دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمند اعرابی

پاییز ۱۳۹۹

مثال‌های بیشتر از برنامه‌ریزی خطی

جلسه سوم

نگارنده: حنّانه یعقوبی‌زاده

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسات گذشته، گفته شد که برنامه‌ریزی خطی عبارت است از بهینه‌کردن یک تابع خطی[1] به طوری که قیود خطی داده شده برقرار باشند. هم‌چنین با فضای شدنی[2] و سطوح تراز آشنا شدیم و دیدیم که هر برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به فرم کلّی زیر تبدیل کرد:

$$\text{بیشینه کن} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\text{که} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس $m \times n$، $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$، $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هستند و هدف، یافتن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ است که $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ و مقدار $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ بیشینه باشد. چنین $\mathbf{x}$ ای را جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌نامیم.

هم‌چنین اشاره شد که فضای شدنی می‌تواند تهی، کران‌دار یا بی‌کران باشد. مثال‌هایی هم از یکتا نبودن جواب بهینه یا بی‌نهایت شدن آن دیدیم.

در آخر هم مثال‌های «برنامه‌ی غذایی» و «شبکه‌ی شار» بررسی شدند.

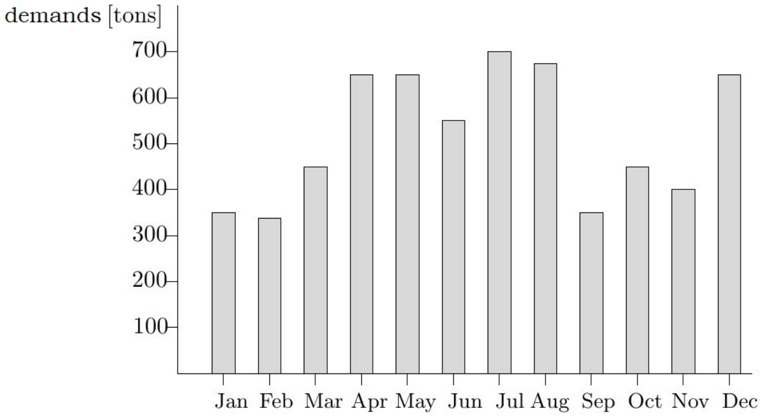
همان‌طور که در جلسه‌ی پیش هم گفته شد، برنامه‌ریزی خطی از آنچه به نظر می‌رسد قوی تر است و مسئله‌های بسیاری هستند که برخلاف ظاهرشان می‌توان آن‌ها را با برنامه‌ریزی خطی مدل کرد. برای روشن‌تر شدن این مسئله، در این جلسه تعدادی مثال دیگر بررسی خواهیم کرد.

[1] تابع هدف ـ Objective Function

[2] Feasible solutions

۲ مسئله فروش بستنی!

یک کارخانه‌ی بستنی‌سازی داریم و می‌خواهیم برای تولید کارخانه یک برنامه‌ی سالانه ارائه بدهیم به طوری که مشخص باشد کارخانه در هر ماه باید چه مقدار بستنی تولید کند.
می‌دانیم تقاضای بستنی در ماه iاُم سال برابر با d_i تُن بستنی است و همه‌ی نیاز بازار باید توسط این کارخانه تأمین شود.



در صورتی که تولید کارخانه در یک ماه بیش‌تر از نیاز آن ماه باشد کارخانه مجبور می‌شود تولید مازاد را در یخچال انبار کند و هزینه‌ی نگهداری از یخچال را بپردازد. با این حساب شاید به نظر برسد بهتر است کارخانه در هر ماه دقیقا به اندازه‌ی نیاز همان ماه بستنی تولید کند اما تغییر میزان تولید در ماه بعد نسبت به ماه فعلی برای کارخانه هزینه بردار است؛ مثلا هزینه‌هایی از قبیل استخدام یا اخراج کارگران، از کار انداختن یا خرید دستگاه و ... به طور دقیق کارخانه باید در پایان هر ماه ۲۰ هزار تومان به ازای هر تُن بستنی اضافه، هزینه یخچال و ۵۰ هزار تومان به ازای هر تُن بستنی، هزینه‌ی تغییر میزان تولید ماه بعد نسبت به این ماه را بپردازد.

می‌خواهیم برنامه‌ی سالانه‌ی کارخانه به گونه‌ای باشد که هزینه‌ی مخارج کارخانه در پایان سال کمینه شود. به علاوه، از آن‌جا که این برنامه فقط برای یک سال نیست و قرار است کارخانه سال‌های زیادی مطابق این برنامه عمل کند، یخچال در ابتدای سال می‌تواند خالی نباشد. هم‌چنین به منظور حذف جزئیات مربوط به اولین سال اجرای برنامه، فرض می‌کنیم کارخانه از ازل (!) برنامه را اجرا می‌کند. [Sli]

سؤال . آیا می‌توانید مثالی ارائه دهید که در برنامه‌ی سالانه‌ی بهینه، یخچال در ابتدای سال (به عبارت دیگر، در انتهای سال) خالی نباشد؟

حال به تبدیل مسئله به برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم:

$$x_i := \text{میزان تولید در ماه } i \text{ اُم}$$
$$s_i := \text{میزان بستنی انبار شده در آخر ماه } i \text{ اُم}$$

هم‌چنین می‌دانیم $s_1 = s_{12} + x_1 - d_1$ و $s_i = s_{i-1} + x_i - d_i$ برای $2 \leq i \leq 12$. پس داریم:

$$\begin{array}{lll}
\text{کمینه کن} & 20\sum_{i=1}^{12} s_i + 50\sum_{i=2}^{12} |x_i - x_{i-1}| + 50|x_1 - x_{12}| & \\
\text{که} & s_{12} + x_1 - d_1 = s_1 & \\
& s_{i-1} + x_i - d_i = s_i & 2 \leq i \leq 12 \\
& x_i \geq 0 & 1 \leq i \leq 12 \\
& s_i \geq 0 & 1 \leq i \leq 12
\end{array}$$

سؤال . آیا می‌توان بدون کم شدن از کلیت، همه یا تعدادی از متغیرهای s_i را برحسب x_iها نوشت تا تعداد متغیرها کمتر شود؟

برنامه ریزی بالا به دلیل وجود قدر مطلق در تابع هدف برنامه‌ریزی خطی نیست. حال می‌خواهیم برنامه‌ریزی فوق را به گونه‌ای تغییر دهیم که برنامه‌ریزی خطی داشته‌باشیم.

گزاره ۱. *برای هر عدد حقیقی k داریم $k = k^+ - k^-$ که:*

$$k^+ = \begin{cases} k & k > 0 \\ 0 & oth \end{cases} \qquad k^- = \begin{cases} -k & k < 0 \\ 0 & oth \end{cases}$$

که با توجه به تعریف فوق می‌توان k^+ را میزان مثبت بودن k و k^- را میزان منفی بودن k در نظر گرفت. هم‌چنین با وجود این تعریف خواهیم داشت $|k| = k^+ + k^-$ که به نوعی باعث حذف قدرمطلق می‌شود.

برای خطی کردن برنامه‌ریزی ارائه شده، با توجه به گزاره‌ی بالا دو نوع متغیر جدید تعریف می‌کنیم:

$y_i :=$ میزان افزایش تولید در ماه i اُم نسبت به ماه قبل

$z_i :=$ میزان کاهش تولید در ماه i اُم نسبت به ماه قبل

با استفاده از این دو متغیر می‌توان برنامه‌ریزی خطی زیر را ارائه داد:

$$\begin{array}{lll}
\text{کمینه کن} & 20\sum_{i=1}^{12} s_i + 50\sum_{i=1}^{12} y_i + z_i & \\
\text{که} & s_{12} + x_1 - d_1 = s_1 & \\
& s_{i-1} + x_i - d_i = s_i & 2 \le i \le 12 \\
& x_1 - x_{12} = y_1 - z_1 & \\
& x_i - x_{i-1} = y_i - z_i & 2 \le i \le 12 \\
& x_i \ge 0 & 1 \le i \le 12 \\
& s_i \ge 0 & 1 \le i \le 12 \\
& y_i \ge 0 & 1 \le i \le 12 \\
& z_i \ge 0 & 1 \le i \le 12
\end{array}$$

سؤال . (آ) نشان دهید مقدار تابع هدف در جواب بهینه‌ی این برنامه‌ریزی از برنامه‌ریزی قبلی بدتر نیست.
(ب) نشان دهید جواب بهینه‌ی این برنامه‌ریزی برابر با برنامه‌ریزی قبلی است.
(پ) آیا با روش فوق مشکل وجود قدر مطلق در مسائل به طور کلی حل می‌شود؟ به عبارت دیگر آیا بعد از حذف قدر مطلق به شیوه‌ی بالا، جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی لزوما بدون تغییر باقی می‌ماند؟

۳ مسئله برازش خط[3]

پس از انتشار یک ویروس خطرناک، تعدادی از مبتلایان مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و داده‌های میزان تب و میزان گلبول سفید آن‌ها استخراج شده‌است. هر زوج مرتب (میزان گلبول سفید، میزان تب) مربوط به یک فرد مبتلا را را می‌توان یک نقطه در $\mathbb{R}^2$ فرض کرد. مسئولین آزمایشگاه در تلاشند بهترین خط ممکن برای این نقاط را پیدا کنند تا در مراجعات سایر بیماران، بدون نیاز به آزمایش خون و از روی میزان تب، بتوانند میزان گلبول سفید بیمار را تخمین بزنند.

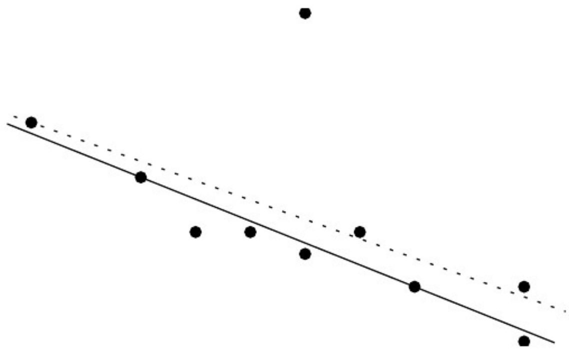
نقاط داده شده را $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ در نظر بگیرید. برای حل این مسئله، اولین چالش معیار خوب بودن خط است. دو راه اصلی برای تشخیص خوب بودن خط وجود دارد:

۱. خط خوب خطی است که $\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$ را تا حد امکان کمینه کند.

۲. خط خوب خطی است که $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ را تا حد امکان کمینه کند.

[3] Line Fitting

از بین دو راه فوق، راه دوم به خاطر به توان ۲ رساندن فاصله، بیشتر از راه اوّل تحت تأثیر داده‌های پرت قرار می‌گیرد. بنابراین استفاده از راه اول نتیجه‌ی بهتری در پی خواهد داشت.
برای مثال در شکل زیر خط پررنگ با راه اول و خط دیگر با راه دوم محاسبه شده‌اند.



پس خواهیم داشت: (توجه کنید a و b متغیر و x_i و y_iها مقادیر ثابت و نشان دهنده‌ی نقاط هستند.)

$$\text{کمینه کن} \quad \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$$

برای حذف قدر مطلق می‌توان مشابه سؤال قبل عمل کرده و برنامه‌ریزی فوق را به برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد:

$$\text{میزان مثبت بودن } s_i := ax_i + b - y_i$$
$$\text{میزان منفی بودن } t_i := ax_i + b - y_i$$

$$\text{کمینه کن} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i + t_i$$
$$(ax_i + b) - y_i = s_i - t_i$$
$$s_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$
$$t_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

گزاره ۲. *برای هر عدد حقیقی k کمینه $x \in \mathbb{R}$ که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، برابر با $|k|$ است.*

$$x \geq k$$
$$x \geq -k$$

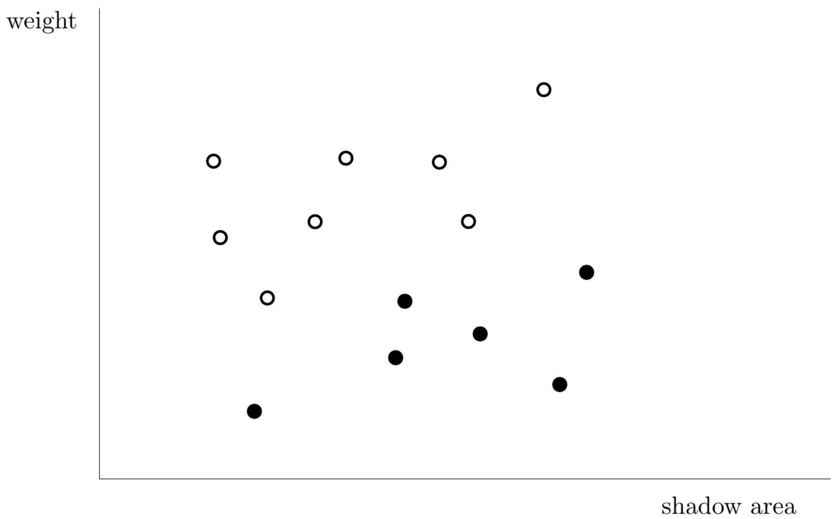
با توجه به گزاره‌ی فوق می‌توانیم برنامه‌ریزی اولیه را به شکل زیر هم تغییر دهیم:

$$\text{کمینه کن} \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$
$$\delta_i \geq ax_i + b - y_i$$
$$\delta_i \geq -(ax_i + b - y_i)$$

مزیت این برنامه‌ریزی به برنامه‌ریزی قبلی، تعداد متغیرهای کمتر ($n + 2$ در برابر $2n + 2$) می‌باشد. اگر راه دوم (مجموع مربعات) را به عنوان معیار خوب بودن خط انتخاب می‌کردیم می‌توانستیم تعداد متغیرها را از این هم کمتر کنیم! به همین خاطر در عمل، اغلب اوقات از کمینه کردن مجموع مربعات برای پیدا کردن بهترین خط استفاده می‌کنند.
سؤال . یک برنامه‌ریزی خطی ارائه دهید که بهترین خط ممکن با معیار کمینه مجموع مربعات را پیدا کند.

۴ مسئله جداسازی نقاط[4]

یک شرکت تهیه و تولید گوشت قصد دارد برای شکار خرگوش از یک ربات شکارچی استفاده کند. از آن‌جا که در محل شکار، هر دو گونه‌ی خرگوش و سمور یافت می‌شوند، شرکت نیاز دارد که ربات به گونه‌ای برنامه‌نویسی شود که قادر به تشخیص خرگوش از سمور باشد.
این ربات توانایی اندازه گیری وزن و مساحت سایه‌ی حیوانات را دارد و با توجه به این دو مقدار تصمیم می‌گیرد حیوان را شکار کند یا نه. هم‌چنین کارکنان شرکت از قبل داده‌هایی مربوط به وزن و مساحت سایه‌ی تعدادی خرگوش و سمور تهیه کرده‌اند. (نقاط سفید مربوط به خرگوش‌ها و نقاط مشکی مربوط به سمورها هستند.)



با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده، از روی وزن یا مساحت سایه به تنهایی نمی‌توان گونه‌ی حیوان را تشخیص داد و با توجه به ساده بودن ماهیت خط، می‌خواهیم خطی پیدا کنیم که همه‌ی نقاط سفید یک سمت خط و نقاط مشکی سمت دیگر خط باشند و هیچ نقطه‌ای روی خط نیفتد.

نقاط مربوط به خرگوش‌ها را $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$، و نقاط مربوط به سمورها را $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_m, y'_m)$ در نظر بگیرید. به دنبال خطی هستیم که در نامعادلات زیر صدق کند: (توجه کنید مسئله را فقط برای نقاط داده شده در سوال حل می‌کنیم و نه حالت کلی.)

$$ax_i + b - y_i > 0 \quad 1 \le i \le n$$
$$ax'_i + b - y'_i < 0 \quad 1 \le i \le m$$

توجه کنید اینکه در عبارت فوق تابع هدف وجود ندارد مانعی ایجاد نمی‌کند چون هر تابع دل‌خواهی را که به عنوان تابع هدف در نظر بگیریم، جواب بهینه‌ی تابع در نامعادلات صدق می‌کند و درنتیجه نمایانگر یک خط مطلوب خواهد بود. با این حال برنامه‌ریزی فوق خطی نیست چرا که در برنامه‌ریزی خطی مجاز به داشتن قیود اکید ($<$ و $>$) نیستیم.
برای حل این مشکل برنامه‌ریزی بالا را به شکل زیر تغییر می‌دهیم: (برنامه‌ریزی خطی زیر فقط ۳ متغیر دارد!!)

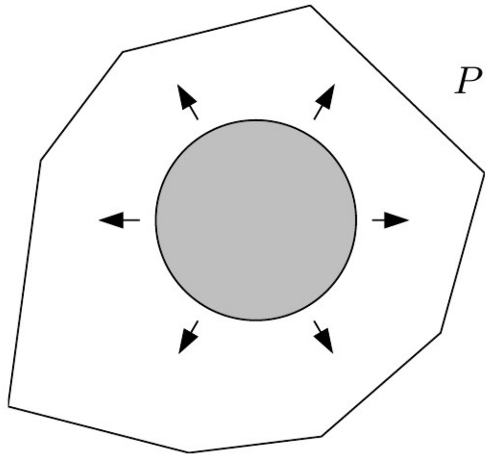
$$\text{بیشینه کن} \quad \delta$$
$$ax_i + b - y_i \ge \delta \quad 1 \le i \le n$$
$$ax'_i + b - y'_i \le \delta \quad 1 \le i \le m$$

توجه کنید اگر در نقطه‌ی بهینه $\delta \le 0$ نتیجه می‌گیریم که خط جدا کننده‌ای وجود ندارد.
با استفاده از همین ایده می‌توان نقاط را به وسیله‌ی چند جمله‌ای‌هایی با درجه‌ی بیشتر نیز از هم جدا کرد. کافی است $ax_i + b$ را با مقدار چند جمله‌ای در نقطه x_i (مثلا $ax_i^2 + bx_i + c$) جایگزین کنیم. دقت کنید این کار برنامه‌ریزی را غیرخطی نمی‌کند!

[4] Linear Classification

۵ بزرگ‌ترین دیسک در چندضلعی محدب

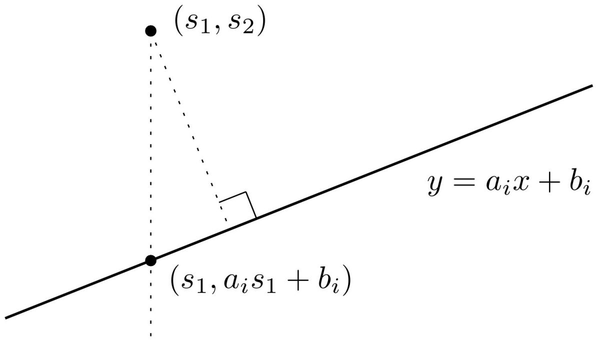
چند ضلعی محدب P داده شده‌است. به دنبال بزرگترین دایره‌ای هستیم که بتوان آن را به طور کامل در چندضلعی قرار داد.



توجه کنید که دایره‌ای به مرکز s به طور کامل در P قرار می‌گیرد، اگر و تنها اگر s درون P باشد و شعاع دایره از فاصله‌ی s تا هر ضلع P بیشتر نباشد. پس در این مسئله به دنبال زوج (s, r) هستیم که s یکی از نقاط درون P و r کمینه‌ی فاصله‌ی s از ضلع‌های P است و می‌خواهیم r تا حد امکان بزرگ باشد.

هر ضلع P قسمتی از یک خط است. چند ضلعی را به گونه‌ای بچرخانید که هیچ یک از این خطوط عمودی نباشد! خطوط را $l_1, l_2, \dots, l_n$ بنامید و فرض کنید $l_i(x) = a_i(x) + b_i$.

اگر $s = (s_1, s_2)$، با استفاده از مختصات نقاط و شیب خط و انجام محاسبه‌ای ساده می‌توان دید که فاصله‌ی s تا l_i برابر است با قدر مطلق $d_i = \frac{s_2-(a_is_1+b_i)}{\sqrt{a_i^2+1}}$.



همچنین با توجه به نحوه‌ی محاسبه مشخص می‌شود که اگر P بالای l_i باشد، $d_i > 0$ و $|d_i| = d_i$؛ و اگر P زیر l_i باشد، $d_i < 0$ و $|d_i| = -d_i$ خواهد بود. پس برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & r \\ & \frac{s_2-(a_is_1+b_i)}{\sqrt{a_i^2+1}} \ge r && \text{برای } 1 \le i \le n \text{ به طوری که } P \text{ بالای } l_i \text{ باشد.} \\ & -\frac{s_2-(a_is_1+b_i)}{\sqrt{a_i^2+1}} \ge r && \text{برای } 1 \le i \le n \text{ به طوری که } P \text{ زیر } l_i \text{ باشد.} \end{aligned}$$

سؤال . از فرض محدب بودن P کجا استفاده شده‌است؟ آیا می‌توان از همین رویکرد برای چندضلعی‌های مقعر هم استفاده کرد؟

برای مسئله‌های ۳ تا ۵ می‌توانید به کتاب درس [GM07] مراجعه کنید. هم‌چنین تعمیم مسئله‌های ۳ و ۴ را می‌توانید در نوشته‌های آقای رافگاردن [Rou16] ببینید.

مراجع

[GM07] Bernd Gärtner and Jiří Matoušek. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.

[Rou16] Tim Roughgarden. *Linear programming: Introduction and applications*, 2016. URL: `http://timroughgarden.org/w16/l/l7.pdf`.

[Sli] *or-991-slides-03.* URL: `http://foroughmand.ir/wp-content/uploads/2020/09/or-991-slides-S03.pdf`.