بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه بیست و دوم: گرد کردن با میناتور (۱)

Project: People

مینیاتور
برای برش
بیشینه

ایده مینیاتور

ایده مینیاتور

گراف:

$$G$$

ایده مینیاتور

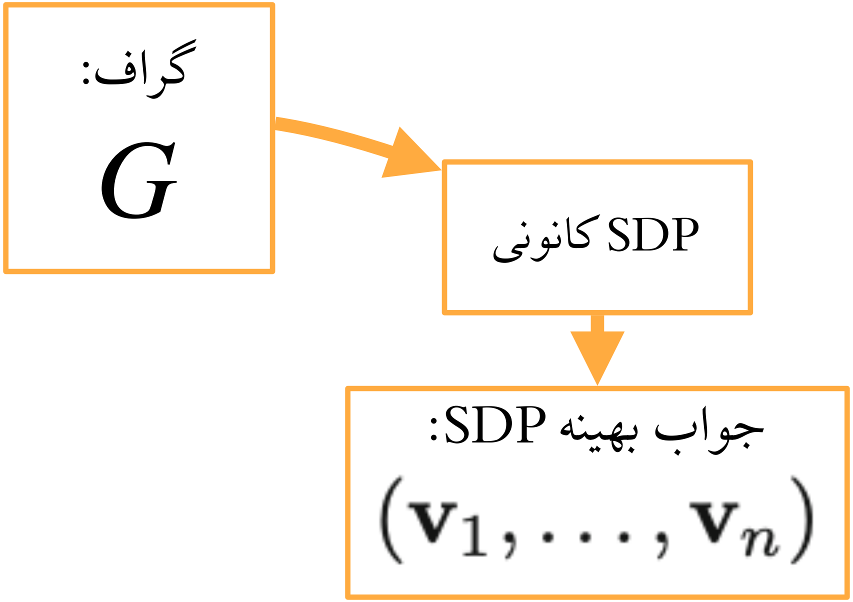
گراف:

G

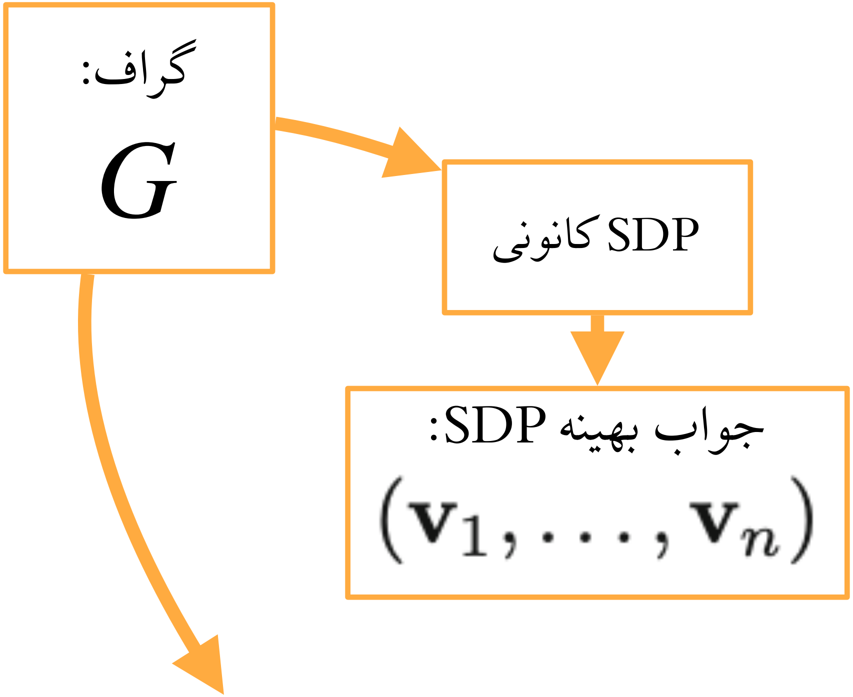
$\rightarrow$

SDP کانونی

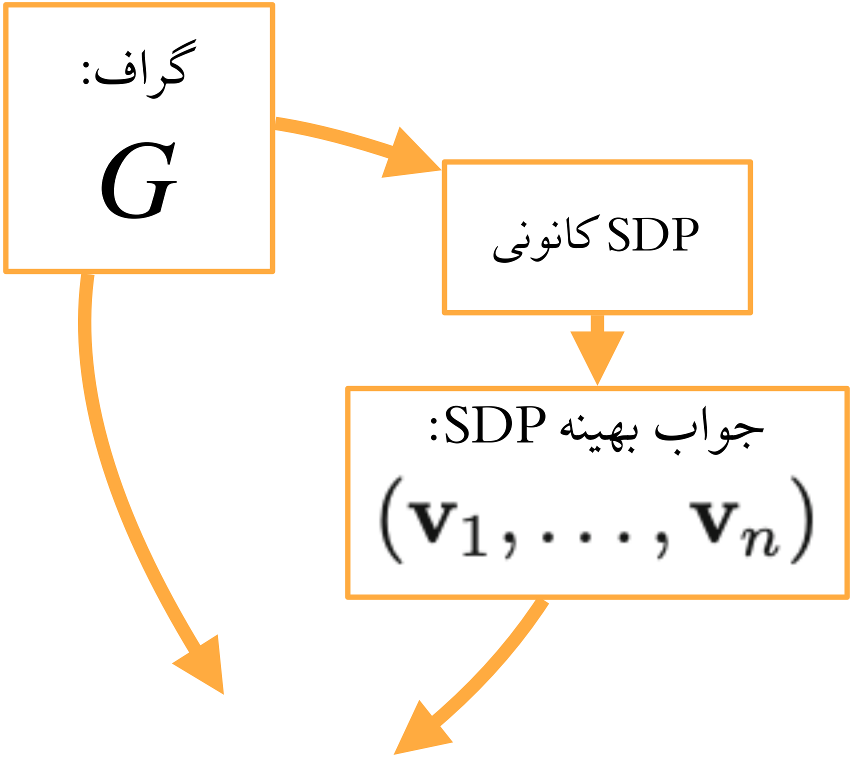
ایده مینیاتور



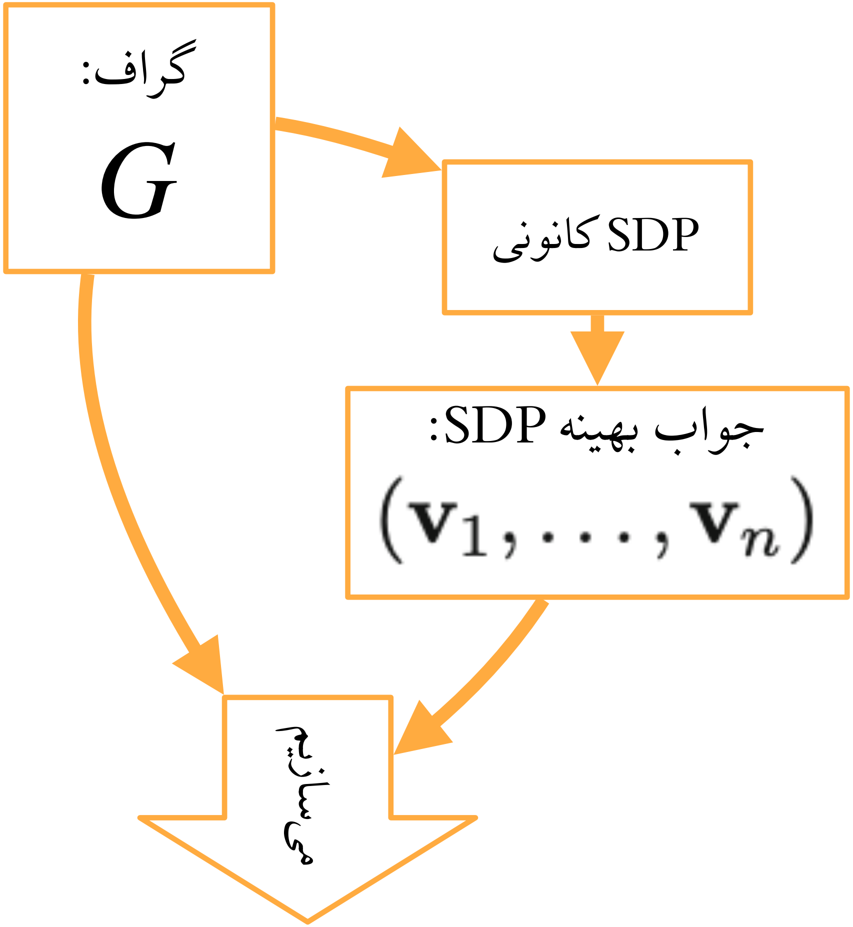
ایده مینیاتور



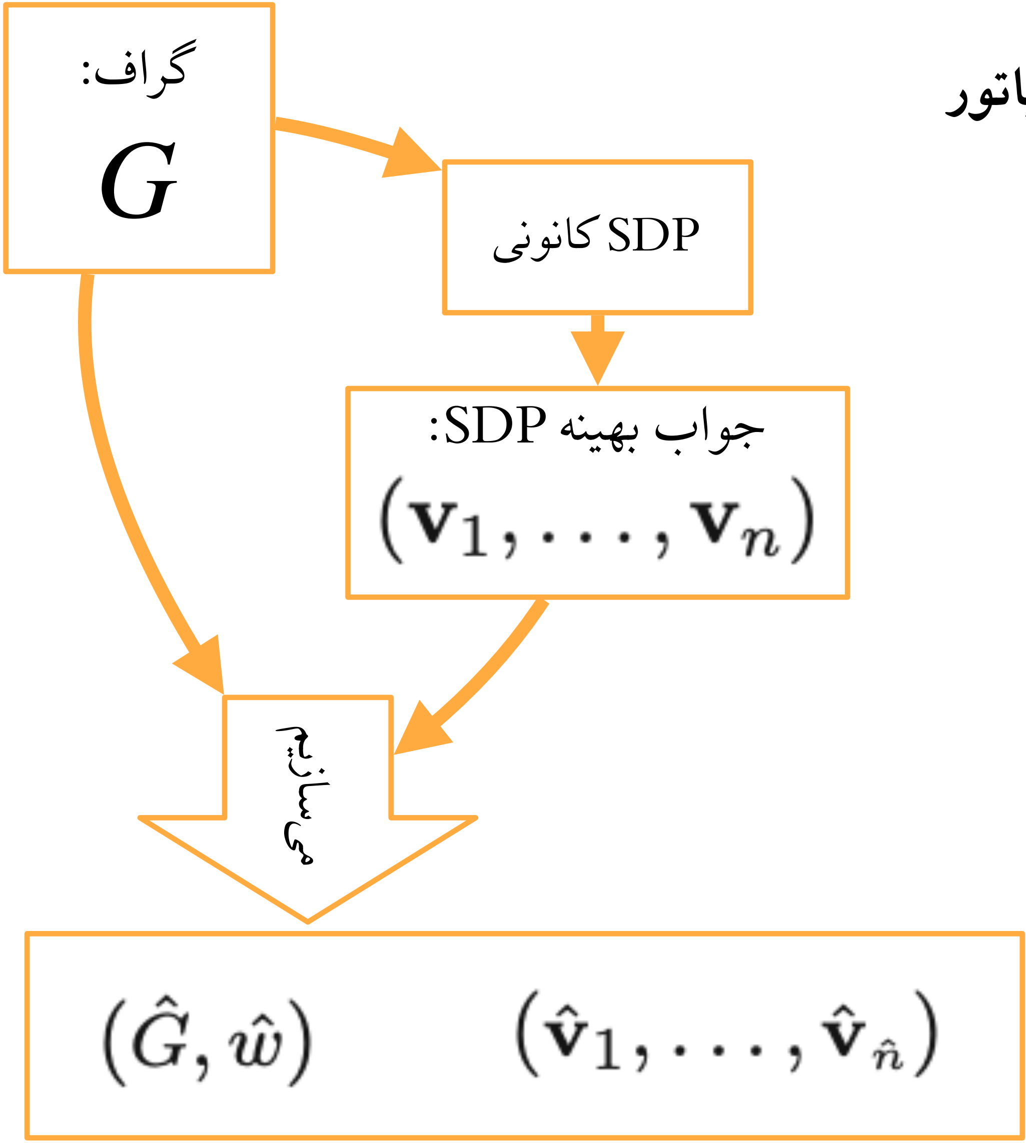
ایده مینیاتور



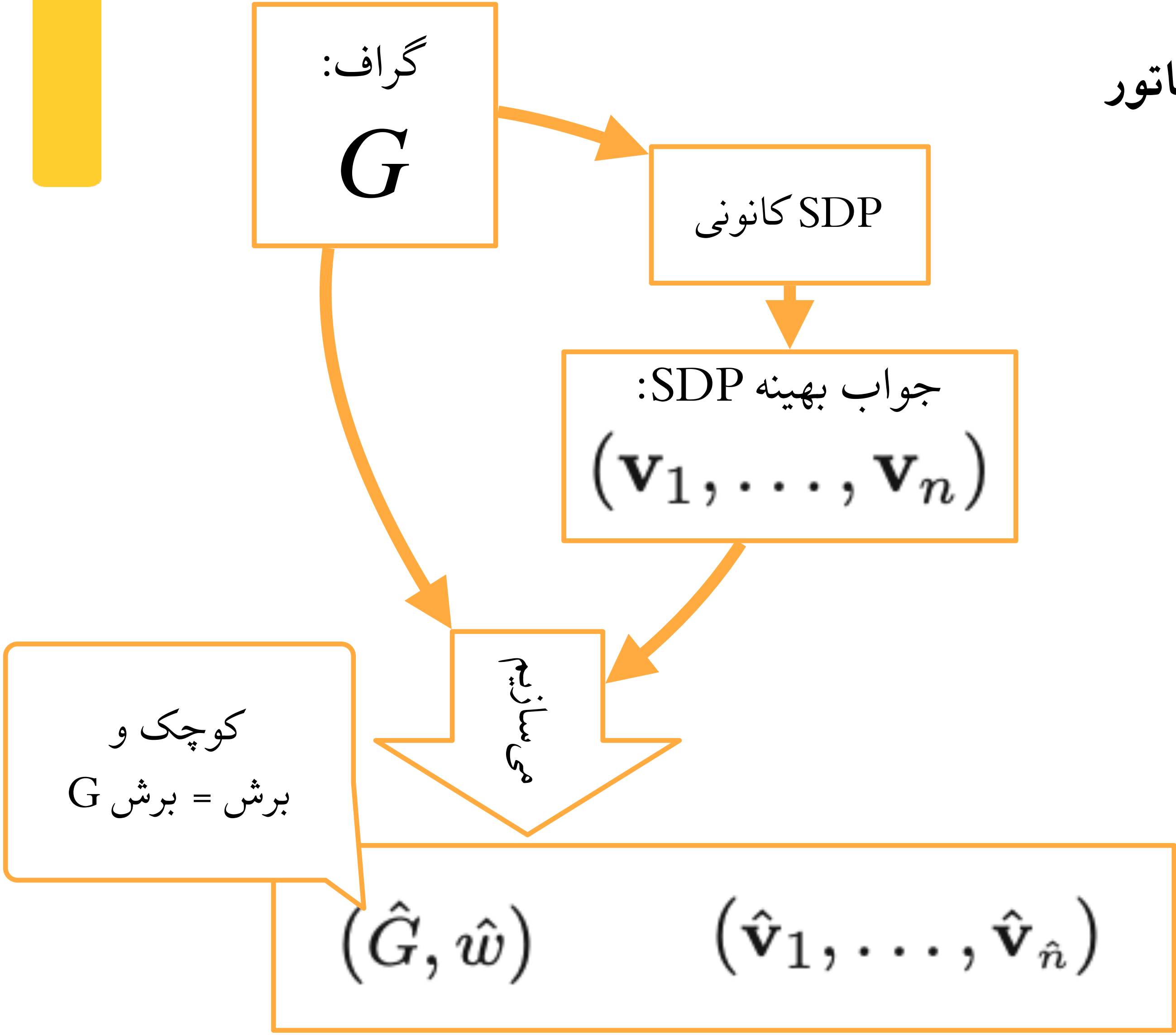
ایده مینیاتور



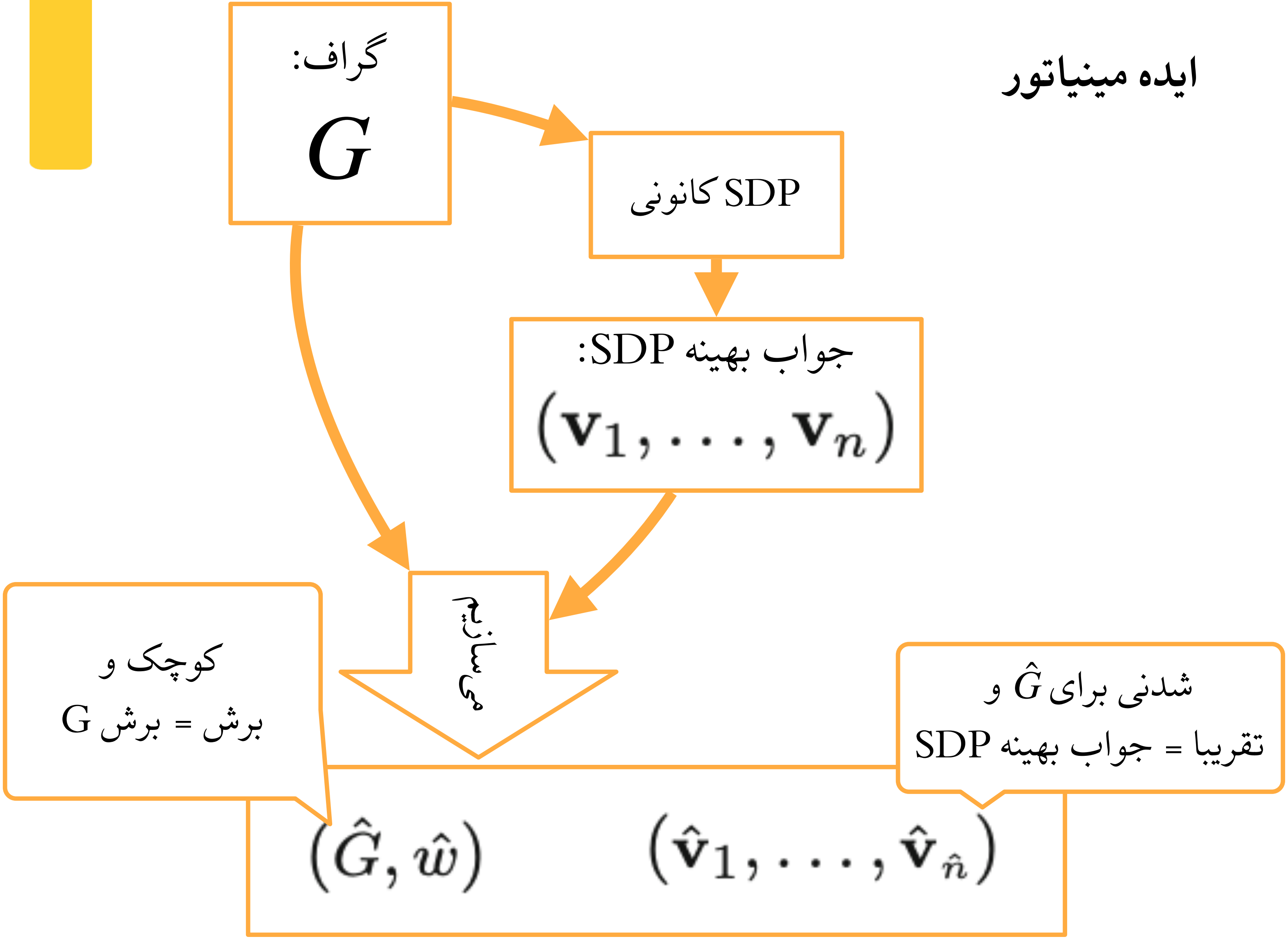
ایده مینیاتور



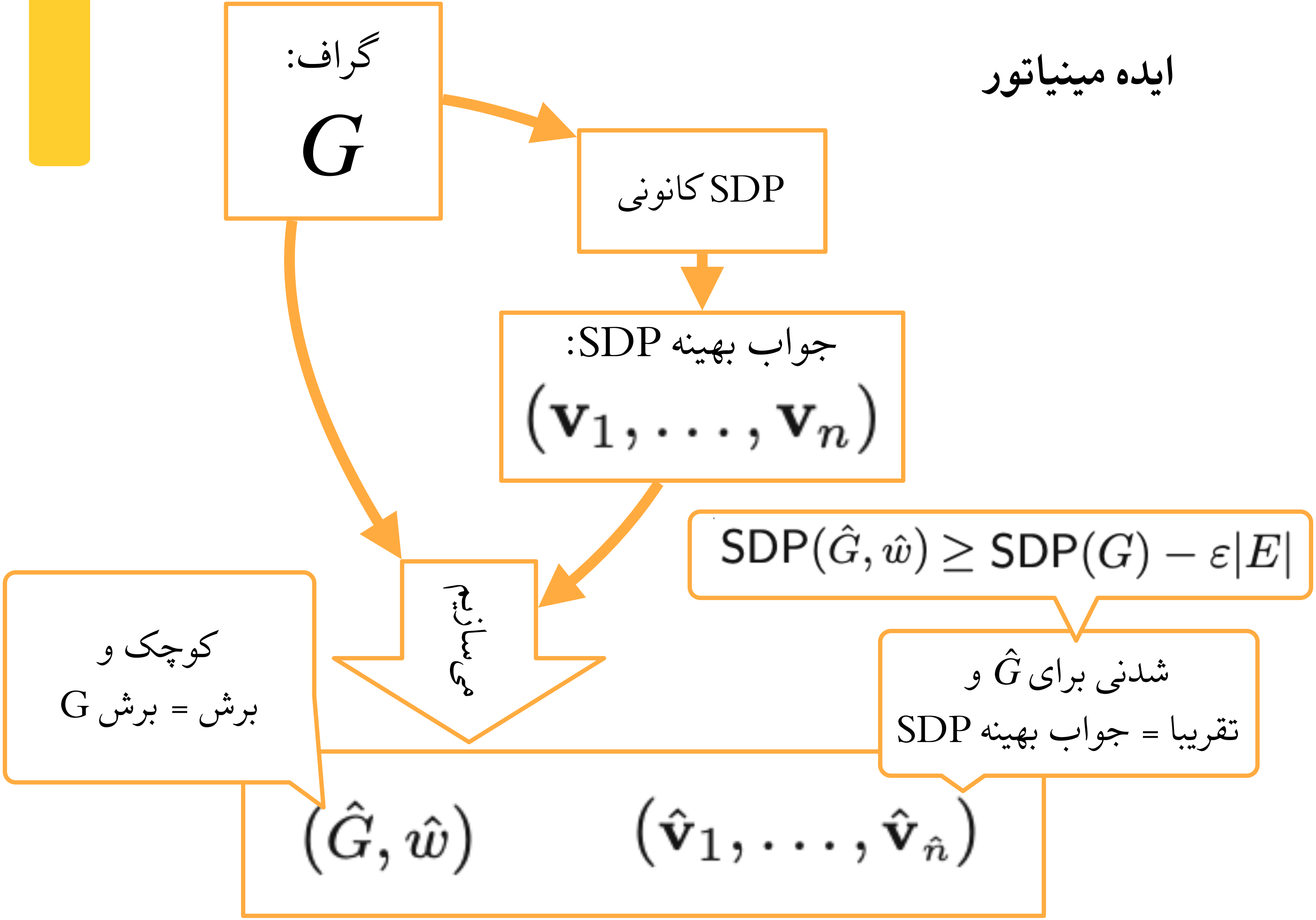
ایده مینیاتور



ایده مینیاتور



ایده مینیاتور



ایده اثبات:

$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|$

کوچک و

برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و

تقریبا = جواب بهینه SDP

$$(\hat{G}, \hat{w}) \qquad\qquad (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$$

ایده اثبات:

$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|$

شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

کوچک و
برش = برش G

$$(\hat{G}, \hat{w}) \qquad (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$$

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w})/\mathsf{Gap}$$

ایده اثبات:

$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|$

کوچک و
برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

$$(\hat{G}, \hat{w}) \qquad (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$$

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|)/\mathsf{Gap}$$

ایده اثبات:

$$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|$$

کوچک و

برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و

تقریبا = جواب بهینه SDP

$$(\hat{G}, \hat{w}) \qquad (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$$

می‌توانیم حساب کنیم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G, w)}{\mathsf{Opt}(G, w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) / \mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|) / \mathsf{Gap}$$

می‌توانیم حساب کنیم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) &\geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}\\ &\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|)/\mathsf{Gap}\end{aligned}$$

می‌توانیم حساب کنیم

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|)/\mathsf{Gap}$$

$$\mathsf{SDP}(G) \geq \mathsf{Opt}(G) \geq \frac{1}{2}|E|$$

می‌توانیم حساب کنیم

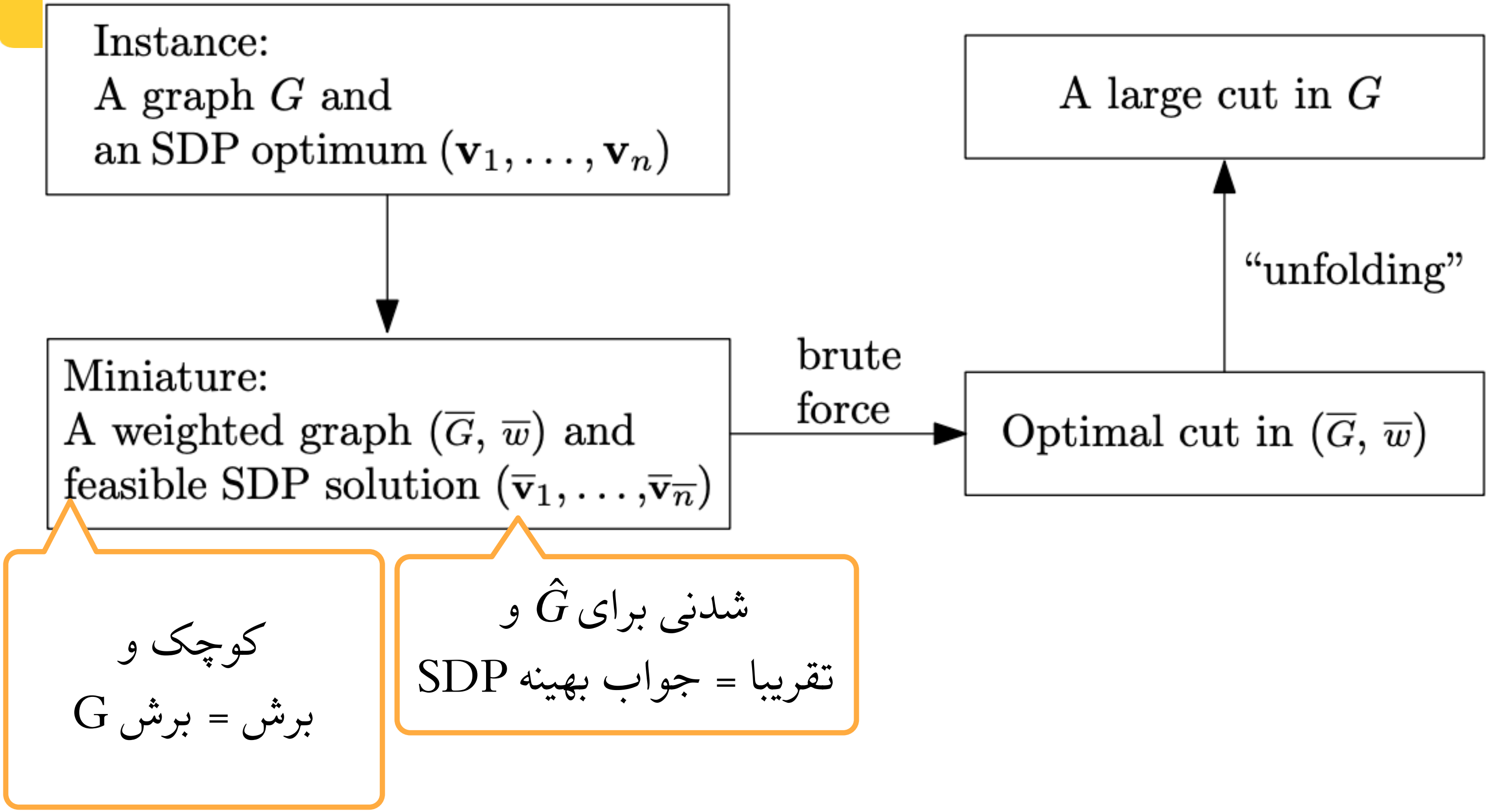
$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$\mathsf{Opt}(\hat{G},\hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(\hat{G},\hat{w})/\mathsf{Gap}$$

$$\geq (\mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|)/\mathsf{Gap}$$

$$\mathsf{SDP}(G) \geq \mathsf{Opt}(G) \geq \tfrac{1}{2}|E|$$

$$\geq \mathsf{SDP}(G,w)(1-2\varepsilon)/\mathsf{Gap}$$



Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute
force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
"unfolding"
A large cut in G
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$

$\downarrow$

Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$

چگونه یک مینیاتور خوب بسازیم؟
(برای برش بیشینه)

ایده تولید مینیاتور

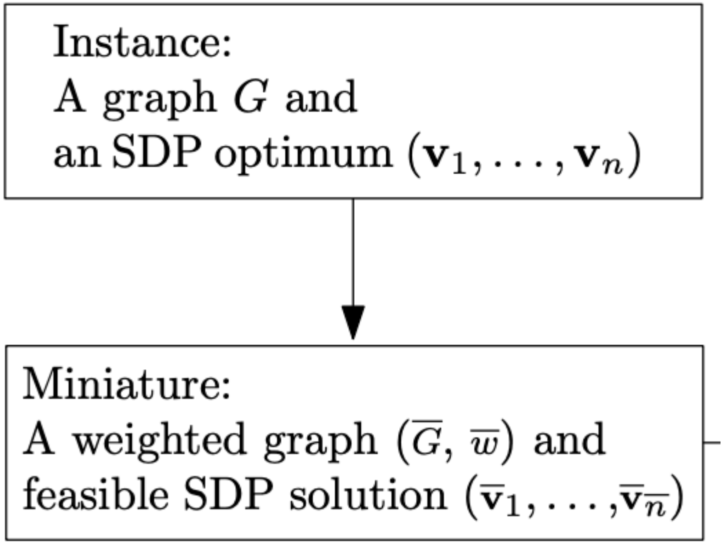
Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$

$\downarrow$

Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$

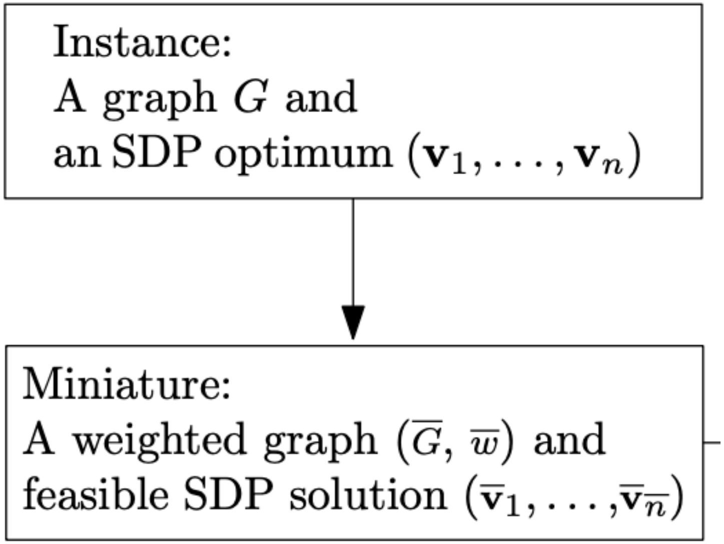
ایده تولید مینیاتور

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کم‌تر (ثابت) می‌نشانیم



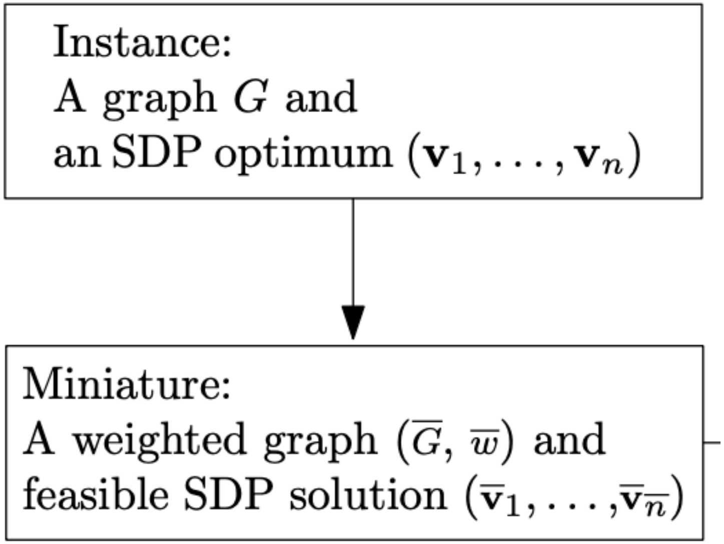
ایده تولید مینیاتور

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کم‌تر (ثابت) می‌نشانیم
- ب) چند نماینده روی کره واحد انتخاب می‌کنیم. تعداد نقاط کم.



ایده تولید مینیاتور

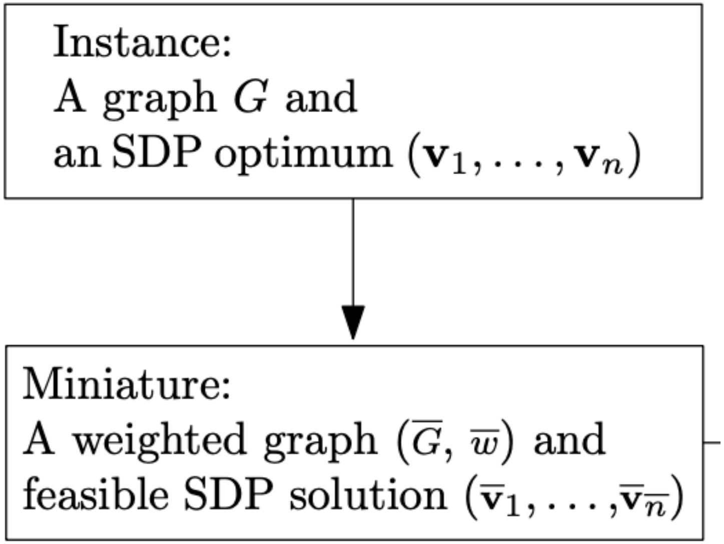
- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کم‌تر (ثابت) می‌نشانیم
- ب) چند نماینده روی کره واحد انتخاب می‌کنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه می‌سازیم.



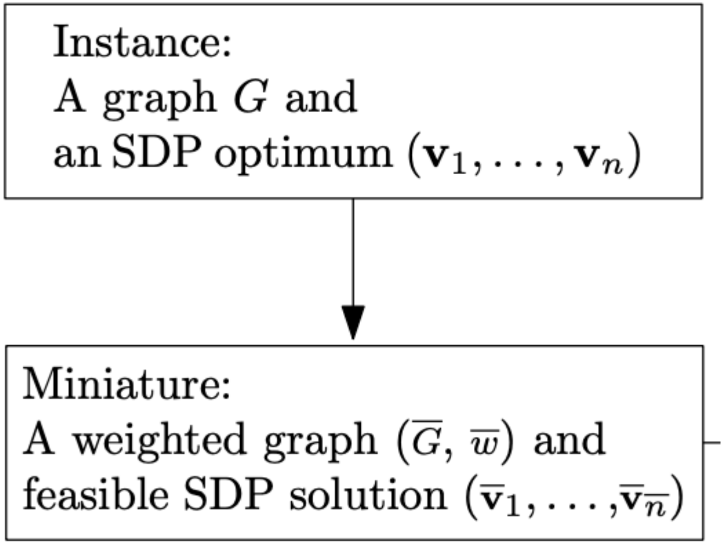
ایده تولید مینیاتور

- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کم‌تر (ثابت) می‌نشانیم
- ب) چند نماینده روی کره واحد انتخاب می‌کنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه می‌سازیم.

- برش گراف جدید = (تقریبا)= برش گراف قدیم



ایده تولید مینیاتور



- الف) بردارها را در یک فضای با بعد کم‌تر (ثابت) می‌نشانیم
- ب) چند نماینده روی کره واحد انتخاب می‌کنیم. تعداد نقاط کم.
- گراف روی تعداد کم نقطه می‌سازیم.

- برش گراف جدید = (تقریبا)= برش گراف قدیم
- بردارهای جدید

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

الف)

$$\operatorname{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\operatorname{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

الف)

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:
- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$*. Then, for a sufficiently large constant* C,

الف)

$$\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:

- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

الف)

$$\operatorname{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:
  - کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\operatorname{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right]$$

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

الف)

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:

- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right]$$

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_بعدی

الف)

- اثبات:

- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2)$$

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big]$$

$$= P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v) + u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u) - ((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

الف)

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_بعدی

- اثبات:
  - کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big]$$

$$= P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v) + u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u) - ((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| + |\,u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)\,| + |\,((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$*. Then, for a sufficiently large constant* C*,*

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

الف)

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_بعدی

- اثبات:

- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2)$$

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big]$$

$$= P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v) + u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u) - ((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| + |u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)\,| + |((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq 2t/3] + P[\,|u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)\,| \geq 2t/3] + P[\,|((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t/3]$$

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

الف)

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

- اثبات:
  - کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2)$$

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right]$$

$$= P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v) + u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u) - ((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| + |u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)| + |((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq 2t/3] + P[\,|u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)| \geq 2t/3] + P[\,|((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))\,| \geq 2t/3]$$

$$\leq 3\frac{C'}{d(2t/3)^2}$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_بعدی

- اثبات:

- کافی است برای u=v ثابت کنیم.

اگر $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$ آنگاه

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right]$$

$$= P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v) + u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u) - ((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| + |u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)| + |((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))| \geq 2t]$$

$$\leq P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq 2t/3] + P[\,|u^\top u - \Phi(u)^\top\Phi(u)| \geq 2t/3] + P[\,|((u-v)^\top(u-v) - \Phi(u-v)^\top\Phi(u-v))| \geq 2t/3]$$

$$\leq 3\frac{C'}{d(2t/3)^2} \leq \frac{27C'/4}{dt^2}$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:
- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

(الف

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

- اثبات:
- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

(الف

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

١

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v}).$$

تصادفی گوسی n ــ بعدی

١

X

- اثبات:
- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\text{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T\Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \tfrac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T\Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \tfrac{1}{d}\textstyle\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$E[X] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2]$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

١

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T\Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$E[X] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] - E[Z_i]^2$$

(الف

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ــ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T\Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \tfrac{1}{d}\textstyle\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$E[X] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = \frac{1}{d}\sum_i Var[Z_i]$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X := \Phi(\mathbf{v})^T\Phi(\mathbf{v}) = \|\Phi(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$E[X] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] = \frac{1}{d}\sum_i E[Z_i^2] - E[Z_i]^2 = \frac{1}{d}\sum_i Var[Z_i] = 1$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

۱

X

- اثبات:
- حکم جدید: $P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

X

۱

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|\,\overbrace{v^{\top}v}^{۱} - \overbrace{\Phi(v)^{\top}\Phi(v)}^{X}\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$P[\,|\,\underbrace{E[X]}_{۱} - X\,| \geq t]$$

(الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\text{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

- اثبات:
- حکم جدید: $P[\,|\underbrace{v^\top v}_{1} - \underbrace{\Phi(v)^\top\Phi(v)}_{X}| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$$

$$P[\,|\underbrace{E[X]}_{1} - X| \geq t]$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$*. Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

- اثبات:

١ X

- حکم جدید: $P[\,|v^{\top}v - \Phi(v)^{\top}\Phi(v)| \geq t] \leq \frac{C'}{dt^2}$

$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$

$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$

$P[\,|E[X] - X| \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2$

١

نامساوی چبیشف

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|\underbrace{v^\top v}_{1} - \underbrace{\Phi(v)^\top\Phi(v)}_{X}| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$$

$$P[\,|\underbrace{E[X]}_{1} - X| \geq t] \underbrace{\leq}_{\text{نامساوی چبیشف}} \mathrm{Var}\,[X]\,/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

$$P[\,|\,E[X] - X\,| \geq t] \leq \mathrm{Var}\,[X]\,/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^d \mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

۱

نامساوی چبیشف

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v})$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \frac{C'}{dt^2}$

$Z_i := \gamma_i^T\mathbf{v}.$

$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$

$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$

$$P[\,|E[X] - X| \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^d \mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

۱

نامساوی چبیشف

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:

$$\overset{\text{X}}{} \quad \overset{1}{}$$

- حکم جدید: $P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$$

$$1$$

$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[\,|\,E[X] - X\,| \geq t] \leq \mathrm{Var}\,[X]\,/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

1

نامساوی چبیشف

(الف

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

- اثبات:

۱ X

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$$

۳ ۱

$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[\,|E[X] - X| \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

۱

نامساوی چبیشف

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\text{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Z_i^2$$

۳

۱

$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[\,|E[X] - X| \geq t] \leq \text{Var}[X]/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^d \text{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

۱

نامساوی چبیشف

$$= \frac{1}{d^2t^2}2d$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *be unit vectors, let* Φ *be the random linear map as above, and let* $t \geq 0$. *Then, for a sufficiently large constant* C,

$$\mathrm{Prob}\left[\left|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})\right| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v})$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

۱

X

- اثبات:

- حکم جدید: $P[\,|\,v^\top v - \Phi(v)^\top\Phi(v)\,| \geq t] \leq \dfrac{C'}{dt^2}$

$$Z_i := \boldsymbol{\gamma}_i^T\mathbf{v}.$$

$$X = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} Z_i^2$$

۳

۱

$$E[Z_i^4] - E[Z_i^2]^2$$

$$P[\,|\,E[X] - X\,| \geq t] \leq \mathrm{Var}\,[X]\,/t^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{Var}\left[Z_i^2\right]/t^2$$

۱

نامساوی چبیشف

$$= \frac{1}{d^2t^2}2d = \frac{2}{dt^2}$$

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\operatorname{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1^T\mathbf{v}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_d^T\mathbf{v}).$$

تصادفی گوسی n_ بعدی

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δـ چگال است

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δـ چگال است
  - دایره به شعاع $\frac{\delta}{2}$ حول نقطه‌ها با هم اشتراک ندارد

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \le (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δـ چگال است
  - دایره به شعاع $\dfrac{\delta}{2}$ حول نقطه‌ها با هم اشتراک ندارد
    - تعداد نقطه‌ها =>

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δـ چگال است
  - دایره به شعاع $\frac{\delta}{2}$ حول نقطه‌ها با هم اشتراک ندارد
    - تعداد نقطه‌ها =>

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \le (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δ_چگال است
  - دایره به شعاع $\frac{\delta}{2}$ حول نقطه‌ها با هم اشتراک ندارد
    - تعداد نقطه‌ها <= $\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\frac{3}{2})^d / \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\frac{\delta}{2})^d$

$$1+\frac{\delta}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \le (\frac{3}{\delta})^d$.*

- اثبات:
  - حریصانه: در هر مرحله یک نقطه که فاصله‌اش تا همه بیش از δ بود را اضافه کن
  - مجموعه حاصل δـ چگال است
  - دایره به شعاع $\frac{\delta}{2}$ حول نقطه‌ها با هم اشتراک ندارد
  - تعداد نقطه‌ها <= $$(\frac{3}{\delta})^d \ge \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\frac{3}{2})^d / \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\frac{\delta}{2})^d$$

$$1 + \frac{\delta}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$

- از روی ϵ یک $0 < \delta$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δــ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ــ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم
- $$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم
- $$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
- راس i خراب شده اگر $\|\mathbf{v}_i^*\| \notin [1-\delta, 1+\delta]$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـچگال روی کره واحد $\hat{d}$ـبعدی
  - $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـبعدی می‌نشانیم
  - $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- راس i خراب شده اگر $\|\mathbf{v}_i^*\| \notin [1-\delta, 1+\delta]$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - احتمال خراب شدن یک یال کمتر مساوی δ
  - $\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta |E|$

$$\boxed{\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}}$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta |E|$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $\mathbf{E}\left[|F|\right] \le \delta|E|$
    - نامساوی مارکوف: $\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$
  - نامساوی مارکوف: $\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$
  - با احتمال کم‌تر از ۱/۲، $|F| \geq 2\delta|E|$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $\mathbf{E}[|F|] \leq \delta|E|$
  - نامساوی مارکوف: $\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$
    - با احتمال کم‌تر از ۱/۲، $|F| \geq 2\delta|E|$
  - نشاندن را اینقدر تکرار می‌کنیم که داشته باشیم $|F| \geq 2\delta|E|$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـچگال روی کره واحد $\hat{d}$ـبعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـبعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$
  - نامساوی مارکوف: $\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$
    - با احتمال کم‌تر از ۱/۲، $|F| \geq 2\delta|E|$
  - نشاندن را اینقدر تکرار می‌کنیم که داشته باشیم $|F| \geq 2\delta|E|$
    - امید تعداد تکرار = ۲

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $|F| \leq 2\delta |E|$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
        - $|F| \leq 2\delta|E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*

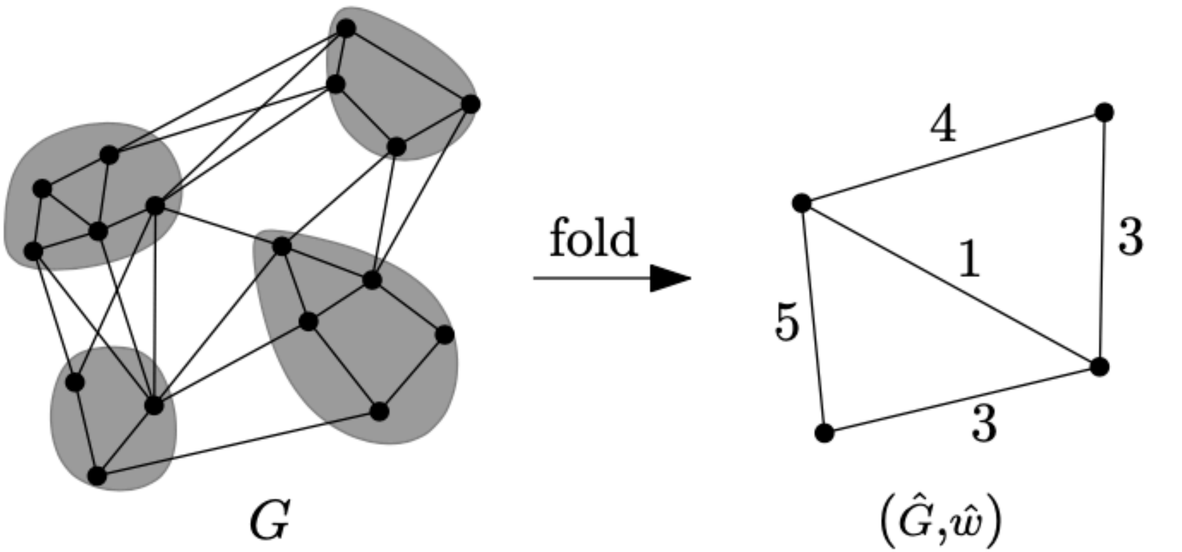
- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $|F| \leq 2\delta|E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـچگال روی کره واحد $\hat{d}$ـبعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـبعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $|F| \leq 2\delta|E|$
- *G: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های *vi
- گراف **G از روی *G
  - راس *vi تبدیل به **vi (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)

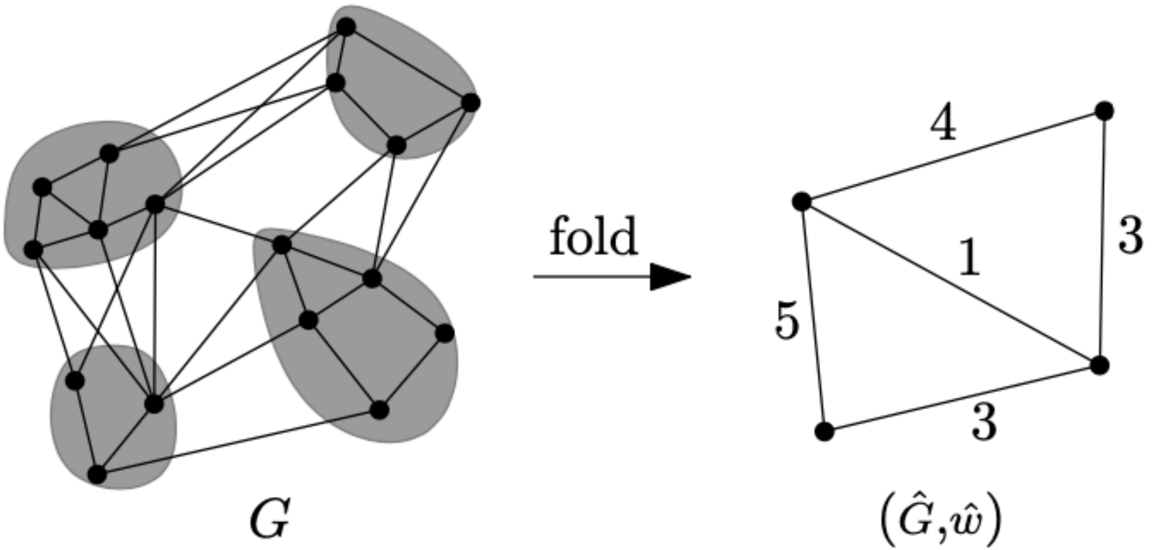
- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $|F| \leq 2\delta |E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*
    - راس vi* تبدیل به vi** (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله vi* و vi** حداکثر 2δ

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـچگال روی کره واحد $\hat{d}$ـبعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـبعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $|F| \leq 2\delta |E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*
  - راس vi* تبدیل به vi** (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله vi* و vi** حداکثر 2δ
  - یکی کردن راس‌های هم مقصد، وزن یال = تعداد یال‌های بین دو راس

- G^*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi^*
- گراف G^{**} از روی G^*
  - راس vi^* تبدیل به vi^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
  - فاصله vi^* و vi^{**} حداکثر 2δ
- تولید $\hat{G}$ یکی کردن راس‌های هم مقصد، وزن یال ($\hat{w}$) = تعداد یال‌های بین دو راس



- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه ـ δ ـ چگال روی کره واحد ـ $\hat{d}$ ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای ـ $\hat{d}$ ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - F = مجموعه یال‌های خراب $(|F| \le 2\delta|E|)$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف وزن‌دار $(\hat{G}, \hat{w})$ از روی گسسته‌سازی G* با نقاط $\hat{N}$ (G**) و سپس تا زدن
  - بردارهای $\hat{v}_i$ از روی گسسته‌سازی v_i^* با نقاط $\hat{N}$
  - $\hat{v}_i$ یک جواب شدنی برای SDP برای $(\hat{G}, \hat{w})$
    - اندازه‌شان = ۱
    - $SDP(\hat{G}, \hat{w}) \ge \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\} \in E((\hat{G}))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}}(1 - \hat{v}_{\hat{i}}^\top \hat{v}_{\hat{j}})/2$



چقدر؟

$$\mathsf{SDP}(G) > \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

پایان