بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه نوزدهم: مسئله اختلاف (۲)

Project: People

مرور

مسئله اختلاف (Discrepancy)

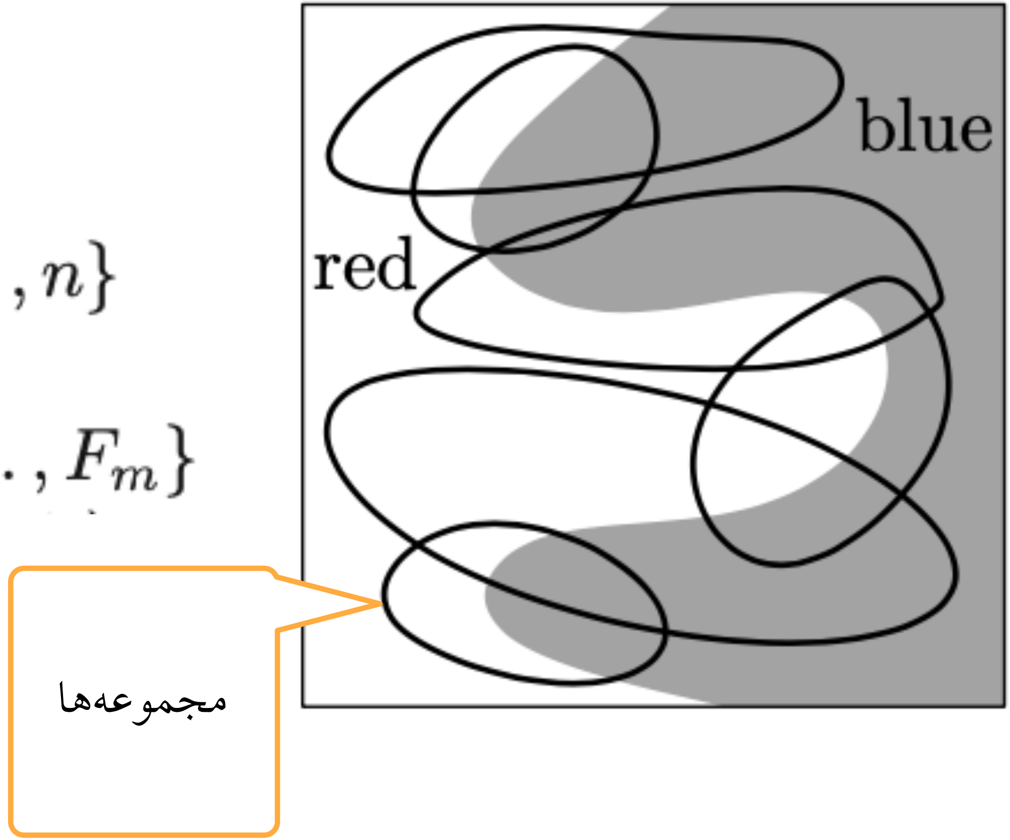
$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

مسئله اختلاف (Discrepancy)

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$



ورودی:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

$$\sum_{j \in F} \chi(j).$$

$$\operatorname{disc}(\mathcal{F}, \chi) := \max_{F \in \mathcal{F}} |\chi(F)|,$$

$$\operatorname{disc}(\mathcal{F}) := \min_{\chi} \operatorname{disc}(\mathcal{F}, \chi),$$

برنامه‌ریزی صحیح

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \ \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \ \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \ \max_j \left|\sum_{i\in F_j} x_i\right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left|\sum_{i\in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left|\sum_{i\in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min \max_j \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \quad D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \quad D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

برنامه‌ریزی صحیح

$$\min_{j} \ \max \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min \ D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az} - \mathbf{b}$$

برنامه‌ریزی صحیح

$\|Ax - b\|_\infty$

$$\min_{} \; \max_{j} \left| \sum_{i \in F_j} x_i \right|$$
$$x_i = \pm 1$$

$$\min \; D$$
$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$
$$x_i = \pm 1$$

$$\min \; D$$
$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$
$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az} - \mathbf{b}$$

برنامه‌ریزی صحیح

$\|Ax-b\|_\infty$

$$\min_{j}\ \max |\sum_{i\in F_j} x_i|$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min\ D$$

$$|\sum_{i\in F_j} x_i| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\min\ D$$

$$|\sum_{i\in F_j} x_i| \le D$$

$$x_i \in [-1, +1]$$

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$\mathbf{Az}-\mathbf{b}$$

روش گرد کردن خوب!

$$\operatorname{herdisc}(\mathcal{F}) := \max_{A \subseteq V} \operatorname{disc}(\mathcal{F}|_A).$$

$$\mathcal{F}|_A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}.$$

نسبت به زیرمجموعه
بزرگ‌تر مساوی است

$$\operatorname{herdisc}(\mathcal{F}) := \max_{A \subseteq V} \operatorname{disc}(\mathcal{F}|_A).$$

$$\mathcal{F}|_A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}.$$

الگوریتم

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$\left|\sum_{i \in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$\left| \sum_{i \in F_j} x_i \right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\operatorname{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 &\le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

آمادگی

$$\min \quad D$$

$$\left|\sum_{i \in F_j} x_i\right| \le D$$

$$x_i = \pm 1$$

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) \le \mathrm{disc}(\mathcal{F}).$$

$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F})$: min D

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 &\le D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

چگونه حساب کنیم؟

$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F})$: min D

$$\left\|\sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_j\right\|^2 \leq D^2, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$\|\mathbf{u}_j\|^2 = 1, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

چگونه حساب کنیم؟

$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F})$: min D

$$\left\|\sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_j\right\|^2 \leq D^2, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$\|\mathbf{u}_j\|^2 = 1, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

$$\|\sum_{j\in F_i} u_j\|^2$$

چگونه حساب کنیم؟

$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F})$: min D

$$\left\|\sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_j\right\|^2 \leq D^2, \quad i=1,2,\ldots,m,$$
$$\|\mathbf{u}_j\|^2 = 1, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

$$\|\sum_{j\in F_i} u_j\|^2 = \sum_k \left(\sum_{j\in F_i} u_{j,k}\right)^2$$

چگونه حساب کنیم؟

$$\mathrm{vecdisc}(\mathcal{F}) : \min \mathrm{D}$$

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{j\in F_i} \mathbf{u}_j\Big\|^2 &\leq D^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|\mathbf{u}_j\|^2 &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\|\sum_{j\in F_i} u_j\|^2 = \sum_k \Big(\sum_{j\in F_i} u_{j,k}\Big)^2 = \sum_k \sum_{j\in F_i} \sum_{j'\in F_i} u_{j,k} u_{j',k}$$

الگوریتم گرد کردن Bansal

جواب بهینه:

$$x = 0$$

گرد

جواب z صحیح که:

$$A\mathbf{z} - \mathbf{b}$$

الگوریتم گرد کردن Bansal

شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $\zeta \in [-1, +1]^n$

هر دفعه:

حل یک SDP

تغییر اندک تصادفی بر اساس جواب SDP

با احتمال خوب $\zeta \in \{-1, +1\}^n$

جواب بهینه:

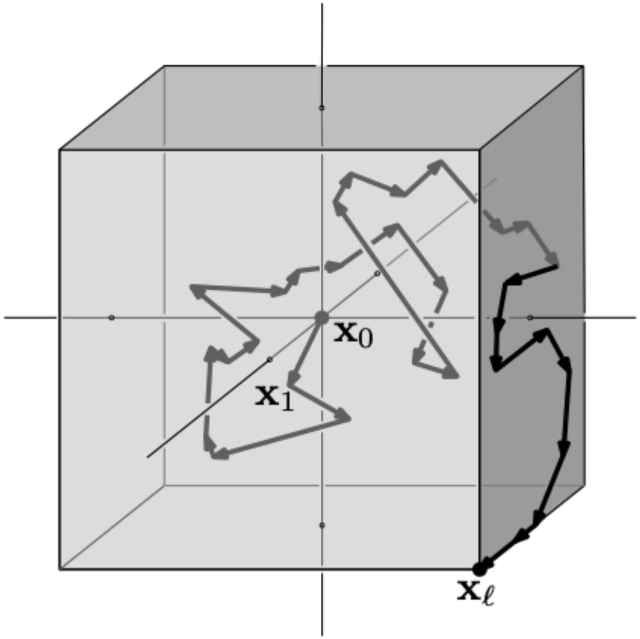
$x = 0$

گرد

جواب z صحیح که:

$Az - b$

الگوریتم گرد کردن Bansal



شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $\zeta \in [-1,+1]^n$

هر دفعه:

حل یک SDP

تغییر اندک تصادفی بر اساس جواب SDP

با احتمال خوب $\zeta \in \{-1,+1\}^n$

جواب بهینه:

$x = 0$

گرد

جواب z صحیح که:

$$Az - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \mathrm{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1,1]^n,$$

$$A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = 0 \text{ for all } j \notin A_t$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \mathrm{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1, 1]^n,$$

$$A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$$
$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = 0 \text{ for all } j \notin A_t$$

$$\gamma_t \sim N(0,1)$$
$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{u}_{t,j}$$

اثر Δ_t روی اختلاف کم باشد:

$$\Delta_t \sim \mathrm{vecdisc}(F|_{A_t})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in [-1,1]^n,$$

الگوریتم Bansal

- شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1, +1]^n$
- هر دفعه t = 1 تا l:
  - $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
  - حل
$$\boxed{\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2}$$
  - متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
  -
$$\boxed{\begin{aligned} &(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} \\ &\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t \\ &(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}}$$

الگوریتم Bansal

- شبهه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1,+1]^n$
- هر دفعه t = 1 تا l:

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

- $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
- حل

$$\boxed{\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2}$$

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
-

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\mathbf{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} \\
&\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Delta}_t \\
&(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}}$$

الگوریتم Bansal

- شبه‌رنگ‌آمیزی متغیر $x \in [-1, +1]^n$
- هر دفعه t = 1 تا l:

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

- $A_t := \{j \in V : (\mathbf{x}_{t-1})_j \neq \pm 1\}$
- حل

$$\left\| \sum_{j \in F_i \cap A_t} \mathbf{u}_{t,j} \right\|^2 \leq D^2$$

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد γ_t
-

$$\sigma := \frac{1}{C_0 n \sqrt{\log n}},$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_t)_j := \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_t := \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Delta}_t$$

$$(\mathbf{x}_t)_j := \begin{cases} +1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \geq 1, \\ -1 & \text{if } (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j \leq -1, \\ (\tilde{\mathbf{x}}_t)_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

مراحل اثبات:

- ۱ـ همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

مراحل اثبات:

- ۱ ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

مراحل اثبات:

- ۱ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

مراحل اثبات:

$l := C_1\sigma^{-2}\log n$

- ۱ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ـ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند

مراحل اثبات:

- ۱ ــ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ ــ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند

$l := C_1\sigma^{-2}\log n$

$$\sum_{j\in F_i} \sigma\gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} =$$

مراحل اثبات:

- ۱ ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ ـ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n,$

$$\sum_{j \in F_i} \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sigma \gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i}$$

مراحل اثبات:

$l := C_1 \sigma^{-2} \log n$

- ۱ـ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ـ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند

$$\sum_{j \in F_i} \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sigma \gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i}$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

مراحل اثبات:

$l := C_1\sigma^{-2}\log n$

- ۱ــ همه ابعاد پس از l قدم به دیوارها چسبیده‌اند
- ۲ــ مجموعه Fi، در هر مرحله ؟؟؟؟ تغییر می‌کند
  - که کوچک است!

$$\sum_{j\in F_i} \sigma\gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sigma\gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i}$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j\in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$X_t = (\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sigma\gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j}$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$X_t = (\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{u}_{t,j} \sim N(0, \sigma^2).$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$X_t = (\mathbf{\Delta}_t)_j = \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} \sim N(0, \sigma^2).$$

$$X_1, \ldots, X_{t_0}$$

آخرین مرحله که به دیواره نرسیده

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$X_t = (\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sigma\gamma_t^T\mathbf{u}_{t,j} \sim N(0,\sigma^2).$$

متغیر مستقل استاندارد با واریانس σ^2

$$X_1,\ldots,X_{t_0}\ \ldots, Z_\ell$$

آخرین مرحله که به دیواره نرسیده

افراز Zها به گروه‌های kتایی

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$k := \sigma^{-2}$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$k := \sigma^{-2}$$

$$\text{Prob}[|S_j| \geq 2] \geq c_0$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$\boxed{k := \sigma^{-2}}$$

$$\mathrm{Prob}[|S_j| \geq 2] \geq c_0$$

$$P[|S_j| < 2] \leq (1 - 0.0455)$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$k := \sigma^{-2}$$

$$\mathrm{Prob}[|S_j| \geq 2] \geq c_0$$

$$P[|S_j| < 2] \leq (1 - 0.0455)$$

$$P[\forall j : |S_j| < 2] \leq$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$k := \sigma^{-2}$$

$$\mathrm{Prob}[|S_j| \geq 2] \geq c_0$$

$$P[|S_j| < 2] \leq (1 - 0.0455)$$

$$P[\forall j : |S_j| < 2] \leq (1-c_0)^{\lfloor \ell/k \rfloor} = e^{-c_1 \lfloor \sigma^2 \ell \rfloor}$$

افراز Zها به گروه‌های kتایی

$$S_j := \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i \sim N(0, k\sigma^2) = N(0,1)$$

$$k := \sigma^{-2}$$

$$\mathrm{Prob}[|S_j| \geq 2] \geq c_0$$

$$P[|S_j| < 2] \leq (1 - 0.0455)$$

$$P[\forall j : |S_j| < 2] \leq (1-c_0)^{\lfloor \ell/k \rfloor} = e^{-c_1 \lfloor \sigma^2 \ell \rfloor}$$

$$= e^{-c_1 \lfloor C_1 \log n \rfloor} \leq n^{-2}$$

$$\ell := C_1 \sigma^{-2} \log n$$

$$C_1 := 3/c_1$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$P[\forall j : |S_j| < 2] \leq n^{-2}$$

اثبات قسمت ۱: همه ابعاد پس از 1 قدم به دیوارها چسبیده‌اند

یک بعد ثابت j را در نظر بگیرید

$$X_t := (\mathbf{x}_t)_j - (\mathbf{x}_{t-1})_j$$

$$P[\forall j : |S_j| < 2\,] \leq n^{-2}$$

احتمال اینکه حداقل یک بعد نچسبده <= 1/n

اثبات مرحله ۲:

$$D_i := \sum_{j \in F_i} (\mathbf{x}_\ell)_j$$

اثبات مرحله ۲:

$$(\mathbf{x}_\ell)_j = \sum_{t=1}^{\ell} (\boldsymbol{\Delta}_t)_j + T_j,$$

$$D_i := \sum_{j \in F_i} (\mathbf{x}_\ell)_j$$

اثبات مرحله ۲:

$$(\mathbf{x}_{t_0+1})_j - (\mathbf{x}_{t_0} + \mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j$$

$$(\mathbf{x}_\ell)_j = \sum_{t=1}^{\ell} (\mathbf{\Delta}_t)_j + T_j,$$

$$D_i := \sum_{j \in F_i} (\mathbf{x}_\ell)_j$$

$$|T_j| \leq |(\mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$(\mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0, \sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0, \sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$\text{Prob}\left[|T_j| > \frac{1}{n}\right]$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0, \sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$\text{Prob}\left[|T_j| > \frac{1}{n}\right] \leq \text{Prob}\left[|\sigma Z| \geq \frac{1}{n}\right]$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0, \sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$\text{Prob}\left[|T_j| > \frac{1}{n}\right] \leq \text{Prob}\left[|\sigma Z| \geq \frac{1}{n}\right] = \text{Prob}\left[|Z| \geq \frac{1}{\sigma n}\right]$$

$$(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0, \sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\boldsymbol{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$\text{Prob}\left[|T_j| > \frac{1}{n}\right] \leq \text{Prob}\left[|\sigma Z| \geq \frac{1}{n}\right] = \text{Prob}\left[|Z| \geq \frac{1}{\sigma n}\right]$$

$$\leq e^{-\sigma^{-2} n^{-2}/2}$$

$$\text{Prob}[|Z| \geq \lambda] \leq e^{-\lambda^2/2}$$

$$(\mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j \sim N(0,\sigma^2)$$

$$|T_j| \leq |(\mathbf{\Delta}_{t_0+1})_j|$$

$$\text{Prob}\left[|T_j| > \frac{1}{n}\right] \leq \text{Prob}\left[|\sigma Z| \geq \frac{1}{n}\right] = \text{Prob}\left[|Z| \geq \frac{1}{\sigma n}\right]$$

$$\leq e^{-\sigma^{-2}n^{-2}/2} = e^{-(C_0^2 \log n)/2} \leq \frac{1}{n^3}$$

$$\text{Prob}[|Z| \geq \lambda] \leq e^{-\lambda^2/2}$$

$$\sigma := 1/(C_0 n\sqrt{\log n})$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i &:= \sum_{j\in F_i}\sum_{t=1}^{\ell}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j \\ &= \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{v}_{t,i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i &:= \sum_{j\in F_i}\sum_{t=1}^{\ell}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j \\ &= \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{v}_{t,i},\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_{t,j}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_i \;&:=\; \sum_{j \in F_i} \sum_{t=1}^{\ell} (\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} (\boldsymbol{\Delta}_t)_j \\
&=\; \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell} \sigma \gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i},
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum\nolimits_{j \in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

$$\Big\|\sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j\Big\|^2 \;\le\; D^2, \qquad \|\mathbf{v}_{t,i}\| \le H$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_i &:= \sum_{j \in F_i} \sum_{t=1}^{\ell} (\mathbf{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} (\mathbf{\Delta}_t)_j \\
&= \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} \sigma \gamma_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell} \sigma \gamma_t^T \mathbf{v}_{t,i},
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

$$\left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 \leq D^2, \quad \|\mathbf{v}_{t,i}\| \leq H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\tilde{D}_i := \sum_{j\in F_i}\sum_{t=1}^{\ell}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}(\boldsymbol{\Delta}_t)_j$$

$$= \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j\in F_i}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell}\sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{v}_{t,i},$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_{t,j}$$

$$\left\|\sum_{j\in F_i}\mathbf{u}_j\right\|^2 \le D^2, \quad \|\mathbf{v}_{t,i}\| \le H$$

$$Y_t := \sigma\boldsymbol{\gamma}_t^T\mathbf{v}_{t,i} \sim N(0,\beta_t^2) \quad 0 \le \beta_t \le \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\tilde{D}_i := \sum_{j \in F_i} \sum_{t=1}^{\ell} (\mathbf{\Delta}_t)_j = \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} (\mathbf{\Delta}_t)_j$$

$$= \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{j \in F_i} \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{u}_{t,j} = \sum_{t=1}^{\ell} \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i},$$

$$\mathbf{v}_{t,i} := \sum\nolimits_{j \in F_i} \mathbf{u}_{t,j}$$

$$\left\| \sum_{j \in F_i} \mathbf{u}_j \right\|^2 \leq D^2, \quad \|\mathbf{v}_{t,i}\| \leq H$$

$$Y_t := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i} \sim N(0, \beta_t^2) \quad 0 \leq \beta_t \leq \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell \sim^{?} N(0, \ell \sigma^2 H^2)$$

$$\text{Prob}\left[|Y| > \lambda\beta\sqrt{\ell}\right] \leq 2e^{-\lambda^2/2},$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\mathrm{Prob}\left[|Y| > \lambda\beta\sqrt{\ell}\right] \leq 2e^{-\lambda^2/2},$$

$$Y_t := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i} \sim N(0, \beta_t^2) \quad 0 \leq \beta_t \leq \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\mathrm{Prob}\left[|Y| > \lambda \beta \sqrt{\ell}\right] \leq 2e^{-\lambda^2/2},$$

$$Y_t := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i} \sim N(0, \beta_t^2) \quad 0 \leq \beta_t \leq \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\mathrm{Prob}\left[|Y| > \lambda\beta\sqrt{\ell}\right] \leq 2e^{-\lambda^2/2}$$

$$\frac{C_2 H \log(mn)}{\sigma H \sqrt{\ell}}$$

$$\ell = C_1 \sigma^{-2} \log n$$

$$\sigma = 1/(C_0 n \sqrt{\log n},)$$

$$Y_t := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i} \sim N(0, \beta_t^2) \quad 0 \le \beta_t \le \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\mathrm{Prob}\left[|Y| > \lambda\beta\sqrt{\ell}\right] \le 2e^{-\lambda^2/2}$$

$$\frac{C_2 H \log(mn)}{\sigma H \sqrt{\ell}}$$

$$P[\tilde{D}_i > C_2 H \log(mn)]$$

$$\ell = C_1 \sigma^{-2} \log n$$

$$\sigma = 1/(C_0 n \sqrt{\log n},)$$

$$Y_t := \sigma \boldsymbol{\gamma}_t^T \mathbf{v}_{t,i} \sim N(0, \beta_t^2) \quad 0 \leq \beta_t \leq \sigma H$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$\text{Prob}\left[|Y| > \lambda\beta\sqrt{\ell}\right] \leq 2e^{-\lambda^2/2}$$

$$\frac{C_2 H \log(mn)}{\sigma H \sqrt{\ell}}$$

$$P[\tilde{D}_i > C_2 H \log(mn)] \leq \frac{1}{n^2 m^2}$$

$$\ell = C_1 \sigma^{-2} \log n$$

$$\sigma = 1/(C_0 n \sqrt{\log n},)$$

$$\tilde{D}_i = Y_1 + \cdots + Y_\ell$$

$$P[\tilde{D}_i > C_2 H \log(mn)] \leq \frac{1}{n^2 m^2}$$

$$P[\exists i : \tilde{D}_i > C_2 H \log(mn)] \leq \frac{1}{n^2 m}$$

- با احتمال نزدیک به ۱ داریم:

$$\mathrm{Prob}[\mathrm{disc}(\mathcal{F}, \mathbf{x}_\ell) > D_{\max}] \leq \frac{1}{n}$$

11.2.8 Claim. *With probability close to* 1*, the discrepancy of the resulting (semi)coloring is of order* $O(H \log(mn))$*, where* H *is the hereditary vector discrepancy of* $\mathcal{F}$.

پایان