بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه هجدهم

درس تحقیق در عملیات

کاربرد برنامه‌ریزی خطی در
حل دستگاه معادلات خطی تنک

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ٪۸ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ٪۸ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
    - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ۸٪ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

حالت ساده: (x را می‌دانیم)

- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
  - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ۸٪ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟
- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
  - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

حالت ساده: (x را می‌دانیم)

$$\bar{z} - x = Qw$$

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ۸٪ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
  - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

حالت ساده: (x را می‌دانیم)

$$\bar{z} - x = Qw$$

محاسبه w

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ۸٪ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
  - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

حالت ساده: (x را می‌دانیم)

$$\bar{z} - x = Qw$$

محاسبه w

رتبه Q = k

انگیزش

- ارسال $w \in \mathbb{R}^k$
- خطا: ٪۸ از مولفه‌ها، هر تغییری
- هدف: بازیابی
- مسئله: چگونه بفرستیم؟

- پیشنهاد:
  - ارسال: z=Qw به‌جای w که
  - $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و n>k
  - دریافت: $\tilde{z} = Qw + x$

خطا

حالت ساده: (x را می‌دانیم)

$$\tilde{z} - x = Qw$$

محاسبه w

رتبه Q = k

اگر x را ندانیم ؟

اگر x را ندانیم:

اگر x را ندانیم:

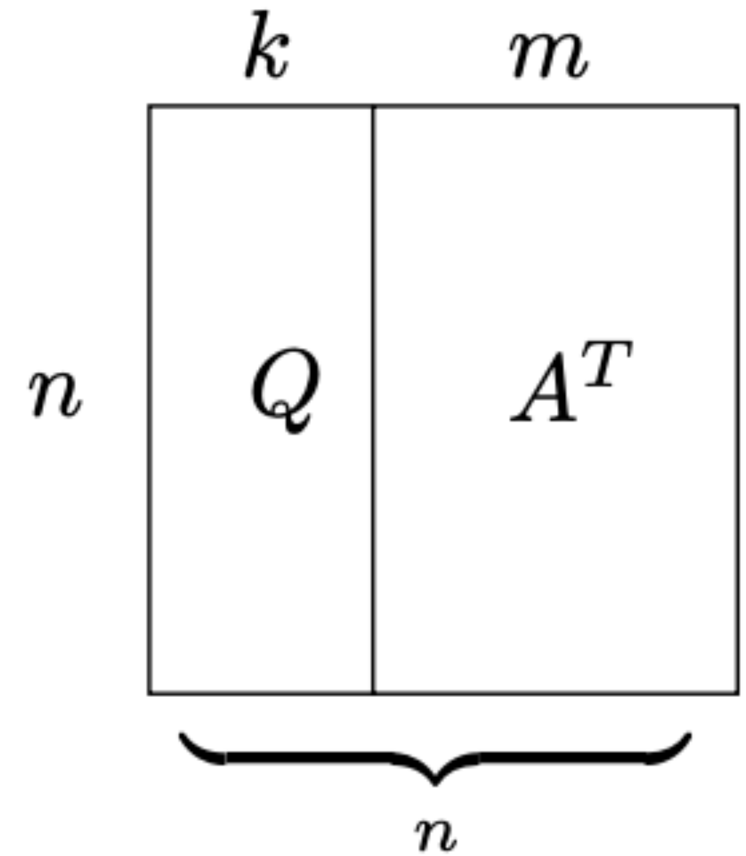
ماتریسی که:

$$AQ = 0$$

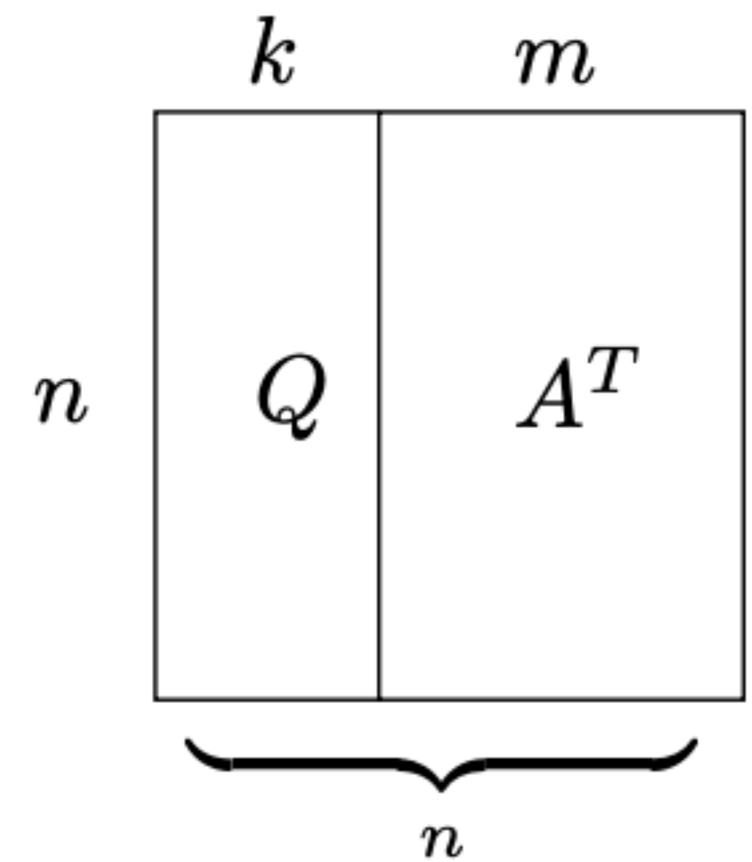
اگر x را ندانیم:

ماتریسی که:

$$AQ = 0$$



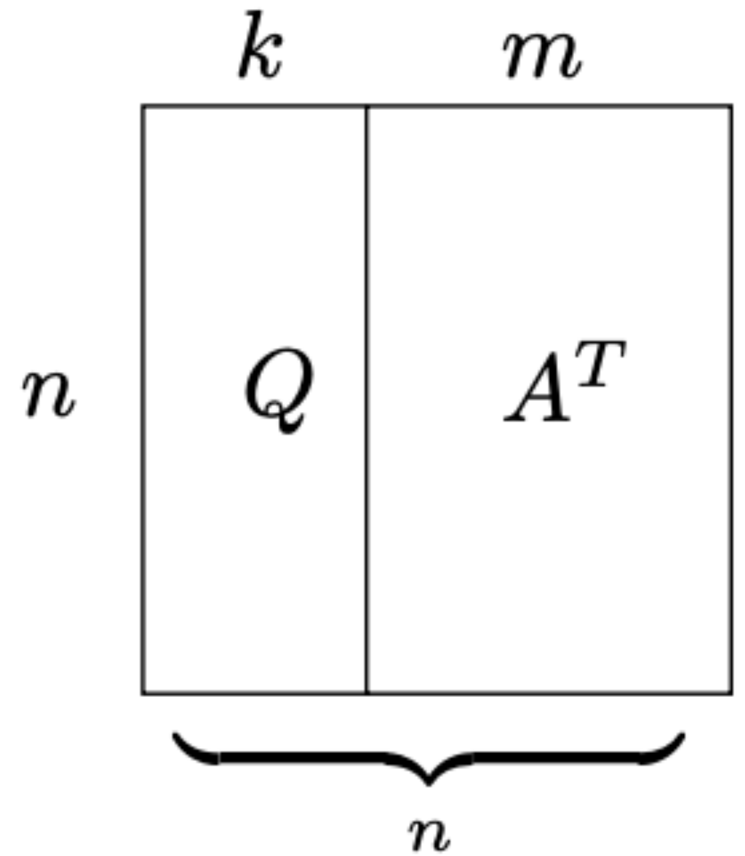
اگر x را ندانیم:



ماتریسی که:

$$AQ = 0$$

اگر $\mathbf{x}$ را ندانیم:



ماتریسی که:

$$AQ = 0$$

$$A\tilde{\mathbf{z}} = AQ\mathbf{w} + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

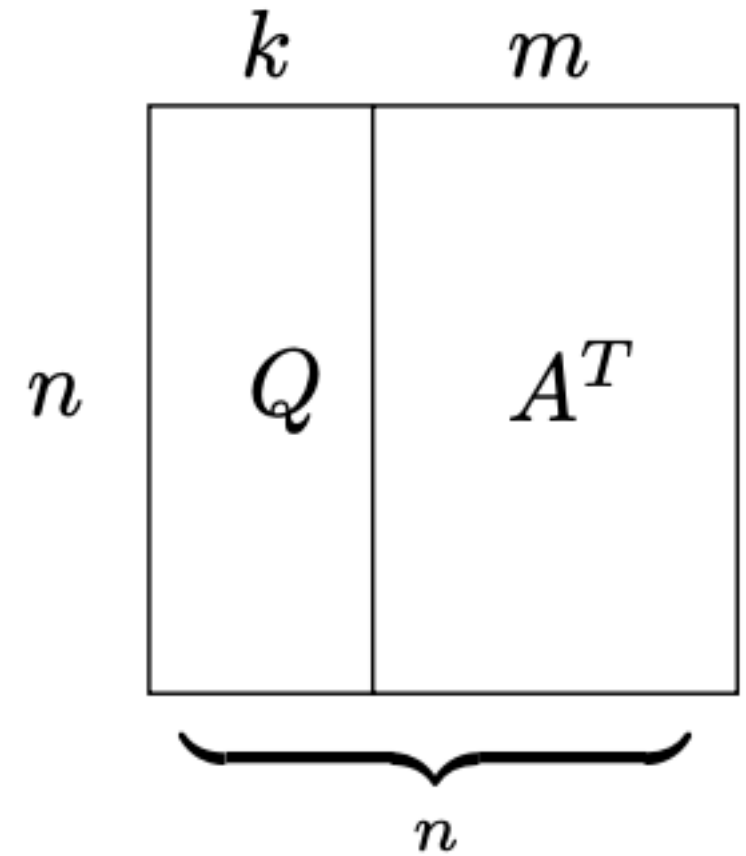
اگر x را ندانیم:

ماتریسی که:

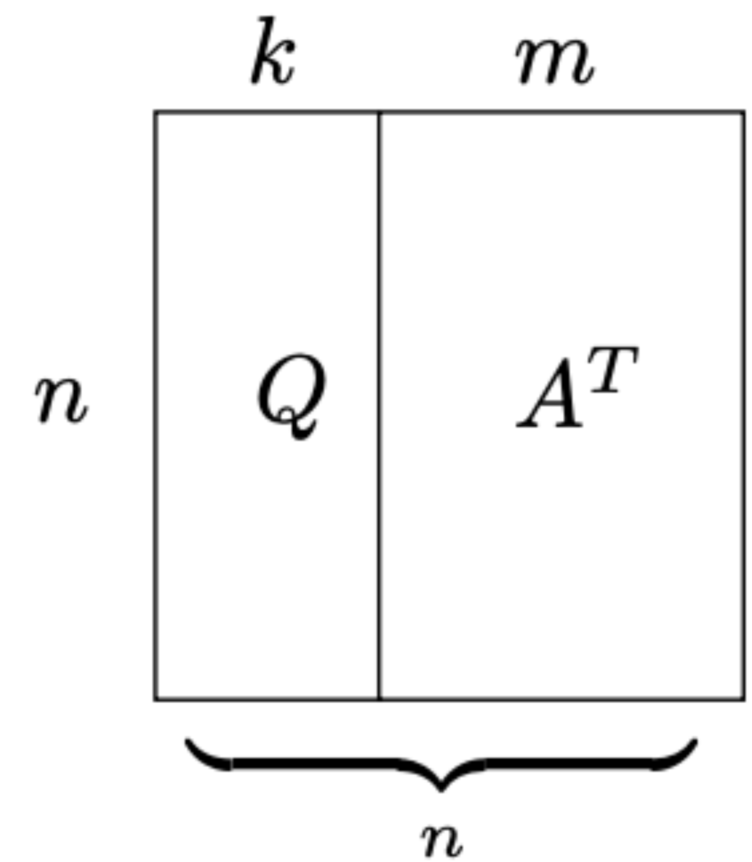
$$AQ = 0$$

$$A\tilde{\mathbf{z}} = AQ\mathbf{w} + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

$$\mathbf{b} = A\tilde{\mathbf{z}}$$



اگر x را ندانیم:



ماتریسی که:

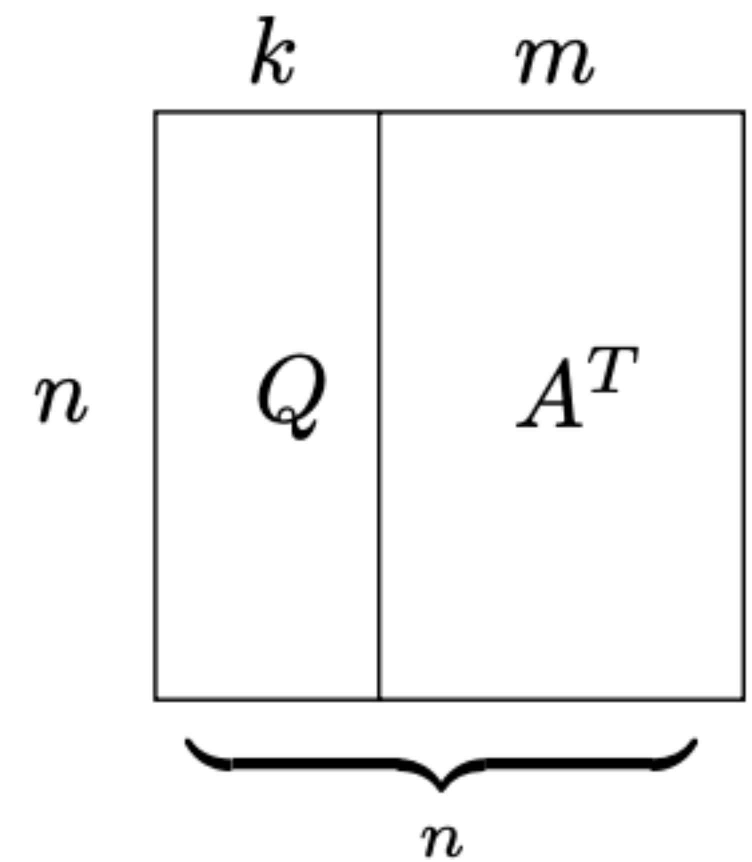
$$AQ = 0$$

$$A\tilde{\mathbf{z}} = AQ\mathbf{w} + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

$$\mathbf{b} = A\tilde{\mathbf{z}}$$

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \le r$

اگر **x** را ندانیم:



ماتریسی که:

$$AQ = 0$$

$$A\tilde{\mathbf{z}} = AQ\mathbf{w} + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

$$\mathbf{b} = A\tilde{\mathbf{z}}$$

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

تعریف گوی واحد:

گوی واحد: $\{u : \|u\| \leq 1\}$

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

تعریف گوی واحد:

گوی واحد: $\{u : \|u\| \leq 1\}$

قضیه: گوی واحد محدب است:

$$\|tu+(1-t)v\| \leq \|tu\| + \|(1-t)v\| = t\underset{\leq 1}{\|u\|} + (1-t)\underset{\leq 1}{\|v\|}$$

$$\leq 1$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, \infty]$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, \infty]$$

نرم l1 :

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

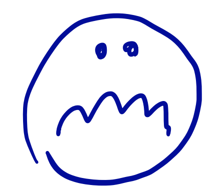
نرم l2 :

$$\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, \infty]$$

$\|x\|_0 :=$ تعداد درایه‌های ناصفر 

نرم ۱l : $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

نرم ۲l : $\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

A خوب:

حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن x که: Ax=b و r $||x||_0 \leq$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر **۲r** ستون مستقل

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر ۲r ستون مستقل

A خوب:
ماتریس تصادفی

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \le r$

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

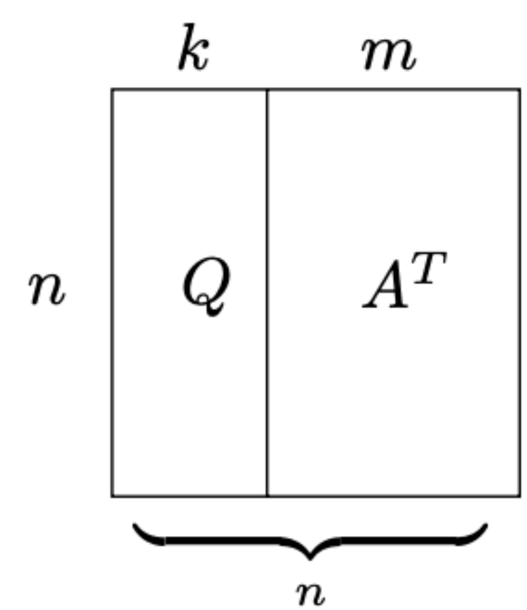
(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر ۲r ستون مستقل

A خوب:
ماتریس تصادفی

Q: (2r+k) x k

A: 2r x (2r+k)



مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \le r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر **۲r** ستون مستقل

A خوب:
ماتریس تصادفی

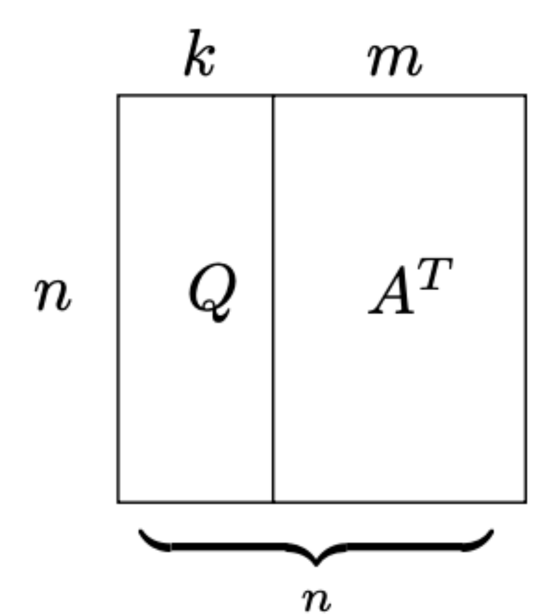
Q: (2r+k) x k

A: 2r x (2r+k)

w -> Qw

ارسال: $\tilde{z} = Qw + x$

حل دستگاه $Ax = b$
که **x** تنک ($b := A\tilde{z}$)



مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

A خوب:

حداکثر یک جواب تنک

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*

(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:

ماتریس تصادفی

A خوب:

هر ۲r ستون مستقل

Q: (2r+k) x k

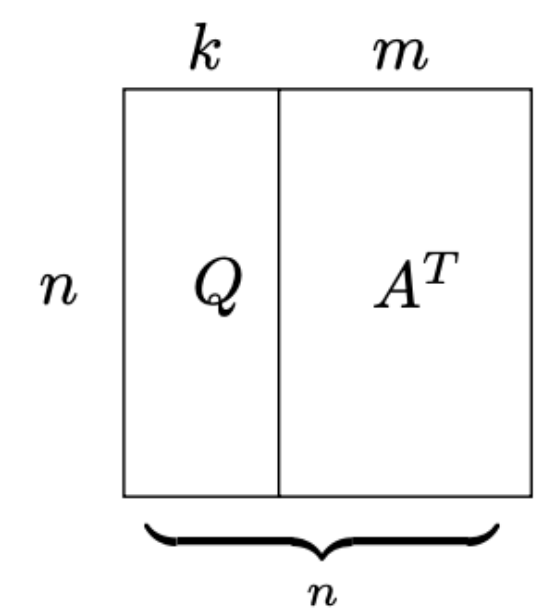
A: 2r x (2r+k)

w -> Qw

ارسال: $\tilde{z} = Qw + x$

حل دستگاه $Ax = b$

که **x** تنک ($b := A\tilde{z}$)



$\boxed{\begin{array}{c}\text{حل دستگاه } Ax = b \\ \text{تنک } \mathbf{x} \text{ که } (b := A\tilde{z})\end{array}}$

حل دستگاه $Ax = b$

که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

$$\mathbf{Ax = b}$$

$$||\mathbf{x}||_0 <= \mathbf{r}$$

حل دستگاه $Ax = b$

که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

$$\mathbf{Ax = b}$$

$$\mathbf{||x||_0 <= r}$$

سخت محاسباتی!

حل دستگاه $Ax = b$

که **x** تنک $(b := A\tilde{z})$

Ax = b

$||x||_0 <= r$

سخت محاسباتی!

ایده:

Min $||x||_1$

Ax = b

BP

به جای قبلی

حل دستگاه $Ax = b$

که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

$$\mathbf{Ax = b}$$
$$\mathbf{\|x\|_0 <= r}$$

سخت محاسباتی!

ایده:

BP

$$\mathbf{Min\ \|x\|_1}$$
$$\mathbf{Ax = b}$$

به جای قبلی

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& -\mathbf{u} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} \\
& \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{u} \ge \mathbf{0}.
\end{array}$$

حل دستگاه $Ax = b$

که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

Ax = b

$||\mathbf{x}||_0 <= \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

Min $||\mathbf{x}||_1$

Ax = b

BP

به جای قبلی

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

قابل حل

حل دستگاه $Ax = b$

که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

Ax = b

$||\mathbf{x}||_0 <= \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

Min $||\mathbf{x}||_1$

Ax = b

BP

به جای قبلی

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

قابل حل

حل دستگاه $Ax = b$
که $\mathbf{x}$ تنک $(b := A\tilde{z})$

Ax = b

$||\mathbf{x}||_0$ <= r

سخت محاسباتی!

؟

جواب این دو یکی است؟

ایده:

BP

Min $||\mathbf{x}||_1$

Ax = b

به جای قبلی

$$\begin{array}{ll}\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.\end{array}$$

قابل حل

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

خاصیت BP-exact
برای r

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

خاصیت BP-exact
برای r

BP

$$\text{Min } \|x\|_1$$
$$Ax = b$$

تعبیر هندسی