دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

دوگانی

جلسه نهم

نگارنده: ایمان حامدحیدردوست

۱ مروری بر مباحث گذشته

دو جلسه‌ی قبل، سیمپلکس به عنوان روشی برای حل برنامه‌ریزی خطی معرفی شد. همچنین طبق قضیه اثبات‌شده اگر در انتخاب متغیرها در روش سیمپلکس از قانون بلند استفاده کنیم، الگوریتم سیمپلکس همواره کارآمد است. بدین معنی که اگر برنامه‌ریزی خطی شدنی و کران‌دار باشد، استفاده از روش سیمپلکس منجر به یافتن جواب خواهد شد و همواره می‌توان به تابلویی دست یافت که ضریب همه متغیرهای تابلو منفی باشد.

۲ قضیه دوگانی

اینجا به معرفی یکی از مهم‌ترین مسائل پایه‌ای در برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم. برای شروع برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید؛

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{که} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب برنامه‌ریزی خطی فوق ۴.۷۵ است. سوال این است که آیا می‌توانیم بدون حل کردن، یک کران بالا برای برنامه‌ریزی خطی بیابیم؟ در نگاه اول با توجه به نامعادله‌ی اول، می‌توان به یک کران بالا رسید. می‌دانیم که x_1 و x_2 نامنفی هستند و ضرایب هر دو در نامعادله اول، بزرگ‌تر از

ضرایب‌شان در تابع هدف است. با توجه به اینکه نامعادله اول به ازای همه‌ی جواب‌های شدنی برقرار است، داریم:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۴x_۱ + ۸x_۲ \leq ۱۲$$

اما علاقه‌مند هستیم کران بالای بهتری بیابیم. می‌توان نامعادله اول را بر ۲ تقسیم کرد:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۶$$

یک کران بهتر این است که نامعادله‌های اول و دوم را جمع کنیم و بر ۳ تقسیم کنیم:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ = (\frac{۱}{۳})(۴x_۱ + ۸x_۲ + ۲x_۱ + x_۲) \leq (\frac{۱}{۳})(۱۲ + ۳) = ۵$$

تا اینجا موفق شدیم به جواب بهینه نزدیک شویم. آیا می‌توان باز هم به کران بهتر یا خود جواب بهینه رسید؟ اگر دقیق‌تر صحبت کنیم، می‌خواهیم با ترکیب نامعادله‌های برنامه‌ریزی خطی اصلی به نامعادله‌ای به فرم زیر برسیم؛

$$\begin{aligned} & d_۱x_۱ + d_۲x_۲ \leq h \\ \text{که} \quad & d_۱ \geq ۲, d_۲ \geq ۳ \end{aligned}$$

برای رسیدن به بهترین کران بالا بایستی کمینه‌ی h را بیابیم. اگر به هدف فوق برسیم، آنگاه خواهیم داشت؛

$$۲x_۱ + ۳x_۲ = d_۱x_۱ + d_۲x_۲ \leq h$$

برای هرکدام از نامعادله ها، یک ضریب `y_i` در نظر می‌گیریم. با جمع همه نامعادله‌ها داریم؛

$$(۴y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳)x_۱ + (۸y_۱ + y_۲ + ۲y_۳)x_۲ \leq ۱۲y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳$$

می‌توان تبدیل کرد؛

$$\begin{aligned} d_۱ &= ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳ \\ d_۲ &= ۸y_۱ + y_۲ + ۲y_۳ \\ h &= ۱۲y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳ \end{aligned}$$

برای دستیابی به بهترین کران، برنامه‌ریزی خطی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & ۱۲y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳ \\ \text{که} \quad & ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳ \geq ۲ \\ & ۸y_۱ + y_۲ + ۲y_۳ \geq ۳ \\ & y_۱, y_۲, y_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

مقادیر `y_i` مثبت هستند تا جهت نامعادله‌های عوض نشود. هر جواب شدنی برنامه‌ریزی خطی فوق، کران بالایی برای برنامه‌ریزی خطی اصلی است. به برنامه‌ریزی خطی اصلی، اولیه (`Primal`) و به برنامه‌ریزی فوق، دوگان (`Dual`) می‌گویند. در این مسئله، جواب برنامه‌ریزی خطی دوگان ۴.۷۵ می‌شود.

نتیجه ۱. برای برنامه‌ریزی خطی زیر،

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c'x \\ \text{که} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

می‌توان برنامه‌ریزی خطی دوگان زیر را نوشت؛

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & b'y \\ \text{که} \quad & A'y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

نکته. اگر تابع هدف و قیود برنامه‌ریزی خطی دوگان را در منفی ضرب کنیم، یک برنامه‌ریزی با هدف بیشینه کردن و قید کوچک‌تر مساوی خواهیم داشت. اگر دوگان آن را بنویسیم، به برنامه‌ریزی خطی اولیه خواهیم رسید.

قضیه ۲. دوگانی ضعیف: هر جواب دوگان، کران بالایی برای اولیه است. برای هر جواب شدنی x در برنامه‌ریزی خطی اولیه و هر جواب شدنی y در برنامه‌ریزی خطی دوگان، خواهیم داشت:

$$c'x \leq b'y$$

می‌توان اینطور به قضیه نگاه کرد که هر جواب x یک کران پایین برای برنامه‌ریزی خطی دوگان است.

قضیه ۳. دوگانی: برای برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان،

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & b'y \\ \text{که} \quad & A'y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c'x \\ \text{که} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

تنها یکی از چهار وضعیت زیر برقرار است؛

۱ــ نه اولیه و نه دوگان، هیچ‌کدام جواب شدنی ندارند.

۲ ــ اولیه بی‌کران است و دوگان جواب شدنی ندارد.

۳ــ اولیه جواب شدنی ندارد و دوگان بی‌کران است.

۴ــ اولیه و دوگان، هر دو جواب شدنی دارند. آنگاه هر دو جواب بهینه دارند. اگر X جواب بهینه اولیه و Y جواب بهینه دوگان باشد، خواهیم داشت:

$$c'X = b'Y$$

در این حالت، بیشینه تابع هدف اولیه معادل کمینه تابع هدف دوگان است.

نکته. الگوریتمی که یک جواب شدنی اولیه برای حل برنامه‌ریزی خطی به ما دهد، به اندازه الگوریتم یافتن جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی سخت است.

برای فهم بهتر این موضوع به مسئله زیر توجه کنید؛

فرض: الگوریتم A وجود دارد که جواب شدنی پیدا می‌کند.

حکم: الگوریتم B وجود دارد که جواب بهینه را می‌یابد.

اگر شروط دوگان را به برنامه‌ریزی خطی بیافزاییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c'x \\ \text{که} \quad & Ax \leq b \\ & A'y \geq c \\ & c'y \geq b'y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

طبق دوگانی، برنامه‌ریزی خطی اولیه جواب بهینه دارد، اگر و تنها اگر، برنامه‌ریزی خطی فوق جواب شدنی داشته باشد. با توجه به قید سوم و روابط دوگانی، تنها زمانی جواب شدنی داریم که قید سوم در حالت برابر باشد.

نکته.دوگان را می‌توان برای همه نوع برنامه‌ریزی خطی نوشت. برنامه‌ریزی خطی با قید زیر را در نظر بگیرید؛

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i \qquad (C_i)$$

در دوگان به ازای حالت‌های فوق، به صورت متقابل خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} y_i & \geq 0 \\ y_i & \leq 0 \\ y_i & \in R \end{pmatrix} \quad if \quad we \quad have \quad \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} \quad in \quad C_i$$

و نامعادله‌های دوگان خواهند بود:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} c_j \qquad (Q_i)$$
$$if \quad x_j \quad satisfies \quad \begin{pmatrix} x_j & \geq 0 \\ x_j & \leq 0 \\ x_j & \in R \end{pmatrix}$$

تمامی شروط بالا تضمین می‌کنند که دوگان، کران بالایی برای اولیه داشته باشد و همواره به ازای بیشینه کردن تابع هدف در اولیه، کمینه کردن تابع هدف در دوگان رخ دهد.

۳ تفسیر فیزیکی دوگان

بردار `c` در تابع هدف را می‌توان مشابه جاذبه دید و قیود برنامه‌ریزی خطی را چندوجهی تشکیل شده از اشتراک نیم‌فضاهایی که با صفحه‌ی `ax=b` جدا شده‌اند فرض کرد. اگر توپ بسیار کوچکی را در این فضای چندوجهی رها کنیم، به‌دلیل محدب بودن چندوجهی، توپ در گوشه ای گیر نمی‌کند و جاذبه تا پایین‌ترین نقطه آن را می‌کشد. در جایی که توپ ایستاده است، نیروی جاذبه وارد بر آن برابر نیروهای عمود بر صفحه‌ها بر توپ است. اگر `a_i` (یکی از سطرهای `A`) را بردار عمود بر صفحه در نظر بگیریم، طبق قوانین نیوتون خواهیم داشت:

$$\sum_{i \in D} (y_i^* a_i) = c$$

`y*_i` یک جواب شدنی برای ماست. پس به یک `y*` دست یافتیم به طوریکه در رابطه زیر صدق کند؛

$$A'y = c$$

همچنین می‌دانیم که توپ در پایین‌ترین نقطه ایستاده و `x*` جواب بهینه است. حال عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$(y^*)'(Ax^* - b) = 0$$

چرا عبارت فوق صفر است؟ المان‌هایی از `y*` که مربوط به صفحاتی است که در تماس با توپ نیستند، صفر هستند. چون توپ بسیار کوچک است، برای المان‌های دیگر، توپ روی موقعیت خود صفحه قرار دارد و جمله دوم صفر است. حال داریم:

$$(y^*)'Ax^* = (y^*)'b$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$c'x^* = (y^*)'b$$

۴ اثبات دوگانی به کمک روش سیمپلکس

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید؛

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c'x \\ \text{که} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

حال آن را به فرم معادله‌ای زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \bar{c}'\bar{x} \\ \text{که} \quad & \bar{A}\bar{x} = b \\ & \bar{x} \geq 0 \\ & \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n+m}) \\ & \bar{c} = (c_1, ..., c_n, 0, ..., 0) \\ & \bar{A} = (A|I_m) \end{aligned}$$

از روش سیمپلکس استفاده می‌کنیم و به تابلو زیر می‌رسیم:

$$\frac{x_B = P + Qx_N}{z = z_0 + r'x_N}$$

فرض کنید در تابلو نهایی به x* می‌رسیم.

حکم: y* یک جواب شدنی برای مسئله دوگان است با دو شرط زیر؛

$$\begin{aligned} 1) \quad & y^* = (\bar{c}_B'\bar{A}_B^{-1})' \\ 2) \quad & c'x^* = b'y^* \end{aligned}$$

اثبات: با توجه به سیمپلکس داشتیم؛

$$\begin{aligned} \bar{x}_B^* &= \bar{A}^{-1}b \\ \bar{x}_N^* &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه؛

$$\begin{aligned} c'x^* &= \bar{c}'\bar{x}^* \\ &= \bar{c}_B'\bar{x}_B^* \\ &= \bar{c}_B'(\bar{A}_B^{-1}b) \\ &= (\bar{c}_B'\bar{A}_B^{-1})b \\ &= (y^*)'b \\ &= b'y^* \end{aligned}$$

حال کافی است نشان دهیم که y* جوابی شدنی است؛

$$\begin{aligned} \bar{A}'(y^*) &= \bar{A}'(\bar{c}_B'\bar{A}^{-1})' \\ &= (\bar{c}_B'\bar{A}_B^{-1}\bar{A})' \\ &= W \end{aligned}$$

در نتیجه؛

$$W_B = (\bar{c}'_B \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B)' = (\bar{c}'_B I_m)' = \bar{c}_B$$
$$W_N = (\bar{c}'_B \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N)' = \bar{c}_N - r \geq \bar{c}_N$$

در نتیجه؛

$$\bar{A}' y^* \geq c$$
$$y^* \geq 0$$

پس عبارت معرفی شده برای y* یک جواب شدنی برای مسئله دوگان است و حکم ثابت شد.