دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

گسترش، برش تنک، و نظریه طیفی گراف

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۵

موضوع جلسات

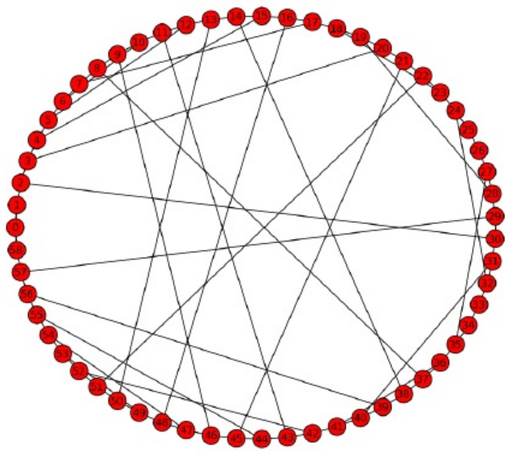
جلسه‌های دوازدهم و سیزدهم

نگارنده: نوشین مرادی

فصل ۶: ساختن گستر گراف ها

خانواده‌ای از گراف‌های $G_n = (V_n, E_n)$ که $|V_n| = n$ را گستر گراف گوییم اگر هر گراف d-منتظم بوده و گسترش یالی آن حداقل h باشد که h مقداری ثابت و مستقل از n است.

مثال یک خانواده از گسترگراف‌ها را می‌توان به شکل زیر ساخت: فرض کنید p یک عدد اول است. گراف $G_p = (V_p, E_p)$ را به این صورت می سازیم. مجموعه رئوس را $V_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ قرار می‌دهیم. هر راس x را به راس قبلی یا $(x-1) \mod p$، راس بعدی یا $(x+1) \mod p$ و وارون ضربی آن وصل می‌کنیم. وارون ضربی 0 را خودش درنظر می‌گیریم. درنتیجه رئوس با شماره های $0, 1, p-1$ دارای حلقه هستند. بدین ترتیب یک گراف ۳-منتظم خواهیم داشت که از اجتماع یک cycle و یک تطابق بین رئوس تشکیل شده است. می‌توان نشان داد که عدد ثابت h وجود دارد که برای هر p، گسترش یالی گراف G_p بزرگتر مساوی h است. هرچند اثبات این حکم خیلی ساده نیست. گراف G_{59} در شکل زیر نشان داده شده است.



ضرب زیگ‌زاگی

گراف منتظم G داده شده که M ماتریس مجاورت نرمال شده آن می‌باشد. اگر $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت نرمال شده باشند، آن‌گاه تعریف می‌کنیم:

$$\mu(G) = \max_{i=2,\ldots,n} \{|\mu_i|\} = \max\{|\mu_2|, |\mu_n|\}$$

درعمل $\mu(G) \geq \mu_2$ و درنتیجه برای ساخت گستر گراف، کافی است خانواده‌ای از گراف‌ها بسازیم که $\mu(G)$آن‌ها از یک مقدار ثابت و دور از یک، کوچکتر باشد.

گراف‌های G و H با اندازه های سازگار داده شده‌اند که دارای درجه راسی کوچک و گسترش یالی بزرگ هستند. با کمک ضرب زیگ‌زاگی $G ⓩ H$ می‌توان گراف بزرگ‌تری را ساخت که همچنان درجه راسی کوچک و گسترش یالی بزرگی دارد.

اگر:

- G یک گراف D-منتظم با n راس باشد که $\mu(G) \leq \alpha$ و
- H گرافی d-منتظم با D راس باشد که $\mu(H) \leq \beta$

آن‌گاه $G ⓩ H$ یک گراف d^2-منتظم با nD راس خواهد بود که $\mu(G ⓩ H) \leq \alpha + \beta + \beta^2$

قبل از اینکه نشان دهیم گراف حاصل از ضرب زیگ‌زاگی چگونه ساخته می‌شود، سعی می‌کنیم با کمک تعریف این ضرب دنباله‌ای از گراف‌های به دلخواه بزرگ با درجه راسی ثابت و گسترش یالی بزرگ بسازیم.

برای این کار یک عدد ثابت d به اندازه کافی بزرگ را درنظر می‌گیریم. مثلا $d = 37^2$. حال گراف d-منتظم H را روی d^4 راس می‌سازیم به‌طوری که $\lambda_2(H) \leq \frac{d}{5}$ یا $\mu(H) \leq \frac{1}{5}$. یک گراف به این فرم می‌تواند، $LD_{37,7}$ باشد که یک گراف با درجه 37^2 روی $\left(37^2\right)^4 = 37^{(7+1)}$ راس می‌باشد که $\mu(LD_{37,7}) \leq \frac{7}{37} \leq \frac{1}{5}$.

برای هر گراف G، G^2 گرافی روی همان مجموعه رئوس است که یال های آن معرف مسیرهای با طول دقیقا ۲، در G می‌باشد. بنابراین، ماتریس مجاورت G^2 مربع ماتریس مجاورت G است و اگر G یک گراف r-منتظم باشد، آن‌گاه G^2، r^2-منتظم خواهد بود.

با استفاده از گراف H و مطالب مطرح شده، می‌توان خانواده‌ای از گراف‌های با اندازه بزرگ ساخت که هرکدام d^2-منتظم بوده و برای آن داریم $\mu \leq \frac{1}{2}$. برای ساخت این گراف‌ها کافی است قرار دهیم:

- $G_1 = H^2$
- $G_{k+1} = (G_k)^2 ⓩ H \ , \ k \geq 1.$

قضیه ۱. برای هر $k \geq 1$، G_k یک گراف d^2-منتظم است که $\mu(G_k) \leq \frac{1}{2}$

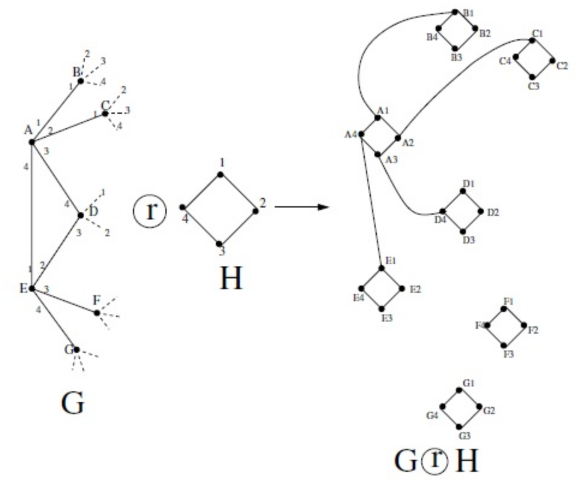
اثبات. اثبات با استقرا روی k صورت می‌گیرد. پایه استقرا: $G_1 = H^2$ یک گراف d^2-منتظم است و داریم $\mu(H^2) = (\mu(H))^2 \le \frac{1}{25} < \frac{1}{2}$ حکم استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای k برقرار باشد یعنی، G_k دارای درجه d^2 باشد و $\mu(G_k) \le \frac{1}{2}$. درنتیجه G_k^2، d^4-منتظم بوده و $|V(H)| = d^4$. پس ضرب زیگ‌زاگی $G_k^2 \textcircled{z} H$ تعریف شده است. از طرفی $\mu(G_k^2) \le \frac{1}{4}$ درنتیجه طبق تعریف ضرب زیگ‌زاگی G_{k+1} یک گراف d^2-منتظم است که $\mu(G_{k+1}) \le \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} < \frac{1}{2}$. $\square$

توجه داریم که گراف G_k دارای d^{4k} راس است. تا کنون نشان دادیم که چگونه به کمک ضرب زیگ‌زاگی می‌توان خانواده‌ای از گراف‌های با اندازه دلخواه بزرگ و درجه راسی ثابت و گسترش یالی بزرگ ساخت. برای تکمیل ساخت این گراف‌ها، باید نشان داد که ضرب زیگ‌زاگی دو گراف داده شده G و H چگونه محاسبه می شوند. به این منظور ابتدا یک ضرب ساده تر، به نام ضرب جایگزینی را معرفی می کنیم.

ضرب جایگزینی دو گراف

این ضرب معمولا روی یک گراف کوچکتر d-منتظم با D راس (مثلا گراف H) و یک گراف بزرگ‌تر D-منتظم و N راس (مثلا G) تعریف می شود. همچنین فرض می‌کنیم که یک ترتیب برای D همسایه هر راس G درنظر گرفته شده است. درنهایت ضرب جایگزینی $G \textcircled{r} H$ به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

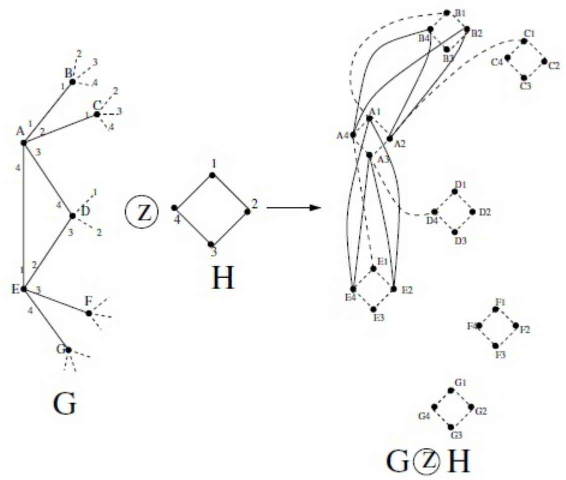
- ابتدا به ازای هر راس G یک کپی از گراف H را قرار می‌دهیم.هریک از این کپی‌ها را یک توده راسی می‌نامیم. برای $v \in V(G)$ و $i \in V(H)$، (v, i) را iامین راس در v امین توده راسی درنظر می گیریم.
- اگر $(u, v) \in E(G)$ و V، i امین همسایه راس u و u، jامین همسایه v باشد، آن‌گاه $((u, i), (v, j)) \in E(G \textcircled{r} H)$. همچنین، اگر (i, j) یک یال در گراف H باشد، آن‌گاه برای هر راس $u \in V(G)$ داریم: $((u, i), (u, j)) \in E(G \textcircled{r} H)$. درواقع برای تعیین یال‌های گراف $G \textcircled{r} H$ کافی است به این صورت عمل کنیم که پس از جایگزینی گراف H به جای هر راس گراف G، اگر بین دو راس u و v در گراف G یال وجود داشت، آن‌گاه با توجه به ترتیب درنظر گرفته شده روی همسایه‌های G، یک راس از توده راسی جایگزین‌شده به جای u را به یک راس مشخص از توده راسی جایگزین شده به جای راس v وصل می‌کنیم(یال‌های تطابق). علاوه بر این تمامی یال‌های گراف H که به جای رئوس جایگزین شده‌اند نیز حفظ می‌شود(یال‌های درون H). توجه داریم که گراف حاصل از ضرب جایگزینی، دارای ND راس بوده و $(d+1)$-منتظم می‌باشد.



ضرب زیگ‌زاگی دو گراف

دو گراف G و H با شرایط مطرح شده در قسمت ضرب جایگزینی، درنظر می گیریم، ضرب زیگ‌زاگی $G \textcircled{z} H$ به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

- راس‌های گراف $G \textcircled{z} H$ همانند ضرب جایگزینی مشخص می‌شوند.
- $((u, i), (v, j)) \in E(G \textcircled{z} H)$اگر k و l وجود داشته باشد به‌طوری که، $((u, i), (u, l))$، $((u, l), (v, k))$ و $((v, k), (v, j))$جزو یال‌های گراف $G \textcircled{r} H$باشند که $((u, i), (u, l))$ و $((v, k), (v, j))$ یال‌های درون Hای و $((u, l), (v, k))$ یال تطابقی در گراف $G \textcircled{r} H$ می‌باشد. به این معنی که بتوان از راس (u, i) به کمک یک یال درون H، سپس یک یال تطابق و درنهایت یک یال درون H دیگر به راس (v, j) رسید. درشکل زیر نحوه ساخت گراف حاصل از ضرب زیگ‌زاگی نمایش داده شده است. واضح است که گراف حاصل یک گراف d^2-منتظم با ND راس است.



فرض کنید $M \in \mathbb{R}^{ND \times ND}$ ماتریس مجاورت نرمال شده گراف $G \textcircled{z} H$ باشد. باتوجه به این‌که هر یال این گراف با طی کردن سه گام بین یال‌های گراف $G \textcircled{r} H$ ساخته می‌شوند، درنتیجه M را می‌توان به‌صورت BAB نوشت که B و A به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$B[(u,i),(v,j)] = \begin{cases} 0 & if\ u \neq v \\ M_H[i,j] & if\ u = v \end{cases}$$

و $A[(u,i),(v,j)] = 1$ اگر u، jامین همسایه v و v، iامین همسایه u باشد، در غیر این‌صورت $A[(u,i),(v,j)] = 0$. توجه داریم که A ماتریس مجاورت یک تطابق است و درنتیجه یک ماتریس جایگشت می باشد.

نرم ماتریس

تعریف فرض کنید M ماتریس مجاورت نرمال شده گراف $G(V,E)$ باشد و $\mu_n \geq \ldots \geq \mu_1$ مقدار ویژه‌های آن باشند. قرار دهید:

$$\mu(M) = \max_{i=2,\ldots,n} \{|\mu_i|\} = \max\{|\mu_2|, |\mu_n|\}$$

ویژگی زیر برای پارامتر μ برقرار است:

$$\mu(M) = \max_{x \in \mathbb{R}^V - \{0\}, x \perp \mathbb{1}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{R}^V - \{0\}, x \perp \mathbb{1}, \|x\|=1} \|Mx\|$$

تعریف اندازه طیفی ماتریس: اندازه طیفی ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$\|M\| = \max_{x \in \mathbb{R}^V, \|x\|=1} \|Mx\|$$

اگر M یک ماتریس متقارن با مقدار ویژه‌های $\mu_n, \ldots \mu_1$ باشد، آن‌گاه اندازه طیفی آن برابر $\max_i |\mu_i|$ است. درواقع این رابطه یک نرم ماتریسی تعریف می کند، زیرا برای هر دو ماتریس A و B داریم $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ و همچنین برای ماتریس A و اسکالر a نیز رابطه $\|aA\| = a\|A\|$ برقرار است. علاوه بر این این نرم ویژگی زیر را نیز داراست:

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$

زیرا:

$$\|ABx\| \leq \|A\|.\|Bx\| \leq \|A\|.\|B\|.\|x\|\ ,\ \|x\| = 1$$

نامساوی اول به این دلیل است که برای هر بردار z، $\|Az\| \leq \|A\|.\|z\|$. همچنین دومین نامساوی هم از این نکته که $\|Bx\| \leq \|B\|.\|x\|$ نتیجه می‌شود.