بسم الله الرحمن الرحيم

جلسه دهم

درس تحقیق در عملیات

دوگان

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{minimize } \mathbf{b}^T\mathbf{y} \text{ subject to } A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ and } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Dualization Recipe

	Primal linear program	Dual linear program
Variables	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$y_1, y_2, \ldots, y_m$
Matrix	A	A^T
Right-hand side	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
Objective function	$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
Constraints	ith constraint has $\leq$ $\geq$ $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	jth constraint has $\geq$ $\leq$ $=$

دوگان

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{minimize } \mathbf{b}^T\mathbf{y} \text{ subject to } A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ and } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

قضیه دوگانی

	نشدنی	شدنی بی‌کران	بهینه
نشدنی	+	+	−
شدنی بی‌کران	+	−	−
بهینه	−	−	جواب‌های برابر

قضیه دوگانی ضعیف:
اولیه <= دوگان

اثبات دوگانی به کمک روش سیمپلکس

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{maximize } \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}} \text{ subject to } \bar{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \text{ and } \overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$$

$$\overline{\mathbf{c}} = (c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)$$

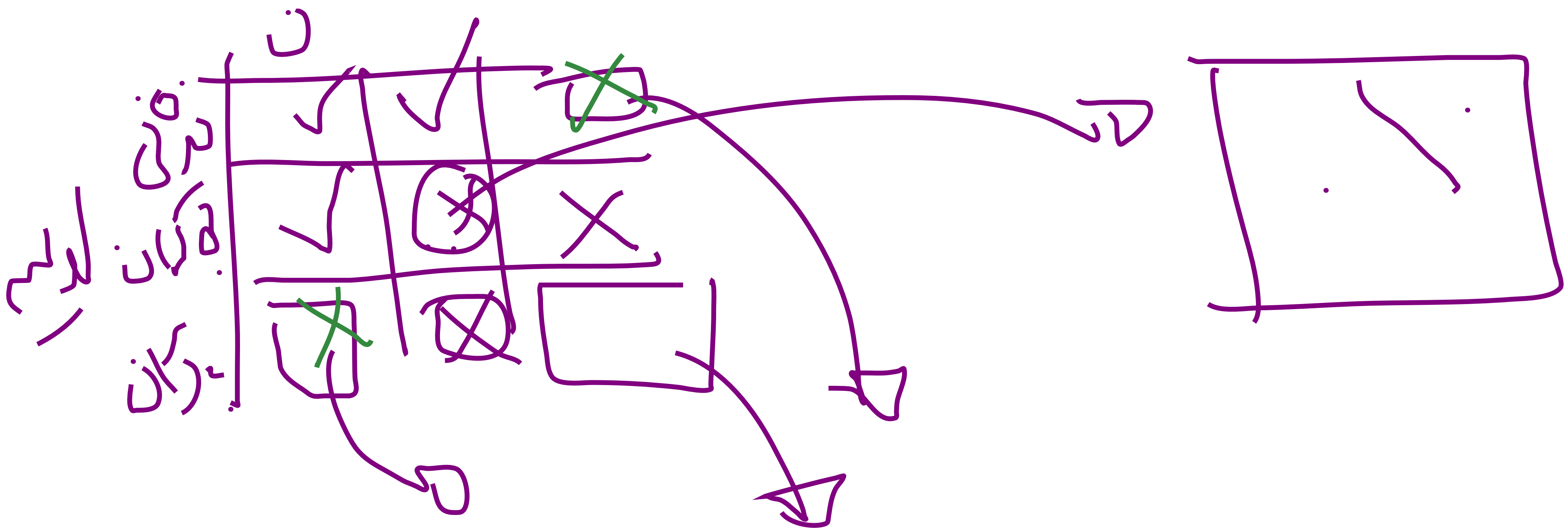
$$\bar{A} = (A \,|\, I_m)$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_B & = & \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N \\ \hline z & = & z_0 + \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N \end{array}$$

$\mathbf{y}^* = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$ یک جواب شدنی از مساله‌ی دوگان است و

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}^*} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$$

اگر این را اثبات کنیم:
تمام!



$\mathbf{y}^* = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$ یک جواب شدنی از مساله‌ی دوگان است و

$$\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

اگر این را اثبات کنیم:

تمام!

$$\mathbf{y}^* = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_N^* = \mathbf{0},$$

قسمت اول اثبات: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T\overline{\mathbf{x}}_B^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*.$$

متغیرهای
اضافی در
تابع هدف
نیتند

$$\mathbf{y}^* = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_N^* = \mathbf{0},$$

قسمت اول اثبات: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$

$\bar{x}_N{}^* = 0$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T\overline{\mathbf{x}}_B^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*.$$

متغیرهای اضافی در تابع هدف نیتند

قسمت اول اثبات: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$

$$\mathbf{y}^* = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_N^* = \mathbf{0},$$

$\bar{x}_N{}^* = 0$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T\overline{\mathbf{x}}_B^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*.$$

متغیرهای اضافی در تابع هدف نیتند

تعریف y^*

قسمت اول اثبات: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$

$$\mathbf{y}^* = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_N^* = \mathbf{0},$$

$\bar{x}_N{}^* = 0$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T\overline{\mathbf{x}}_B^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*.$$

متغیرهای اضافی در تابع هدف نیتند

تعریف y^*

قسمت اول اثبات: $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$

$$\mathbf{y}^* = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B^* = \bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_N^* = \mathbf{0},$$

$\bar{x}_N{}^* = 0$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T\overline{\mathbf{x}}_B^* = \overline{\mathbf{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = (\overline{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*.$$

متغیرهای اضافی در تابع هدف نیتند

x^* در لحظه پایانی

تعریف y^*

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

(A | I)^{T}

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{y}^* = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* = \bar{A}^T(\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A})^T$$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$$

$$\bar{A}^T(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})^T = \underbrace{(\bar{\mathbf{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A})^T}_{\mathbf{w}}$$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \overline{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{w}_B = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B)^T = (\overline{\mathbf{c}}_B^T I_m)^T = \overline{\mathbf{c}}_B$$

قسمت دوم اثبات: $A^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ and $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$

$$\bar{A}^T\mathbf{y}^* \geq \overline{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{w}_B = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B)^T = (\overline{\mathbf{c}}_B^T I_m)^T = \overline{\mathbf{c}}_B$$

r ≤ 0

$$\mathbf{w}_N = (\overline{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N)^T = \overline{\mathbf{c}}_N - \mathbf{r} \geq \overline{\mathbf{c}}_N$$

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{x}_B & = & \mathbf{p} & + & Q\,\mathbf{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N \end{array}$$

$$Q = -\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N$$

r چگونه تولید شده؟

حذف x_B

قیمت‌های سایه؟!

n نوع کالای نهایی

m نوع کالای اولیه

c_j : قیمت کالای نهایی j ام

a_{ij} : یک واحد کالای نهایی j ام
چه مقدار کالای اولیه i ام نیاز دارد

b_i : مقدار کالای اولیه i ام

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P)$$

$$(y_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

n نوع کالای نهایی

m نوع کالای اولیه

c_j : قیمت کالای نهایی jام

a_{ij} : یک واحد کالای نهایی jام
چه مقدار کالای اولیه iام نیاز دارد

b_i : مقدار کالای اولیه iام

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (D)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,m$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P)$$

$$(y_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (D)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,m$$

n نوع کالا نهایی

m نوع کالا اولیه

c_j : قیمت کالا نهایی j ام

a_{ij} : یک واحد کالا نهایی j ام
چه مقدار کالا اولیه i ام نیاز دارد

b_i : مقدار کالا اولیه i ام

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P)$$

$$(y_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n$$

n نوع کالا نهایی

m نوع کالا اولیه

c_j : قیمت کالاهای نهایی j ام

a_{ij} : یک واحد کالای نهایی j ام چه مقدار کالای اولیه i ام احتیاج دارد

b_i : مقدار کالای اولیه ام

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (D)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m$$

ارزش مواد اولیه؟!

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P)$$

$$(y_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

n نوع کالا نهایی

m نوع کالا اولیه

c_j : قیمت کالای نهایی j ام

a_{ij} : یک واحد کالای نهایی j ام چه مقدار کالای اولیه i ام نیاز دارد

b_i : مقدار کالای اولیه i ام

$$\min \sum_{i=1}^{m} (b_i + \varepsilon_i) y_i \qquad (D)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum y_i^* \varepsilon_i$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P)$$

$$(y_i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

n نوع کالای نهایی

m نوع کالای اولیه

c_j : قیمت کالای نهایی j ام

a_{ij} : یک واحد کالای نهایی j ام چه مقدار کالای اولیه i ام احتیاج دارد

b_i : مقدار کالای اولیه

تعبیر

$$\sum y_i^* \varepsilon_i$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} (b_i + \varepsilon_i) y_i \qquad (D)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

لم فارکاش و دوگانی

لم فارکاش

همیشه دقیقا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

(F1) *There exists a vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *satisfying* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *and* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

(F2) *There exists a vector* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *such that* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *and* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$.

convex cone generated by $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$

$$\left\{ t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n : t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0 \right\}$$

?

$\mathbf{b}$

لم فارکاش (صورت هندسی)

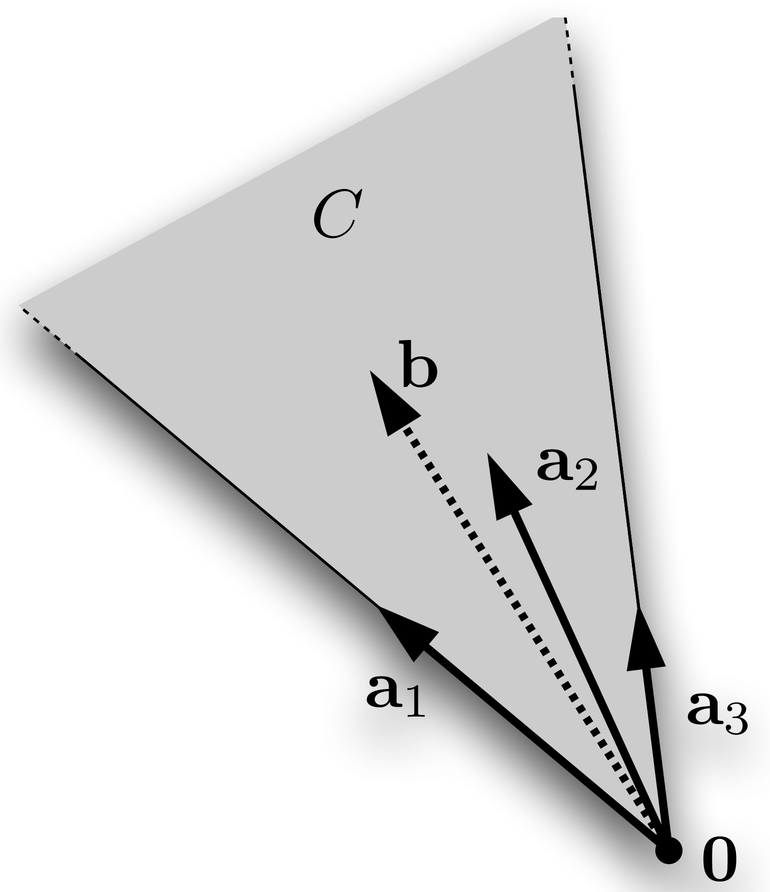
همیشه دقیقا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

(F1′) *The point* $\mathbf{b}$ *lies in the convex cone* C *generated by* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

(F2′) *There exists a hyperplane* h *passing through the point* $\mathbf{0}$, *of the form*

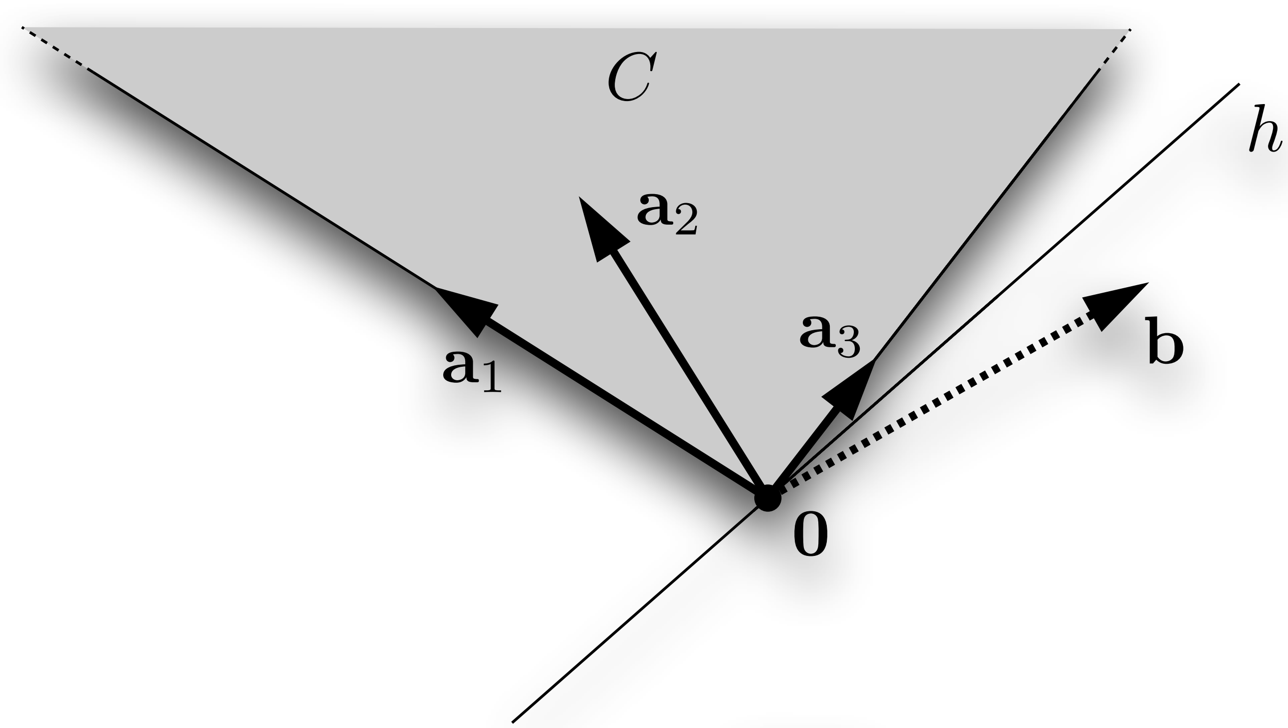
$$h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0\}$$

for a suitable $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *such that all the vectors* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *(and thus the whole cone* C*) lie on one side and* $\mathbf{b}$ *lies (strictly) on the other side. That is,* $\mathbf{y}^T\mathbf{a}_i \geq 0$ *for all* $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $\mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$.



C
$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{0}$

(F1′)



C
h
$\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{0}$

(F2′)

لم فارکاش، صورت‌های معادل

(i) *The system* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *has a nonnegative solution if and only if every* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *with* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *also satisfies* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

(ii) *The system* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *has a nonnegative solution if and only if every nonnegative* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *with* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *also satisfies* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$.

(iii) *The system* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *has a solution if and only if every nonnegative* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *with* $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ *also satisfies* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$.

لم فارکاش (اصل)

(F1) *There exists a vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *satisfying* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *and* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

(F2) *There exists a vector* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *such that* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *and* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$.

	The system $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
has a solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$
has a solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iff	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq 0$	$\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ $\Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$

duality from Farkas lemma

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \text{(P)}$$

$$\gamma = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \varepsilon$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ -\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\gamma - \varepsilon \end{pmatrix}$$

شدنی

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_0$$

نشدنی

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon$$

(ii) *The system* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *has a nonnegative solution if and only if every nonnegative* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *with* $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}^T$ *also satisfies* $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0$.

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \quad \hat{\mathbf{y}}^T \hat{A} \geq \mathbf{0}^T \quad \hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{b}}_\varepsilon < 0$$

$$A^T \mathbf{u} \geq z\mathbf{c}, \; \mathbf{b}^T \mathbf{u} < z(\gamma + \varepsilon)$$

$$\mathbf{v} := \frac{1}{z}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

$$A^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c}, \; \mathbf{b}^T \mathbf{v} < \gamma + \varepsilon.$$

شدنی،
بهینه، b0