‌ها

+ توان ۲ ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^{+} A^\top b$$

فراتر از خطی: درجات بالاتر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

ویژگی‌ها

+ توان ۲ ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

تغییر سطرها:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \vdots \\ z_d^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d^2+d}$$

فراتر از خطی: درجات بالاتر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

ویژگی‌ها

+ توان ۲ ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

هزینه ساخت ماتریس جدید: nd^2

تغییر سطرها:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \vdots \\ z_d^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d^2+d}$$

فراتر از خطی: درجات بالاتر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

+ توان ۲ ویژگی‌ها

ویژگی‌ها

نمونه‌ها

$$Ax \simeq b$$

$$x = (A^\top A)^+ A^\top b$$

هزینه ساخت ماتریس جدید: nd^2

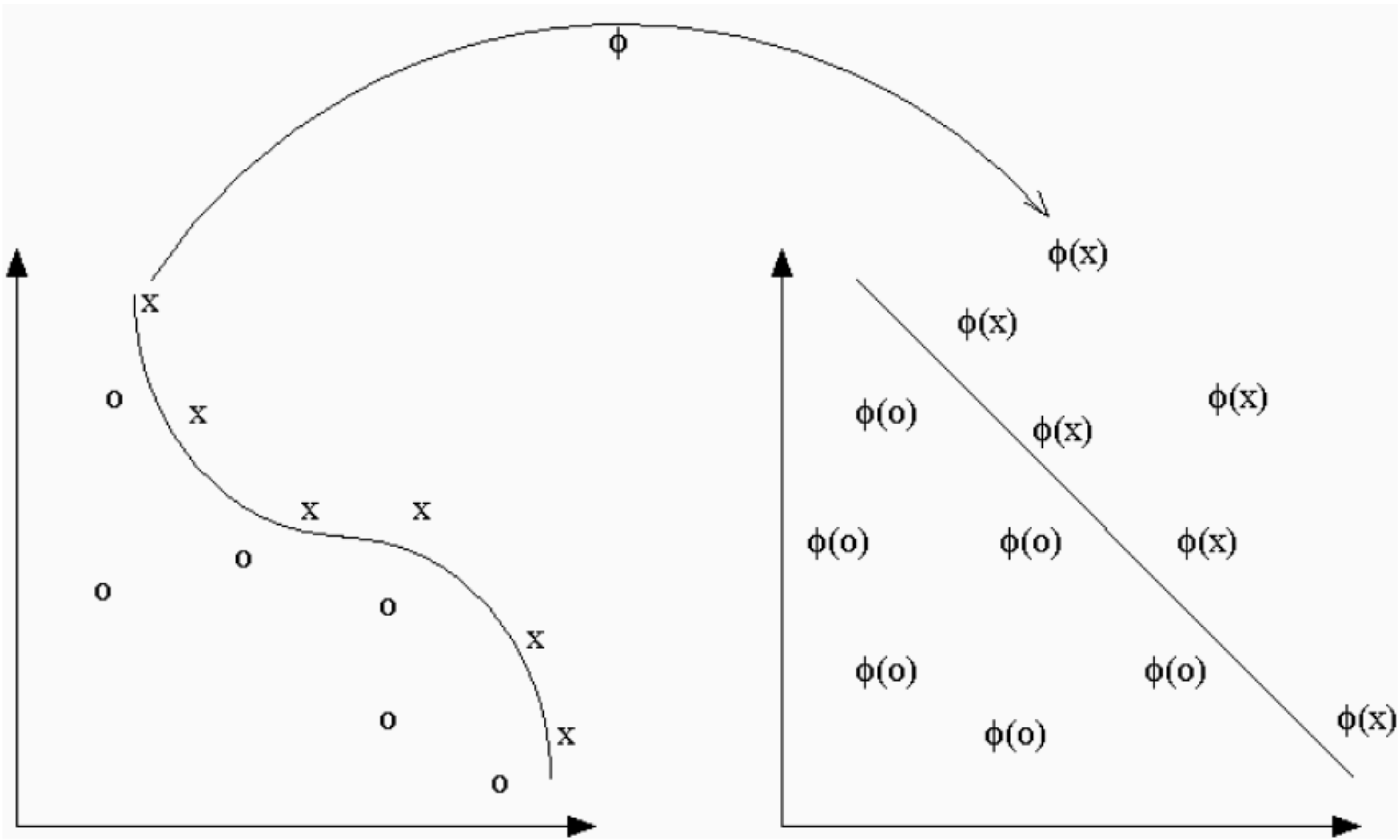
برای ابعاد بالاتر: nd^q

تغییر سطرها:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \vdots \\ z_d^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d^2+d}$$

تعبیر هندسی از تابع هسته



مشاهده ۱: فقط ضرب بردار ویژگی‌ها مهم است!

$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$

و n>>d

$$Ax \simeq b$$

می‌توان در نظر گرفت:

$x = A^\top y$

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

مشاهده ۱: فقط ضرب بردار ویژگی‌ها مهم است!

$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$

n>>d و

$$Ax \simeq b$$

می‌توان در نظر گرفت:

$x = A^\top y$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

n>>d و

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

هسته برای درجه‌های بالاتر (مثلا ۲)

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$$AA^\top y \simeq b$$

$$K := AA^\top$$

$$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}x_1 \\ x_1^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}y_1 \\ y_1^2 \\ \sqrt{2}y_1y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= 1 + x_1y_1 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + \cdots \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_dy_d + 1)^2 \\
&= (\langle x, y \rangle + 1)^2
\end{aligned}$$

هسته برای درجه‌های بالاتر (مثلا ۲)

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}x_1 \\ x_1^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}y_1 \\ y_1^2 \\ \sqrt{2}y_1y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= 1 + x_1y_1 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + \cdots \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_dy_d + 1)^2 \\
&= (\langle x, y \rangle + 1)^2
\end{aligned}$$

هسته برای درجه‌های بالاتر (مثلا ۲)

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

$K_{i,j} = (\langle a_i, a_j \rangle + 1)^2$

$$\begin{aligned}\langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}x_1 \\ x_1^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}y_1 \\ y_1^2 \\ \sqrt{2}y_1y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= 1 + x_1y_1 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + \cdots \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_dy_d + 1)^2 \\ &= (\langle x, y \rangle + 1)^2\end{aligned}$$

هسته‌های دیگر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j\rangle$

$K_{i,j} = (\langle a_i, a_j\rangle + 1)^2$

هسته

درجه ۲

هسته‌های دیگر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

هسته درجه ۲

$K_{i,j} = (\langle a_i, a_j \rangle + 1)^2$

هسته گوسی

$$K(x,y) = e^{-||x-y||^2}$$

هسته‌های دیگر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle$

هسته درجه ۲

$K_{i,j} = (\langle a_i, a_j \rangle + 1)^2$

هسته گوسی

$$K(x,y) = e^{-||x-y||^2}$$

هسته نمایی

$$K(x,y) = e^{-||x-y||}$$

هسته‌های دیگر

جایگزاری سطر z با $\phi(z)$

$AA^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$

و n>>d

$$AA^\top y \simeq b$$

$K := AA^\top$

$K_{i,j} = \langle a_i, a_j\rangle$

هسته درجه ۲

$K_{i,j} = (\langle a_i, a_j\rangle + 1)^2$

هسته گوسی

$$K(x,y) = e^{-||x-y||^2}$$

هسته نمایی

$$K(x,y) = e^{-||x-y||}$$

جابجایی ناوردا

پس تا اینجا

$$Ax \simeq b$$

$$AA^\top y \simeq b$$

سریع‌تر؟

O(n²d)

$$Ky \simeq b$$

$$y = (K^\top K)^+ K^\top b$$

O(n³)

$$e^{-||\Delta||^2}$$

تبدیل فوریه

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\\|\Delta\\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\\|\omega\\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\\|\Delta\\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\\|\Delta\\|_1}$

تبدیل فوریه

$$e^{-||\Delta||^2}$$

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\|\Delta\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\|\Delta\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\|\Delta\|_1}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2} e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

تبدیل فوریه

$$e^{-||\Delta||^2}$$

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\|\Delta\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\|\Delta\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\|\Delta\|_1}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2} e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$g(\eta) = \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2}$$

$$e^{-||\Delta||^2}$$

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\|\Delta\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\|\Delta\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\|\Delta\|_1}$

تبدیل فوریه

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2} e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\eta) e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$g(\eta) = \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2}$$

تبدیل فوریه

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\|\Delta\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\|\Delta\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\|\Delta\|_1}$

$$e^{-||\Delta||^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2} e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\eta) e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$g(\eta) = \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

تبدیل فوریه

$$e^{-||\Delta||^2}$$

Kernel Name	$k(\Delta)$	$p(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{\|\Delta\|_2^2}{2}}$	$(2\pi)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{2}}$
Laplacian	$e^{-\|\Delta\|_1}$	$\prod_d \frac{1}{\pi(1+\omega_d^2)}$
Cauchy	$\prod_d \frac{2}{1+\Delta_d^2}$	$e^{-\|\Delta\|_1}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2} e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\eta) e^{-2\pi i \eta^T \Delta} d\eta$$

$$g(\eta) = \pi^{d/2} e^{-||\eta||^2 \pi^2}$$

$$= \mathbb{E}_{\eta \sim g}[e^{-2\pi i \eta^T \Delta}]$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}]$$

$$
\begin{aligned}
e^{-||\Delta||^2} &= \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}] \\
&\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T\Delta}
\end{aligned}
$$

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}]$$

تخمین با نمونه‌گیری

$$\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T\Delta}$$

+

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}]$$

$$\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T\Delta}$$

تخمین با نمونه‌گیری

ادعا:

برای $m = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$

با احتمال $1-\delta$:

$$\langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle \in K(x,y) \underset{+}{-} \epsilon$$

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}]$$

تخمین با نمونه‌گیری

$$\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T\Delta}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T x} e^{-2\pi i\eta_j^T(-y)}$$

ادعا:

برای $m = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$

با احتمال $1-\delta$:

$$\langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle \in K(x,y) \underset{+}{-} \epsilon$$

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T\Delta}]$$

تخمین با نمونه‌گیری

$$\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T\Delta}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T x} e^{-2\pi i\eta_j^T(-y)}$$

$$= \langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle$$

ادعا:

برای $m = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$

با احتمال $1-\delta$:

$$\langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle \in K(x,y) \mp \epsilon$$

$$e^{-||\Delta||^2} = \mathbb{E}_{\eta\sim g}[e^{-2\pi i\eta^T \Delta}]$$

$$\approx \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T \Delta}$$

تخمین با نمونه‌گیری

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-2\pi i\eta_j^T x} e^{-2\pi i\eta_j^T (-y)}$$

$$= \langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle$$

ادعا:

برای $m = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$

با احتمال $1-\delta$:

$$\langle\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)\rangle \in K(x,y) \mp \epsilon$$

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-2\pi i\eta_1^T x} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-2\pi i\eta_m^T x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}_{\eta\sim g}\left[e^{-2\pi i\eta^T x}e^{-2\pi i\eta^T(-y)}\right] = \mathbb{E}\Big[(\cos(-2\pi\eta^T x) + i\sin(-2\pi\eta^T x))(\mathrm{co}$$

$$= \mathbb{E}\left[\cos(2\pi\eta^T x)\cos(2\pi\eta^T y) + \sin(2\pi\eta^T x)\sin(2\pi\eta^T y)\right]$$

آخرش حقیقی
است

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\cos(2\pi\eta_1^T x)\\ \sin(2\pi\eta_1^T x)\\ \vdots \\ \cos(2\pi\eta_m^T x)\\ \sin(2\pi\eta_m^T x)\end{bmatrix}$$

پس تا اینجا

$$Ax \simeq b$$

$$AA^\top y \simeq b$$

O(nm)

O(n^2d)

$$Ky \simeq b$$

O(n m^2)

O(n^3)

$$y = (K^\top K)^+ K^\top b$$

پس تا اینجا

$$Ax \simeq b$$

$$AA^\top y \simeq b$$

O(nm)

O(n^2d)

$$ZZ^\top \sim \quad Ky \simeq b$$

O(n m^2)

O(n^3)

$$y = (K^\top K)^+ K^\top b$$

پس تا اینجا

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \cos(2\pi\eta_1^T x) \\ \sin(2\pi\eta_1^T x) \\ \vdots \\ \cos(2\pi\eta_m^T x) \\ \sin(2\pi\eta_m^T x) \end{bmatrix}$$

$Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$

n>>d و

$$m = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$$

$$Ax \simeq b$$

$$AA^\top y \simeq b$$

$$ZZ^\top \sim \quad Ky \simeq b$$

$$y = (K^\top K)^+ K^\top b$$

O(nm)

O(n²d)

O(n m²)

O(n³)