بسم الله الرحمن الرحیم

یادگیری برخط

جلسه بیست و چهارم:
بندیت ترکیبیاتی ـ آزمایش

مسئله انتخاب تبلیغ

- تبلیغ: d تا
- جای تبلیغ: m تا
- هر دفعه:
  - m تا تبلیغ نمایش می‌دهیم
  - برخی کلیک می‌شوند
  - زیان = تعداد کلیک نشده‌ها

مسئله انتخاب تبلیغ

- تبلیغ: d تا
- جای تبلیغ: m تا
- هر دفعه:
  - m تا تبلیغ نمایش می‌دهیم
  - برخی کلیک می‌شوند
  - زیان = تعداد کلیک نشده‌ها

- هدف: کم کردن پشیمانی = زیان ما منهای زیان بهترین m تبلیغ ثابت

مسئله انتخاب تبلیغ:

- مجموعه کنش‌ها (A):
- همه زیرمجموعه‌های m عضوی از $\{1, 2, \ldots, d\}$
- بردار زیان مرحله t: $y_t \in [0,1]^d$
- بازخورد: $A_t y_t$

الگوریتم برای مسئله انتخاب تبلیغ

- الگوریتم ۱: EXP3
-

روش ۱:

EXP3: $R_n \leq 2\sqrt{3dn\log(k)}$.

Input Finite action set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, learning rate η, exploration distribution π, exploration parameter γ
for $t = 1, 2, \ldots, n$ **do**
 Compute sampling distribution:

$$P_t(a) = \gamma\pi(a) + (1-\gamma)\frac{\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a)\right)}{\sum_{a'\in\mathcal{A}}\exp\left(-\eta\sum_{s=1}^{t-1}\hat{Y}_s(a')\right)}.$$

سختی ۱

 Sample action $A_t \sim P_t$
 Observe loss $Y_t = \langle A_t, y_t\rangle$ and compute loss estimates:

سختی ۲

$$\hat{Y}_t = Q_t^{-1}A_tY_t \qquad \text{and} \qquad \hat{Y}_t(a) = \langle a, \hat{Y}_t\rangle.$$

end for

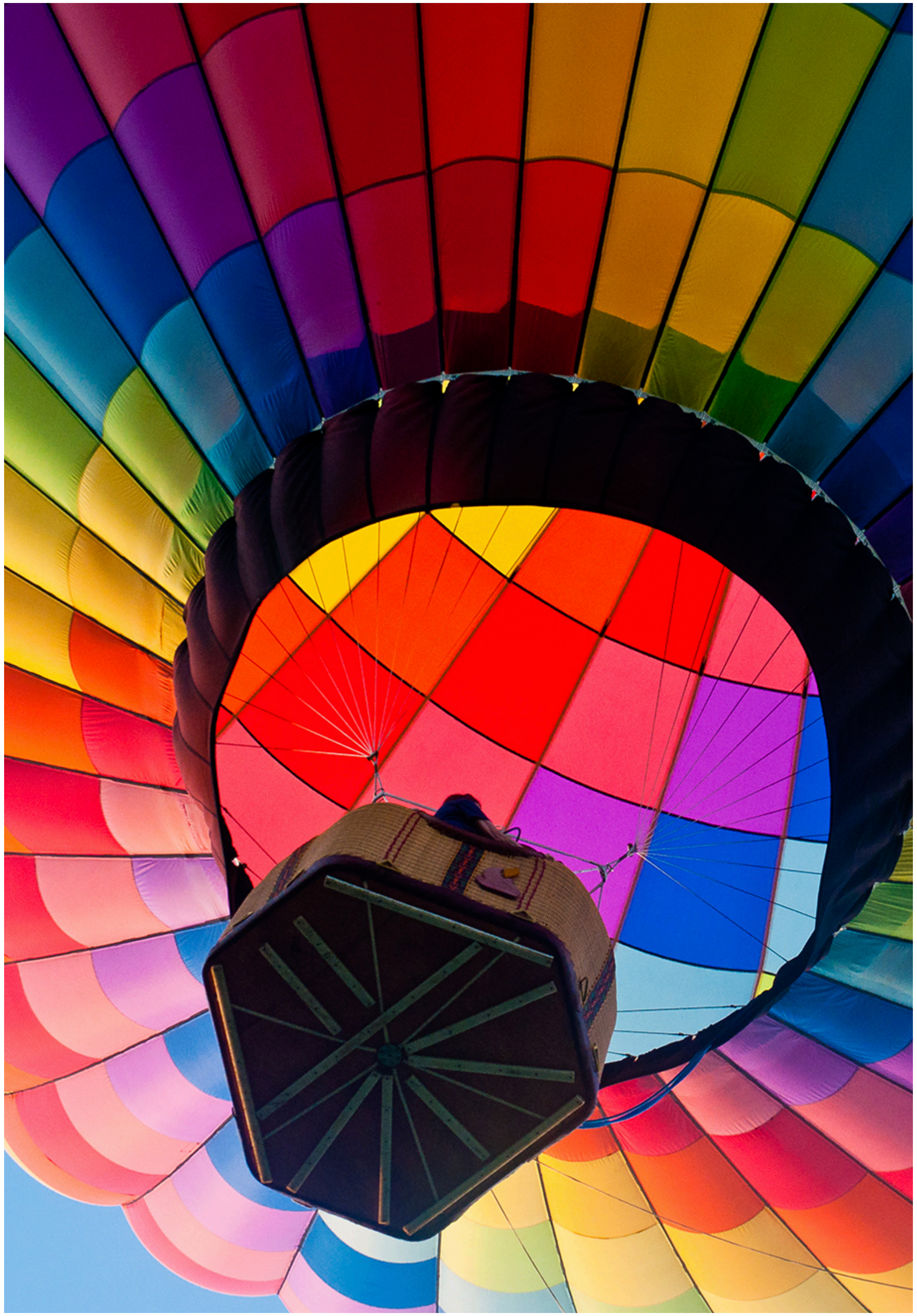
THEOREM 30.1. *Consider the setting of* ... *If Algorithm 15 is run on action set $\mathcal{A}$ with appropriately chosen learning r*...

$$\binom{d}{m} \leq \left(\frac{ed}{m}\right)^m$$

$$R_n \leq 2m\sqrt{3dn\log|\mathcal{A}|} \leq m^{3/2}\sqrt{12dn\log\left(\frac{ed}{m}\right)}.$$

روش ۲:

الگوریتم ۲: کاهش آینه‌ای با تابع لژاندر: منفی آنتروپی



الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

Input $\mathcal{A}, \eta, F$

$\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose distribution P_t on $\mathcal{A}$ such that $\sum_{a \in \mathcal{A}} P_t(a)a = \bar{A}_t$

Sample $A_t \sim P_t$ and observe $A_{t1}y_{t1}, \ldots, A_{td}y_{td}$

Compute $\hat{Y}_{ti} = A_{ti}y_{ti}/\bar{A}_{ti}$ for all $i \in [d]$

Update $\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} \eta\langle a, \hat{Y}_t\rangle + D_F(a, \bar{A}_t)$

end for

کران پشیمانی الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

قضیه:

$$F(a) = \sum_{i=1}^{d} (a_i \log(a_i) - a_i) \qquad a \in [0,\infty)^d$$

$$F(a) = \infty \qquad \textit{otherwise.}$$

$$\eta = \sqrt{2m(1+\log(d/m))/(nd)},$$

$$\Downarrow$$

$$R_n \le \sqrt{2nmd(1+\log(d/m))}$$

الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

Input $\mathcal{A}$, η, F

$\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} F(a)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose distribution P_t on $\mathcal{A}$ such that $\sum_{a \in \mathcal{A}} P_t(a) a = \bar{A}_t$

Sample $A_t \sim P_t$ and observe $A_{t1} y_{t1}, \ldots, A_{td} y_{td}$

Compute $\hat{Y}_{ti} = A_{ti} y_{ti} / \bar{A}_{ti}$ for all $i \in [d]$

Update $\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t)$

end for

الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

Input $\mathcal{A}, \eta, F$

$\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$ ؟؟؟؟

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose distribution P_t on $\mathcal{A}$ such that $\sum_{a \in \mathcal{A}} P_t(a) a = \bar{A}_t$ ؟؟؟؟

Sample $A_t \sim P_t$ and observe $A_{t1} y_{t1}, \ldots, A_{td} y_{td}$

Compute $\hat{Y}_{ti} = A_{ti} y_{ti} / \bar{A}_{ti}$ for all $i \in [d]$

Update $\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t)$ ؟؟؟؟

end for

ناحیه شدنی

- سوال: با داشتن یک نقطه $\bar{A}$ در پوش محدب،
  - بیابیم:
    - Xiها = مجموعه با اندازه m
    - aiها = اعداد نامنفی با جمع ۱
    - که $\sum_{i=1}^{?} a_i X_i = \bar{A}$

- ناحیه شدنی = پوش محدب بردارهای مشخصه مجموعه‌های با اندازه m

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

یک نقطه در پوش
محدب کنش‌ها

یک نقطه در پوش محدب کنش‌ها

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\qquad \|A\|_1 = m$

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

یک نقطه در پوش محدب کنش‌ها

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\|A\|_1 = m$

با تغییر نام‌گذاری ستون‌ها، درایه‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_d$$

یک نقطه در پوش محدب کنش‌ها

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\qquad$ $\|A\|_1 = m$

با تغییر نام‌گذاری ستون‌ها، درایه‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$A_1 \ge A_2 \ge \ldots \ge A_d$$

هدف:

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha) Y$$

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

یک نقطه در پوش محدب کنش‌ها

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\|A\|_1 = m$

با تغییر نام‌گذاری ستون‌ها، درایه‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_d$$

هدف:

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1 - \alpha)Y$$

$$Y = \frac{A - \alpha X}{1 - \alpha}$$

یک نقطه در پوش محدب کنش‌ها

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_d)$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\quad \|A\|_1 = m$

با تغییر نام‌گذاری ستون‌ها، درایه‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$A_1 \ge A_2 \ge \ldots \ge A_d$$

هدف:

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha) Y$$

$$Y = \frac{A - \alpha X}{1 - \alpha}$$

اگر شرایط اولیه را داشته باشد،

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y$$

$$Y = \frac{A - \alpha X}{1 - \alpha}$$

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$0 \le Y_i$

$\|A\|_1 = m \qquad 0 \le A_i \le 1 \qquad$ شرایط اولیه:

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$0 \le Y_i \Rightarrow \alpha \le A_m$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A-\alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1-\alpha, A_2-\alpha, \ldots, A_m-\alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$0 \le Y_i \Rightarrow \alpha \le A_m$$

$$Y_i \le 1$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$0 \le Y_i \Rightarrow \alpha \le A_m$$

$$Y_i \le 1 \Rightarrow \frac{A_{m+1}}{1-\alpha} \le 1$$

$\|A\|_1 = m \qquad 0 \le A_i \le 1$ شرایط اولیه:

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$0 \le Y_i \Rightarrow \alpha \le A_m$$

$$Y_i \le 1 \Rightarrow \frac{A_{m+1}}{1-\alpha} \le 1 \Rightarrow \alpha \le 1 - A_{m+1}$$

شرایط اولیه: $0 \le A_i \le 1$ $\|A\|_1 = m$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{A - \alpha X}{1-\alpha}$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$0 \le Y_i \Rightarrow \alpha \le A_m$$

$$Y_i \le 1 \Rightarrow \frac{A_{m+1}}{1-\alpha} \le 1 \Rightarrow \alpha \le 1 - A_{m+1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \min(A_m, 1 - A_{m+1})$$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y$$

$$\alpha = \min(A_m, 1 - A_{m+1})$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y$$

$$\alpha = \min(A_m, 1 - A_{m+1})$$

$$Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

چرا تمام می‌شود؟

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$\alpha = \min(A_m, 1 - A_{m+1})$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha) Y \qquad Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

چرا تمام می‌شود؟

ادعا: درایه‌های ۰ و ۱ در A، در Y هم همین‌طورند

$$\underbrace{(1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots,0)$$

$$\alpha = \min(A_m, 1 - A_{m+1})$$

$$A = \alpha X + (1-\alpha)Y \qquad Y = \frac{(A_1 - \alpha, A_2 - \alpha, \ldots, A_m - \alpha, A_{m+1}, \ldots, A_d)}{1-\alpha}$$

چرا تمام می‌شود؟

ادعا: درایه‌های ۰ و ۱ در A، در Y هم همین‌طورند

در هر مرحله، تعداد درایه‌های صحیح اضافه می‌شود.

ناحیه شدنی

- ناحیه شدنی = پوش محدب بردارهای مشخصه مجموعه‌های با اندازه m
- سوال: با داشتن یک نقطه $\bar{A}$ در پوش محدب،
- بیابیم:
- Xiها = مجموعه با اندازه m
- aiها = اعداد نامنفی با جمع ۱
- که $\sum_{i=1}^{?} a_i X_i = \bar{A}$

d+1

ناحیه شدنی

- ناحیه شدنی = پوش محدب بردارهای مشخصه مجموعه‌های با اندازه m
- ناحیه شدنی = نقاطی که در شرایط اولیه صدق می‌کنند

شرایط اولیه: $0 \leq A_i \leq 1$ $\|A\|_1 = m$

الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

Input $\mathcal{A}, \eta, F$

$\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} F(a)$ ؟؟؟؟

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose distribution P_t on $\mathcal{A}$ such that $\sum_{a \in \mathcal{A}} P_t(a) a = \bar{A}_t$ ؟؟؟؟

Sample $A_t \sim P_t$ and observe $A_{t1} y_{t1}, \ldots, A_{td} y_{td}$

Compute $\hat{Y}_{ti} = A_{ti} y_{ti} / \bar{A}_{ti}$ for all $i \in [d]$

Update $\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t)$ ؟؟؟؟

end for

```
def calc_distribution(Abar):
 if Abar.size == m: return [1], [Abar]
  P = []
  X = []
  prob = 1
  while True:
    idx = (-Abar).argsort()
    alpha = min(1-Abar[idx[m]], Abar[idx[m-1]])
    s = np.zeros(d)
    s[idx[0:m]] = 1
    P.append(alpha * prob)
    X.append(s)
    if alpha > 1-EPS: break
    Abar = (Abar - alpha * s) / (1-alpha)
    prob *= 1-alpha
  return P, X
```

$$f(x) \;=\; \textstyle\sum_i x_i \log(x_i) \;-\; x_i \qquad \mathrm{dom}(f) \;=\; [0,\infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \quad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$

$$0 \leq a \leq 1$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$
$$0 \leq a \leq 1$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$

$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$
$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$\nabla f(x) \| x$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0,\infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$

$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) \| x \qquad x = \alpha 1$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$

$$0 \le a \le 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) \| x \qquad x = \alpha 1 \qquad m = \|x\|_1 = d\alpha$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$
$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) \| x \qquad x = \alpha 1 \qquad m = \|x\|_1 = d\alpha \qquad \alpha = m/d$$

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$
$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a:\|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) \| x \qquad x = \alpha 1 \qquad m = \|x\|_1 = d\alpha \qquad \alpha = m/d$$

در شرط $0 \leq a \leq 1$ هم صدق می‌کند

$$\nabla f(x) = \log(x)$$

$$f(x) = \sum_i x_i \log(x_i) - x_i \qquad \mathrm{dom}(f) = [0, \infty)^d$$

$$\bar{A}_1 = \mathrm{argmin}_{a \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} F(a)$$

$$\|a\|_1 = m$$
$$0 \leq a \leq 1$$

$$x = \arg \min_{a : \|a\|_1 = m} F(a)$$

$$\nabla f(x) \| x \qquad x = \alpha 1 \qquad m = \|x\|_1 = d\alpha \qquad \alpha = m/d$$

در شرط $0 \leq a \leq 1$ هم صدق می‌کند

$$\bar{A}_1 = (m/d, \ldots, m/d)$$

الگوریتم کاهش آینه‌ای برای بندیت، با تابع لژاندر منفی آنتروپی

Input $\mathcal{A}, \eta, F$

$\bar{A}_1 = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} F(a)$

$\bar{A}_1 = (m/d, \ldots, m/d)$

for $t = 1, \ldots, n$ **do**

Choose distribution P_t on $\mathcal{A}$ such that $\sum_{a \in \mathcal{A}} P_t(a) a = \bar{A}_t$

؟؟؟

Sample $A_t \sim P_t$ and observe $A_{t1} y_{t1}, \ldots, A_{td} y_{td}$

Compute $\hat{Y}_{ti} = A_{ti} y_{ti} / \bar{A}_{ti}$ for all $i \in [d]$

Update $\bar{A}_{t+1} = \operatorname{argmin}_{a \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} \eta \langle a, \hat{Y}_t \rangle + D_F(a, \bar{A}_t)$

؟؟؟؟

end for

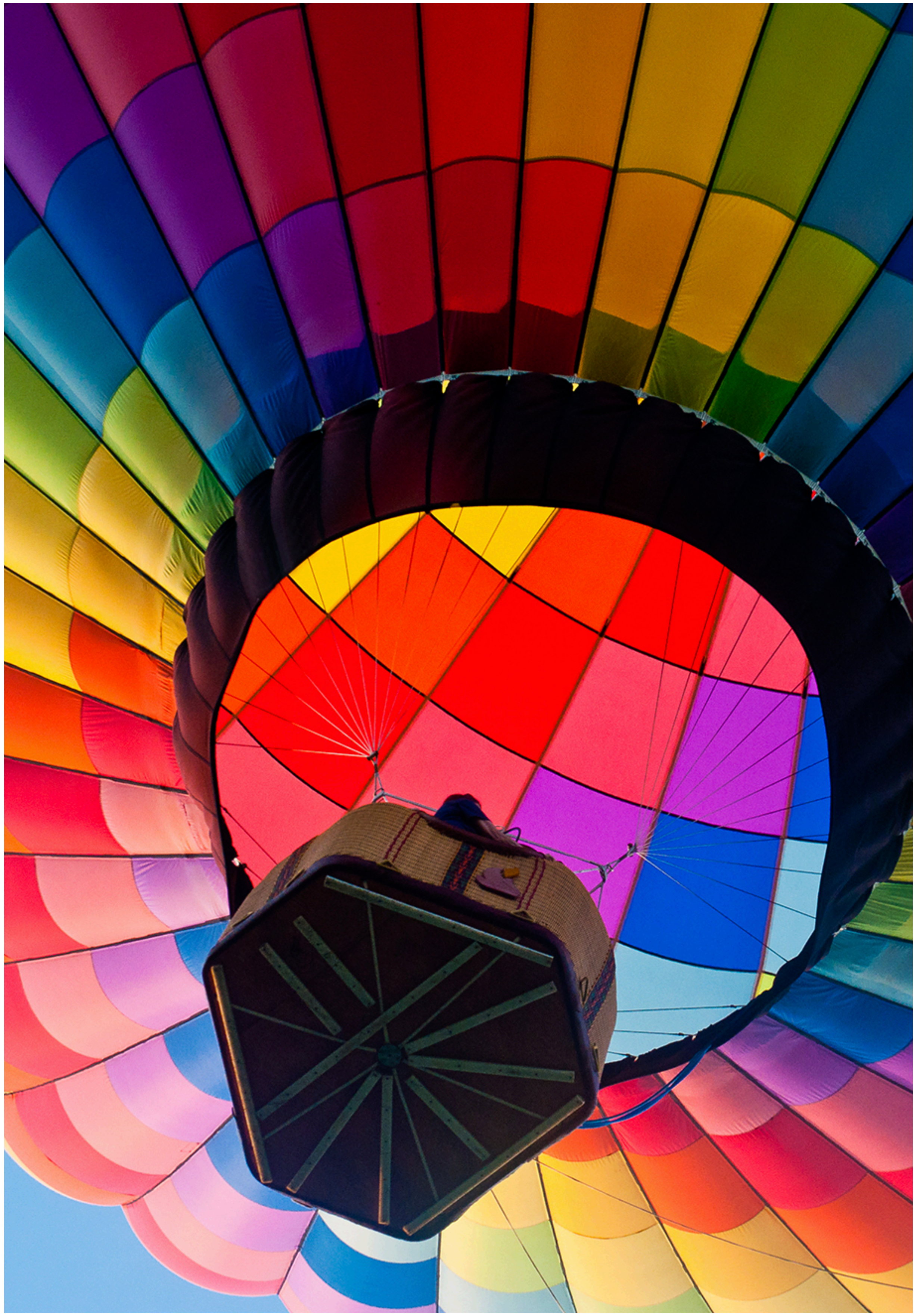
```python
p_eta = cp.Parameter(nonneg=True)
p_Yhat = cp.Parameter(d)
p_Abar = cp.Parameter(d)

a = cp.Variable(d, pos=True)
objective = cp.Minimize( p_eta * a @ p_Yhat +
          sum(cp.kl_div(a, p_Abar)) )

def mirror_descent_step(eta, Yhat, Abar):
  p_Abar.value = Abar
  p_eta.value = eta
  p_Yhat.value = Yhat
  constraints = [0 <= a, a <= 1, sum(a) == m]
  prob = cp.Problem(objective, constraints)
  result = prob.solve()
  return a.value
```

الگوریتم کاهش آینه‌ای

```
our_loss = []
Abar = np.full(d, m/d)
for t in range(n):
  P, X = calc_distribution(Abar)
  At = X[np.random.choice(len(X), 1, p = P/sum(P))[0]]
  AY = y[t,] * At
  our_loss.append(sum(AY))
  Yhat = AY / Abar
  Abar = mirror_descent_step(eta, Yhat, Abar)
```

آزمایش ...

پیروی از پیش‌روی آشفته



پیروی از پیش‌روی آشفته:

Input $\mathcal{A}, n, \eta, \beta, Q$

$\hat{L}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$

for $t = 1, \dots, n$ **do**

Sample $Z_t \sim Q$

Compute $A_t = \operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} \langle a, Z_t - \eta \hat{L}_{t-1} \rangle$

Observe $A_{t1} y_{t1}, \dots, A_{td} y_{td}$

For each $i \in [d]$ sample $K_{ti} \sim \text{Geometric}(P_{ti})$

For each $i \in [d]$ compute $\hat{Y}_{ti} = \min(\beta, K_{ti}) A_{ti} y_{ti}$

$\hat{L}_t = \hat{L}_{t-1} + \hat{Y}_t$

end for

قضیه: (پشمانی پیروی از پیش‌روی آشفته)

$$Q:\quad q(z) = 2^{-d}\exp(-\|z\|_1)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2(1+\log(d))}{(1+e^2)dnm}} \qquad \beta = \left\lceil \frac{1}{\eta m} \right\rceil$$

$$\Downarrow$$

$$R_n \leq m\sqrt{2(1+e^2)nd(1+\log(d))}.$$

```python
def Q_sample():
  norm = np.random.exponential(scale=1)
  k = np.random.exponential(scale=1.0, size=d)
  return k / sum(k) * norm *
        (np.random.randint(0, 2, d) * 2 - 1)
```

```python
def ftpl_argmax(B):
  idx = (-B).argsort()
  s = np.zeros(d)
  s[idx[0:m]] = 1
  return s
```

```python
ftpl_loss = []
L = np.array(d)
eta = np.sqrt(2 * (1+np.log(d))/(1+np.exp(2))/d/m/n )
beta = int(np.ceil(1/eta/m))
for t in range(n):
  Zt = Q_sample()
  B = Zt - eta * L
  At = ftpl_argmax(B)
  AY = y[t,] * At
  ftpl_loss.append(sum(AY))
  Kt = np.zeros(d)
  for i in np.where(At==1)[0]:
    Kt[i] = beta
    for k in range(beta):
        S_0 = ftpl_argmax(Q_sample() - eta * L)
        if S_0[i] == 1.0:
          Kt[i] = k+1
          break
  Yhat = AY * Kt
  L = L + Yhat
```

آزمایش ...

پایان