دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی خطی ۴ آبان ۱۳۹۸

تمرین سری سوم

تعریف: $x_1, ..., x_n$ مستقل آفینی $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (لااقل یکی ناصفر) وجود نداشته باشند به طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

۱ اگر تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی محدب و $f(0) \leq 0$ ، در این صورت نشان دهید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(a) + f(b) \leq f(a + b)$$

(به این خاصیت در ریاضی superadditivity می‌گویند.)

۲ فرض کنید $C \subset R^n$ یک مجموعه‌ی محدب باشد و A ماتریس در $R^{m\times n}$. نشان دهید $\{Ax|x \in C\}$ نیز مجموعه‌ای محدب است.

۳ جمع مینکوفسکی دو مجموعه به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$A + B := \{x + y|x \in A, y \in B\}$$

فرض کنید A, B محدب باشند. نشان دهید:

۱. $A + B$ نیز محدب است.

۲. هر راس $A + B$ را می‌توان بصورت جمع رئوس A و B نوشت.

۴ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^n$ شامل حداقل $n + 2$ نقطه را می‌توان به ۲ بخش افراز کرد به طوری که پوش محدب آنها اشتراک داشته‌باشد.
(راهنمایی: از استقلال آفینی استفاده کنید)

۵ تعداد وجوه k-بعدی چندوجهی صلیبی n-بعدی را محاسبه کنید. تعریف این چندوجهی به صورت زیر است:

$$x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + ... + |x_n| \leq 1$$

۶ هر پولی‌هدرون کراندارد یک پولی‌توپ است و بالعکس:

الف) $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید پولی‌توپ $P = convex.hull(x_1, ..., x_m)$ یک پولی‌هدرون کراندار است.
(یعنی $A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k$ وجود دارند بطوری که: $P = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \leq b\}$ می باشد.)

ب)پولی‌هدرون $Q = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \leq b\}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید Q کراندار باشد. نشان دهید Q پولی‌توپ است.
(یعنی $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند بطوری که $Q = convex.hull(x_1, ..., x_m)$.)

۷ نگاشت f را آفین می‌گویند اگر به فرم $f(x) = Ax + b$ که A ماتریس و b یک بردار باشد. فرض کنید P و Q دو پولی‌هدرون در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند. می‌گوییم P و Q یکریخت هستند اگر تبدیل‌های آفین $f : P \mapsto Q$ و $g : Q \mapsto P$ وجود داشته باشند که $g(f(x)) = x, \forall x \in P$ و $f(g(y)) = y, \forall y \in Q$.

الف. ثابت کنید اگر P و Q یکریخت باشند، بین گوشه‌های آن‌ها تناظر یک به یک برقرار است. به عبارتی x یک گوشه در P است اگر و تنها اگر $f(x)$ یک گوشه در Q باشد.

ب. فرض کنید $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b, x \geq 0\}$ که A ماتریسی با ابعاد $k \cdot n$ است.

هم‌چنین $Q = \{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+k} | Ax - z = b, x \geq 0, z \geq 0\}$.

ثابت کنید P و Q یکریخت هستند.

۸ (قضیه‌ی Caratheodory)

فرض کنید $A_1, ..., A_n$ بردارهایی در $\mathbb{R}^m$ باشند.

الف) داریم:

$$C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i | \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

نشان دهید هر عضو C می‌تواند به صورت $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ نمایش داده شود به طوری که $\lambda_i \geq 0$ ، و حداکثر m تا از ضرایب λ_i ناصفر باشند.

راهنمایی: پولی‌هدرون زیر را در نظر بگیرید:

$$\Lambda = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}.$$

ب) فرض کنید P پوش محدب بردارهای A_i باشد. نشان دهید هر عضو P می‌تواند به صورت $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ نمایش داده شود به طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ و برای هر i ، $\lambda_i \geq 0$ که حداکثر $m+1$ تا از ضرایب λ_i ناصفر باشند.

۹ اگر A و B دو مجموعه‌ی محدب در صفحه باشند که $A \subseteq B$ ، آیا لزوما محیط $B \leq$ محیط A ؟