دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

چندوجهی محدب و تعریف راس

جلسه ۶

نگارنده: آیسان نیشابوری

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه‌ی گذشته قضیه‌ای مطرح کردیم که اگر مسئله جواب بهینه داشته باشد، برای یافتن جواب بهینه کافیست جواب‌های شدنی پایه‌ای را بررسی کنیم.

قضیه ۱. *برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید*

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T x \\ \text{که} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

دو گزاره‌ی زیر برقرارند:
۱. اگر این برنامه ریزی جواب شدنی داشته باشد و تابع هدف آن از بالا کراندار باشد، جواب بهینه دارد.
۲. اگر این برنامه ریزی خطی جواب بهینه داشته باشد جواب بهینه‌ی پایه‌ای دارد.

اثبات. هر دو بخش را به این شکل ثابت می‌کنیم که می‌گوییم اگر جواب شدنی داشته باشیم و تابع هدف از بالا کراندار باشد جواب بهینه‌ی پایه‌ای داریم. برای این کار می‌گوییم به ازای هر نقطه‌ی شدنی مانند x، x^* وجود دارد که $c^T x^* > c^T x$ و x^* پایه‌ای شدنی است. اگر این حکم را اثبات کنیم قضیه‌مان نیز اثبات می‌شود چرا که از بین جواب‌های شدنی پایه‌ای، جوابی که در تابع هدف بیشترین مقدار را دارد به عنوان جواب بهینه‌ی پایه‌ای در نظر می‌گیرم چون مقدار تابع هدف در آن از مقدار تابع هدف در تمامی نقاط شدنی بیشتر است.
برای اثبات این حکم معادل، x دلخواه شدنی را در نظر می‌گیریم و x^* را طوری انتخاب می‌کنیم که $c^T x^* \geq c^T x$ شود و x^* بیشترین تعداد

مؤلفه‌های صفر ممکن را داشته باشد. حال می‌خواهیم اثبات کنیم x^* پایه‌ای است، برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم x^* پایه‌ای نیست.
L را مجموعه‌ی مؤلفه‌های غیر صفر در x^* در نظر می‌گیریم و A_L ماتریس ستون‌های متناظر با L از A می‌باشد. اگر ستون‌های A_L مستقل باشند x^* پایه‌ای است و به تناقض می‌رسیم چرا که $|L| \geq m$ (که در اینجا m تعداد سطرهای A است) و همچنین x^* خارج L صفر است. پس فرض می‌کنیم ستون‌های A_L مستقل نیستند یعنی y_L ناصفری وجود دارد که

$$A_L y_L = ۰$$

حال y_L را به y گسترش می‌دهیم به طوری که برای مؤلفه‌های عضو L، y و y_L در این مؤلفه‌ها برابرند و در مؤلفه‌های دیگر y برابر صفر است یعنی در واقع اگر $y_i \neq ۰$ باشد $x_i^* \neq ۰$ می‌باشد. پس داریم

$$Ay = ۰$$

حال می‌دانیم

$$A(x^* + ty) = Ax^* + tAy = Ax^* = b$$

$$c^T(x^* + ty) = c^T x^* + tc^T y$$

دو حالت در نظر می‌گیریم.
ــ حالتی که $c^T y = ۰$ باشد: در این صورت به ازای هر t تابع هدف تغییر نمی‌کند پس همواره $c^T(x^* + ty) \geq c^T x^*$ می‌باشد. حال اگر کوچکترین مؤلفه‌ی ناصفر x^* را در نظر بگیریم می‌توانیم t را طوری پیدا کنیم که این مؤلفه در $x^* + ty$ برابر صفر شود و همچنان $x^* + ty$ مثبت می‌ماند و مؤلفه‌هایی که در x^* صفر بودند در $x^* + ty$ هم صفر باقی می‌مانند چرا که اگه مؤلفه‌ای در y ناصفر باشد در x^* هم ناصفر است. پس تعداد مؤلفه‌های صفر $x^* + ty$ بیشتر از تعداد مؤلفه‌های صفر x^* می‌شود و اما این تناقض است چرا که x^* را طوری انتخاب کرده بودیم که $c^T x^* \geq c^T x$ شود و x^* بیشترین تعداد مؤلفه‌ی صفر ممکن را داشته باشد.
ــ حالتی که $c^T y \neq ۰$ باشد: می‌توانیم فرض کنیم $c^T y$ مثبت است (اگر منفی بود $-c^T y$ را در نظر می‌گیریم)، حال اگر از $t = ۰$ شروع کنیم و t را بزرگ کنیم تابع هدفمان در $c^T(x^* + ty)$ بیشتر می‌شود اما می‌دانیم تابع هدف کراندار است پس جایی وجود دارد که نمی‌توانیم دیگر t را اضافه کنیم و تنها محدودیتی که از این نظر داریم این است که $x^* + ty$ منفی شود. پس در یک جایی که t را بزرگ می‌کنیم یکی از مؤلفه‌های $x^* + ty$ منفی می‌شود اما لازمه‌ی این اتفاق این است که این مؤلفه اول صفر شود. پس اگر اولین مؤلفه‌ای که با تغییر t صفر شود را در نظر بگیریم تعداد صفرهای $x^* + ty$ از تعداد صفرهای x^* بیشتر می‌شود و تابع هدف نیز در این نقطه بیشتر است پس به تناقض می‌رسیم.
پس حکم ما ثابت می‌شود.

□

۲ تعاریف محدب

تعریف ۲ (مجموعه‌ی محدب). *مجموعه‌ی محدب را مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که به ازای هر دو نقطه‌ی x و y که درون مجموعه بگیریم همه‌ی نقاط به شکل $tx + (۱ - t)y$ که $t \in [۰, ۱]$ (همه‌ی نقاط بین x و y) درون مجموعه باشند.*

تعریف ۳ (ترکیب محدب). *ترکیب محدب x و y به شکل $tx + (۱ - t)y$ می‌باشد که $t \in [۰, ۱]$ است.*

تعریف ۴ (تابع محدب). *تابعی f محدب است که به ازای هر x و y و $t \in [۰, ۱]$ داشته باشیم*

$$f(tx + (۱ - t)y) \leq tf(x) + (۱ - t)f(y)$$

مثال ۵. *توابع خطی محدب هستند زیرا در هر تابع خطی مانند f داریم*

$$f(tx + (۱ - t)y) = tf(x) + (۱ - t)f(y)$$

اجتماع دو مجموعه‌ی محدب لزوما محدب نیست اما اشتراک دو مجموعه‌ی محدب مانند A و B محدب است چرا که هر دو نقطه‌ای که در اشتراک این دو مجموعه هستند در هر دوی آن‌ها نیز هستند پس تمام نقاط بین این دو نقطه هم در مجموعه‌ی A هستند و هم در مجموعه‌ی B پس در اشتراکشان هم وجود دارند.

تعریف ۶ (ابر صفحه). *ابر صفحه‌ی $n-1$ بعدی، زیرفضای $n-1$ بعدی‌ای است که نقاط آن در معادله‌ی*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

صدق می‌کنند.

هر ابر صفحه فضا را به دو نیم فضای محدب تقسیم میکنند که این دو نیم فضا عبارتند از

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \ge b\}$$

تعریف ۷ (چند وجهی محدب). *چند وجهی محدب اشتراک تعداد متناهی نیم فضا در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.*

دقت کنید که در تعریف چند وجهی محدب شرطی برای کراندار بودن آن نگذاشته‌ایم. تعریف چند وجهی محدب کراندار، چند وجهی محدبی است که گویی یافت شود که کل نقاط چند وجهی درون آن قرار بگیرد.

تعریف ۸ (رأس). *رأس یک چند وجهی محدب نقطه‌ای مانند x است که برای آن ابر صفحه‌ای با بردار عمود c یافت شود که به ازای هر نقطه‌ی چند وجهی محدب جز x، مانند x^* داشته باشیم*

$$c^T x^* < c^T x$$

تعریف ۹ (وجه). *وجه را مشابه رأس تعریف می‌کنیم به این صورت که وجه یک چند وجهی محدب، زیر فضای چند بعدی است که برای آن ابر صفحه‌ای با بردار عمود c یافت شود که به ازای هر نقطه‌ی این زیر فضا مانند x، $c^T x$ مقدار ثابتی داشته باشد و به ازای هر نقطه‌ی چند وجهی خارج این زیر فضا مانند x^* داشته باشیم*

$$c^T x^* < c^T x$$

۳ رئوس و برنامه ریزی خطی

قضیه ۱۰. *اگر P مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های شدنی یک برنامه ریزی خطی به فرم معادله‌ای باشد (P چند وجهی محدبی تشکیل می‌دهد)، برای هر $v \in P$ دو گزاره‌ی زیر معادلند:*
i) v رأس چند وجهی P است.
ii) v جواب پایه‌ای شدنی برای این برنامه ریزی خطی است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم i، ii را نتیجه می‌دهد. طبق تعریف رأس، صفحه‌ای با بردار عمود c وجود دارد که معادله‌ی $c^T x$ در v مقدار بیشینه‌ی خود را می‌گیرد و در نقاط شدنی دیگر کمتر است. حال اگر تابع هدف را بیشینه کردن $c^T x$ در نظر بگیریم بگیریم، طبق قضیه ۱ می‌دانیم جواب شدنی پایه‌ای برای این برنامه ریزی خطی داریم به طوری که مقدار تابع هدف برای آن بزرگتر مساوی مقدار تابع هدف در v است اما طبق تعریف رأس این امکان پذیر نیست مگر این که خود v جواب شدنی پایه‌ای باشد.
حال می‌خواهیم از ii به i برسیم. می‌دانیم که فرم شروط برنامه ریزی خطی معادله‌ای به صورت

$$Ax = b$$
$$x \ge 0$$

می‌باشد. همچنین v جواب شدنی پایه‌ای است پس مجموعه‌ی B وجود دارد به طوری که

$$B : \begin{cases} A_B \text{ مستقل} \\ v \text{ بیرون } B = 0 \end{cases}$$

حال c را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} c_i = 0, & \text{if } i \in B \\ c_i = -1, & \text{if } i \notin B \end{cases}$$

تابع هدف را نیز بیشینه کردن c^Tx قرار می‌دهیم. حال برای نقاطی مانند x که مؤلفه‌ای ناصفر بیرون B دارند می‌دانیم $c^Tx < ۰$ چرا که $x > ۰$ و همه‌ی مؤلفه‌های ناصفر c منفی هستند و همچنین برای v و هر نقطه‌ی دیگری مانند x^* که مؤلفه‌ی ناصفری بیرون B ندارد داریم $c^Tx^* = ۰$ اما x^* با این خصوصیات یکتاست چرا که اگر x_B را متغیری با تعداد مؤلفه‌ی $|B|$ بگیریم می‌دانیم جواب معادله‌ی

$$A_Bx_B = b$$

یکتاست چرا که ستون‌های A_B مستقل خطی هستند. پس تنها جواب ما با این خصوصیات گفته شده v می‌باشد پس v رأس است چرا که بردار c را پیدا کرده‌ایم که مقدار c^Tx برای همه‌ی x های شدنی (جز v) کمتر از c^Tv است.

□

۴ مقدمه‌ای بر پوش محدب

تعریف ۱۱ (پوش محدب). *پوش محدب یک مجموعه، مجموعه‌ی ترکیب‌های محدب نقاط آن است (تعریف جبری).*
پوش محدب یک مجموعه، کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل همه‌ی نقاط آن مجموعه یا به عبارت دیگر اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل نقاط آن مجموعه است (تعریف هندسی).

طبق تعریف هندسی پوش محدب مشخص است که کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل همه‌ی نقاط یک مجموعه باید برابر اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل نقاط آن مجموعه باشد.

اثبات. اگر کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل همه‌ی نقاط یک مجموعه را A و اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل نقاط آن مجموعه را B بنامیم مشخص است که $B \subseteq A$ چرا که A هم یک مجموعه‌ی محدب شامل همه‌ی نقاط مجموعه‌مان است و همچنین B کوچکتر از A نیست چرا که شامل همه‌ی نقاط مجموعه‌مان است و طبق تعریف A کوچکترین مجموعه با این خصوصیت است. پس A همان B است. □

تعریف ۱۲ (ترکیب محدب). *ترکیب محدبی از نقاط $x_۱$ ،....، x_m عبارتند از*

$$t_۱x_۱ + t_۲x_۲ + ... + t_mx_m$$

به طوری که

$$t_۱, t_۲, ..., t_m \geq ۰ \textit{ and } \sum_{i=۱}^{m} t_i = ۱$$

حال می‌خواهیم بگوییم که تعریف هندسی و جبری پوش محدب یکسان هستند.

لم ۱۳. *پوش محدب C (اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل همه‌ی نقاط C) برای مجموعه نقاط $X \in \mathbb{R}^n$ برابر است با مجموعه‌ی*

$$\tilde{C} = \{\sum_{i=۰}^{m} t_ix_i : m \geq ۱, x_۱, x_۲, ..., x_m \in X, t_۱, t_۲, ..., t_m \geq ۰, \sum_{i=۱}^{m} t_i = ۱\}$$

یعنی همه‌ی ترکیب محدب‌های متناهی نقطه از X است.

اثبات. ابتدا می‌خواهیم بگوییم $C \subseteq \tilde{C}$ است و برای این کار کافیست بگوییم $\tilde{C}$ محدب و شامل همه‌ی نقاط X می‌باشد. $\tilde{C}$ شامل همه‌ی نقاط X است چرا که می‌توانیم $m = ۱$ بگیریم و هر برای هر نقطه‌ی دلخواه مانند $x_۱$ از X ترکیب محدب $t_۱x_۱$ را بگیریم که $t_۱ = ۱$ باشد. پس کافیست ثابت کنیم $\tilde{C}$ محدب است یعنی اگر دو نقطه‌ی x و y در $\tilde{C}$ باشند $tx + (۱ - t)y$ هم برای هر $t \in [۰, ۱]$ عضو $\tilde{C}$ است. می‌دانیم که می‌توان نقاط $x_۱, ..., x_n$ و $y_۱, .., y_m$ عضو X را یافت به طوری که

$$x = \sum_{i=۰}^{n} t_ix_i$$

$$y = \sum_{i=۰}^{m} k_ix_i$$

به طوری که

$$t_۱, t_۲, ..., t_n \geq ۰ \text{ and } \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱$$

$$k_1, k_2, ..., k_m \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{m} k_i = 1$$

حال داریم

$$tx + (1-t)y = t\sum_{i=0}^{n} t_i x_i + (1-t)\sum_{i=0}^{m} k_i x_i = \sum_{i=0}^{n}(tt_i)x_i + \sum_{i=0}^{m}(k_i - tk_i)x_i$$

و $x_1, ..., x_n$ و $y_1, .., y_m$ عضو Xهستند همچنین

$$\sum_{i=0}^{n}(tt_i) + \sum_{i=0}^{m}(k_i - tk_i) = t\sum_{i=0}^{n} t_i + \sum_{i=0}^{m} k_i - t\sum_{i=0}^{m} k_i = t + 1 - t = 1$$

پس $tx + (1-t)y$ هم یک ترکیب محدب است پس در $\tilde{C}$ وجود دارد پس $\tilde{C}$ محدب است و ثابت می‌شود $C \subseteq \tilde{C}$.
حال کافیست بگوییم $C \subseteq \tilde{C}$ برای این کار می‌گوییم هر نقطه‌ی در $\tilde{C}$ باید در تمام ترکیب‌های محدب شامل همه‌ی نقاط باشد برای این کار روی m استقرا می‌زنیم. برای $m = 1$ حکم واضح است زیرا هر نقطه‌ی درون X باید درون همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل همه‌ی نقاط باشد. حال فرض می‌کنیم حکم برای اعداد کوچکتر از m درست است. می‌خواهیم بگوییم حکم برای نقطه‌ی

$$x = t_1 x_1 + ... + t_m x_m$$

هم برقرار است. می‌دانیم $x_m \in X$ و x' که به فرم

$$x' = t'_1 x_1 + ... + t'_{m-1} x_{m-1}$$

$$t'_i = \frac{t_i}{1 - t_m}, i = 1, 2, ..., m - 1$$

می‌باشد طبق فرض استقرا درون C هستند. حال هر ترکیب محدبی که شامل این نقاط باشد باید طبق تعریف محدب بودن همه‌ی نقاط بین این دو نقطه یعنی تمام نقاط به فرم $tx_m + (1-t)x'$ را هم شامل شود پس اگر قرار دهیم $t = t_m$ خواهیم داشت

$$x = t_m x_m + (1 - t_m)x'$$

پس این نقطه هم درون همه‌ی مجموعه‌های محدب شامل همه‌ی نقاط X وجود دارد پس درون C هم هست و حکم ما نتیجه می‌شود چرا که $\tilde{C} \subseteq C$ و $C \subseteq \tilde{C}$ نتیجه می‌دهد که C همان $\tilde{C}$ می‌باشد.

□

مراجع

[۱] فیلم جلسه‌ی ۶ ام تحقیق در عملیات ترم پاییز ۹۹

[۲] اسلایدهای جلسه‌ی ۶ ام تحقیق در عملیات ترم پاییز ۹۹

[3] Bernard Gärtner and Jirí Matoušek. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.