دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

روش سیمپلکس

جلسه هفتم

نگارنده: محمدجواد شریعتی

۱ سیمپلکس با یک مثال

در جلسات قبل نوشتن برنامه ریزی خطی برای یک مسئله را آموختیم. حال به دنبال روشی برای حل آن هستیم. بدین منظور روش سیمپلکس را می‌آموزیم.

برای حل کردن برنامه ریزی خطی به کمک روش سیمپلکس، برنامه ریزی خطی ما باید به فرم معادله ای باشد. برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & x_1 + x_2 \\ \text{که} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

برای تبدیل آن به فرم معادله ای کافیست متغیرهای x_3 و x_4 و x_5 را اضافه کنیم:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{بیشینه کن} & x_1 & +x_2 & & & \\
\text{که} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & =1 \\
& x_1 & & & +x_4 & =3 \\
& & x_2 & & +x_5 & =2 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

اگر متغیرهای اضافی را برحسب متغیرهای اصلی x_1 و x_2 بنویسیم و مقدار متغیرهای اصلی را صفر در نظر بگیریم، یک جواب شدنی پایه ای با $B = \{3, 4, 5\}$ برای برنامه ریزی خطی بدست می‌آوریم: (به این فرم نوشتن تابلو می‌گویند)

$$
\begin{array}{l}
x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\
x_4 = 3 - x_1 \\
x_5 = 2 \quad\;\; - x_2 \\
\hline
z = \quad\; x_1 + x_2
\end{array}
$$

هدف ما بیشینه کردن تابع هدف z است. اگر به z نگاه کنیم، در آن هم ضریب x_1 و هم ضریب x_2 مثبت است. پس اگر بتوانیم آن‌ها را افزایش دهیم، تابع هدف ما هم بیشتر خواهد شد. برای افزایش x_2 به معادله های بالا نگاه می‌کنیم تا ببینیم تا چقدر می‌توانیم x_2 را افزایش دهیم. طبق معادله اول (با فرض ثابت بودن x_1) ما می‌توانیم x_2 را حداکثر ۱ واحد افزایش دهیم. در معادله دوم x_2 نداریم پس می‌توانیم آن را تا بینهایت افزایش دهیم و طبق معادله سوم می‌توانیم آن را حداکثر ۲ واحد افزایش دهیم. در نتیجه و باتوجه به هر ۳ معادله، ما می‌توانیم x_2 راحداکثر ۱ واحد افزایش دهیم. از معادله اولی داریم:

$$
x_3 = 1 + x_1 - x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1 + x_1 - x_3
$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{l}
x_2 = 1 + x_1 - x_3 \\
x_4 = 3 - x_1 \\
x_5 = 1 - x_1 + x_3 \\
\hline
z = 1 + 2x_1 - x_3
\end{array}
$$

که یک جواب پایه ای شدنی جدید با $B = \{2, 4, 5\}$ به ما می‌دهد که مقدار تابع هدف آن از صفر(در حالت قبلی) به ۱ افزایش یافته است. حال می‌توانیم دوباره این کار را انجام دهیم. در تابع هدف ضریب x_1 مثبت است. باتوجه معادله سوم، x_1 را حداکثر یک واحد می‌توانیم اضافه کنیم.

$$
x_5 = 1 - x_1 + x_3 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 + x_3 - x_5
$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 1 + x_3 - x_5 \\
x_2 = 2 \quad\;\; - x_5 \\
x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\
\hline
z = 3 + x_3 - 2x_5
\end{array}
$$

دوباره در تابع هدف $x_۳$ را داریم که ضریبش مثبت است. با تکرار کارهای قبل و جایگذاری خواهیم داشت:

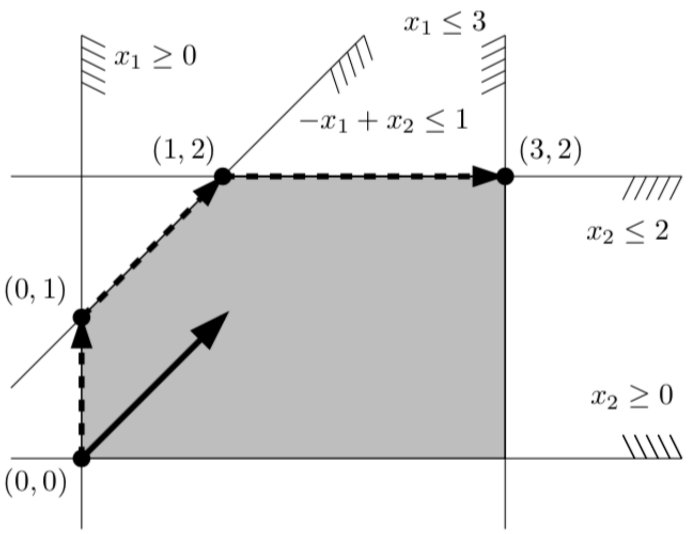
$$\begin{aligned}
x_۱ &= ۳ - x_۴ \\
x_۲ &= ۲ \quad - x_۵ \\
x_۳ &= ۲ - x_۴ + x_۵ \\
\hline
z &= ۵ - x_۴ - x_۵
\end{aligned}$$

باتوجه به اینکه $x_۴ \geq ۰$ و $x_۵ \geq ۰$ اینطور به نظر می‌آید که $z = ۵$ جواب بهینه ما است. دقت کنید که ما فقط ۳ تا از ۵ جواب پایه ای شدنی را بررسی کردیم و آیا واقعا هیچ جواب پایه ای شدنی دیگری وجود ندارد که بتواند مقداری بیشتر از ۵ برای تابع هدف به ما بدهد؟

نکته ای که باید به آن توجه کرد این است که معادله ای که ما برای تابع هدف بدست آوردیم همواره برقرار است و به اینکه چه پایه ای را انتخاب کرده ایم بستگی ندارد. در نتیجه با توجه با اینکه $x_۴ \geq ۰$ و $x_۵ \geq ۰$ می‌توان گفت در همه جواب های شدنی، تابع هدف ما کوچکتر مساوی ۵ خواهد بود و به این ترتیب ما به مقدار بیشینه رسیده ایم.

۱.۱ تعبیر هندسی

اگر فضای ۵ بعدی ساخته شده از متغیرهای $x_۱$ تا $x_۵$ را به فضای دوبعدی تصویر کنیم تا رفتار متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ را بررسی کنیم، همان کاری که در بخش قبل به صورت جبری انجام دادیم را، مرحله به مرحله به صورت هندسی مشاهده خواهیم کرد.



از $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۰$ شروع کردیم، سپس $x_۲$ را یک واحد افزایش دادیم و به نقطه $(۰, ۱)$ رسیدیم. بعد $x_۱$ را افزایش دادیم و به نقطه $(۱, ۲)$ رسیدیم. سپس $x_۳$ را افزایش دادیم و به نقطه $(۳, ۲)$ رسیدیم و دیگر امکان افزایش متغیری وجود نداشت و نتیجه گرفتیم که به نقطه بهینه رسیده‌ایم. مسیر دیگری که از نقطه $(۰, ۰)$ به نقطه $(۳, ۲)$ وجود دارد و مسیر سریع تری است معادل این است که ابتدا $x_۱$ را افزایش دهیم و سپس $x_۲$ را افزایش دهیم.

۲ مشکلات

۱.۲ بی کران بودن تابع هدف

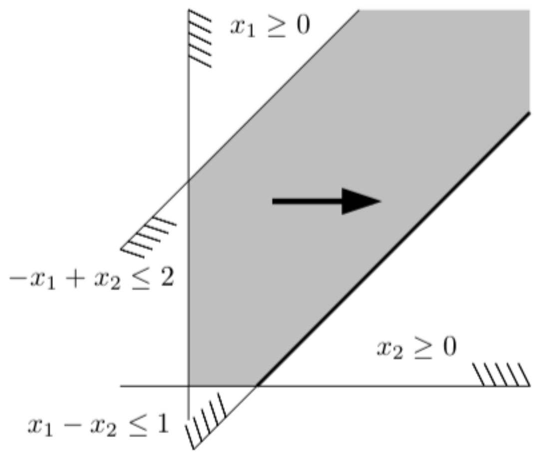
اگر زمانی که تابلوی یک برنامه ریزی خطی را می‌نویسیم در مرحله ای ضریب یکی از x_iها در تابع هدف و تمامی قیدها مثبت باشد، یعنی می‌توان آن را تا هرمیزانی افزایش داد و هیچ کدام از قیدها محدودیتی روی آن نمی‌گذارند. در این حالت تابع هدف بی کران است. مثلا برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 \\
\text{subject to} & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

بعد از یک مرحله، تابلو به این شکل خواهد بود:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 &=& 1 + x_2 - x_3 \\
x_4 &=& 3 \qquad\ \ - x_3 \\
\hline
z &=& 1 + x_2 - x_3
\end{array}
$$

که مشاهده می‌شود می‌توان x_2 را به هرمیزان اضافه کرد و تابع هدف هم تا بینهایت اضافه خواهد شد.



۲.۲ تبهگنی

فرض کنید برنامه ریزی خطی زیر را داشته باشیم و برای آن تابلوی اولیه را بنویسیم:

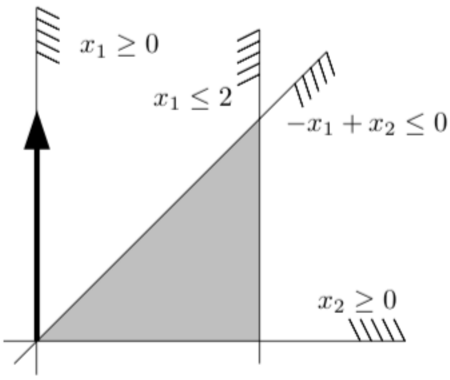
$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 &=& x_1 - x_2 \\
x_4 &=& 2 - x_1 \\
\hline
z &=& x_2
\end{array}
$$

تنها کاندیدا برای افزایش $x_۲$ است اما این باعث منفی شدن $x_۳$ خواهد شد. در اینجا، می‌توانیم معادله اول را تغییر دهیم و $x_۲$ را برحسب $x_۱$ و $x_۳$ بنویسیم:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & & & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & x_1 & - & x_3 \end{array}$$

حال به یک تابلو جدید با همان جواب شدنی پایه ای $(۲, ۰, ۰, ۰)$ رسیدیم که موقعیت بهتری دارد و می‌توانیم $x_۱$ را ۲ واحد افزایش دهیم و ادامه دهیم. مشکلی که ممکن است به وجود بیاید این است که انجام این کار گرهی از کار ما باز نکند و حتی ما را مجبور کند دوباره برعکس همان کار را انجام دهیم و به نوعی در حلقه بیفتیم(cycling).



۳.۲ فاقد جواب شدنی

در حالت کلی پیدا کردن یک جواب شدنی، به سختی پیدا کردن جواب بهینه است. در مسئله های قبلی که برنامه ریزی های خطی به فرم

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

با $b \geq ۰$ داشتیم، اندیس متغیرهایی که در تبدیل به فرم معادله ای آن‌ها را اضافه می‌کردیم، برای ما یک پایه شدنی می‌ساختند. بدست آوردن این پایه شدنی اولیه، می‌تواند با همین روش سیمپلکس انجام شود. برنامه ریزی خطی زیر که در فرم معادله ای قرار دارد را در نظربگیرید:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{maximize} & x_1 & + & 2x_2 & & & & \\ \text{subject to} & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

اگر بخواهیم یک جواب شدنی پیدا کنیم، اولین گزینه ای که به ذهنمان می‌رسد $(x_۱, x_۲, x_۳) = (۰, ۰, ۰)$ است. با اینکه تمام x_i ها نامنفی هستند ولی به وضوح در قیدهای برنامه ریزی ما صدق نمی‌کنند و در نتیجه این یک جواب شدنی نیست. حال متغیرهای اضافی $x_۴$ و $x_۵$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_۴ &= ۴ - x_۱ - ۳x_۲ - x_۳ \\ x_۵ &= ۲ \qquad - ۲x_۲ - x_۳ \end{aligned}$$

اگر ما بتوانیم $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ را طوری پیدا کنیم که معادلات بالا صفر شوند، آنگاه ما یک جواب شدنی برای برنامه ریزی خطی مطرح شده در بالا خواهیم داشت.

برای این که x_1 و x_2 و x_3 های نامنفی ای پیدا کنیم که معادلات گفته شده را صفر کنند، برنامه ریزی خطی زیر را ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Maximize} & & & & - x_4 & - x_5 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + 3x_2 & + x_3 & + x_4 & & = & 4 \\
 & & 2x_2 & + x_3 & & + x_5 & = & 2 \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0. & & & & & &
\end{array}$$

جواب بهینه برای تابع هدف $-x_4 - x_5$ صفر خواهد شد، تنها اگر مقادیر نامنفی x_1 و x_2 و x_3 را پیدا کنیم که در قیدهای مسئله صدق کنند، که این در واقع معادل است با یک جواب شدنی برای برنامه ریزی اولیه ما.

حال متغیرهای x_4 و x_5 یک پایه شدنی با جواب شدنی پایه ای $(0, 0, 0, 4, 2)$ برای ما می‌سازند. اگر ابتدا x_1 و در مرحله بعدی x_3 را وارد پایه شدنی کنیم، در نهایت به تابلو زیر خواهیم رسید:

$$\begin{array}{rcrrrr}
x_1 & = & 2 & - x_2 & - x_4 & + x_5 \\
x_3 & = & 2 & - 2x_2 & & - x_5 \\
\hline
z & = & & & - x_4 & - x_5.
\end{array}$$

جواب بهینه این برنامه ریزی $(2, 0, 2, 0, 0)$ است که به ما جواب شدنی پایه ای $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2)$ را می‌دهد. همچنین می‌توان تابلوی اولیه برنامه ریزی اصلی را از روی تابلوی نهایی برنامه ریزی جدیدی که نوشتیم بدست آورد. کافی است متغیرهای اضافی x_4 و x_5 را حذف کنیم و تابع هدف را هم به همان تابع هدف اصلی برگردانیم:

$$\begin{array}{rcrr}
x_1 & = & 2 & - x_2 \\
x_3 & = & 2 & - 2x_2 \\
\hline
z & = & 2 & + x_2
\end{array}$$

اگر از این تابلو یک مرحله جلوتر برویم، به جواب بهینه می‌رسیم.

۳ سیمپلکس در حالت کلی

تابلو سیمپلکس $\mathcal{T}(B)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\textbf{simplex tableau } \mathcal{T}(B)$$

$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{x}_B & = & \mathbf{p} & + & Q\,\mathbf{x}_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N
\end{array}$$

که در آن x_B بردار متغیرهای پایه، $N = \{1, 2, ..., n\} \backslash B$ و درنتیجه x_N بردار متغیرهایی است که در پایه نیستند، $p \in \mathbb{R}^m$ بردار ستونی از اعداد ثابت، Q یک ماتریس $m \times (n-m)$ از ضرایب، $z_0 \in \mathbb{R}$ یک عدد ثابت و $r \in \mathbb{R}^{n-m}$.

جواب شدنی پایه ای متناظر با این تابلو به راحتی قابل خواندن است. $x_N = 0$ و درنتیجه $x_B = p$. و باتوجه به معادله تابع هدف هم بدست می‌آوریم: $z = z_0$

لم: به ازای هر پایه شدنی B دقیقا یک تابلو سیمپلکس وجود دارد.

نکته: اگر در یک تابلو سیمپلکس، ضرایب متغیرهایی که در پایه نیستند (یعنی x_N) همگی غیرمثبت باشند، یعنی $r \leq 0$ ، آنگاه جواب شدنی پایه ای متناظر با این تابلو بهینه است.

گام لولا: در هرمرحله، ما از یک پایه B و تابلو سیمپلکس $\mathcal{T}(B)$ به یک پایه جدید B' و تابلو سیمپلکس $\mathcal{T}(B')$ می‌رویم. درواقع متغیر غیرپایه‌ای x_v وارد پایه می‌شود و متغیرپایه‌ای x_u از پایه خارج می‌شود:

$$B' = (B \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

قضیه: وقتی از پایه شدنی B به پایه جدید B' می‌رویم، یعنی $B' = (B\backslash\{u\}) \cup \{v\}$ آنگاه پایه جدید B' هم یک پایه شدنی است.

اثبات: ابتدا دقت کنید که xهای بیرون B' همگی صفر هستند، زیرا xهایی که سمت راست تابلو قرار دارند را صفر در نظر می‌گیریم(x_Nها). همچنین تمامی xها نامنفی هستند، زیرا در گام لولا، متغیری که انتخاب می‌کنیم را تاجایی اضافه می‌کنیم که هیچ کدام از متغیرهای پایه‌ای منفی نشوند. پس در B' هم خواهیم داشت $x \geq 0$. پس کافی است ثابت کنیم که ستون‌های $A_{B'}$ مستقل خطی اند تا حکم ثابت شود.

اگر ثابت کنیم ستون‌های ماتریس $A_B^{-1}A_{B'}$ مستقل خطی اند، باتوجه به اینکه طبق فرض ستون‌های A_B مستقل خطی اند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که ستون‌های ماتریس $A_{B'}$ هم مستقل خطی اند. برای اینکه ببینیم این ماتریس از کجا آمده است، ابتدا توجه کنید که قیدهای یک برنامه ریزی خطی را به صورت $Ax = b$ نشان می‌دادیم. همچنین میتوانیم بنویسیم:

$$A_B X_B = b \Rightarrow A_B^{-1} b = X_B$$

پس به نوعی اگر $X_{B'}$ را به ماتریس $A_B^{-1}A_{B'}$ بدهیم، ماتریس X_B حاصل خواهد شد:

$$(A_B^{-1}A_{B'})X_{B'} = A_B^{-1} b = X_B$$

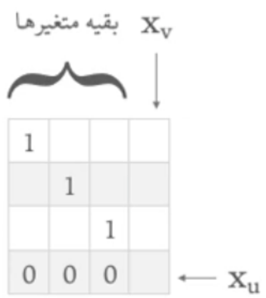
باتوجه به ساختار تابلو و کمی دقت می‌توان به معادلات ماتریسی زیر رسید:

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_B \;=\; \mathbf{p} \;+\; Q\,\mathbf{x}_N \\ \hline z \;\;=\; z_0 \;+\; \mathbf{r}^T\mathbf{x}_N \end{array}$$

$$A_B X_B = b - A_N X_N$$
$$X_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N$$

که درواقع $p = A_B^{-1} b$ و $Q = -A_B^{-1} A_N$ است.

ستون های A_B و $A_{B'}$ کاملا مثل هم هستند به جز در یک ستون (ستون مربوط به x_u بیرون رفته و ستون مربوط به x_v داخل شده است). پس اگر این یک ستون هم متفاوت نبود، داشتیم: $A_B^{-1}A_{B'} = I$. پس می‌توانیم این ماتریس را بدین صورت نمایش دهیم:



حال اگر ثابت کنیم که درایه مربوط به سطر آخر و ستون آخر صفر نیست، می‌توانیم نتیجه بگیریم که ستون‌های این ماتریس مستقل‌اند. دقت کنید که v در N هست و بعد به پایه ما اضافه می‌شود. پس در واقع ستون x_v را در $Q = -A_B^{-1}A_N$ می‌توانیم پیدا کنیم. وقتی در تابلو می‌خواهیم x_u را حذف و سپس x_v را اضافه کنیم، سطر به سطر بررسی می‌کنیم که هرکدام از سطرها چه محدودیتی روی x_v گذاشته اند و محدودترین را انتخاب می‌کنیم. این محدودیت، بدین معناست که ضریب x_v در آن سطر مربوط به x_u غیرصفر (منفی) است. پس اگر ستون x_v را در Q پیدا کنیم، ضریب x_u صفر نیست. در نتیجه درایه سطر آخر و ستون آخر ماتریس $A_B^{-1}A_{B'}$ هم صفر نیست، پس ستون های این ماتریس و در نتیجه ستون های ماتریس $A_{B'}$ مستقل اند.