

## آنالیز الگوریتم (بهار ۱۳۹۴) - امتحان پایان ترم

زمان: ۳ ساعت

نام و نام خانوادگی:

سوال ۱ (کم گلوگاه ترین): فرض کنید گلوگاه یک مسیر در یک گراف برابر وزن سنگین ترین یال در آن مسیر باشد. در این صورت الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(V^3)$  برای پیدا کردن کم گلوگاه ترین مسیر بین تمام زوج راس های این گراف ارائه دهید.

(امتیازی) الگوریتمی برای مسئله در زمان  $O(V^2)$  ارائه کنید. راهنمایی: اجتماع همه کوتاه ترین مسیرها را در نظر بگیرید و در مورد این گراف و یال های آن فکر کنید.

سوال ۲ (در چند ضلعی): فرض کنید به شما مختصات مرکز یک  $n$ -ضلعی منتظم  $(c_x, c_y)$  و فاصله مرکز آن تا هر کدام از راس های آن  $r$  داده شده است. هم چنین مختصات یک نقطه دیگر  $A$  نیز به شما داده شده است  $(x, y)$ . الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص بدهد آیا نقطه  $A$  درون چند ضلعی است یا بیرون آن. آیا زمان اجرای الگوریتم شما بر حسب اندازه ورودی چند جمله ای است؟

سوال ۳ (بازهم ماشین علی): در کشوری  $n$  شهر وجود دارد که بین برخی از این شهرها جاده های دو طرفه وجود دارد. تنها برخی از شهرها در این کشور پمپ بنزین دارند. علی ماشینی دارد که ظرفیت باک آن  $k$  لیتر است. همچنین فرض کنید برای پیمودن هر جاده ماشین علی ۱ لیتر بنزین مصرف می کند.

فرض کنید اطلاعات شهرها، پمپ بنزین ها، جاده ها، ظرفیت باک ماشین علی، شهری که علی با ماشینش در آن حاضر است، و شهر مقصد علی به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که با دانستن این اطلاعات بگوید حداقل چه مقدار باید علی بنزین بزند تا از شهر مبدا به مقصد برسد. مرتبه اجرای الگوریتم شما باید  $O(V^3)$  باشد.

می توانید فرض کنید بین هر دو شهر حداکثر یک جاده است. فرض کنید علی نمی تواند بنزین را در جای دیگری به جز باک ماشین ذخیره کند و فرض کنید حرکت در شهر تقریباً بدون مصرف بنزین انجام می شود. در ابتدا باک ماشین علی خالی است و در پمپ بنزینی در شهر مبدا قرار دارد.

سوال ۴ (رده): رده پیچیدگی NP را تعریف کنید.

سوال ۵ (تحویل): با دانستن اینکه مساله SAT در رده پیچیدگی NP-Complete است، نشان دهید که مسئله SAT-۳ نیز در رده پیچیدگی NP-Complete است. به عبارت دیگر یک تحویل (کاهش) از مسئله SAT به مسئله SAT-۳ ارائه کنید، و توضیح دهید چرا این تحویل به معنای این است که مسئله SAT-۳ در رده پیچیدگی NP-Complete است.

سوال ۶ (نمایش چند جمله ای): دو روش نمایش چند جمله ای ها را نام ببرید و فایده های هر کدام از روش ها را بیان کنید.

سوال ۷ (قلعه الموت): گازرخان می‌خواهد بر روی کوه الموت یک قلعه بسازد. ساختن دیوارهای قلعه بر روی شیب‌های تند سخت است، در نتیجه گازرخان می‌خواهد محدوده قلعه را به صورتی تعریف کند که دیوارهای قلعه بر روی شیب‌های تند نباشد. برای این کار گازرخان کل کوه را مربع-بندی کرده است و به ازای هر مربع ارتفاع آن مربع را حساب کرده است. در نتیجه گازرخان یک جدول دارد که در هر خانه آن ارتفاع کوه در مکان مربوط به آن خانه نوشته شده است. گازرخان می‌خواهد طوری قلعه را بسازد که دیوارهای قلعه افقی-عمودی باشد. هم‌چنین فرض کنید به ازای هر دیوار قلعه اختلاف ارتفاع دو طرف دیوار را شیب‌نمای آن دیوار بنامیم، گازرخان می‌خواهد جمع شیب‌نمای همه دیوارهای قلعه کمینه باشد.

در کوه الموت یک چشمه وجود دارد که گازرخان می‌خواهد حتما چشمه درون قلعه قرار بگیرد و هم‌چنین گازرخان می‌خواهد خانه‌های کناره جدول در قلعه‌اش نباشد.

فرض کنید ارتفاع‌های خانه‌های جدول اعداد صحیح مثبت هستند. الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای بر حسب ابعاد جدول و لگاریتم بزرگ‌ترین عدد جدول ارائه کنید که قلعه با کمترین جمع شیب‌نمای دیوارها را برای گازرخان پیدا کند.

موفق باشید