دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

روش نقطه درونی

جلسه سیزدهم

نگارنده: مریم ضیغمی

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه پیش در مورد روش بیضی گون صحبت کردیم و گفتیم که این روش تقریبا با قیود برنامه ریزی سر و کار زیادی ندارد و از این رو می تواند برنامه ریزی هایی با تعداد قیود بسیار زیاد را حل کند و توسط این روش به حل مسأله ی یافتن برش بیشینه در گراف پرداختیم. در این جلسه به طور مختصر روش دیگری را برای حل برنامه ریزی ها به نام روش نقطه درونی معرفی میکنیم.

۲ خواص روش نقطه درونی

۱) این روش در برنامه ریزی های بزرگ سریع تر از سیمپلکس عمل میکند و در زمان چند جمله ای کار می کند.
۲) هم برای برنامه ریزی خطی و هم برنامه ریزی محدب قابل استفاده است.

$$inf\,\{f(x) : x \in c\}$$

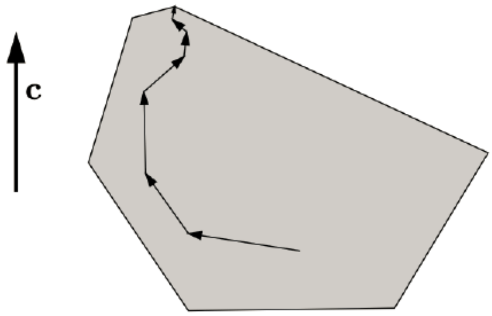
که f یک تابع محدب است و c یک مجموعه محدب

تابع محدب

تابعی که اگر هر دو نقطه ای روی آن را در نظر بگیریم، خط واصل بینشان زیر نمودار تابع قرار گیرد. (تابع مقعر به طور مشابه و معکوس تعریف می شود)

۳ ایده روش نقطه درونی

نقطه ای درون چند وجهی را پیدا میکند و به سمت کنج هدایت می کند به طوری که به نقطه بهینه برسیم.



مسیر مرکزی

فرض کنید برنامه ریزی خطی زیر را داشته باشیم:

$$\text{بیشینه کن} \quad f(x) = c^T x$$
$$\text{که} \quad Ax \leq b$$

مسیر مرکزی به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_\mu(x) = c^T x + \mu \sum_{1}^{m} ln(b_i - a_i x)$$

که در ناحیه ی شدنی برنامه ریزی اصلی تعریف می شود.
به عبارت دیگر و به طور تقریبا شهودی جمله ی $\mu \sum_1^m ln(b_i - a_i x)$ فشار دیوار ها (اگر اضلاع چند وجهی را دیوار تصور کنیم) را به نقطه ی درونی مدل میکند که در μ بسیار بزرگ نقطه در وسط چند وجهی قرار میگیرد و در $\mu = 0$ دقیقا با مقدار $f(x)$ برابر است.
حال به یافتن بهینه ی f_μ میپردازیم زیرا بهینه ی $f_0(x)$ همان بهینه ی $f(x)$ است و جواب مطلوب ماست.

بهینه ی f_μ

قضیه: اگر P کراندار و درونداردار و $\mu \geq 0$ آنگاه f_μ در P دقیقا یک نقطه ی بهینه دارد.
اثبات: مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\{x \in int(P) : f_\mu(x) \geq f_\mu(x_0)\}$$

اثبات وجود: این مجموعه کراندار(اشتراک ۲ مجموعه کراندار است) و بسته است. می دانیم تابع پیوسته روی مجموعه فشرده نقطه بیشینه دارد.
اثبات یکتایی: فرض خلف کنید که x و y دو نقطه بیشینه اند. چون f_μ تابعی اکیدا مقعر است (لگاریتم اکیدا مقعر است) پس خط واصل بین این دو نقطه بالای منحنی تابع قرار میگیرد پس یعنی نقاط روی این خط مقداری بزرگتر از $f_\mu(x) = f_\mu(y)$ دارند که با فرض بیشینه بودن تابع در نقاط x و y در تناقض است

پس f_μ تنها یک جواب بیشینه دارد.

پس ابتدا نقطه ای درون چندوجهی پیدا می کنیم سپس با کم کردن مقدار μ نقطه به سمت c^Tx می رود. به عبارت دیگر روی مسیر مرکزی (بهینه f_μ ها در μ های مختلف) μ را کم می کنیم.
سوال: چگونه روی این مسیر مرکزی حرکت کنیم؟

۴ ابزار برای حل مسأله ی پیدا کردن بهینه ی $f_\mu(x)$ (یافتن مسیر مرکزی)

ضرایب لاگرانژی

فرض کنید برنامه ریزی خطی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f(x) = c^Tx \\ \text{که} \quad & g_i(x) = \circ, \quad i \in \{۱, ۲, ..., m\} \end{aligned}$$

قضیه: x بهینه است اگر و تنها اگر : y وجود داشته باشد که:

$$\begin{aligned} g_۱(x) = g_۲(x) = ... = g_m(x) = \circ, \\ \nabla f(x) = \sum_{۱}^{m} y_i \nabla g_i(x) \end{aligned}$$

ضرایب لاگرانژی برای مسأله ی ما

اگر برنامه ریزی خطی ما به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^Tx \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

برنامه ریزی مسیر درونی را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f_\mu(x) = c^Tx + \mu \sum_{۱}^{m} lnx_j \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

دقت کنید که چون برنامه ریزی به فرم معادله ای است قید $x \geq \circ$ فشار دیوار ها را ایجاد می کند و درواقع معادله $Ax = b$ درون چیزی را نشان نمی دهد.
حال با تکنیک لاگرانژی به حل مسأله می پردازیم:

قید های ما عبارتند از:

$$b_1 - a_1 x = g_1(x) = 0$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$b_m - a_m x = g_m(x) = 0$$
$$\nabla f(x) = \sum_{1}^{m} y_i \nabla g_i(x)$$

توجه: قید $x \geq 0$ را از قیود حذف و وارد تابع هدف کردیم. (خارج از محدوده مناسب x تابع هدف تعریف نمی شود)

با محاسبه گرادیان تابع $f(x)$ و تابع $g_i(x)$داریم :

$$\nabla f(x) = c + \mu(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n})$$
$$\sum_{1}^{m} y_i \nabla g_i(x) = A^T y$$

پس به طور دقیق تر برای قیود داریم:

$$AX = b$$
$$c + \mu(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) = A^T y$$

حال عبارت $\mu(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n})$ را برابر s قرار دهید. پس داریم: (برای سادگی در ارجاع این برنامه ریزی را برنامه ریزی لاگرانژی نام گذاری میکنیم)

$$AX = b$$
$$A^T y - s = c$$
$$(s_1 x_1, s_2 x_2, ..., s_n x_n) = \mu 1$$
$$x, s \geq 0$$

حال طبق قضیه جواب شدنی این برنامه ریزی همان جواب بهینه ی f_μ است.

نگاهی به برنامه ریزی لاگرانژ در $\mu = 0$

$$0 = s^T x = y^T A x - c^T x = y^T b - c^T x \Rightarrow y^T b = c^T x$$

که به این معنی است که جواب لاگرانژ در $\mu = 0$ با قضیه دوگانی معادل است.

کمینه کن $b^T y$	بیشینه کن $c^T x$
که $A^T y \geq c$	که $AX = b$
$y \in R^m$	$x \geq 0$

لم: برای $\mu \geq 0$ اگر $x \geq 0$ و y جواب دوگان شدنی که $s = A^T y - c$ آنگاه برنامه ریزی لاگرانژی جواب یکتای $x^* = x^*(\mu)$ و $y^* = y^*(\mu)$ و $s^* = s^*(\mu)$ دارد که $x^*(\mu)$ جواب یکتای بیشینه کن f_μ به شرط $AX = b$ است.(جواب شدنی لاگرانژ همان جواب بهینه f_μ است)

۵ ایده ی الگوریتم

۱) $\mu = 1$ قرار دهید
۲)یک جواب اولیه x و y و s پیدا کنید
۳) μ را به اندازه مناسب تغییر دهید
۴) x و y و s را آپدیت کنید به طوری که در قیود صدق کنند.($\triangle s = +s$ و $\triangle x = +x$ و $\triangle y = +y$)

نحوه ی تغییر sو x و y

نقاط جدید باید در قیود صدق کنند(μ درواقع μ جدید است) پس:

$$A(x + \triangle x) = b$$
$$A^T(y + \triangle y) - (s + \triangle s) = c$$
$$((s_1 + \triangle s_1)(x_1 + \triangle x_1), ..., (s_n + \triangle s_n)(x_n + \triangle x_n) = \mu 1$$

که با بسط دادن جملات و تقریب زدن به صورت خطی داریم:

$$A\triangle x = 0$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = 0$$
$$(s_1\triangle x_1 + x_1\triangle s_1, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu 1 - (s_1x_1, ..., s_nx_n)$$

۶ الگوریتم روش نقطه درونی

۱)$\mu = 1$ را قرار دهید و y و s و x را طوری بیابید که:

$$AX = b$$
$$A^Ty - s = c$$
$$x, s \geq 0$$
$$cdist_\mu(x, s) \leq \sqrt{2}$$

که:

$$cdist_\mu(x, s) = \parallel (\rho(s_1x_1, \mu), ..., \rho(s_nx_n, \mu)) \parallel$$
$$\rho(a, \mu) = \sqrt{a/\mu} - \sqrt{\mu/a}$$

۲) تا وقتی که $\mu \geq \epsilon$:
گام ۳ و ۴ را انجام دهید و هر گاه $\mu \leq \epsilon$ ، x را به عنوان جواب بهینه ارایه دهید.
۳) هربار μ جدید را به این صورت تعریف کنید: $\mu_2 = \mu_1(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})$
۴)$\triangle s$ و $\triangle y$ و $\triangle x$ را طوری می یابیم که در قیود صدق کنند. یعنی:

$$A\triangle x = 0$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = 0$$
$$(s_1\triangle x_1 + x_1\triangle s_1, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu 1 - (s_1x_1, ..., s_nx_n)$$

و سپس به مرحله ۲ بازمی گردیم.

۱.۶ چگونه جواب اولیه پیدا کنیم؟

مانند روش سیمپلکس ابتدا برنامه ای مینویسیم که جواب بدیهی داشته باشد و سپس به حل برنامه ریزی اصلی می پردازیم.

$$Ax - \tau b \leq 0$$
$$-A^Ty + \tau c \leq 0$$
$$b^Ty - c^Tx \leq 0$$
$$x, y, \tau \geq 0$$

۷ تحلیل زمان اجرا

اگر L تعداد بیت ها و n تعداد معادله باشد:

- تعداد مراحل: $O(\sqrt{n}L)$
- کران پایین $O(\sqrt{n}\log n)$ مرحله برای تمام الگوریتم های نقطه درونی دارد
- این روش درعمل در $\log n$ مرحله انجام می شود

۸ خلاصه ای بسیار کوتاه از روش نقطه درونی

میخواهیم برنامه ریزی p را حل کنیم. برای این کار تابع هدف این برنامه ریزی ($f(x)$)را به گونه ای که گفته شد تغییر دادیم (f_μ) و به مسأله ای جدید رسیدیم(یافتن بهینه ی f_μ). مسأله ی یافتن بهینه ی f_μ را توسط روش ضرایب لاگرانژی به برنامه ریزی جدیدی تبدیل کردیم که جواب شدنی آن همان جواب بهینه ی f_μ بود. سپس با کم کردن مقدار μ تابع f_μ را به تابع هدف برنامه ریزی اولیه مان میل دادیم.($f_0(x) = f(x)$)