

برای حل این آزمونک می‌توانید از جزوه و کتاب استفاده کنید اما نمی‌توانید از مطالب دیگر در اینترنت استفاده کنید و نمی‌توانید با دیگران مشورت کنید.

۱ ماتریس تبدیل فوریه

(۲ نمره)

تعریف ماتریس تبدیل فوریه و ماتریس تبدیل فوریه معکوس را بنویسید.

۲ در عمل

(۴ نمره)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

آ (۲ نمره) به ازای چه k ‌هایی دستگاه معادلات زیر حداقل یک جواب k -تک (جوابی که حداکثر k درایه غیر صفر داشته باشد) دارد؟ چرا؟

ب (۲ نمره) به ازای چه k ‌هایی دستگاه معادلات زیر دقیقاً یک جواب k -تک (جوابی که حداکثر k درایه غیر صفر داشته باشد) دارد؟ چرا؟

۳ کند اما مطمئن

(۳ نمره)

الگوریتمی (احتمالاً با زمان اجرایی نمایی) ارائه کنید که با گرفتن A ، b ، و k ، در صورت وجود جوابی برای برنامه‌ریزی ریاضی زیر ارائه کند

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \|x\|_0 &= k \end{aligned}$$

۴ خلاصه‌سازی بردار

(۶ نمره)

می‌خواهیم ساختمان داده‌ای طراحی کنیم که مشابه بردار n بعدی از اعداد حقیقی کار کند اما حدوداً $0.75n$ تا عدد حقیقی در حافظه نگه‌داری کند. همچنین می‌خواهیم سه عملیات زیر را بتوان با ساختمان داده اجرا کرد:

- آماده‌سازی: همه درایه‌های بردار را صفر می‌کند.
- بازیابی: یک بردار شامل n عدد حقیقی برمی‌گرداند که دقیقاً برابر است با مقداری که قرار است ساختمان داده ما نگه‌داری کرده باشد.
- افزایش: دو عدد i و $r \in \mathbb{R}$ می‌گیرد و به درایه i -ام از بردار مقدار r را اضافه می‌کند.

طبیعتاً نمی‌توان ساختمان داده‌ای با مشخصات بالا ساخت. اما در صورتی که تضمین کنیم فقط وقتی که بردار ما $\lfloor 0.75n \rfloor$ عدد غیر صفر در خود دارد تابع بازیابی را صدا می‌زنیم، می‌توان این ساختمان داده را تولید کرد. ساختمان داده شما کافی است با احتمال زیادی درست کار کند.

آ (۳ نمره) هر کدام از سه عملیات را چگونه پیاده‌سازی می‌کنید؟ (توجه کنید که در عملیات آغازین ممکن است الگوریتم شما فعالیت‌هایی برای ادامه کارش انجام بدهد).

ب (۳ نمره) اثبات کنید هر سه عملیات شما درست کار می‌کند.

راهنمایی: از روش BP استفاده کنید.