۸) a) از استقرا روی $m+n$ کمک می‌گیریم.

اگر $m+n=0$ باشد حالت $(m,n)=(0,0)$ را داریم، پس:

$$F_0 = F_0F_0 + F_{-1}F_{-1} = 1\times1 + 0\times0 = 1$$ حال

حال فرض کنیم برای $m+n=k-1$ حکم برقرار است.

حکم را برای $n+m=k$ ثابت می‌کنیم. اگر $m=0$ باشد (به طور مشابه می‌توان n را فرض کرد) داریم:

$$F_n = F_0F_n + F_{-1}F_{n-1} = 1\times F_n + 0$$

اگر $m=1$ باشد:

$$F_{n+1} = F_1F_n + F_0F_{n-1} = F_n + F_{n-1}$$ رابطهٔ فیبوناچی

برای $m\geq 2$ داریم:

$$F_{m+n} = F_{m+n-1} + F_{m+n-2}$$

طبق فرض $\Rightarrow$

$$F_{m+n-1} = F_{(m-1)+n} = F_{m-1}F_n + F_{m-2}F_{n-1}$$

$$F_{m+n-2} = F_{(m-2)+n} = F_{m-2}F_n + F_{m-3}F_{n-1}$$

$$\Rightarrow F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{m-2}F_{n-1} + F_{m-2}F_n + F_{m-3}F_{n-1}$$

$$= F_n(F_{m-1}+F_{m-2}) + F_{n-1}(F_{m-2}+F_{m-3})$$

طبق رابطهٔ اصلی فیبوناچی $= F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1}$

و حکم ثابت می‌شود.

b) می‌دانیم:

$$(F_n \quad F_{n+1})\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = (F_{n+1} \quad F_{n+2}) \Rightarrow (F_n \quad F_{n+1}) = (1 , 1)\, A^n$$

و با توجه به روش Russian peasan که ذکر شده است ۶ ماتریس A^n را می‌توانیم با ضرب حدوداً $2\log_2 n$ ماتریس محاسبه کنیم که هر کدام ۸ تا ضرب کردن و ۴ تا جمع کردن لازم دارد.

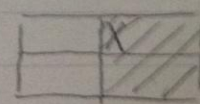
c) با توجه به اینکه تعداد ارقام F_n با n متناسب است با توجه به نمایی بودن آن نتیجه می‌گیریم که برای محاسبه F_n با تعداد زیادی ضرب کردن و جمع کردن که متناسب با n است نیاز داریم که نتیجه می‌شود در نهایت ما بهبود زیادی در نحوه‌ی محاسبه F_n حاصل نکرده‌ایم.

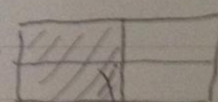
۲. اگر شمار آن برای n را C_n بنامیم داریم ۱. $C_1=1$ $C_2=2$ ...

ادعا می‌کنم که رابطه‌ی بازگشتی روبه‌رو برقرار است با تعریف $C_0=1$

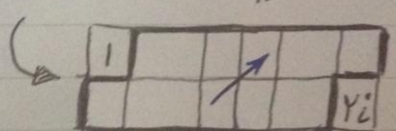
$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}\, C_{n-i}$$

که اگر اینطور باشد شمار کاتالان را داریم. اثبات رابطه:

لم ۱:  خانه‌ی ضربدر خورده کمینه مقدار میان مقدارهای مستطیل‌های شور خورده را دارد، طبق خاصیت سؤال دلیل ساده است.

لم ۲:  خانه‌ی ضربدر خورده بیشینه مقدار میان مقدارهای مستطیل‌های شور خورده را دارد طبق خاصیت سؤال دلیل ساده است.

اولین iای را بگیرید که در خانه‌ی (۲ و i) ، ۲i آمده است (وجود دارد چون مقدار خانه‌ی (۲ و n) ، ۲n است) از این رو طبق لم ۲ تمامی اعداد ۱ ... ۲i در ستون‌های ۱ تا i اند و بقیه در i+1 تا n قسمت سمت راست حالتی از مسئله است و برابر با C_{n-i} حالت دارد اما قسمت سمت چپ ادعا می‌کنیم C_{i-1} حالت دارد چون



$x \to y \equiv x \geq y$

۱. خاصیت سطری هنوز برقرار است در شکل پررنگ

۲. خاصیت ستونی در پررنگ شده نیز مثل شکل برقرار است

$\Downarrow$

C_{i-1} حالت. ∎

دلیل: خانه‌ی (۲ و i) کمینه ۲i است و چون ۲i نیز نیست کمینه ۲i+1 است خانه‌ی (۱ و i+1) بیشینه ۲i+1 است ⇒ رابطه برقرار است

2) با توجه به توضیحات داده شده می‌دانیم که هر oriented cycle یا با یا با یا با و یا با یک گردش $2\times k$ تایی شروع می‌شود که $k\geq 2$ می‌باشد پس برای Q_n داریم:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} + 2Q_{n-3} + 2Q_{n-4} + \dots + 2Q_0$$

$, Q_0 = Q_1 = 1$

با استفاده از تابع مولد $\Longrightarrow$

$$Q(z) = zQ(z) + z^2Q(z) + 2\frac{z^2Q(z)}{1-z} + 1$$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{1-z}{1-2z-2z^2+z^3} = \frac{\phi^2/5}{1-\phi^2 z} + \frac{\phi^{-2}/5}{1-\phi^{-2}z} + \frac{2/5}{1+z}$$

$$\Rightarrow Q_n = \left(\phi^{2n+2} + \phi^{-2n-2} + 2(-1)^n\right)/5 = \left((\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1})/\sqrt{5}\right)^2 = F_{n+1}^2$$