دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۹

لم فارکاش

جلسه دهم

نگارنده: مریم مهدوی

۱ مروری بر مباحث گذشته

ابتدا مباحث مربوط به دوگان برنامه‌ریزی خطی و اثبات قضیه‌ی دوگانی قوی [1] را مرور می‌کنیم. اگر برنامه‌ریزی خطی اولیه P برنامه‌ریزی سمت چپ باشد، دوگان آن D به صورت برنامه‌ریزی خطی سمت راست خواهد بود.

بیشینه کن $c^T x$	کمینه کن $b^T y$
که $Ax \leq b$	که $A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

به عبارتی دوگان یک برنامه‌ریزی خطی کرانی برای تابع هدف برنامه‌ریزی آن به ما می‌دهد. برای تمامی فرم‌های برنامه‌ریزی خطی، بسته به جهت نامساوی‌ها در قیود، می‌توان دوگان آن را ارائه داد که در جدول صفحه‌ی بعد تمام حالات قابل مشاهده است.

[1] Duality Theorem

	Primal linear program	Dual linear program
Variables	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$y_1, y_2, \ldots, y_m$
Matrix	A	A^T
Right-hand side	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
Objective function	$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
Constraints	ith constraint has $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	jth constraint has $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

چیزی که برای ما اهمیت دارد، وضعیت جواب‌های این دو برنامه‌ریزی خطی نسبت به هم است. همان طور که در جدول زیر می‌توان دید، تنها ۴ حالت از بین ۹ حالتی که وضعیت شدنی یا کراندار بودن هر برنامه‌ریزی خطی با دوگانش می‌تواند داشته باشد، امکان‌پذیر است. این موضوع در قضیه‌ی دوگانی قوی ثابت می‌شود.

	بهینه	شدنی بی‌کران	نشدنی
نشدنی	−	+	+
شدنی بی‌کران	−	−	+
بهینه	جواب‌های برابر	−	−

مشخصا حالتی که برای ما جالب توجه است، حالتی است که هم خود برنامه‌ریزی خطی و هم دوگانش جواب بهینه دارند، که همان طور که در بالا مشخص شده است، این جوابها برابرند.

بار دیگر مروری اجمالی داریم بر اثبات قضیه‌ی دوگانی قوی که جلسه‌ی گذشته دیدیم. از آن جا که می‌خواهیم با استفاده از روش سیمپلکس قضیه را اثبات کنیم، برنامه‌ریزی خطی را به فرم معادله‌ای دربیاوریم، یک سری متغیر اضافه می‌کنیم تا به شکل زیر درآید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \bar{c}^T\bar{x} \\ \text{که} \quad & \bar{A}\bar{x} = b \\ & \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $\bar{x} = (x_1, ..., x_{n+m})$ ، $\bar{c} = (c_1, ..., c_n, 0, ..., 0)$ و $\bar{A} = (A \mid I_m)$. حال طبق قضیه‌ای که داشتیم، اگر این برنامه‌ریزی خطی شدنی و کراندار باشد، یک جواب شدنی بهینه دارد. از روی تابلوی آخر جواب شدنی که به صورت زیر است

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N$$
$$z = z_0 + \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N$$

از روی این تابلو جواب دوگان را می‌سازیم:

$$\mathbf{y}^* = (\bar{c}^T\bar{A}_B^{-1})^T$$

حال باید ثابت کنیم که y^* یک جواب شدنی برای دوگان است و هم چنین

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

اثبات این تساوی را در جلسه‌ی قبل داشتیم. کافیست از $\mathbf{c}^Tx^*$ شروع کنیم و در مرحله اول متغیرهای اضافی که در تابع هدف نیستند را اضافه می‌کنیم که به $\bar{c}^T$ و $\bar{x}^*$ می‌رسیم و از آن جا که m ستون آخر $\bar{c}^T$ طبق تعریف صفر است، داریم: $\mathbf{c}^Tx^* = \bar{\mathbf{c}}^T\bar{\mathbf{x}}^*$ در ادامه، چون $\bar{\mathbf{x}}_N^* = 0$ خواهیم داشت: $\mathbf{c}^Tx^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{x}}_B^*$ با توجه به تابلوی آخر می‌توانیم $\bar{\mathbf{x}}_B^*$ را به صورت $\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$ بنویسیم. در نهایت با جابه‌جایی پرانتزها و دقت به تعریف y^* نهایتا به این می‌رسیم:

$$\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{x}}_B^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T(\bar{\mathbf{A}}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{A}}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

پس ثابت شد که

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

حال باید ثابت کنیم که جوابها شدنی هستند که به عبارتی دو شرط زیر برقرارند:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* \geq c$$
$$\mathbf{y}^* \geq 0$$

از آن جا که $\mathbf{y}^* \geq 0$ معادل است با $\mathbf{I}_m\mathbf{y}^* \geq 0$ و می‌دانیم طبق تعریف $\bar{\mathbf{A}} = (A \mid I_m)$ کافیست ثابت کنیم که

$$\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

با قرار دادن مقدار y^* و ترانهادگیری، نهایتا به

$$\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{y}^* = \bar{\mathbf{A}}^T(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{A}}_B^{-1})^T = (\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{A}}_B^{-1}\bar{\mathbf{A}})^T$$

می‌رسیم که بردار n+m تایی $(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{\mathbf{A}}_B^{-1}\bar{\mathbf{A}})^T$ را w می‌نامیم. درایه‌های w را در دو دسته‌ای که داخل پایه هستند و آن‌هایی که نیستند در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\mathbf{w}_B = (\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{\mathbf{A}}_B)^T = (\bar{\mathbf{c}}_B^T\mathbf{I}_m)^T = \bar{\mathbf{c}}^T$$

به عبارتی هنگام ساخت جواب برای یک برنامه‌ریزی خطی تنها متغیرهایی را اجازه داریم غیرصفر در نظر بگیریم(یعنی به عنوان پایه انتخاب کنیم) که معادله‌ی متناظر آن متغیر در دوگان آن برنامه‌ریزی، تساوی باشد. حال درایه‌های w که داخل پایه نیستند را در نظر می‌گیریم و آن بخش بردار را $\mathbf{w}_N$ می‌نامیم. با توجه به عملیات‌هایی که در روش سیمپلکس و به دست آوردن تابلوی آخر توضیح دادیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{w}_B = (\bar{\mathbf{c}}_N^T \bar{\mathbf{A}}_B^{-1} \bar{\mathbf{A}}_N)^T = \bar{\mathbf{c}}_N - \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{c}}_N$$

پس این بخش از حکم نیز ثابت شد.

در ادامه مثالی را ارائه می‌دهیم که در آن دوگان یک برنامه‌ریزی خطی تعبیر جدید و متفاوتی از مسئله به ما می‌دهد.

۲ قیمت‌های سایه[2]

کارخانه‌ای n نوع کالای نهایی و m نوع کالای اولیه تولید می‌کند. قیمت هر کالای نهایی j برابر C_j است. هر درایه از ماتریس a_{ij} تعیین می‌کند که برای تولید کالای نهایی j به چه تعداد کالای اولیه‌ی i نیاز است. محدودیت مسئله تعداد کالای اولیه‌ی i است که حداکثر b_i تا از آن داریم. می‌خواهیم سود کارخانه را بیشینه کنیم. اگر x_j را تعداد کالای نهایی تولیدی کارخانه در نظر بگیریم، می‌توان برنامه‌ریزی خطی و دوگان آن را به صورت زیر برای این مسئله ارائه کرد.

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots m\} \\ & x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots n\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \geq C_i, \quad j \in \{1, 2, \ldots n\} \\ & y_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots m\} \end{aligned}$$

می‌خواهیم ببینیم که کالاهای اولیه چه ارزشی دارند. در واقع اگر از کالای b_i تعداد ϵ_i بیشتر داشته باشیم، چه تاثیری در سود کارخانه خواهد داشت. برنامه‌ریزی خطی و دوگان را بازنویسی می‌کنیم تا به صورت درآید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + \epsilon_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots m\} \\ & x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots n\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{i=1}^{m} (b_i + \epsilon_i) y_i \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \geq C_i, \quad j \in \{1, 2, \ldots n\} \\ & y_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots m\} \end{aligned}$$

تغییری که در تابع هدف دوگان می‌بینیم(با توجه به این که از ابتدا کلیت دوگان دادن کران بالایی برای تابع هدف برنامه‌ریزی خطی اولیه بود) نشان می‌دهد که به ازای میزان بیش‌تری از کالاهای اولیه، سود کارخانه به میزان $\epsilon_i y_i$ اضافه می‌شود. این نتیجه را با توجه به قضیه‌ی دوگانی قوی می‌گیریم که بیان می‌کرد جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی و دوگانش برابرند. پس با این تحلیل، می‌توانیم ارزشی معادل y_i برای کالاهای اولیه در نظر بگیریم؛ در حالی که در نگاه اول شاید نمی‌توانستیم معنایی برای این متغیرها فراتر از کاربردی که در توصیف دوگان دارند، متصور باشیم.

[2]shadow prices

۳ لم فارکاش[3] و دوگانی

این لم به ما کمک می‌کند قضیه‌ی دوگانی قوی را به نحو دیگری اثبات کنیم. لم فارکاش را می‌توان به عبارتی به عنوان شکل ساده‌تری از برنامه‌ریزی خطی در نظر بگیریم که در آن صرفا با قیود سر و کار داریم و اثری از تابع هدف نیست، و به دنبال نتایجی از قبیل داشتن یا نداشتن جواب هستیم.

لم فارکاش: اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد و b یک بردار عضو $\mathbb{R}^m$ آن گاه همیشه دقیقا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

F1) بردار $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به صورتی که $Ax = b$ و $x \geq 0$

F2) بردار $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به صورتی که $y^T A \geq 0^T$ و $y^T b < 0$

برای داشتن شهود بهتر، توصیف هندسی‌ای از آن چه این لم بیان می‌کند ارائه می‌دهیم. بدین منظور ابتدا کنج محدب را تعریف می‌کنیم.

کنج محدب: فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ باشند. کنج محدب تولیدشده توسط این بردارها، مجموعه‌ی تمام ترکیب‌خطی‌هایی است که همه‌ی ضرایب در آن نامنفی باشند:

$$\{t_1a_1 + t_2a_2, \ldots, t_na_n : t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0\}$$

به عبارتی دیگر کنج محدب یک پوش محدب برای پرتو[4] های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ است که $\{p_i = ta_i : t \geq 0\}$ است که از مبدا آغاز می‌شود و از نقطه‌ی a_i می‌گذرد.

لم فارکاش(صورت هندسی): اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ بردارهایی در $\mathbb{R}^m$ باشند آنگاه دقیقا یکی از دو حالت زیر برقرار است:

$F1'$) b در کنج محدب C تولیدشده توسط $a_1, a_2, \ldots, a_n$ قرار دارد.

$F2'$) ابرصفحه‌ی h وجود دارد که از نقطه‌ی 0 می‌گذرد و داریم:

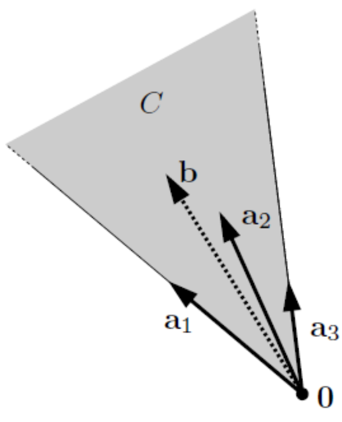
$$h = \{x \in \mathbb{R}^m : y^T x = 0\}$$

که به ازای y مناسبی در $\mathbb{R}^m$ تمام کنج محدب C در یک طرف y و b به طور کامل در طرف دیگر آن قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، به ازای تمام $i = 1, 2, \ldots, n$، $y^T a_i \geq 0$ و $y^T b < 0$

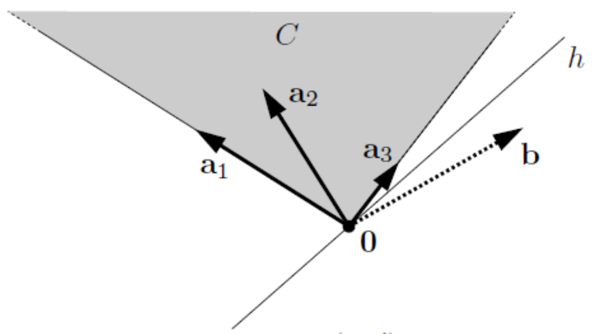
به راحتی می‌توان نشان داد که دو حالت صورت هندسی لم با صورت اولیه‌ای که بیان کردیم، معادل است. کافیست a_i ها در $F1'$ را ستون‌های ماتریس A در حالت F1 صورت اولیه در نظر بگیریم. وجود جواب نامنفی که در حالت F1 از آن صحبت کردیم را می‌توان به صورت $b = t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ بیان کرد که به وضوح $b \in C$ است. معادل بودن شروط دو حالت $F2'$ و F2 نیز روشن است. چون در F2 داشتیم ماتریس A مثبت است، معادل این است که بگوییم ستون‌هایش همگی مثبت هستند و این را در شرط $y^T a_i \geq 0$ حالت $F2'$ داریم. $y^T b < 0$ هم که در هر دو وجود دارد پس حالت‌های $F2'$ و F2 معادلند.

در واقع لم فارکاش حالت ساده‌تری از قضیه‌ی جداسازی برای مجموعه‌های محدب است.

برای داشتن شهود بیش‌تر نسبت به صورت هندسی لم، به مثال زیر که در آن m=2 و n=3 توجه کنید:



(F1′)



(F2′)

همان طور که می‌بینید یا b درون کنج محدب C قرار دارد یا برداری مانند y که بر صفحه‌ی h عمود است و آن را به صورت یکتا مشخص می‌کند وجود دارد که کنج C یک طرف آن و بردار b در طرف دیگرش قرار دارد.

[3] Farkas Lemma
[4] ray

صورت‌های معادل لم فارکاش لم فارکاش صورت‌های متعدد معادلی دارد که تا این جا به دو تا از آن‌ها اشاره کردیم. در ادامه سه صورت دیگر را می‌بینیم که به راحتی می‌توان نشان داد که معادل همند. این سه صورت هر کدام به نوعی بیانگر یک برنامه‌ریزی خطی هستند، بدون داشتن تابع هدف، و می‌خواهیم بدانیم که چه هنگام جواب شدنی دارند.

i) دستگاه $Ax = b$ جواب نامنفی دارد اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in \mathbb{R}^m$ که $y^T A \geq 0^T$ است، شرط $y^T b \geq 0$ نیز صدق کند.

ii) دستگاه $Ax \leq b$ جواب نامنفی دارد اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in \mathbb{R}^m$ نامنفی که $y^T A \geq 0^T$ شرط $y^T b \geq 0$ نیز برقرار باشد.

iii) دستگاه $Ax \leq b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in \mathbb{R}^m$ نامنفی که $y^T A = 0^T$ شرط $y^T b \geq 0$ نیز برقرار باشد.

هر کدام از این صورت‌ها یک شکل از برنامه‌ریزی خطی را مشخص می‌کنند؛ مثلا در i برنامه‌ریزی خطی‌ای داریم که قیودش به صورت معادله‌ای هستند و می‌خواهیم بدانیم جواب نامنفی دارد یا نه. در ii باز هم می‌خواهیم بدانیم که برنامه‌ریزی خطی‌مان جواب نامنفی دارد یا نه با این تفاوت که قیود به شکل نامعادله‌اند. در نهایت iii نیز با قیود نامعادله‌ای است و صرفا می‌خواهیم بدانیم که برنامه‌ریزی خطی جواب دارد یا نه. اثبات این که این صورت‌ها معادلند در کتاب آمده است و تنها به روند آن اشاره می‌کنیم. فرض کنید صورت i را به شکل $p_i \iff q_i$ نشان دهیم. برای معادل بودن i با ii کافیست ثابت کنیم که $p_{ii} \iff p_i$ و $q_{ii} \iff q_i$ که این کار به سادگی صورت می‌گیرد. در نهایت با دانستن این که همه‌ی این صورت‌ها معادلند، اثبات درستی یکی از آن‌ها درستی باقی را نتیجه خواهد داد.

برای مقایسه و اجماع بهتر تمام صورت‌های معادل لم فارکاش را در جدول زیر کنار هم آورده‌ایم. البته ما به سه صورت از لم اشاره کردیم اما جدول زیر ۴ صورت را نشان می‌دهد. دلیل ذکر نشدن صورت آخر(که نشان می‌دهد چه هنگامی یک دستگاه معادلات خطی جواب دارد) این است که آن چنان به کارمان نمی‌آید.

	The system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 0$

۴ اثبات دوگانی با لم فارکاش

در این قسمت ثابت می‌کنیم با فرض درستی لم فارکاش، قضیه‌ی دوگانی قوی برقرار است. درستی لم فارکاش را در جلسه‌ی آینده ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم برنامه‌ریزی خطی زیر که P می‌نامیم، جواب بهینه‌ی x^* داشته باشد.

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

همان طور که در اثبات قضیه‌ی دوگانی با روش سیمپلکس داشتیم، نشان می‌دهیم که دوگان P (که آن را D می‌نامیم) جواب بهینه دارد و مقدار آن با جواب P یکی است. بدین منظور باید بهینه بودن جواب را در چهارچوب لم فارکاش صورت‌بندی کنیم(چون چیزی که در لم فارکاش بررسی می‌شود جواب داشتن یا نداشتن یک دستگاه است). برای این کار به مفهوم بهینه بودن جواب دقت می‌کنیم. فرض کنید:

$$\gamma = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

در این صورت، چون طبق فرض x^* جواب بهینه‌ی P است، دستگاه زیر باید جواب داشته باشد:

$$Ax \geq b, \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq \gamma$$

اما دستگاه زیر به ازای هر $\epsilon \geq 0$ هیچ جواب نامنفی‌ای ندارد.

$$Ax \geq b, \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \geq \gamma + \epsilon$$

به عبارتی دستگاه اول بیان می‌کند که مقدار تابع هدف برابر مقدار آن به ازای جواب بهینه می‌شود اما مقداری بیشتر از آن را اختیار نمی‌کند(همان جواب نداشتن دستگاه دوم) که این همان تعریف بهینه بودن است. حال ماتریس $(m+1) \times n$ تایی $\hat{A}$ و بردار $\hat{b}_\epsilon \in \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ -c^T \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_\epsilon = \begin{pmatrix} b \\ -\gamma - \epsilon \end{pmatrix}$$

روشن است که دستگاه اول را به صورت

$$\hat{A}x \leq \hat{b}_0$$

و دستگاه دوم را به صورت

$$\hat{A}x \leq \hat{b}_\epsilon$$

می‌توان بازنویسی کرد. صورت (ii) لم فارکاش را در نظر می‌گیریم. همان طور که بالاتر اشاره کردیم برای بهینه بودن x^* دستگاه دوم به ازای $\epsilon \geq 0$ باید جواب نامنفی نداشته باشد. پس اگر از عبارت این صورت از لم نقیض بگیریم نتیجه می‌دهد که یک بردار نامنفی وجود دارد که $\hat{y} = (u, z) \in \mathbb{R}^m$ (در واقع ستون‌های مربوط به معادلات A را به عنوان u جدا کرده‌ایم و z همن ستون‌های مربوط به معادلات $-c^T$ است) که $\hat{y}^T\hat{A} \geq 0^T$ اما $\hat{y}^T\hat{b}_\epsilon \leq 0$ حال این دو شرط را نسبت به u و z باز می‌کنیم تا به عبارت‌های زیر برسیم:

$$A^Tu \geq zc \qquad\qquad \hat{b}^Tu < z(\gamma + \epsilon)$$

باید از روی این‌ها جوابی برای دوگان بسازیم؛ طبق فرض می‌دانیم که u مثبت است، پس تنها تفاوت عبارات بالا با دستگاه دوگان، z اضافی آن است. می‌خواهیم با تقسیم دو طرف بر z آن را ساده کنیم اما باید مطمئن باشیم که ناصفر است. بدین منظور فرض کنید که $\epsilon = 0$ باشد که در این صورت دستگاه جواب نامنفی دارد و خود بردار $\hat{y}^T$ باید در شرط $\hat{y}^T\hat{b}_0 \geq 0$ صدق کند. این شرط نتیجه می‌دهد $\hat{b}^Tu \geq z\gamma$. حال گر $z = 0$ باشد، با نامساوی اکید $\hat{b}^Tu < z(\gamma + \epsilon)$ در تناقض خواهد بود. پس $z \neq 0$ اکنون می‌توانیم بردار v را به صورت زیر تعریف کتیم:

$$v := \frac{1}{z}u \geq 0$$

پس خواهیم داشت:

$$A^Tv \geq c \qquad\qquad \hat{b}^Tv < \gamma + \epsilon$$

v یک جواب شدنی برای دوگان است و مقدار تابع هدف برای آن کوچکتر از $\gamma + \epsilon$ است. حال طبق قضیه‌ی دوگانی ضعیف می‌دانیم مقدار تابع هدف برای هر جواب شدنی از دوگان D حداقل برابر γ است. پس D یک برنامه ریزی خطی شدنی و کراندار است، پس دارای جواب بهینه‌ی y^* است. آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\gamma \leq b^Ty^* < \gamma + \epsilon$$

که نتیجه می‌دهد

$$b^Ty^* = \gamma$$

بس ثابت شد جواب P و D برابر است. بنابراین قضیه‌ی دوگانی قوی را به طور کامل اثبات کردیم.

۵ منابع

[1] Bernard Gärtner and Jirí Matoušek. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.