جفت گراف های گروه –زیرگروه[1]

ریاضیات گسسته ، بهار 93

سیده مانا رضوی

دانشکده ریاضی ، دانشگاه صنعتی شریف

تعریف جفت گراف گروه – زیرگروه

فرض کنید G یک گروه[2]باشد و H زیرگروهی از آن و S زیرمجموعه ای از آن بطوریکه $S\cap H$ متقارن باشد ، در اینصورت جفت گراف گروه- زیرگروه $\mathcal{G}(G,H,S)$ با مجموعه رئوس G و مجموعه یال های زیر مشخص می شود :

- $(h, hs), (hs, h), \forall h \in H, \forall s \in S - H.$
- $(h,hs), \forall h \in H, \forall s \in S \cap H.$

مثال

فرض کنید :

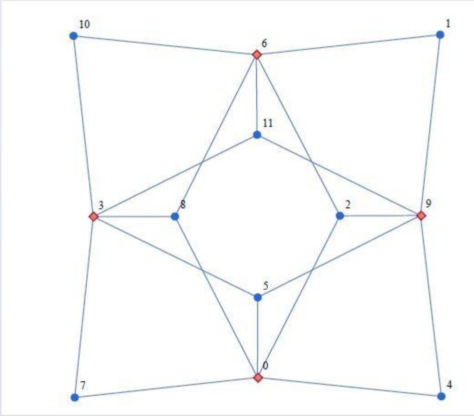
$G = Z/12Z \;, H = \{0, 3, 6, 9\}, S = \{2, 4, 5, 7, 8\}$

در اینصورت داریم :

$S\cap H= \emptyset$

$S-H=S$

و جفت گراف متناظر به شکل مقابل در می آید :



راس های منفرد

1)جفت گراف G(G,H,S) راس منفرد ندارد ، اگر و تنها اگر S یک نماینده برای هر همدسته H روی G به جز He=H را در خود داشته باشد .

2) راس های H در G(G,H,S) منفردند اگر و تنها اگر S مجموعه تهی باشد .

اثبات . فرض کنید S تهی نیست و شامل یک نماینده هر هم دسته هست ، سپس $x \in S$ را در نظر بگیرید و $s\in S$ را بعنوان نماینده Hx ، پس $h\in H$ وجود خواهد داشت که $hs=x$ بنابرین x به h متصل است .

برعکس اگر هیچ راس منفردی وجود نداشته باشد ، با استفاده از تعریف باید داشته باشیم $U_{s\in S_o} Hs=G$ ، عبارت دوم مستقیما از تعریف نتیجه می شود .

مثال

گروه G از مرتبه n، $H=\{e\}$ و $S=G-H$ ،گراف متناظر یک T_{n-1} است و هیچ راس منفردی ند ارد .در شکل زیر n=6

مقادیر ویژه[3]

مقدار ویژه غیر بدیهی یک گراف K- منتظم ، $\mu = k$ است و هر مقدار ویژه یک گراف کیلی G(G,S) هم $\mu = k$ است .

قضیه : فرض کنید G یک گروه باشد ، H یک زیرگروه G با اندیس $[G:H]=k+1$ $(k\geq 1)$ و $S \subset G$ یک زیر مجموعه ناتهی با S_H متقارن و $|S_0|\neq 0$ در نظر بگیرید .

$e=x_0 , x_1,\dots,x_k$ یک مجموعه از نماینده های همدسته های H در گروه G و مجموعه $S_i=S\cap Hx_i$ ، پس :

$$\mu^{\mp} = \frac{|S_x| \mp \sqrt{|S_x|^2 + \sum_1^k |S_i|^2}}{2}$$

مقادیر ویژه گراف G(G,H,S) هستند . یک تابع ویژه معادل بدین صورت تعریف می شود.

$$f^{\mp}(h) = \mu^{\mp} \qquad h \in H$$

$$f^{\mp}(x) = |S_i| \qquad x \in Hx_i$$

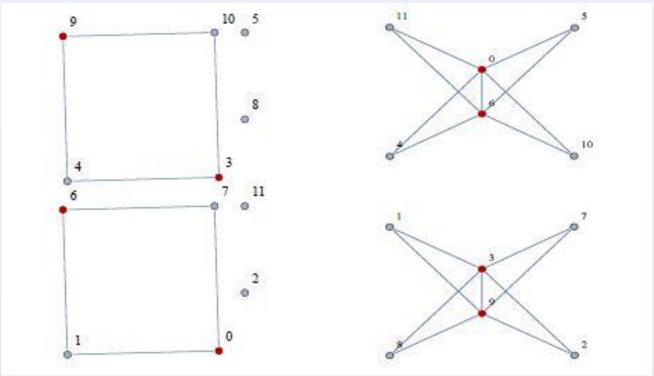
همبندی

یک جفت گراف ، همبند است اگر و تنها اگر $\langle H\cap(S_H U S_o S^{-1}_o)\rangle=H$ و S شامل همدسته های H متفاوت با H است .

مثال

$G = Z/12Z \;, H \cong Z/4Z$

$S_1=\{1,7\} \;, S_2=\{4,5,6,10,11\}$



$G(G,H,S_1) \;, G(G,H,S_2)$

جفت گراف دوبخشی

می دانیم که یک گراف دو بخشی است وقتی یک افراز دوتایی از مجموعه رئوس وجود داشته باشد مثل V_+ و V_- که هر جفت از رئوس در زیر مجموعه های یکسان مجاور نباشند .

برای گروه G، زیرمجموعه متقارن S، اگر یک هomomorفیسم $X:G \rightarrow \{-1,1\}$ وجود داشته باشد بطوریکه $X(S)=\{-1\}$ آنگاه گراف G(G,H,S) دو بخشی باشد .

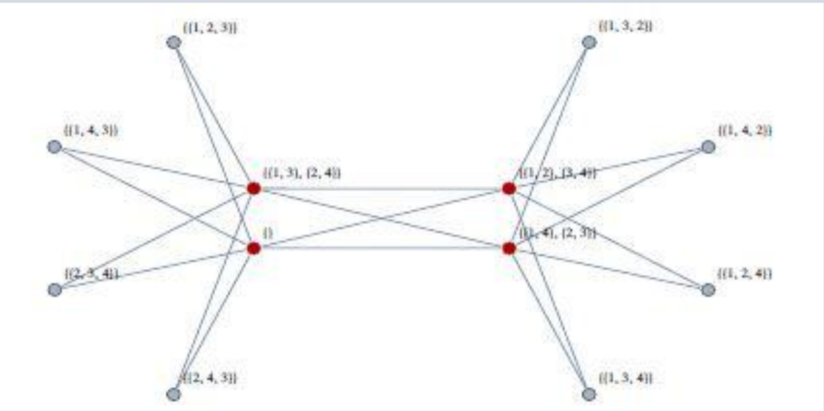
عکس این قضیه هم برقرار است اگر G(G,H,S) همبند و متقارن باشد .

مثال

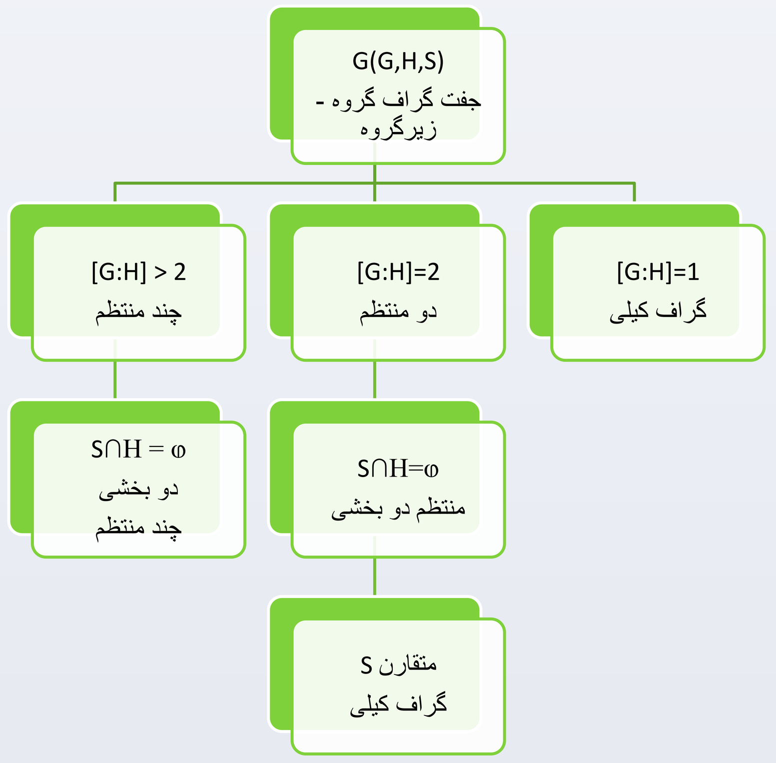
فرض کنید $G=A_4$ و H گروه چارتایی کلاین باشد و

$S=\{(1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 3),(1, 4, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 3)\}$

جفت گراف متناظر یک گراف دو بخشی بصورت زیر خواهد بود :



اندیس زیرگروه و مشخصات جفت گراف



جفت گراف دلخواه یک مجموعه از مقادیر ویژه شامل بزرگترین مقدار ویژه قابل محاسبه است . با توجه به اندیس زیرگروه میتوان در مورد منتظم بودن (اندیس 1 یا 2) و نامنتظم بودن نظر داد . اگر مجموعه مولد شامل مکمل زیرگروه باشد ، جفت گراف دو بخشی یا چند بخشی است . در دوحالت جفت گراف ها ، کیلی هستند : وقتی گروه و زیرگروه یکی باشند یا وقتی زیرگروه از مرتبه 2 باشد و در حالت دوم جفت گراف منتظم است اگر مجموعه تولید کننده متقارن باشد . همچنین متقارن بودن مجموعه تولید کننده بررسی دو بخشی بودن جفت گراف را ساده تر میکند .

منابع

1. Cid Reyes-Bustos,Group subgroup pair graphs, Graduate School of Mathematics Kyushu University,2014
2.P.B. Bhattacharya ,S.K.Jain ,S.R.Nagpaul, Basic Abstract Algebra,Cambridge University Press,Second Edition ,1995
3. Laszlo Lovasz,Eigenvalues of graph,2007