دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

کاربرد برنامه‌ریزی خطی در تعادل نش مخلوط بازی‌های جمع ــ صفر

جلسه ۱۴

نگارنده: محمد مهدی استاد شریف معمار

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه‌های گذشته الگوریتم‌های حل برنامه ریزی خطی را معرفی کردیم. الگوریتم‌هایی که مطرح شد به ترتیب سیمپلکس، بیضی‌گون و نقطه درونی بود. در جلسات آینده میخواهیم کاربردهای برنامه‌ریزی خطی را معرفی کنیم و در این جلسه به کاربرد برنامه‌ریزی خطی در نظریه بازی ها می‌پردازیم.

۲ مفاهیم اولیه‌ی نظریه بازی‌ها

۱.۲ مثالی از یک بازی

یک بازی بین دو نفر به نام‌های بابک و آرش به این صورت برگزار می‌شود: هر کدام از این دو نفر فرمانده‌ی ۵ گروهان هستند و ۳ زمین جنگی وجود دارد. هر کدام از این دو نفر گروهان‌های خود را به سه دسته تقسیم می‌کند (تعداد گروهان‌ها در هر دسته می‌تواند ۰ هم باشد) و آنها را به صورت کاملا تصادفی بین این ۳ زمین تقسیم می‌کند. برنده در هر زمین شخصی است که تعداد گروهان‌های بیشتری در آن زمین داشته باشد و اگر تعداد گروهان‌های هر کدام در زمینی برابر بود هیچکس برنده‌ی آن زمین نمی‌شود. در نهایت کسی که بیشترین تعداد زمین را برنده شده باشد برنده‌ی بازی است.

به دنبال این هستیم که یک روش بازی «خوب» برای آرش پیدا کنیم. ماتریس M را به این صورت می‌سازیم که در آن به ازای همه‌ی سه‌تایی‌هایی که ممکن است آرش و بابک انتخاب کنند، امید ریاضی برنده شدن آرش را محاسبه می‌کنیم.

		بابک				
		(۵،۰،۰)	(۴،۱،۰)	(۳،۲،۰)	(۳،۱،۱)	(۲،۲،۱)
	(۵،۰،۰)	۰	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	−۱	−۱
	(۴،۱،۰)	$\frac{1}{3}$	۰	۰	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
آرش	(۳،۲،۰)	$\frac{1}{3}$	۰	۰	۰	$\frac{1}{3}$
	(۳،۱،۱)	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۰	$-\frac{1}{3}$
	(۲،۲،۱)	۱	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰

ماتریس سود آرش

برای مثال اگر آرش (۵،۰،۰) را و بابک (۴،۱،۰) را انتخاب کند، آنگاه به احتمال $\frac{1}{3}$ هر ۵ گروهان آرش در زمینی قرار می‌گیرند که بابک در آنجا گروهان ندارد و در این صورت ۲ زمین را بابک و ۱ زمین را آرش برنده می‌شود پس برنده‌ی بازی بابک است. همچنین به احتمال $\frac{2}{3}$ ، ۵ گروهان آرش در زمینی قرار می‌گیرند که بابک در آنجا ۱ یا ۴ گروهان دارد و آن زمین را می‌برد. در این صورت ۱ زمین را بابک و ۱ زمین را آرش برنده می‌شود پس هیچکس برنده نمی‌شود. بنابراین امید ریاضی سود آرش در این حالت برابر است با:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{2}{3} \times (0) = -\frac{1}{3}$$

توجه کنید در اینجا ماتریس سود بابک دقیقا قرینه‌ی ماتریس سود آرش است (با این شرط که سطرها استراتژی‌های بابک و ستون‌ها استراتژی‌های آرش باشند، برعکس این ماتریس). به چنین بازی‌هایی که *هر بازیکن آنچه که بازیکن دیگر از دست می‌دهد را به دست می‌آورد* ***بازی جمع‌ــ‌صفر*** [۱] *گویند* .

حال می‌خواهیم یک استراتژی برای آرش پیشنهاد دهیم. استراتژی به این صورت است که فرض را بر محتاط بودن آرش می‌گذاریم، به این معنی که حالتی که آرش انتخاب می‌کند حالتی است که در بدترین حالت کمترین ضرر به آرش وارد شود. مطابق ماتریس سود آرش، اگر این استراتژی را پیش گیریم، بهترین کاری که آرش می‌تواند انجام دهد این است که دسته‌ی (۰،۲،۳) را انتخاب کند، زیرا در بدترین حالت سودی که به دست می‌آورد ۰ است. حال اگر بابک نیز همین روش را پیش گیرد، یعنی محتاطانه‌ترین استراتژی را انتخاب کند، باید او نیز ستونی از ماتریس بابک را انتخاب کند که بیشترین سودی که آرش در آن ستون می‌کند کمینه شود. در این حالت نیز بهترین کار این است که بابک هم دسته‌ی (۰،۲،۳) را انتخاب کند. توجه کنید که در این وضعیت، هیچکدام از طرفین، با فرض دانستن استراتژی نفر مقابل، به نفعش نیست که استراتژی خود را تغییر دهد، به این وضعیت **تعادل نش** [۲] می‌گویند.

۲.۲ سنگ کاغذ قیچی

در بازی قبل دیدیم یک استراتژی قطعی برای طرفین وجود داشت که در آن، سیستم به تعادل نش می‌رسید. حال فرض کنید آرش و بابک بازی سنگ‌ــ‌کاغذــ‌قیچی را انجام می‌دهند. ماتریس سود آرش در این حالت به صورت زیر است:

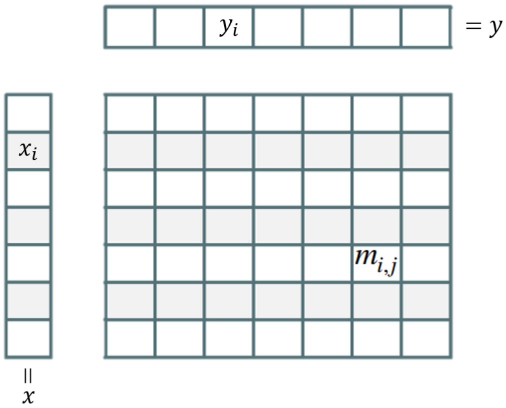
	سنگ	کاغذ	قیچی
سنگ	۰	−۱	۱
کاغذ	۱	۰	−۱
قیچی	−۱	۱	۰

که سطرها انتخاب‌های آرش و ستون‌ها انتخاب‌های بابک است. در این حالت، فرض کنید آرش یک استراتژی قطعی دارد و مثلا سطر اول را انتخاب می‌کند. در این صورت بابک بهتر است کاغذ بیاورد تا ضرر آرش بیشینه شود. حال چون بابک ستون دوم را انتخاب کرده است، آرش بهتر است سطر سوم را انتخاب کند. با تکرار این روند می‌بینیم که در این حالت سیستم به تعادل نش نمی‌رسد. می‌توان بررسی کرد که اگر استراتژی آرش به این صورت باشد که به صورت قطعی هر کدام از دو سطر دیگر را نیز انتخاب کند سیستم به تعادل نش نمی‌رسد. راهکاری که برای رفع این مشکل

[۱] Zero-sum game
[۲] Nash equilibrium

می‌توان استفاده کرد **تعادل نش مخلوط**[۳] است که در آن فرض می‌شود هر بازیکن می‌تواند هر استراتژی را با احتمالی بین ۰ و ۱ انتخاب کند. در بازی سنگ کاغذ قیچی اگر هر کدام از طرفین با احتمال $\frac{۱}{۳}$ هرکدام از حالات را انتخاب کند به طور متوسط هر بازیکن به ازای هر حالت سودی که به دست می‌آورد ۰ است و بازی به تعادل نش مخلوط می‌رسد. یعنی در سنگ کاغذ قیچی محتاطانه‌ترین کار این است که به صورت کاملا تصادفی عمل کنیم.

به طور کلی ماتریس سود آرش، که آن را $M_{m \times n}$ می‌نامیم، در یک استراتژی مخلوط برای یک بازی جمع‌ـصفر به صورت زیر است:



که در آن خانه‌ی iام y برابر احتمال انتخاب ستون iام توسط بابک است و خانه‌ی iام x برابر احتمال انتخاب سطر iام توسط آرش است. به x و y **استراتژی مخلوط**[۴] می‌گویند. بنابراین دو شرط زیر را داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} y_j = ۱ \quad y \geq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{m} x_j = ۱ \quad x \geq ۰$$

همچنین m_{ij} امید ریاضی سود آرش در حالتی است که آرش سطر iام و بابک ستون jام را انتخاب کند و به ازای یک x و y مشخص، سودی که آرش به دست می‌آورد برابر است با:

$$x^\intercal M y = \sum_{i,j} m_{i,j} x_i y_j \tag{۱}$$

زیرا به احتمال $x_i y_j$ آرش سود $m_{i,j}$ کسب می‌کند.

اگر آرش تصمیم x را بگیرد آنگاه بابک به دنبال این است که ستونی را انتخاب کند که به آرش بیشترین ضرر را می‌رساند یا معادلاً سود آرش کمینه می‌شود. این مقدار کمینه را $\beta(x)$ می‌نامیم:

$$\beta(x) = \min_y x^\intercal M y \tag{۲}$$

همچنین اگر بابک تصمیم y را بگیرد آنگاه آرش به دنبال این است که سطری را انتخاب کند که بیشترین سود را بکند. این مقدار بیشینه را $\alpha(y)$ می‌نامیم:

$$\alpha(y) = \max_x x^\intercal M y \tag{۳}$$

۳.۲ تعریف رسمی تعادل نش مخلوط

تعریف ۱. *یک زوج مرتب از استراتژی‌های مخلوط مانند $(\tilde{x}, \tilde{y})$ یک* ***تعادل نش مخلوط*** *است اگر $\tilde{x}$ بهترین واکنش در برابر استراتژی $\tilde{y}$ باشد و $\tilde{y}$ بهترین واکنش در برابر استراتژی $\tilde{x}$ باشد. یا به عبارتی:*

$$\beta(\tilde{x}) = \tilde{x}^\intercal M \tilde{y} = \alpha(\tilde{y}) \tag{۴}$$

[۳] Mixed Nash equilibrium
[۴] Mixed strategy

بنابر تعریف بالا، لم سه قسمتی زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۱. *همواره:*

آ) *برای هر x و y داریم* $\max_x \beta(x) \leq \min_y \alpha(y)$.

ب) *اگر $(\tilde{x}, \tilde{y})$ یک تعادل نش مخلوط باشند آنگاه هر دوی آنها محتاطانه‌ترین استراتژی هستند یا به عبارتی استراتژی‌هایی هستند که در بدترین حالت بهترین نتیجه را دارند. یعنی $\beta(\tilde{x})$ بیشینه است و $\alpha(\tilde{y})$ کمینه است.*

ج) *اگر دو استراتژی مخلوط مانند $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ در رابطه‌ی $\alpha(\tilde{y}) = \beta(\tilde{x})$ صدق کنند، آنگاه آنها یک تعادل نش مخلوط هستند.*

اثبات.

آ) برای اثبات باید توجه کنید که برای هر دو استراتژی مخلوط مانند x و y داریم $\max_x \beta(x) \leq x^\intercal My \leq \min_y \alpha(y)$، که این نامساوی نیز با توجه به تعریف α و β به سادگی ثابت می‌شود. برای مثال فقط نامساوی سمت چپ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\beta(\tilde{x}) = \max_x \beta(x)$. بنابر تعریف β داریم:

$$\beta(x) = \min_y x^\intercal My \Longrightarrow \forall x, y: \ \beta(x) \leq \beta(\tilde{x}) \leq x^\intercal My.$$

ب) بنابر قسمت (الف) برای هر x داریم:

$$\beta(x) \leq \max_x \beta(x) \leq \min_y \alpha(y) \leq \alpha(\tilde{y})$$

حال چون $(\tilde{x}, \tilde{y})$ یک تعادل نش مخلوط هستند پس $\alpha(\tilde{y}) = \beta(\tilde{x})$. با جای‌گذاری در نامساوی بالا داریم:

$$\beta(x) \leq \beta(\tilde{x})$$

این یعنی $\beta(\tilde{x})$ بیشینه است. به طور مشابه ثابت می‌شود $\alpha(\tilde{y})$ کمینه است.

ج) بنابر اثبات قسمت (الف) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\beta(\tilde{x}) = \tilde{x}^\intercal M\tilde{y} = \alpha(\tilde{y})$$

پس $(\tilde{x}, \tilde{y})$ یک تعادل نش مخلوط است.

□

۳ به دست آوردن تعادل نش مخلوط با استفاده از برنامه ریزی خطی

حال قضیه‌ی مهم زیر را برای بازی‌های جمع‌ـ صفر بیان می‌کنیم:

قضیه ۱. ***قضیه‌ی MiniMax برای بازی‌های جمع‌ـ صفر.*** *برای هر بازی جمع‌ـ صفر، استراتژی‌های مخلوطی وجود دارند که برای هر کدام از طرفین محتاطانه‌ترین استراتژی هستند و به صورت کارایی می‌توان آنها را با استفاده از برنامه‌ریزی خطی محاسبه کرد. اگر $\tilde{x}$ محتاطانه‌ترین استراتژی مخلوط برای آرش (همان Alice در متون انگلیسی) و $\tilde{y}$ محتاطانه‌ترین استراتژی مخلوط برای بابک (همان Bob در متون انگلیسی) باشد، در این صورت $(\tilde{x}, \tilde{y})$ یک تعادل نش مخلوط است و عدد $\tilde{x}^\intercal M\tilde{y} = \alpha(\tilde{y}) = \beta(\tilde{x})$ برای همه‌ی محتاطانه‌ترین استراتژی‌های مخلوط $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ یکسان است.*

اثبات. ابتدا توجه کنید بنابر لم ۱، اگر $(\tilde{x}, \tilde{y})$ محتاطانه‌ترین استراتژی‌ها باشند آنگاه یک تعادل نش مخلوط هستند. پس کافی است قسمت اول قضیه را ثابت کرد، یعنی *با استفاده از برنامه‌ریزی خطی* $\max_x \beta(x)$ و $\min_y \alpha(y)$ *یا معادلاً محتاطانه‌ترین استراتژی طرفین را به دست آوریم.* برای این منظور، ابتدا سعی می‌کنیم یک برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن بیشینه‌ی تابع $\beta(x)$ ارائه دهیم و به طور مشابه یک برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه‌ی کمینه‌ی تابع $\alpha(y)$ ارائه دهیم. سپس از اینکه این دو برنامه‌ریزی خطی دوگان یکدیگرند و با توجه به قضیه‌ی دوگانی قوی ثابت می‌کنیم

جواب این دو دستگاه یکی است.
برای محاسبه‌ی $\beta(x)$ می‌توان برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & x^\intercal M y \\ \text{که} \quad & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

اما ما به دنبال پیدا کردن بیشینه‌ی تابع $\beta(x)$ هستیم که ساختن برنامه‌ریزی آن در نگاه اول به نظر ساده نمی‌آید. راه حل استفاده از دوگان این برنامه‌ریزی خطی است. به ازای یک x مشخص، دوگان این برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & x_0 \\ \text{که} \quad & M^\intercal x - x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که بنابر قضیه‌ی دوگانی، بیشینه‌ی x_0 برابر کمینه‌ی $x^\intercal y$ است که همان $\beta(x)$ است. حال اگر خود x را نیز متغیر بگیریم، می‌توان بیشینه‌ی x_0 را روی تمام x ها به دست آورد که همان چیزی است که دنبالش بودیم. یعنی اگر دستگاه زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & x_0 \\ \text{که} \quad & M^\intercal x - x_0 \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

آنگاه جواب این دستگاه برابر مقدار $\max_x x_0$ یا معادلاً برابر $\max_x \beta(x)$ است. به طور مشابه می‌توان دستگاه زیر را برای محاسبه‌ی کمینه‌ی $\alpha(y)$ حل کرد.

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & y_0 \\ \text{که} \quad & My - y_0 \leq 0 \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

که در اینجا نیز جواب این دستگاه برابر مقدار $\min_y y_0$ یا معادلاً برابر $\min_y \alpha(y)$ است.
اکنون اگر دقت کنید دستگاه‌های ۵ و ۶ دوگان یکدیگر هستند. پس اگر این دو دستگاه جواب شدنی داشته باشند، مقدار بهینه‌ی تابع هدف هر دو برابر است و بنابراین حکم ثابت می‌شود. یعنی خواهیم داشت:

$$\min_y y_0 = \max_x x_0 \implies$$
$$\min_y \alpha(y) = \max_x \beta(x)$$

که بنابر لم ۱، x و y متناظر با عبارت آخر، یک تعادل نش مخلوط هستند.
بنابراین کافی‌ست ثابت کنیم این دو دستگاه جواب شدنی دارند که این موضوع نیز به سادگی قابل اثبات است. در دستگاه ۵ کافی است به ازای یک x دلخواه، مقدار x_0 را برابر $M^\intercal x$ بگذاریم و در دستگاه ۶ کافی‌ست به ازای یک y دلخواه، مقدار y_0 را برابر My بگذاریم. بنابراین حکم ثابت شد.

□

مراجع

[۱] ویدیو جلسه ۱۴ درس