بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه دهم: آیا برنامه‌ریزی هم‌مثبت الگوریتم سریع دارد؟

Project: People

Cone Programming

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & \mathbf{x} \in K. \end{array}
$$

؟ الگوریتم سریع

SDP

$$
\begin{array}{ll} \text{maximize} & C \bullet X \\ \text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}
$$

الگوریتم سریع

LP

$$
\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}
$$

الگوریتم سریع

ماتریس هم‌مثبت و کاملا مثبت

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

مشاهده:

$$\mathrm{PSD}_n \subsetneq \mathrm{COP}_n$$

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

مشاهده:

$$\mathrm{PSD}_n \subsetneq \mathrm{COP}_n$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.3 Lemma. *The set COP_n is a closed convex cone in SYM_n.*

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.3 Lemma. *The set COP_n is a closed convex cone in SYM_n.*

- بسته
- کنج
- محدب

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

- ترکیب محدب این ماتریس‌ها
  - جمع این ماتریس‌ها

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

- ترکیب محدب این ماتریس‌ها
  - جمع این ماتریس‌ها

ماتریس M **کاملا مثبت**: اگر بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

که $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k]$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k]$$

$$\sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i]B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{pmatrix} & j \end{array}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \left(\begin{matrix} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{matrix} \right) & j \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_t \end{pmatrix}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{pmatrix} & j \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} k & \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ x_i[k] \\ \cdots \end{pmatrix} & i \end{array}$$

$$A = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_t)$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & x_i[j] & \\ & \cdots & \end{pmatrix} & j \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} k & \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & x_i[k] & \\ & \cdots & \end{pmatrix} & i \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_t \end{pmatrix} \qquad B = A^\top$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{COP}_n^*$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

برای کاملا مثبت بودن، تعداد ثابتی جمله کافی است.

7.1.5 Lemma. *M is completely positive if and only if there are $\binom{n+1}{2}$ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\binom{n+1}{2}} \in \mathbb{R}^n$ such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T.$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

POS_n کنج محدب بسته است.

- کنج $\lambda M = \sum_{i=1}^{\ell} (\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)(\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)^T$
- محدب
- بسته ؟؟؟

کنج محدب بسته بودن ماتریس‌های کاملا مثبت

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$$\mathbf{a}_i^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

کنج محدب بسته بودن لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

کنج محدب <u>بسته</u> بودن لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai

کنج محدب <u>بسته</u> بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$ حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai
- حد قطر $AA^\top$ = قطر M (حد تابع پیوسته = تابع پیوسته حد)

کنج محدب بسته بودن لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$ حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai
- حد قطر $AA^\top$ = قطر M (حد تابع پیوسته = تابع پیوسته حد)
- حد بقیه درایه‌ها

$$m_{ij} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_j^{(k)} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

POS_n کنج محدب بسته است.

- کنج $\qquad \lambda M = \sum_{i=1}^{\ell} (\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)(\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)^T$
- محدب
- بسته ؟؟؟

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$

- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  -

- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n}$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0}$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
- معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
- $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$
  - بردار نامنفی x هست که $x^{\top} M x < 0$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$
  - بردار نامنفی x هست که $x^\top M x < 0$
  - بردار نامنفی x هست که $M \bullet x x^\top < 0$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

Cone Programming

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

?

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی هم‌مثبت

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & C \bullet X \\ \text{subject to} & A(X) = b \\ & X \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

SDP

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & C \bullet X \\ \text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی کاملا مثبت

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & C \bullet X \\ \text{subject to} & A(X) = b \\ & X \in \mathrm{POS}_n \end{array}$$

LP

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

الگوریتم سریع