

بسم الله الرحمن الرحيم

جلسه بیست و دوم

خلاصه سازی برای مهداده

مرور: توصیف دنیای مسئله

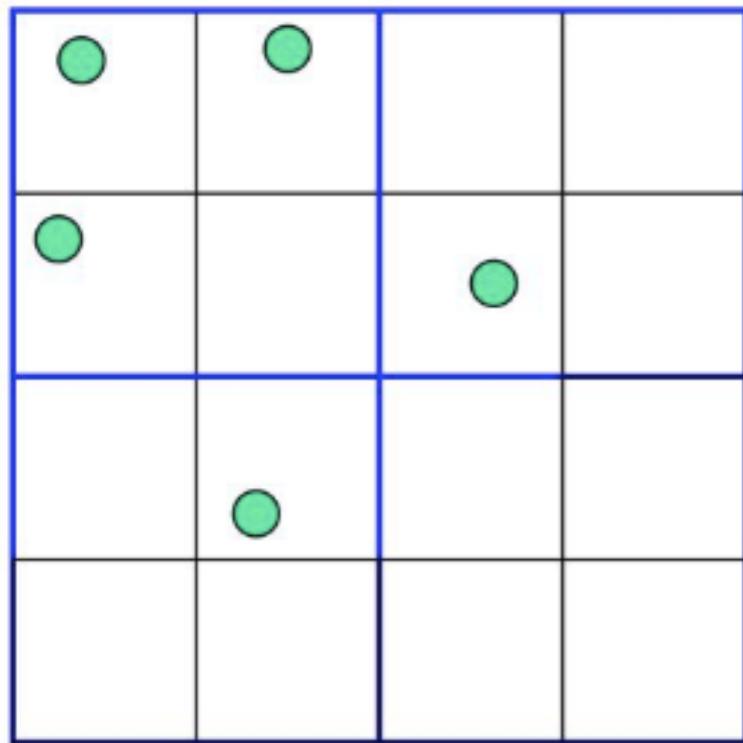
- ورودی: جویباری از نقاط در صفحه
- حذف و اضافه
- خروجی: تقریب یک خاصیت
 - ۱) قطر نقاط 
 - ۲) زیردرخت فراگیر کمینه
 - ۳) تطابق کمینه
 - ۴) تطابق دو-رنگ

درخت چهارتایی



درخت چهارتایی

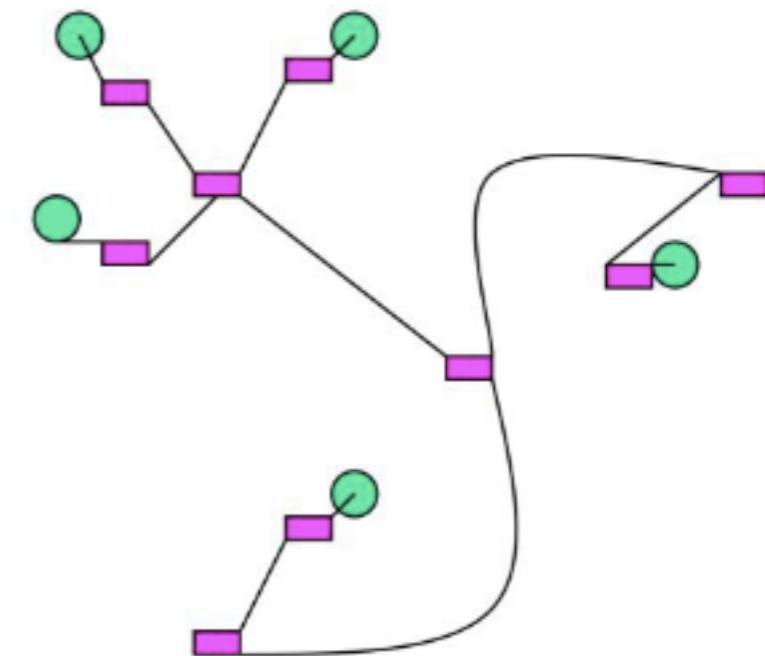
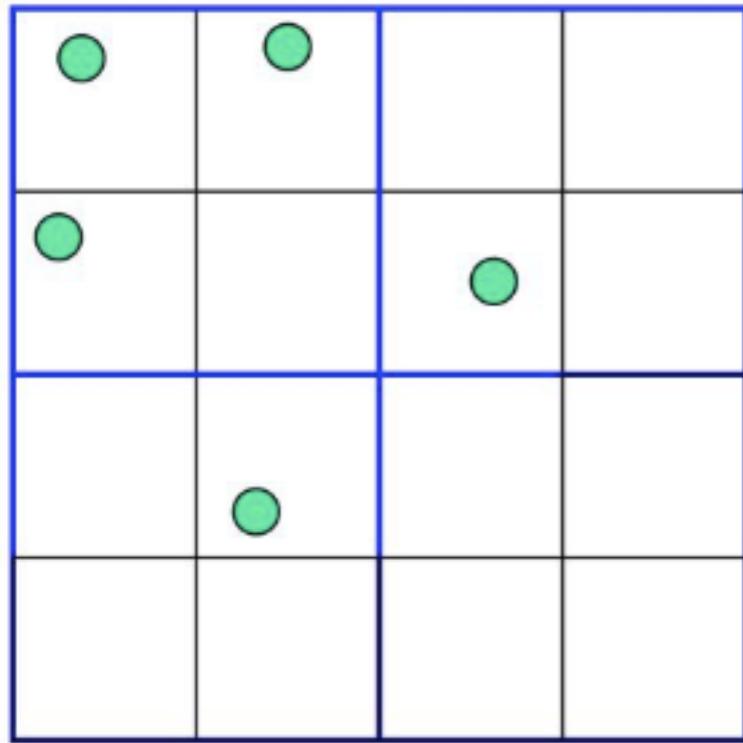
قطرها: $2^0, \dots, 2\Delta$



— هر مربع به ۴ زیرمربع
— اگر بیش از یک نقطه

درخت چهارتایی

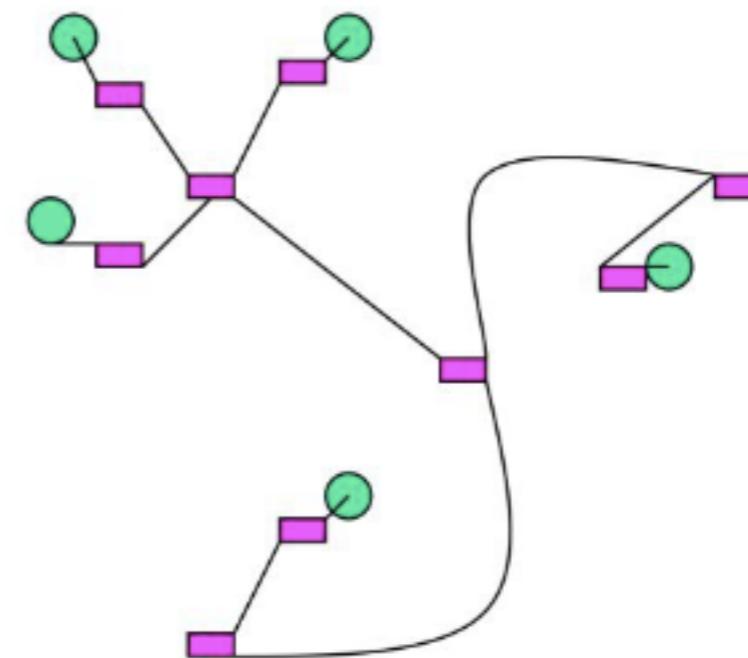
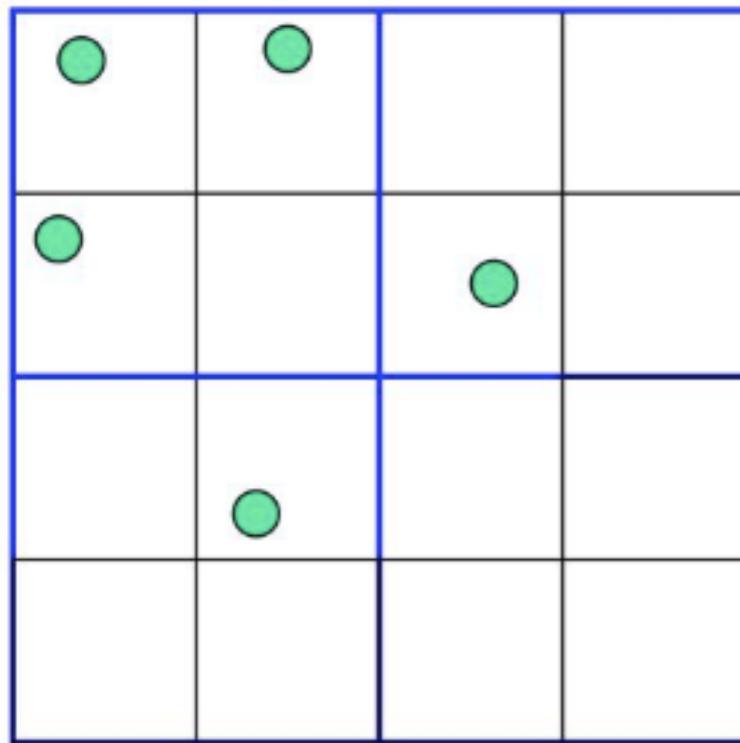
قطرها: $2^0, \dots, 2\Delta$



- هر مربع به ۴ زیرمربع
— اگر بیش از یک نقطه

درخت چهارتایی

قطرها: $2^0, \dots, 2\Delta$

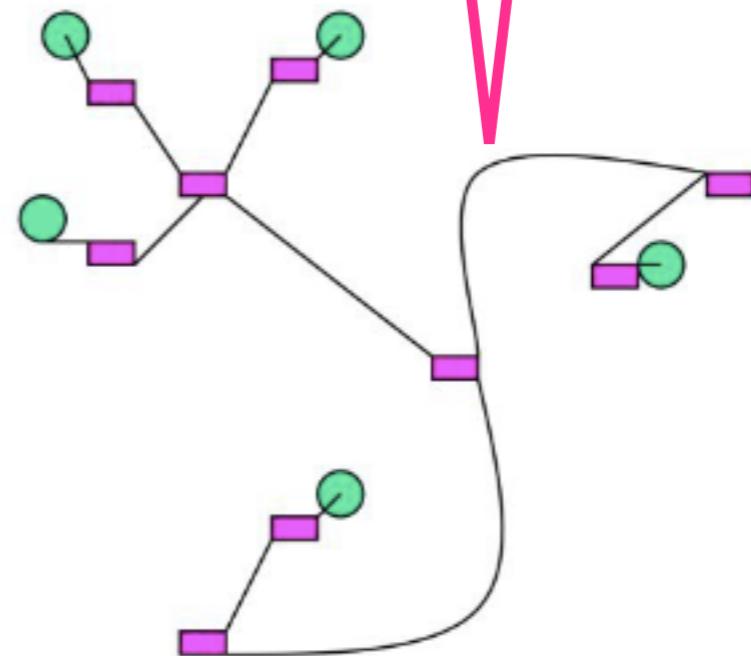
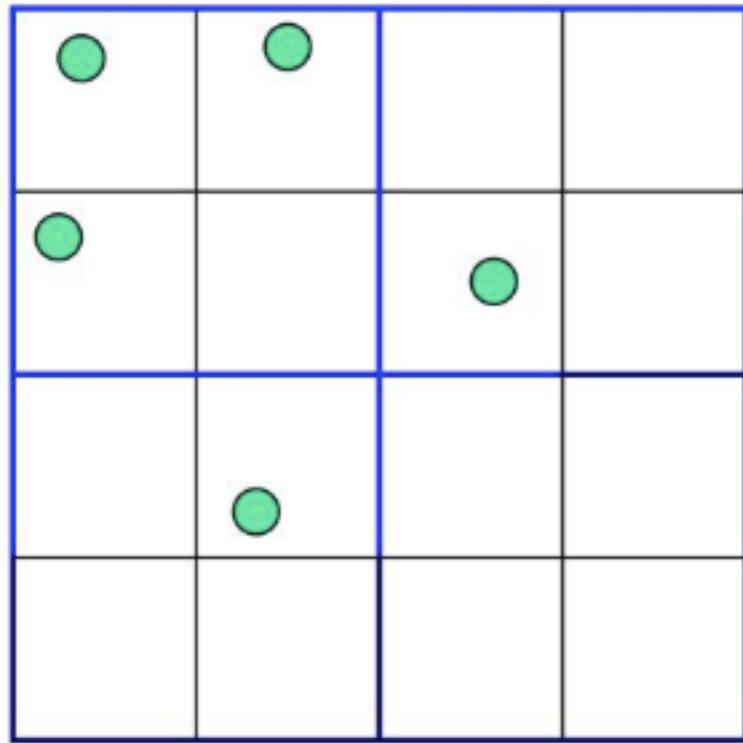


- هر مربع به ۴ زیرمربع

— اگر بیش از یک نقطه

درخت چهارتایی

قطرها: $2^0, \dots, 2\Delta$



طول یال راس به والد:
قطر مربع راس

- هر مربع به ۴ زیرمربع

— اگر بیش از یک نقطه

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

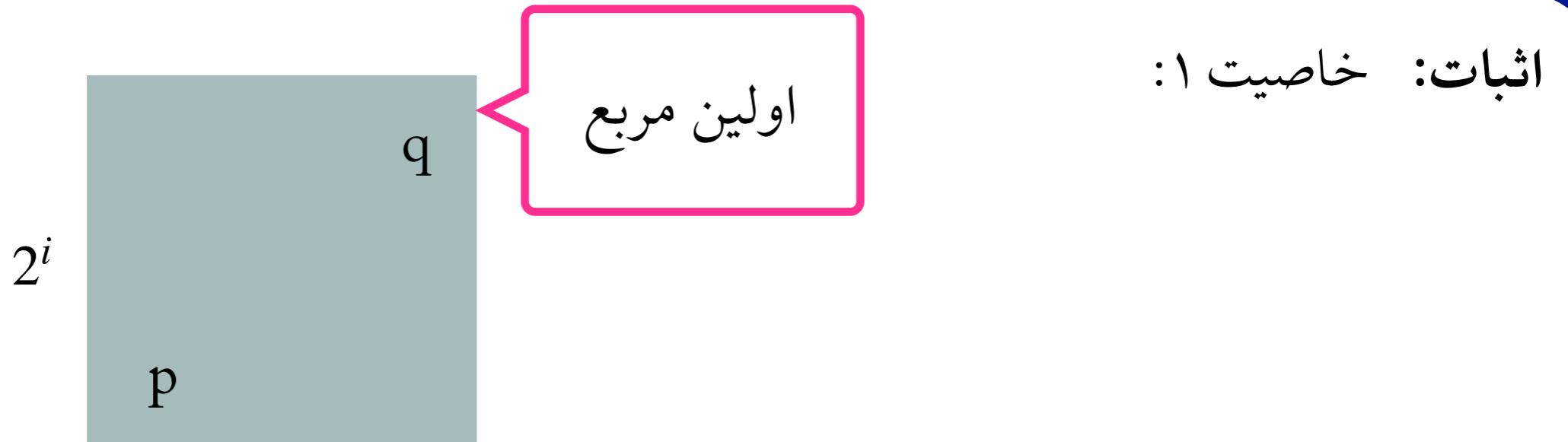
where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصیت ۱:

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

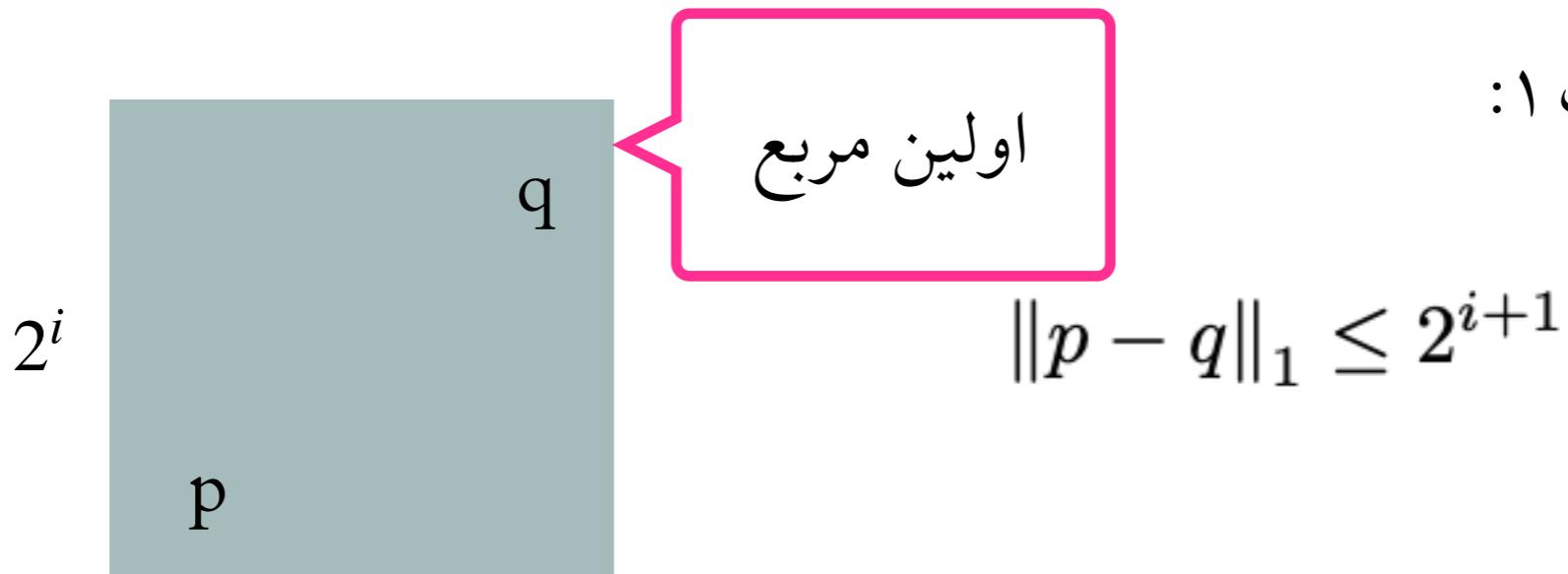


Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصية ١:

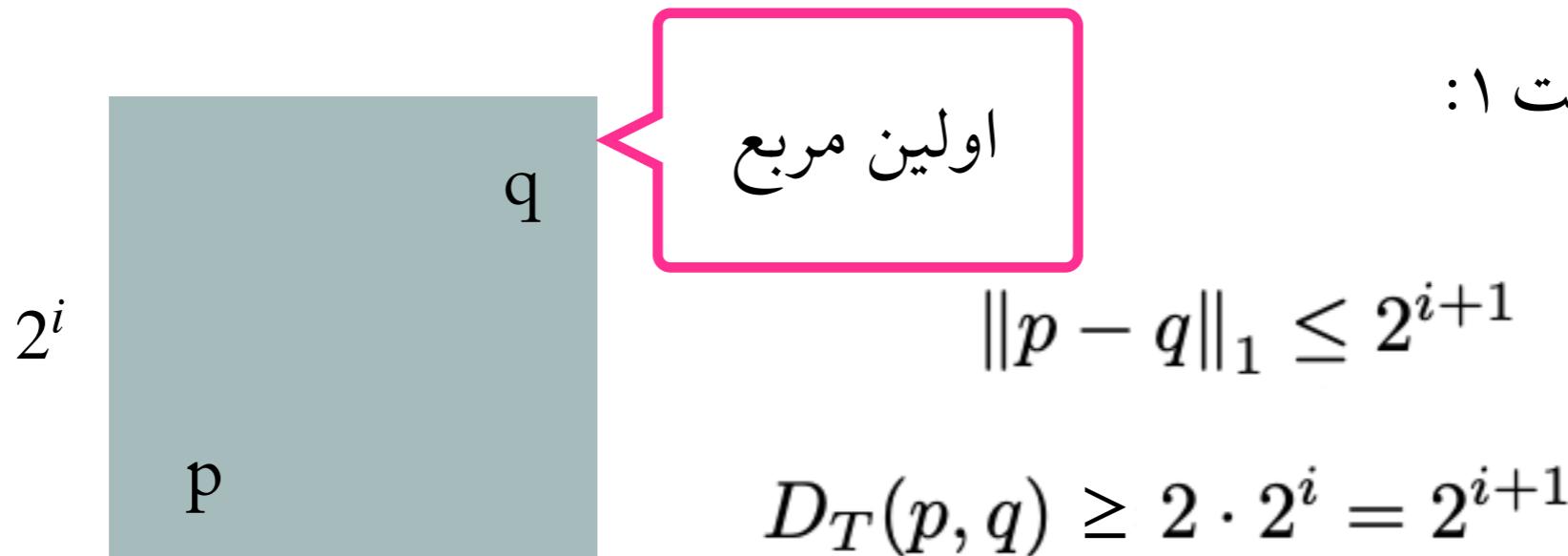


Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصية ١:

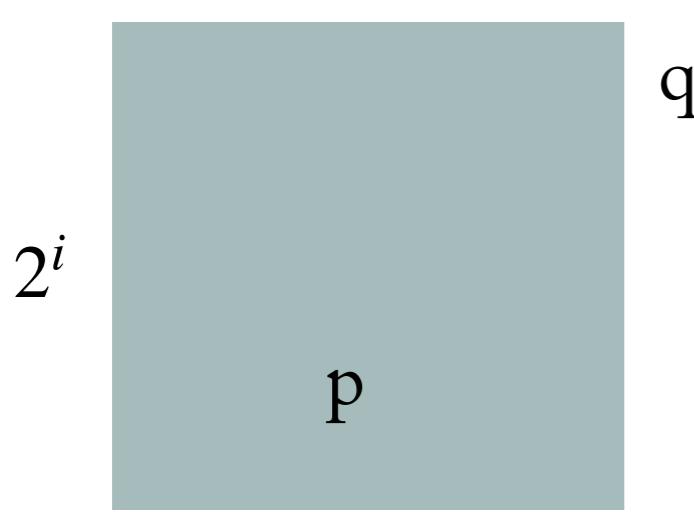


Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصیت ۲:



احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصیت ۲:



احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

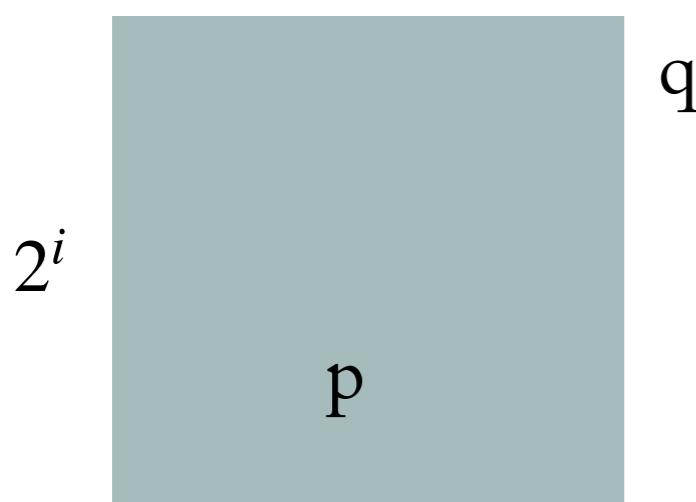
$$\frac{\|p - q\|_1}{2^i}$$

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

اثبات: خاصیت ۲:



احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x و y):

$$\frac{\|p - q\|_1}{2^i} \Rightarrow$$

$$2. \mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta)),$$

اثبات: خاصیت ۲:

2^i



احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x و y):

$$\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq$$

$$2. \quad \mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta)),$$

اثبات: خاصیت ۲:

2^i

احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x و y):

$$\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \sum_{i=0}^{\mathcal{O}(\log(\Delta))} \frac{\|p - q\|_1}{2^i} \mathcal{O}(2^i)$$

$$2. \quad \mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta)),$$

اثبات: خاصیت ۲:

2^i

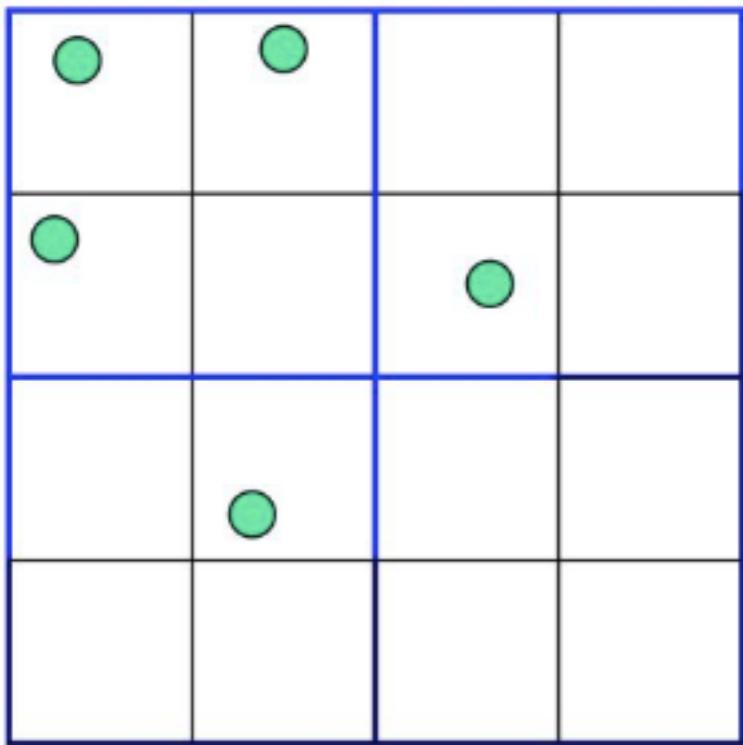
احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x):

$$\min \left\{ \frac{|p_x - q_x|}{2^i}, 1 \right\} \leq \frac{|p_x - q_x|}{2^i}$$

احتمال اینکه p و q در دو مربع 2^i باشند (به خاطر x و y):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_T(p, q)] &\leq \sum_{i=0}^{\mathcal{O}(\log(\Delta))} \frac{\|p - q\|_1}{2^i} \mathcal{O}(2^i) \\ &= \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta)) \end{aligned}$$

$2^0, \dots, 2\Delta$: قطرها

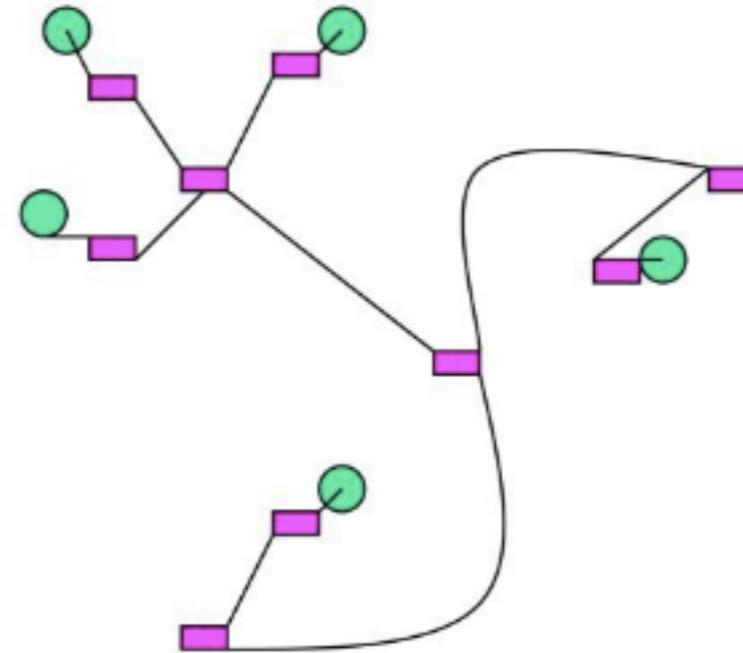
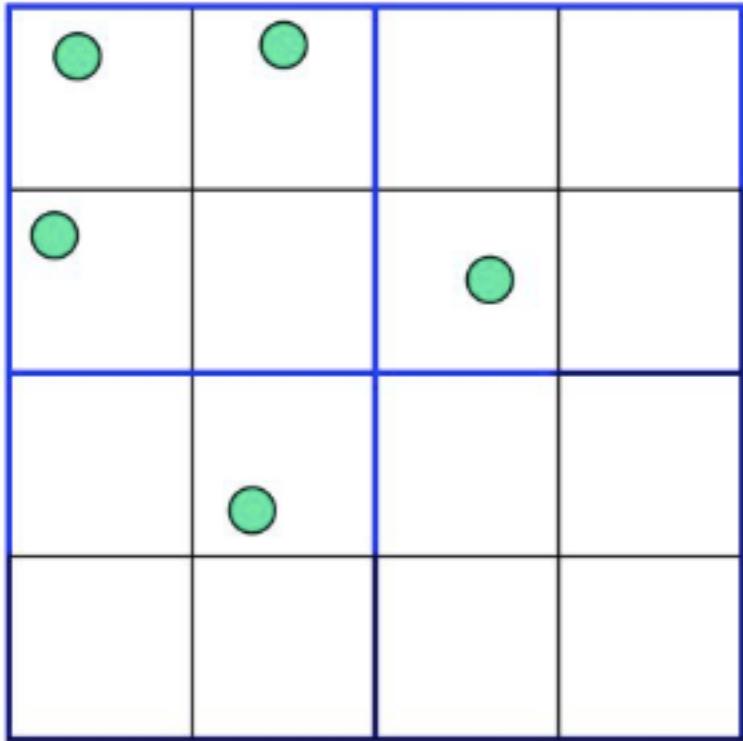


Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

$2^0, \dots, 2\Delta$: قطرها



Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

$2^0, \dots, 2\Delta$: قطرها

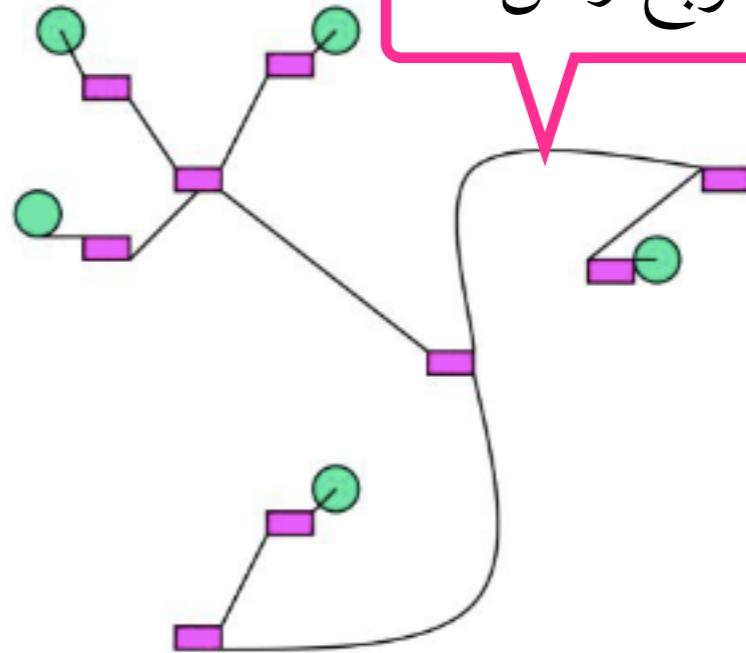
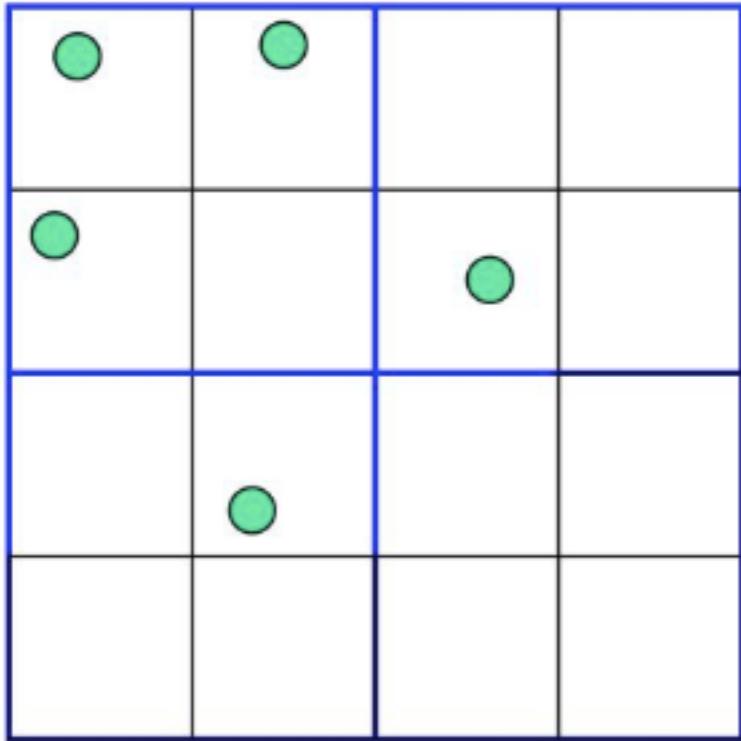


Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

قطرها: $2^0, \dots, 2\Delta$



طول يال راس به والد:
ضلع مربع راس

Theorem 79. Consider the quad-tree T of a set of points P constructed using grids that are shifted by a random vector $v \in [\Delta]^2$, then

1. $\|p - q\|_1 \leq D_T(p, q)$, and
2. $\mathbb{E}[D_T(p, q)] \leq \|p - q\|_1 \mathcal{O}(\log(\Delta))$,

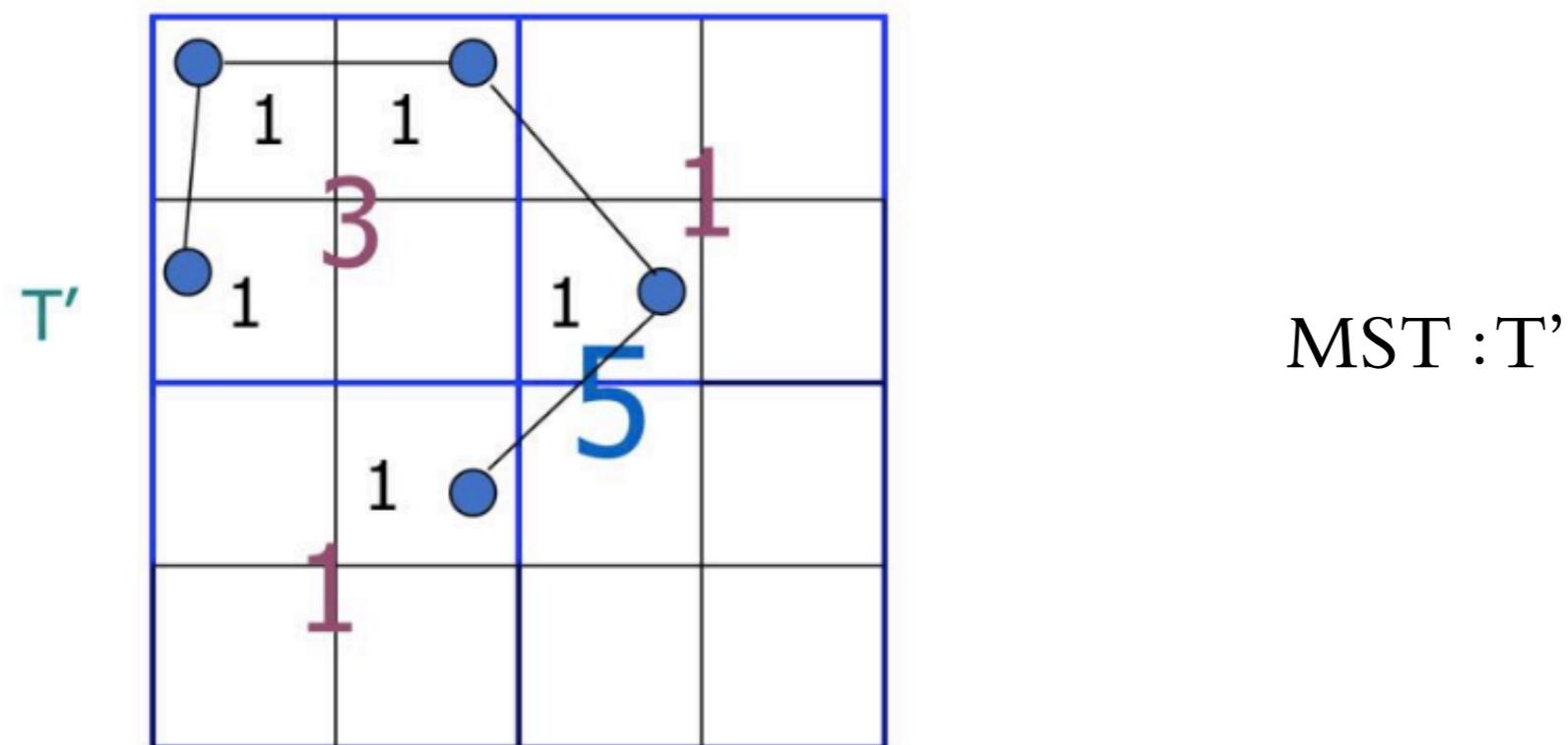
where $D_T(p, q)$ denotes the distance on the tree T between two points $p, q \in P$.

درخت پوشاں کمینہ



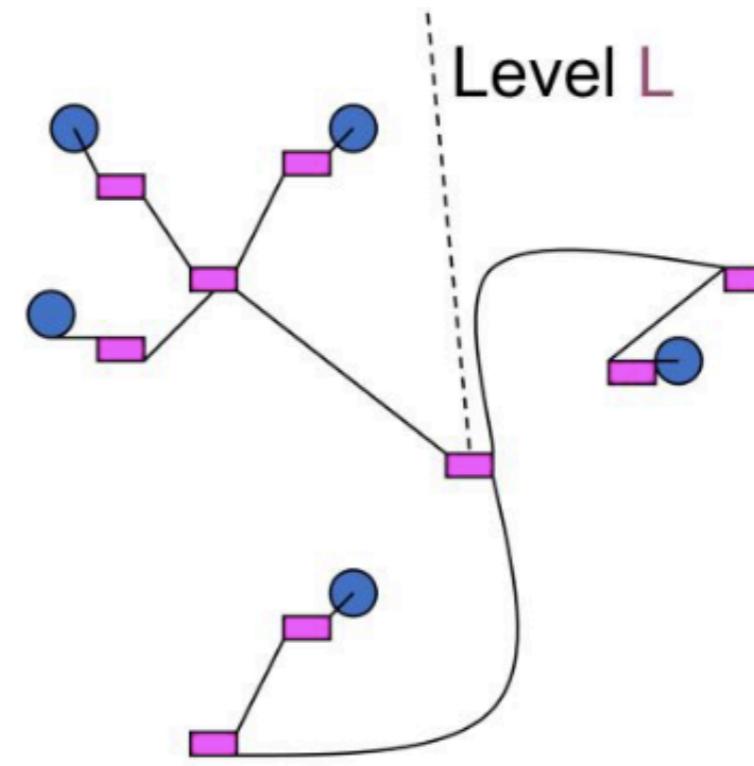
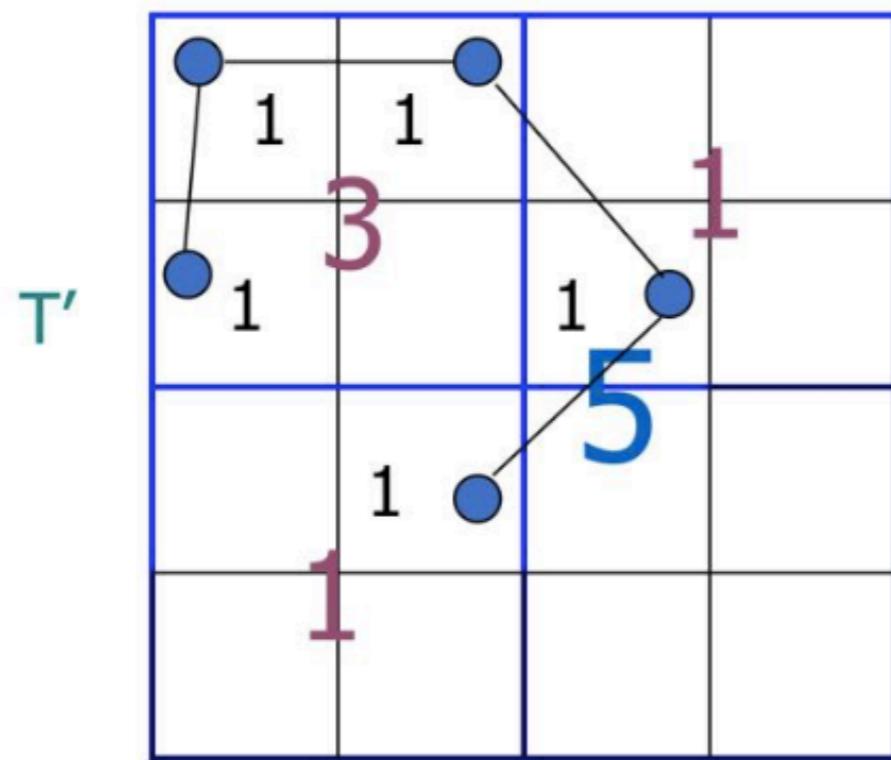
تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$cost(T') \leq \ ? \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$



تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$



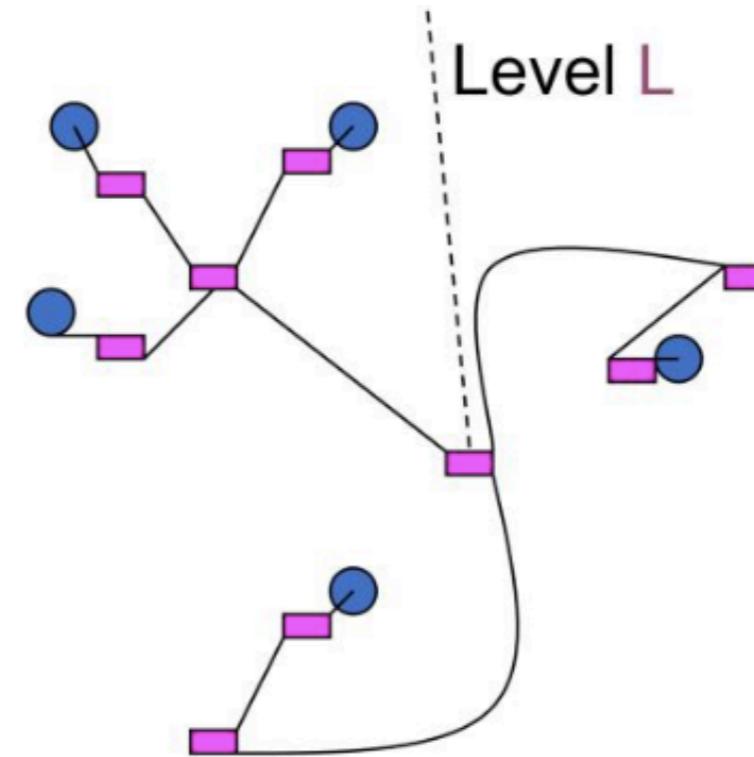
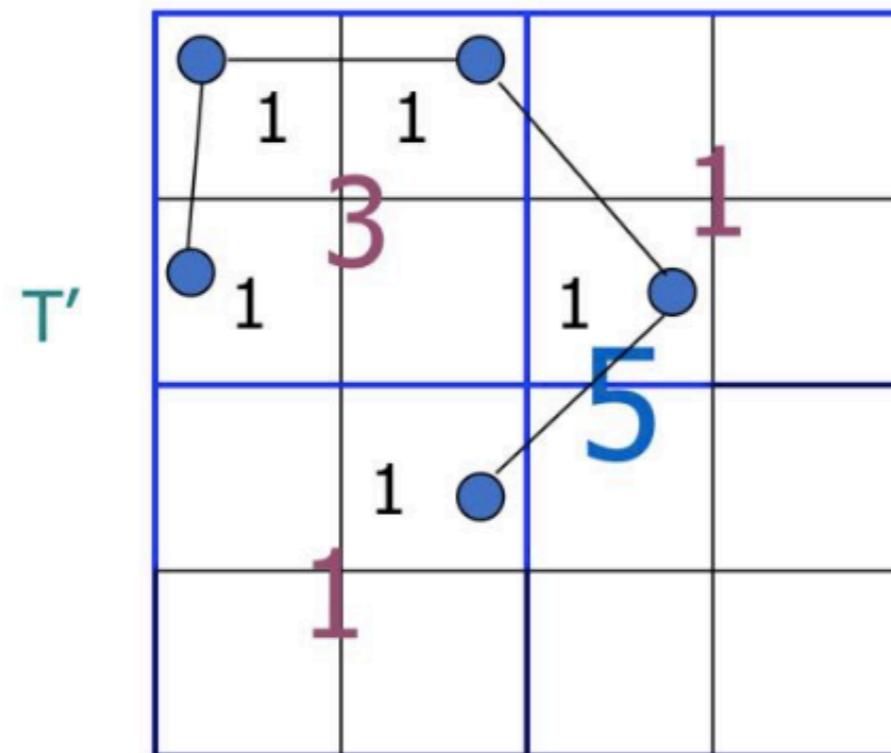
تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

: درخت چهارتایی T

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)



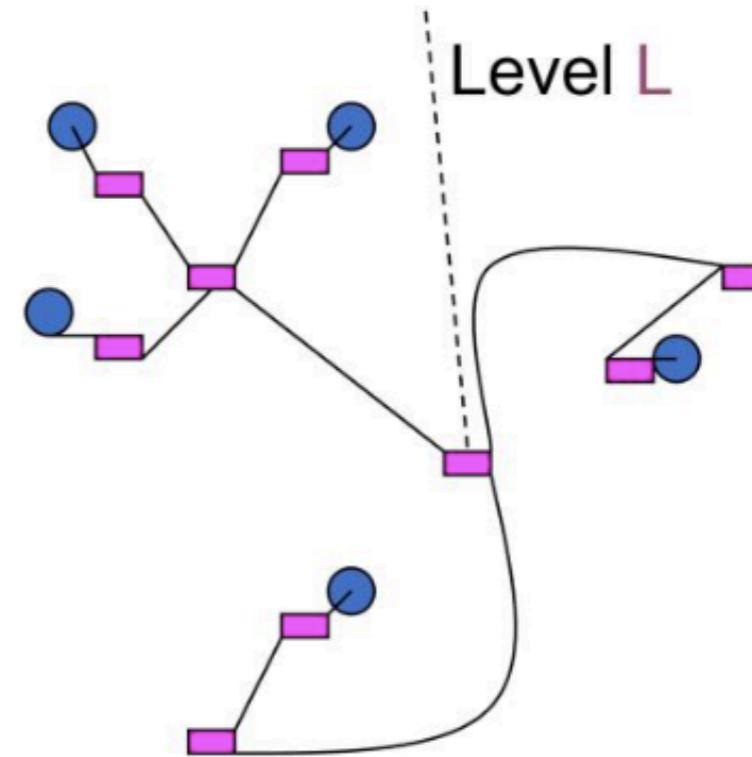
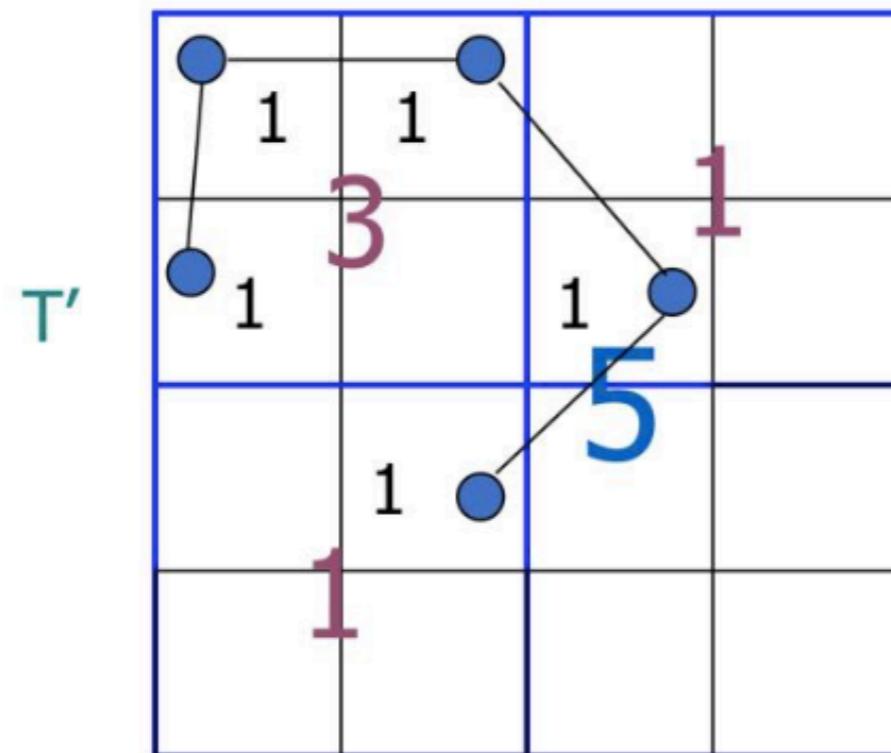
تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

: درخت چهارتایی T

MST : T'

T : تصویر' T روی T (درخت چهارتایی) ==> یک زیردرخت از T



تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)

ایده:

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)

ایده:

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)

ایده:

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta)) cost(T')$$

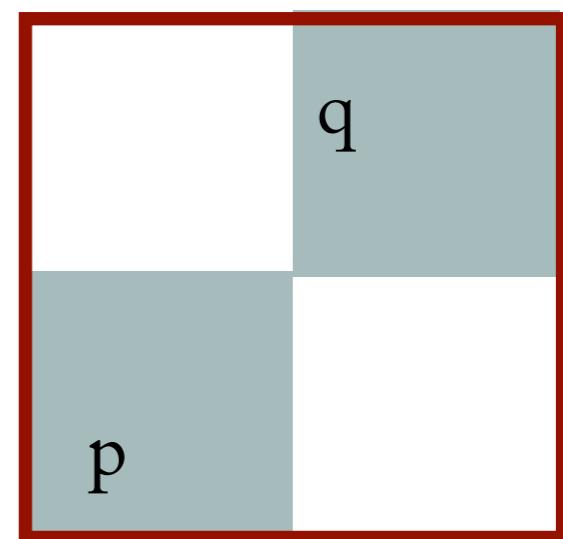
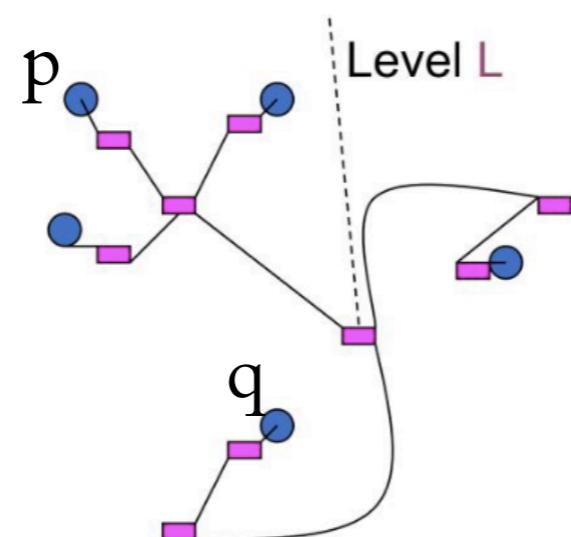
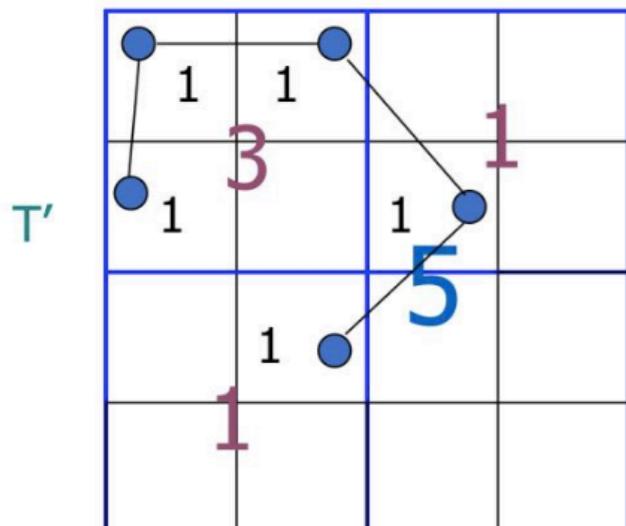
$$\boxed{\sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]}$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)



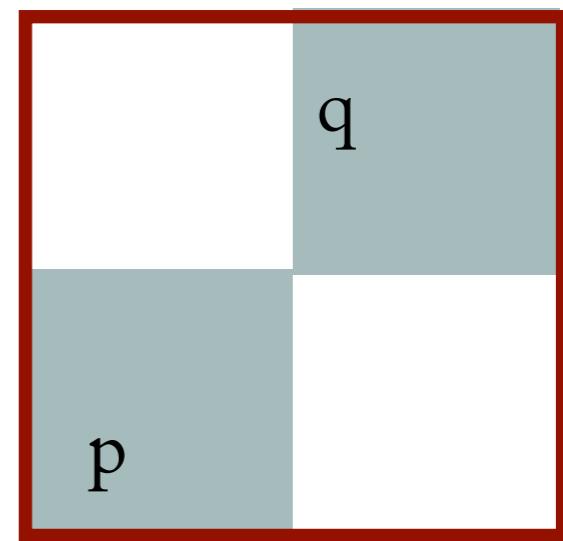
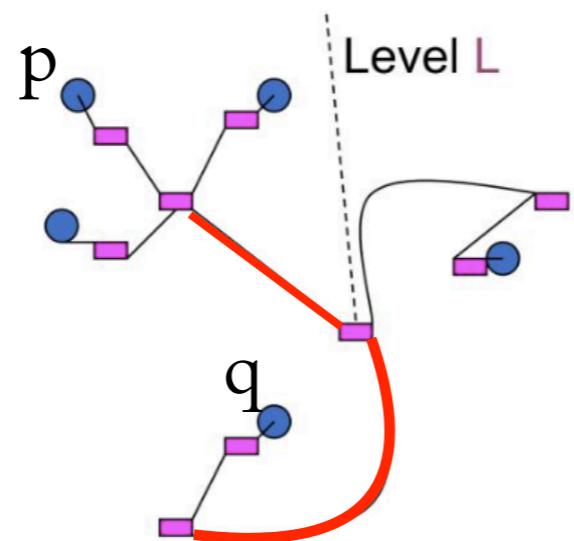
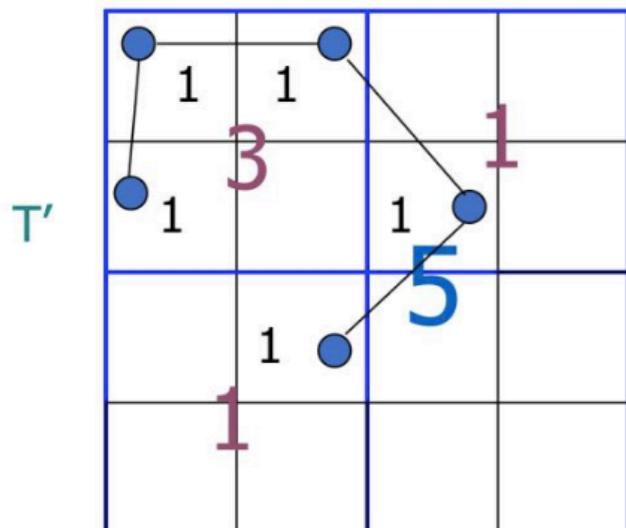
cost(T') =<= 2 cost(T'')

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T (درخت چهارتایی)



$\text{cost}(T') = \langle \text{اندازه مسیر} \rangle \leq 2 \text{ cost}(T'')$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

MST : T'

: تصویر' T روی T'' (درخت چهارتایی)

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta)) cost(T')$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]}$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

فاصله هر یال درخت،
حداکثر $\log \Delta$ روی T (درخت چهارتایی)
تصویر T' روی T'' تغییر کرده

$$\mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$= \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

فاصله هر یال درخت،
حداکثر $\log \Delta$ روی T (درخت چهارتایی)
تصویر T' روی T'' تغییر کرده

$$\mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

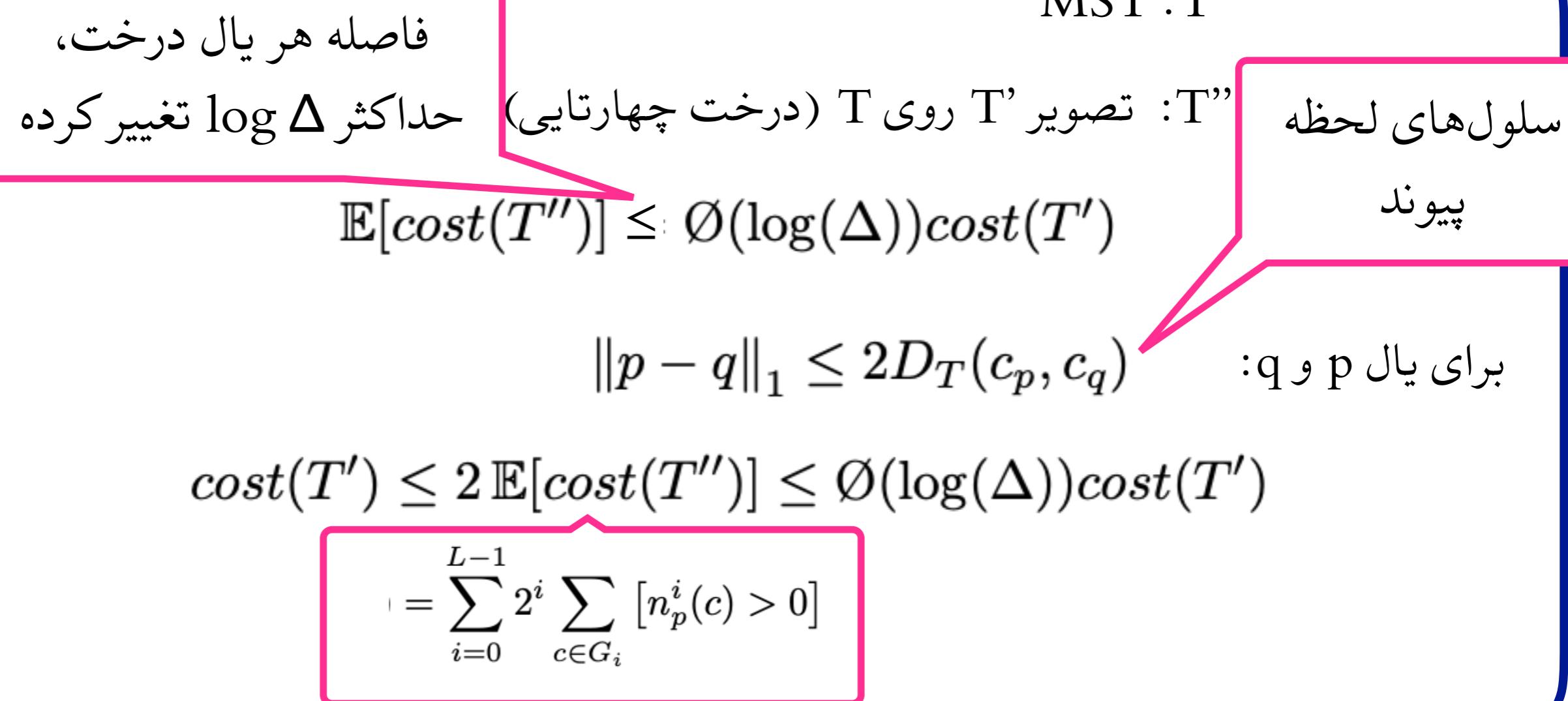
برای یال p و q :

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$= \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$



تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

فاصله هر یال درخت،

حداکثر $\log \Delta$ تغییر کرده

MST : T'

سلول های لحظه

پیوند

$$\mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$cost(T') \leq 2cost(T'')$$

$$\|p - q\|_1 \leq 2D_T(c_p, c_q)$$

برای یال p و q :

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$= \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]$$

تقریب اندازه درخت پوشای کمینه

$$2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0] = 2 \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \|n_P^i\|_0$$

فاصله هر یال درخت،

حداکثر $\log \Delta$ تغییر کرده

MST : T'

سلول های لحظه

پیوند

$$\mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$cost(T') \leq 2cost(T'') \quad \leftarrow \quad \|p - q\|_1 \leq 2D_T(c_p, c_q)$$

برای یال p و q

$$cost(T') \leq 2 \mathbb{E}[cost(T'')] \leq \mathcal{O}(\log(\Delta))cost(T')$$

$$= \sum_{i=0}^{L-1} 2^i \sum_{c \in G_i} [n_p^i(c) > 0]$$