بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه سیزدهم: کران پایین برای الگوریتم GW

Project: People

مقدمه و تعاریف

ضریب تقریب الگوریتم GW؟

$$\vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

مرور الگوریتم GW:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i=1,\ldots,n. \end{array}$$

مرور الگوریتم GW:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

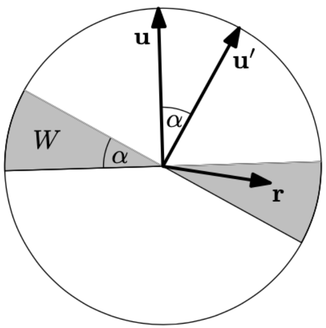
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j}{2} \\ \text{subject to} & \mathbf{u}_i \in S^{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}}$$

مرحله ۵: محاسبه اتلاف گرد کردن

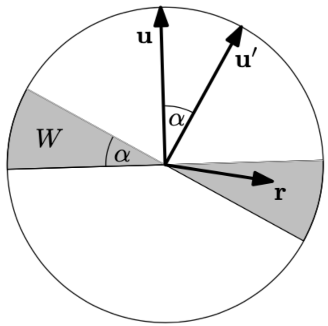
1.4.1 Lemma. *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in S^{n-1}$. *The probability that (1.5) maps* $\mathbf{u}$ *and* $\mathbf{u}'$ *to different values is*

$$\frac{1}{\pi} \arccos \mathbf{u}^T \mathbf{u}'.$$

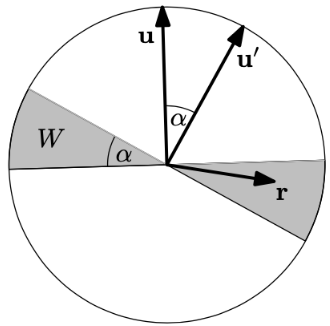
$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T \mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\mathbf{u} \;\mapsto\; \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

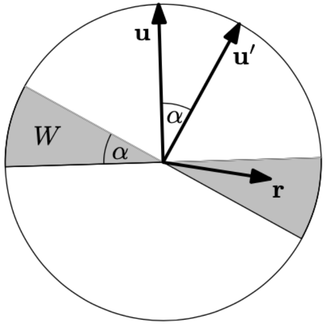


$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\sum_{\{i,j\} \in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

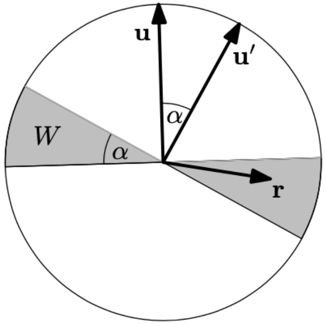
$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

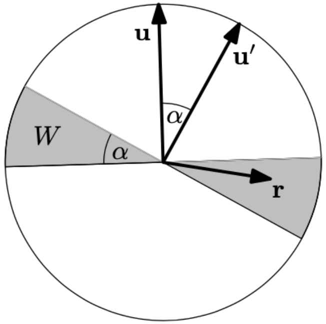
$$\mathbf{u} \;\mapsto\; \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

$$\mathbf{u} \;\mapsto\; \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

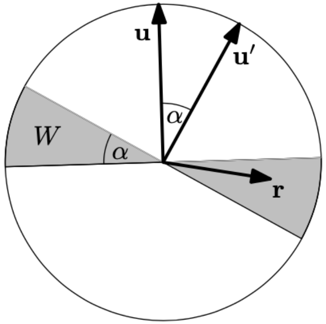


$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq 0.8785672\,\frac{1-z}{2}.$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

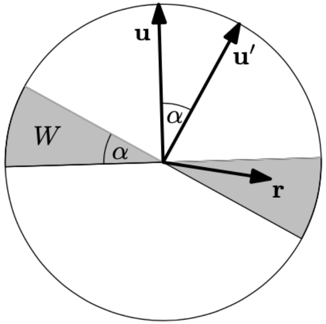


$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq \overset{\boxed{\alpha_{GW}}}{0.8785672}\, \frac{1-z}{2}.$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos {\mathbf{u}_i^*}^T \mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-{\mathbf{u}_i^*}^T \mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



بدترین زاویه:

$\vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$

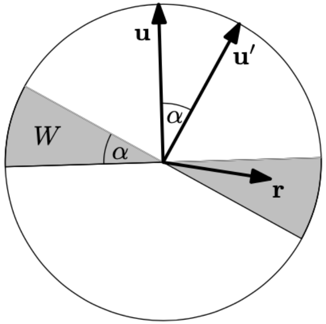
α_{GW}

$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq 0.8785672\,\frac{1-z}{2}.$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathrm{Opt}(G) - \varepsilon$$

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p}^T\mathbf{u} \geq 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



بدترین زاویه:

$\vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$

α_{GW}

$$\frac{\arccos(z)}{\pi} \geq 0.8785672\, \frac{1-z}{2}.$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{\arccos \mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{\pi}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{u}_i^{*T}\mathbf{u}_j^*}{2} \geq \mathsf{Opt}(G) - \varepsilon$$

$$\alpha_{GW} = \frac{\vartheta_{GW}}{\pi} \cdot \frac{2}{1-\cos(\vartheta_{GW})}$$

کران پایین – چه می‌دانیم

$$\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0.87856720578$$

کران پایین – چه می‌دانیم

$$\alpha_{GW} \approx 0.87856720578$$

- بله،
  - برای گراف‌های چگال، یال >= cn^2 : الگوریتم با ضریب تقریب $(1 - \epsilon)$
  - برای گراف‌های با بیشترین درجه محدود $\Delta =$ ، ضریب تقریب $\alpha_{GW} + \epsilon(\Delta)$
  - گراف با بزرگ‌ترین برش بزرگ یا کوچک

کران پایین – چه می‌دانیم

$$\alpha_{GW} \approx 0.87856720578$$

- بله،
  - برای گراف‌های چگال، یال >= cn^2 : الگوریتم با ضریب تقریب $(1-\epsilon)$
  - برای گراف‌های با بیشترین درجه محدود $\Delta =$ ، ضریب تقریب $\alpha_{GW} + \epsilon(\Delta)$
  - گراف با بزرگ‌ترین برش بزرگ یا کوچک
- خیر،
  - حالت کلی اگر UGC:
  - حالت کلی اگر NP =! P: کران پایین = ۱۶/۱۷ (۰/۹۴)
    - با داشتن یک عبارت ۳-SAT، یک گراف می‌سازد که
      - بزرگ‌ترین برش > x، اگر عبارت ارضاپذیر باشد
      - بزرگ‌ترین برش گراف > $\frac{16}{17}x$ اگر عبارت ارضاپذیر نباشد

کران پایین – چه می‌دانیم

$$\alpha_{GW} \approx 0.87856720578$$

- بله،
  - برای گراف‌های چگال، یال >= cn^2 : الگوریتم با ضریب تقریب $(1-\epsilon)$
  - برای گراف‌های با بیشترین درجه محدود $\Delta =$ ، ضریب تقریب $\alpha_{GW} + \epsilon(\Delta)$
  - گراف با بزرگ‌ترین برش بزرگ یا کوچک
- خیر،
  - حالت کلی اگر UGC:
  - حالت کلی اگر NP != P: کران پایین = ۱۶/۱۷ (۰/۹۴)
    - با داشتن یک عبارت ۳-SAT، یک گراف می‌سازد که
      - بزرگ‌ترین برش > x، اگر عبارت ارضاپذیر باشد
      - بزرگ‌ترین برش گراف > $\frac{16}{17}x$ اگر عبارت ارضاپذیر نباشد

این جلسه:
بررسی کران پایین برای الگوریتم GW

در الگوریتم GW:

$$\mathsf{Opt} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - x_i x_j}{2} : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

در الگوریتم GW:

$$\text{Opt} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - x_i x_j}{2} : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

در الگوریتم GW:

$$\mathsf{Opt} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - x_i x_j}{2} : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$\mathsf{Algo} =$ امید جواب الگوریتم

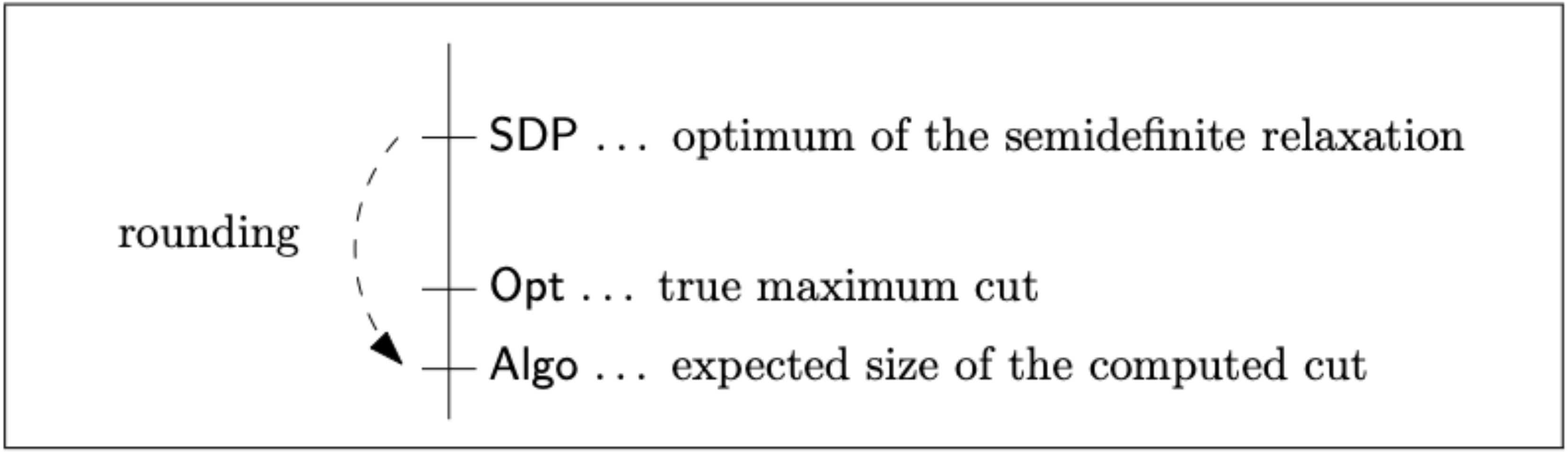
در الگوریتم GW:

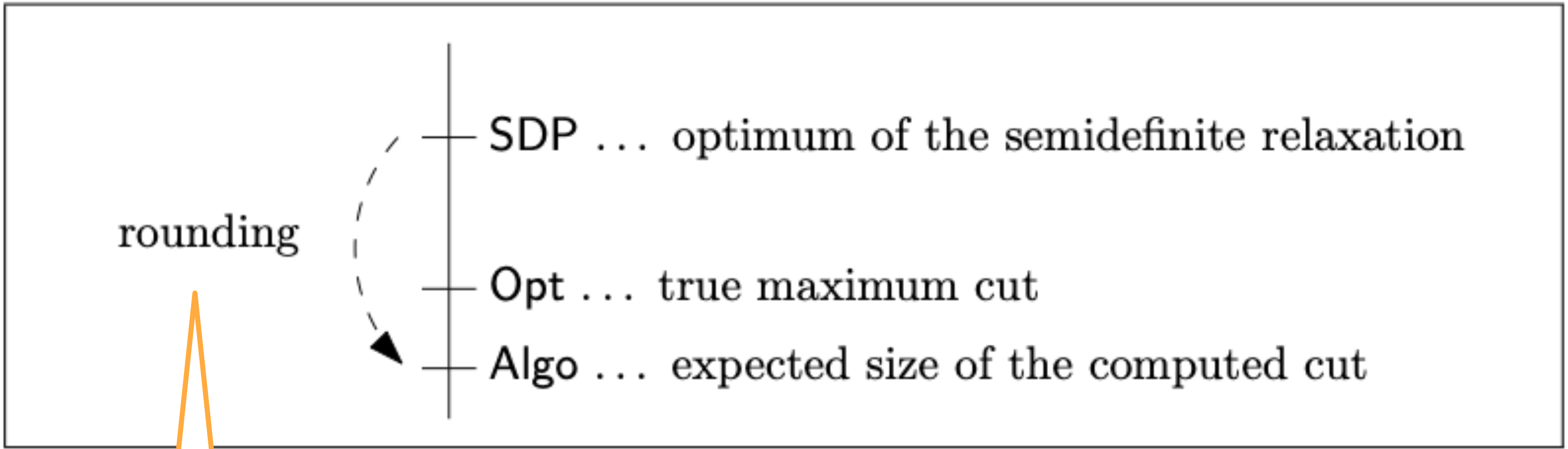
$$\mathsf{Opt} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-x_i x_j}{2} : x_1,\ldots,x_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

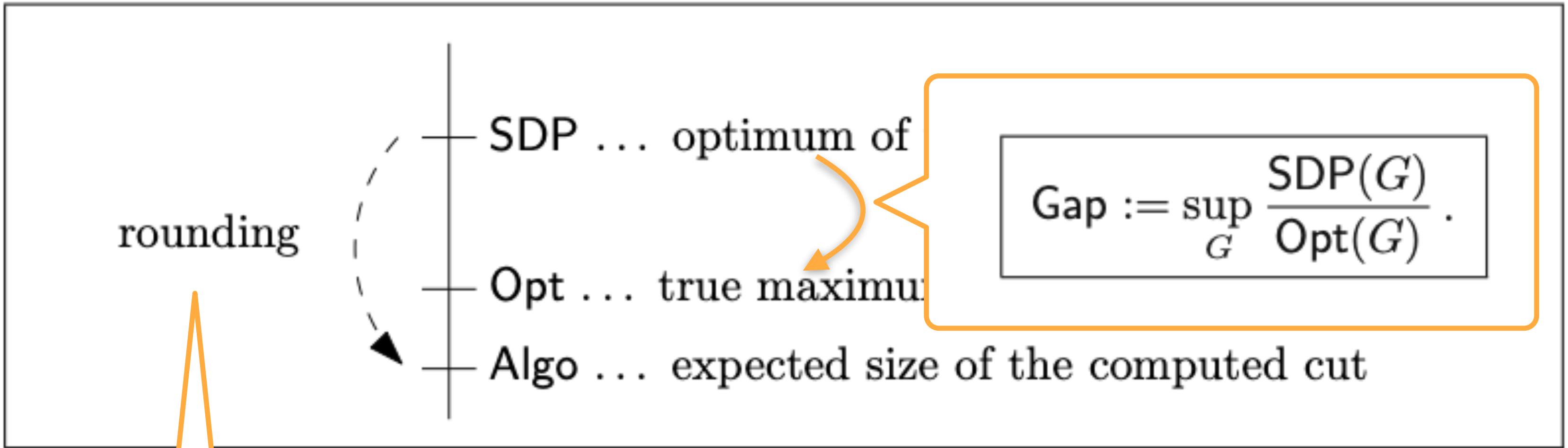
$\mathsf{Algo} =$ امید جواب الگوریتم

$$\alpha_{GW} = \inf_G \frac{\mathsf{Algo}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}.$$


SDP . . . optimum of the semidefinite relaxation
rounding
Opt . . . true maximum cut
Algo . . . expected size of the computed cut


SDP . . . optimum of the semidefinite relaxation
rounding
Opt . . . true maximum cut
Algo . . . expected size of the computed cut

ضریب تقریب


rounding
SDP . . . optimum of
Opt . . . true maximu
Algo . . . expected size of the computed cut
$\mathsf{Gap} := \sup_{G} \frac{\mathsf{SDP}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}$.

ضریب تقریب

چرا شکاف صحیح مهم است؟

چرا شکاف صحیح مهم است؟

- الگوریتم‌ها این‌گونه‌اند:
  - ۱ـ برنامه‌ریزی صحیح
  - ۲ـ آرام‌سازی به برنامه‌ریزی محدب (مثلا SDP)
  - ۳ـ حل بهینه برنامه‌ریزی آرام‌سازی شده
  - ۴ـ گرد کردن

چرا شکاف صحیح مهم است؟

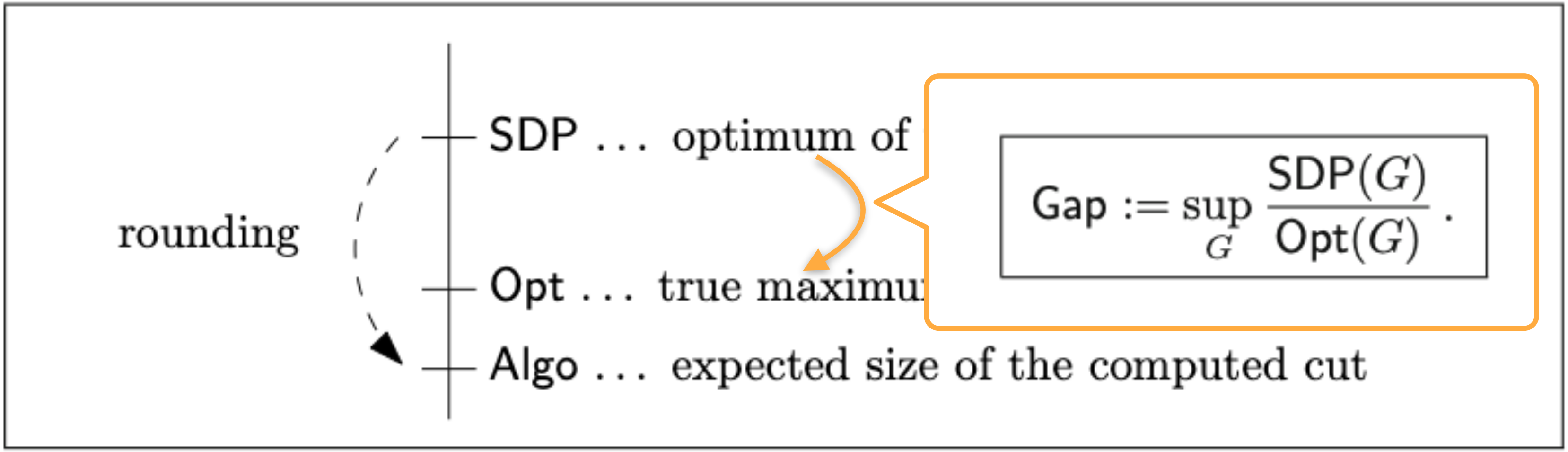
- الگوریتم‌ها این‌گونه‌اند:
  - ۱ــ برنامه‌ریزی صحیح
  - ۲ــ آرام‌سازی به برنامه‌ریزی محدب (مثلا SDP)
  - ۳ــ حل بهینه برنامه‌ریزی آرام‌سازی شده
  - ۴ــ گرد کردن
  - استدلال:

چرا شکاف صحیح مهم است؟

- الگوریتم‌ها این‌گونه‌اند:
  - ۱ـ برنامه‌ریزی صحیح
  - ۲ـ آرام‌سازی به برنامه‌ریزی محدب (مثلا SDP)
  - ۳ـ حل بهینه برنامه‌ریزی آرام‌سازی شده
  - ۴ـ گرد کردن
  - استدلال:
    - جواب بهینه آرام‌سازی =< جواب بهینه (چون آرام‌سازی کردیم)
    - پس ضریب تقریب = ضریب گرد کردن
    - ضریب گرد کردن =< شکاف صحیح (چون مثلا در مورد بهینه نسبت همین است!)

زیرفصل ۱:
کران پایین α_{GW} برای شکاف صحیح

سوال: شکاف صحیح چقدر است؟



$$\boxed{\text{؟}} \le \text{GAP} \le \frac{\text{۱}}{\alpha_{GW} = \inf_G \frac{\mathsf{Algo}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}.}$$

؟ $\le$ GAP $\le$ ١ / ...

$$\alpha_{GW} = \inf_{G} \frac{\mathsf{Algo}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}.$$

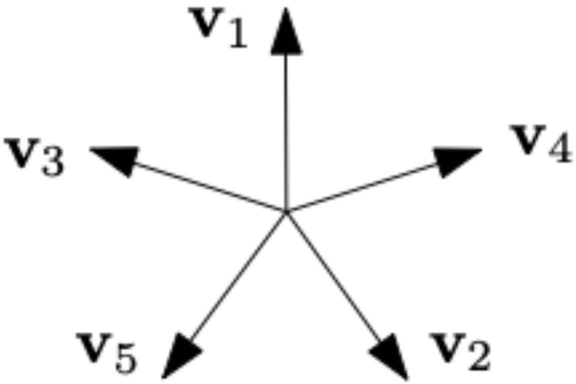
8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MAXCUT *satisfies* $\mathsf{Gap} \ge \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$*. In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \ge \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

مثال C_5

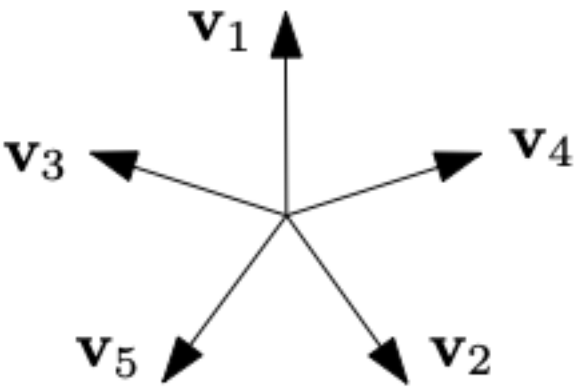
$$\mathsf{Opt} = 4,$$

مثال C_5



$\mathsf{Opt} = 4$

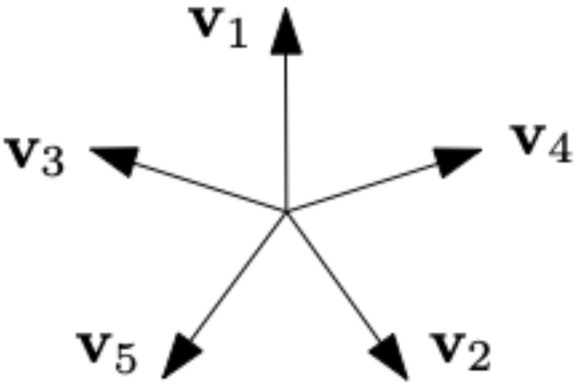
مثال C_5



$$\mathsf{Opt} = 4$$

$$\mathsf{SDP} \geq 5(1 - \cos \tfrac{4\pi}{5})/2 \approx 4.5225$$

مثال C_5



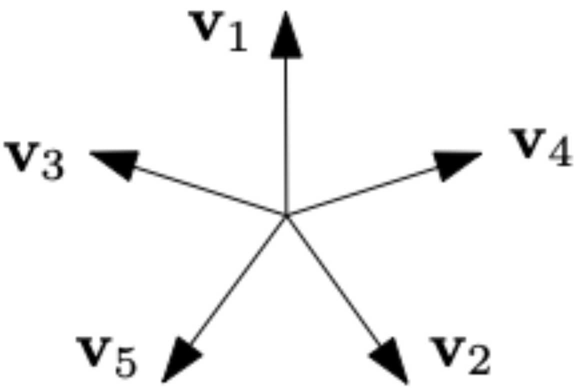
$$\mathsf{Opt} = 4,$$

$$\mathsf{SDP} \geq 5(1 - \cos\tfrac{4\pi}{5})/2 \approx 4.5225$$

$$\mathrm{Gap}(G) \geq \frac{4.5225}{4} = 1.1305$$

$$\boxed{\mathsf{Gap} := \sup_G \frac{\mathsf{SDP}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}\,.}$$

مثال C_5



$$\mathsf{Opt} = 4,$$

$$\mathsf{SDP} \geq 5(1 - \cos \tfrac{4\pi}{5})/2 \approx 4.5225$$

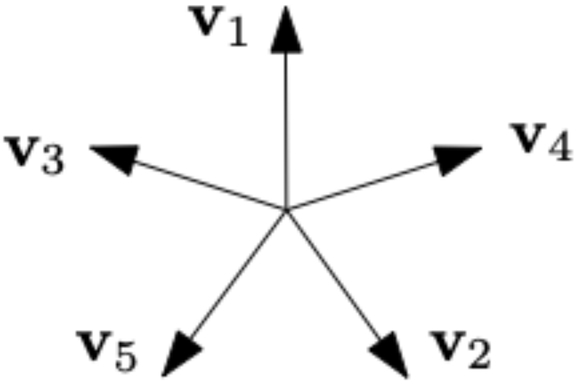
$$\mathrm{Gap}(G) \geq \frac{4.5225}{4} = 1.1305$$

$$\boxed{\mathsf{Gap} := \sup_G \frac{\mathsf{SDP}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}.}$$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx$ $\boxed{1.1382.}$ *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

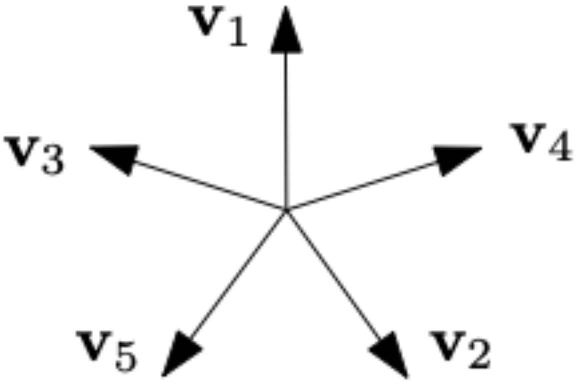
$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$=$



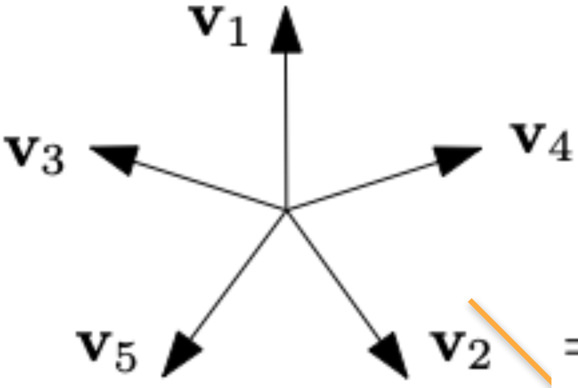
$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_2$

=



$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$=$

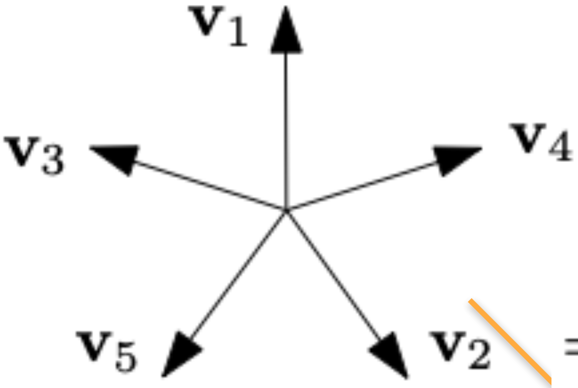


$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$=$

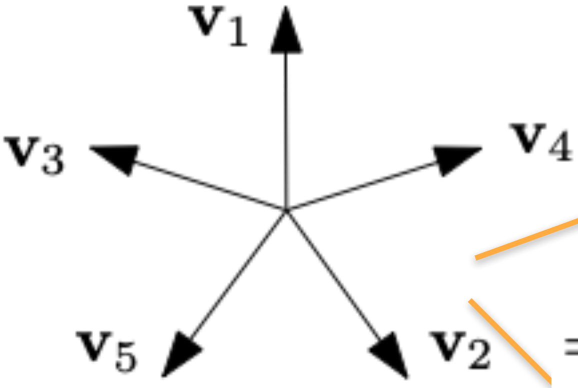
Algo $=$ امید جواب الگوریتم



$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$=$



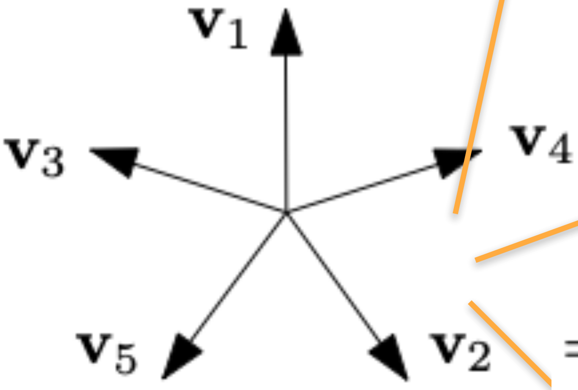
$\frac{\vartheta}{\pi}$

Algo $=$ امید جواب الگوریتم

$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$=$



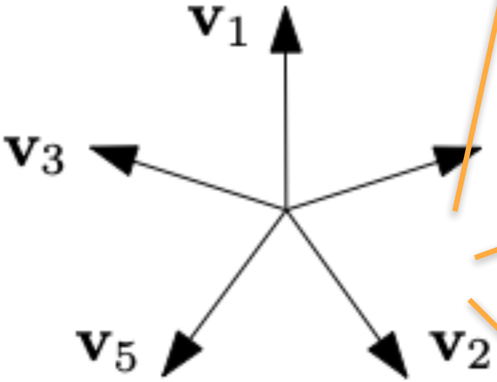
$\frac{\vartheta}{\pi}$

Algo $=$ امید جواب الگوریتم

$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} =$$



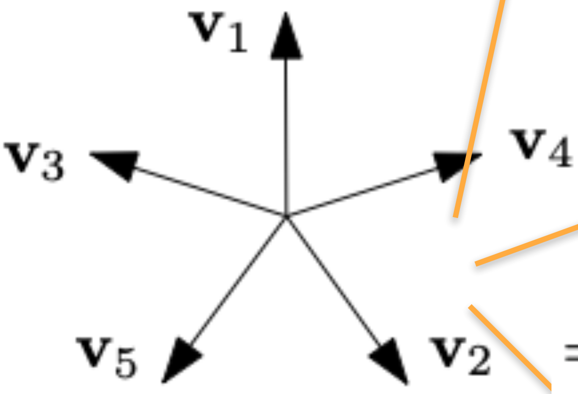
$$\frac{\vartheta}{\pi}$$

$\text{Algo} =$ امید جواب الگوریتم

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta}$$



$$\frac{\vartheta}{\pi}$$

Algo = امید جواب الگوریتم

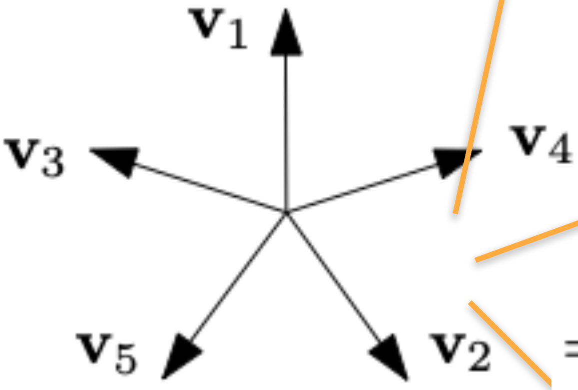
$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\text{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

بیشینه برای

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\frac{\mathrm{SDP}}{\mathrm{Algo}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$



$$\frac{\vartheta}{\pi}$$

$\mathrm{Algo} =$ امید جواب الگوریتم

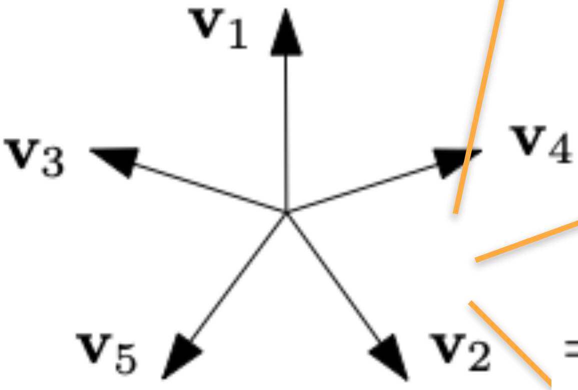
$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\mathrm{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

برای رسیدن به این عدد،
(تقریبا) همه زاویه‌ها

بیشینه برای
$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$

$$\frac{\mathrm{SDP}}{\mathrm{Algo}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$



$$\frac{\vartheta}{\pi}$$

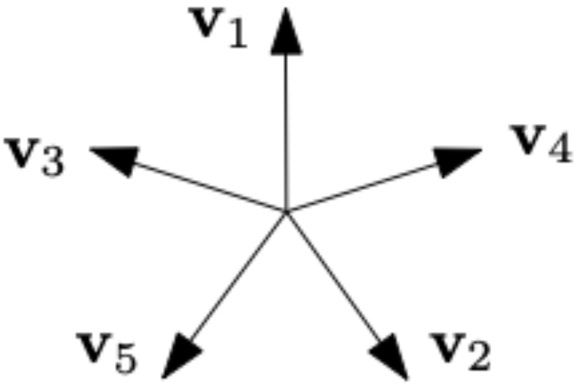
$\mathrm{Algo} =$ امید جواب الگوریتم

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\mathrm{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

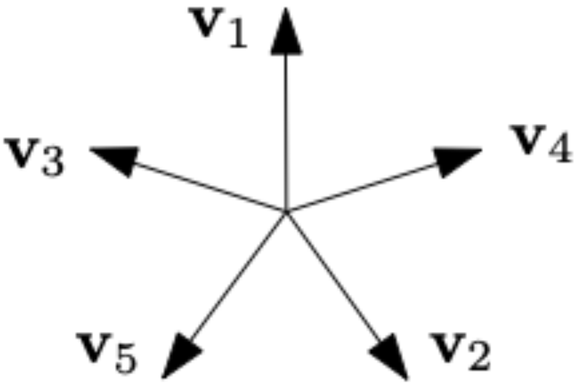
تلاش اول:

$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$$



تلاش اول: $\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2} \frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$

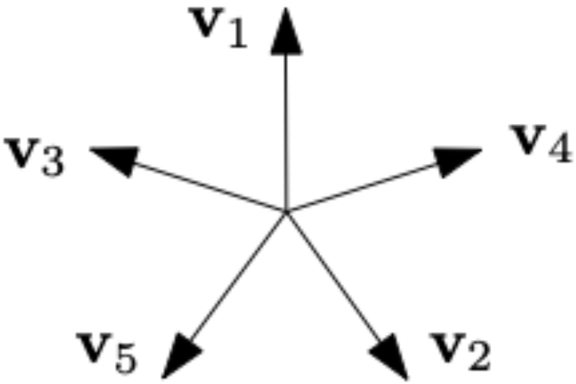
- یک سری بردار روی کره
  - زاویه خوب = یال



تلاش اول:

$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$$

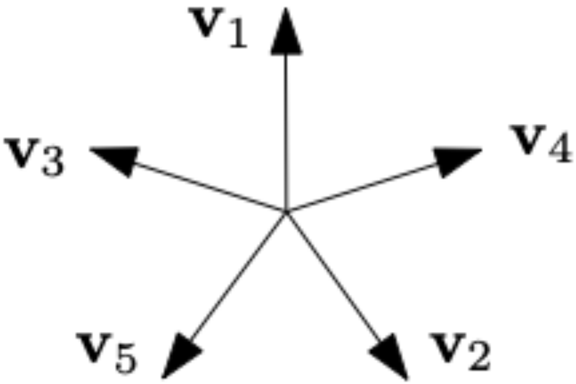
- یک سری بردار روی کره
  - زاویه خوب = یال



- $$|E|\frac{1-\cos\vartheta_{\text{GW}}}{2} \leq \text{SDP}$$

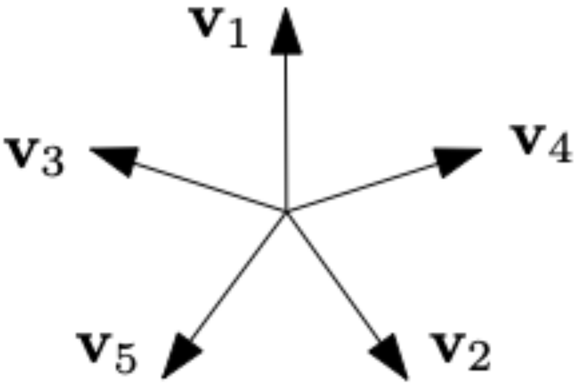
تلاش اول: $\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$

- یک سری بردار روی کره
  - زاویه خوب = یال
- $|E|\frac{1-\cos\vartheta_{\mathrm{GW}}}{2} \leq \text{SDP}$
- $|E|\frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} = \text{Algo}$



تلاش اول: $\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$

- یک سری بردار روی کره
  - زاویه خوب = یال

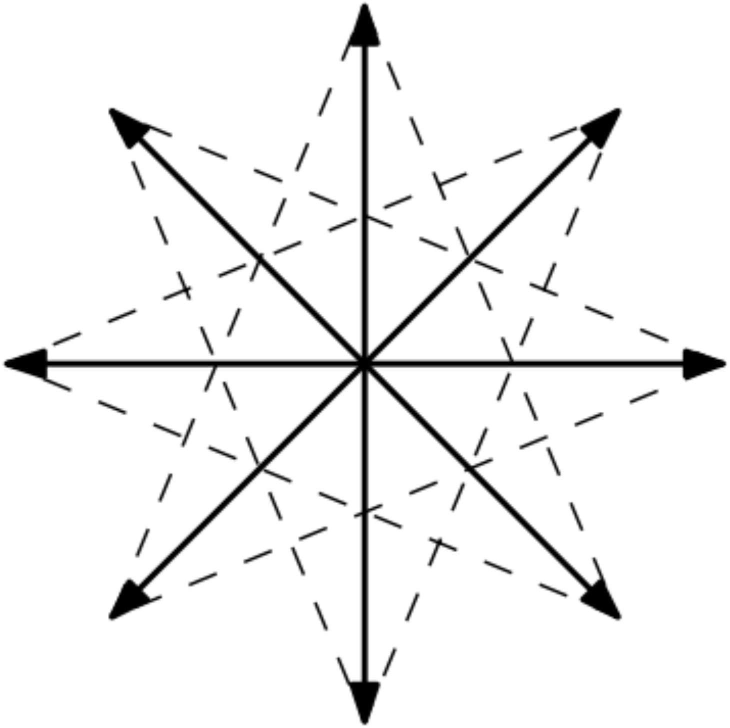


- $|E|\frac{1-\cos\vartheta_{\text{GW}}}{2} \leq \text{SDP}$
- $|E|\frac{\vartheta_{\text{GW}}}{\pi} = \text{Algo}$

$$\boxed{\mathsf{Gap} := \sup_G \frac{\mathsf{SDP}(G)}{\mathsf{Opt}(G)}\ .}$$

مثال: C_8

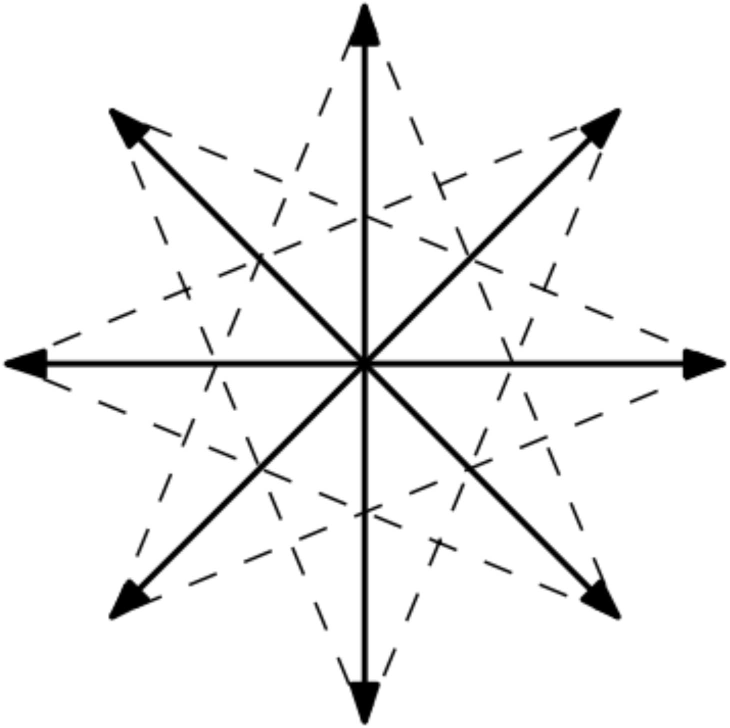
- Algo <= 6



$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$$

$$\boxed{\text{Gap} := \sup_G \frac{\text{SDP}(G)}{\text{Opt}(G)}\,.}$$

مثال: C_8



- Algo <= 6
- Opt=8

$$\frac{\text{SDP}}{\text{Algo}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} \leq 1/\alpha_{\text{GW}}$$

$$\boxed{\text{Gap} := \sup_G \frac{\text{SDP}(G)}{\text{Opt}(G)}\,.}$$

روش تولید مثال‌های با شکاف بزرگ

روش تولید مثال‌های با شکاف بزرگ

- بعد بالا
    - زاویه همه یال‌ها تقریبا = ϑ_{GW}

روش تولید مثال‌های با شکاف بزرگ

- بعد بالا
  - زاویه همه یال‌ها تقریبا = ϑ_{GW}
- گراف پیوسته
  - همه سطح کره
  - یال = نقاط با زاویه $\vartheta_{GW} \pm \delta$

روش تولید مثال‌های با شکاف بزرگ

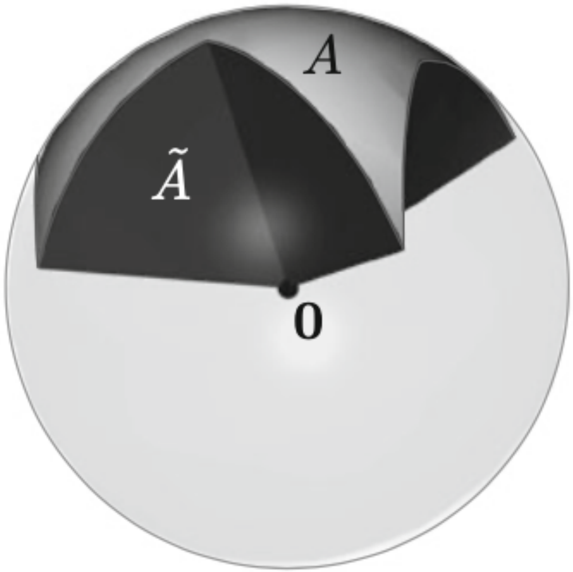
- بعد بالا
  - زاویه همه یال‌ها تقریبا = ϑ_{GW}

- گراف پیوسته
  - همه سطح کره
  - یال = نقاط با زاویه $\vartheta_{GW} \pm \delta$

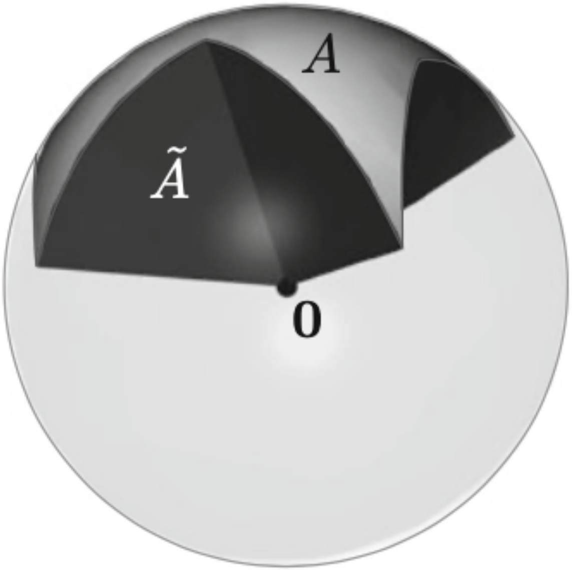
- گسسته سازی
  - قطعه‌بندی
  - یک راس از هر قطعه
  - یال = نقاط با زاویه $\vartheta_{GW} \pm \delta$

مرحله ۱:

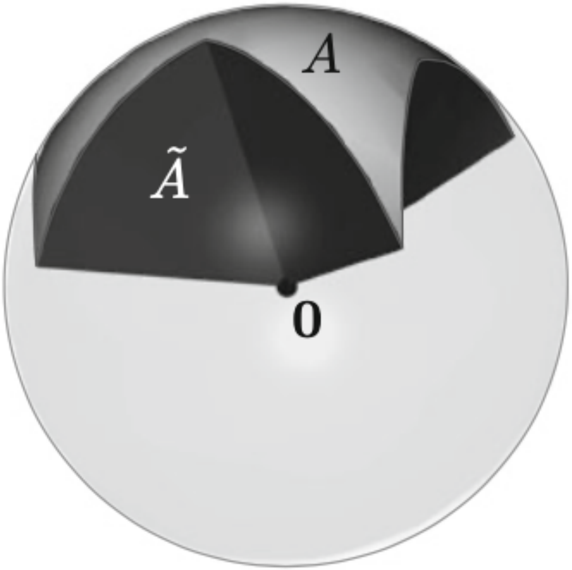
گراف پیوسته



A
$\tilde{A}$
0



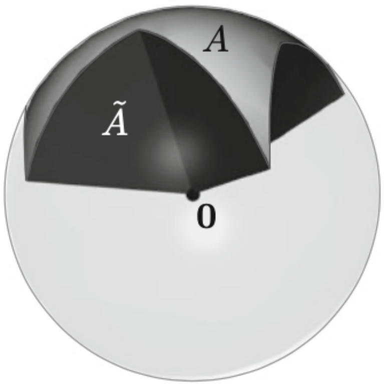
$\mu(A)$



$$\mu(A)$$

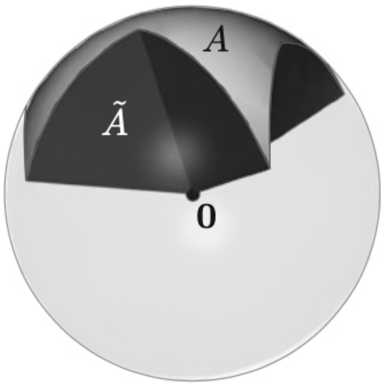
$$\mu^2(A, B)$$

گراف



گراف

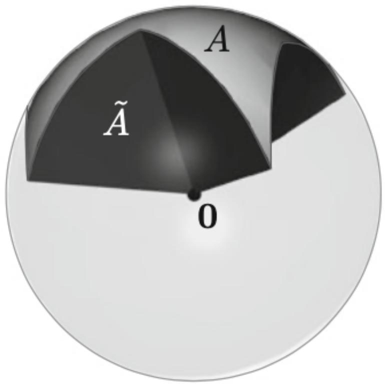
راس‌ها = S^{d-1}



گراف

راس‌ها = S^{d-1}

$$E_c := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

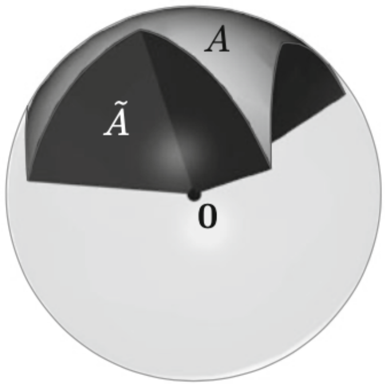


گراف

راس‌ها = S^{d-1}

$$E_c := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle \mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta] \right\}$$

$$\mathrm{cut}(E_c, A) := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_c : \text{ exactly one of } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ lies in } A \right\}$$



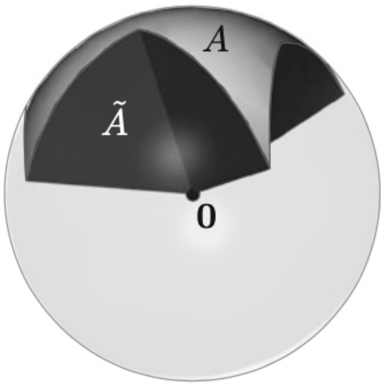
گراف

راس‌ها $= \quad S^{d-1}$

$$E_c := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle \mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$\mathrm{cut}(E_c, A) := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_c : \text{ exactly one of } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ lies in } A\right\}$$

اندازه برش $= \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$



گراف

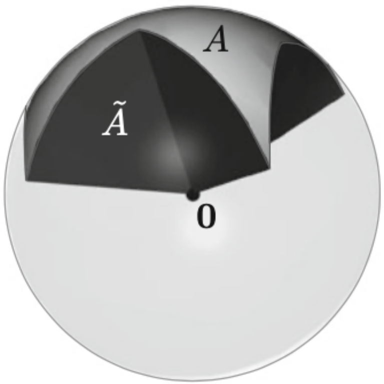
راس‌ها = S^{d-1}

$$E_c := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$\mathrm{cut}(E_c, A) := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E_c : \text{ exactly one of } \mathbf{x},\mathbf{y} \text{ lies in } A\right\}$$

اندازه برش = $\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$

$$\mathsf{Opt}(G_c) := \sup_{A} \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))}{\mu^2(E_c)}$$



برش‌های بیشینه G_c؟

$$E_c := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle \mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta] \right\}$$

برش‌های بیشینه Gc؟

$$E_c := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$E_c^+ := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \geq \vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta\right\}$$

برش‌های بیشینه G_c؟

$$E_c := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$E_c^+ := \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \geq \vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta\right\}$$

$$G_c^+ = (S^{d-1}, E_c^+)$$

برش‌های بیشینه G_c؟

$$E_c := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle \mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$\boxed{E_c^+ := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle \mathbf{xy} \geq \vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta\right\}}$$

$$G_c^+ = (S^{d-1}, E_c^+)$$

قسمت اضافه شده
کوچک است! (در ادامه ...)

برش‌های بیشینه Gc؟

$$E_c := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\right\}$$

$$E_c^+ := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^{d-1} \times S^{d-1} : \angle\mathbf{xy} \geq \vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta\right\}$$

$$G_c^+ = (S^{d-1}, E_c^+)$$

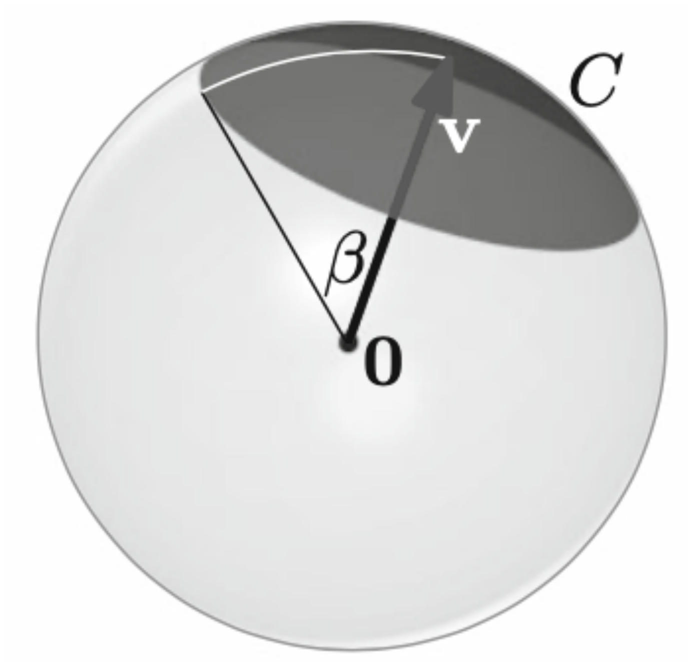
قسمت اضافه شده

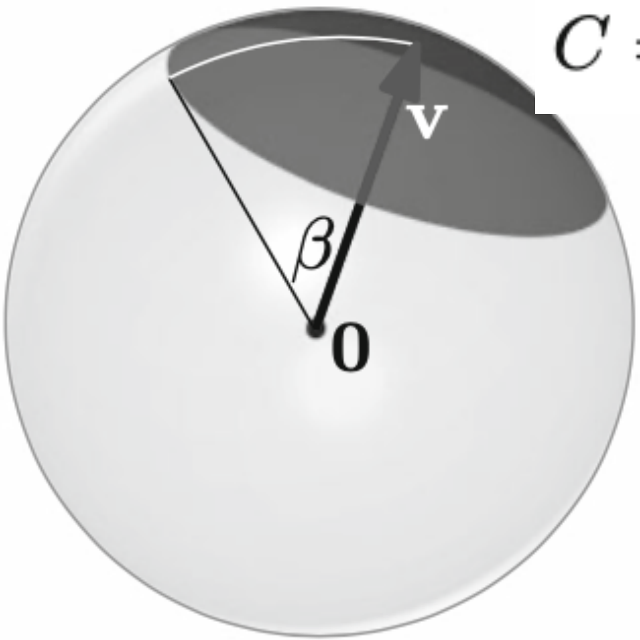
کوچک است! (در ادامه ...)

8.3.14 Proposition. Opt(G_c^+) *is attained by hyperplane cuts. That is, for every (measurable)* $A \subseteq S^{d-1}$ *we have* $\mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$, *where* H *is a hemisphere.*

تعریف: کلاه کره‌ای v با زاویه β

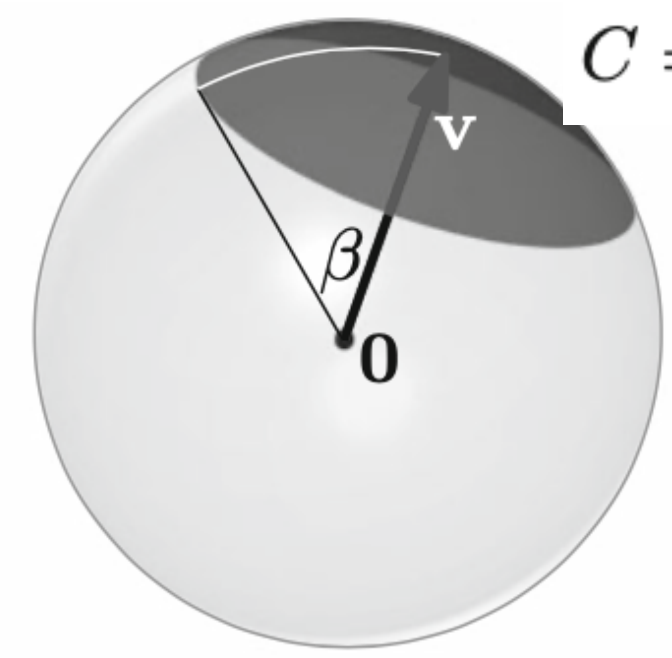
$$C = \{\mathbf{x} \in S^{d-1} : \angle \mathbf{xv} \leq \beta\}$$





$$C = \{\mathbf{x} \in S^{d-1} : \angle \mathbf{x}\mathbf{v} \leq \beta\}$$

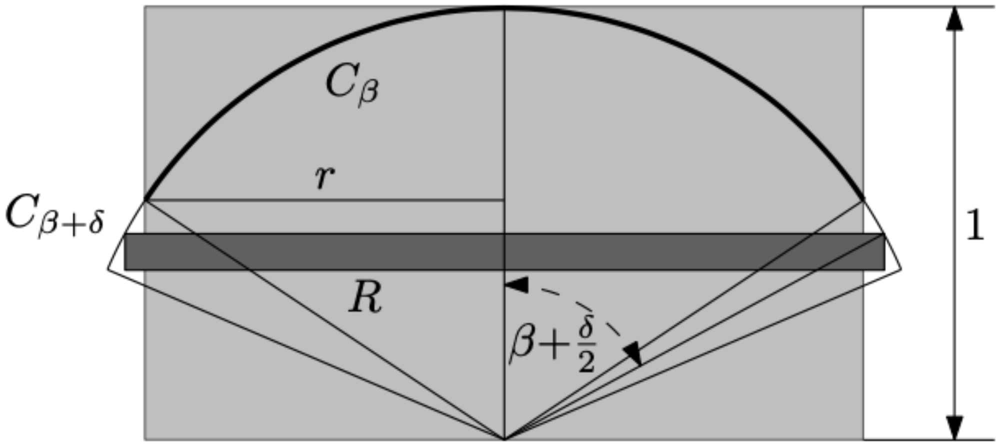
8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every* $\delta, \eta > 0$ *and* $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ *there is a dimension* d *in which* $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.



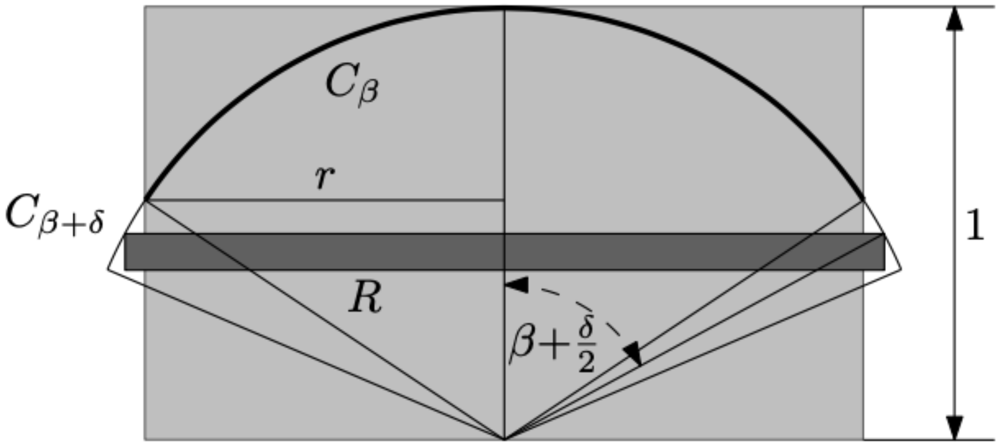
$$C = \{\mathbf{x} \in S^{d-1} : \angle \mathbf{x}\mathbf{v} \leq \beta\}$$

8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every* $\delta, \eta > 0$ *and* $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ *there is a dimension* d *in which* $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.

8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every* $\delta, \eta > 0$ *and* $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ *there is a dimension* d *in which* $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.

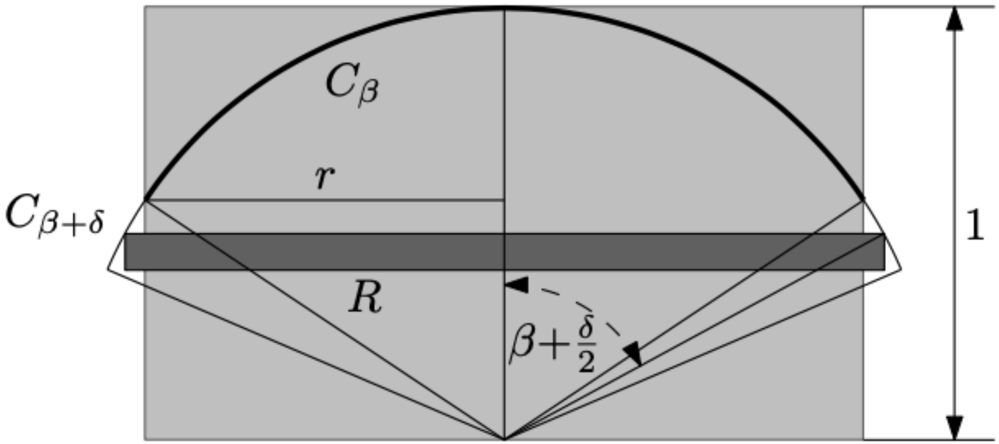


8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every $\delta, \eta > 0$ and $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ there is a dimension d in which $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.*



C_β داخل استوانه به عرض $\sin\beta$ و ارتفاع ۱

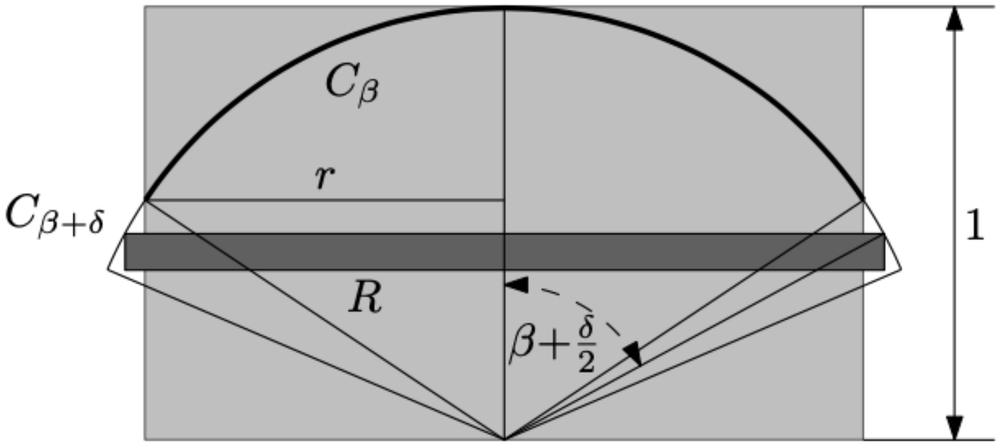
8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every $\delta, \eta > 0$ and $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ there is a dimension d in which $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.*



C_β داخل استوانه به عرض $\sin\beta$ و ارتفاع ۱

$C_{\beta+\delta}$ شامل استوانه به عرض $\sin(\beta + \delta/2)$ و ارتفاع $\cos(\beta + \delta/2) - \cos(\beta + \delta)$

8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every $\delta, \eta > 0$ and $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ there is a dimension d in which $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.*

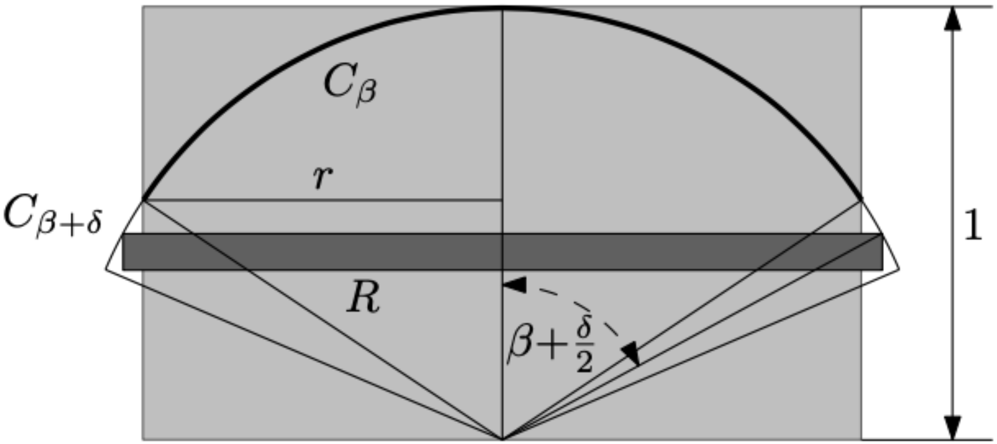


C_β داخل استوانه به عرض $\sin \beta$ و ارتفاع ۱

$C_{\beta+\delta}$ شامل استوانه به عرض $\sin(\beta + \delta/2)$ و ارتفاع $\cos(\beta + \delta/2) - \cos(\beta + \delta)$

نسبت حجم: $\frac{1}{h}(r/R)^{d-1}$

8.3.17 Claim. (Contrary to low-dimensional intuition.) *For every $\delta, \eta > 0$ and $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ there is a dimension d in which $\mu(C_\beta) \leq \eta \cdot \mu(C_{\beta+\delta})$.*



C_β داخل استوانه به عرض $\sin\beta$ و ارتفاع ۱

$C_{\beta+\delta}$ شامل استوانه به عرض $\sin(\beta + \delta/2)$ و ارتفاع $\cos(\beta + \delta/2) - \cos(\beta + \delta)$

نسبت حجم: $\eta > \frac{1}{h}(r/R)^{d-1}$

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

Lemma. *We have*

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

$$\sup_A \mu^2(\text{cut}(E_c, A))$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+ $\dfrac{\sup_A \text{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\geq \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta)$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$$

$$\begin{aligned}\mu^2(E_c) &= \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta}) \\ &\geq \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)\end{aligned}$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A))$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\geq \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \leq \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A))$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\geq \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A))$$

$$\begin{aligned}\mu^2(E_c) &= \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta}) \\ &\ge \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)\end{aligned}$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \leq \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\geq \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی $\mathrm{E_c}$ در مقابل برش روی E_c^+

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \leq \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\leq \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$

$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$

$(1-\delta)\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\geq \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین

برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \leq \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$

$$\leq \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$$

$$(1-\delta)\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)/(1-\delta)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$

$$\geq \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$$
$$(1-\delta)\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)$$
$$\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)/(1-\delta)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c) \quad = \mu^2(E_c)(1/(1-\delta) - 1)$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$$
$$(1-\delta)\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)$$
$$\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)/(1-\delta)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \quad \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) \;=\; (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) \;=\; \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c) \;\; = \mu^2(E_c)(1/(1-\delta) - 1) \;\; = \mu^2(E_c)(\delta/(1-\delta))$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

نیم‌کره، بزرگ‌ترین
برش برای E_c^+

$$\sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A)) \le \sup_A \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, A)) \le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c^+, H))$$
$$\le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \mu^2(E_c^+ \setminus E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c)$$

$$\mu^2(E_c^+) - \mu^2(E_c) < \delta\mu^2(E_c^+)$$
$$(1-\delta)\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)$$
$$\mu^2(E_c^+) < \mu^2(E_c)/(1-\delta)$$

$$\mu^2(E_c) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta}) - \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}-\delta})$$
$$\ge \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})(1-\delta) = (1-\delta)\mu^2(E_c^+)$$

$$\mu^2(E_c^+) = \mu(C_{\pi-\vartheta_{\mathrm{GW}}+\delta})$$

$$< \mu^2(E_c)/(1-\delta) - \mu^2(E_c) = \mu^2(E_c)(1/(1-\delta) - 1) = \mu^2(E_c)(\delta/(1-\delta))$$

$$\le \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\leq \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

$$\mathsf{Opt}(G_c)$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \le \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

برای $\delta < 1/2$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \le \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H))}{\mu^2(E_c)} + O(\delta)$$

Lemma. *We have*

$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\leq \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

برای $\delta < 1/2$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H))}{\mu^2(E_c)} + O(\delta)$$

هر یال با احتمال زاویه تقسیم‌بر π

Lemma. *We have*

$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \le \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\le \quad \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H)) + \frac{\delta}{1-\delta}\mu^2(E_c).$$

$$\frac{\sup_A \mathrm{cut}(E_c, A)}{\mu^2(E_c)}$$

- برش روی E_c در مقابل برش روی E_c^+

برای $\delta < 1/2$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \le \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, H))}{\mu^2(E_c)} + O(\delta)$$

هر یال با احتمال زاویه تقسیم‌بر π

$(\vartheta_{GW} + \delta)/\pi$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos\vartheta}{\vartheta} = 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} = 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} = 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563^\circ$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} = 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\frac{\mathrm{SDP}}{\mathrm{OPT}} \geq \frac{1-\cos(\vartheta_{GW}+\delta)}{2} / \left(\frac{\vartheta_{GW}}{\pi} + O(\delta)\right)$$

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MAXCUT *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta} = 1/\alpha_{\mathrm{GW}}$$

Lemma. *We have*

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{GW}} \approx 133.563°$$

$$\mathsf{Opt}(G_c) \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta).$$

$$\mathsf{SDP} = \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2}$$

$$\frac{\mathrm{SDP}}{\mathrm{OPT}} \geq \frac{1-\cos(\vartheta_{GW}+\delta)}{2} / \left(\frac{\vartheta_{GW}}{\pi} + O(\delta)\right) = 1/\alpha_{GW} - \epsilon$$