دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی خطی ۲۰ مهر ۱۳۹۸

تمرین سری دوم (برنامه‌ریزی صحیح)

۱ به یک خانه دست‌برد زده‌اید! n وسیله با اندازه‌های $a_1, a_2, ..., a_n$ دزدیده‌اید، و می‌خواهید با یک مرحله بار زدن وانت، وسایل را جابه‌جا کنید. اما متوجه می‌شوید وانت‌تان آن‌قدرها هم جا ندارد! همچنین برای آسیب ندیدن وسایل، می‌خواهید آن‌ها را داخل کارتن‌هایی قرار دهید. مغازه نزدیک خانه، m کارتن با اندازه‌های $s_1, s_2, ..., s_m$ و قیمت‌های $p_1, p_2, ..., p_m$ دارد. با فرض آنکه ظرفیت حجمی وانت شما C است، مسأله را به صورت یک برنامه‌ریزی صحیح مدل کرده تا بیابید انتقال وسایل شدنی است یا نه و درصورت شدنی بودن، با کمترین هزینه کارتن‌ها این‌کار انجام شود.

۲ مجموعه‌های $M = \{1, ..., m\}$ و $N = \{1, ..., n\}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $M_1, ..., M_n$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های M باشند. $(M_i \subset M)$.
به‌علاوه به ازای هر $j \in N$ وزن w_j را برای M_j در نظر بگیرید.

۱. میگوییم $F \subset N$ یک Covering است هرگاه: $\bigcup_{j \in F} M_j = M$

۲. میگوییم $F \subset N$ یک Packing است هرگاه به ازای هر $i, j \in F$ که $i \neq j$ داشته باشیم: $M_i \cap M_j = \emptyset$

۳. میگوییم $F \subset N$ یک Partitioning است هرگاه یک کاورینگ و همچنین یک پکینگ باشد.

همچنین وزن $F \subset N$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W(F) := \sum_{j \in F} w_j$$

الف) هر یک از موارد زیر را با برنامه‌ریزی صحیح مدل کنید. (راهنمایی: از ماتریس برخورد استفاده کنید.)

۱. کاورینگ با وزن کمینه

۲. پکینگ با وزن بیشینه

۳. پارتیشن با وزن کمینه یا بیشینه.

ب) فرض کنید در مسئله‌ی Covering هر $u \in N$ حداکثر در k تا از زیر مجموعه‌های $M_1, ..., M_n$ آمده باشد. به کمک برنامه‌ریزی خطی الگوریتمی k-تقریب برای مسئله ارائه دهید. (الگوریتمی که جواب آن حداکثر k برابر جواب بهینه باشد.)

۳ فرض کنید یک شرکت می‌تواند هر کدام از پروژه‌های $A, B, ..., H$ را انجام دهد. هر کدام از محدودیت‌های زیر را با استفاده از متغیرهای دودویی $x_a, x_b, ..., x_h$ مدل کنید.

(آ) حداکثر یکی از پروژه‌های $A, B, ..., H$ انجام شوند.

(ب) حداقل یکی از پروژه‌های $A, B, ..., H$.

(ج) اگر A آنگاه B .

(د) اگر A آنگاه B انجام نشود.

(ه) اگر A انجام نشود، B انجام شود.

(و) A اگر و فقط اگر B .

(ز) اگر A ، آنگاه B و C .

(ح) اگر A ، آنگاه B یا C .

(ط) اگر B یا C ، آنگاه A .

(ی) اگر B و C ، آنگاه A .

(ک) اگر دو تا بیشتر از B, C, D, E ، آنگاه A .

۴ مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد (صورت گراف بی‌جهت)

فرض کنید گراف بی‌جهت $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ و برای هر یال $e \in \mathcal{E}$ ، هزینه‌ی c_e داده‌شده‌است. هدف، پیدا کردن تور (دوری که از همه‌ی رئوس می‌گذرد) با مینیمم هزینه‌است. برای مدل‌سازی مسئله، برای هر یال $e \in \mathcal{E}$ ، متغیر x_e را تعریف می‌کنیم که مساوی یک است، اگر یال e عضو تور باشد، و در غیر این صورت مساوی صفر است. دو فرمول‌بندی زیر را برای این مسئله در نظر بگیرید:

۱. چون هر راس گراف باید روی دو یال تور باشد، پس داریم:

$$\textstyle\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \quad i \in \mathcal{V}$$

همچنین اگر S زیر مجموعه‌ی اکید $\mathcal{V}$ باشد، باید حداقل دو یال، مجموعه‌ی S را به مجموعه‌ی $\mathcal{V} - S$ وصل کند، و داریم:

$$\textstyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2, \quad S \subset \mathcal{V}, S \neq , \mathcal{V}$$

۲. با ایده‌های مشابه، می‌توانیم محدودیت‌های مسئله را به این صورت فرمول‌بندی کنیم:

$$\begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, & i \in \mathcal{V} \\ \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, & S \subset \mathcal{V}, S \neq , \mathcal{V} \\ x_e \in 0, 1. & \end{array}$$

اگر P_{tspcut} و P_{tspsub} ، چندوجهی‌های متناظر با برنامه‌های خطی ریلکس‌شده‌ی این فرمول‌بندی‌ها باشند، ثابت کنید:

$$P_{tspcut} = P_{tspsub}$$

۵ الف) گراف n راسی بدون جهت $G = (V, E)$ در نظر بگیرید. نشان دهید G یک درخت است اگر و تنها اگر $|E| = n - 1$ و برای هر زیرمجموعه ناتهی از رئوس $S \subset V$ تعداد یال‌هایی که هر دو سرشان در S اند کم‌تر یا مساوی $|S| - 1$ باشد.

ب) به کمک مساله بالا، برای پیدا کردن درخت پوشا در گراف n راسی بدون جهت G، یک برنامه‌ریزی صحیح بنویسید (نیازی به تابع هدف نیست).

پ) ریلکس شده برنامه‌ریزی بالا را در نظر بگیرید. نقاط شدنی آن را ST_1 بگیرید. فرض کنید $C_0, C_1, C_2, ..., C_k$ یک افراز دلخواه از رئوس باشد که هرکدام از دسته‌ها ناتهی است. $\delta(C_0, C_1, C_2, ..., C_k)$ را مجموعه یال‌های بین این دسته‌ها بگیرید. $ST_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ را مجموعه نقاط زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{e\in E} x_e = n-1 \qquad \forall e\in E:\ 0\le x_e\le 1$$

$$\sum_{e\in\delta(C_0,C_1,C_2,\dots,C_k)} x_e \ge k \quad \forall \text{ با شروط مذکور } C_0, C_1, C_2, ..., C_k$$

ثابت کنید $ST_1 = ST_2$.

۶ گراف دوبخشی G با بخش‌های A و B که $|A| \le |B|$ است را در نظر بگیرید. برای هر یال (i,j)، وزن c_{ij} را در نظر بگیرید. یک تطابق کامل از A عبارت است از مجموعه‌ی یال‌هایی مثل M که هر رأس از A دقیقاً با یک عضو M مجاور باشد و هر رأس از B حداکثر با یک عضو M مجاور باشد. هدف یافتن یک تطابق کامل با وزن کمینه است.

الف) یک برنامه‌ریزی صحیح برای حل این مسأله ارائه کنید. از یال‌ها برای تعریف متغیرها استفاده کنید. (دقت کنید تعداد متغیرها نباید از تعداد یال‌ها بیشتر باشد.)

ب) با استفاده از تکنیک ریلکسیشن روی متغیرهایی که تعریف کرده‌اید، یک برنامه‌ی خطی به دست آورید.

ج) ثابت کنید با داشتن هر جواب برای برنامه‌ی خطی قسمت ب، می‌توان یک جواب صحیح برای برنامه‌ی صحیح قسمت الف در زمان چندجمله‌ای پیدا کرد که وزن آن بیشتر از وزن جواب خطی نیست.

د) ثابت کنید هر نقطه گوشه‌ای برنامه‌ی خطی قسمت ب، در قیدهای برنامه‌ی صحیح قسمت الف صدق می‌کند. (نقطه گوشه‌ای جوابی شدنی مانند x از یک برنامه‌ی خطی است که لزوماً جواب بهینه نیست و به شکل ترکیب محدبی از دو جواب شدنی غیر از x قابل نمایش نیست.)

۷ گراف بدون جهت $G = (V, E)$ یک شبکه‌ی جابجایی برای یک کارخانه را مشخص می‌کند. هر رأس $i \in V$ به‌جز $i = 0$ نشان دهنده‌ی مشتری با مقدار درخواست b_i است و رأس $i = 0$ نشان‌دهنده‌ی کارخانه است. همچنین برای $e \in E$ هزینه‌ی عبور از این یال برابر است با d_e . کارخانه‌ی موردنظر دارای m کامیون، هر یک با ظرفیت Q می‌باشد و می‌خواهد تقاضای همه‌ی مشتری‌ها را پاسخ بدهد. هر کامیون باید گشتی از رأس $i = 0$ شروع کرده و پس از دیدن تعدادی رأس در مسیر به کارخانه برگردد. فرض کنید ظرفیت هر کامیون بیشتر از تقاضای هر رأس است (یعنی برای هر i داریم $b_i \le Q$) و بار یک رأس را نمی‌توان بین کامیون‌های مختلف پخش کرد. به کمک برنامه‌ریزی صحیح، برای هر یک از کامیون‌ها مسیری مشخص کنید به‌طوری که هزینه کل حمل‌ونقل کارخانه کمینه شود.

۸ میخواهیم برای مسئله پوشش رأسی کمینه گراف یک تقریب بهتر ارائه دهیم. یادآوری: برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده این مسئله به صورت زیر بود.

$$\begin{aligned} minimize &\quad \sum_{i\in V(G)} w_i x_i \\ subject\,to &\quad x_i + x_j \ge 1 \quad \forall (i,j)\in E(G) \\ &\quad x_i \ge 0 \quad \forall i \in V(G) \end{aligned}$$

الف) ثابت کنید که در برنامه‌ریزیی خطی ریلکس‌شده آن، جواب بهینه ای وجود دارد که $x_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (راهنمایی: جواب بهینه‌ای را درنظر بگیرید که آنرا نتوان بصورت ترکیب خطی دو جواب بهینه دیگر نوشت و فرض کنید میدانیم چنین جوابی وجود دارد. به چنین نقطه‌ای در فضای خطی متغیرها، نقطه گوشه‌ای گویند.)

ب) با فرض داشتن جواب ریلکس شده با فرمت قسمت قبلی یک $\frac{3}{2}$-تقریب برای پوشش رأسی کمینه گراف‌های **مسطح** ارائه دهید. (راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که الگوریتمی وجود دارد که در زمان چندجمله‌ای رئوس گراف مسطح را با چهار رنگ، رنگ می‌کند بطوری که هیچ دو رأس مجاوری دارای یک رنگ نباشند.)