دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی خطی ۱ آذر ۱۳۹۸

تمرین سری چهارم(نسخه‌ی اولیه)

۱ ثابت کنید برای ماتریس A دقیقا یکی از دو حالت زیر درست است:

۱. $\exists x \neq 0 : \quad Ax = 0 \, , x \geq 0$

۲. $\exists\, p : \; p^T A > 0^T$

۲ فرض کنید گراف بدون جهت وزن دار $G = (V, E)$ به همراه دو راس $s, t \in V$ داده شده است. میخواهیم کم وزن ترین مسیر بین s, t را بیابیم.
الف) این مسئله را بصورت یک برنامه ریزی خطی (صحیح) مدل کنید. (راهنمایی: گراف را به یک گراف جهت دار تبدیل کرده و مسئله را بصورت حالت خاص از مسئله جریان بیشنیه در نظر بگیرید.)
ب) دوگان این برنامه را بنویسید. تعبیری فیزیکی از متغیر های دوگان ارائه دهید. (راهنمایی: فرض کنید که هر راس مهره است و یالها بصورت نخ هایی هستند که مهره ها را بهم وصل میکنند.)

با استفاده از لم فارکاش، گزاره های زیر را ثابت کنید. **Farkas**

۳ نشان دهید بردار $x \geq 0$ وجود دارد بطوری که $Ax \leq b$ اگر و تنها اگر برای هر $y \geq 0$ که $y^T A \geq 0$ داشته باشیم $y^T b \geq 0$.

۴ نشان دهید بردار x وجود دارد بطوری که $Ax < b$ اگر و تنها اگر $y = 0$ تنها جواب معادله ی $y \geq 0, y^T A = 0, y^T b \leq 0$ باشد.

۵ نشان دهید برداری مانند x هست بطوری که

$$Ax < b \quad A'x \leq b'$$

اگر و تنها اگر، برای همه ی بردار های $y, y' \geq 0$ داشته باشیم:

۱. اگر $y^T A + y'^T A' = 0$ آنگاه $y^T b + y'^T b' \geq 0$

۲. اگر $y^T A + y'^T A' = 0$ و $y \neq 0$ آنگاه $y^T b + y'^T b' > 0$

(Motzkin's Theorem(Motzkin[1936]))

۶ Complementary Slackness: Full and Approximate

برای ماتریس $A \in R^{m\times n}$ مسئله اولیه و دوگان آن به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min\ c^T x \\ &s.t\ Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &max\ b^T y \\ &s.t\ A^T y \leq c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

y, x را به ترتیب جواب هایی شدنی از مسئله اولیه (primal) و دوگان آن (dual) در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید x و y هر دو بهینه هستند اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. شرط primal: برای هر $i \in \{1, .., n\}$ داشته باشیم: $x_i = 0$ یا $\sum_j A_{ji} y_j = c_i$

۲. شرط dual: برای هر $j \in \{1, .., m\}$ داشته باشیم: $y_j = 0$ یا $\sum_i A_{ji} x_i = b_j$

ب) آیا میتوانید با ریلکس کردن شرط های بالا جوابی تقریبی برای مسئله اولیه بدست آورید؟ (راهنمایی: بدنبال جوابی $\alpha\beta$- تقریب هستیم که $\alpha, \beta \geq 1$)

ج) (اختیاری) الگوریتمی ۲-تقریب برای مسئله پوشش راسی بیابید.(راهنمایی: Primal-Dual Algorithm).

۷ برای $A \in R^{m\times n}$ تابع غیر خطی(!) زیر را در نظر بگیرید:

$$f : R^m \times R^n \to R$$

$$f(x, y) = x^T A y \qquad x \in R^m, y \in R^n$$

می خواهیم

$$max_{x\in P_m}\ min_{y\in P_n}\ f(x, y)$$

را محاسبه کنیم. که

$$P_n = \{y \in R^n | \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y \geq 0\}$$

$$P_m = \{x \in R^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

جواب مسئله را بصورت جواب یک برنامه ریزی خطی بدست آورید.

راهنمایی: برنامه ی زیر را در نظر بگیرید!

$$\begin{aligned} &min\ \ x^T A y \\ &s.t\ \ \sum y_j = 1 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

۸ یک مسئله بهینه‌سازی خطی با فرم استاندارد را درنظر بگیرید. (کمینه کردن $c^T x$ روی $Ax = b$ و $x \geq 0$.) تابع لاگرانژین را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$L(x,p) = c^T x - p^T(b - Ax)$$

حال این بازی ۲ نفره را درنظر بگیرید: بازیکن اول یک $x \geq 0$ و بازیکن دوم یک p انتخاب میکنند. سپس بازیکن اول به بازیکن دوم مقدار $L(x,p)$ پرداخت میکند. (پس بازیکن اول میخواهد این مقدار کمینه و بازیکن دوم میخواهد این مقدار بیشینه شود)

میگوییم (x^*, p^*) یک نقطه تعادل است اگر نامساوی‌های زیر برقرار باشد

$$L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*) \qquad \forall x \geq 0, p$$

ثابت کنید (x^*, p^*) نقطه تعادل است اگر و تنها اگر x^* جواب مسئله اصلی و p جواب مسئله دوگان باشد.

۹ دو برنامه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &max\ c^T x \\ &\quad s.t\ Ax \leq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &min\ b^T y \\ &\quad s.t\ y^T A \geq c^T \\ &\qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

با فرض اینکه دست‌کم یکی از این دو برنامه، پاسخ شدنی دارد، ثابت کنید مجموعه پاسخ‌های شدنی حداقل یکی از دو برنامه فوق کران ندارد.
(راهنمایی: کراندار بودن یک مجموعه را به صورت متناهی بودن تابع هدف یک برنامه خطی خاص تفسیر کنید.)