دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

# تحقیق در عملیات ۱

**محمدهادی فروغمنداعرابی**
پاییز ۱۳۹۹

# چندوجهی محدب و تعریف راس

جلسه ششم

**نگارنده: بردیا آریان فرد**

در انتهای جلسه‌ی قبل، قضیه‌ای بیان شد که اکنون به اثبات آن می‌پردازیم.

## ۱ اثبات قضیه

**قضیه ۱.** *در برنامه‌ریزی خطی*[1] *زیر:*

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T x \\ \text{که} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

*۱ـ اگر مسئله جواب شدنی داشته‌باشد و تابع هدف از بالا کران‌دار باشد، جواب بهینه دارد.*
*۲ـ اگر مسئله جواب بهینه داشته‌باشد، جواب پایه‌ای شدنی*[2] *بهینه دارد.*

*اثبات.* برای اثبات این قضیه ثابت می‌کنیم به ازای هر جواب شدنی $x$ یک جواب شدنی پایه‌ای مانند $x^*$ وجود دارد که $c^T x \leq c^T x^*$. فرض کنید $x^*$ یک جواب شدنی با مقدار تابع هدف بزرگتر مساوی $x$ با بیشترین تعداد صفر است. حال، نشان می‌دهیم که $x^*$ یک جواب پایه‌ای شدنی است. این گزاره را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x^*$ پایه‌ای نیست. مجموعه‌ی ستون‌های غیر صفر $x^*$ را $L$ می‌نامیم. $A_L$ دو حالت دارد:

[1] Linear program
[2] Basic Feasible Solution

۱ـ اگر ستون‌های $A_L$ مستقل خطی باشند $x^*$ شدنی پایه‌ای می‌شود که این تناقض است و از تناقض مذکور حکم ثابت می‌شود.
۲ـ اگر ستون‌های $A_L$ مستقل خطی نباشند، یک ترکیب خطی مانند $y$ از $A$ وجود دارد که $A_L y = 0$ و $y$ فقط در ستون‌های $A_L$ می‌تواند ناصفر باشد یا به عبارت دیگر $y_i \neq 0 \implies x_i^* \neq 0$. پس می‌توان گفت:

$$A(x^* + ty) = Ax^* + tAy = Ax^* + 0 = Ax^* = b$$

پس $x^* + ty$ها از نظر معادله‌ها جواب شدنی‌اند ولی ممکن است بزرگتر مساوی صفر نباشند. حال، تابع هدف را در این نقطه در نظر بگیرید:

$$c^T(x^* + ty) = c^T x^* + tc^T y$$

پس مقدار تغییر آن نسبت به مقدارش در $x^*$ برابر است با $tc^T y$. اگر $c^T y = 0$ باشد، از آن‌جا که $y \neq 0$ حداقل یک مؤلفه‌ی ناصفر مانند $y_i$ دارد و می‌دانیم $x_i^* \neq 0$ پس می‌توانیم $t$ را طوری تغییر دهیم که $x_i^* + ty_i = 0$. از طرفی از آن‌جا که می‌دانیم در تمامی مؤلفه‌های برابر صفر در $x_i^*$ ، $y_i$ هم صفر است، این تغییر در $t$ باعث ناصفر شدن مؤلفه‌ای که در $x^*$ صفر بوده نیز نمی‌شود پس $x^* + ty$ تعداد صفرهای بیشتری دارد و مقدار تابع هدف نیز در آن برابر با مقدار تابع هدف در $x^*$ است. که این با فرض ( $x^*$ بیشترین تعداد صفر را دارد) در تناقض است. اگر هم $c^T y \neq 0$ باشد، بدون تغییر در کلّیّت مسئله می‌توان فرض کرد که $c^T y > 0$ (چرا که در غیر این صورت می‌توانیم به جای $y$، $-y$ را در نظر گرفت). حال می‌دانیم که با بیشتر کردن مقدار $t$ می‌توان مقدار تابع هدف را زیاد کرد که این کار با معادله‌ها تناقضی ندارد امّا ممکن است باعث منفی شدن $y$ شود. لذا، می‌توانیم $t$ را تا جایی تغییر دهیم که یکی از مؤلفه‌های $x^* + ty$ صفر شود. در این صورت $x^* + ty$ هم صفرهای بیشتری دارد و هم مقدار تابع هدف در آن بزرگتر است. (تناقض)
از تناقض‌هایی که در هر حالت مشاهده کردیم حکم ثابت می‌شود. همچنین این اثبات، علاوه بر اثبات حکم، روند رسیدن به جواب پایه‌ای شدنی‌ای که جواب مسئله است را با شروع از هر جواب شدنی، به ما نشان می‌دهد. □

# ۲ چند تعریف

## ۱.۲ مجموعه‌های محدب

مجموعه‌های محدب [3] ، به مجموعه‌هایی مانند $S$ گفته می‌شود که برای هر دو نقطه مانند $x$ و $y$ تمامی نقاط بین $x$ و $y$ (پاره‌خط بین آن دو) نیز تماماً داخل مجموعه قرار بگیرد. به عبارت دیگر:

$$\forall x, y \in S, t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in S$$

**نکته.** این نوع ترکیب‌های خطی، ترکیب‌های محدب [4] نام دارند.

## ۲.۲ توابع محدب

$f$ تابعی محدب [5] است، اگر:

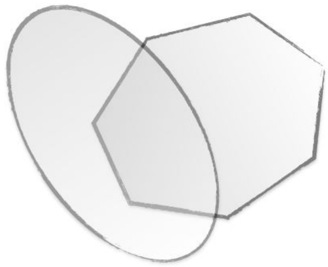
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

در واقع، این تعریف به این معناست که مقدار تابع $f$ در هر نقطه‌ای بین $x$ و $y$، پایین خط بین دو نقطه‌ی $(x, f(x))$ و $(y, f(y))$ است. برای مثال، تابع خطی نیز تابعی محدب است.
**نکته.** می‌توان ثابت کرد یک تابع محدب است، اگر و تنها اگر اپیگراف آن (شکل حاصل از رنگ کردن پایین یا بالای منحنی) یک مجموعه‌ی محدب باشد.

**قضیه ۲.** *اجتماع دو مجموعه‌ی محدب لزوماً محدب نیست (مانند شکل ۱ ) ولی اشتراک دو مجموعه‌ی محدب، مجموعه‌ای محدب است.*

*اثبات.* اثبات محدب بودن اشتراک دو مجموعه‌ی محدب، به سادگی از روی رابطه‌ی مطرح شده در تعریف مجموعه‌های محدب امکان‌پذیر است. چرا که هر نقطه‌ای روی پاره‌خط بین دو نقطه‌ی $x$ و $y$ در اشتراک دو مجموعه، به دلیل محدب بودن هر دو مجموعه، در هر دوی آن‌ها و در نتیجه در اشتراکشان وجود دارد. □

[3] Convex sets
[4] Convex combinations
[5] Convex function



شکل ۱: اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی محدب

# ۳ توصیف‌های مختلف چندوجهی‌ها

## ۱.۳ توصیف با وجوه

هر ابرصفحه با معادله‌ی

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

کل فضا را به دو نیم‌فضا به نحو زیر تقسیم می‌کند (هر دو شامل خود ابرصفحه هستند) :

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b\}$$

که این دو نیم‌فضا محدب هستند. این قضیه با جمع زدن نامعادله برای دو نقطه‌ی $x$ و $y$ در یکی از دو نیم‌فضا (بدون تغییر در کلّیّت مسئله $S_1$ ) اثبات می‌شود:

$$a_1(tx_1 + (1-t)y_1) + a_2(tx_2 + (1-t)y_2) + ... + a_n(tx_n + (1-t)y_n) \leq tb + (1-t)b = b$$

**اشتراک تعداد متناهی از زیرفضاها در $\mathbb{R}^n$ را چندوجهی محدب [6] می‌نامیم.**
از آن‌جا که طبق این تعریف، چندوجهی‌های محدب لزوماً کران‌دار نیستند، به چندوجهی‌های محدب کران‌دار (چندوجهی‌هایی که گویی وجود دارد که در آن جا شوند) **چندسطحی محدب** هم می‌گوییم.

## ۲.۳ توصیف با رئوس

نقاطی که تمامی شکل یک طرف آن‌ها قرار بگیرد را رأس می‌نامیم. یعنی ابرصفحه‌ای گذرنده از آن نقطه وجود دارد که تمام شکل یک طرف آن قرار بگیرد و اگر $c$ بردار عمود بر آن ابرصفحه باشد، می‌توان گفت $x$ یک رأس $S$ است اگر و تنها اگر:

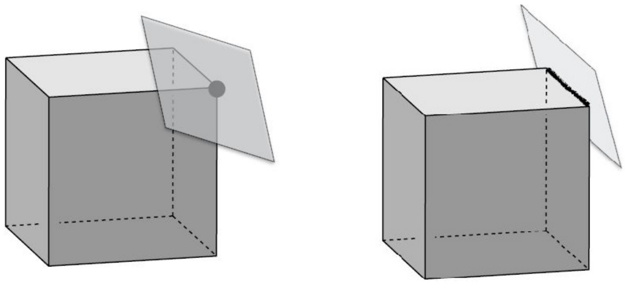
$$\exists c \in \mathbb{R}^n : \forall y \in S \setminus \{x\} : c^T.y < c^T.x$$

به همین شکل می‌توان وجه را تعریف کرد. اگر در یک زیرفضا از چندوجهی، ضرب داخلی یک بردار $c$ در نقاط آن برابر یکدیگر و اکیداً بیشتر از ضرب داخلی $c$ در باقی نقاط چندوجهی بود، به آن زیرفضا یک وجه می‌گوییم. برای مثال، یک رأس، یک وجه صفر بعدی و یک یال، یک وجه یک بعدی است. (شکل ۲)

# ۴ رئوس و جواب‌های پایه‌ای شدنی

به طور شهودی می‌توان گفت ارتباط رئوس (که تعبیری هندسی هستند) و جواب‌های پایه‌ای شدنی که با توجه به مجموعه‌ی جواب‌های شدنی به طور یکتا تعیین می‌شدند، به ما کمک خواهد کرد.

[6] Convex polyhedron



شکل ۲: مثالی از وجه یک بعدی (یال) و صفر بعدی (رأس)

**قضیه ۳.** *فرض کنید $P$ مجموعه‌ی جواب‌های شدنی یک برنامه‌ریزی خطی در فرم معادله‌ای است (در نتیجه $P$ یک چندوجهی محدب و برنامه‌ریزی خطی به شکل $Ax = B, x \geq 0$ است). در این صورت دو گزاره‌ی زیر برای هر $v \in P$ معادل هستند:*

**۱ـ** *$v$ یک رأس است.*

**۲ـ** *$v$ یک جواب پایه‌ای شدنی است.*

*اثبات.* اثبات این قضیه دو قسمت اصلی دارد:

الف) اگر $v$ رأس باشد آنگاه یک جواب پایه‌ای شدنی است.
می‌دانیم که $v$ رأس است پس برداری مانند $c$ وجود دارد که ضرب داخلی آن در $v$ اکیداً بزرگتر از ضرب داخلی آن در باقی نقاط $P$ است. حال، تابع هدف را برابر $c^T x$ قرار می‌دهیم. از طرفی ثابت کردیم که برای هر جواب شدنی مانند $x$، یک جواب پایه‌ای شدنی مانند $y$ وجود دارد که مقدار تابع هدف در $y$، بیشتر یا مساوی جواب آن در $x$ است. پس اگر قرار دهیم $x = v$ ، می‌توان دید که با توجه به تعریف $c$ بر اساس $v$، $y$ باید برابر $v$ باشد چرا که در غیر این صورت مقدار تابع هدف در آن اکیداً کمتر از مقدارش در $x$ می‌شود. لذا، $v$ که برابر $y$ است، یک جواب پایه‌ای شدنی است.

ب) اگر $x^*$ یک جواب پایه‌ای شدنی باشد، یک رأس است.
با توجه به تعریف جواب پایه‌ای شدنی، می‌دانیم که مجموعه‌ای مانند $B$ وجود دارد که $x^*$ در اندیس‌های خارج از $B$ صفر است و $A_B$ مستقل خطی است. حال، $c$ را طوری ارائه می‌کنیم که $c^T x^*$ فقط در $x^*$ بیشینه است. فرض کنید $c$ به نحو زیر باشد:

$$c_i = \begin{cases} -1 & i \notin B \\ 0 & i \in B \end{cases}$$

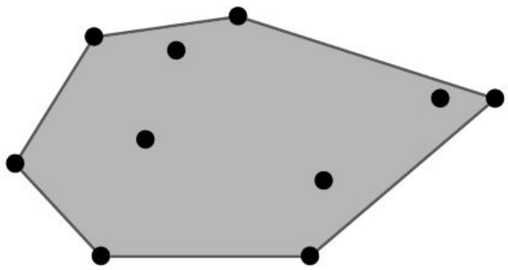
$c^T x^*$ در این نقطه ماکسیمم است چرا که در تمامی مؤلفه‌های خارج از $B$، $x^*$ برابر ۰ است پس $c^T x^* = 0$ و از آن‌جایی که $x_i \geq 0$ و تمامی مؤلفه‌های $c$ نامثبت هستند، تابع هدف در تمامی نقاط نامنفی است. از طرفی $x$ تنها جواب شدنی بیشینه است، چرا که اگر یک جواب شدنی مانند $y$ وجود داشته‌باشد که $c^T y = c^T x^* = 0$ باشد، آنگاه $y$ باید خارج از $B$ صفر باشد و از طرفی هم می‌دانیم که به دلیل مستقل خطی بودن $A_B$، یک جواب شدنی در $B$ یکتا مشخص می‌شود [۲] ، پس $y = x^*$. □

# ۵ پوش محدب

## ۱.۵ تعریف هندسی

پوش محدب [7] تعدادی نقطه، برابر است با کوچکترین مجموعه محدبی که تمامی نقاط درون آن قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، پوش محدب اشتراک تمامی مجموعه‌های محدبی است که شامل تمامی نقاط هستند؛ چرا که هم اشتراک همه‌ی مجموعه‌ها زیر مجموعه‌ی کوچکترین مجموعه است و از طرفی هم اشتراک نمی‌تواند کوچکتر از کوچکترین مجموعه باشد، چون خودش محدب است و این با کوچکترین بودن آن مجموعه در تناقض است. برای شهود بیشتر می‌توان این طور فرض کرد که پوش محدب شکل حاصل از رها کردن یک کش دور نقاط است. (مانند شکل ۳)

[7] Convex hull



شکل ۳: پوش محدب نقاط سیاه را می‌توانید در شکل مشاهده کنید.

### ۲.۵ تعریف با ترکیب محدب

پوش محدب را می‌توان به صورت مجموعه‌ی تمامی ترکیب‌های محدب نقاط در نظر گرفت:

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + ... + t_mx_m \qquad t_1, t_2, ..., t_m \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{m} t_i = 1$$

برای مثال، اگر قرار دهیم $t_i = 1$ و $(\forall i \neq j) t_j = 0$ خود نقطه‌ی $x_i$ حاصل می‌شود.

حال، ثابت می‌کنیم که دو تعریف مذکور برای پوش محدب، با یکدیگر معادل هستند.

***قضیه:*** پوش محدب $C$ برای مجموعه‌ی نقاط $X \subseteq \mathbb{R}^n$ با مجموعه‌ی $\tilde{C}$ زیر برابر است.

$$\tilde{C} = \{\sum_{i=1}^{m} t_ix_i : m \geq 1, x_1, x_2, ..., x_m \in X, t_1, t_2, ..., t_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1\}$$

**اثبات:** این قضیه را در دو بخش اثبات می‌کنیم.

**الف)** $C \subseteq \tilde{C}$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\tilde{C}$ محدب و شامل نقاط است. شامل نقاط بودن $\tilde{C}$ را نشان دادیم ( $t_i = 1$ ) و برای اثبات محدب بودن کافی است نشان دهیم که به ازای هر $x, y \in \tilde{C}$ و $t \in [0, 1]$ ، $tx + (1-t)y \in \tilde{C}$ ، که این قضیه با نوشتن روابط به سادگی اثبات می‌شود. از طرفی هم $C$ برابر است با اشتراک تمامی مجموعه‌های محدب شامل نقاط $X$ و در نتیجه زیرمجموعه‌ی تمامی مجموعه‌های محدب شامل $X$ است. لذا، $C \subseteq \tilde{C}$ .

**ب)** $\tilde{C} \subseteq C$

برای اثبات این بخش، ثابت می‌کنیم تمامی ترکیب‌های محدب نقاط $X$ باید عضو تمامی مجموعه‌های محدب شامل تمام نقاط $X$ باشد.این ادعا را با استقرا روی $m$ ثابت می‌کنیم:

پایه: به ازای $m = 1$ حکم به وضوح برقرار است.

فرض: حکم به ازای تمامی مجموعه‌های $X'$ با تعداد اعضای کمتر از $X$ برقرار است.

گام: مجموعه‌ی $X' = X \setminus x_m$ در فرض استقرا صدق می‌کند. لذا، هر ترکیب محدب آن نقاط در تمامی مجموعه‌های محدب شامل آن‌ها قرار می‌گیرد. حال، ترکیب محدب زیر از نقاط $X$ را در نظر بگیرید:

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_ix_i$$

از روی آن ترکیب محدب زیر را از نقاط $X'$ را می‌سازیم:

$$x' = \sum_{i=1}^{m-1} t'_ix_i \quad , \quad t'_i = \frac{t_i}{1-t_m} \ \ (1 \leq i < m)$$

طبق فرض استقرا می‌دانیم که $x'$ درون تمام مجموعه‌های محدب شامل $X'$ و در نتیجه درون تمام مجموعه‌های محدب شامل $X$ قرار دارد. پس از آن‌جا که خود $x_m$ هم در تمامی مجموعه‌های محدب شامل $X$ قرار دارد، تمامی ترکیب‌های محدب $x'$ و $x_m$ نیز درون آن‌ها قرار دارد. در نتیجه برای اثبات حکم، کافی است نشان دهیم $x$ ترکیبی محدب از $x'$ و $x_m$ است:

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_ix_i = ((1-t_m)\sum_{i=1}^{m-1} t'_ix_i)) + t_mx_m = (1-t_m)x' + t_mx_m$$

لذا، هر ترکیب محدب از $X$ مانند $x$ نیز درون تمامی مجموعه‌های محدب شامل $X$ و در نتیجه پوش محدب $X$ قرار می‌گیرد.

## مراجع

[1] Bernard Gärtner and Jirí Matoušek. *Understanding and using linear programming.* Springer, 2007.

[۲] جزوه‌ی جلسه‌ی ۵