فصل ۳

گرافهای غیرمنتظم

تعمیم طبیعی از نسبت رایلی برای گرافهای غیرمنتظم:

$$R(y) = \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} |y_u - y_v|^2}{\sum_{v\in V} d_v y_v^2}$$

می‌خواهیم ماتریس لاپلاسین را طوری تعریف کنیم که وقتی یک بردار x را از دو طرف در آن ضرب می‌کنیم، نسبت رایلی را بدهد. برای گرافهای منتظم، لاپلاسین (نرمال‌نشده) را به صورت $L = dI - A$ تعریف کردیم. حدس می‌زنیم ماتریس لاپلاسین برای گرافهای غیرمنتظم $L_G = D - A$ باشد. ماتریس D، ماتریس قطری است که روی قطر اصلی آن درجه‌ی رأسها قرار دارد.

$$\begin{aligned} x^T L_G x &= x^T D x - x^T A x \\ &= \sum_{v\in V} d_v x_v^2 - 2 \sum_{\{u,v\}\in E} x_v x_u \\ &= \sum_{\{u,v\}\in E} |x_v - x_u|^2 \end{aligned}$$

پس صورت نسبت رایلی با ضرب لاپلاسین (نرمال‌نشده) به دست می‌آید.

نشان می‌دهیم لاپلاسین نرمال‌شده باید به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathcal{L}_G = I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$$

بردار و مقدار ویژه‌های لاپلاسین

در فصل ۱ ثابت کردیم برای هر ماتریس متقارن و حقیقی، مقدار ویژه‌ی k-ام آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_k = \min_{V:\text{بعدی-}k} \max_{\substack{x\in V \\ x\neq 0}} \frac{x^T L x}{x^T x}$$

پس برای ماتریس لاپلاسین نرمال‌شده که متقارن و حقیقی است هم برقرار است.

بردار $y = D^{-\frac{1}{2}} x$ تعریف کنید (تغییر متغیر). با جایگذاری y به جای x در رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_k = \min_{S':\text{بعدی-}k} \max_{y\in S'} \frac{y^T D^{-\frac{1}{2}} L D^{\frac{1}{2}} y}{y^T D y}$$

اگر به جای L، $\mathcal{L}_G$ را قرار بدهیم، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \min_{S':\text{بعدی-}k} \max_{y\in S'} \frac{y^T (D-A) y}{y^T D y} \\ &= \min_{S':\text{بعدی-}k} \max_{y\in S'} R(y) \end{aligned}$$

بر خلاف گراف‌های منتظم، مقدار ویژه‌های لاپلاسین نرمال‌شده‌ی گرافهای نامنتظم بردارهای x به کار رفته در به دست آوردن بردار y متناظر مقدار ویژه هستند. البته در صورتی که این بردارها را برای گراف منتظم حساب کنیم، یک ضریب ثابت $\frac{1}{\sqrt{d}}$ در آنها ضرب شده است، اما چیزی که اهمیت دارد برقرار بودن رابطه‌ی آنها با نسبت رایلی است.

مقدار ویژه‌ی اول صفر است:

$$\lambda_1 = 0 \quad y = 1$$

برای محاسبه‌ی مقدار ویژه‌ی دوم، ابتدا ضرب داخلی تحت گراف G را تعریف می‌کنیم:

$$< y, z >_G = \sum_v d_v y_v z_v$$

همین طور عمود بودن تحت G را می‌شود تعریف کرد:

$$y \perp_G z \Leftrightarrow < y, z >_G = 0$$

پس مقدار ویژه‌ی دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_2 = \min_{\substack{y\neq 0 \\ y\perp_G 1}} R_G(y)$$

نتیجه ۱ (نامساوی چیگر برای گرافهای نامنتظم). با جایگذاری مقدار λ_2 بالا نامساوی چیگر برای گرافهای نامنتظم ثابت می‌شود:

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \Phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

نامساوی چیگر برای مرتبه‌های بالاتر

روش ۱

برای تعریف گسترش یالی از رابطه‌ی $\Phi(G) = \min_{S\subset V}(\Phi(S), \Phi(V-S))$ استفاده کردیم. تعمیم آن به k برش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$SSE_s(G) = \min_{\substack{|S|\leq s\\ S\subset V}} \Phi(S)$$

در حالت خاص $s = \frac{1}{2}$ همان گسترش یالی گراف می‌شود:

$$SSE_{\frac{|V|}{2}}(G) = \Phi(G)$$

اگر $\lambda_k = 0$ باشد، آنگاه گراف k مولفه‌ی همبندی دارد که کوچکترین آنها حداکثر $\frac{|V|}{k}$ رأس دارد، پس

$$SSE_{\frac{|V|}{k}}(G) = 0$$

می‌خواهیم برای حالتی که دقیقاً صفر نمی‌شود هم کران پیدا کنیم و با این هدف نامساوی چیگر را تعمیم بدهیم.

قضیه ۲.

$$SSE_{\frac{n^{1+\delta}}{k}} = O(\sqrt{\frac{\lambda_k}{\delta}})$$

برای مثال در قضیه بالا اگر $\frac{n^{1+\delta}}{k} = \frac{n}{7}$ باشد آنگاه $k = 7n^{\delta}$.

روش ۲

در نامساوی چیگر هدف تقریب زدن $\Phi(G)$ بود، اما اگر بخواهیم برای λ_2 کران پیدا کنیم، می‌توانیم از تعریف زیر استفاده کنیم:

$$\Phi_k(G) = \min_{\substack{S_1,\cdots,S_k\\ S_i\subset V\\ S_i\cap S_j=\emptyset}} max_i \Phi(S_i)$$

که به ازای $k=2$ همان رابطه‌ی گسترش یالی است.

قضیه ۳.

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \Phi_k(G) \leq O(k^2)\sqrt{\lambda_k}$$

قضیه‌ی بالا توسط تراویسان، اویس قرن و لی ثابت شده است.

قضیه ۴.

$$\Phi_{0.9k}(G) = O(\sqrt{\lambda_k \lg k})$$

دوبخشی بودن

قبلاً ثابت کردیم که اگر $\lambda_n = 2$ باشد، گراف یک مولفه‌ی دوبخشی دارد.

$$\beta(G) = \min_{x\in\{-1,0,1\}^{|V|}} \frac{\sum_{\{u,v\}\in E}|x_v + x_u|}{\sum_v d_v|x_v|}$$

ضریب بتا میزان داشتن مولفه‌ی دوبخشی یک گراف را نشان می‌دهد. فرض کنید مجموعه‌ی A شامل همه‌ی رأسهایی باشد که درایه‌ی متناظر آنها در x، -1 باشد، به طور مشابه مجموعه‌ی B را برای درایه‌های 1 و مجموعه‌ی S را برای درایه‌های صفر تعریف می‌کنیم. کسر داخل مینیمم در تعریف بتای گراف را بر حسب مجموعه‌های A, B, S بازنویسی می‌کنیم:

$$\beta(A,B,S) = \frac{2E(A) + 2E(B) + E(S, V-S)}{\sum_{v\in V} d_v}$$

می‌دانیم $V - S = A\cup B$. در عبارت بالا، مقادیر $E(A), E(B)$ نشان‌دهنده‌ی میزان دوبخشی بودن گراف هستند و $E(S, V-S)$ میزان جدا بودن مولفه‌های A, B از بقیه گراف است و مخرج کسر باعث می‌شود تعداد رأسهای دور ریخته شده (عضو S) تا حد امکان کم باشند. در نتیجه:

$$\beta(G) = \min_{\substack{A,B,S\\ V \text{ افراز از}}} \beta(A,B,S)$$

مقدار ایده‌آل عبارت بالا (بتا) صفر است.

$$\beta(G) = 0 \Leftrightarrow \text{گراف یک مولفه‌ی دوبخشی دارد} \Leftrightarrow \lambda_n = 2$$

قضیه ۵.

$$\frac{1}{2}(2-\lambda_n) \leq \beta(G) \leq \sqrt{2(2-\lambda_n)}$$

اثبات این قضیه توسط تراویسان انجام شده است.
اگر مقدار ویژه‌ها و بردار ویژه‌های A به ترتیب $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ و $x_1, \cdots, x_n$ باشند، آنگاه:

- مقدار ویژه‌ها و بردار ویژه‌های ماتریس $-A$ عبارت هستند از $-\lambda_1, \cdots, -\lambda_n$ و $x_1, \cdots, x_n$
- مقدار ویژه‌ها و بردار ویژه‌های ماتریس $I-A$ عبارت هستند از $1-\lambda_1, \cdots, 1-\lambda_n$ و $x_1, \cdots, x_n$
- مقدار ویژه‌ها و بردار ویژه‌های ماتریس $2I-A$ عبارت هستند از $2-\lambda_1, \cdots, 2-\lambda_n$ و $x_1, \cdots, x_n$