بسم الله الرحمن الرحیم

یادگیری برخط

جلسه بیست‌ویکم:
بندیت ترکیبیاتی

یادآوری

تابع لژاندر

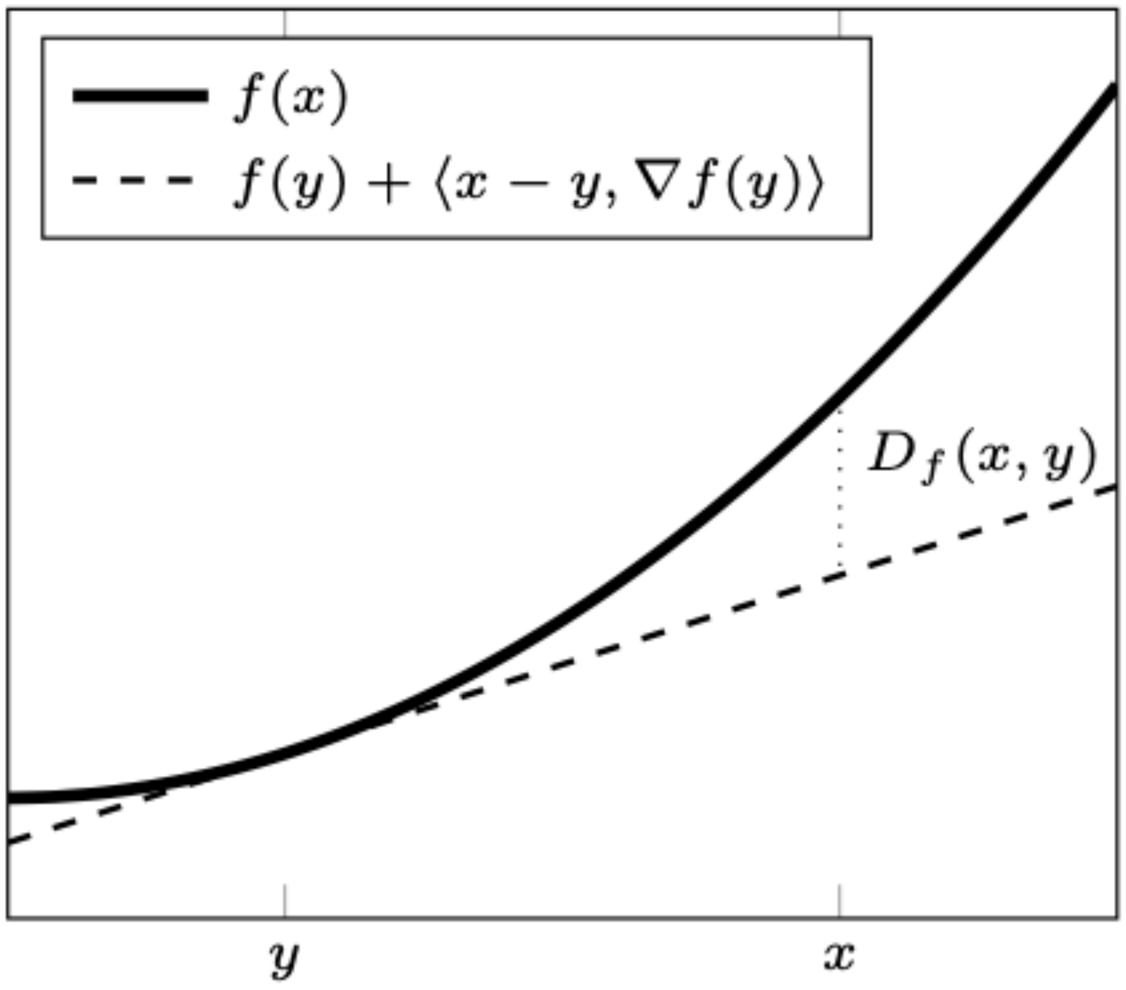
(a) C is non-empty;

(b) f is differentiable and strictly convex on C; and

(c) $\lim_{n\to\infty} \|\nabla f(x_n)\|_2 = \infty$ for any sequence $(x_n)_n$ with $x_n \in C$ for all n and $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ and some $x \in \partial C$.

دیورژانس برگمن

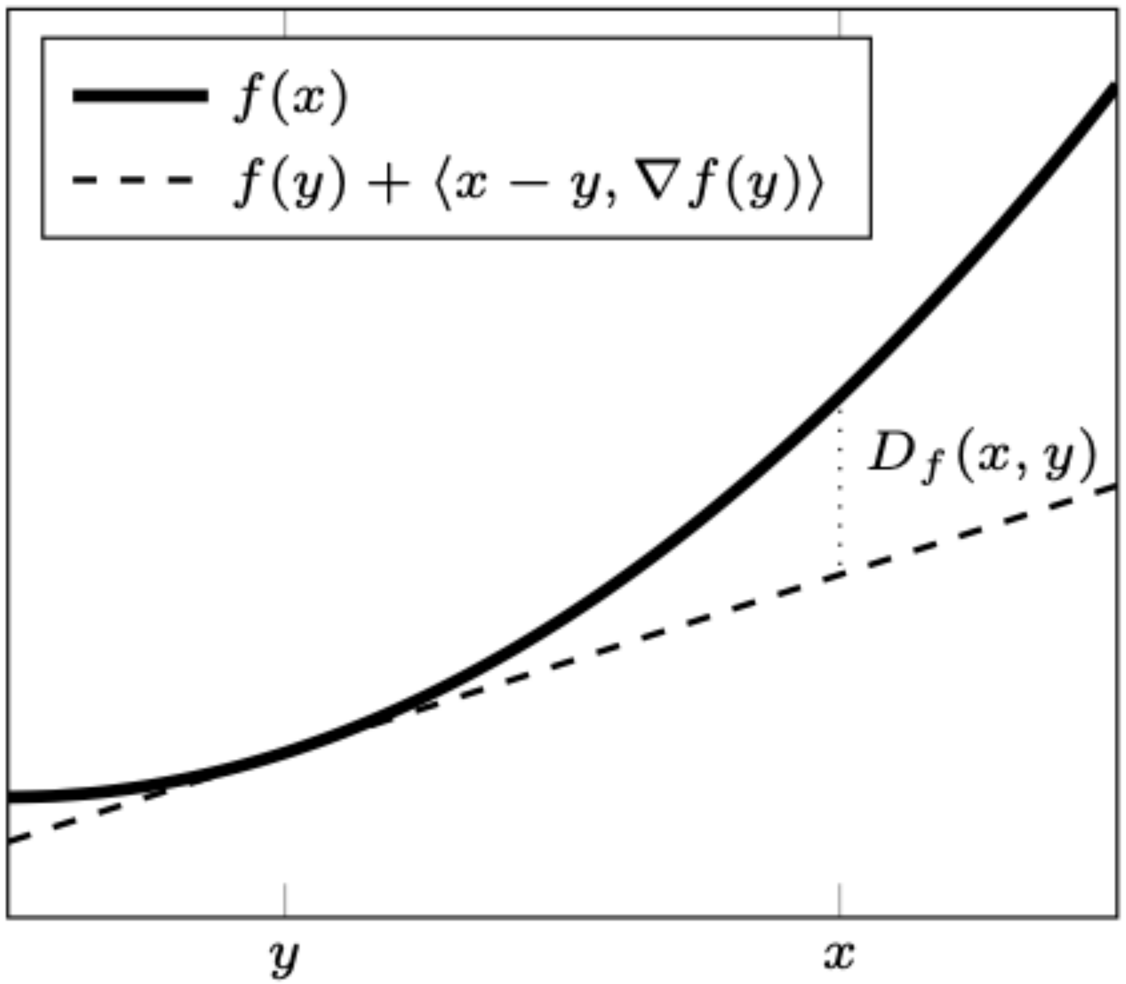
$f(x)$ محدب



دیورژانس برگمن

$f(x)$ محدب

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$



تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

برای توزیع x و y

تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \quad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

برای توزیع x و y

تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \quad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

برای توزیع x و y

تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

برای توزیع x و y

تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \quad \mathrm{dom}(f) = [0,\infty)^d$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y)\rangle$$

$$= \langle x, \log(x)\rangle - \langle x, 1\rangle - \langle y, \log(y)\rangle + \langle y, 1\rangle - \langle x, \log(y)\rangle + \langle y, \log(y)\rangle$$

برای توزیع x و y

تابع [لژاندر] منفی آنتروپی نرمال نشده

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

$$= \langle x, \log(x) \rangle - \langle x, 1 \rangle - \langle y, \log(y) \rangle + \langle y, 1 \rangle - \langle x, \log(y) \rangle + \langle y, \log(y) \rangle$$

$$= \sum x_i \log(x_i / y_i)$$

برای توزیع x و y

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let* $\eta > 0$ *and* f *be Legendre and twice differentiable in* $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, *and let* $z \in [x, y]$ *be the point such that* $D_f(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. *Then, for all* $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2} \|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let* $\eta > 0$ *and* f *be Legendre and twice differentiable in* $A = \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, $x, y \in A$, *and let* $z \in [x, y]$ *be the point such that* $D_f(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. *Then, for all* $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let* $\eta > 0$ *and* f *be Legendre and twice differentiable in* $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, *and let* $z \in [x, y]$ *be the point such that* $D_f(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. *Then, for all* $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$$H = \nabla^2 f(z)$$

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let $\eta > 0$ and f be Legendre and twice differentiable in $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, and let $z \in [x, y]$ be the point such that $D_f(x,y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. Then, for all $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2} \|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$H = \nabla^2 f(z)$

$$\langle x - y, u \rangle \leq \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2 D_f(x,y)}.$$

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let $\eta > 0$ and f be Legendre and twice differentiable in $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, and let $z \in [x, y]$ be the point such that $D_f(x,y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. Then, for all $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$H = \nabla^2 f(z)$

$$\langle x - y, u \rangle \leq \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2D_f(x,y)}.$$

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2D_f(x,y)} - \frac{D_f(x,y)}{\eta}$$

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y)\rangle$$

THEOREM 26.13. *Let $\eta > 0$ and f be Legendre and twice differentiable in $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, and let $z \in [x,y]$ be the point such that $D_f(x,y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. Then, for all $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x - y, u\rangle - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$H = \nabla^2 f(z)$

$$\langle x - y, u\rangle \leq \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}}\sqrt{2D_f(x,y)}.$$

$$\langle x - y, u\rangle - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \|u\|_{H^{-1}}\sqrt{2D_f(x,y)} - \frac{D_f(x,y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{H^{-1}},$$

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

THEOREM 26.13. *Let $\eta > 0$ and f be Legendre and twice differentiable in $A = \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $x, y \in A$, and let $z \in [x, y]$ be the point such that $D_f(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$. Then, for all $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2} \|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}.$$

$$H = \nabla^2 f(z)$$

$$\langle x - y, u \rangle \leq \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2 D_f(x, y)}.$$

$$\langle x - y, u \rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2 D_f(x, y)} - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2} \|u\|^2_{H^{-1}},$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} ax - bx^2 = a^2/(4b)$$

کاهش آینه‌ای

$$a_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A}} F(a)$$

$$a_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A}} \left(\eta \langle a, y_t \rangle + D_F(a, a_t)\right)$$

کاهش آینه‌ای

$$a_1 = \operatorname{argmin}_{a\in\mathcal{A}} F(a)$$

$$a_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a\in\mathcal{A}} \left(\eta\langle a, y_t\rangle + D_F(a, a_t)\right)$$

قضیه:

$$R_n(a) \leq \frac{F(a) - F(a_1)}{\eta} + \sum_{t=1}^{n}\langle a_t - a_{t+1}, y_t\rangle - \frac{1}{\eta}\sum_{t=1}^{n} D(a_{t+1}, a_t).$$

$$R_n(a) \leq \frac{1}{\eta}\left(F(a) - F(a_1) + \sum_{t=1}^{n} D(a_t, \tilde{a}_{t+1})\right)$$

الگوریتم کاهش آینه‌ای/پیروی از پیش‌روی منظم شده برای بندیت

Input Legendre potential F, action set $\mathcal{A}$ and learning rate $\eta > 0$

Choose $\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} F(a)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

    Choose measure P_t on $\mathcal{A}$ with mean $\bar{A}_t$

    Sample action A_t from P_t and observe $\langle A_t, y_t \rangle$

    Compute estimate $\hat{Y}_t$ of the loss vector y_t

    Update:

$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t) \qquad \text{(Mirror descent)}$$

$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \sum_{s=1}^{t} \langle a, \hat{Y}_s \rangle + F(a) \qquad \text{(follow-the-regularised-leader)}$$

end for

Input Legendre potential F, action set $\mathcal{A}$ and learning rate $\eta > 0$

Choose $\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} F(a)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

    Choose measure P_t on $\mathcal{A}$ with mean $\bar{A}_t$

    Sample action A_t from P_t and observe $\langle A_t, y_t \rangle$

    Compute estimate $\hat{Y}_t$ of the loss vector y_t

    Update:

$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t) \qquad \text{(Mirror descent)}$$

$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \sum_{s=1}^{t} \langle a, \hat{Y}_s \rangle + F(a) \qquad \text{(follow-the-regularised-leader)}$$

end for

Input Legendre potential F, action set $\mathcal{A}$ and learning rate $\eta > 0$

Choose $\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} F(a)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose measure P_t on $\mathcal{A}$ with mean $\bar{A}_t$

Sample action A_t from P_t and observe $\langle A_t, y_t \rangle$

Compute estimate $\hat{Y}_t$ of the loss vector y_t

Update:

$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t) \qquad \text{(Mirror descent)}$$

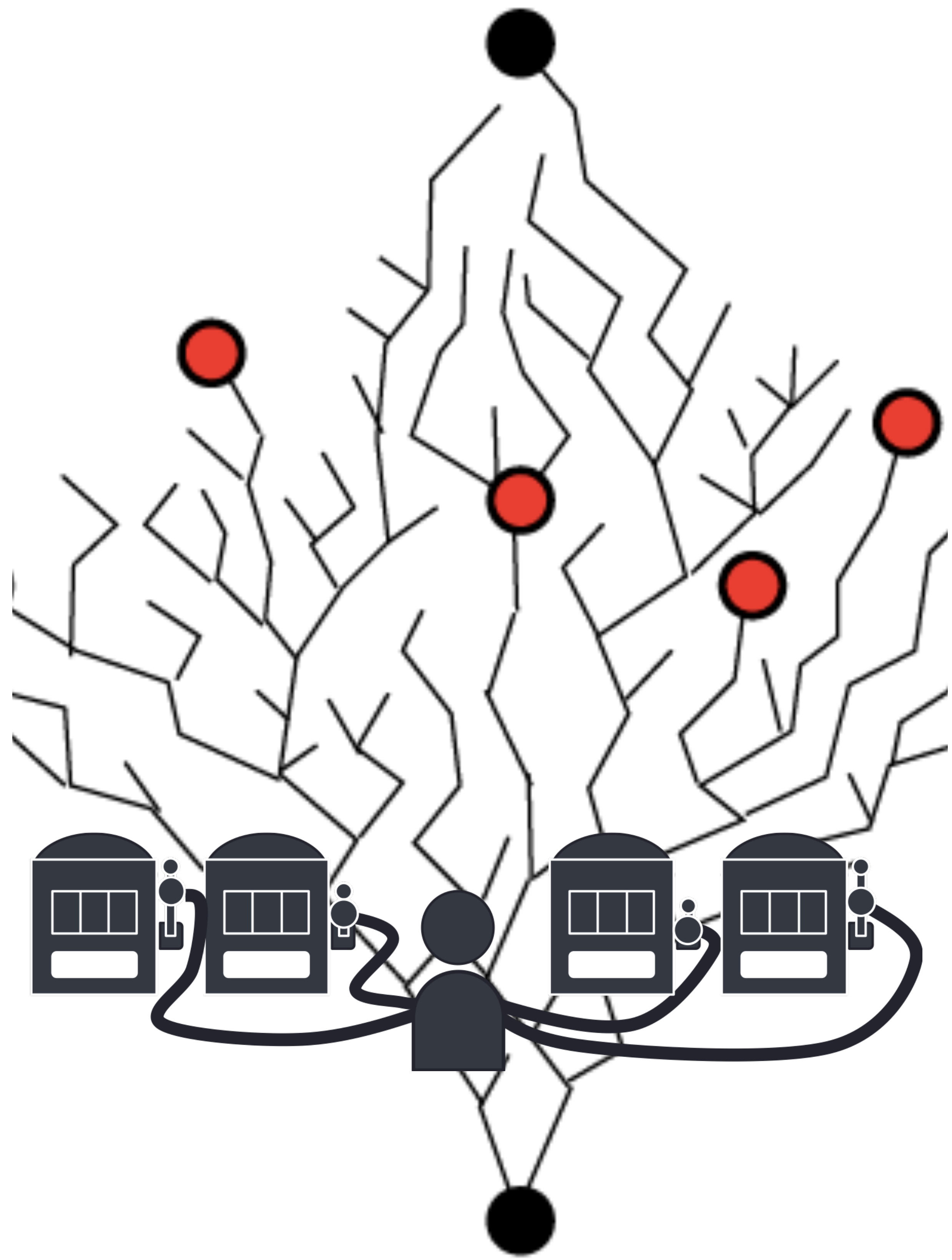
$$\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathcal{A} \cap \operatorname{dom}(F)} \eta \sum_{s=1}^{t} \langle a, \hat{Y}_s \rangle + F(a) \qquad \text{(follow-the-regularised-leader)}$$

end for

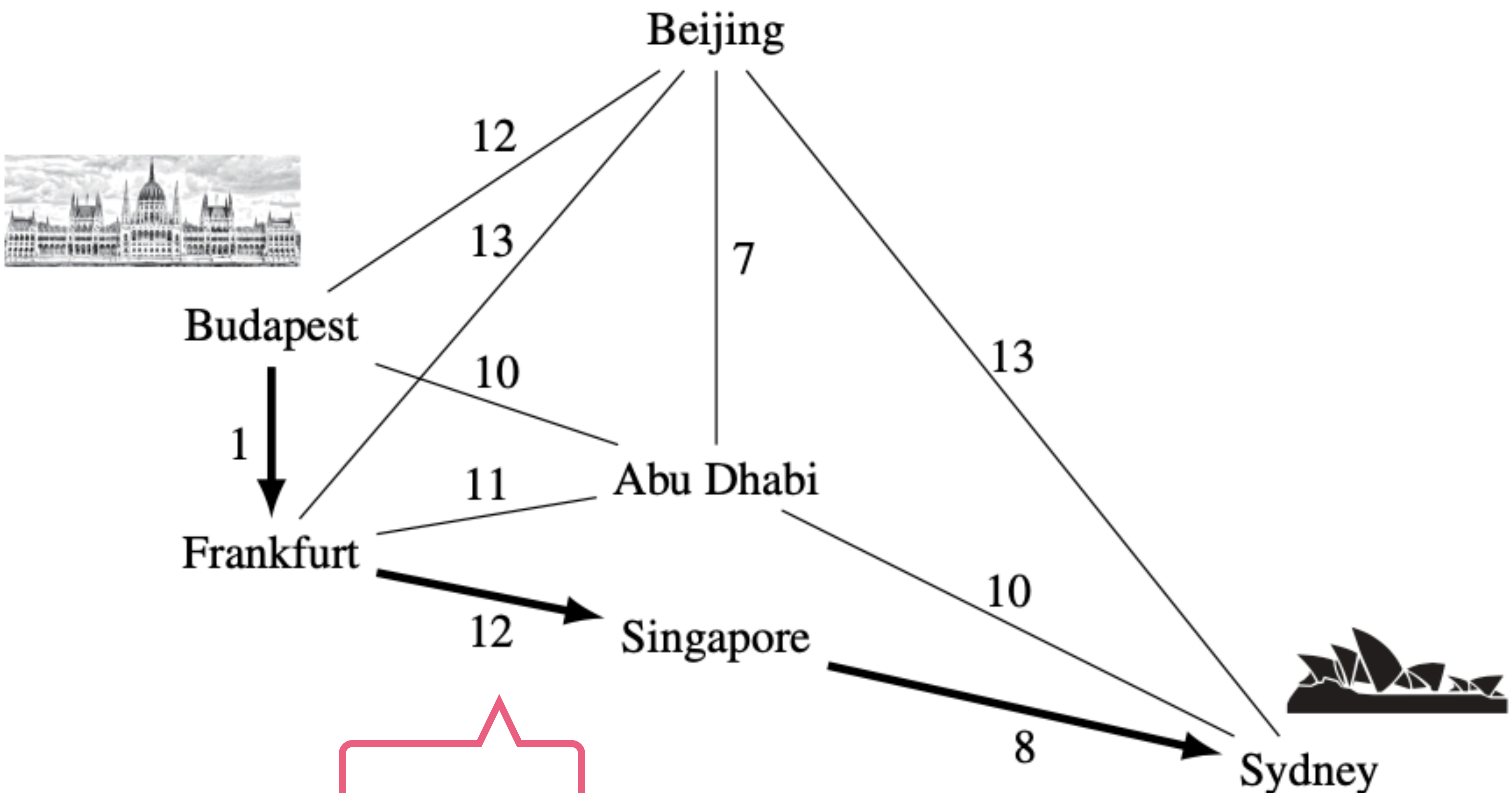
THEOREM 28.10 (Regret of Mirror-Descent and FTRL with bandit feedback). *Suppose that Algorithm 16 is run with Legendre potential F, convex action set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ and learning rate $\eta > 0$ such that the loss estimators are unbiased: $\mathbb{E}[\hat{Y}_t \mid \bar{A}_t] = y_t$ for all $t \in [n]$. Then the regret for either variant of Algorithm 16, provided that they are well defined, is bounded by*

$$R_n(a) \leq \mathbb{E}\left[\frac{F(a) - F(\bar{A}_1)}{\eta} + \sum_{t=1}^{n} \langle \bar{A}_t - \bar{A}_{t+1}, \hat{Y}_t \rangle - \frac{1}{\eta} \sum_{t=1}^{n} D(\bar{A}_{t+1}, \bar{A}_t)\right].$$

بندیت ترکیبیاتی



مثال ۱: کوتاه‌ترین مسیر بندیتی



وزن‌ها در بازه
صفر و یک

تعریف بندیت ترکیباتی

$$\mathcal{A} \subset \{0,1\}^d.$$

تعریف بندیت ترکیباتی

$$\mathcal{A} \subset \{0,1\}^d.$$

$$R_n = \max_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t \rangle\right]$$

مجموعه اعمال

بندیت ترکیبیاتی

$$\mathcal{A} \subseteq \left\{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\right\}$$

بندیت معمولی

	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$	
		$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} \lvert\langle a, y\rangle\rvert \leq 1\}$

بندیت ترکیباتی

مجموعه اعمال

$$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$$

$$y_t \in [0,1]^d$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle A_t, y_t \rangle| \leq m$$

بندیت معمولی

$$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} |\langle a, y \rangle| \leq 1\}$$

	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $|\langle A_t, y_t \rangle| \leq m$	$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} |\langle a, y \rangle| \leq 1\}$
بازخورد		$\langle A_t, y_t \rangle$

	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t\rangle\rvert \leq m$	$y_t \in \{y : \sup_{a\in\mathcal{A}} \lvert\langle a, y\rangle\rvert \leq 1\}$
بازخورد	$(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})$ نیمه‌ـ بندیت	$\langle A_t, y_t\rangle$

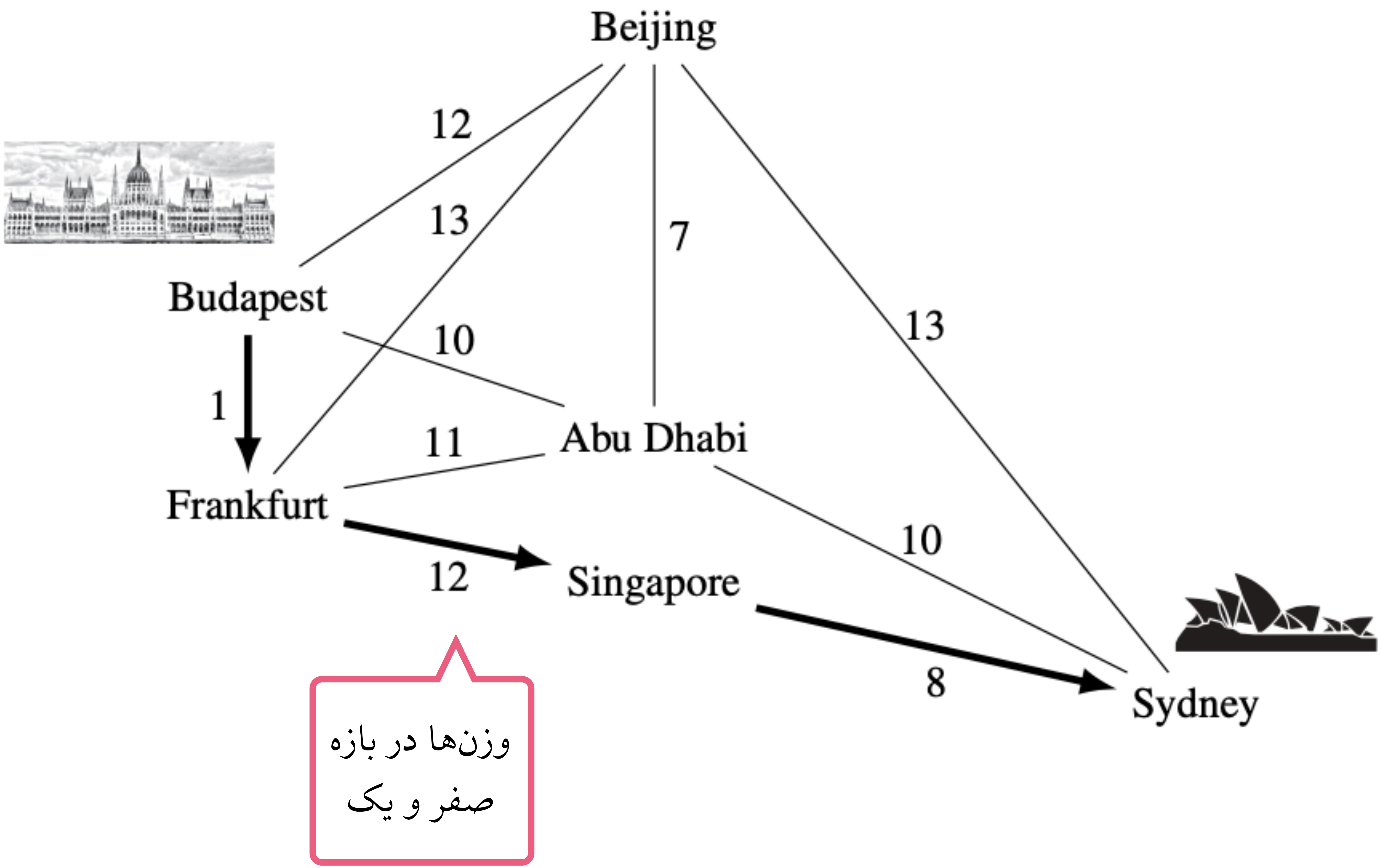
	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t \rangle\rvert \leq m$	$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} \lvert\langle a, y \rangle\rvert \leq 1\}$
بازخورد	$(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})$ نیمه‌ـ بندیت	$\langle A_t, y_t \rangle$

$$R_n = \max_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t \rangle\right]$$

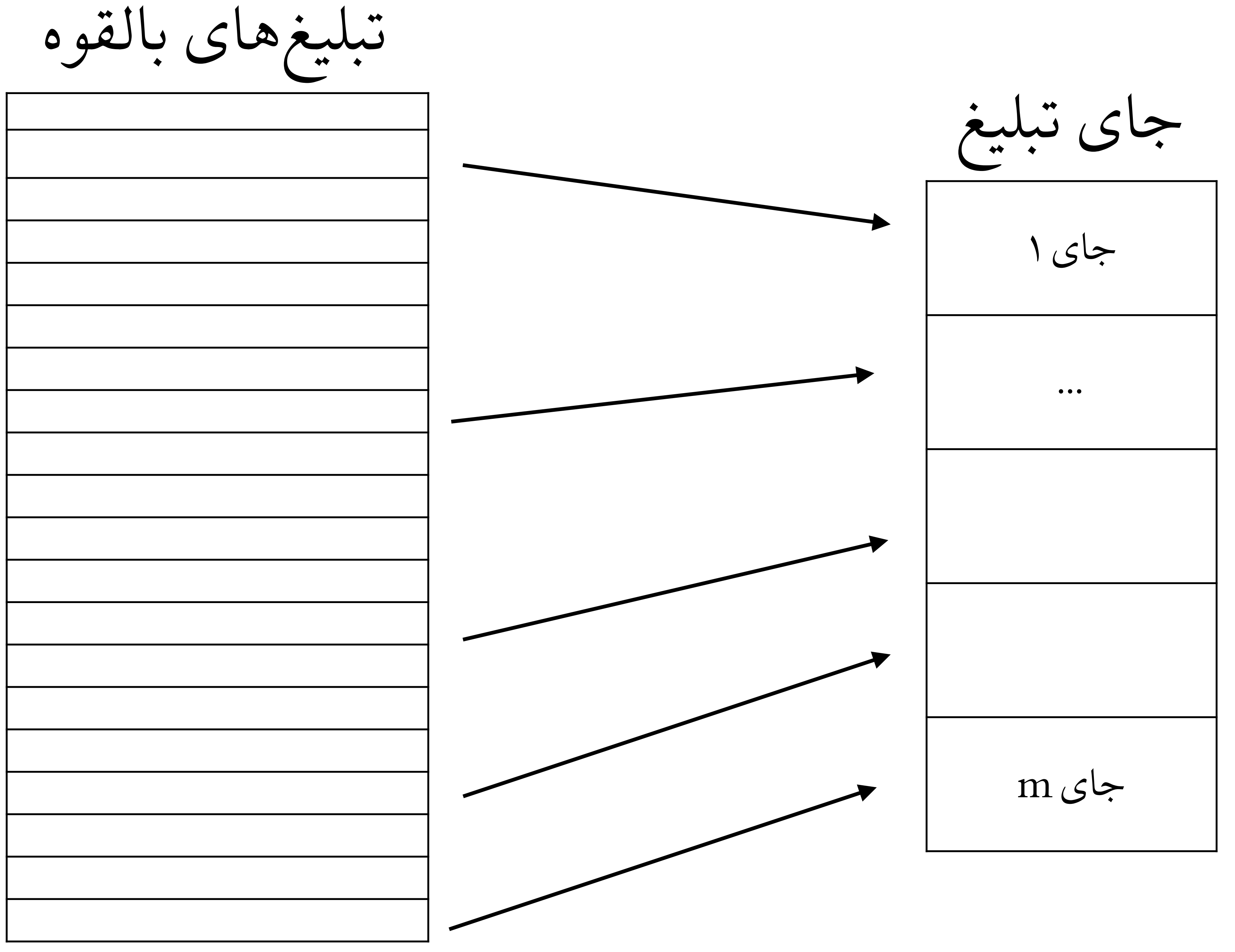
	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t \rangle\rvert \leq m$	$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} \lvert\langle a, y \rangle\rvert \leq 1\}$
بازخورد	$(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})$ نیمه‌ـ بندیت	$\langle A_t, y_t \rangle$
	$R_n = \max\limits_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t \rangle\right]$	$R_n = \max\limits_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t \rangle\right]$

	بندیت ترکیباتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \le m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t\rangle\rvert \le m$	$y_t \in \{y : \sup_{a\in\mathcal{A}} \lvert\langle a, y\rangle\rvert \le 1\}$
بازخورد	$(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})$ نیمه‌ـ بندیت	$\langle A_t, y_t\rangle$
پشیمانی	$R_n = \max_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t\rangle\right]$	$R_n = \max_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \langle A_t - a, y_t\rangle\right]$

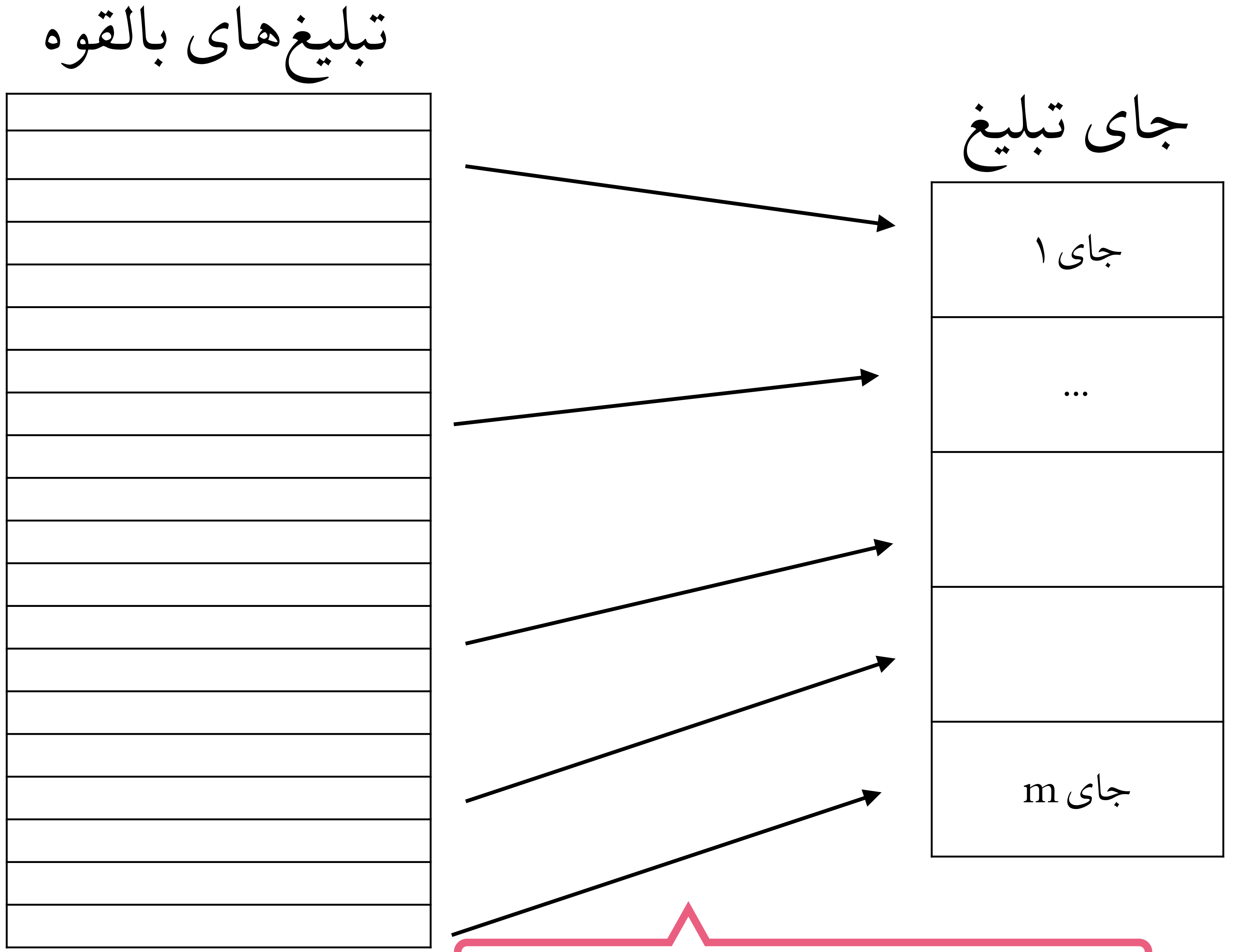
مثال ۱: کوتاه‌ترین مسیر بندیتی



مثال ۲ : تبلیغات

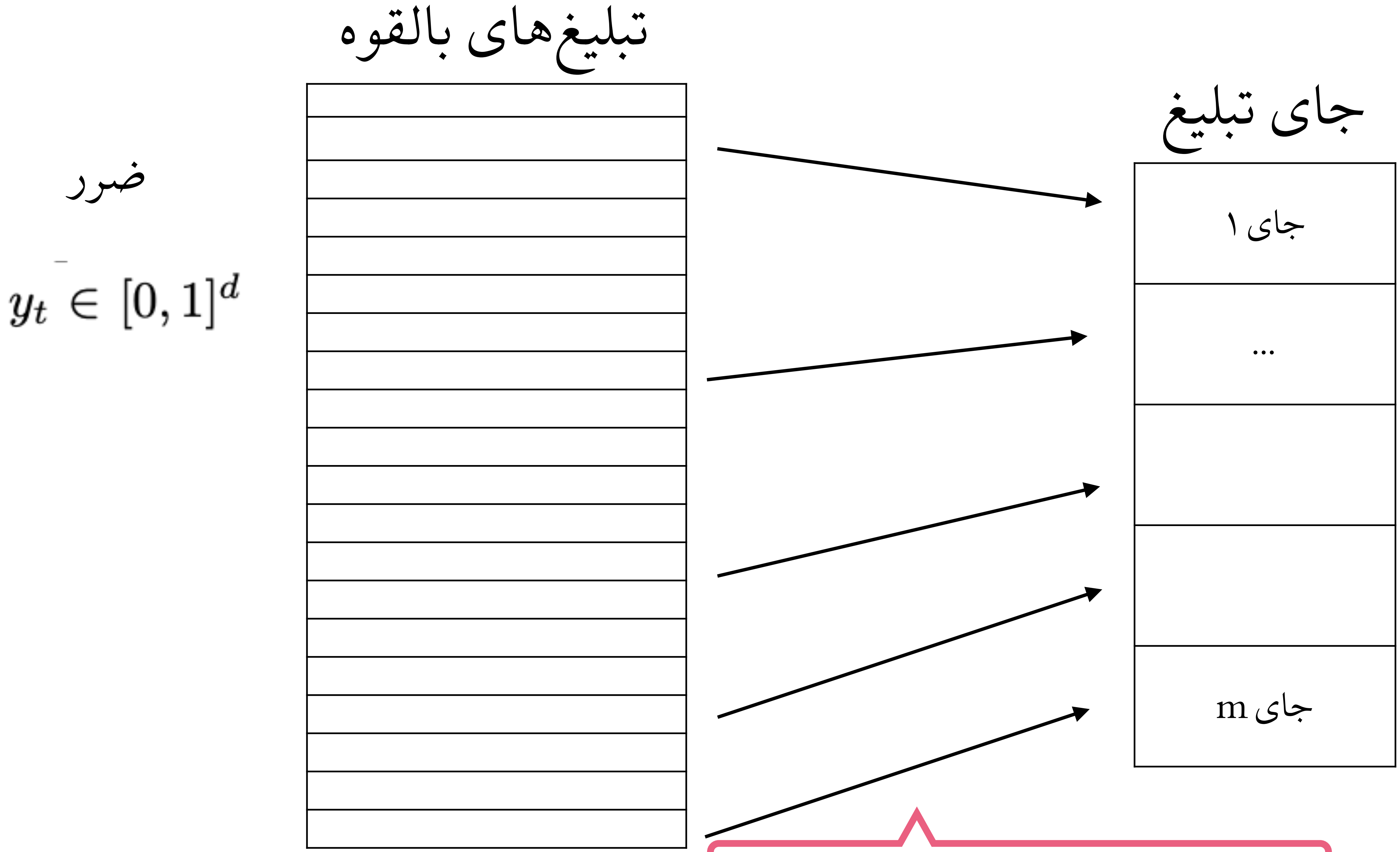


مثال ۲: تبلیغات



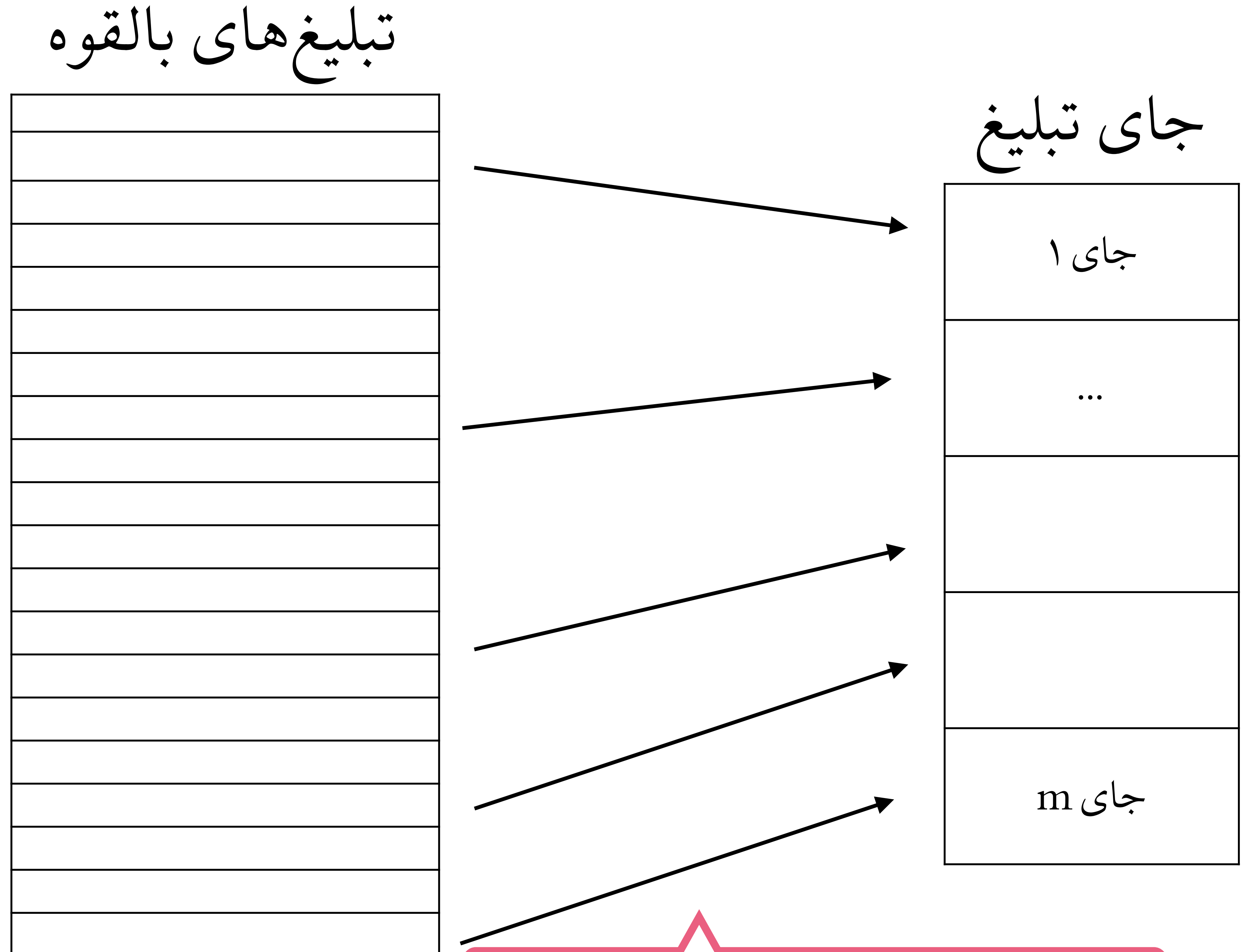
$$A_t \in \{0,1\}^d \quad \|A_t\|_1 = m$$

مثال ۲: تبلیغات



$$A_t \in \{0,1\}^d \quad \|A_t\|_1 = m$$

مثال ۲: تبلیغات



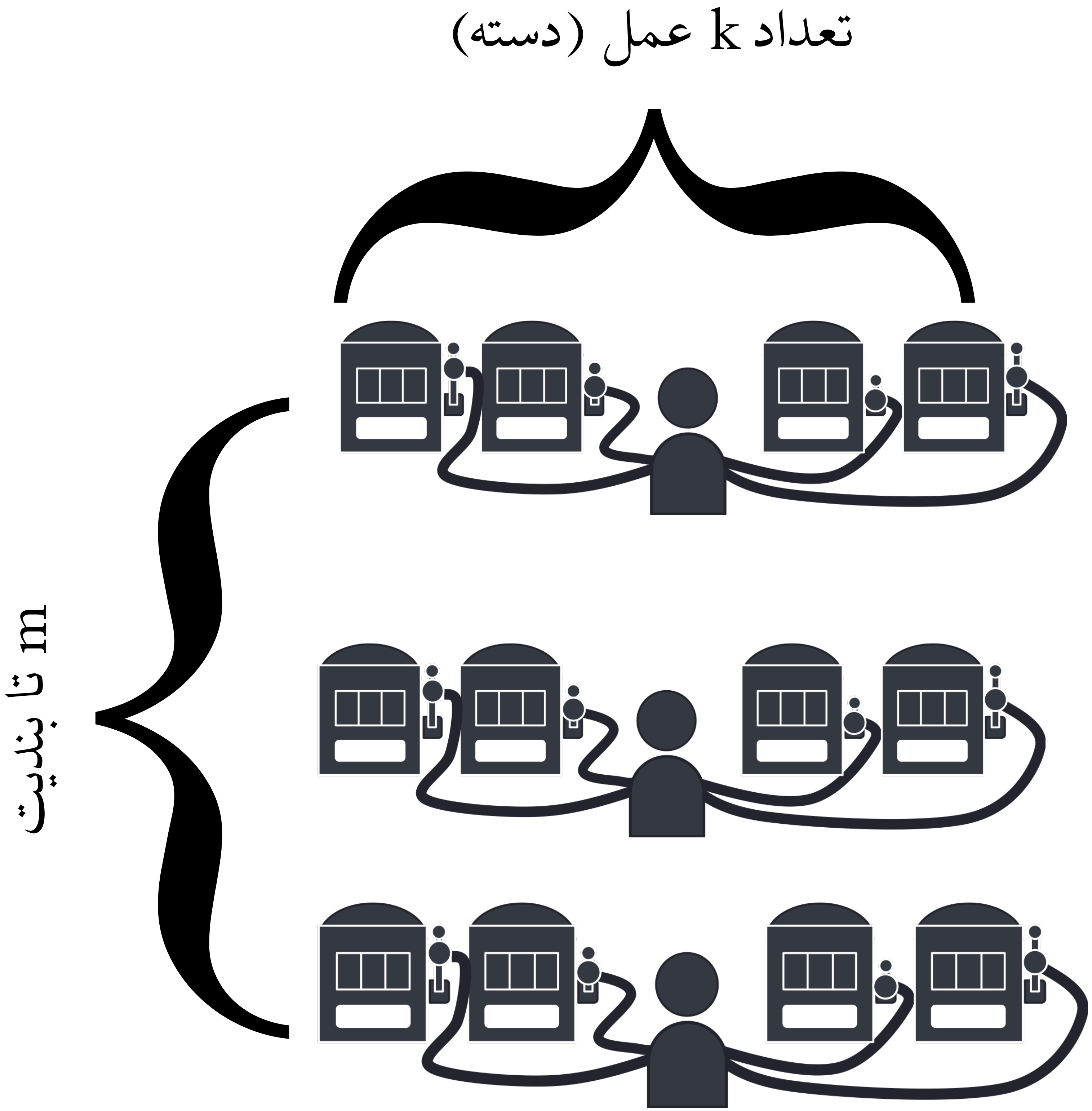
ضرر

$y_t \in [0,1]^d$

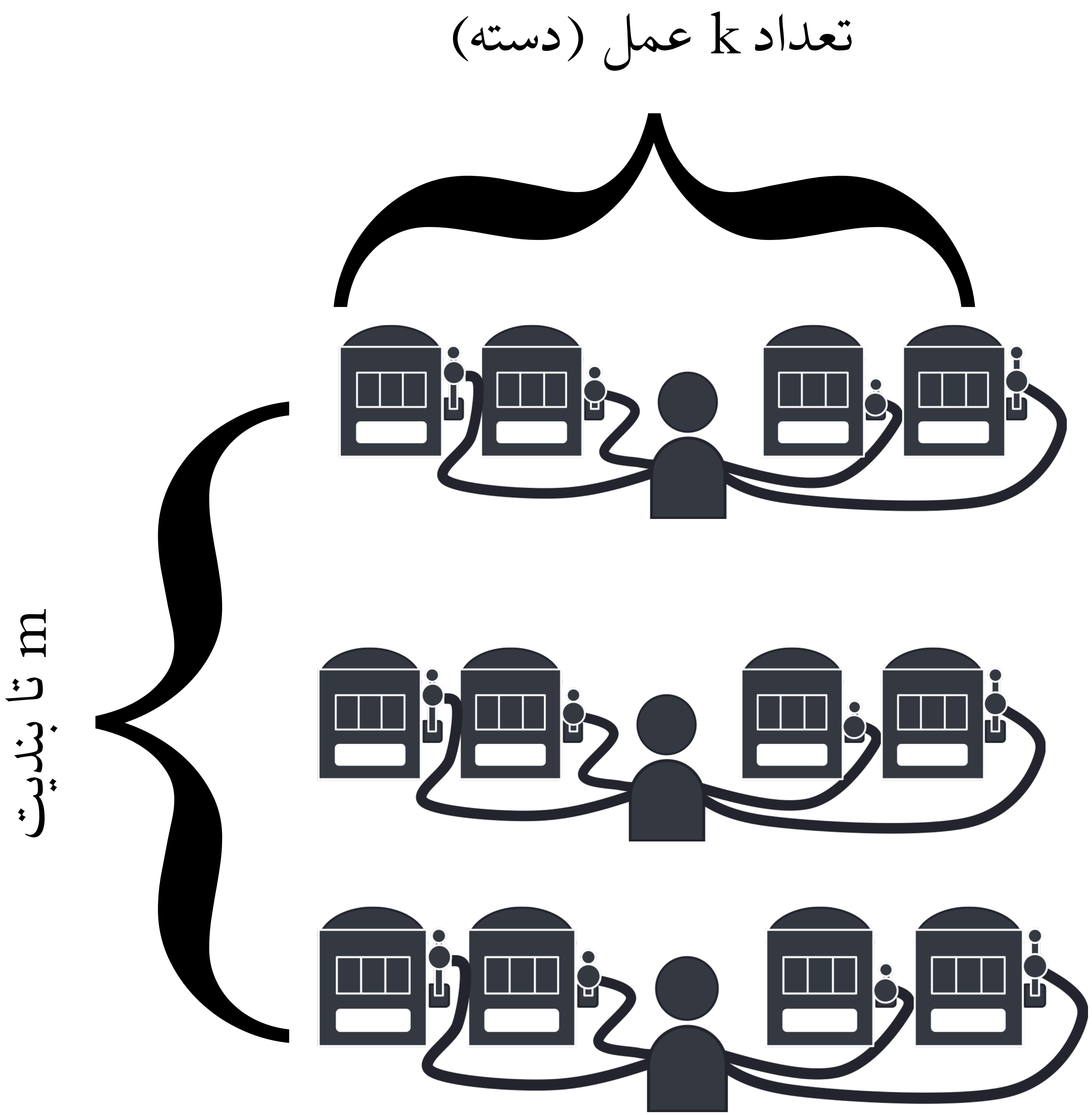
$\langle A_t, y_t \rangle$

$A_t \in \{0,1\}^d \quad \|A_t\|_1 = m$

مثال ۳: بندیت چندوظیفگی



مثال ۳: بندیت چندوظیفگی



$$\mathcal{A} = \left\{ a \in \{0,1\}^d : \sum_{i=1}^{k} a_{i+kj} = 1 \text{ for all } 0 \le j < m \right\}.$$

صورت ۱: بازخورد بندیتی

	بندیت ترکیبیاتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t \rangle\rvert \leq m$	$y_t \in \{y : \sup_{a \in \mathcal{A}} \lvert\langle a, y \rangle\rvert \leq 1\}$
بازخورد	$(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})$ نیمه-بندیت	$\langle A_t, y_t \rangle$

صورت ۱: بازخورد بندیتی

	بندیت ترکیباتی	بندیت معمولی
مجموعه اعمال	$\mathcal{A} \subseteq \{a \in \{0,1\}^d : \|a\|_1 \leq m\}$ $y_t \in [0,1]^d$ $\Downarrow$ $\lvert\langle A_t, y_t\rangle\rvert \leq m$	$\cancel{y_t \in \{y : \sup \lvert\langle a, y\rangle\rvert \leq 1\}}$
بازخورد	$\cancel{(A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td})}$	$\langle A_t, y_t\rangle$

صورت ۱: بازخورد بندیتی

EXP3: $R_n \leq 2\sqrt{3dn\log(k)}$.

1: **Input** Finite action set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, learning rate η, exploration distribution π, exploration parameter γ

2: **for** $t = 1, 2, \ldots, n$ **do**

3: Compute sampling distribution:

$$P_t(a) = \gamma\pi(a) + (1-\gamma)\frac{\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a)\right)}{\sum_{a' \in \mathcal{A}}\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a')\right)}.$$

4: Sample action $A_t \sim P_t$

5: Observe loss $Y_t = \langle A_t, y_t\rangle$ and compute loss estimates:

$$\hat{Y}_t = Q_t^{-1}A_tY_t \qquad \text{and} \qquad \hat{Y}_t(a) = \langle a, \hat{Y}_t\rangle.$$

6: **end for**

EXP3: $R_n \leq 2\sqrt{3dn\log(k)}$.

صورت ۱: بازخورد بندیتی

Input Finite action set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, learning rate η, exploration distribution π, exploration parameter γ

for $t = 1, 2, \ldots, n$ **do**

Compute sampling distribution:

$$P_t(a) = \gamma\pi(a) + (1-\gamma)\frac{\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a)\right)}{\sum_{a' \in \mathcal{A}}\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a')\right)}.$$

Sample action $A_t \sim P_t$

Observe loss $Y_t = \langle A_t, y_t\rangle$ and compute loss estimates:

$$\hat{Y}_t = Q_t^{-1}A_tY_t \qquad \text{and} \qquad \hat{Y}_t(a) = \langle a, \hat{Y}_t\rangle.$$

end for

THEOREM 30.1. *Consider the setting of* ... *If Algorithm 15 is run on action set* $\mathcal{A}$ *with appropriately chosen learning r*...

$$\binom{d}{m} \leq \left(\frac{ed}{m}\right)^m$$

$$R_n \leq 2m\sqrt{3dn\log|\mathcal{A}|} \leq m^{3/2}\sqrt{12dn\log\left(\frac{ed}{m}\right)}.$$

EXP3: $R_n \leq 2\sqrt{3dn\log(k)}$.

صورت ۱: بازخورد بندیتی

Input Finite action set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, learning rate η, exploration distribution π, exploration parameter γ

for $t = 1, 2, \ldots, n$ **do**

Compute sampling distribution:

$$P_t(a) = \gamma\pi(a) + (1-\gamma)\frac{\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a)\right)}{\sum_{a'\in\mathcal{A}}\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a')\right)}.$$

سختی ۱

Sample action $A_t \sim P_t$

سختی ۲

Observe loss $Y_t = \langle A_t, y_t\rangle$ and compute loss estimates:

$$\hat{Y}_t = Q_t^{-1}A_tY_t \qquad \text{and} \qquad \hat{Y}_t(a) = \langle a, \hat{Y}_t\rangle.$$

end for

THEOREM 30.1. *Consider the setting of … Algorithm 15 is run on action set $\mathcal{A}$ with appropriately chosen learning r…*

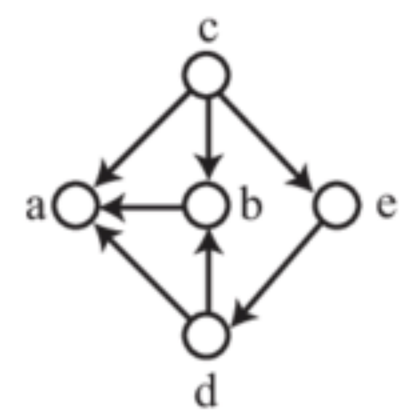
$$\binom{d}{m} \leq \left(\frac{ed}{m}\right)^m$$

$$R_n \leq 2m\sqrt{3dn\log|\mathcal{A}|} \leq m^{3/2}\sqrt{12dn\log\left(\frac{ed}{m}\right)}.$$

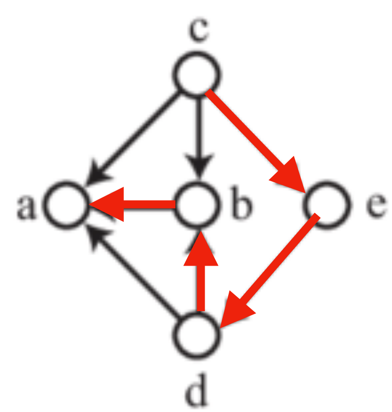
مسئله مهم زمان اجرا!

تعریف مسئله: (سبک‌ترین دور همیلتونی در گراف جهت‌دار)

ورودی



خروجی



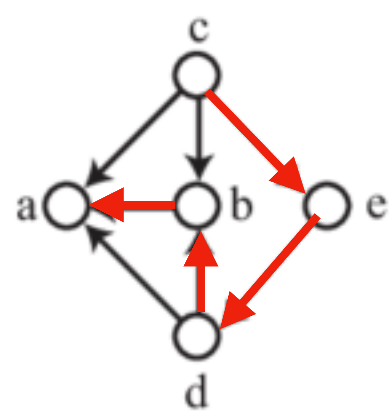
کنش‌ها (A) = دورهای همیلتونی در گراف

ضرر = $\langle x, a \rangle$

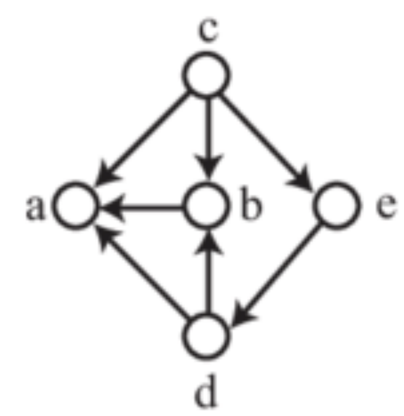
مسئله مهم زمان اجرا!

تعریف مسئله: (سبک‌ترین دور همیلتونی در گراف جهت‌دار)

خروجی



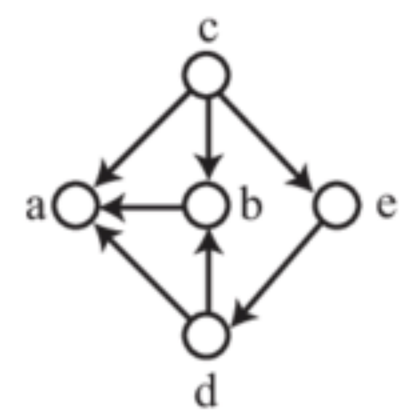
ورودی



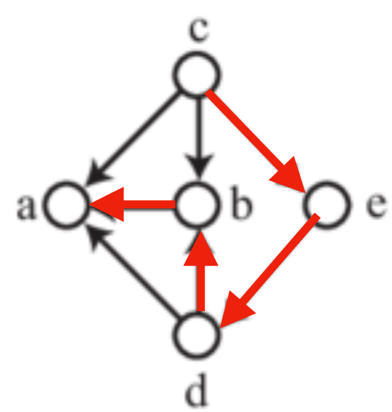
مسئله مهم زمان اجرا!

تعریف مسئله: (سبک‌ترین دور همیلتونی در گراف جهت‌دار)

ورودی



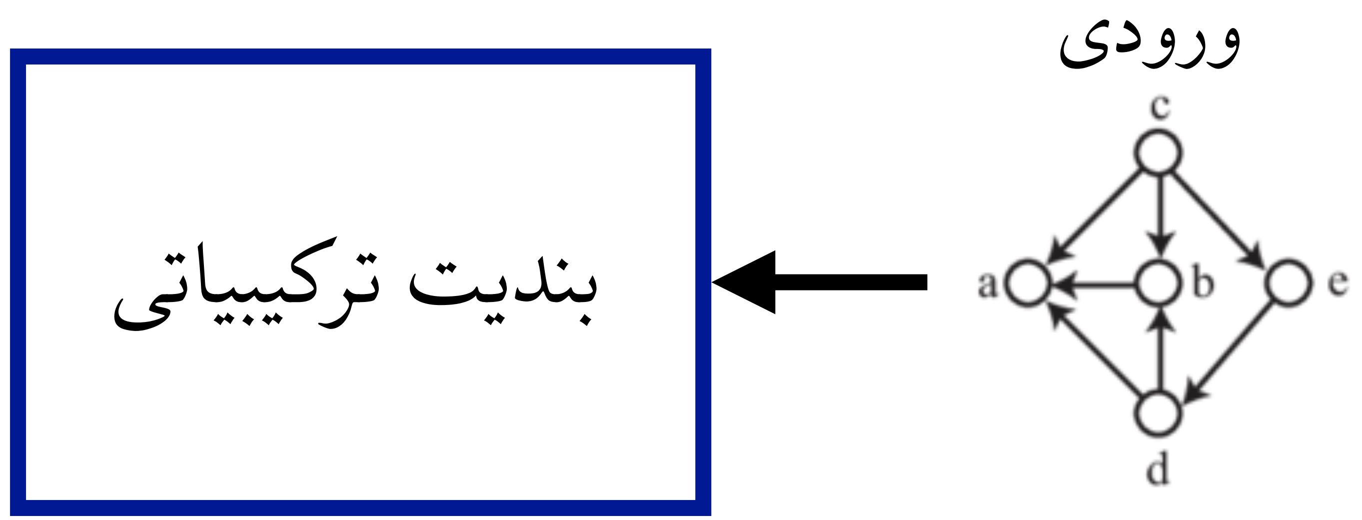
خروجی



قضیه: تقریب‌ناپذیری مسئله سبک‌ترین دور همیلتونی در گراف جهت‌دار

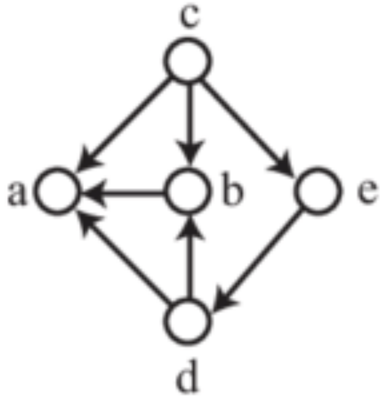
اگر P != NP، هیچ الگوریتم تقریبی (با زمان چندجمله‌ای) با ضریب تقریب ۸/۷ برای مسئله سبک‌ترین دور همیلتونی در گراف جهت‌دار با وزن‌های ۱ و ۲ وجود ندارد.

بندیت برای بلندترین مسیر



بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی

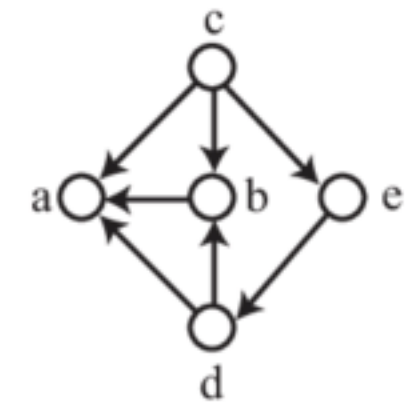


بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



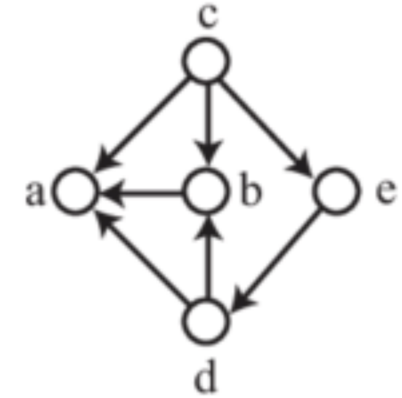
بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \leq C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیبیاتی

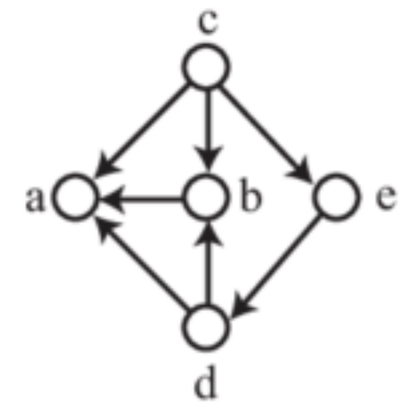
الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \leq C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$R(n) = nm - A \leq C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیباتی

الگوریتم ؟؟؟

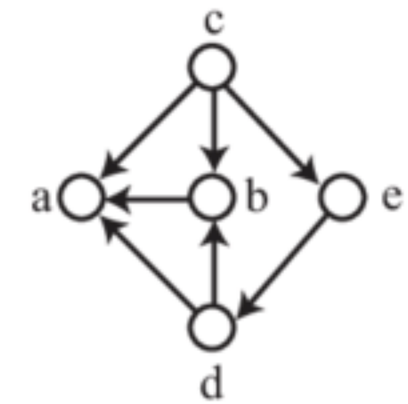
$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \leq Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$$

$$R(n) = nm - A \leq Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$$

$$nm - Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha} \leq A$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

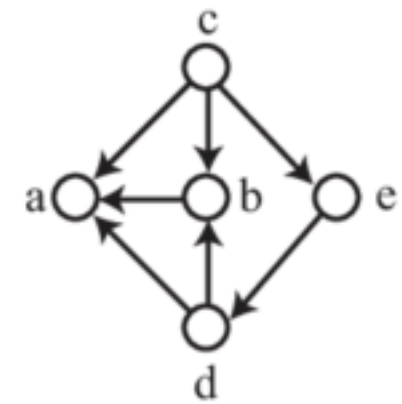
$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \leq C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$R(n) = nm - A \leq C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$nm - C n^{1-\epsilon} m^{\alpha} \leq A \qquad m - C m^{\alpha}/n^{\epsilon} \leq A/n$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \le Cn^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

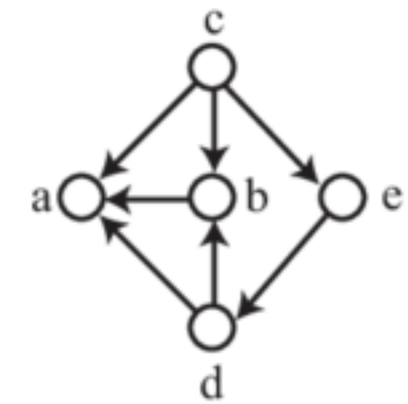
ضریب تقریب الگوریتم

$$R(n) = nm - A \le Cn^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$nm - Cn^{1-\epsilon} m^{\alpha} \le A \qquad m - Cm^{\alpha}/n^{\epsilon} \le A/n$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

ضریب تقریب الگوریتم

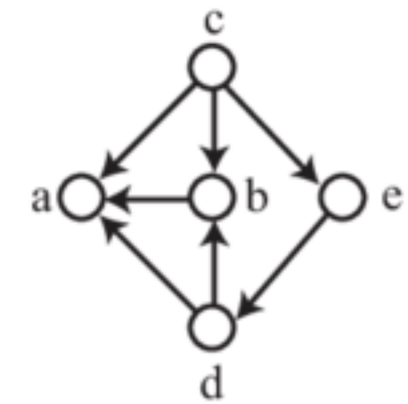
$$R(n) = nm - A \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$nm - C n^{1-\epsilon} m^{\alpha} \le A \qquad m - C m^{\alpha} / n^{\epsilon} \le A/n$$

$$n := C^{1/\epsilon} m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیباتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \leq Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$$

ضریب تقریب الگوریتم

$$R(n) = nm - A \leq Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$$

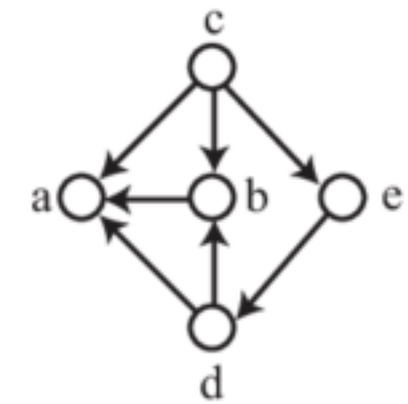
$$nm - Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha} \leq A \qquad m - Cm^{\alpha}/n^{\epsilon} \leq A/n$$

$$n := C^{1/\epsilon}m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$$

$$m - m^{1-\beta} \leq A/n$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیباتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

ضریب تقریب الگوریتم

$$R(n) = nm - A \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

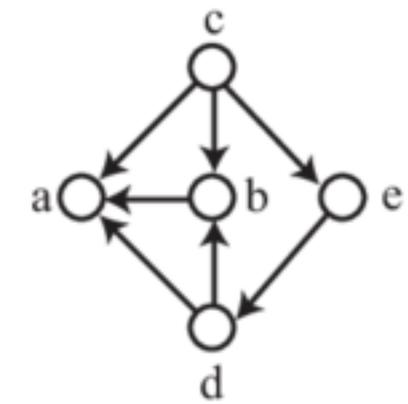
$$nm - C n^{1-\epsilon} m^{\alpha} \le A \qquad m - C m^{\alpha}/n^{\epsilon} \le A/n$$

$$n := C^{1/\epsilon} m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$$

$$m - m^{1-\beta} \le A/n \qquad m(1 - m^{-\beta}) \le A/n$$

بندیت برای بلندترین مسیر

ورودی



بندیت ترکیبیاتی

الگوریتم ؟؟؟

$$R(n) = \sum \langle a - A_t, x_t \rangle \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

ضریب تقریب الگوریتم

$$R(n) = nm - A \le C n^{1-\epsilon} m^{\alpha}$$

$$nm - C n^{1-\epsilon} m^{\alpha} \le A \qquad m - C m^{\alpha} / n^{\epsilon} \le A/n$$

$$n := C^{1/\epsilon} m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$$

$$m - m^{1-\beta} \le A/n \qquad m(1 - m^{-\beta}) \le A/n \qquad \frac{9}{10} m \le A/n$$

مسئله زمان اجرا

- اگر الگوریتم بندیتی با پشیمانی $Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$ برای مسئله بزرگ‌ترین مسیر روی گراف داشته باشیم،
  - زمان اجرای آن چند جمله‌ای نیست

مسئله زمان اجرا

- اگر الگوریتم بندیتی با پشیمانی $Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$ برای مسئله بزرگ‌ترین مسیر روی گراف داشته باشیم،
  - زمان اجرای آن چند جمله‌ای نیست
- یا تعداد مراحل چندجمله‌ای نیست $n := C^{1/\epsilon}m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$

مسئله زمان اجرا

- اگر الگوریتم بندیتی با پشیمانی $Cn^{1-\epsilon}m^{\alpha}$ برای مسئله بزرگ‌ترین مسیر روی گراف داشته باشیم،
  - زمان اجرای آن چند جمله‌ای نیست
- یا تعداد مراحل چندجمله‌ای نیست $n := C^{1/\epsilon}m^{(\alpha+\beta-1)/\epsilon}$
- یا مراحل محاسبه چندجمله‌ای نیست
  - اگر α و ϵ ثابت باشند.