بسم الله الرحمن الرحيم

# برنامهریزی نیمهمعین برای طراحی الگوریتمهای تقریبی

جلسه بیست و دوم: گرد کردن با مینیاتور (۱)





مینیاتور برای برش بیشینه

ايده مينياتور

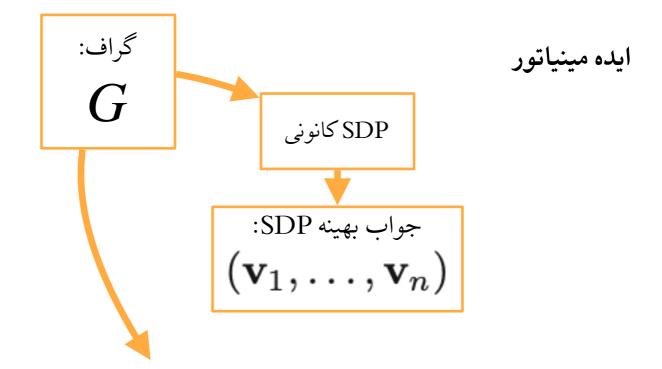
ايده مينياتور

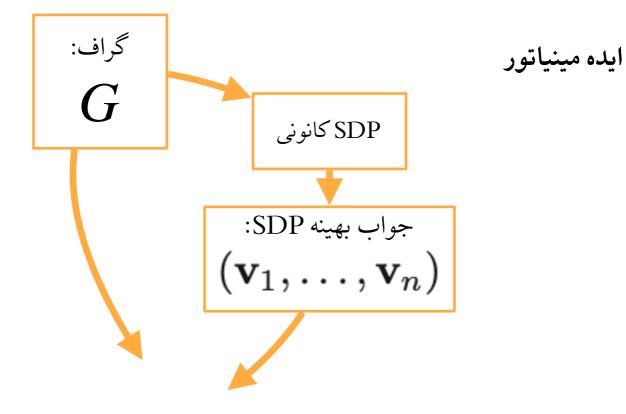
گراف: $oldsymbol{G}$ 

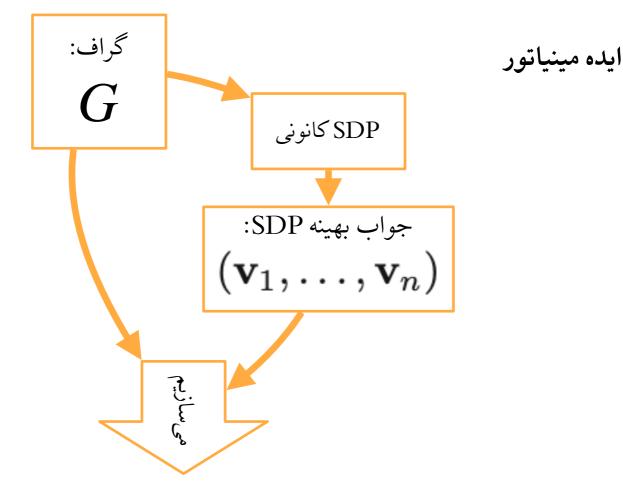


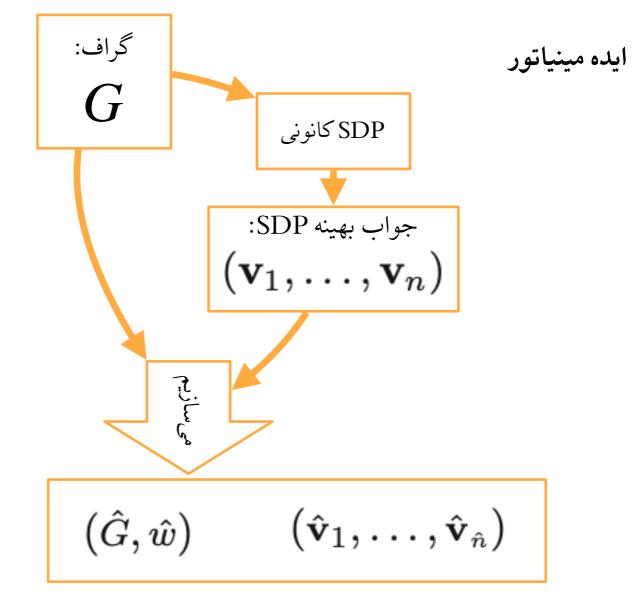


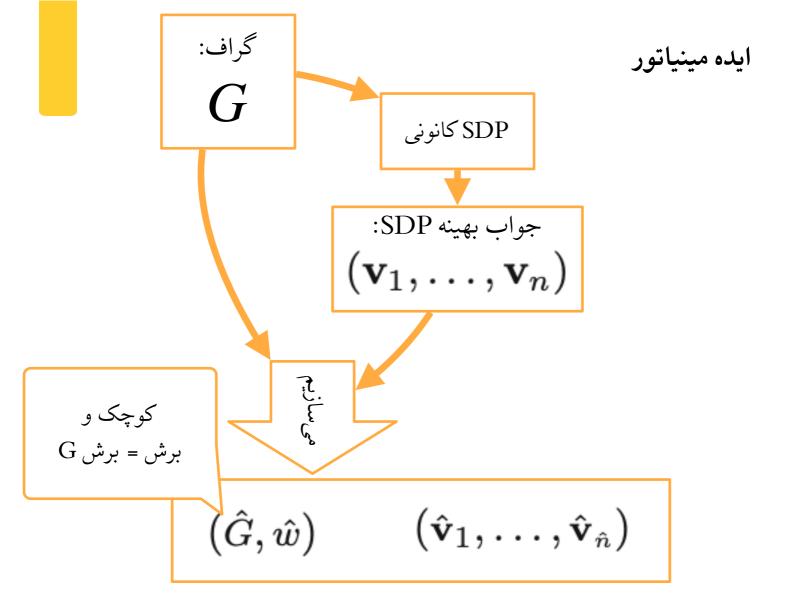
گراف: G SDP کانونی $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 

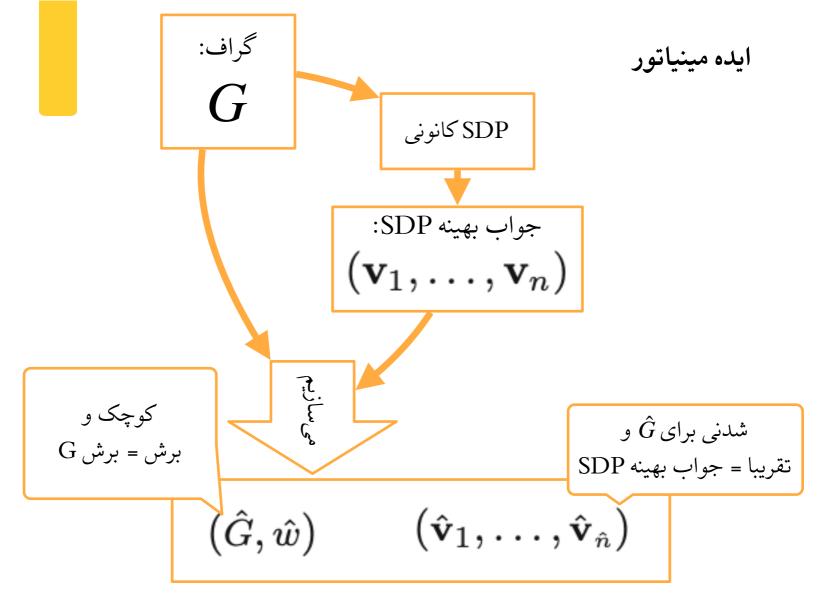


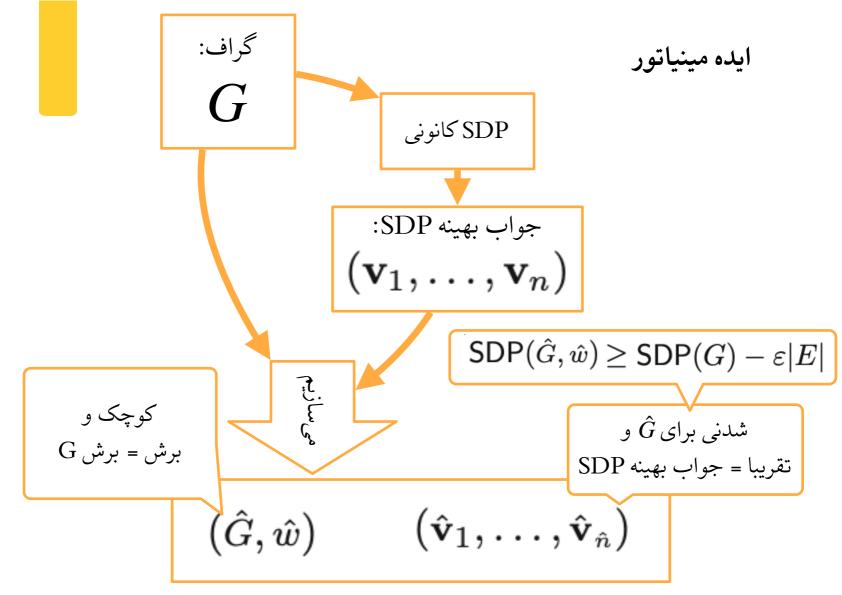












# ایده اثبات:

$$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \ge \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|$$

شدنی برای  $\hat{G}$  و  $ext{SDP}$  تقریبا = جواب بهینه

 $(\hat{G},\hat{w})$   $(\hat{\mathbf{v}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$ 

ایده اثبات:

$$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|$$

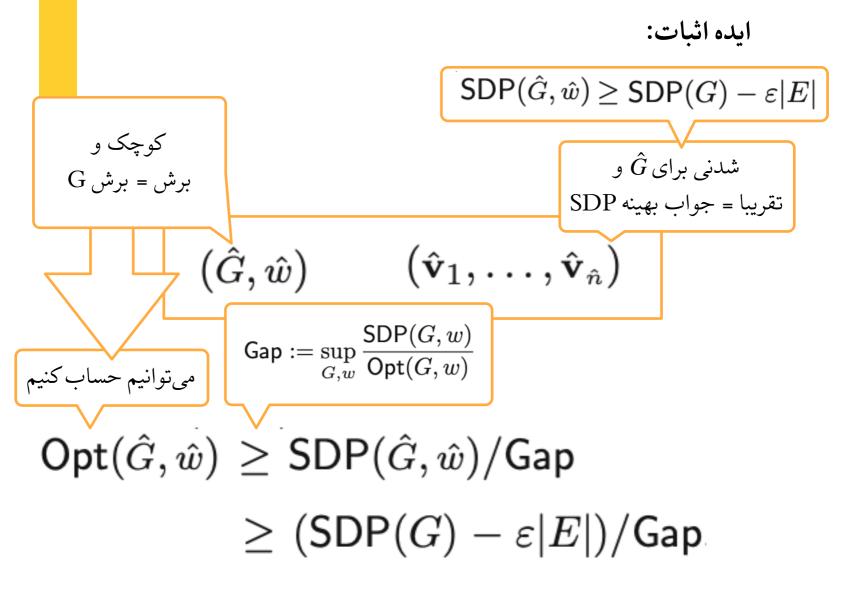
شدنی برای 
$$\hat{G}$$
 و  $ext{SDP}$  تقریبا = جواب بهینه

$$(\hat{G},\hat{w})$$
  $(\hat{\mathbf{v}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$ 

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G, w} \frac{\mathsf{SDP}(G, w)}{\mathsf{Opt}(G, w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$$

ايده اثبات:  $\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \ge \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|$ کوچک و شدنی برای  $\hat{G}$  و برش = برش G تقريبا = جواب بهينه SDP  $(\hat{\mathbf{v}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$  $(\hat{G},\hat{w})$  $\mathsf{Gap} := \sup_{G, w} \frac{\mathsf{SDP}(G, w)}{\mathsf{Opt}(G, w)}$  $\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$  $\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|)/\mathsf{Gap}$ 



مىتوانيم حساب كنيم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \, \geq \, \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|)/\mathsf{Gap}$$

مى توانيم حساب كنيم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|)/\mathsf{Gap}$$

$$\mathsf{SDP}(G) \geq \mathsf{Opt}(G) \geq \frac{1}{2}|E|$$

مىتوانيم حساب كنيم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G, w} \frac{\mathsf{SDP}(G, w)}{\mathsf{Opt}(G, w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon |E|)/\mathsf{Gap}$$

$$\mathsf{SDP}(G) \geq \mathsf{Opt}(G) \geq \frac{1}{2}|E|$$

$$\geq \mathsf{SDP}(G, w)(1 - 2\varepsilon)/\mathsf{Gap}$$



A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

A weighted graph  $(\overline{G}, \overline{w})$  and feasible SDP solution  $(\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$ 

کوچک و برش = برش G شدنی برای  $\hat{G}$  و  $\ddot{G}$  تقریبا = جواب بهینه SDP

brute

force

A large cut in G

"unfolding"

Optimal cut in  $(\overline{G}, \overline{w})$ 



Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

A weighted graph  $(\overline{G}, \overline{w})$  and feasible SDP solution  $(\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$ 

چگونه یک مینیاتور خوب بسازیم؟ (برای برش بیشینه)

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

الف) بردارها را در یک فضای با بعد کمتر (ثابت) مینشانیم

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کمتر (ثابت) مینشانیم
  - ب) چند نماینده روی کره واحد انتخاب میکنیم. تعداد نقاط کم.

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کمتر (ثابت) مینشانیم
  - ب) چند نماینده روی کره واحد
     انتخاب میکنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه میسازیم.

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کمتر (ثابت) مینشانیم
  - ب) چند نماینده روی کره واحد
     انتخاب میکنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه میسازیم.
  - برش گراف جدید = (تقریبا)= برش
     گراف قدیم

Instance:

A graph G and an SDP optimum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 

Miniature:

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کمتر (ثابت) مینشانیم
  - ب) چند نماینده روی کره واحد
     انتخاب میکنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه میسازیم.
  - برش گراف جدید = (تقریبا) = برش
     گراف قدیم
    - بردارهای جدید

**13.2.14 Lemma** (Dimension reduction). Let  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  be unit vectors,

let  $\Phi$  be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant C,

$$\frac{\Pr{\text{ob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]} \leq \frac{C}{dt^2}}{\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

تصادفی گوسی n\_بعدی

**13.2.14 Lemma** (Dimension reduction). Let  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  be unit vectors,

let  $\Phi$  be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant C,

$$\Pr[\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})] \ge t \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$egin{aligned} &\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{arPhi}(\mathbf{u})^T\mathbf{arPhi}(\mathbf{v})| \geq t \end{bmatrix} \leq rac{1}{d} \ \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}) \end{aligned}$$

sufficiently large constant 
$$C$$
,

$$|\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})| \ge t$$
  $\le \frac{C}{dt}$ 

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T\varPhi(\mathbf{v})| \geq t \end{bmatrix} \leq \frac{C}{dt^2}.}$$

$$\boxed{\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 آنگاه

**13.2.14 Lemma** (Dimension reduction). Let 
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$
 be unit vectors, let  $\Phi$  be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant  $C$ ,

let 
$$\Phi$$
 be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant  $C$ , 
$$\frac{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]}{\|\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\|} \leq \frac{C}{dt^2}.$$

تصادفی گوسی n\_بعدی

Prob  $||\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t$ 

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$
  $\mathbf{v}$   $\mathbf{v}$ 

کافی است برای u=v ثابت کنیم.

 $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  آنگاه

let 
$$\Phi$$
 be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant  $C$ , 
$$\frac{\text{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]}{\|\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\mathbf{v}\|} \leq \frac{C}{dt^2}.$$

and the probability of the contract of 
$$C$$

$$\Pr[\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})| \ge t] \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}} (\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$oxed{(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

اگر 
$$\frac{C'}{dt^2}$$
 کافی است برای  $u=v$  کابت دنیم. $P[|v^{\mathsf{T}}v-\Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)|\geq t]\leq \frac{C'}{dt^2}$  آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

$$\operatorname{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T\varPhi(\mathbf{v})| \ge t\Big]$$

$$\operatorname{ob}\left[\left|\mathbf{u}^{T}\mathbf{v}-\Phi(\mathbf{u})^{T}\Phi(\mathbf{v})\right|\geq t\right]$$

$$t C,$$

$$C$$

$$\underbrace{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right]}_{T} \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v}) \right| \geq t \rfloor \leq \overline{dt^2}. \\ \mathbf{v} = \mathbf{v} = \mathbf{v} = \mathbf{v}. \end{array}$$

$$oldsymbol{arPsi} \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$(\mathcal{O}_{V} \cap \mathcal{O}_{V}) = (\mathcal{O}_{V} \cap \mathcal{O}_{V})$$

$$\operatorname{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T \varPhi(\mathbf{v})| \ge t \right]$$

$$\operatorname{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\Big]$$

$$\frac{(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)}{\Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{u}) + \mathbf{v}}$$

 $= P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v) + u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u) - ((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \ge 2t]$ 

$$\operatorname{ob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\right]$$

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})^T \mathbf{\Phi}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \ge t \right| \le \frac{C}{W^2}.$$

$$Prob[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t] \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

یابت کنیم. 
$$u=v$$
 اگر  $\frac{C'}{dt^2}$  آنگاه  $P[|v^{\mathsf{T}}v-\Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq t] \leq \frac{C'}{dt^2}$  آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\right]$$

$$= P[|v \cdot v - \Phi(v) \cdot \Phi(v) + u \cdot u - \Phi(u) \cdot \Phi(u) - ((u - v) \cdot (u - v) - \Phi(u - v) \cdot \Phi(u - v))| \ge 2t]$$

$$\le P[|v \cdot v - \Phi(v) \cdot \Phi(v)| + |u \cdot u - \Phi(u) \cdot \Phi(u)| + |((u - v) \cdot (u - v) - \Phi(u - v) \cdot \Phi(u - v))| \ge 2t]$$

$$= P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t]$$

$$= P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v) + u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u) - ((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \ge 2t]$$

ant 
$$C$$
,
$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) | > t \end{bmatrix} < \frac{C}{C}$$

$$\underbrace{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}_{T} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$
 ::

یابت کنیم. 
$$u=v$$
 کافی است برای  $u=v$  ثابت کنیم.  $P[|v^{\mathsf{T}}v-\Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq t] \leq \frac{C'}{dt^2}$  آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\right]$$

تصادفی گوسی n\_بعدی

$$\operatorname{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^{T}\mathbf{v}-\Phi(\mathbf{u})^{T}\Phi(\mathbf{v})\right|\geq t\right]$$

$$= P[|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v) + u^{\top}u - \Phi(u)^{\top}\Phi(u) - ((u-v)^{\top}(u-v) - \Phi(u-v)^{\top}\Phi(u-v))| \ge 2t]$$

$$\le P[|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v)| + |u^{\top}u - \Phi(u)^{\top}\Phi(u)| + |((u-v)^{\top}(u-v) - \Phi(u-v)^{\top}\Phi(u-v))| \ge 2t]$$

 $\leq P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq 2t/3] + P[|u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u)| \geq 2t/3] + P[|((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \geq 2t/3]$ 

$$\frac{dt^2}{(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)}$$

$$suff$$
 ciently large constant  $C$ , 
$$\Pr{ob[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]} \leq \frac{C}{dt^2}.$$
 
$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$
 : ::•••

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

 $\text{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]$ 

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 آنگاه

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 آنگاه

 $= P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v) + u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u) - ((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \ge 2t]$ 

 $\leq P[\,|\,v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v)\,| + |\,u^{\top}u - \Phi(u)^{\top}\Phi(u)\,| + |\,((u-v)^{\top}(u-v) - \Phi(u-v)^{\top}\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$ 

 $\leq P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq 2t/3] + P[|u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u)| \geq 2t/3] + P[|((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \geq 2t/3]$ 

$$egin{align*} ext{Sufficiently large constant $C$,} & egin{align*} ext{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})^T\mathbf{\Phi}(\mathbf{v})| \geq t 
ight] \leq rac{C}{dt^2}. & egin{align*} ext{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})^T\mathbf{\Phi}(\mathbf{v})| \geq t 
ight] \leq rac{C}{dt^2}. & egin{align*} ext{Prob} \left[ |\mathbf{v}|^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v} 
ight] & egin{align*} ext{Prob} \left[ |\mathbf{v}|^T\mathbf{v}, \dots, ol$$

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

 $\leq 3 \frac{C'}{d(2t/3)^2} \leq \frac{27C'/4}{dt^2}$ 

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\text{Prob}[|\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})| \ge t]$$

 $= P[|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v) + u^{\top}u - \Phi(u)^{\top}\Phi(u) - ((u-v)^{\top}(u-v) - \Phi(u-v)^{\top}\Phi(u-v))| \ge 2t]$ 

 $\leq P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| + |u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u)| + |((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \geq 2t]$ 

 $\leq P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq 2t/3] + P[|u^{\mathsf{T}}u - \Phi(u)^{\mathsf{T}}\Phi(u)| \geq 2t/3] + P[|((u-v)^{\mathsf{T}}(u-v) - \Phi(u-v)^{\mathsf{T}}\Phi(u-v))| \geq 2t/3]$ 

 $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  آنگاه

تصادفی گوسی n\_بعدی

کافی است برای u=v ثابت کنیم.

sufficiently large constant C,

ant 
$$C$$
,

$$\underbrace{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^{T}\mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^{T}\varPhi(\mathbf{v})| \geq t\right]}_{T} \leq \frac{C}{dt^{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T \varPhi(\mathbf{v})| \geq t \right] \leq \frac{C}{dt^2}.} \\ \varPhi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}} (\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v}) \end{array}}$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

onstant 
$$C$$
,

$$\frac{\text{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}{dt^2} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$oldsymbol{arPhi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C^{\mathsf{T}}}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$\underbrace{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}_{T} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C^*}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$\operatorname{Prob}[\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})]$$

$$\underbrace{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}_{T} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$oldsymbol{arPhi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$

ge constant 
$$C$$
,
$$C = C$$

 $\frac{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\right] \le \frac{C}{dt^2}.$ 

$$oldsymbol{\Phi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$stant \ C,$$

$$\frac{\text{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t] \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$oldsymbol{\Phi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 $X := oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v})^T oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v}) = \|oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v})\|^2 = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 

$$E[X] = \frac{1}{d} \sum_{i} E[Z_i^2]$$

ge constant 
$$C$$
,
$$C = \frac{C}{C}$$

 $\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t] \le \frac{C}{dt^2}.$ 

$$egin{aligned} \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 $X := oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v})^T oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v}) = \|oldsymbol{\Phi}(\mathbf{v})\|^2 = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 

$$E[X] = \frac{1}{d} \sum_{i} E[Z_i^2] = \frac{1}{d} \sum_{i} E[Z_i^2] - E[Z_i]^2$$

rge constant 
$$C$$
,
$$C = C$$

$$\frac{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t\right] \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$
 میری  $\mathbf{x}$  نبات:

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$$
$$E[X] = \frac{1}{d} \sum_i E[Z_i^2] = \frac{1}{d} \sum_i E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = \frac{1}{d} \sum_i Var[Z_i]$$

ge constant 
$$C$$
,
$$C = \sum_{i=1}^{n} \left[ \left| \frac{1}{2} \frac{T_{i-1}}{T_{i-1}} \right| \frac{T_{i-1}}{T_{i-1}} \right] \leq C$$

$$\frac{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.}{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\gamma}_{t}^T\mathbf{v} - \boldsymbol{\gamma}_{t}^T\mathbf{v}\right)}$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \tilde{Z}_i^2$$
$$E[X] = \frac{1}{d} \sum_{i} E[Z_i^2] = \frac{1}{d} \sum_{i} E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = \frac{1}{d} \sum_{i} Var[Z_i] = 1$$

$$\underbrace{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}_{T} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C^*}{dt^2}$$
 حکم جدید:

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). Let  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  be unit vectors,

ant 
$$C$$
,

$$\frac{\text{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}{dt^2} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$oldsymbol{arPsi} \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$P[|E[X] - X| \ge t]$$

ant 
$$C$$
,

$$\frac{\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]}{dt^2} \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

ر تصادفی گوسی 
$$n$$
 بعدی  $X$ 

ثبات: 
$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 •

$$X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$P[|E[X] - X| \ge t]$$

ant 
$$C$$
,

arge constant 
$$C$$
, 
$$\text{Prob} \Big[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})| \ge t \Big] \le \frac{C}{dt^2}.$$

$$egin{aligned} & \operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - oldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})^Toldsymbol{\Phi}(\mathbf{v})| \geq t ig] \leq rac{1}{dt^2} \ oldsymbol{\Phi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 $X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 

$$P[|E[X] - \dot{X}| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2$$

sufficiently large constant 
$$C$$
,
$$\Pr[\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})] > t] < \frac{C}{C}$$

$$egin{align} egin{align} ext{Prob} ig[ |\mathbf{u}^T\mathbf{v} - oldsymbol{arPsi}(\mathbf{u})^Toldsymbol{arPsi}(\mathbf{v})| \geq t ig] \leq rac{C}{dt^2}. \ oldsymbol{arPsi}(oldsymbol{v}) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}). \end{array}$$

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
  $X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 

$$P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$$

sufficiently large constant 
$$C$$
,
$$C = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{1-T_{i-1}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-T_{i-1}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-T_{i-1}} \right) \right] < C$$

$$\frac{\operatorname{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T \varPhi(\mathbf{v})| \geq t \right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}} (oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v}).$$
 میری  $\mathbf{v}$  میری  $\mathbf{v}$  میری  $\mathbf{v}$  میری  $\mathbf{v}$ 

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
  $X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 

$$P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$$
 نامساوی چبیشف

ently large constant 
$$C$$
,
$$\Pr[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})| > t] < \frac{C}{C}$$

$$\frac{\Pr{\text{ob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]} \leq \frac{C}{dt^2}}{\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

نامساوي چبيشف

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 
$$X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2 \qquad E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$$

ciently large constant 
$$C$$
,
$$C = \begin{bmatrix} C & C \\ C & C \end{bmatrix}$$

 $\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t] \le \frac{C}{dt^2}.$ 

$$egin{aligned} \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v}) \end{aligned}$$

نبات: 
$$X$$
 تصادفی گوسی  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  حکم جدید:  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t]$ 

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 
$$X = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$$
 
$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$$

نامساوي چبيشف

efficiently large constant 
$$C$$
,
$$\Pr[\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})] > t] < \frac{C}{C}$$

$$egin{aligned} & \operatorname{Prob}ig[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{arPhi}(\mathbf{u})^T\mathbf{arPhi}(\mathbf{v})| \geq tig] \leq rac{C}{dt^2}. \ & \Phi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}) \end{aligned}$$

اثبات: 
$$X$$
 تصادفی گوسی  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  محکم جدید:  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t]$ 

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 
$$X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$$
 
$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$$

نامساوي چبيشف

let 
$$\Phi$$
 be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant  $C$ ,

sufficiently large constant 
$$C$$
, 
$$\frac{\operatorname{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \varPhi(\mathbf{u})^T \varPhi(\mathbf{v})| \geq t \right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$ext{Prob}ig[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{arPhi}(\mathbf{u})^T\mathbf{arPhi}(\mathbf{v})| \geq tig] \leq rac{C}{dt^2}.$$
 $ext{Prob}ig[|\mathbf{v}^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}| + r^2 \mathbf{v}]$ 

$$egin{aligned} & \operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})^T\mathbf{\Phi}(\mathbf{v})| \geq t \end{bmatrix} \leq rac{C}{dt^2}. \ & \mathbf{\Phi}(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}) \end{aligned}$$
 تصادفی گوسی  $\mathbf{X}$ 

$$P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$$
 حکم جدید:  $\mathbf{Z}_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}$ .

$$Z_i := oldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$$
 $X = rac{1}{d} \sum_{i=1}^d Z_i^2$ 
 $E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$ 
 $P[|E[X] - X| \ge t] \le \operatorname{Var}[X]/t^2 = rac{1}{d^2} \sum_{i=1}^d \operatorname{Var}[Z_i^2]/t^2$ 
 $- rac{1}{2d}$ 

let 
$$\Phi$$
 be the random linear map as above, and let  $t \geq 0$ . Then, for a sufficiently large constant  $C$ ,

$$\Pr[\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})] > t] \leq \frac{C}{C}$$

$$S_{t} = \frac{\text{Sufficiently large constant } C,}{\text{Prob} \left[ |\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{v})| \ge t \right] \le \frac{C}{dt^2}.}$$
 $S_{t} = \frac{1}{\sqrt{dt}} (\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$ 

$$\frac{\Pr{\text{ob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t]} \leq \frac{C}{dt^2}.}{\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

$$\operatorname{Prob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t] \leq \frac{C}{dt^2}.$$
 $(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$ 
 $\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 
 $\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 

$$|\mathbf{v}| = \frac{1}{\sqrt{d}} (\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$
  $|\mathbf{v}| = \frac{1}{\sqrt{d}} (\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$   $|\mathbf{v}| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$   $|\mathbf{v}| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ 

$$P[v] = \frac{1}{\sqrt{d}} (\gamma_1^T \mathbf{v}, \dots, \gamma_d^T \mathbf{v})$$
  $Y = \frac{1}{\sqrt{d}} (\gamma_1^T \mathbf{v}, \dots, \gamma_d^T \mathbf{v})$   $Y = \frac{1}{\sqrt{d}} (\gamma_1^T \mathbf{v}, \dots, \gamma_d^T \mathbf{v})$ 

اثبات: 
$$X$$
 تصادفی گوسی  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  حکم جدید:  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t]$ 

 $E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$ 

 $=\frac{1}{d^2t^2}2d=\frac{2}{dt^2}$ 

اثبات: 
$$X$$
 تصادفی گوسی  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \geq t] \leq \frac{C'}{dt^2}$  هم جدید:  $Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{v}.$ 

 $P[|E[X] - X| \ge t] \le \text{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d} \text{Var}[Z_i^2]/t^2$ 

نامساوی چبیشف

 $X = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} Z_i^2$ 

اثبات: 
$$X$$
 تصادفی گوسی  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t] \le \frac{C'}{dt^2}$  حکم جدید:  $P[|v^{\mathsf{T}}v - \Phi(v)^{\mathsf{T}}\Phi(v)| \ge t]$ 

$$\frac{\Pr{\text{ob}[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \ge t]} \le \frac{C}{dt^2}}{\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})}$$

$$arPhi(v) := rac{1}{\sqrt{d}}(oldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{v}, \dots, oldsymbol{\gamma}_d^T \mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n\_بعدی



ر ا

ر

**Lemma.** For every d and every  $\delta \in (0,1)$ , there exists a set  $N \subseteq S^{d-1}$  that is  $\delta$ -dense in  $S^{d-1}$  (that is, for every  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$  there exists  $\mathbf{z} \in N$  with  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$ ), and  $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$ .

اثبات

- اثبات:
- $\bullet$  حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن

- اثبات:
- ullet حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن
  - $-\delta$  مجموعه حاصل  $\delta$

- اثبات:
- ullet حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل  $\delta$ ے چگال است
  - دایره به شعاع  $\frac{\delta}{2}$  حول نقطهها با هم اشتراک ندارد

- اثبات:
- $\bullet$  حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل  $\delta$ ے چگال است
  - دایره به شعاع  $\frac{\delta}{2}$  حول نقطهها با هم اشتراک ندارد
    - تعداد نقطهها <=

ر (

**Lemma.** For every d and every  $\delta \in (0,1)$ , there exists a set  $N \subseteq S^{d-1}$  that is  $\delta$ -dense in  $S^{d-1}$  (that is, for every  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$  there exists  $\mathbf{z} \in N$  with  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$ ), and  $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$ .

اثبات

- $\bullet$  حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل  $\delta$  چگال است
  - دایره به شعاع  $\frac{\delta}{2}$  حول نقطهها با هم اشتراک ندارد

$$V_n(R) = rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)}R^n$$

$$\bullet$$
 حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از  $\delta$  بود را اضافه کن

مجموعه حاصل 
$$\delta$$
ے چگال است

دایره به شعاع 
$$\frac{\delta}{2}$$
 حول نقطهها با هم اشتراک ندارد

$$\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{d} / \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{d} \Rightarrow \text{ is alice in the proof of } \frac{2}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} = \frac{2}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

$$1 + \frac{\delta}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$V_n(R) = rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)}R^n$$

• حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصلهاش تا همه بیش از 
$$\delta$$
 بود را اضافه کن

مجموعه حاصل 
$$\delta$$
ے چگال است

دایره به شعاع 
$$\frac{\delta}{2}$$
 حول نقطهها با هم اشتراک ندارد

$$(\frac{3}{\delta})^d \geq \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} (\frac{3}{2})^d / \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} (\frac{\delta}{2})^d \Rightarrow$$
قعداد نقطهها  $\frac{3}{\delta}$ 

$$V_n(R) = rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)}R^n$$

$$V_n(R) = rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)}R$$



 $\delta > 0$  از روی  $\epsilon$  یک

$$ullet$$
 از روی  $\epsilon$  یک  $0<1$ 

$$\delta > 0$$
 از روی  $\epsilon$  یک  $\delta > 0$  از روی  $\delta$  یک  $\delta < \delta$  که  $\delta < \delta < \delta$  از روی  $\delta < \delta < \delta < \delta < \delta$  که  $\delta < \delta < \delta < \delta < \delta < \delta < \delta$ 

$$\delta > 0$$
 یک  $\epsilon$ 

$$C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$$
 از روی  $\delta$  یک  $\hat{d}$  که  $\delta$ 

مجموعه 
$$\delta$$
ے چگال روی کره واحد  $\hat{d}$ بعدی

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}} \quad \bullet$$

 $\delta > 0$  از روی  $\epsilon$  یک

$$C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$$
 که  $\hat{d}$  که  $\delta$ 

مجموعه 
$$\delta$$
ے چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}} \quad \bullet$$

جواب SDP را در فضای  $\hat{d}$  بعدی مینشانیم

$$\mathbf{v}_i^* := arPhi(\mathbf{v}_i)$$

$$\delta > 0$$
 یک  $\epsilon$ 

$$C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$$
 از روی  $\delta$  یک  $\hat{d}$  که  $\delta$ 

مجموعه 
$$\delta$$
ے چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}} \quad \bullet$$

جواب SDP را در فضای  $\hat{d}$  بعدی مینشانیم  $SDP = - \hat{d}$ 

$$\mathbf{v}_i^* := arPhi(\mathbf{v}_i)$$

 $\|\mathbf{v}_i^*\| 
otin [1-\delta,1+\delta]$  راس i خراب شده اگر

$$\delta > 0$$
 از روی  $\epsilon$  یک

$$C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$$
 از روی  $\delta$  یک  $\hat{d}$  که

مجموعه 
$$\delta$$
ے چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}} \quad \bullet$$

جواب SDP را در فضای  $\hat{d}_-$ بعدی مینشانیم $\mathbf{v}_i^* := \mathbf{\Phi}(\mathbf{v}_i)$ 

- $\|\mathbf{v}_i^*\| 
  otin [1-\delta,1+\delta]$  راس i خراب شده اگر
- میگوییم یال i و j خراب شده اگر i خراب شده اگر i خراب شده اگر i خراب شده i میگوییم یال i و i خراب شده i خراب: i مجموعه یال های خراب: i
  - $\delta$  احتمال خراب شدن یک یال کمتر مساوی

$$\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^{T}\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^{T}\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^{2}}$$

$$\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$$

 $\hat{d}$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک  $\delta > 0$ 

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی  $\delta$ 

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب  $\bullet$ 

و میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j^* > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده اگر  $i$ 

 $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب

 $\hat{d}$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP را در فضا

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  میگوییم یال  $i$  و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  میگوییم یال  $i$  و  $i$  خراب شده

• مجموعه یالهای خراب: F

$$\mathbf{E}[|F|] \leq \delta |E|$$

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP را در فضا

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j^* > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده م

F: مجموعه یالهای خراب:

$$\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq rac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$
 نامساوی مارکوف: •

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی  $\delta$ 

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP را در فضا

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $v_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $j$  خراب شده

$$\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq rac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$
 نامساوی مارکوف: •

$$|F| \ge 2\delta |E|$$
، ۱/۲، با احتمال کمتر از

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک  $\delta > 0$ 

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $v_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $j$  خراب شده

$$\mathbf{E}[|F|] \leq \delta |E|$$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq rac{\mathrm{E}(X)}{a} \cdot rac{\mathrm{E}(X)}{a}$$
 نامساوی مارکوف: •

$$|F| \ge 2\delta |E|$$
، ۱/۲، کمتر از ۱/۲،

$$|F| \geq 2\delta |E|$$
 نشاندن را اینقدر تکرار میکنیم که داشته باشیم  $=$ 

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$ چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب  $\bullet$ 

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $v_j^* - v_j^T v_j^* - v_i^T v_j > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده

 $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب

$$\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq rac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$
 نامساوی مارکوف:  $ullet$ 

$$|F| \ge 2\delta |E|$$
، ۱/۲، متمال کمتر از ۱/۲، •

$$|F| \geq 2\delta |E|$$
 نشاندن را اینقدر تکرار میکنیم که داشته باشیم  $\bullet$ 

 $\hat{d}$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک  $\delta > 0$ 

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی  $\delta$ 

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده شده

- $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب
  - $|F| \le 2\delta |E|$

 $\hat{d}$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب  $\bullet$ 

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j^* > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده م

 $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب

$$|F| \le 2\delta |E|$$

vi\* و راسهای خراب شده و راسهای F

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک  $\delta > 0$ 

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی  $\delta$ 

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j^* > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده م

 $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب

$$|F| \le 2\delta |E|$$
 •

- vi\* و راسهای خراب شده و راسهای G\*
  - گراف \*\*G از روی \*G

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک  $\delta > 0$ 

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $v_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب شده

- $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب
  - $|F| \le 2\delta |E|$
- vi\* و راسهای خراب شده و راسهای G\*
  - گراف \*\*G از روی \*G
  - راس  $vi^*$  تبدیل به  $vi^*$  (نزدیکترین نقطه از  $vi^*$ )

$$\hat{d}$$
 یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی  $\delta$ 

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  میگوییم یال  $i$  و  $j$  خراب شده اگر فراب شده اگر میگوییم یال  $i$  میگوی میگوی از میگوی میگوی این میگوی این میگوی میگوی این میگو

- $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب
  - $|F| \le 2\delta |E|$
- G\*: گراف پس از حذف F و راسهای خراب شده و راسهای \*vi
  - گراف \*\*G از روی \*G
  - راس  $vi^*$  تبدیل به  $vi^*$  (نزدیکترین نقطه از  $\hat{N}$ )
    - عداكثر  $\delta$  فاصله  $\delta$  vi فاصله  $\delta$  فاصله  $\delta$

$$\hat{d}$$
 از روی  $\epsilon$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

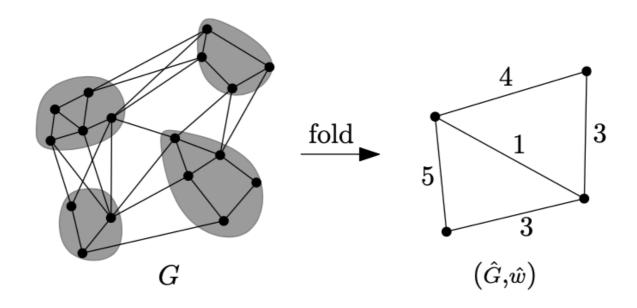
$$\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
مجموعه  $\delta$  چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب  $\bullet$ 

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  اگر  $v_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $j$  خراب شده

- $\mathbf{F}$ : مجموعه یالهای خراب
- $|F| \le 2\delta |E|$  •
- - $(\hat{N})$  تبدیل به \*\* (نزدیک ترین نقطه از vi\*
    - فاصله \*vi و \*vi حداکثر 2δ
- یکی کردن راسهای هم مقصد، وزن یال = تعداد یالهای بین دو راس

- vi\* و راسهای خراب شده و راسهای G\*
  - گراف \*\*G از روی \*G
  - راس  $vi^*$  تبدیل به  $vi^*$  (نزدیکترین نقطه از  $\hat{N}$ )
    - vi\* عداكثر 2δ
       فاصله \*vi و \*\* vi
- تولید  $\hat{G}$  یکی کردن راسهای هم مقصد، وزن یال  $(\hat{w})$  = تعداد یالهای بین دو راس



$$\hat{d}$$
 از روی  $\epsilon$  یک  $\delta > 0$  و از روی  $\delta$  یک

$$\hat{n}:=|\hat{N}|\leq \left(rac{3}{\delta}
ight)^d$$
مجموعه  $\delta$ چگال روی کره واحد  $\hat{d}$  بعدی

$$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
را در فضای  $\hat{d}$ بعدی مینشانیم SDP جواب

میگوییم یال 
$$i$$
 و  $j$  خراب شده اگر  $\delta$  حراب شده اگر  $|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j| > \delta$  یا راس  $i$  یا راس  $i$  خراب

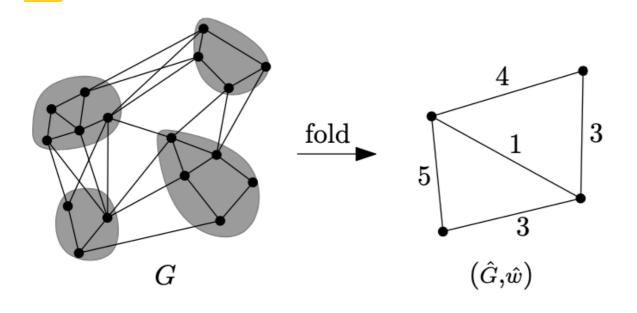
$$(|F| \le 2\delta |E|)$$
 مجموعه يالهاى خراب = F

گراف وزندار 
$$(\hat{G}, \hat{w})$$
 از روی گسسته سازی  $G^*$  با نقاط  $\hat{V}$  ( $G^*$ ) و سپس تا زدن  $\hat{v}_i$  بردارهای  $\hat{v}_i$  از روی گسسته سازی  $\hat{v}_i^*$  با نقاط  $\hat{V}$ 

$$(\hat{G}, \hat{w})$$
 یک جواب شدنی برای SDP برای  $\hat{v}_i$  •

$$(1 - \hat{v}_{\hat{i}}^{\mathsf{T}} \hat{v}_{\hat{j}})/2$$

اندازهشان = ۱  $SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\hat{v}_{\hat{i},\hat{j}}} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}} (1 - \hat{v}_{\hat{i}}^{\mathsf{T}} \hat{v}_{\hat{i}})/2$  $\{\hat{i},\hat{j}\}\in E(\hat{G})$ 



$$\mathsf{SDP}(G)' > \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} (1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}}) / 2$$

## پایان