دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۹

روش نقطه درونی

جلسه سیزدهم

نگارنده: مریم ضیغمی

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه پیش در مورد روش بیضی گون صحبت کردیم و گفتیم که این روش تقریبا با قیود برنامه ریزی سر و کار زیادی ندارد و از این رو می تواند برنامه ریزی هایی با تعداد قیود بسیار زیاد را حل کند و توسط این روش به حل مسأله ی یافتن برش بیشینه در گراف پرداختیم. در این جلسه به طور مختصر روش دیگری را برای حل برنامه ریزی ها به نام روش نقطه درونی معرفی میکنیم.

۲ خواص روش نقطه درونی

۱) این روش در برنامه ریزی های بزرگ سریع تر از سیمپلکس عمل میکند و در زمان چند جمله ای کار می کند.
۲) هم برای برنامه ریزی خطی و هم برنامه ریزی محدب قابل استفاده است.

$$inf\,\{f(x) : x \in c\}$$

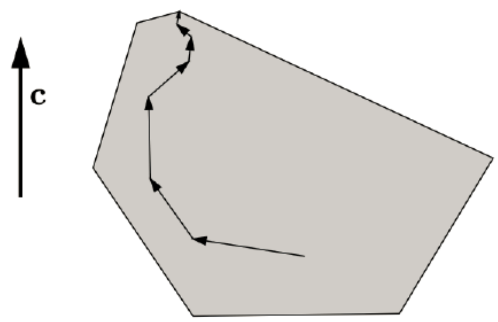
که f یک تابع محدب است و c یک مجموعه محدب

تابع محدب

تابعی که اگر هر دو نقطه ای روی آن را در نظر بگیریم، خط واصل بینشان بالای نمودار تابع قرار گیرد. (تابع مقعر به طور مشابه و معکوس تعریف می شود)

۳ ایده روش نقطه درونی

نقطه ای درون چند وجهی را پیدا میکند و به سمت کنج هدایت می کند به طوری که به نقطه بهینه برسیم.



مسیر مرکزی

فرض کنید برنامه ریزی خطی زیر را داشته باشیم:

$$\text{بیشینه کن} \quad f(x) = c^T x$$
$$\text{که} \quad Ax \leq b$$

مسیر مرکزی به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_\mu(x) = c^T x + \mu \sum_{۱}^{n} ln(b_i - a_i x)$$

که در ناحیه ی شدنی برنامه ریزی اصلی تعریف می شود.
به عبارت دیگر و به طور تقریبا شهودی جمله ی $\mu \sum_{۱}^{m} ln(b_i - a_i x)$ فشار دیوار ها (اگر اضلاع چند وجهی را دیوار تصور کنیم) را به نقطه ی درونی مدل میکند که در μ بسیار بزرگ نقطه در وسط چند وجهی قرار میگیرد و در $\mu = ۰$ دقیقا با مقدار $f(x)$ برابر است.
حال به یافتن بهینه ی f_μ میپردازیم زیرا بهینه ی $f_۰(x)$ همان بهینه ی $f(x)$ است و جواب مطلوب ماست.

بهینه ی f_μ

قضیه: اگر P کراندار و درونداز و $\mu > ۰$ آنگاه f_μ در P دقیقا یک نقطه ی بهینه دارد.
اثبات: مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\{x \in int(P) : f_\mu(x) \geq f_\mu(x_۰)\}$$

اثبات وجود: این مجموعه کراندار(اشتراک ۲ مجموعه کراندار است) و بسته است. می دانیم تابع پیوسته روی مجموعه فشرده نقطه بیشینه دارد.
اثبات یکتایی: فرض خلف کنید که x و y دو نقطه بیشینه اند. چون f_μ تابعی اکیدا مقعر است (لگاریتم اکیدا مقعر است) پس خط واصل بین این دو نقطه زیر منحنی تابع قرار میگیرد پس یعنی نقاطی روی منحنی وجود دارند که مقداری بزرگتر از $f_\mu(x) = f_\mu(y)$ دارند که با فرض بیشینه بودن تابع در نقاط x و y در تناقض است

پس f_μ تنها یک جواب بیشینه دارد.

پس ابتدا نقطه ای درون چندوجهی پیدا می کنیم سپس با کم کردن مقدار μ نقطه به سمت c^Tx می رود. به عبارت دیگر روی مسیر مرکزی (بهینه f_μ ها در μ های مختلف) μ را کم می کنیم.
سوال: چگونه روی این مسیر مرکزی حرکت کنیم؟

۴ ابزار برای حل مسأله ی پیدا کردن بهینه ی $f_\mu(x)$ (یافتن مسیر مرکزی)

ضرایب لاگرانژی

فرض کنید برنامه ریزی خطی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f(x) = c^Tx \\ \text{که} \quad & g_i(x) = ۰, \quad i \in \{۱, ۲, ..., m\} \end{aligned}$$

قضیه: x بهینه است اگر و تنها اگر : y وجود داشته باشد که:

$$\begin{aligned} g_۱(x) = g_۲(x) = ... = g_m(x) = ۰, \\ \nabla f(x) = \sum_{۱}^{m} y_i \nabla g_i(x) \end{aligned}$$

ضرایب لاگرانژی برای مسأله ی ما

اگر برنامه ریزی خطی ما به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^Tx \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

برنامه ریزی مسیر درونی را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & f_\mu(x) = c^Tx + \mu \sum_{۱}^{m} lnx_j \\ \text{که} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

دقت کنید که چون برنامه ریزی به فرم معادله ای است قید $x \geq ۰$ فشار دیوار ها را ایجاد می کند و درواقع معادله $Ax = b$ درون چیزی را نشان نمی دهد.
حال با تکنیک لاگرانژی به حل مسأله می پردازیم:

قید های ما عبارتند از:

$$b_1 - a_1 x = g_1(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$b_m - a_m x = g_m(x) = 0$$
$$\nabla f(x) = \sum_1^m y_i \nabla g_i(x)$$

توجه: قید $x \geq 0$ را از قیود حذف و وارد تابع هدف کردیم. (خارج از محدوده مناسب x تابع هدف تعریف نمی شود)

با محاسبه گرادیان تابع $f(x)$ و تابع $g_i(x)$داریم :

$$\nabla f(x) = c + \mu(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n})$$
$$\sum_1^m y_i \nabla g_i(x) = A^T y$$

پس به طور دقیق تر برای قیود داریم:

$$AX = b$$
$$c + \mu(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}) = A^T y$$

حال عبارت $\mu(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n})$ را برابر s قرار دهید. پس داریم: (برای سادگی در ارجاع این برنامه ریزی را برنامه ریزی لاگرانژی نام گذاری میکنیم)

$$AX = b$$
$$A^T y - s = c$$
$$(s_1 x_1, s_2 x_2, ..., s_n x_n) = \mu 1$$
$$x, s \geq 0$$

حال طبق قضیه جواب شدنی این برنامه ریزی همان جواب بهینه ی f_μ است.

نگاهی به برنامه ریزی لاگرانژ در $\mu = 0$

$$0 = s^T x = y^T A x - c^T x = y^T b - c^T x \Rightarrow y^T b = c^T x$$

که به این معنی است که جواب لاگرانژ در $\mu = 0$ با قضیه دوگانی معادل است.

کمینه کن	$b^T y$	بیشینه کن	$c^T x$
که	$A^T y \geq c$	که	$AX = b$
	$y \in R^m$		$x \geq 0$

لم: برای $\mu > ۰$ اگر جواب اولیه $x > ۰$ و y جواب دوگان شدنی که $s = A^T y - c$ آنگاه برنامه ریزی لاگرانژی جواب یکتای $x^* = x^*(\mu)$ و $y^* = y^*(\mu)$ و $s^* = s^*(\mu)$ دارد که $x^*(\mu)$ جواب یکتای بیشینه کن f_μ به شرط $AX = b$ است.(جواب شدنی لاگرانژ همان جواب بهینه f_μ است)

۵ ایده ی الگوریتم

۱) $\mu = ۱$ قرار دهید
۲)یک جواب اولیه x و y و s پیدا کنید
۳) μ را به اندازه مناسب تغییر دهید
۴) x و y و s را آپدیت کنید به طوری که در قیود صدق کنند.($s = +s\triangle$و $x = +x\triangle$ و $y = +y\triangle$)

نحوه ی تغییر sو x و y

نقاط جدید باید در قیود صدق کنند(μ درواقع μ جدید است) پس:

$$A(x + \triangle x) = b$$
$$A^T(y + \triangle y) - (s + \triangle s) = c$$
$$((s_۱ + \triangle s_۱)(x_۱ + \triangle x_۱), ..., (s_n + \triangle s_n)(x_n + \triangle x_n) = \mu ۱$$

که با بسط دادن جملات و تقریب زدن به صورت خطی داریم:

$$A\triangle x = ۰$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = ۰$$
$$(s_۱\triangle x_۱ + x_۱\triangle s_۱, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu ۱ - (s_۱x_۱, ..., s_nx_n)$$

۶ الگوریتم روش نقطه درونی

۱($\mu = ۱$ را قرار دهید و y و s و x را طوری بیابید که:

$$AX = b$$
$$A^T y - s = c$$
$$x, s \geq ۰$$
$$cdist_\mu(x, s) < \sqrt{۲}$$

که:

$$cdist_\mu(x, s) = \| (\rho(s_۱x_۱, \mu), ..., \rho(s_nx_n, \mu)) \|$$
$$\rho(a, \mu) = \sqrt{a/\mu} - \sqrt{\mu/a}$$

۲) تا وقتی که $\mu \geq \epsilon$:
گام ۳ و ۴ را انجام دهید و هر گاه $\mu < \epsilon$ ، x را به عنوان جواب بهینه ارایه دهید.
۳) هربار μ جدید را به این صورت تعریف کنید: $\mu_۲ = \mu_۱(۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{n}})$
۴($\triangle s$ و $\triangle y$ و $\triangle x$ را طوری می یابیم که در قیود صدق کنند. یعنی:

$$A\triangle x = 0$$
$$A^T\triangle y - \triangle s = 0$$
$$(s_1\triangle x_1 + x_1\triangle s_1, ..., s_n\triangle x_n + x_n\triangle s_n) = \mu 1 - (s_1x_1, ..., s_nx_n)$$

و سپس به مرحله ۲ بازمی گردیم.

۱.۶ چگونه جواب اولیه پیدا کنیم؟

مانند روش سیمپلکس ابتدا برنامه ای مینویسیم که جواب بدیهی داشته باشد و سپس به حل برنامه ریزی اصلی می پردازیم.

$$Ax - \tau b \leq 0$$
$$-A^Ty + \tau c \leq 0$$
$$b^Ty - c^Tx \leq 0$$
$$x, y, \tau \geq 0$$

۷ تحلیل زمان اجرا

اگر L تعداد بیت ها و n تعداد معادله باشد:

- تعداد مراحل: $O(\sqrt{n}L)$
- کران پایین $O(\sqrt{n}\log n)$ مرحله برای تمام الگوریتم های نقطه درونی دارد
- این روش درعمل در $\log n$ مرحله انجام می شود

۸ خلاصه ای بسیار کوتاه از روش نقطه درونی

میخواهیم برنامه ریزی p را حل کنیم. برای این کار تابع هدف این برنامه ریزی ($f(x)$)را به گونه ای که گفته شد تغییر دادیم (f_μ) و به مسأله ای جدید رسیدیم(یافتن بهینه ی f_μ). مسأله ی یافتن بهینه ی f_μ را توسط روش ضرایب لاگرانژی به برنامه ریزی جدیدی تبدیل کردیم که جواب شدنی آن همان جواب بهینه ی f_μ بود. سپس با کم کردن مقدار μ تابع f_μ را به تابع هدف برنامه ریزی اولیه مان میل دادیم.($f_0(x) = f(x)$)