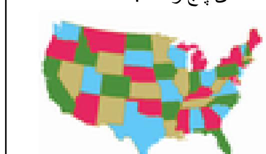
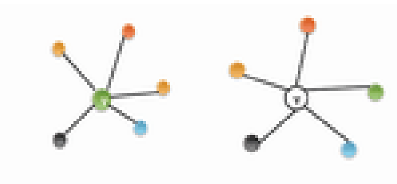
آیا می توان نقشه ی جهان را با چهار رنگ رنگ آمیزی کرد به شرطی که هیچ دو ناحیه ی مجاوری که مرز مشترک دارند همرنگ نباشند ؟!!!!!

این مساله به مساله چهار رنگ معروف است در طول تاریخ تلاش های طاقت فرسایی برای اثبات قضیه چهار رنگ صورت گرفت که بسیاری از این اقدامات به نزدیکی هدف رسیدند اما چیزی که در نهایت منجربه اثبات موفقیت آمیز این مساله در سال 1976 توسط اپل-هاکن ونیز اثبات جدید رابرتسن، ساندرز، سیمور و توماس در 1997 شد ترکیبی از ایده های بسیار قدیمی و امکانات محاسباتی بسیار جدید از جمله کامپیوتر هی امروزی بوده است بنابر این بیست سال پس از اثبات اولیه وضعیت اساسا تغییری نکرده و هیچ اثبات (کتابی) از این قضیه موجود نیست اما نکته ی جالب راجع به این مساله این است که برخی از تلاش های ناموفقی که برای اثبات این مساله انجام شد منجر به کشف اثبات هایی زیبا برای حالت هایی ساده تر از این مساله شد که ما در این جا به توضیح یکی از آن ها می پردازیم مساله ی پنج رنگ !



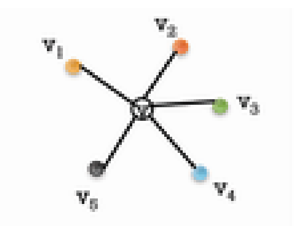
میخواهیم حکم مساله را با استفدا از استقرا روی تعدادراس های گراف ثابت کنیم لازم به ذکر است که حکم مساله به ازای گراف هایی با 5 ذاس یا کمتر بو وضوح درست است.

حال گرافی را در نظر بگیرید که شش یا (بیشتر) راس دارد بنابر یکی از قضایای رنگ آمیزی گراف می دانیم هر گراف مسطح راسی دارد که درجه ی آن کوچکتر یا مساوی با 5 است.

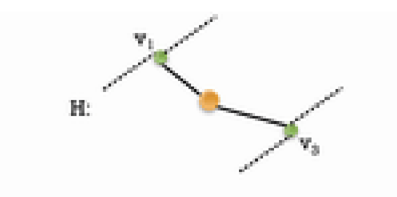


حال این راس را در گراف مورد نظر پیدا کرده و از آن حذف می کنیم حال تعداد راس های گراف ما یک واحد کمتر شده پس طبق فرض استقرا گراف حاصله پنج رنگ پذیر است یعنی می توان این گراف را با پنج رنگ طوری رنگ آمیزی کرد که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشند.

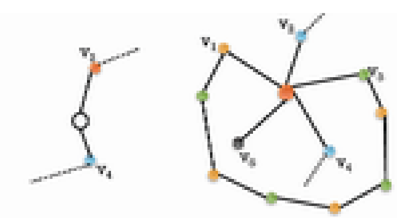
حال راس محذوف را به گراف رنگ آمیزی شدمان اضافه می کنیم می دانیم این راس حد اکثر به پنج راس دیگر متصل است اگر در رنگ آمیزی این پنج راس از هر پنج رنگ استفاده نشده باشد که مساله حل است درغیر این صورت این پنج راس با پنج رنگ متفاوت رنگ آمیزی شده اند.این پنج راس و رنگ هیشان را به ترتیب با اعداد 1-2-3-4-5 مشخص می کنیم.(به ترتیب بودن این رنگ آمیزی مطابق شکل در روند اثبات تاثیر اساسی دارد)



حال یک زیر گراف از گراف حاصل از حذف راس مذکور از گراف اولیه در نظر میگیریم که شامل تمامی راسهایی است که بارنگ های 1یا3 رنگ آمیزی شده اند در نتیجه مطابق شکل راس 1 و راس 3 در این زیر گراف وجود دارنداگر این دو راس در زیر مولفه ی همبندی متفاوت از این زیرگراف وجود داشته باشند مساله حل است چرا که تنها کاری که می بایست انجام دهیم این است که در مولفه ی همبندی راس 1 از این زیرگراف راس های بارنگ 3 را به رنگ 1 و راس های با رنگ 1 را به رنگ 3 در بیاوریم یا اصطلاحا رنگ ها را در این زیر گراف سویچ کنیم سپس راس محذوف را به رنگ1 رنگ آمیزی کنیم

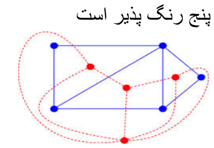


حال حالتی را در نظر بگیرید که این دو راس در یک مولفه ی همبندی از این زیر گراف باشند و این به این معناست که در این گراف یک مسیر از راس 1 به راس3 وجود دارد که یکی در میان با رنگ های 1و 3 رنگ آمیزی شده اند و این مسیر موجود بین راس 1 و3 و همچنین راس محذوف ما تشکیل یک دور در گراف اصلی را می دهدو با توجه به شکل از بین راس های 2 و4 یکی درون این دور و دیگری بیرون آن است پس با توجه به مسطح بودن گراف هیچ مسیری از راس 2 به راس 4 در گراف حاصل از حذف راس مذکور از گزاف اصلی وجود ندارد حال مشابه کاری که با راس های 1 و3 کردیم این بار نیز یک زیر گراف از گراف اصلی در نظر میگیریم با این تفاوت که این بار این گراف شامل راس هایی است که با رنگ های 2 و 4 رنگآمیزی شده اند پس راس 4 عضو مولفه ی همبندی راس 2 در این زیر گراف نیست حال مشابه کاری که قبلا انجام دادیم رنگ راس ها را در مولفه ی همبندی راس 2 در این زیر گراف سویچ کرده سپس راس محذوف را به گراف اضافه و آن را به رنگ 2 رنگ آمیزی می کنیم



لازم به ذکر است این مساله به دلیل ارتباطات گستردا ی که با مسایل مهم رنگ آمیزی دارد و همچنین راه حل های متنوع و خلاقانه ای که برای آن اریه شده است از اهمیت و شهرت بالایی برخوردار است

ایده ی اصلی اثبات ای مساله بدیل آن به یک مساله ی گراف است به طوری که ابتدا نقشه ی جهان را یک گراف ساده ی مسطح فرض می کنیم سپس گراف دو گان این نقشه را در نظر میگیرم حال کافیست ثابت کنیم این گراف پنج رنگ پذیر است



برای کسب اطلاعات بیشتر راجع به مساله چهار رنگ وهمچنین راجع به راه حل های متنوع مساله پنج رنگ و تاریخچه ی آن ها می توانید به کتاب اثبات نوشته ی مارتین ایگنر، گونتر تسیگلر مراجعه کنید

Chartrand, Gary, Linda Lesniak, and Ping Zhang. Graphs & Digraphs. Boca Raton, FL: CRC, 2011. Print.

"Nature of Mathematics." *Nature of Mathematics*. Web. 18 Apr. 2012. <http://natureofmathematics.wordpress.com/lecturenotes/four-and-five-color-theorems/>.

Kainen paulC."A Generalization of 5 color theorem." Proceedings of the American Mathematical society web 15.April 2012