

برای حل این آزمونک می‌توانید از جزوه و کتاب استفاده کنید اما نمی‌توانید از مطالب دیگر در اینترنت استفاده کنید و نمی‌توانید با دیگران مشورت کنید.

۱ خورده سوال‌ها

(۱ نمره)

(۱ نمره)

آیا ادعای زیر درست است؟ چرا؟ (در یک خط)
اگر هر $2r$ ستون A مستقل باشند، آن‌گاه مجموعه قیدهای زیر حداکثر یک جواب دارد:

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & Ax = b, \\ & \|x\|_0 = r, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

۲ صحیح بودن گوشه‌ها

(۳ نمره)

برای کدام یک از ماتریس‌های زیر به جای A ، همه نقاط گوشه‌ای قیدهای زیر صحیح هستند؟ اگر نقاط گوشه‌ای ماتریس مربوطه صحیح هستند، در یک خط توضیح بدهید چرا، وگرنه یک مثال نقض ارائه کنید با ارائه A و b .

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

(۱ نمره) ماتریس مجاورت یک گراف بدون جهت

(ب) (۱ نمره) ماتریس وقوع گراف بدون جهت

(ج) (۱ نمره) ماتریسی که در هر سط و ستون حداکثر یک عنصر غیرصفر دارد.

۳ جریان الکتریکی

(۵ نمره)

فرض کنید یک مدار الکتریکی به صورت یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ به ما داده شده که از اتصال یک سری مقاومت یک‌طرفه با مقاومت یک واحدی تشکیل شده است. یک مقاومت یک‌طرفه که از یک مقاومت و یک دیود تشکیل شده تنها در یک جهت جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهد. در این مدار بین دو محل اتصال s و t جریانی به اندازه یک واحد برقرار کرده‌ایم. جریان در این مدار از قانون کریشف تبعیت می‌کند، یعنی به جز در راس‌های s و t ، در هر راسی مجموع جریان ورودی با خروجی برابر است. می‌دانیم جریان الکتریکی به صورتی از مقاومت‌های یک‌طرفه رد می‌شود که انرژی کمینه شود. انرژی یک جریان در مدار برابر است با

$$\sum_{e \in E} i_e^2$$

که i_e جریانی است که از مقاومت یک‌طرفه (یال) e می‌گذرد.

(۲ نمره) یک برنامه‌ریزی محدب بنویسید که جریان الکتریکی این مدار را نمایش دهد.

(ب) (۲ نمره) شرط KKT (Karush-Kuhn-Tucker) را برای برنامه‌ریزی خود بنویسید. حواستان باشد که ممکن است شرط شامل بیش از دو نوع معادله باشد.

(ج) (۱ نمره) آیا الگوریتمی برای حل این برنامه‌ریزی در زمان چندجمله‌ای وجود دارد؟ (فقط بله و خیر پاسخ دهید)

۴ بهینه

(۵ نمره)

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Ax\|_\infty \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in S_i} x_j \geq 1, \forall i \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

در عبارت بالا $T \cdot 1$ برداری است که همه اعدادش T است، و A ماتریسی است که تمام درایه‌هایش نامنفی هستند و برای هر بردار x ، تعریف می‌کنیم $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$.

فرض کنید می‌خواهیم جواب صحیح برای برنامه‌ریزی بالا پیدا کنیم.

فرض کنید الگوریتم H را داریم که با گرفتن یک جواب x^* برای نسخه آرام‌سازی شده مسئله، یک جواب صحیح برای برنامه‌ریزی بالا تولید می‌کند که

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_F \cdot \|Ax^*\|_\infty$$

در عبارت بالا $\|A\|_F$ برای ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_i \sum_j |A_{i,j}|^2}$$

می‌خواهیم با استفاده از الگوریتم H بهترین جواب صحیح که می‌توانیم برای برنامه‌ریزی را تولید کنیم. برای این کار برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Ax\|_\infty \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in S_i} x_j \geq 1, \forall i \\ & x_j = 0, \forall j, \exists i : a_{i,j} > T \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

(آ ۱ نمره) نشان دهید با افزایش T جواب برنامه‌ریزی خطی بالا کاهشی است.

(ب ۲ نمره) با استفاده از تابع H ، روشی ارائه کنید که با صفر کردن برخی عناصر ماتریس A جوابی مانند x تولید کند که از $\|A\|_F \cdot \|Ax^*\|_\infty$ ارئه کند. (احتمالاً بهتر باشد. اگر همه عناصر A غیر صفر باشند، روش شما باید تضمین بهترین از $\|A\|_F \cdot \|Ax^*\|_\infty$ ارائه کند.

(ج ۲ نمره) الگوریتمی چند جمله‌ای ارائه کنید که مقدار T را طوری پیدا کند که روش ارائه شده در قسمت قبل، بهترین تضمین را ارائه کند.

۵ یادگیری برخط

(۵ نمره)

فرض کنید گراف کامل دوبخشی G با دو بخش X و Y داده شده و عدد نامنفی $w_{i,j} \in \{0, 1, \dots, M\}$ وزن یال بین راس i از بخش X و راس j از بخش Y را نشان می‌دهد.

(آ ۰ نمره) برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی شده تطابق وزن دار کامل کمینه را بنویسید. توجه کنید برای اینکه برنامه‌ریزی خطی شما به صورت برنامه‌ریزی خطی مطرح شده در بیاید باید شکل معادله‌های شما به صورت $Ax \geq b$ باشد. توجه کنید که اینجا هم لازم نیست نامعادله‌ای اضافه کنید!

(ب ۲ نمره) اگر بخواهیم با روش حل برنامه‌ریزی خطی با MWU این برنامه‌ریزی را حل کنیم، دانای کل باید چه مسئله‌ای را حل کند؟

(ج ۱ نمره) نشان دهید همیشه دانای کل می‌تواند یک یال را به عنوان پاسخ برگرداند.

(د ۱ نمره) مقدار عرض پاسخ دانای کل (ρ) را برای دانای کل خود محاسبه کنید.

(ه ۱ نمره) پس از چند مرحله اجرای الگوریتم چه تضمینی در مورد فاصله جواب الگوریتم با جواب بهینه وجود دارد؟

۶ طراحی آزمایش – جبرانی میان ترم

()

فرض کنید n نمونه از n نفر دریافت کرده‌ایم که مشکوک به کرونا هستند. می‌دانیم که از این میان حداکثر ۱ درصدشان کرونا دارند. آن‌هایی که کرونا دارند در نمونه‌شان به میزان بیشتر از صفر ویروس کرونا وجود دارد و در افرادی که کرونا ندارند هیچ ویروس کرونایی وجود ندارد. می‌خواهیم با کمتر از n آزمایش افرادی را که کرونا دارند پیدا کنیم. فرض کنید می‌توانیم یک نمونه را به هر صورتی تقسیم کنیم و با هم ترکیب کنیم و با یک آزمایش می‌توانیم تعداد ویروس‌های آن نمونه را به دست بیاوریم.

فرض کنید می‌توانیم ماتریسی از اعداد نامنفی را پیدا کنیم که m سطر و n ستون دارد و هر n ستون آن از هم مستقل باشند.

آ (۴ نمره) شما روشی ارائه کنید که آزمایشگاه چگونه نمونه‌ها را با هم ترکیب کند تا بتوانیم با تعداد کمی آزمایش افراد کرونایی را پیدا کنیم؟

ب (۲ نمره) از نتایج به دست آمده آزمایش‌ها چگونه نتایج کرونا را به دست می‌آورید؟

ج (۱ نمره) زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟

موفق باشید.