بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه بیست و سوم

درس تحقیق در عملیات

استفاده از MWU برای حل LP

مرور

For $t = 1, \ldots, T$:

1. Each expert $i \in [N]$ advises some $\boxed{}$
2. Allocator picks some distribution $\vec{p}^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_N^{(t)})$ over the experts.
3. Adversary, with knowledge of the expert advice and $\vec{p}^{(t)}$, determines a cost vector $\vec{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \ldots, m_N^{(t)}) \in [-\rho, \rho]^N$.
4. Allocator observes the cost vector and suffers $\vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)}$.

For $t = 1, \ldots, T$:

1. Each expert $i \in [N]$ advises some $\boxed{}$
2. Allocator picks some distribution $\vec{p}^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_N^{(t)})$ over the experts.
3. Adversary, with knowledge of the expert advice and $\vec{p}^{(t)}$, determines a cost vector $\vec{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \ldots, m_N^{(t)}) \in [-\rho, \rho]^N$.
4. Allocator observes the cost vector and suffers $\vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)}$.

$m_i^{(t)}/\rho$

الگوریتم ما:

$\epsilon/2\rho$

- Pick the distribution $p_j^{(t)} = w_j^{(t)}/\Phi^{(t)}$
- After observing the cost vector, set $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} \cdot \exp(-\epsilon \cdot m_i^{(t)})$

For $t = 1, \dots, T$:

1. Each expert $i \in [N]$ advises some $\boxed{}$
2. Allocator picks some distribution $\vec{p}^{(t)} = (p_1^{(t)}, \dots, p_N^{(t)})$ over the experts.
3. Adversary, with knowledge of the expert advice and $\vec{p}^{(t)}$, determines a cost vector $\vec{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \dots, m_N^{(t)}) \in [-\rho, \rho]^N$.
4. Allocator observes the cost vector and suffers $\vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)}$.

الگوریتم ما:

- Pick the distribution $p_j^{(t)} = w_j^{(t)} / \Phi^{(t)}$
- After observing the cost vector, set $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} \cdot \exp(-\epsilon \cdot m_i^{(t)})$

$\epsilon/2\rho$

$m_i^{(t)}/\rho$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \le 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \ge (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} &\min c^\top x \\ \text{s.t.}\ \ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} &\min c^\top x \\ \text{s.t. } &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

تقریب

تقریبی از برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} c^\top \widetilde{x} &= \mathrm{OPT} \\ A\widetilde{x} &\geq b - \epsilon \mathbf{1} \\ \widetilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\, & c^\top x \\ \text{s.t.}\ \ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

تقریب

تقریبی از برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} c^\top \widetilde{x} &= \mathrm{OPT} \\ A\widetilde{x} &\geq b - \epsilon \mathbf{1} \\ \widetilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب شدنی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$Ax \geq b$$

برنامه‌ریزی خطی

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^\top x \\
\text{s.t.}\ \ & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

تقریب

تقریبی از برنامه‌ریزی خطی

$$
\begin{aligned}
c^\top \widetilde{x} &= \mathrm{OPT} \\
A\widetilde{x} &\geq b - \epsilon \mathbf{1} \\
\widetilde{x} &\geq 0
\end{aligned}
$$

یک جواب شدنی

$$
K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}
$$
$$
Ax \geq b
$$

اگر فقط یک معادله

$$
K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}
$$
$$
\alpha^\top x \geq \beta
$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} &\min c^\top x \\ \text{s.t.}\quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

تقریب

تقریبی از برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{x} &= \mathrm{OPT} \\ A\tilde{x} &\geq b - \epsilon \mathbf{1} \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب شدنی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$Ax \geq b$$

ایده: تبدیل به تعدادی

اگر فقط یک معادله

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

تقریب

تقریبی از برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{x} &= \mathrm{OPT} \\ A\tilde{x} &\geq b - \epsilon \mathbf{1} \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب شدنی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$Ax \geq b$$

ایده: تبدیل به تعدادی

اگر فقط یک معادله

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

دانای کل:

ساده. مثلا اگر $c \geq 0$:

جواب: $x = \frac{\mathrm{OPT}}{c_i} e_i$ **یا نشدنی**

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\, & c^\top x \\ \text{s.t.}\ \ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

!

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} &\min c^\top x \\ \text{s.t.}\ \ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \text{OPT}\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
  - ==> حل
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
  - به‌روزرسانی وزن‌ها

!

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \text{OPT}\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
- <== حل
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
- به‌روزرسانی وزن‌ها

!

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها

$$\underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot A}_{\alpha^{(t)}} x \geq \underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot b}_{\beta^{(t)}}$$

- $p^{(t)} = w^{(t)}/||w||_1$
- حل (با دانای کل)
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.

$$\bar{m}_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b_i$$

- به‌روزرسانی وزن‌ها

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
    - ==> حل
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
    - به‌روزرسانی وزن‌ها

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها

$$\underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot A}_{\alpha^{(t)}} x \geq \underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot b}_{\beta^{(t)}}$$

- $p^{(t)} = w^{(t)}/||w||_1$
- حل (با دانای کل)
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.

$$\bar{m}_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b_i$$

- به‌روزرسانی وزن‌ها

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
- ==> حل
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
- به‌روزرسانی وزن‌ها

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها

$$\underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot A}_{\alpha^{(t)}} x \geq \underbrace{\bar{p}^{(t)} \cdot b}_{\beta^{(t)}}$$

- $p^{(t)} = w^{(t)}/||w||_1$
- حل (با دانای کل)
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.

$$\bar{m}_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b_i$$

- به‌روزرسانی وزن‌ها

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \leq 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \leq 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{m}_i^{(t)} + \epsilon$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \leq 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{m}_i^{(t)} + \epsilon$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{m}_i^{(t)} &= \frac{1}{T}\sum_{t\leq T} a_i^\top x^{(t)} - b_i \\ &= a_i^\top \left(\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} x^{(t)}\right) - b_i \\ &= a_i^\top \widetilde{x} - b_i\end{aligned}$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \le 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \ge (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t\le T} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_{t\le T} \bar{m}_i^{(t)} + \epsilon$$

$$\begin{aligned}\bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} &= \bar{p}^{(t)} \cdot (Ax^{(t)} - b)\\ &= \bar{p}^{(t)} \cdot Ax^{(t)} - \bar{p}^{(t)} \cdot b\\ &\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t\le T} \bar{m}_i^{(t)} &= \frac{1}{T}\sum_{t\le T} a_i^\top x^{(t)} - b_i\\ &= a_i^\top\left(\frac{1}{T}\sum_{t\le T} x^{(t)}\right) - b_i\\ &= a_i^\top \widetilde{x} - b_i\end{aligned}$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \le 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \ge (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t \le T} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_{t \le T} \bar{m}_i^{(t)} + \epsilon$$

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} &= \bar{p}^{(t)} \cdot (Ax^{(t)} - b) \\ &= \bar{p}^{(t)} \cdot Ax^{(t)} - \bar{p}^{(t)} \cdot b \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\bar{m}_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b_i$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum_{t \le T} \bar{m}_i^{(t)} &= \frac{1}{T}\sum_{t \le T} a_i^\top x^{(t)} - b_i \\ &= a_i^\top \left(\frac{1}{T}\sum_{t \le T} x^{(t)} \right) - b_i \\ &= a_i^\top \widetilde{x} - b_i \end{aligned}$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \leq 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{m}_i^{(t)} + \epsilon$$

$$\begin{aligned}\bar{p}^{(t)} \cdot \bar{m}^{(t)} &= \bar{p}^{(t)} \cdot (Ax^{(t)} - b) \\ &= \bar{p}^{(t)} \cdot Ax^{(t)} - \bar{p}^{(t)} \cdot b \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$\bar{m}_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b_i$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} \bar{m}_i^{(t)} &= \frac{1}{T}\sum_{t\leq T} a_i^\top x^{(t)} - b_i \\ &= a_i^\top \left(\frac{1}{T}\sum_{t\leq T} x^{(t)}\right) - b_i \\ &= a_i^\top \widetilde{x} - b_i\end{aligned}$$

$$\forall i: \quad a_i^\top \widetilde{x} - b_i + \epsilon \geq 0$$

$$a_i^\top \widetilde{x} \geq b_i - \epsilon$$

مسئله ρ:

$$\rho_t = \max\{1, \max_{i,t' \leq t}\{|a_i^\top x^{(t')} - b_i|\}\}$$

زمان اجرا:

$$O\left(\frac{\log m}{\epsilon^2}\rho^2\right)$$

یک مثال: پوشش مجموعه‌ای کسری

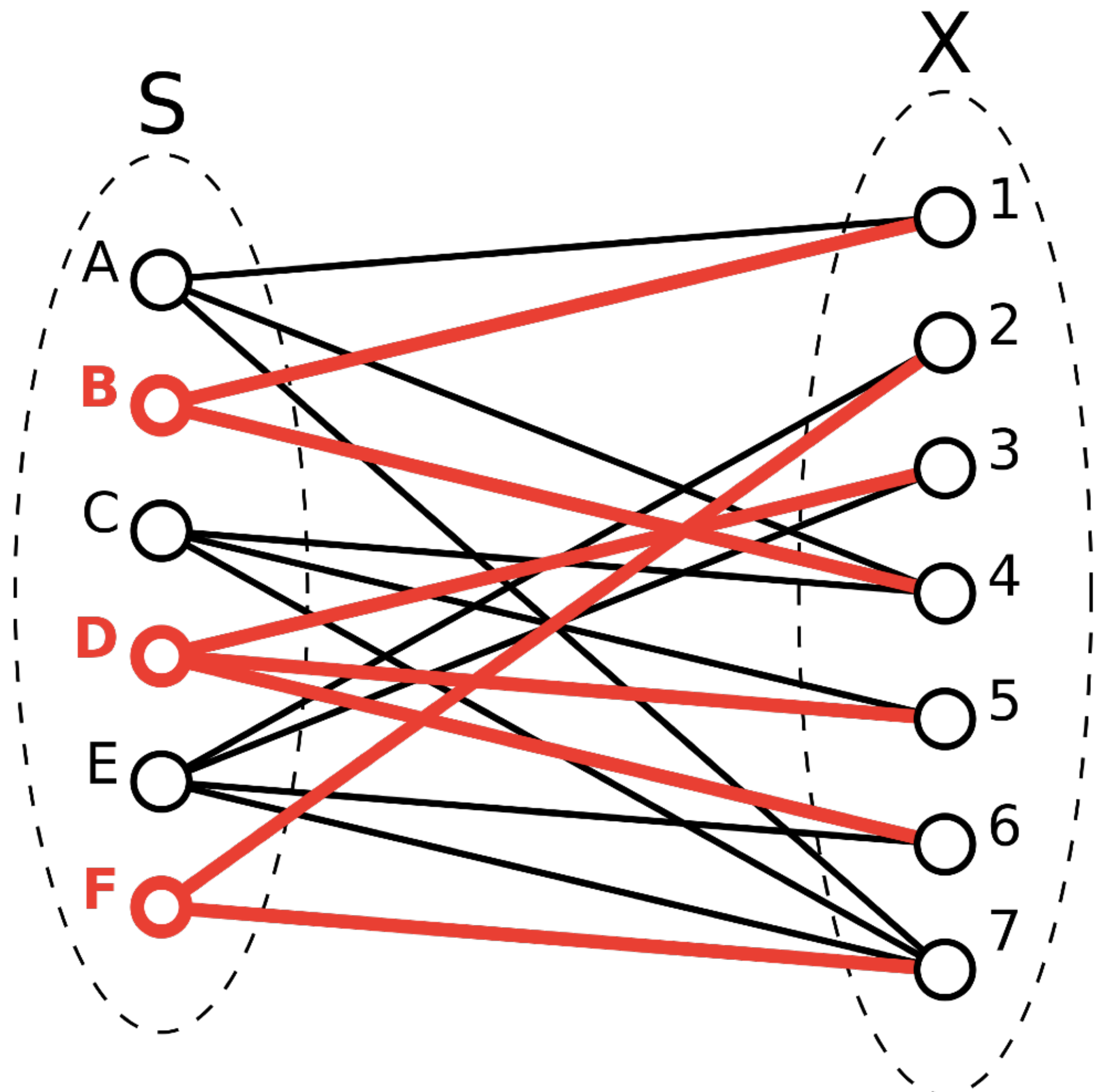
صورت مسئله پوشش مجموعه‌ای

کسری

۱/۲
۲/۷
...

$$\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$$

مجموعه —>



$$\{1, \ldots, n\}$$

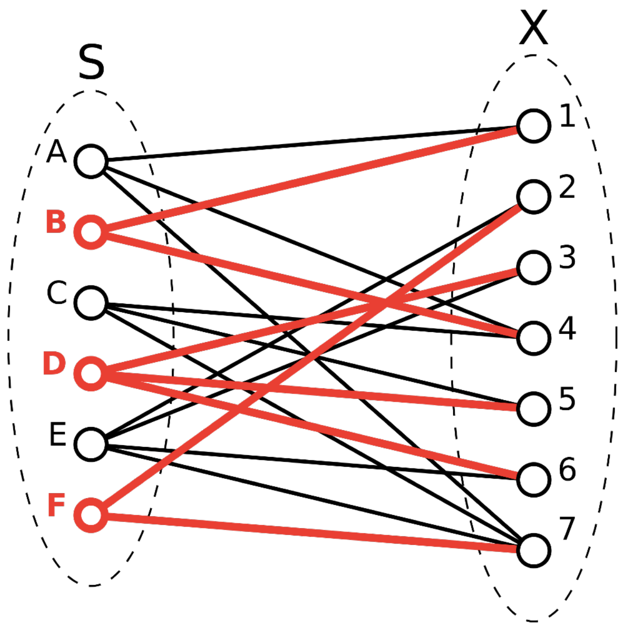
<— عنصر

برنامه‌ریزی خطی

$$\min \sum_{S} x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$

$$x_S \geq 0$$



$$\begin{aligned} \min \sum_{S} x_S & \\ \text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 & \quad \forall e \\ x_S \geq 0 & \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\, c^\top x & \\ \text{s.t.} \quad Ax \geq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \mathrm{OPT}\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
- حل ==>
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
- به‌روزرسانی وزن‌ها

!

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_S x_S \\ \text{s.t.}\ & \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e \\ & x_S \geq 0 \end{aligned}$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, c^\top x = \text{OPT}\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

هر سطر یک مشاور

- وزن‌دهی به مشاوران
- یک نامعادله از ترکیب وزنی معادله‌ها
- ==> حل
- خطای مشاور i: خوبی نامعادله i.
- به‌روزرسانی وزن‌ها

!

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{S} x_S & \\
\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 & \quad \forall e \\
x_S \geq 0 &
\end{aligned}
$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\min \sum_S x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$

$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$\sum_e \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_e \bar{p}_e \cdot 1$$

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\min \sum_S x_S$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$
$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\sum_e \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_e \bar{p}_e \cdot 1 \quad = 1$$

$$\min \sum_{S} x_S$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$
$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$\sum_{e} \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_{e} \bar{p}_e \cdot 1 \ = 1$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{S} x_S \sum_{e \in S} \bar{p}_e \geq 1$$

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$
$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\min \sum_{S} x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$

$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\sum_{e} \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_{e} \bar{p}_e \cdot 1 \ = 1$$

$$\iff \sum_{S} x_S \sum_{e \in S} \bar{p}_e \geq 1$$

$$\iff \sum_{S} x_S \cdot p(S) \geq 1$$

$$\min \sum_{S} x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$

$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

$$\sum_e \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_e \bar{p}_e \cdot 1 \;\; = 1$$

$$\iff \sum_S x_S \sum_{e \in S} \bar{p}_e \geq 1$$

$$\iff \sum_S x_S \cdot p(S) \geq 1$$

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\min \sum_{S} x_S$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{S \ni e} x_S \geq 1 \quad \forall e$$

$$x_S \geq 0$$

ایده:

تبدیل به تعدادی

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta$$

L = یکی از x_Sها

$$\sum_{e} \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_{e} \bar{p}_e \cdot 1 \;\; = 1$$

$$\iff \sum_{S} x_S \sum_{e \in S} \bar{p}_e \geq 1$$

$$\iff \sum_{S} x_S \cdot p(S) \geq 1$$

$$K = \{\textstyle\sum_S x_S = L, x_S \geq 0\}$$

Corollary 16.3. *Suppose* $\epsilon \leq 1$ *and for* $t \in [T]$, $p^{(t)}$ *is picked by Hedge in response to cost vectors* $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. *If* $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, *then for any expert* i*:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$= \rho$

$$\max_e \sum_{S \ni e} x_S - 1 \leq L - 1 \leq m - 1$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \le 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \ge (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$= \rho$

$$\max_e \sum_{S \ni e} x_S - 1 \le L - 1 \le m - 1$$

$$\sum_S \widetilde{x}_S = L$$

نتیجه: $$\sum_{S \ni e} \widetilde{x}_S \ge 1 - \epsilon$$

$$\widetilde{x} \ge 0$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \leq 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \geq (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$= \rho$

$$\max_e \sum_{S \ni e} x_S - 1 \leq L - 1 \leq m - 1$$

$$\sum_S \widetilde{x}_S = L$$

نتیجه: $$\sum_{S \ni e} \widetilde{x}_S \geq 1 - \epsilon$$

$$\widetilde{x} \geq 0$$

$$\widehat{x} = \widetilde{x}/(1-\epsilon)$$

Corollary 16.3. *Suppose $\epsilon \le 1$ and for $t \in [T]$, $p^{(t)}$ is picked by Hedge in response to cost vectors $\vec{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$. If $T \ge (4\rho^2 \ln N)/\epsilon^2$, then for any expert i:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)} \cdot \vec{m}^{(t)} \le \frac{1}{T}\sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

$= \rho$

$$\max_e \sum_{S \ni e} x_S - 1 \le L - 1 \le m - 1$$

$$\sum_S \widetilde{x}_S = L$$

نتیجه: $$\sum_{S \ni e} \widetilde{x}_S \ge 1 - \epsilon$$

$$\widetilde{x} \ge 0$$

$$\widehat{x} = \widetilde{x}/(1-\epsilon)$$

$$\sum_S \widehat{x}_S = \frac{L}{1-\epsilon} \approx L(1+\epsilon)$$

$$\sum_{S \ni e} \widehat{x}_S \ge 1$$

$$\widetilde{x} \ge 0$$

مسئله پژوهشی: incentive + MUW

- مدیریت گوگل + استخدام مدیرعامل

منابع

- https://jeremykun.com/2017/02/27/the-reasonable-effectiveness-of-the-multiplicative-weights-update-algorithm/
- https://courses.cs.washington.edu/courses/cse521/10wi/kale-thesis-chap2.pdf
- https://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/academic/class/15859-f11/www/notes/lecture16.pdf
-