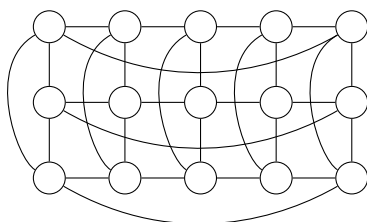


مسئله ۱: (۱ نمره) یک رنگ‌آمیزی معتبر با ۳ رنگ برای گراف زیر پیدا کنید.

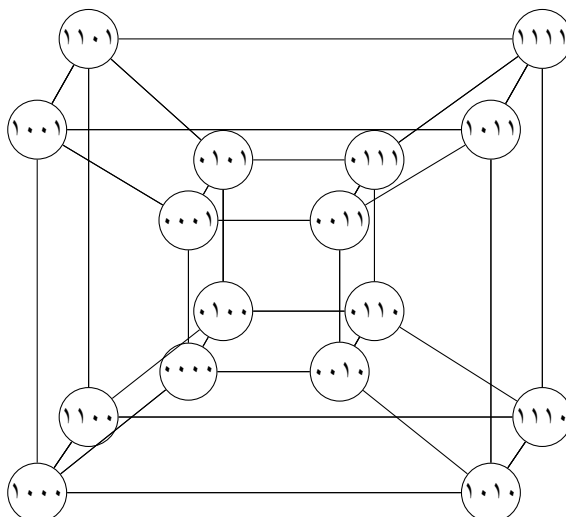


مسئله ۲: (۳ نمره) فرض کنید  $0 < p < 1/2$  و  $n > 1$  یک عدد طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{\lfloor pn \rfloor} \leq \binom{n}{\lfloor pn \rfloor}$$

مسئله ۳: (۴ نمره) ثابت کنید گراف ابر مکعب  $k$ -بعدی به ازای  $k \geq 1$  یک تطابق کامل دارد.

راهنمایی: گراف مکعب  $k$ -بعدی گرافی است که به ازای هر رشته به طول  $k$  از ۰ و ۱ یک رأس دارد و دو رأس مجاورند اگر و فقط اگر رشته مربوط به آن دو رأس دقیقاً در یک مکان با یکدیگر متفاوت باشند. شکل گراف مکعب ۴-بعدی در ادامه آمده است.



مسئله ۴: (۴ نمره) می‌دانیم درخت یک گراف دو بخشی است. فرض کنید دو بخش یک درخت بخش‌های  $X$  و  $Y$  باشند و فرض کنید تعداد اعضای  $X$  کمتر از تعداد اعضای  $Y$  باشد. ثابت کنید حداقل ۱ برگ در بخش  $Y$  است.

راهنمایی: فرض خلف کنید و یال‌های خارج شونده از هر بخش را بشمارید.

**مسئله ۵:** (۳ نمره) فرض کنید  $v$  راسی برشی برای گراف ساده بدون جهت  $G$  است. اثبات کنید راس  $v$  نمی‌تواند برای گراف مکمل  $G$  یعنی  $\bar{G}$  راسی برشی باشد.

**مسئله ۶:** (۲ نمره) ثابت کنید هر گراف ساده (بدون جهت) که مجموع درجاتش زوج باشد، یال برشی ندارد.

**مسئله ۷:** (۳ نمره) فرض کنید  $n$  سکه داریم با وزن‌های متفاوت. می‌خواهیم با ترازوی دو کفه‌ای سنگین‌ترین سکه را بیابیم. فرض کنید در هر بار وزن کردن می‌توانیم یک سکه را در یکی از کفه‌ها و یک سکه را در کفه دیگر قرار بدهیم. ثابت کنید با کمتر از  $n - 1$  بار استفاده از ترازو نمی‌توان سنگین‌ترین سکه را یافت.

راهنمایی: گراف «بهم وزن کردن‌ها» را ترسیم کنید و اثبات کنید نمی‌تواند همبند نباشد. سپس اثبات کنید باید حداقل  $n - 1$  یال داشته باشد.

**مسئله ۸:** (۵ نمره) به ازای هر عدد طبیعی  $n$  تعداد جایگشت‌های اعداد  $1$  تا  $n$  را بیابید که وارونگی‌شان برابر با  $2$  است. ادعای خود را اثبات کنید.

راهنمایی: حالت‌گیری کنید. در ضمن توجه کنید که ممکن است رابطه کلی شما برای  $n$ های کوچک جواب ندهد.

**مسئله ۹:** (۳ نمره) ثابت کنید به ازای هر مربع لاتینی که  $n - 1$  سطرش به درستی و طبق قوانین مربع لاتین پر شده باشد، می‌توان سطر آخرش را نیز مطابق با قوانین مربع لاتین پر کرد.

**مسئله ۱۰:** (۵ نمره) یک گراف ساده  $k$  راسی داریم با این شرط که به هر صورتی که راس‌هایش را به دو دسته با اندازه مساوی تقسیم کنیم تعداد یال‌های درون هر دو دسته با هم برابر است. ثابت کنید گراف منتظم است.

**مسئله ۱۱:** (۵ نمره) یک چند وجهی داریم که تعداد اضلاع تمام وجه‌هایش به جز یک وجه بر عدد  $k$  (که  $k$  بزرگتر از  $1$  است) بخش‌پذیر است (تعداد اضلاع آن وجه بر  $k$  بخش‌پذیر نیست). ثابت کنید نمی‌توان وجه‌های چندوجهی را طوری با دو رنگ رنگ کرد که وجه‌هایی که با یکدیگر یال مشترک دارند ناهم‌رنگ باشند.

**مسئله ۱۲:** (۵ نمره) تعدادی دانشجو را به شکل مستطیلی به صف کرده‌ایم. از هر ردیف بلندترین فرد را و از بین این بلندترین افراد کوتاه‌ترین فرد را انتخاب کردیم، اسم این فرد «میثم» بود. سپس در هر ستون کوتاه‌ترین فرد را انتخاب کردیم و از بین این افراد بلندترین فرد را انتخاب کردیم، اسم این فرد «مقداد» بود. اثبات کنید «میثم» از «مقداد» کوتاه‌تر نیست.

نکات:

- شما می‌توانید هفت سوال را انتخاب کرده و حل کنید. توجه کنید که اگر برای بیش از هفت سوال در برگه راه حل بنویسید، اولین هفت سؤالتان تصحیح خواهد شد. در نتیجه در انتخاب سؤالات دقت کنید ولی خیلی وقت تلف پرش از سوالی به سوال دیگر نکنید.

- در تمامی مسئله‌ها سعی کنید گزاره‌هایی را که ادعایشان را می‌کنید اثبات کنید.

موفق باشید