دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

گسترش، برش تنک، و نظریه طیفی گراف

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۵

تعریف تنکی برش و گسترش گراف، جبر خطی و بردارهای ویژه

جلسه‌های دوم و سوم

نگارنده: نگارنده پریا فلکی و امیرعلی سقایی

۱ گستر گراف‌ها و برش‌های تنک

قبل از ارائه‌ی تعریف دقیقی از گستر گراف ها، بهتر است ابتدا نگاهی داشته باشیم به چند نمونه گراف که «گستر گراف» نیستند. به این ترتیب به یک بینش درست‌تری در مورد انواع ویژگی های نامطلوب برای این تعریف دست میابیم.

مثال ۱. فرض کنید یک شبکه‌ی ارتباطاتی به شکل یک گراف مسیر باشد. به طوری که هر رأس گراف نشان دهنده‌ی یک دستگاه و هر یال نشان دهنده‌ی یک اتصال موجود در این شبکه باشد. خاصیت نامطلوب واضح این شیکه این است که اگر یکی از اتصال های این شبکه قطع شود، این امر منجر به قطع شدن کل شبکه‌ی ارتباطاتی میشود، و به صورت خاص اگر یال وسطی این گراف قطع شود ارتباط نیمی از رئوس از نیمی دیگر قطع خواهد شد.

مثال ۲. (یک مثال واقعی تر) در ایتالیا بیشتر رفت و آمدهای بزرگراهی از بزرگراهی میگذرد که میلان را به ناپال متصل میکند. ابن بزرگراه از میلان شروع میشود، از شهرهای بلونیا، فلورانس و رم عبور میکند و به ناپال میرسد. تکه‌ای از بزرگراه که بین بلونیا و فلورانس است، از قسما های کوهستانی و گردنه ای میگذرد و طبیعتا برف و یخبندان در این قسمات میتواند باعث بسته شدن راه شود. زمانی که این اتفاق می‌افتد، سفر از جنوب به شمال و برعکس در ایتالیا تقریبا غیر ممکن میشود. مشابه این اتفاق در شهرهای دیگر جهان مثل کالیفرنیا نیز رخ میدهد.

مثال ۳. یک گراف شبکه‌ی دو بعدی $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ را در نظر بگیرید. در این گراف برداشتن یک یال باعث ناهمبند شدن گراف نمیشود و برداشتن تعداد ثابتی از یالها باعث جدا شدن تعداد ثابتی رأس از گراف میشود. اما از طرفی اگر بتوانیم تنها $\sqrt{n}$ یال از گراف برداریم(که این تنها $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ کسر از کل یال هاست) میتوانیم نیمی از رأس ها را از نیمی دیگر جدا کنیم.

مثال ۴. یک گراف ابر مکعب $n = 2^k$ رأسی یک تعمیم قوی تر (متصل تر) از گراف شبکه است. اما همچنان میتوان با برداشتن کسر کوچکی از یال ها گراف را به دو نیم تقریبا مساوی تقسیم کرد. به این ترتیب که میتوان یال های «برش بُعدی» که تنها $\frac{1}{k} = \frac{1}{\log n}$ کسر از کل یال هاست را حذف کرد و گراف به دو ابر مکعب 2^{k-1} رأسی تقسیم میشود.

واضح است که گراف کامل قابل اعتمادترین شبکه‌ی اتصال را دارد. به این معنی که برای جدا کردن p کسر از کل رئوس باید $p(p-1)$ کسر از کل یال ها را حذف کنیم. این ویژگی از گراف های کامل ویژگی مطلوب ماست. تعاریف زیر به ما کمک میکنند تا این خاصیت را در یک گراف در مقایسه با گراف کامل اندازه بگیریم.

تعریف ۵. (تنک ترین برش) فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف کامل و $(S,V-S)$ یک افراز از رئوس(یک برش) باشد، آنگاه تنکی (نرمال شده) آن برش به صورت زیر تعریف میشود.

$$\sigma(S) := \frac{\mathbb{E}_{(u,v)\sim E}|[1_{S(u)}-1_{S(v)}]|}{E_{(u,v)\sim V^2}|[1_{S(u)}-1_{S(v)}]|}$$

یعنی نسبت کسر یال های بریده شده توسط برش $(S,V-S)$ به کسر جفت یال های جدا شده توسط برش $(S,V-S)$.

(مساله‌ی تنک ترین برش) گراف $G=(V,E)$ مفروض است و مطلوب پیدا کردن کمترین تنکی برای برش های مختلف آن گراف است.

$$\sigma(G) = \min_{S\subseteq V: S\neq\emptyset, V} \sigma(S)$$

نکته. با بازنویسی تعریف تنکی برش برای گراف d-منتظم خواهیم داشت :

$$\sigma(S) := \frac{\mathbb{E}_{(u,v)\sim E}|[1_{S(u)}-1_{S(v)}]|}{E_{(u,v)\sim V^2}|[1_{S(u)}-1_{S(v)}]|}$$

$$= \frac{E(S,V-S)}{\frac{d}{|V|}|S||V-S|}$$

که $E(S,V-S)$ نشان دهنده‌ی تعداد یال های میانی S و $V-S$ است.

تعریف ۶. (گسترش یالی برای گراف های d-منتظم) گراف $G=(V,E)$ و زیرمجموعه‌ی $S\subseteq V$ مفروض است. گسترش یالی S به صورت زیر تعریف میشود.

$$\phi(S) = \frac{E(S,V-S)}{d.|S|}$$

این تعریف بیانگر نسبت تعداد یال های میانی S و $V-S$ و حد بالای تعداد یال های واقع در S است.
گسترش یالی را برای گراف های d-منتظم به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\phi(G) = \min_{S:|S|\leq\frac{|V|}{2}} \phi(S)$$

نکته. با بازنویسی تعاریف تنکی و گسترش یالی برای زیر مجموعه‌ی S که $|S|\leq\frac{|V|}{2}$ خواهیم داشت :

$$= \frac{E(S,V-S)}{\frac{d}{|V|}|S||V-S|} = \frac{\phi(S)}{\frac{|V-S|}{|V|}}$$

از طرفی داریم $\frac{1}{2}\leq\frac{|V-S|}{|V|}\leq 1$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(S)}{2} \leq \phi(S) \leq \sigma(S)$$

از طرفی واضح است که $\sigma(S) = \sigma(V-S)$ پس اگر به ازای زیر مجموعه‌ی S^* داشته باشیم $\sigma(G) = \sigma(S^*)$ آنگاه یا $|S^*| \le \frac{|V|}{2}$ یا $|V-S^*| \le \frac{|V|}{2}$. پس داریم :

$$\frac{\sigma(G)}{2} \le \phi(G) \le \sigma(G)$$

تعریف ۷. یک خانواده از گسترگراف های درجه ثابت، یک خانواده از گراف های $G_{n_{n\ge d}}$ است که هر گراف G_n یک گراف n رأسی d - منتظم است، به طوری که عدد ثابت $\phi > 0$ وجود دارد که برای هر n داشته باشیم $\phi(G_n) \ge \phi$.

گراف های درجه ثابت با گسترش ثابت، گراف های تنکی هستند که استثنا به طور خوبی همبند هستند. (یعنی به سختی میتوان آنها را ناهمبند کرد.)

لم ۸ اگر گراف d - منتظم $G = (V, E)$ با گسترش phi باشد، آنگاه بعد از برداشتن $\epsilon < \phi$ کسر از کل یال ها گراف هنوز دارای یک مؤلفه‌ی همبند است که حداقل $(1 - \frac{\epsilon}{2\phi})$ از کل رئوس را دارد.

اثبات. فرض کنید $E' \subseteq E$ یک زیر مجموعه‌ی دلخواه از یال ها باشد پس داریم $\epsilon|E'| \le \epsilon|E| = \epsilon.d.\frac{|V|}{2}$. همچنین فرض کنید $C_1, C_2, ..., C_n$ مؤلفه های همبندی گراف $G' = (V, E - E')$ باشند به طوری که $|C_1| \ge |C_2| \ge ... \ge |C_n|$. میخواهیم ثابت کنیم $|C_1| \ge |V|.(1 - 2\epsilon/\phi)$. داریم :

$$|E'| \ge \frac{1}{2}\Sigma_{i\ne j}E(C_i, C_j) = \frac{1}{2}\Sigma_i E(C_i, V - C_i)$$

اگر $|C_1| \le \frac{|V|}{2}$ آنگاه داریم :

$$|E'| \ge \frac{1}{2}\Sigma_i d.\phi.|C_i| = \frac{1}{2}d.\phi.|V|$$

اما این اگر $\epsilon < \phi$ غیر ممکن است.

اگر $|C_1| \ge \frac{|V|}{2}$ آنگاه تعریف میکنیم $S := C_2 \bigcup C_3 \bigcup ... \bigcup C_n$ پس خواهیم داشت :

$$|E'| \ge E(C_1, S) \ge d.\phi.|S|$$

که ای یعنی $|S| \le \frac{\epsilon}{2\phi}.|V|$ و در نتیجه $|C_1| \ge (1 - \frac{\epsilon}{2\phi}).|V|$

□

این بدین معنی است که در یک گسترگراف d - منتظم، برداشتن k یال حداکثر باعث جدا شدن $O(\frac{k}{d})$ رأس از مابقی گراف (که یک مؤلفه‌ی همبندی بزرگ است) میشود. و واضح است که با برداشتن مناسب k یال میتوان $\frac{k}{d}$ رأس را از گراف جدا کرد. پس گسترگراف ها قابل اعتماد ترین همبندی را دارند.

۲ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

نظریه طیفی گراف درباره ارتباط مقادیر ویژه ماتریس مجاورت، که کمیت های جبری هستند، با خواص ترکیبیاتی گراف است. با یک مرور کلی از جبرخطی شروع میکنیم.

- اگر $x = a + bi$ یک عدد مختلط باشد $\bar{x} = a - bi$ مزدوج آن است
- اگر $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ماتریس باشد M^* ترانهاده مزدوج آن است یعنی $(M^*)_{ij} = \bar{M}_{ij}$
- اگر $x, y \in \mathbb{C}^m$ دو بردار باشند، ضرب داخلی آنها به این صورت تعریف میشود: $< x, y >= x^*y = \Sigma_i \bar{x}_i y_i$
- $< x, x >= \|x\|^2, < x, y >= < \bar{x, y} >$
- برای ماتریس مربعی $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}^m$ و بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^m - 0$ اگر داشته باشیم $Mx = \lambda x$ آنگاه λ مقدار ویژه M و x بردار ویژه M متناظر با λ است. این شرط معادل است با $det(M - \lambda I)x = 0$ و چون x ناصفر است معادل است با $det(M - \lambda I) = 0$
- برای M ثابت تابع $f(\lambda) = det(M - \lambda I)$ چندجمله ای تک متغیره از درجه m است و در نتیجه $f(\lambda) = 0$ در اعداد مختلط دقیقا m ریشه دارد(با حساب تکرار)

- برای گراف $G=(V,E)$ ماتریس مجاورت آن A به این صورت تعریف میشود که : $A_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)\in E\\ 0 & (i,j)\notin E\end{cases}$
- اگر G گراف وزن دار یا گراف چندگانه باشد A_{ij} به ترتیب برابر وزن یال (i,j) یا تعداد یال های بین i و j خواهد بود،ماتریس مجاورت گراف غیرجهت دار متقارن است که از این نتیجه میشود که مقدار ویژه ها حقیقی هستند.

تعریف ۹. ماتریس $M\in\mathbb{C}^{m\times m}$ هرمیتی است اگر $M=M^*$ باشد.

نکته. یک ماتریس متقارن حقیقی مقدار همیشه هرمیتی است.

لم ۱۰. اگر M هرمیتی باشد همه مقداروِیژه های آن حقیقی هستند

اثبات. فرض کنید M هرمیتی و x بردارویژه و λ مقدارویژه متناظر با آن باشد آنگاه:

$$Mx=\lambda x\Rightarrow (Mx)^*=(\lambda x)^*\Rightarrow x^*M^*=\lambda^*x^*$$

$$\Rightarrow x^*Mx=\lambda^*x^*x\Rightarrow x^*\lambda x=\lambda^*x^*x$$

$$\Rightarrow \lambda(x^*x)=\lambda^*(x^*x)\Rightarrow \lambda=\lambda^*$$

که یعنی λ حقیقی است. □

قضیه ۱۱. اگر M هرمیتی باشد و x و y بردارویژه های آن متناظر با مقداروِیژه های متفاوت باشد آنگاه $x\perp y$

اثبات. فرض کنید M هرمیتی باشد و λ و λ' مقدارویژه های متفاوت باشند و x و y بردارویژه های متناظر با آنها باشند آنگاه:

$$< Mx,y >= (Mx)^*y=x^*M^*y=x^*My=< x,My >$$

از طرفی

$$< Mx,y >= \lambda < x,y >$$

$$< x,My >= \lambda' < x,y >$$

$$\Rightarrow \lambda < x,y >= \lambda' < x,y >\Rightarrow (\lambda-\lambda') < x,y >= 0$$

$$< x,y >= 0\Rightarrow x\perp y$$

□

ما میخواهیم خواص ترکیبیاتی گراف مثل همبندی و دوبخشی بودن را به مقدارویژه های ماتریس مجاورت آن مربوط کنیم. یک قدم در این راه این است که مساله محاسبه مقدار ویژه های یک ماتریس حقیقی متقارن را به عنوان جواب یک مساله بهینه سازی ببینیم.

قضیه ۱۲. فرض کنید $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس حقیقی متقارن باشد و $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n$ مقدارویژه های حقیقی آن، با احتساب تکرر باشد. و فرض کنید $x_1,x_2,\ldots,x_k$ بردارهای متعامد باشند به طوری که برای هر $i=1,2,\ldots,k$ داریم $Mx_i=\lambda_ix_i$ آنگاه:

$$\lambda_{k+1}=\min_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}:x\perp x_1\ldots,x\perp x_k}\frac{x^TMx}{x^Tx}$$

و هر x که به ازای آن عبارت بالا کمینه شود بردار ویژه‌ی نظیر λ_{k+1} است.
به طور خاص خواهیم داشت :

$$\lambda_1 = \min_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}}$$

و اگر x_1 بردار کمینه کننده جمله بالا باشد آنگاه :

$$\lambda_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}: x\perp x_1}$$

برای اثبات این قضیه ابتدا لم زیر را اثبات میکنیم

لم ۱۳. فرض کنید M ماتریس حقیقی متقارن باشد و $x_1, x_2, ..., x_k$ که $k < n$، بردار ویژه های متعامد M باشند آنگاه بردار ویژه x_{k+1} وجود دارد به طوری که با $x_1, x_2, ..., x_k$ متعامد است.

اثبات. فرض کنید V زیرفضای $(n-k)$ بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد که شامل همه بردارهای عمود بر $x_1, x_2, ..., x_k$ است. ادعا میکنیم که برای هر بردار $x \in V$ همچنین داریم $Mx \in V$ در واقع برای هر i داریم:

$$< x_i, Mx >= x_i^T Mx = (M^T x_i)^T x = (Mx_i)^T x = \lambda_i x_i^T x = \lambda_i < x_i, x >= 0$$

فرض کنید $B \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$ ماتریس یک تابع دوسویی از $\mathbb{R}^n$ به V باشد. (اگر $b_1, b_2, ..., b_k$ پایه متعامد یکه برای V باشد ، آنگاه B ماتریس با ستون های بردارهای $b_1, b_2, ..., b_k$ است). همچنین $B' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ ماتریسی باشد که برای هر $y \in V$، $B'y$ بردار $(n-k)$ بعدی است که $BB'y = y$ (فرض کنید $B' = B^T$). فرض کنید λ مقدار ویژه حقیقی ماتریس حقیقی و متقارن زیر است.

$$M' := B'MB \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$$

و y بردارویژه حقیقی M' است. آنگاه داریم :

$$B'MBy = \lambda y$$

$$\Rightarrow BB'MBy = \lambda By$$

از آنجایی که By به $x_1, ..., x_k$ متعامد است، MBy نیز به $x_1, ..., x_k$ متعامد است. در نتیجه :

$$BB'MBy = MBy$$

$$\Rightarrow MBy = \lambda By$$

و اگر $x_{k+1} = By$ داریم :

$$Mx_{k+1} = \lambda x_{k+1}$$

□

لم بالا نتیجه‌ی مهم زیر را به همراه دارد.

نتیجه ۱۴. (قضیه طیفی) اگر $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس متقارن حقیقی باشد و $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مقدارویژه های حقیقی آن باشد، با حساب تکرار؛ آنگاه بردارهای متعامد حقیقی $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که x_i بردارویژه ی متناظر λ_iاست.

حال به اثبات قضیه.۱۲ میپردازیم.

اثبات. با استفاده از لم.۱۳ $(n-k)$ بردارویژه متعامد که به $x_1, ..., x_k$ نیز متعامد هستند را پیدا میکنیم. مقدارویژه های این مجموعه n بردارویژه متعامد باید شامل همه مقدار ویژه های M باشد، چون اگر مقدار ویژه دیگری وجود داشته باشد، بردار ویژه ی آن باید متعامد باشد به این n بردار، که تناقض دارد. $(n-k)$ بردار دیگر را $x_{k+1}, ..., x_n$می نامیم، که x_i بردار ویژه متناظر λ_i است. حال مساله کمینه سازی را در نظر بگیرید

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} : x\perp x_1 ..., x\perp x_k$$

بردار $x := x_{k+1}$ یک جواب برای عبارت بالاست و مقدار λ_{k+1} را تولید میکند، پس کمینه حداکثر λ_{k+1} است. جواب شدنی دلخواه x را در نظر بگیرید،میتوانیم بنویسیم:

$$x = a_{k+1}x_{k+1} + ...a_nx_n$$

و مقدار این جواب برابر است با

$$\frac{\Sigma_{i=k+1}^n \lambda_i a_i^2}{\Sigma_{i=k+1}^n a_i^2} \geq \lambda_{k+1} \frac{\Sigma_{i=k+1}^n a_i^2}{\Sigma_{i=k+1}^n a_i^2}$$

که کمینه حداقل λ_{k+1} است و اگر x مقدار کمینه این را تولید کند پس $a_i = 0$ برای هر i که $\lambda_i > \lambda_{k+1}$، یعنی x ترکیب خطی بردارویژه های متناظر λ_{k+1} است که یعنی خودش بردار ویژه λ_{k+1} است. □

نتیجه ۱۵. نتیجه: اگر $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس حقیقی متقارن باشد و $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مقدارویژه های آن باشد، (با حساب تکرر)، آنگاه:

$$\lambda_k = \min_{\text{زیرفضای } k\text{بعدی از } \mathbb{R}^n\, V} \max_{x\in V-\{0\}} \frac{x^TMx}{x^Tx}$$

۳ مقدمات نظریه گراف طیفی

تا اینجا بحث کردیم که اگر A ماتریس مجاورت یک گراف غیر جهت‌دار باشد آنگاه A دارای n مقدار ویژه‌ی حقیقی است که جواب های معادله‌ی $det(A-\lambda I) = 0$ هستند (با احتساب تکرر).

اگر G یک گراف d - منتظم باشد، به جای کار کردن با ماتریس مجاورت، با ماتریس لاپلاسین نرمال شده کار میکنیم که راحت تر است. ماتریس لاپلاسین نرمال شده‌ی یک گراف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = I - \frac{1}{d}.A$$

قضیه ۱۶. اگر G یک گراف غیرجهت دار d - منتظم باشد، $L = I - \frac{1}{d}.A$ ماتریس لاپلاسین نرمال شده‌ی آن و $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ مقدارویژه های حقیقی شده L آنگاه:

- $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_n \leq 2$
- $\lambda_k = 0$ اگر و فقط اگر G حداقل k مولفه ی همبندی داشته باشد
- $\lambda_n = 2$
  اگر و فقط اگر حداقل یکی از مولفه های همبندی G دوبخشی باشد

دو مورد اول نتیجه میدهد که تعداد صفرها در مقدار ویژه ها دقیقا برابر با تعداد مولفه های همبندی است.

۴ اثبات قضیه.۱۶

در روند اثبات از این قضیه زیرا (که اثبات آن ساده است) چندین بار استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱۷. اگر L لاپلاسین نرمال شده ماتریس گراف d - منتظم G و x بردار دلخواه باشد، آنگاه

$$x^TLx = \frac{1}{d}\Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u - x_v)^2$$

و در نتیجه

$$\lambda_1 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{x^TMx}{x^Tx} \geq 0$$

زیرا به ازای $\vec{1} = (1, 1, ..., 1)_n$ خواهیم دید که $\vec{1}^TL\vec{1} = 0$ و در نتیجه صفر کوچکترین مقداروِیژه L است.

اثبات. ما این فورمول رو برای λ_k داریم:

$$\lambda_k = \min_{\text{زیرفضای } k \text{بعدی از } \mathbb{R}^n\, S} \max_{x\in S-\{0\}} \frac{\Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u-x_v)^2}{d\Sigma_v x_v^2}$$

پس اگر $\lambda_k = 0$ فضای k بُعدی S باید وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in S$ داریم :

$$\Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u - x_v)^2 = 0$$

این یعنی برای هر x و هر یال $(u,v) \in E$ با وزن مثبت داریم $x_u = x_v$ و برای هر u و v که در یک مولفه همبندی هستند نیز داریم $x_u = x_v$. این یعنی هر $x \in V$ باید در هر مؤلفه‌ی همبندی ثابت باشد. پس بُعد V میتواند حداکثر تعداد مولفه های همبندی G باشد، پس G حداقل k مولفه همبندی دارد.
حال عکس قضیه، یعنی اگر G حداقل k مولفه همبندی داشته باشد، S را فضای بردارهایی که در هر مولفه ثابت هستند در نظر بگیرید که حداقل k بُعدی است و برای هر $x \in S$ داریم

$$\Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u - x_v)^2 = 0$$

یعنی S نشانگر این است که $\lambda_k = 0$.
نهایتا برای بررسی λ_n داریم

$$\lambda_n = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{x^TMx}{x^Tx} \geq 0$$

که با توجه به اینکه λ_n- کوچکترین مقدار ویژه $L-$ است اثبات میشود.
همچنین برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$2 - x^TLx = \frac{1}{d}\Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u + x_v)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_n \leq 2$$

از طرفی اگر $\lambda_n = 2$ آنگاه باید یک بردار ناصفر x وجود داشته باشد که:

$$Sigma_{\{u,v\}\in E}(x_u + x_v)^2 = 0$$

یعنی برای هر یال $(u,v) \in E$ داریم $x_u = -x_v$. فرض کنید v رأسی از گراف باشد که $x_v = a \neq 0$ مجموعه های $A := \{v : x_v = a\}, B := \{v : x_v = -a\}, R := \{v : x_v \neq +-a\}$ را تعریف میکنیم. مجموعه $A \bigcup B$ از بقیه گراف جداست، چون هر یالی که از A خارج میشود باید به B برود و برعکس. پس، $A \bigcup B$ یک مولفه همبندی است، یا دسته ای از مولفه های همبندی از G که دو بخشی هستند، با دو بخش A و B $\square$