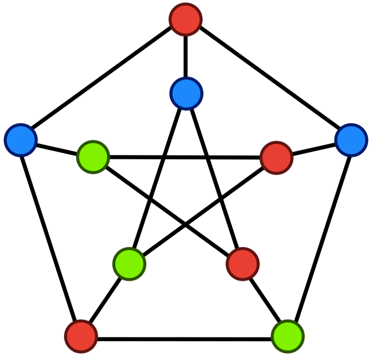
بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

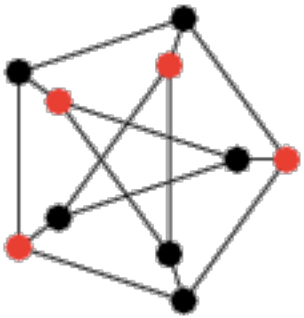
جلسه پانزدهم: رنگ‌آمیزی تقریبی

Project: People

مقدمه و تعاریف



- عدد رنگی $(\chi(G))$
  - رنگ‌آمیزی



- عدد استقلال $(\alpha(G))$
  - مجموعه مستقل

- $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$
  - هر رنگ یک مجموعه مستقل <= $\alpha(G)$

سختی

- تقریب‌ناپذیری عدد رنگی و عدد استقلال گراف
  - نمی‌توان با ضریب $n^{1-\epsilon}$

- اگر $\chi(G) = 2$؟

- اگر $\chi(G) = 3$؟
  - اگر $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$، با ۴ رنگ نمی‌توان رنگ کرد
  - اگر «فرض ۲ــ بهــ۱»، با تعداد ثابتی رنگ نمی‌توان رنگ کرد
  -

الگوریتم‌های ابتدایی

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ
  - یک راس با درجه حداقل D
    - همسایه‌ها ۲ـ رنگ‌پذیر (دوبخشی)
    - همه را با ۳ راس رنگ می‌کنیم و حذف می‌کنیم
    - حداکثر $O(n/D)$ رنگ مصرف می‌شود
    - در نهایت، درجه‌ها > D
  - بقیه با D رنگ
  - کل رنگ = $O(n/D + D)$

$$D = \sqrt{n}$$

الگوریتم‌های ابتدایی

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ (تکنیک ویگدرسون)
- تکنیک بلوم:
- $\tilde{O}(n^{0.375})$

الگوریتم

گراف ۳ـ رنگ‌پذیر ==> مجموعه مستقل با اندازه $\tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3}n)$

Theorem (The Karger–Motwani–Sudan rounding [KMS98]). *There is a polynomial-time randomized algorithm which, given a graph G on n vertices of maximum degree at most Δ and a vector 3-coloring of G, finds an independent set in G whose expected number of vertices is bounded by $\tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3}n)$.*

- بزرگ‌تر از D را با تکنینک ویگدرسون <= $O(n/D)$
- گراف باقی‌مانده، حداکثر $D^{1/3}$ بار مجموعه مستقل <= هر کدام یک رنگ
- کل رنگ = $O(n/D+D^{1/3})$
- $O(n^{1/4})$

$n=D^{3/4}$

تعریف (رنگ‌آمیزی برداری):

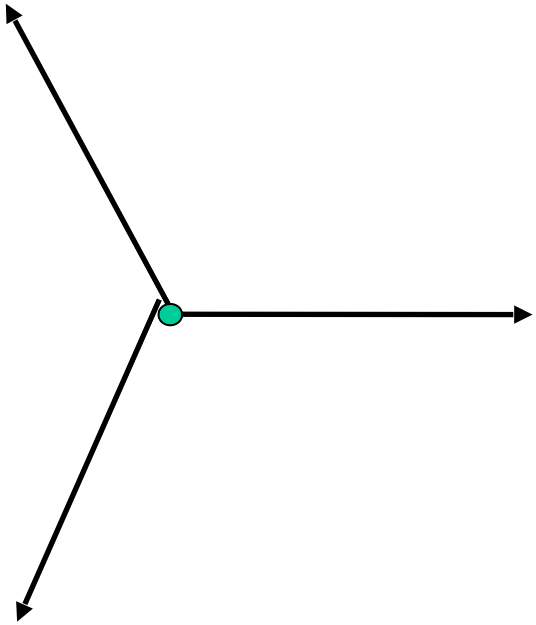
- به هر راس یک بردار
- که به ازای هر یال i و j:

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

چگونه محاسبه کنیم؟

رنگ‌آمیزی ==> رنگ‌آمیزی برداری

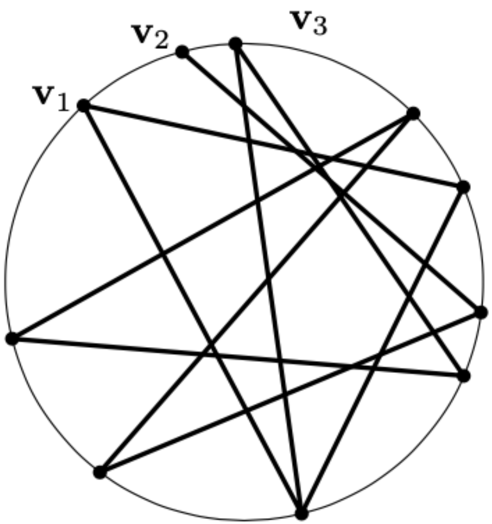
- سه رنگ‌پذیر ==> سه رنگ‌پذیر برداری

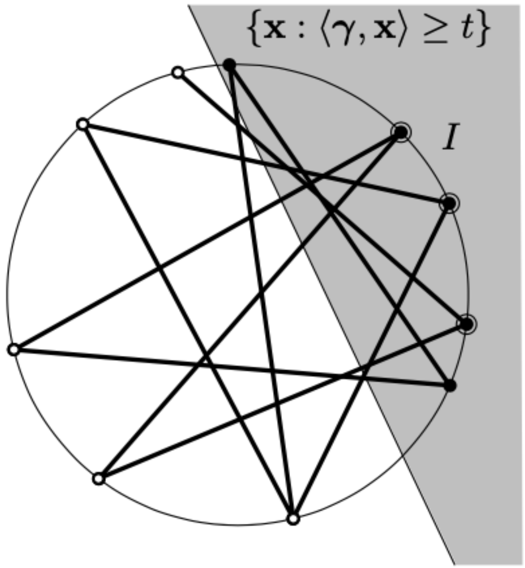


تحليل

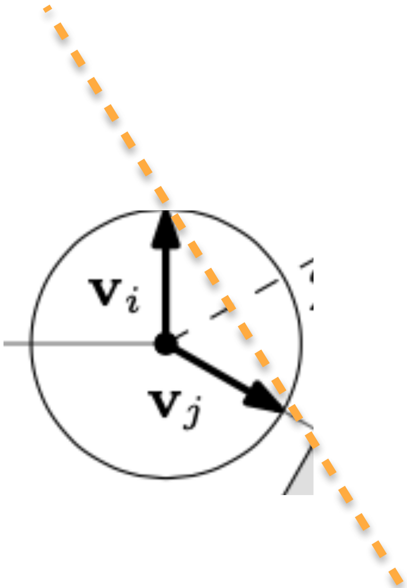
ایده

- ۳ـ رنگ‌پذیر ==(با SDP)==> ۳ـ رنگ‌پذیر برداری
- یال‌ها از هم دورند
  - با یک صفحه راس‌ها را جدا کنیم
  - مجموعه مستقل بزرگی پیدا کنیم.





تلاش ۱: بردار x با طول ۱

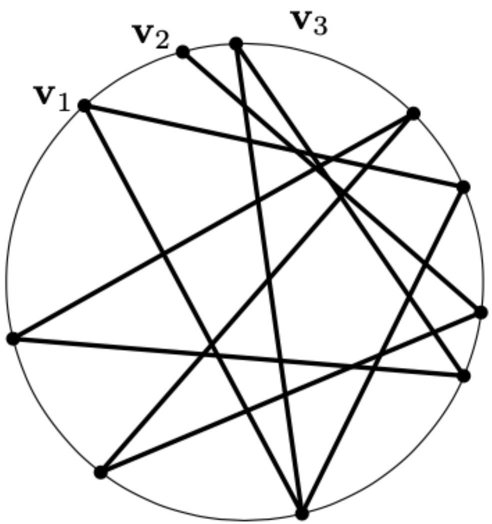


- مجموعه نقاط xv >= t شامل یال نشود
- با این t، متوسط اندازه مجموعه
  - ۱۲۰/۱۸۰ در دو بعد
  - احتمال حضور هر یال:

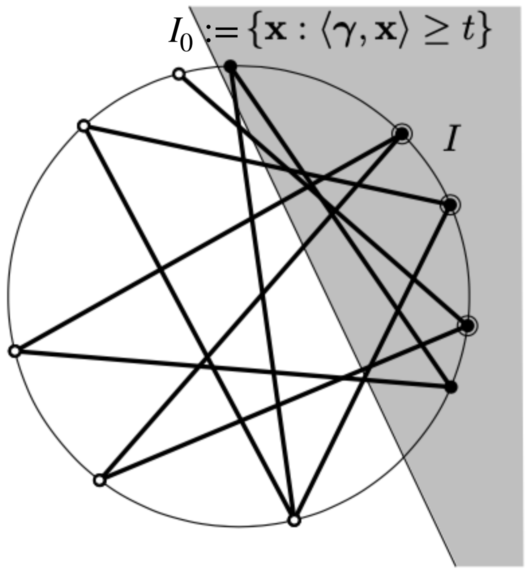
    $$(\frac{120}{180})^{n-2}$$

  - اندازه مجموعه = $n(2/3)^{n-2}$

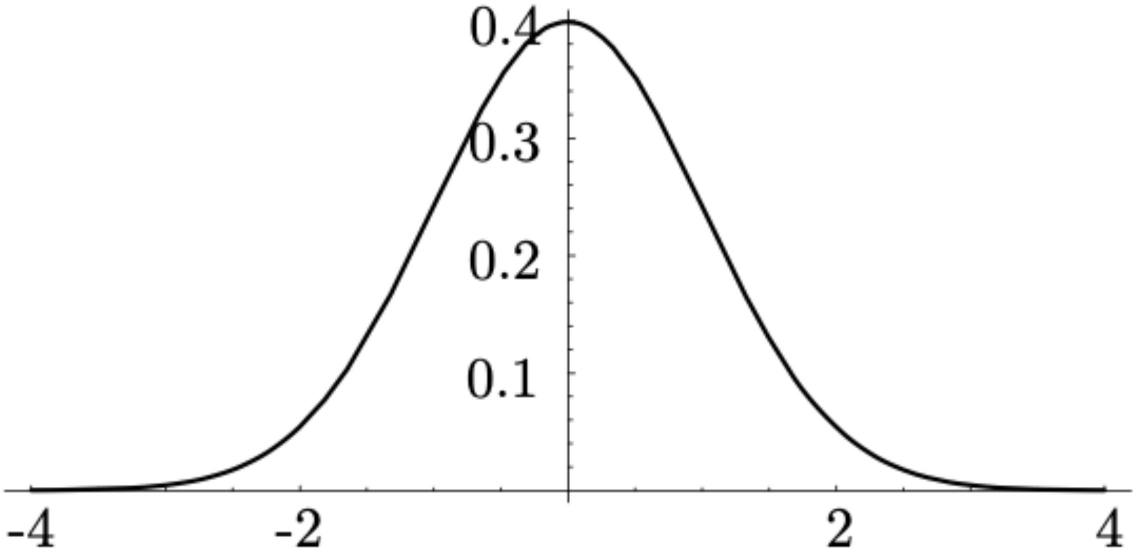
الگوریتم



$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$



$I_0 := \{\mathbf{x} : \langle \gamma, \mathbf{x} \rangle \geq t\}$
I



$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$N(t) := \mathrm{Prob}[Z \geq t] = \int_t^\infty \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Lemma. *For all $t \geq 0$, we have*

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \leq N(t) \leq \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

$$N(t) := \mathrm{Prob}[Z \geq t] = \int_t^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

توزیع نرمال در ابعاد بالا

$N(0,1)$

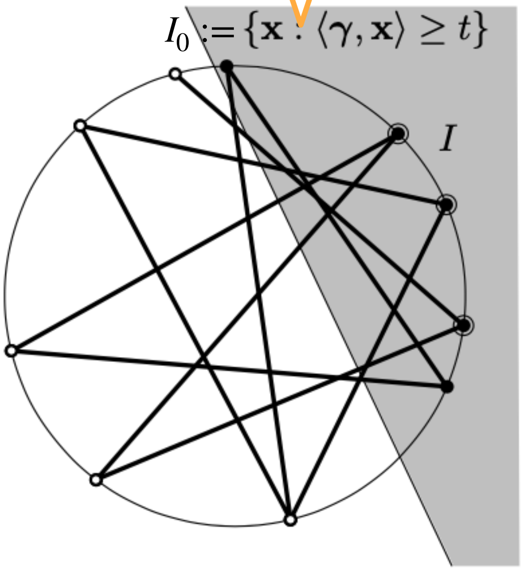
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i^2/2} = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2}.$$

در هر جهت
یک نرمال است

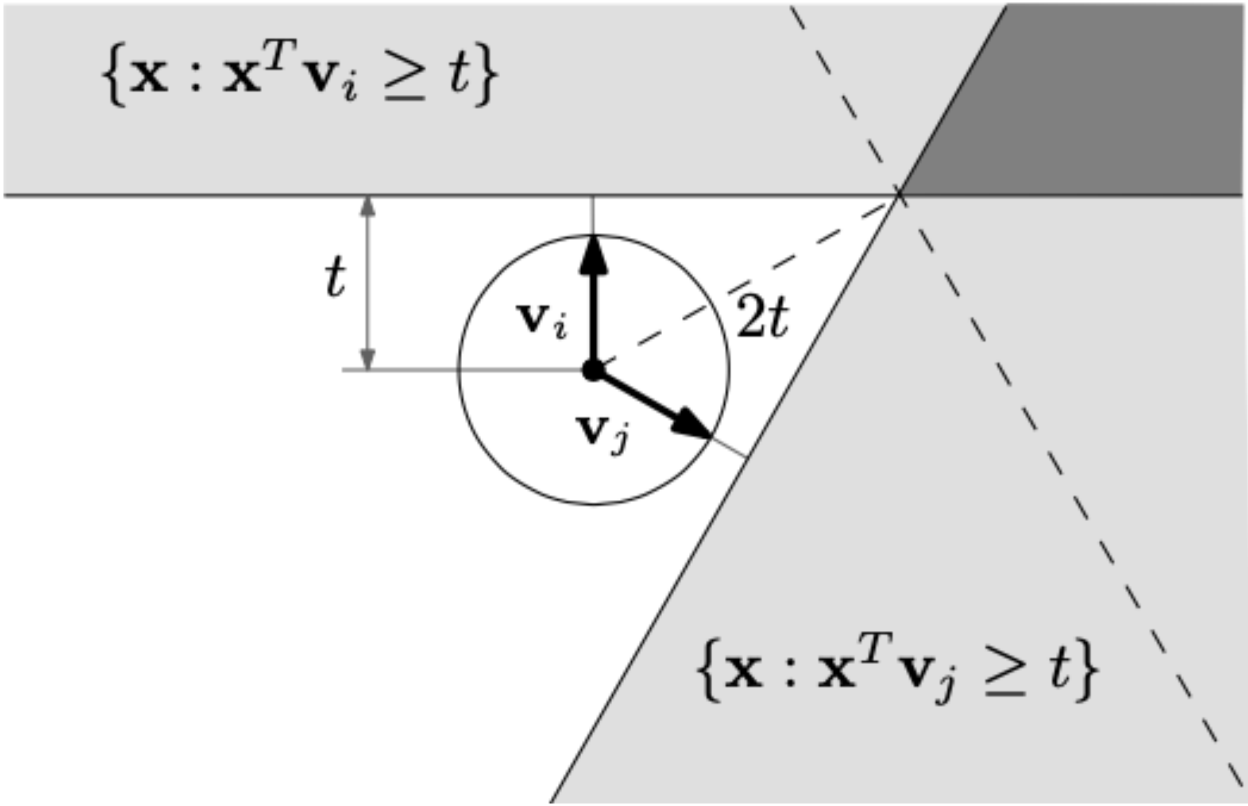
الگوریتم

$$\mathbf{E}[\,|I_0|\,] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Prob}[i \in I_0] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t\right] = nN(t)$$



$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\,|I_0 \setminus I|\,] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Prob}[i \in I_0 \text{ and } j \in I_0 \text{ for some edge } \{i,j\}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{i,j\} \in E} \operatorname{Prob}[i, j \in I_0]
\end{aligned}$$

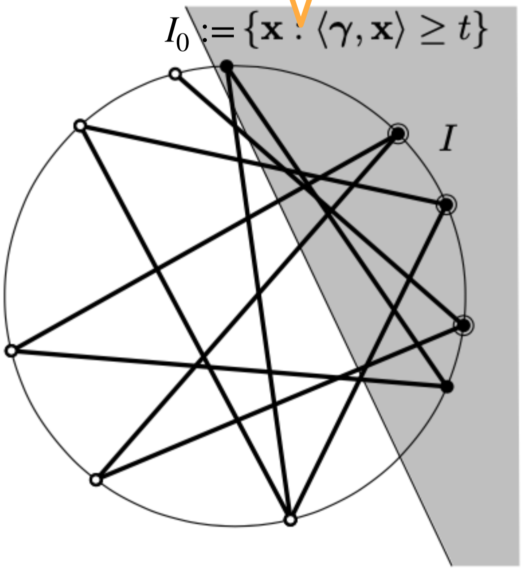
$$\mathrm{Prob}[i, j \in I_0] = \mathrm{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t \text{ and } \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_j \geq t\right] \leq N(2t)$$



تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\,|I|\,\right] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

$$\mathbf{E}\left[\,|I_0|\,\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t\right] = nN(t)$$



$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\,|I_0 \setminus I|\,\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0 \text{ and } j \in I_0 \text{ for some edge } \{i,j\}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{i,j\} \in E} \mathrm{Prob}[i, j \in I_0]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\leq N(2t)}$$

$$\leq n\Delta N(2t)$$

$$\mathbf{E}[\,|I|\,] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

Lemma. *For all* $t \geq 0$, *we have*

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \leq N(t) \leq \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

$$N(t) - \Delta N(2t) \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} - \frac{\Delta}{2t}e^{-4t^2/2}\right)$$

$$t := \left(\tfrac{2}{3}\ln \Delta\right)^{1/2}$$

$$= \;\Omega\left(\Delta^{-1/3}/\sqrt{\ln \Delta}\right)$$

$$N(t) - \Delta N(2t) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} - \frac{\Delta}{2t}e^{-4t^2/2}\right)$$

$$t := \left(\tfrac{2}{3}\ln\Delta\right)^{1/2}$$

$$2^{-t^2/2} = e^{-\ln(\Delta)/3} = \Delta^{-1/3}$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\Delta^{-1/3} - \frac{\Delta}{2t}\left(\Delta^{-1/3}\right)^4\right)$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\Delta^{-1/3} - \frac{\Delta^{-1/3}}{2t}\right)$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{2t}\right)\Delta^{-1/3}\right) = \Omega\left(\frac{1}{8t}\Delta^{-1/3}\right)$$

$$= \Omega\left(\Delta^{-1/3}/\sqrt{\ln\Delta}\right) = \tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3}n)$$

تحلیل

$$\mathbf{E}[\,|I|\,] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

$$= \tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3} n)$$

با $O(n^{0.25})$ رنگ

$D = n^{0.75}$

- بزرگ‌تر از D را با تکنینک ویگدرسون => O(n/D)
- گراف باقی‌مانده،

با $O(n^{0.25})$ رنگ

  - مجموعه مستقل با اندازه حداقل $O(n/n^{0.75})$
    - حداکثر $n^{0.25}$ بار مجموعه مستقل => هر کدام یک رنگ
- کل رنگ = $O(n/D+D^{1/3})$
  - $O(n^{1/4})$

با $O(n^{0.25})$ رنگ

گراف‌های سخت

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

تعداد = $\binom{d}{s}$

راس‌ها:

$$V(G) := \{A \subseteq [d] : |A| = s\}$$

یال‌ها:

$$E(G) := \{\{A, B\} : A, B \subseteq [d], |A \cap B| \leq t\}$$

- پارامترهای مناسب:

$$d = 8t \qquad s = 4t$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} & \text{if } i \in A \\ -d^{-1/2} & \text{if } i \notin A \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B \leq \tfrac{1}{d}(d - 4s + 4t). = \frac{1}{8t}(-4t) = -\frac{1}{2}$$

$d = 8t \text{ and } s = 4t$

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$

$\alpha(G) \leq n^{1-\delta}$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} = 3t2^{dH(8t/3t)} = 3t2^{0.9544d}$$

$$= 2^{0.9544d + \log d} \leq 2^{0.955d}$$

$$n = 2^{nH(4t/8t)} = 2^d$$

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$

$\chi(G) \geq 2^d/2^{0.955d}$

بهتر ...

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ (تکنیک ویگدرسون)
- تکنیک بلوم: $\tilde{O}(n^{0.375})$
- روش SDP:
- روش SDP + بلوم: $\tilde{O}(n^{0.25})$
- روش Karger–Motwani–Sudan : $\tilde{O}(n^{0.2111})$
- روش Chlamtac $\tilde{O}(n^{0.2072})$

پایان