بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه نوزدهم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

تبدیل فوریه تنک

تعریف: تبدیل فوریه (کلاسیک)

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تعریف: تبدیل فوریه (کلاسیک)

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

تعریف: تبدیل فوریه (کلاسیک)

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n} uj}$$

تعریف: تبدیل فوریه (کلاسیک)

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n} uj}$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$\omega = \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

فضای زمان

فضای فرکانس

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n} \omega^{-uj}$$

تبدیل معکوس
فوریه

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل
فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n} \omega^{-uj}$$

$$F^{-1}_{ju} = \omega^{uj}$$

$$a = F^{-1}\hat{a}$$

تبدیل معکوس فوریه

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

سطر j از F^{-1}

ستون i از F

$$\sum_{i=0}^{n-1} w^{ij} w^{-ik}$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

سطر j از F^{-1}

ستون i از F

$$\sum_{i=0}^{n-1} w^{ij} w^{-ik} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{i(j+k)}$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

سطر j از F^{-1}

ستون i از F

$$\sum_{i=0}^{n-1} w^{ij} w^{-ik} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{i(j+k)}$$

$$= \frac{w^{n(j-k)} - w^{0(j-k)}}{w^{(j-k)}} = 0 \qquad j \neq k$$

Fact 71 (orthogonality). *Both F and F^{-1} are orthogonal up to certain scaling. Specifically, for any $x \in \mathbb{C}^n$, we have*

$$\|Fx\|_2^2 = \frac{1}{n}\|x\|_2^2 \text{ and } \|F^{-1}x\| = n\|x\|_2^2.$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

سطر j از F^{-1}

ستون i از F

$$\sum_{i=0}^{n-1} w^{ij} w^{-ik} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{i(j+k)}$$

$$= \frac{w^{n(j-k)} - w^{0(j-k)}}{w^{(j-k)}} = 0 \qquad j \neq k$$

$$= n \qquad j = k$$

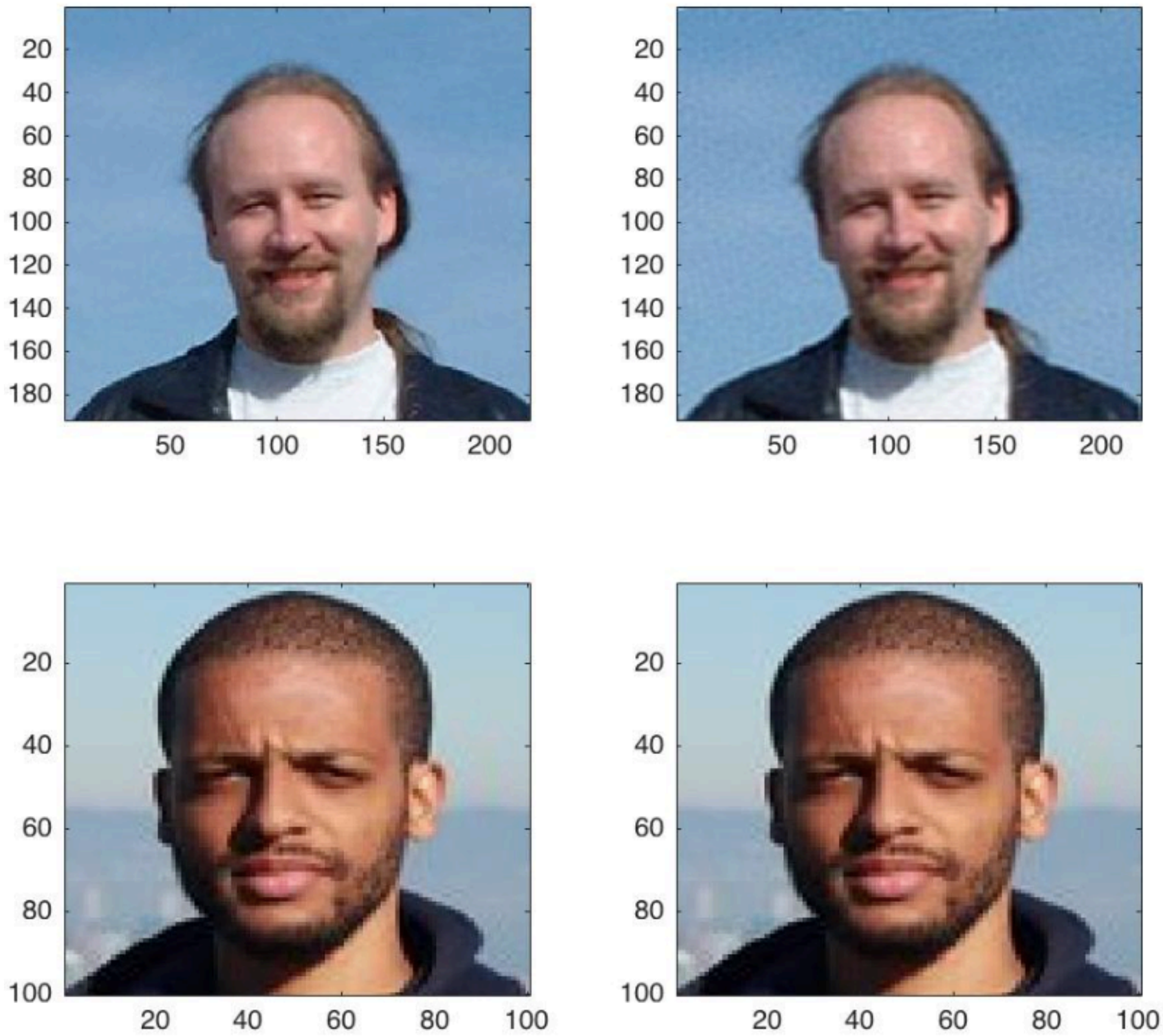
Theorem 72 (time-shift/phase-shift). *Let $a, \hat{a}$ be defined as above and $a', \hat{a}'$ be new signal and the corresponding Fourier coefficients. For any $b = 0, 1, \ldots, n-1$, we have*

$$\forall j = 0, 1, \ldots, n-1,\ a_j^{'} = a_j \omega^{bj} \Leftrightarrow \forall u = 0, 1, \ldots, n-1,\ \hat{a}'_u = \hat{a}_{u-b}.$$

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

کاربرد DFT؟


20
40
60
80
100
120
140
160
180
50
100
150
200
20
40
60
80
100
120
140
160
180
50
100
150
200
20
40
60
80
100
20
40
60
80
100
20
40
60
80
100
20
40
60
80
100

محاسبه سریع DFT؟

روش بدیهی: $O(n^2)$

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

محاسبه سریع DFT؟

Fa

روش بدیهی: $O(n^2)$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

الگوریتم FFT: $O(n \log n)$

محاسبه سریع DFT؟

Fa

روش بدیهی: $O(n^2)$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

الگوریتم FFT: $O(n \log n)$

سوال پژوهشی:

سریع‌تر اگر در فضای فرکانس $(\hat{a})$ تنک باشد؟

$$\log n < k \ll n$$

تبدیل فوریه تنک

تعریف مسئله (تبدیل فوریه تنک):

ورودی: بردار a

هدف: یافتن $\hat{a}'$ که

$$\|\hat{a} - \hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a} - \hat{a}^{(k)}\|_2$$

در زمان: O(k log n)

تبدیل فوریه تنک

تعریف مسئله (تبدیل فوریه تنک):

ورودی: بردار a

هدف: یافتن $\hat{a}'$ که

$$\|\hat{a} - \hat{a}'\|_2 \leq C \cdot \|\hat{a} - \hat{a}^{(k)}\|_2$$

در زمان: O(k log n)

خواندن ورودی O(n)

اصلا شدنی است؟!

k_تنک

(ϵ, Ck)-RIP

$$x \longrightarrow y = \Pi x$$

مسئله کمینه‌سازی l1

$$\|\hat{x}-x\|_1 \leq c(k) \min_{y \text{ is } k-sparse} \|y-x\|_1$$

اصلا شدنی است؟!

$\hat{a} \longleftarrow a = F^{-1}\hat{a}$

k_تنک

(ϵ, Ck)-RIP

$\mathrm{x} \longrightarrow y = \Pi x$

مسئله کمینه‌سازی 11

$$\|\hat{\mathrm{x}}\text{-}\mathrm{x}\|_1 \leq c(k) \min_{y \text{ is } k-sparse} \|\mathrm{y}\text{-}\mathrm{x}\|_1$$

اصلا شدنی است؟!

هر زیر ماتریس F^{-1} با $O(\epsilon^{-2}k\log^4 n)$ سطر

(ϵ,Ck)-RIP

$$\hat{a} \longleftarrow a = F^{-1}\hat{a}$$

k_تنک

(ϵ,Ck)-RIP

$$x \longrightarrow y = \Pi x$$

مسئله کمینه‌سازی 11

$$\|\hat{x}-x\|_1 \leq c(k) \min_{y \text{ is } k-sparse} \|y-x\|_1$$

اصلا شدنی است؟!

هر زیر ماتریس F^{-1} با $O(\epsilon^{-2}k\log^4 n)$ سطر

(ϵ,Ck)-RIP

$$\|\hat{x}\text{-}x\|_1 \le c(k) \min_{y \text{ is } k-sparse} \|y\text{-}x\|_1$$

مسئله کمینه‌سازی 11

$$\hat{a} \longleftarrow a = F^{-1}\hat{a}$$

k_تنک

(ϵ,Ck)-RIP

$$x \longrightarrow y = \Pi x$$

مسئله کمینه‌سازی 11

$$\|\hat{x}\text{-}x\|_1 \le c(k) \min_{y \text{ is } k-sparse} \|y\text{-}x\|_1$$

حالت خاص: k=1

- دو حالت:
- بدون نوفه (نویز):
  - فقط یک $\hat{a}_u$ غیر صفر

بزرگ‌ترین مولفه

حالت خاص: k=1

- دو حالت:
- بدون نوفه (نویز):
  - فقط یک $\hat{a}_u$ غیر صفر
- با نوفه (نویز):
  - هدف: یافتن $\hat{a}'$ که
  - $||\hat{a} - \hat{a}'||_2 \leq C \cdot ||\hat{a} - \hat{a}^{(1)}||_2$

بزرگ‌ترین مولفه

بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

$$a_j = \hat{a}_u \omega^{uj}$$

بدون نوفه (نویز)

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{-\frac{2\pi i}{n}uj}$$

$$\hat{a}_u \neq 0$$

$$\hat{a}_{u'} = 0 \qquad \forall u' \neq u$$

$$a_j = \hat{a}_u \omega^{uj}$$

$$a_0 = \hat{a}_u$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \omega^u$$