بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه هجدهم: مسئله اختلاف

مسئله اختلاف (Discrepancy)

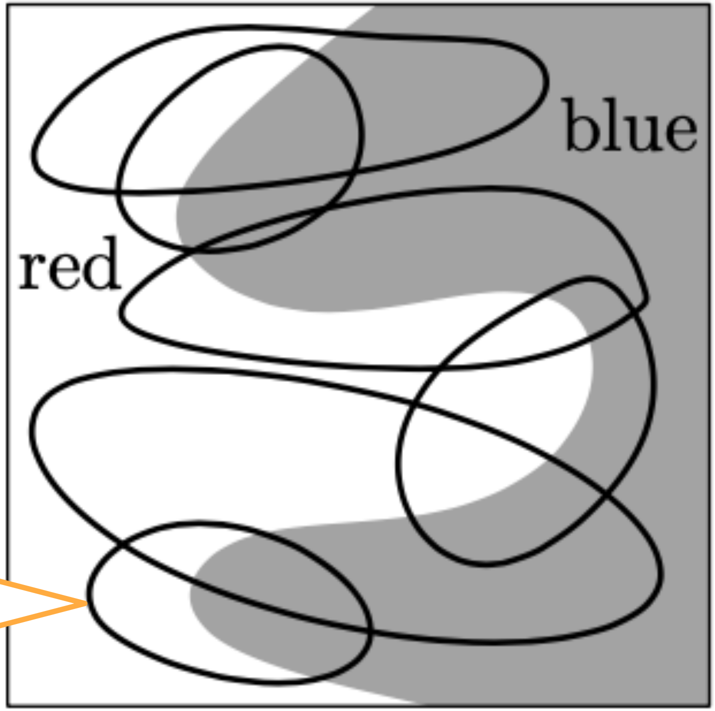
$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

مسئله اختلاف (Discrepancy)

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$



مجموعه‌ها

همیشه نمی‌توان اختلاف را کم کرد

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

$$\mathcal{F} := 2^V$$

همیشه نمی‌توان اختلاف را کم کرد

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

$$\mathcal{F} := 2^V$$

یک مجموعه تک‌رنگ با اندازه حداقل n/2

ورودی:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

$$\sum_{j \in F} \chi(j).$$

$$\operatorname{disc}(\mathcal{F}, \chi) := \max_{F \in \mathcal{F}} \left|\chi(F)\right|,$$

$$\operatorname{disc}(\mathcal{F}) := \min_{\chi} \operatorname{disc}(\mathcal{F}, \chi),$$

برنامەریزی صحیح

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \ \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \ \max_j \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min_{} \ \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \; \max_{j} \Big| \sum_{i \in F_j} x_i \Big|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \quad D$$

$$\Big| \sum_{i \in F_j} x_i \Big| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \quad D$$

$$\Big| \sum_{i \in F_j} x_i \Big| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az} - \mathbf{b}$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\|Ax-b\|_\infty$$

$$\min \ \max_j \left|\sum_{i\in F_j} x_i\right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left|\sum_{i\in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left|\sum_{i\in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i \in [-1,+1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az-b}$$

برنامه‌ریزی صحیح

$\|Ax - b\|_\infty$

$$\min \ \max_j |\sum_{i \in F_j} x_i|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$|\sum_{i \in F_j} x_i| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$|\sum_{i \in F_j} x_i| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az} - \mathbf{b}$$

روش گرد کردن خوب!

رنگ‌آمیزی + الگوریتم رنگ‌آمیزی

کران موجود:

$$\mathrm{disc}(\mathcal{F}) = O(\sqrt{n \log(m/n)})$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

$$X_i \in [a_i, b_i] \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\mathrm{P}(|S_n - \mathrm{E}[S_n]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

$$X_i \in [a_i, b_i] \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\mathrm{P}(|S_n - \mathrm{E}[S_n]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

$$P[\,|\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

$$P[\,|\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

$$P[\,|\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2\exp(-2t^2/4n)$$

- برای همه Fj:

$$P[\exists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2m\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
- برای هر Fj:

$$E[\chi(F_j)] = 0$$

$$P[\,|\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2\exp(-2t^2/4n)$$

- برای همه Fj:

$$P[\exists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \leq 2m\exp(-2t^2/4n)$$

- برای هیچ Fj:

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]\,| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n) \overset{?}{\geq} 1/2$$

مطلوب

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m \exp(-2t^2/4n) \;\; \geq^{?} 1/2$$

مطلوب

$$2m \exp(-2t^2/4n) \leq 1/2$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n) \overset{?}{\geq} 1/2$$

مطلوب

$$2m\exp(-2t^2/4n) \leq 1/2$$
$$\log m - 2t^2/4n \leq \log(1/4)$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n) \overset{?}{\geq} 1/2$$

مطلوب

$$2m\exp(-2t^2/4n) \leq 1/2$$
$$\log m - 2t^2/4n \leq \log(1/4)$$
$$\log m + \log 4 \leq 2t^2/4n$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m\exp(-2t^2/4n) \overset{?}{\geq} 1/2$$

مطلوب

$$2m\exp(-2t^2/4n) \leq 1/2$$
$$\log m - 2t^2/4n \leq \log(1/4)$$
$$\log m + \log 4 \leq 2t^2/4n$$
$$2n(\log m + \log 4) \leq t^2$$

رنگ‌آمیزی تصادفی

- $\chi(X_i) = \pm 1$ با احتمال ۱/۲
-

کران بیشینه اختلاف

$$P[\nexists j : |\chi(F_j) - E[\chi(F_j)]| > t] \geq 1 - 2m \exp(-2t^2/4n) \stackrel{?}{\geq} 1/2$$

مطلوب

$$2m \exp(-2t^2/4n) \leq 1/2$$

$$\log m - 2t^2/4n \leq \log(1/4)$$

$$\log m + \log 4 \leq 2t^2/4n$$

$$2n(\log m + \log 4) \leq t^2$$

$$t = \Theta(\sqrt{n \log m})$$

رنگ‌آمیزی + الگوریتم رنگ‌آمیزی

کران موجود: $$\mathrm{disc}(\mathcal{F}) = O(\sqrt{n \log(m/n)})$$

رنگ‌آمیزی تصادفی: $$O(\sqrt{n \log m})$$

سختی الگوریتمی

$$\operatorname{disc}(\mathcal{F}) = O(\sqrt{n\log(m/n)})$$

رنگ‌آمیزی تصادفی: $O(\sqrt{n\log m})$

- اگر P<>NP:
  - نمی‌توان ۰ را از $\sqrt{n}$ تشخیص داد!

چند مثال

چند مثال

- اختلاف خانواده «تصاعدهای حسابی»

چند مثال

- اختلاف خانواده «تصاعدهای حسابی»

$n^{1/4}$ $\{1, 2, \ldots, n\}$

وجودی!

چند مثال

- اختلاف خانواده «تصاعدهای حسابی»

وجودی!

$$n^{1/4} \qquad \{1, 2, \ldots, n\}$$

- هر خانواده n عضوی:

چند مثال

- اختلاف خانواده «تصاعدهای حسابی»

$$\{1, 2, \ldots, n\} \qquad n^{1/4}$$

وجودی!

- هر خانواده n عضوی:

$$O(\sqrt{n})$$

وجودی!

$$\mathrm{herdisc}(\mathcal{F}) := \max_{A \subseteq V} \mathrm{disc}(\mathcal{F}|_A).$$

$$\mathcal{F}|_A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}.$$

نسبت به زیرمجموعه
بزرگ‌تر مساوی است

$$\mathrm{herdisc}(\mathcal{F}) := \max_{A \subseteq V} \mathrm{disc}(\mathcal{F}|_A).$$

$$\mathcal{F}|_A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}.$$

$$\mathcal{F} = 2^{V} \qquad \mathcal{F} = 2^{V'}$$

$$(V \cup V', \{F \cup F' : F \in \mathcal{F}\})$$

اختلاف = ۰

اما $F|_V$ اختلاف بزرگ دارد!

نسبت به زیرمجموعه
بزرگ‌تر مساوی است

$$\mathcal{F} = 2^{V} \qquad \mathcal{F} = 2^{V'}$$

$$(V \cup V', \{F \cup F' : F \in \mathcal{F}\})$$

اختلاف = ۰

اما $F|_V$ اختلاف بزرگ دارد!

سختی

- رده NP:

$$\text{“Is } \mathrm{disc}(\mathcal{F}) \le k\text{?”}$$

$$\mathrm{herdisc}(\mathcal{F}) := \max_{A \subseteq V} \mathrm{disc}(\mathcal{F}|_A).$$

الگوریتم

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$\left|\sum_{i\in F_j} x_i\right| \leq D$$

$$x_i = \pm 1$$

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$\Big|\sum_{i \in F_j} x_i\Big| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) \ : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j\Big\|^2 &\le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$|\sum_{i \in F_j} x_i| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) \le \mathrm{disc}(\mathcal{F}).$$

$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F})$: min D

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 &\le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

چگونه حساب کنیم؟

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{j\in F_i} \mathbf{u}_j\Big\|^2 &\le D^2, \quad i=1,2,\ldots,m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j=1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

چگونه حساب کنیم؟

$$\operatorname{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \Big\|^2 &\le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\| \sum_{j \in F_i} u_j \|^2$$

چگونه حساب کنیم؟

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{j\in F_i} \mathbf{u}_j\Big\|^2 &\leq D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\|\sum_{j\in F_i} u_j\|^2 = \sum_k \big(\sum_{j\in F_i} u_{j,k}\big)^2$$

چگونه حساب کنیم؟

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 \le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\|\mathbf{u}_j\|^2 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\| \sum_{j \in F_i} u_j \|^2 = \sum_k \Big(\sum_{j \in F_i} u_{j,k} \Big)^2 = \sum_k \sum_{j \in F_i} \sum_{j' \in F_i} u_{j,k} u_{j',k}$$

الگوریتم گرد کردن Bansal

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$A\mathbf{z} - \mathbf{b}$$

الگوریتم گرد کردن Bansal

شبه‌رنگ‌آمیزی متغیر $\zeta \in [-1, +1]^n$

هر دفعه:

حل یک SDP

تغییر اندک تصادفی بر اساس جواب SDP

با احتمال خوب $\zeta \in \{-1, +1\}^n$

جواب بهینه:

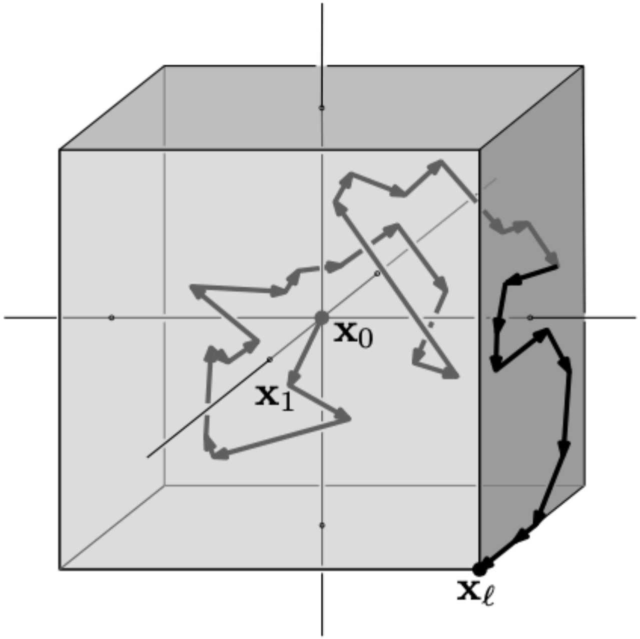
$x = 0$

گرد

جواب z صحیح که:

$\boldsymbol{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}$

الگوریتم گرد کردن Bansal



شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $\zeta \in [-1, +1]^n$

هر دفعه:

حل یک SDP

تغییر اندک تصادفی بر اساس جواب SDP

با احتمال خوب $\zeta \in \{-1, +1\}^n$

جواب بهینه:

$x = 0$

گرد

جواب z صحیح که:

$A\mathbf{z} - \mathbf{b}$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \operatorname{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

$$A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$$
$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = 0 \text{ for all } j \notin A_t$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \mathrm{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

$$A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = 0 \text{ for all } j \notin A_t$$

$$\gamma_t \sim N(0,1)$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{u}_{t,j}$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \mathrm{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1,1]^n,$$

الگوریتم Bansal

- شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1, +1]^n$
- هر دفعه t = 1..l:
- $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
- حل

$$\boxed{\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2}$$

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
-

$$\boxed{\begin{aligned} &(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} \\ &\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t \\ &(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}}$$

الگوریتم Bansal

- شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1, +1]^n$
- هر دفعه t = 1..l:

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

- $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
- حل

$$\boxed{\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2}$$

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
-

$$\boxed{\begin{aligned} &(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} \\ &\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t \\ &(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}}$$

الگوریتم Bansal

$$l := C_1 \sigma^{-2} \log n,$$

- شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1, +1]^n$
- هر دفعه t = 1..l:
  - $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
  - حل $$\boxed{\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2}$$
  - متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
  - $$\sigma := \frac{1}{C_0 n \sqrt{\log n}},$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

مراحل اثبات:

- ۱ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ـ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند
  - که کوچک است!

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

$$\sum_{j \in F_i} \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sigma \gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i}$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

پایان