

آنالیز الگوریتم‌ها

سری پنجم تمرینات

نیمسال دوم ۹۴-۹۳

مدرس: دکتر هادی فروغمند - دکتر امید میرصادقی
دستیارهای استاد: پرهام افتخار - حسین بومری - لعلیا قدرتی

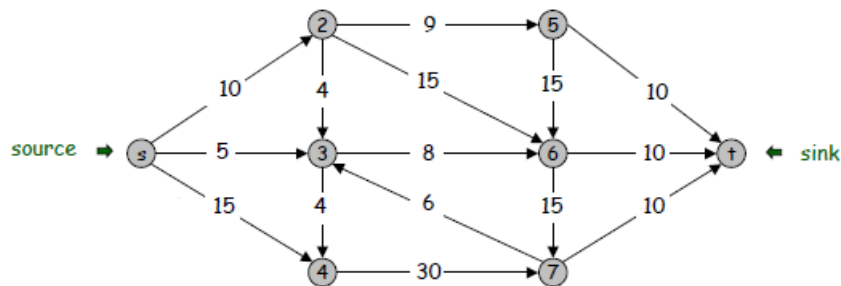
۱. به زیر مجموعه‌ای از راس‌های یک گراف که با حذف آنها یالی در گراف باقی نمی‌ماند پوشش راسی گفته می‌شود. به عبارت دیگر پوشش راسی یک گراف زیر مجموعه‌ای از راس‌های این گراف است که به ازای هر یال از این گراف حداقل یک سر آن در این زیر مجموعه باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(V^3)$ برای پیدا کردن پوشش راسی با اندازه کمینه در گراف دو بخشی ارائه کنید.
۲. مجموعه مستقل راسی در یک گراف به زیر مجموعه‌ای از راس‌های یک گراف گفته می‌شود که هیچ کدام از آن‌ها با یکدیگر یالی ندارند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(V^3)$ برای پیدا کردن یک مجموعه مستقل راسی با اندازه بیشینه در گراف دو بخشی ارائه کنید.
۳. پوشش یالی در یک گراف به زیر مجموعه‌ای از یال‌های آن گراف گفته می‌شود که هر کدام از راس‌های گراف حداقل به یکی از این یال‌ها متصل شده باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(V^3)$ برای پیدا کردن یک پوشش یالی با اندازه کمینه در گراف دو بخشی ارائه کنید.
۴. (امتیازی) احتمالاً پس از حل تمرین‌های قبل به این نتیجه رسیده‌اید که ارتباط نزدیکی میان این مساله‌ها با مساله تطابق بیشینه در گراف دو بخشی وجود دارد. اکنون اگر فرض کنیم که در یک گراف دو بخشی، اندازه تطابق بیشینه با α ، اندازه پوشش راسی کمینه با β ، اندازه مجموعه مستقل بیشینه با γ و اندازه پوشش یالی کمینه با λ مشخص شده باشد، چه رابطه‌ای میان این مقادیر وجود دارد؟
- راهنمایی: بررسی کنید، که در حالت غیر بهینه، آیا تناظری میان جواب هر کدام از این مساله‌ها با دیگری وجود دارد یا خیر.
۵. (امتیازی) مجموعه غالب در یک گراف به زیر مجموعه‌ای از راس‌های آن گراف گفته می‌شود که هر راس بیرون از این زیر مجموعه حداقل یک همسایه داخل آن داشته باشد. در یک گراف دو بخشی، آیا ارتباطی میان مجموعه غالب با اندازه کمینه با مساله تطابق بیشینه وجود دارد؟ در صورتی که جواب مثبت است الگوریتمی برای یافتن آن ارائه کنید.
۶. (امتیازی) فرض کنید مساله‌ای جدید با نام پوشش راسی تک طبقه به یک پوشش راسی در گراف گفته می‌شود که تمام راس‌های از یک طبقه انتخاب شده‌اند. آیا برای پیدا کردن پوشش راسی

تک طبقه با اندازه کمینه می‌توان از الگوریتم تطابق بیشینه در گراف دوبخشی استفاده کرد؟ آیا می‌توانید الگوریتمی چند جمله‌ای برای این مساله ارائه کنید؟

۷. با دانش نسبت به اینکه مساله‌ی SAT یک مساله‌ی $NP - COMPLETE$ است، نشان دهید که مساله‌ی $3SAT$ نیز یک مساله‌ی $NP - COMPLETE$ است.

راهنمایی: سعی کنید مساله‌ی SAT را به صورت یک مدار منطقی با گیت‌های با دو ورودی در بیاورید. سپس سعی کنید گیت‌های منطقی را با گزاره‌های $3SAT$ بنویسید.

۸. در گراف شکل ۱ شار بیشینه و برش کمینه را محاسبه و مشخص کنید.



شکل ۱: گراف مربوط به تمرین ۸.

۹. (امتیازی) فرض کنید به مساله‌ی محاسبه شار بیشینه در یک گراف این محدودیت را افزوده‌ایم:

به هر راس، مانند v ، در گراف یک ظرفیت c_v که عددی نامنفی است اختصاص داده‌ایم. اکنون به دنبال محاسبه شار بیشینه میان دو راس از این گراف هستیم، که در آن جریان عبور کرده از هر راس مانند v بیشتر از c_v نباشد. با کمک الگوریتم محاسبه شار بیشینه راه‌حلی برای این مساله ارائه کنید.

۱۰. (امتیازی) اگر در مساله‌ی شار بیشینه میان دو راس در گراف، به هر راس v یک مقدار حداکثر ظرفیت c_v نیز تعریف کرده باشیم، الگوریتمی چندجمله‌ای برای حل این مساله ارائه کنید.

۱۱. با کمک الگوریتم محاسبه‌ی شار بیشینه در گراف (یا همان برش کمینه در گراف) الگوریتمی برای محاسبه‌ی تطابق بیشینه در گراف ارائه دهید.

۱۲. (امتیازی) مشتری‌های یک شرکت انفورماتیک تعدادی پروژه به این شرکت پیشنهاد داده‌اند. هر کدام از این پروژه‌ها برای مشتری‌های این شرکت ارزشی دارد و در صورتی که این شرکت هر کدام از این پروژه‌ها، مانند p ، را انجام دهد، مشتری به این شرکت مقدار c_p معادل با ارزش آن پروژه پرداخت می‌کند. اما این شرکت برای انجام هر کدام از این پروژه‌ها، مانند p ، نیازمند در اختیار داشتن مجموعه‌ای از ابزارها، مانند $S(p)$ ، است و این پروژه تنها با در اختیار داشتن این ابزارها قابل انجام است. هزینه تهیه‌ی هر کدام از این ابزارها، مانند t معادل c_t است (هر کدام از پروژه‌ها و ابزارها مقدار متناظر به خود را دارند و این مقدار لزوماً یکسان نیست). به علاوه به ازای هر پروژه، لیست ابزارهای مورد نیاز آن را در اختیار داریم. یک ابزار ممکن است برای انجام چند پروژه مورد

نیاز باشد، اما تهیه یکی از آن‌ها نیاز تمام پروژه‌ها به این ابزار را رفع می‌کند. الگوریتمی برای این مساله ارائه کنید که با دریافت تمام این مقادیر، بیش‌ترین درآمد قابل کسب توسط این شرکت را محاسبه کند. به علاوه تعیین کند که این شرکت باید کدام پروژه‌ها را انتخاب کند تا به این درآمد دست پیدا کند (منظور از درآمد مقدار دریافتی شرکت از مشتری‌ها با انجام پروژه‌ها پس از کسر هزینه‌ی مورد نیاز برای تهیه ابزارهای مورد نیاز برای انجام این پروژه‌ها است).
راهنمایی: از مساله برش کمینه کمک بگیرید.