

درس تحقیق در عملیات ۱

آزمونک اول

نیم سال اول سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰

۱ تبدیل

برنامه ریزی زیر را به یک برنامه ریزی خطی تبدیل کنید:

$$\begin{aligned} \min \quad & |x| + |y| + |z| \\ \text{s.t.} \quad & x + y \leq 1 \end{aligned}$$

۱.۱ پاسخ

$$\begin{aligned} \min \quad & a_x + a_y + a_z \\ \text{s.t.} \quad & x + y \leq 1 \\ & x \leq a_x \\ & -x \leq a_x \\ & y \leq a_y \\ & -y \leq a_y \\ & z \leq a_z \\ & -z \leq a_z \end{aligned}$$

۲ بهینه سازی تولید پالایشگاه

می خواهیم برای یک پالایشگاه برنامه ریزی کنیم. این پالایشگاه مقداری الکل ۲۰٪ دریافت می کند. پالایشگاه یک دستگاه تقطیر دارد که الکل ۲۰٪ را می گیرد و به ازای هر ۱۰۰ لیتر الکل ورودی، ۱ لیتر الکل ۹۹٪ تولید می کند. می توانیم با ترکیب الکل های ۲۰٪ و ۹۹٪ با نسبت های مختلف، الکل های با غلظت های مختلف تولید کنیم. الکل طبی ۹۰٪ را حداکثر ۱۰۰ لیتر به قیمت لیتری ۱۰۰۰ تومان از پالایشگاه می خرند. الکل ضد عفونی ۷۰٪ را حداکثر ۱۰۰۰ لیتر به قیمت لیتری ۱۰۰ تومان از پالایشگاه می خرند. می دانیم که حداکثر می توانیم ۲۰۰۰ لیتر الکل ۲۰٪ تهیه کنیم. یک برنامه ریزی خطی برای برنامه ریزی تولید پالایشگاه بنویسید که درآمد فروش پالایشگاه را بیشینه کند.

راهنمایی: اگر نتوانستید برنامه ریزی خطی برایش بنویسید، یک برنامه ریزی برایش بنویسید و سپس تلاش کنید آن را به یک برنامه ریزی خطی تبدیل کنید.

۱.۲ پاسخ

متغیرهای زیر را تعریف می کنیم:

• x_t : میزان الکل ۲۰٪ که برای تولید الکل طبی مصرف می کنیم

• x_{1d} : میزان الک ۲۰٪ که برای تولید الک ضد عفونی مصرف می کنیم

• x_{2t} : میزان الک ۹۹٪ که برای تولید الک طبی مصرف می کنیم

• x_{2d} : میزان الک ۹۹٪ که برای تولید الک ضد عفونی مصرف می کنیم

موارد زیر به ترتیب قابل محاسبه هستند:

• میزان الک ورودی: $x_{1t} + x_{1d} + ۱۰۰(x_{2t} + x_{2d})$

• میزان تولید الک طبی: $x_{1t} + x_{2t}$

• میزان تولید الک ضد عفونی: $x_{1d} + x_{2d}$

• غلظت الک طبی تولیدی:

$$\frac{۰/۲x_{1t} + ۰/۹۹x_{2t}}{x_{1t} + x_{2t}}$$

چون می خواهیم این غلظت ۹۰٪ باشد، پس

$$\frac{۰/۲x_{1t} + ۰/۹۹x_{2t}}{x_{1t} + x_{2t}} = ۹۰$$

پس

$$۰/۲x_{1t} + ۰/۹۹x_{2t} = ۹۰(x_{1t} + x_{2t})$$

• غلظت الک ضد عفونی تولیدی:

$$\frac{۰/۲x_{1d} + ۰/۹۹x_{2d}}{x_{1d} + x_{2d}}$$

$$۰/۲x_{1d} + ۰/۹۹x_{2d} = ۷۰(x_{1d} + x_{2d})$$

پس برنامه ریزی خطی به صورت زیر خواهد بود:

$$\max \quad ۱۰۰۰x_{1t} + ۱۰۰۰x_{2t} + ۱۰۰x_{1d} + ۱۰۰x_{2d}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{1t} + x_{1d} + ۱۰۰x_{2t} + ۱۰۰x_{2d} \leq ۲۰۰۰$$

$$x_{1t} + x_{2t} \leq ۱۰۰$$

$$x_{1d} + x_{2d} \leq ۱۰۰۰$$

$$۰/۲x_{1t} + ۰/۹۹x_{2t} = ۹۰x_{1t} + ۹۰x_{2t}$$

$$۰/۲x_{1d} + ۰/۹۹x_{2d} = ۷۰x_{1d} + ۷۰x_{2d}$$

$$x_{i,j} \geq ۰ (i \in \{۱, ۲\}, j \in \{t, d\})$$

۳ برنامه ریزی صحیح برای هم ردیفی شبکه ها

فرض کنید دو گراف G_1 و G_2 هر دو با n راس داده شده است. می خواهیم یک تابع یک به یک و پوشا بین راس های این دو گراف پیدا کنیم به صورتی که تعداد یال های حفظ شده G_1 را بیشینه باشد. به عبارت دقیق تر فرض کنید تابع f راس های G_1 را به راس های G_2 ببرد. می گوئیم یک یال $e = \{v, u\}$ از G_1 تحت تابع f حفظ شده است اگر یال $\{f(v), f(u)\}$ در G_2 وجود داشته باشد. یک برنامه ریزی صحیح برای این مساله بنویسید.

۱.۳ پاسخ

مانند مسئله تطابق، متغیرها را تعریف می‌کنیم. یعنی $x_{i,j}$ را تعریف می‌کنیم اینکه راس $i \in V(G_1)$ به راس $j \in V(G_2)$ تطبیق داده شود. قیودی که این متغیرها باید داشته باشند تا یک تطابق را بسازند را نیز اضافه می‌کنیم که به صورت زیر است

$$\sum_i x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in V(G_2)$$

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in V(G_1)$$

برای تولید تابع هدف باید به ازای هر جفت یال، یکی از گراف اول و یکی از گراف دوم، اگر این دو به هم منطبق شوند، یک امتیاز کسب کنیم. پس ایده اولیه این است که تابع هدف را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{\substack{\{i,k\} \in E(G_1), \\ \{j,l\} \in E(G_2)}} I(x_{i,j} = 1 \& x_{k,l} = 1)$$

که تابع $I(C)$ یک است اگر و تنها اگر C درست باشد و در غیر این صورت صفر است. تنها نکته باقی‌مانده این است که $I(x_{i,j} = 1 \& x_{k,l} = 1)$ را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی تولید کنیم. مانند مسئله‌هایی که در کلاس حل کردیم، می‌توانیم تلاش کنیم متغیرهایی تعریف کنیم که نماینده این مقدار باشند. به عبارتی

$$y_{i,j,k,l} = I(x_{i,j} = 1 \& x_{k,l} = 1)$$

یعنی باید قیدی خطی بگذاریم که y نتواند ۱ شود مگر اینکه هر دو $x_{i,j}$ و $x_{k,l}$ یک باشند. می‌توان به صورت هندسی هم این را نشان داد. یک انتخاب منطقی این است:

$$y_{i,j,k,l} \leq \frac{1}{2}(x_{i,j} + x_{k,l})$$

پس برنامه‌ریزی صحیح ما به این صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\substack{\{i,k\} \in E(G_1), \\ \{j,l\} \in E(G_2)}} y_{i,j,k,l} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in V(G_1)} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in V(G_2) \\ & \sum_{j \in V(G_2)} x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in V(G_1) \\ & y_{i,j,k,l} \leq \frac{1}{2}(x_{i,j} + x_{k,l}) \quad \forall i, k \in V(G_1), j, l \in V(G_2) \\ & x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V(G_1), j \in V(G_2) \\ & y_{i,j,k,l} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \in V(G_1), j, l \in V(G_2) \end{aligned}$$

۴ علائم

$$[k] = \{1, \dots, k\} \bullet$$

$$\|b\|_1 = \sum_i |b_i| \bullet$$