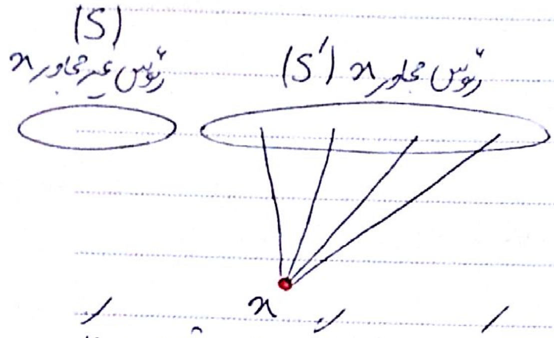
Subject:
Year. Month. Date. ( )

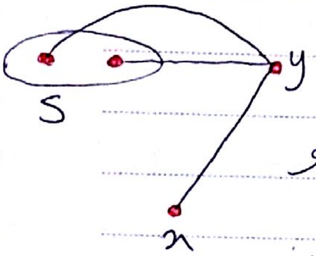
سؤال ۱: (8)



فرض کنید شخصی وجود ندارد که تمام نفرات دیگر را بشناسد. در این صورت:

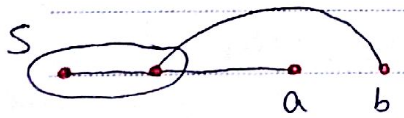
رأس با max درجه را در نظر می‌گیریم. (رأس x در شکل روبه‌رو)

اگر $|S| \geq 3$ باشد، در تناقض با فرض سؤال است که در بین هر چهار نفر شخصی است که هر سه نفر دیگر را می‌شناسد. اگر x و سه تا از رئوس S را در نظر بگیریم چون x با هیچ‌کدام از این سه رأس مجاور نیست، هیچ شخصی هر سه نفر دیگر را نمی‌شناسد.



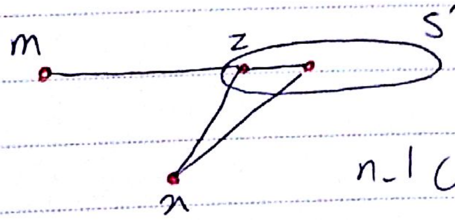
بنابراین $|S| \leq 2$. اگر $|S| = 2$، یک رأس دلخواه از S' مانند y، x و دو عضو S را در نظر بگیرید.

مطابق شکل، برای برقراری فرض سؤال باید هر دو رأس عضو S با y مجاور باشند. بنابراین دو رأس عضو S به هر y دلخواه که $y \in S'$ باشد مجاور است. بنابراین اگر تعداد کل رئوس n باشد، درجه‌ی دو رأس عضو S حداقل $n-3$ است. از طرف دیگر اگر تمام رئوس در S' مجاور باشند، با توجه به این که هر رأس در S' به دو عضو S وصل است، درجه هر رأس در S'، $n-1$ خواهد بود که خلاف فرض max بودن درجه‌ی x است. بنابراین حداقل دو رأس در S' هست که با هم مجاور نیستند (مانند a و b). اگر a و b و دو رأس S را در نظر بگیریم، برای برقراری فرض سؤال باید دو رأس S



به هم مجاور باشند. بنابراین درجه‌ی دو رأس عضو S، $n-2$ است که خلاف فرض max بودن درجه‌ی x است. بنابراین $|S| < 2$.

اگر $|S| = 1$ باشد، رأس عضو S (m در شکل پایین)، x و دو رأس دلخواه از S' را در نظر بگیرید.

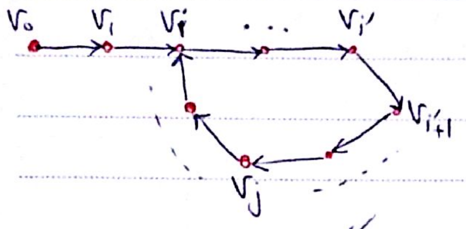


برای برقراری فرض سؤال باید دو رأس عضو S مجاور باشند. بنابراین هر دو رأس دلخواهی در S' با هم مجاورند. بنابراین درجه هر رأس در S' حداقل $n-2$ و برای برخی رئوس $n-1$ است (مانند z در شکل قبل) که خلاف فرض max بودن درجه‌ی x است ← $|S| = 0$ ✓

PAPCO

سوال ۲ : (6)

با شروع از یک رأس و حرکت در جهت یال ها، هنگامی که برای اولین بار به رأسی از این مسیر که قبلاً پیموده شده رسیدیم (با توجه به متناهی بودن تعداد رئوس و یال ها، حتماً به این رأس می رسیم)، توقف می کنیم.

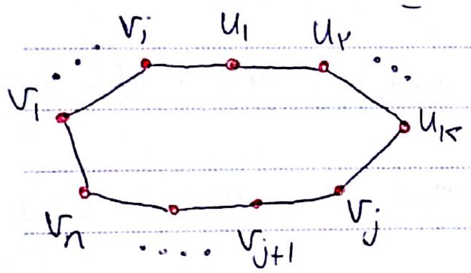


حال این دور را که شامل v_i است در نظر بگیرید. (دور C)

این دور وجوه چندوجهی را به ۲ بخش افراز می کند. نام یک بخش را A و نام بخش دیگر را B می گذاریم.

حال ادعا می کنیم در هر یک از A و B محیط یکی از وجوه تشکیل دور می دهد.

یکی از این دو مجموعه (مثلاً A) را در نظر بگیرید. یکی از رأس های دور C را در نظر بگیرید. از این رأس به سمت A شروع به حرکت می کنیم و در جهت یال ها حرکت می کنیم تا برای اولین بار به یکی از رأس های دور C باز گردیم.



در این صورت دور روبه رو تشکیل می شود.

اگر دور تشکیل شده محیط یک وجه باشد که مساله حل می شود. در غیر این صورت این دور نیز A را به دو مجموعه از وجوه مانند A_1 و A_2 افراز می کند. با توجه به اینکه با هر بار انجام این عملیات، تعداد وجوه مجموعه های افرازی کم می شود و با توجه به این که متناهی است در نهایت به یک وجه می رسیم که محیطش پیموده می شود ✓

۱۳۰[M23]

ادعا می‌کنیم برای هر $r \in \{0,1,\dots,m-1\}$ جایگشت‌های با $\text{inversion} \equiv qm+r$ تعداد برابری دارند. برای این کار ثابت می‌کنیم برای هر r بین جایگشت‌ها با اینورژن $mq+r$ و $mq+r+1$ تناظر یک به یک وجود دارد. پس برای q های مختلف نیز ثابت می‌شود.

فرض کنید $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ و $\text{inv}(\sigma) \overset{m}{\equiv} r+1$.

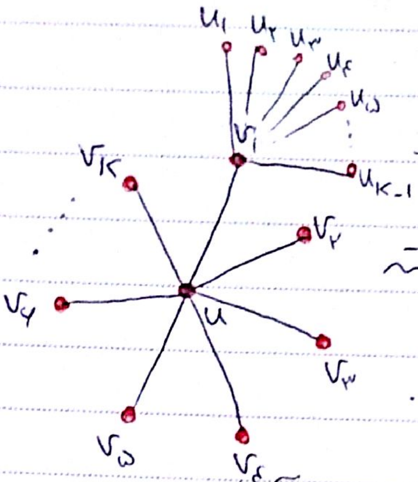
اگر σ مرتب نباشد وجود دارد i به طوری که $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ زیرا در غیر این صورت ترتیب صعودی خواهد بود. حال اگر این دو را عوض کنیم یکی از $\text{inv}(\sigma)$ کم می‌شود و به یک جایگشت با $\text{inv}(\sigma') \overset{m}{\equiv} r$ می‌رسیم. این نگاشت یک به یک است. زیرا که $\sigma'(i) < \sigma'(i+1)$ و جای این دو را عوض کنیم به σ می‌رسیم که $\text{inv}(\sigma) \overset{m}{\equiv} r+1$.

حال یک نگاشت اخر که برای پوشایی ادامه شد، نگاشتی پوشا از $mq+r+1$ ها به $mq+r$ ها است.
معین

بنابراین طبق قضیه کانتور تعداد جایگشت‌ها با $\text{inv}(\sigma) \overset{m}{\equiv} r$ برابر است با تعداد جایگشت‌ها با $\text{inv}(\sigma) \overset{m}{\equiv} r+1$.

1.1.27

سوال ۵ : ( )

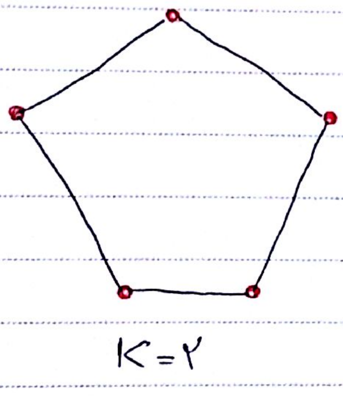


یک رأس دلخواه را در نظر بگیرید. این رأس حداقل k همسایه دارد. نام این همسایه‌ها را v_1 ، v_2 ، ... ، v_k می‌گذاریم. v_i ها هیچ همسایه‌ی مشترکی غیر از u نمی‌توانند داشته باشند، زیرا در این صورت دوری به طول ۴ به وجود می‌آید که خلاف فرض $g(G)=5$ است.

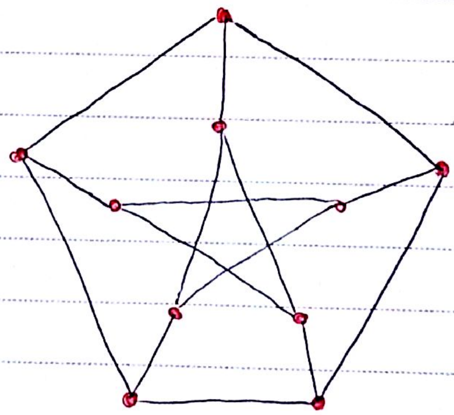
از طرف دیگر، v_i ها نیز نمی‌توانند با هم مجاور باشند، چرا که در این صورت دوری به طول ۳ به وجود می‌آید که خلاف فرض است.

بنابراین، اگر رأس v_i را در نظر بگیریم، حداقل $k-1$ همسایه‌ی دیگر دارد ($u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$)

$$\rightsquigarrow n(G) \geq 1 + k + k \times (k-1) \rightsquigarrow n(G) \geq k^2+1$$



$K=2$



$K=3$