دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی خطی ۱۹ آذر ۱۳۹۸

تمرین سری پنجم

۱ یک گراف و تعدادی از راس‌های آن داده شده‌اند. می‌خواهیم به یال‌های گراف وزن‌های مثبتی نسبت دهیم به طوری که مجموع وزن‌ها کمینه باشد و فاصله‌ی بین هر دو راس از بین راس‌های انتخاب شده از یک بیشتر شود.
(آ) این مسئله را به صورت یک برنامه خطی مدل کنید و دوگان آن را بنویسید.
(ب) فرض کنید اندازه گراف چندان بزرگ نباشد ولی تعداد مسیرهای بین راس‌ها خیلی زیاد باشد. در این حالت روش خوبی برای حل مسئله پیشنهاد کنید و روش خود را توجیه کنید.

۲ فرض کنید n بازه $I_1, \dots, I_n$ و m نقطه $p_1, \dots, p_m$ را روی محور اعداد حقیقی داریم، که نقطه iام ارزش مثبت حقیقی v_i را برای ما دارد. هدف ما انتخاب تعدادی از نقاط است که اولا در مجموع بیشترین ارزش را داشته باشند، ثانیا بازه iام حداکثر شامل k_i نقطه باشد.
(آ) مساله فوق را به صورت یک برنامه خطی مدل کنید.
(ب) ثابت کنید ماتریس برنامه خطی فوق، تماما تک‌پیمانه‌ای است.
(پ) آیا می‌توان این مساله را در زمان چندجمله‌ای حل کرد؟

۳ برای گراف جهت‌دارِ $D = (V, A)$، $f : A \to R$ را یک **جریان دوری** می گوییم هرگاه:

$$\sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a) \qquad \forall v \in V$$

(آ)گراف جهت‌دار $D = (V, A)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید ماتریس برخورد D تماما تک‌پیمانه‌ای است.

(ب) هر بردار $x \in R^A$ را می‌توان تابعی روی یال‌های D در نظر گرفت. اگر M ماتریس برخورد گراف بالا باشد، نشان دهید $Mx = 0$ اگر و تنها اگر x یک جریان دوری روی یال‌های D باشد.

(پ) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c : A \to Z$ و $d : A \to Z$ دو بردار در Z^A باشند. نشان دهید اگر جریان دوری مانند x روی A وجود داشته باشد به‌طوری که $c \leq x \leq d$ آنگاه جریان دوری صحیحی مانند z روی A وجود خواهد داشت به‌طوری که $c \leq z \leq d$

(ت) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c, d : A \to R$ به‌طوری که $d \leq c$. نشان دهید جریان دوری مانند f وجود دارد به‌طوری که $d \leq f \leq c$ اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه $U \subset V$،

$$\sum_{a \in \delta^{in}(U)} d(a) \leq \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a)$$

۴ یک رابطه‌ی $Min - Max$ برای بیشینه وزن یک مجموعه پایدار [1] در یک گراف دوبخشی بنویسید.

[1] Stable Set

۵ بازی جمع‌صفر با ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

استراتژی بهینه برای هر کدام از دو بازیکن را به صورت جواب‌های بهینه‌ی دو برنامه خطی نشان‌دهید.

۶ فرض کنید A یک ماتریس تماما تک‌پیمانه‌ای باشد. ثابت کنید ستون‌های A را می‌توان طوری به دو بخش افراز کرد، که حاصل جمع ستون‌های یک بخش منهای حاصل‌جمع ستون‌های بخش دیگر برداری با درایه‌های 0، -1 یا $+1$ دهد.

۷ مساله ماکسیمم SAT به این صورت می‌باشد که n متغیر بولی $x_1, ..., x_n$ و m تا عبارت بولی $C_1, ..., C_m$ که هر کدام متشکل از OR تعدادی از متغیرها هستند داریم و می‌خواهیم طوری متغیرها را مقداردهی کنیم که بیشترین تعداد از عبارات بولی مقدار $true$ بگیرند.
(آ) برنامه‌ریزی صحیحی برای این مسئله ارائه کنید.
(ب) در مرحله دوم حل یک برنامه‌ریزی صحیح یعنی تبدیل جواب بدست‌آمده از برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده به جوابی صحیح برای مسئله؛ می‌توان تابعی از این جواب را به عنوان توزیعی احتمالاتی برای یک یا صفر نسبت دادن به هر متغیر استفاده کرد. ثابت کنید اگر تابع دلخواه f که در نامساوی زیر صدق می‌کند را درنظر بگیریم و به متغیر x_i با احتمال $f(x_I^*)$ مقدار یک نسبت دهیم(x^* جواب بهینه‌سازی خطی است) آنگاه یک $\frac{3}{4}$-تقریب برای این مساله ارائه داده‌ایم.

$$1 - 4^{-x} \leq f(x) \leq 4^{x-1}$$