دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

برنامه‌ریزی صحیح مجموعه پوشش رأسی کمینه و مجموعه مستقل رأسی بیشینه و تعریف جواب شدنی پایه‌ای

جلسه پنجم

نگارنده: فاطمه شاه‌علی

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه گذشته، تعریف دقیقی برای مسائل برنامه‌ریزی صحیح ارائه شد و نشان دادیم اینگونه مسائل در کلاس NP-Hard قرار دارند. بنابراین، نمی‌توان آن‌ها را در زمان چندجمله‌ای برحسب تعداد متغیرها حل کرد. سپس، به عنوان مثالی برای کاربرد برنامه‌ریزی صحیح، مسئله پیدا کردن تطابق کامل با وزن بیشینه در گراف دوبخشی مطرح شد که نشان دادیم با روش آرام‌سازی، می‌توان آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرده، در نتیجه در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

۲ مسئله کوچکترین پوشش رأسی[۱]

به ازای هر رأس گراف، یک متغیر در نظر می‌گیریم (x_v) که می‌تواند مقادیر صفر یا یک را داشته باشد. مقدار صفر، نشان دهنده‌ی عدم انتخاب آن رأس و مقدار یک، به معنای انتخاب آن رأس در مجموعه مورد نظر است. هدف این است که تعداد رأس‌های انتخابی (به طوری که شرایط مسئله را برآورده کند)، کمینه باشد. به عنوان قید، باید مشخص کنیم به ازای هر یال، حداقل یکی از رأس‌های متصل به آن انتخاب شده باشد. بنابراین،

[۱] پوشش رأسی، مجموعه‌ای از رئوس یک گراف است؛ به طوری که هر یال از گراف را در نظر بگیریم، حداقل یکی از دو رأس آن، در این مجموعه قرار داشته باشد.

برنامه‌ریزی صحیح به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\ \text{که} \quad & x_u + x_v \geq 1, \quad for\, every\, edge\, \{u,v\} \in E \\ & x_v \in \{0,1\}, \quad for\, all\, v \in V \end{aligned}$$

اما می‌دانیم برنامه‌ریزی صحیح را نمی‌توان با سرعت زیاد حل کرد؛ بنابراین باید آن را آرام سازی کرده، قید $x_v \in \{0,1\}$ را به $0 \leq x_v \leq 1$ تغییر دهیم تا یک برنامه‌ریزی خطی حاصل شود. با این کار، ممکن است مقادیر جواب صحیح نباشد و این برای ما مطلوب نیست.

این مسئله را چگونه حل کنیم؟

پیدا کردن پوشش رأسی کمینه، یک مسئله از نوع NP-hard است و نمی‌توان به راحتی آن را حل کرد. اگر برای حل آن از الگوریتم حریصانه استفاده کنیم، ممکن است جواب به‌دست آمده با مقدار بهینه بسیار فاصله داشته باشد. اما بر اساس همین برنامه‌ریزی خطی تولید شده، یک الگوریتم ۲ـ تقریب[۲] وجود دارد که همیشه یک پوشش رأسی با اندازه حداکثر دو برابر پوشش رأسی کمینه پیدا می‌کند.

اگر برنامه‌ریزی خطی به دست آمده از آرام سازی برنامه‌ریزی صحیح را مطابق با زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\ \text{که} \quad & x_u + x_v \geq 1, \quad for\, every\, edge\, \{u,v\} \in E \\ & 0 \leq x_v \leq 1, \quad for\, all\, v \in V \end{aligned}$$

طبق عبارت $x_u + x_v \geq 1$، می‌دانیم پوشش رأسی مورد نظر، هر یال از گراف را حداقل یک واحد پوشانده است؛ بنابراین برای هر یال، رأسی وجود دارد که مقدار نسبت داده شده به آن حداقل $\frac{1}{2}$ است. حال اگر تنها رئوسی را برای مجموعه جواب انتخاب کنیم که مقدارشان حداقل $\frac{1}{2}$ است،کل یال‌های گراف با این مجموعه پوشانده خواهد شد. اکنون به اثبات ۲ـ تقریب بودن این الگوریتم می‌پردازیم.

می‌دانیم با آرام‌سازی برنامه‌ریزی صحیح، مجموعه جواب، از اعداد صحیح به اعداد حقیقی گسترش می‌یابد و چون مسئله کمینه سازی است، جواب برنامه‌ریزی خطی، کوچکتر یا مساوی با جواب برنامه‌ریزی صحیح است. اگر x^* را یک جواب بهینه برای مسئله برنامه‌ریزی خطی و $\tilde{x}$ را یک جواب بهینه برای برنامه‌ریزی صحیح در نظر بگیریم، مجموعه S_{LP} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_{LP} = \{v \in V : x_v^* \geq \frac{1}{2}\}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |S_{LP}| &= \sum_{v\in S_{LP}} 1 \leq \sum_{v\in V} 2x_v^* \\ |S_{LP}| &\leq 2 \cdot \sum_{v\in V} x_v^* \leq 2 \cdot \sum_{v\in V} \tilde{x}_v = 2 \cdot |S_{OPT}| \end{aligned}$$

S_{OPT} جواب بهینه مسئله بوده و رابطه‌ی $|S_{LP}| \leq 2 \cdot |S_{OPT}|$ نشان‌دهنده‌ی ۲ـ تقریب بودن این الگوریتم است.

سوال. آیا نمی‌توان در مجموعه S_{LP}، آن X_v^* هایی را انتخاب کرد که مقدارشان اکیداً بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است؟

۳ مسئله بزرگترین مجموعه مستقل[۳]

دقیقا مشابه با مسئله قبل، برای هر رأس v یک متغیر به نام x_v تعریف می‌کنیم که می‌تواند مقادیر صفر یا یک را داشته باشد. مقدار یک، به معنای انتخاب آن رأس و مقدار صفر به معنای عدم انتخاب آن رأس در مجموعه جواب است. باید نشان دهیم به ازای هر یال از گراف، حداکثر یکی از

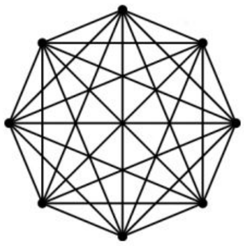
[۲] مجموعه جواب این الگوریتم، حداکثر دو برابر مجموعه جواب بهینه است.
[۳] مجموعه مستقل، مجموعه‌ای از رئوس یک گراف است به طوری که بین هیچ دو عضوی از آن، یالی وجود نداشته باشد.

رأس‌های متصل به آن می‌تواند در مجموعه جواب قرار داشته باشد. بنابراین، برنامه‌ریزی صحیح برای این مسئله به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\ \text{که} \quad & x_u + x_v \leq ۱, \quad for\, every\, edge\, \{u,v\} \in E \\ & x_v \in \{۰,۱\}, \quad for\, all\, v \in V \end{aligned}$$

ابتدا این برنامه‌ریزی صحیح را آرام‌سازی کرده، با تغییر دادن $x_v \in \{۰,۱\}$ به $۰ \leq x_v \leq ۱$، یک برنامه‌ریزی خطی به‌دست می آوریم. برنامه‌ریزی خطی حاصل، همواره با قرار دادن $x_v = \frac{۱}{۲}$ به ازای تمام رئوس گراف، یک جواب شدنی خواهد داشت که مطابق با آن، مقدار تابع هدف برابر با $\frac{|V|}{۲}$ خواهد شد. بنابراین، مقدار بهینه‌ی تابع هدف بزرگتر یا مساوی با $\frac{|V|}{۲}$ خواهد بود.

حال گراف کامل n رأسی را مطابق زیر در نظر بگیرید:



می‌دانیم بزرگترین مجموعه مستقل در آن، شامل یک تک رأس است؛ بنابراین اندازه این مجموعه یک می‌باشد. اما همان‌طور که دیدیم، جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی حاصل، حداقل $\frac{n}{۲}$ است و این با جواب برنامه‌ریزی صحیح اولیه، کاملا متفاوت است. البته گراف کامل مستثنی نیست و نمونه های متعددی برای این عدم تطابق وجود دارد.

نتیجه. اندازه بزرگترین مجموعه مستقل را با هیچ الگوریتم کارآمدی نمی‌توان به خوبی تقریب زد.
قضیه زیر این نتیجه‌گیری را تأیید می‌کند.

قضیه J.Hastad: مسئله‌ی پیدا کردن بزرگترین مجموعه مستقل[۴] را به سختی می‌توان به صورت $n^{۱-\epsilon}$ تقریب زد.

۴ نظریه برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی‌های خطی که تا کنون با آن سروکار داشته‌ایم، عموماً به شکل زیر (یا قابل تبدیل به آن) بوده است که به آن **فرم کانونی** گفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

اما می‌توان تمام برنامه‌ریزی‌های خطی را به شکل زیر که فرم معادله ای نامیده می‌شود، تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

[۴] Click

در این فرم، تمام قیدها به شکل تساوی هستند و تنها نامساوی، این است که تمام متغیرها را بزرگتر یا مساوی با صفر در نظر می‌گیریم.
حال می‌خواهیم نحوه تبدیل فرم کانونی به فرم معادله‌ای را بررسی کنیم. برای مثال، برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{که} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

به متغیر x_1 که برای آن، شرط خاصی وجود ندارد، متغیر آزاد می‌گویند. هدف ما تولید یک برنامه‌ریزی خطی جدید است که هر جواب آن، معادل یک جواب برای برنامه‌ریزی خطی کنونی است و برعکس.
این برنامه‌ریزی خطی را با گام‌های زیر به فرم معادله‌ای تبدیل می‌کنیم:

۱. برای تبدیل نامساوی $2x_1 - x_2 \leq 4$ به یک تساوی، کافی است متغیر نامنفی x_3 را به گونه‌ای تعریف کنیم که با اضافه کردن آن به سمت چپ نامساوی، تساوی $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$ حاصل شود. سپس، این تساوی را جایگزین نامساوی اولیه می‌کنیم.

۲. نامساوی $x_1 + 3x_2 \geq 5$ را ابتدا در -1 ضرب کرده تا جهت آن برعکس شود. سپس متغیر جدید و نامنفی دیگری به نام x_4 را تعریف کرده، آن را به سمت چپ نامساوی اضافه می‌کنیم تا تساوی $-x_1 - 3x_2 + x_4 = -5$ حاصل گردد. این تساوی را نیز جایگزین نامساوی می‌کنیم.

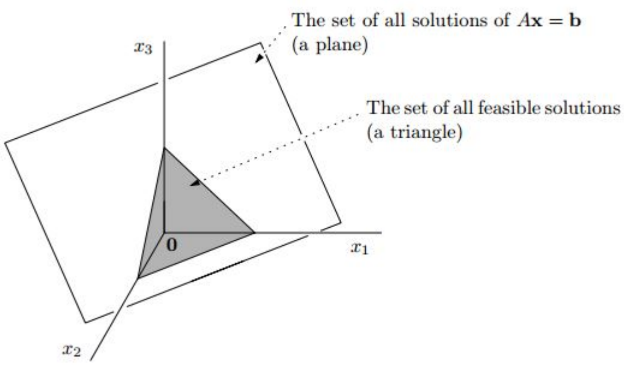
۳. همان‌طور که گفتیم، برای متغیر x_1 شرط خاصی وجود ندارد؛ هم می‌تواند مقدار مثبت داشته باشد هم منفی. از آنجایی که برای تمام متغیرها در فرم معادله‌ای، باید قید نامنفی بودن ذکر شود، دو متغیر نامنفی جدید y_1, z_1 را تعریف می‌کنیم که در حقیقت یکی از آن دو، نقش مثبت بودن x_1 و دیگری نقش منفی بودن آن را دارند. سپس متغیر x_1 را حذف کرده، عبارت $y_1 - z_1$ را جایگزین آن می‌کنیم.

در نهایت، فرم معادله ای حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & 3y_1 - 3z_1 - 2x_2 \\ \text{که} \quad & 2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & -y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = -5 \\ & y_1 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

نکته ای که باید به آن توجه کرد این است که اگر در فرم کانونی، m معادله و n مجهول داشته باشیم، با تبدیل آن به فرم معادله‌ای، تعداد معادله‌ها تغییر نمی‌کند؛ اما به ازای هر نامعادله و هر متغیر، ممکن است یک متغیر جدید تعریف کنیم که در نهایت تعداد کل متغیرها در فرم معادله‌ای، حداکثر $m + 2n$ خواهد بود.

نگاه هندسی به برنامه‌ریزی خطی در فرم معادله‌ای به صورت زیر است:



مجموعه جواب های $Ax = b$ در فضای سه بعدی، یک صفحه را تشکیل می‌دهند. مجموعه جواب های شدنی ($X \geq 0$) نیز، یک مثلث را روی آن صفحه تشکیل خواهند داد.

ما برای سادگی تنها با آن دسته از برنامه‌ریزی‌های خطی به فرم معادله‌ای سروکار خواهیم داشت که در دو شرط زیر صدق کنند:

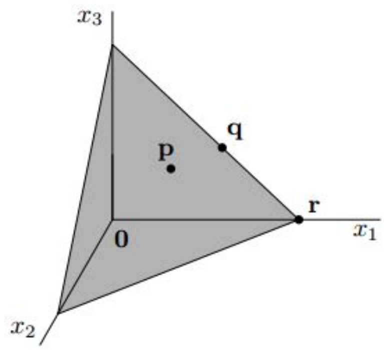
۱. دستگاه $Ax = b$ حداقل یک جواب داشته باشد.

۲. سطرهای ماتریس A مستقل خطی باشند.

اگر مورد اول برقرار نباشد، برنامه‌ریزی خطی نیز جواب شدنی ندارد و می‌توان به راحتی آن را کنار گذاشت. اگر مورد دوم برقرار نباشد و یکی از سطرهای A ترکیب خطی چند سطر دیگر آن باشد، می‌توان آن سطر را از A حذف کرد بدون اینکه در مجموعه جواب تغییری ایجاد شود.

۵ جواب شدنی پایه‌ای[۵]

فرض کنید شکل هندسی مجموعه جواب‌های شدنی یک برنامه‌ریزی خطی به فرم معادله‌ای، مثلث زیر باشد:



جواب بهینه، احتمالا در یکی از گوشه‌ها[۶] قرار دارد و بین جواب‌های شدنی p و q و r، تنها r پایه‌ای است.

پیش از تعریف دقیق جواب‌های شدنی پایه‌ای، به تعریف اولیه از ماتریس‌های A و A_B و مجموعه B می‌پردازیم. ماتریس A دارای m سطر و n ستون($n \geq m$) و رتبه m است. مجموعه B شامل m عضو است به طوری که $B \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$. ماتریس A_B نیز شامل ستون‌هایی از A است که اندیس آن‌ها در مجموعه B قرار دارد. برای مثال داریم:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$B = \{۲, ۴\}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

به طریق مشابه، برای بردار $x = (۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱)$ داریم:

$$x_B = (۵, ۹)$$

حال به تعریف دقیق جواب‌های شدنی پایه‌ای می‌پردازیم.

تعریف. برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

یک جواب شدنی $x \in \mathbb{R}^n$ برای این برنامه‌ریزی خطی، پایه‌ای است اگر بتوان مجموعه m عضوی B را که $B \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$ پیدا کرد به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

[۵] basic feasible solutions

[۶] تعبیر جبری گوشه: نقاطی که در مختصات آن‌ها، صفر زیاد باشد.

۱. ماتریس مربعی A_B نامنفرد باشد؛ به عبارتی دیگر، ستون‌هایی از A که اندیس آن‌ها در B قرار دارد، مستقل خطی باشند.

۲. مؤلفه‌هایی از بردار x که اندیس آن‌ها در B قرار ندارد، برابر با صفر باشند ($x_j = 0 \quad \forall j \notin B$).

نکته. ممکن است برای پیدا کردن جواب شدنی پایه‌ای، B های مختلفی وجود داشته باشد؛ زیرا هر m تا ستون مستقل از A را در نظر بگیریم، متناظر با آن، یک مجموعه B وجود دارد. اگر در بردار x که یک جواب شدنی است، مؤلفه‌هایی را در نظر بگیریم که مقدار آن‌ها صفر نیست، تعداد این مؤلفه‌ها یا برابر با m یا کمتر از آن است (به دلیل شرط دوم، اگر بیشتر از m باشد، این جواب، پایه‌ای نیست).
اگر برابر با m باشد: باید آن‌ها را از نظر استقلال خطی بررسی کنیم. درصورتی که ستون‌های متناظر با این مؤلفه‌ها، مستقل خطی باشند، اندیس این ستون‌ها مجموعه B را تشکیل می‌دهند و بردار x یک جواب شدنی پایه‌ای است. اما اگر مستقل نباشند، x شدنی پایه‌ای نخواهد بود.
اگر کمتر از m باشد: اندیس‌های متناظر با این مؤلفه‌ها را در B قرار می‌دهیم و ستون‌های متناظر با این اندیس‌ها را در ماتریس A، در نظر می‌گیریم. حال اگر بتوان ستون‌های دیگری از A یافت که با ستون‌های در نظر گرفته شده، m ستون مستقل خطی تشکیل دهند، اندیس‌های ستون‌های جدید را به مجموعه B اضافه کرده و x یک جواب شدنی پایه‌ای خواهد بود. در غیر این صورت، x جواب شدنی پایه‌ای نخواهد بود.

مثال. ماتریس A و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

x یک جواب شدنی پایه‌ای نیست؛ زیرا هر زیرمجموعه دو عضوی B از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را در نظر بگیریم، حتما یک مؤلفه از x وجود دارد که اندیس آن خارج از B است و مقدار آن صفر نیست. پس نمی‌توان هیچ مجموعه B با شرایط گفته شده در بالا پیدا کرد.
حال بردار x را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

این جواب نیز، شدنی پایه‌ای نیست؛ زیرا تنها انتخاب ما برای B مجموعه $\{۳, ۵\}$ است؛ اما ستون‌های ۳ و ۵ در ماتریس A، مستقل خطی نیستند که این، شرط اول را نقض می‌کند.
اما اگر

$$x = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

آنگاه x یک جواب شدنی پایه‌ای است؛ زیرا مجموعه $B = \{۱, ۲\}$ وجود دارد به طوری که در دو شرط ذکر شده صدق می‌کند.
همچنین اگر بردار x برابر با (۰ ۰ ۱ ۰ ۰) باشد، این جواب نیز شدنی پایه‌ای است؛ زیرا می‌توان یک B مانند مجموعه $\{۱, ۳\}$ یا $\{۳, ۴\}$ پیدا کرد که هر دو شرط گفته شده برای آن صدق کند.

قضیه. اگر x یک جواب شدنی برای یک برنامه‌ریزی خطی به فرم معادله‌ای باشد، آنگاه x پایه‌ای است اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس A_K مستقل خطی باشند. مجموعه K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \{j \in \{۱, ۲, ..., n\} : x_j > ۰\}$$

اثبات. یک طرف قضیه، ساده است. فرض کنید x یک جواب شدنی پایه‌ای باشد. بنابراین، مجموعه m عضوی B مطابق با تعریف وجود دارد. از آنجایی که اندیس‌های متناظر با مؤلفه‌های غیر صفر x، همگی در B وجود دارند، داریم $k \subseteq B$. از طرفی، طبق شرط اول در تعریف، ستون‌های متناظر با B در ماتریس A مستقل خطی هستند؛ بنابراین A_K نیز مستقل خطی است.
حال فرض کنید x یک جواب شدنی و ستون‌های ماتریس A_K مستقل خطی باشد. باید ثابت کنیم حداقل یک B وجود دارد که در شرایط تعریف صدق می‌کند. اگر $m = |K|$، به وضوح می‌توان B را برابر با K قرار داد و x، پایه‌ای خواهد بود. اما اگر $m \leq |K|$، باید بتوان $m - |K|$ ستون دیگر از ماتریس A پیدا کرد به طوری که با ستون‌های A_K، m ستون مستقل خطی تشکیل دهند. می‌دانیم رتبه سطری ماتریس A و در نتیجه، رتبه ستونی آن برابر با m است. بنابراین حتما می‌توانیم آن $m - |K|$ ستون گفته شده را پیدا کنیم و اندیس‌های متناظر با m ستون مستقل خطی به دست آمده از A را به عنوان اعضای B در نظر بگیریم. چون توانستیم یک مجموعه B پیدا کنیم که در شرایط تعریف صدق کند، x یک جواب پایه‌ای خواهد بود و قضیه اثبات می‌شود.

نتیجه. اگر یک مجموعه B داشته باشیم، متناظر با آن، حداکثر یک جواب شدنی پایه‌ای وجود دارد. زیرا اگر ستون‌های متناظر با B را در ماتریس A در نظر بگیریم، یک ماتریس مربعی با رتبه m به وجود خواهد آمد (A_B). بنابراین، دستگاه $A_Bx_B = b$ دقیقا یک جواب دارد که می‌تواند شدنی باشد یا نباشد. اگر این جواب شدنی باشد، پایه‌ای نیز هست؛ چون شرایط لازم برای B وجود دارد.

در حقیقت، هدف این است که در یک فضایی که بینهایت نقطه دارد و هر کدام از آن‌ها می‌تواند بهینه باشد، خود را به جواب‌های شدنی پایه‌ای که متناهی هستند، محدود کنیم. طبق نتیجه، این جواب‌های شدنی پایه‌ای، حداکثر به تعداد انتخاب‌های مجموعه B خواهند بود. قضیه زیر، نشان می‌دهد که برای پیدا کردن جواب‌های بهینه، کافی است جواب‌های شدنی پایه‌ای را بررسی کنیم.

قضیه. برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^Tx \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

۱. اگر مسئله جواب شدنی داشته باشد و تابع هدف روی مجموعه شدنی از بالا کران‌دار باشد، جواب بهینه دارد.

۲. اگر مسئله جواب بهینه داشته باشد، جواب پایه‌ای شدنی بهینه دارد.

در جلسه آینده، به اثبات این قضیه خواهیم پرداخت.
[MG۰۷]

مراجع

[MG07] Jiří Matoušek and Bernd Gärtner. *Understanding and using linear programming.* Springer, Berlin, 2007.