بهینه‌سازی ترکیبیاتی (پاییز ۹۵-۹۴)

تمرین سری پنجم

۱. (آ) ماترویدی مثال بزنید که گرافیک نباشد.

(ب) دو گراف غیریکریخت مثال بزنید که ماترویدهای متناظرشان یکریخت باشند.

۲. فرض کنید برای ماتروید $M = (S, \mathcal{I})$ الگوریتم چندجمله‌ای A وجود دارد که مجموعه‌ی $U \subseteq S$ را به عنوان ورودی می‌گیرد و تعیین می‌کند که آیا $U \in \mathcal{I}$ یا خیر. با استفاده از A، الگوریتم A^* را ارائه دهید که مجموعه‌ی $U \subseteq S$ را به عنوان ورودی بگیرد و تعیین کند که آیا $U \in \mathcal{I}^*$ که $M^* = (S, \mathcal{I}^*)$ ماتروید دوگان M است.

۳. فرض کنید $M = (S, \mathcal{I})$ یک ماتروید باشد و $X, Y \subseteq \mathcal{I}$. نشان دهید $(M \setminus X)/Y = (M/Y) \setminus X$.

۴. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X باشند. مجموعه‌ی $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ را یک *ترانسورسال جزئی* از X_iها می‌گوییم اگر اندیس‌های متمایز $i_1, \ldots, i_m$ وجود داشته باشند به طوری که $y_j \in X_{i_j}$ برای هر $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

فرض کنید $\mathcal{I}$ شامل همه‌ی زیرمجموعه‌هایی از X باشد که یک ترانسورسال جزئی برای X_1 تا X_n هستند. ثابت کنید $M = (X, \mathcal{I})$ یک ماتروید است.

۵. فرض کنید E یک مجموعه‌ی متناهی باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی $\mathbf{B} \subseteq 2^E$ مجموعه‌ی پایه‌های یک ماتروید را مشخص می‌کند اگر $\mathbf{B} \neq \emptyset$، و برای هر $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$، و $y \in B_2 \backslash B_1$، وجود داشته باشد $x \in B_1 \backslash B_2$ به طوری که $(B_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in \mathbf{B}$.

۶. فرض کنید B_1 و B_2 دو پایه‌ی متمایز برای ماتروید M باشند.

(آ) فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دو بخش B_1 و B_2 باشد به طوری که در آن $e \in B_1$ با $f \in B_2$ مجاور است اگر و فقط اگر $(B_2 \cup \{e\}) \backslash \{f\} \in \mathbf{B}$ که $\mathbf{B}$ مجموعه‌ی پایه‌های M است. ثابت کنید G یک تطابق کامل دارد.

(ب) با استفاده از قسمت قبل ثابت کنید که یک تابع یک‌به‌یک و پوشای $\pi : B_1 \to B_2$ وجود دارد به طوری که برای هر $e \in B_1$، مجموعه‌ی $(B_2 \backslash \pi(e)) \cup e$ یک پایه برای M است.

۷. یک خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از مجموعه‌ها را *لایه‌ای* می‌گوییم اگر برای هر دو مجموعه‌ی $A, B \in \mathcal{F}$، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ یا $A \cap B = \emptyset$. فرض کنید که یک خانواده‌ی لایه‌ای $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های E در اختیار داریم و برای هر $A \in \mathcal{F}$، عدد صحیح $k(A)$ مشخص شده است. نشان دهید که $(E, \mathcal{I})$ یک ماتروید را مشخص می‌کند که

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : |X \cap A| \leq k(A),\ \forall A \in \mathcal{F}\}.$$

۸. ماتروید $M = (S, \mathcal{I})$ و دوگان آن $M^* = (S, \mathcal{I}^*)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید C و C^* به ترتیب دورهایی در M و M^* باشند. ثابت کنید $|C \cap C^*| \neq 1$.

۹. فرض کنید گراف همبند $G = (V, E)$ داده شده است. فرض کنید که به هر یال a از G یک رنگ $c(a)$ نسبت داده شده است. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای وجود زیردرخت فراگیری برای G که رنگ همه‌ی یالهای آن متفاوت باشد این است که برای هر انتخاب k رنگ، اگر یالهای با این k رنگ را از گراف حذف کنیم، گراف حاصل حداکثر $k+1$ مولفه داشته باشد. (راهنمایی: از قضیه‌ی اشتراک مترویدها استفاده کنید.)

۱۰. فرض کنید که گراف $G = (V, E)$، و تابع $k : V \to Z_+$ داده شده است. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان یالهای G را به گونه‌ای جهت‌دهی کرد که در گراف جهت‌دار حاصل درجه‌ی ورودی هر رأس v حداکثر $k(v)$ باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای وجود چنین جهت‌دهی‌ای این است که

$$E[P] \leq \sum_{v \in P} k(v), \ \ \forall P \subseteq V.$$

(راهنمایی: از قضیه‌ی اشتراک مترویدها استفاده کنید.)

۱۱. فرض کنید G یک گراف دوبخشی با بخشهای S و Tباشد، و فرض کنید M یک مترویدی روی مجموعه‌ی S باشد. ثابت کنید که تطابقی در G با اندازه‌ی $|T|$ وجود دارد به طوری که رأس‌های آلوده‌شده از S تشکیل یک مجموعه‌ی مستقل برای M بدهند اگر و فقط اگر برای هر $A \subseteq T$ داشته باشیم $r(N(A)) \geq |A|$، که $N(A)$ مجموعه‌ی همسایه‌های A است. (راهنمایی: از قضیه‌ی اشتراک مترویدها استفاده کنید.)

۱۲. سه مترویید M_1، M_2، و M_3 روی یک مجموعه‌ی S مثال بزنید که $P(M_1) \cap P(M_2) \cap P(M_3)$ با پوش محدب مجموعه‌های مستقل مشترک M_1 و M_2 و M_3 مساوی نباشد. ($P(M_i)$ چندوجهی مترویید M_i است).

۱۳. قضیه‌ی اشتراک مترویدها را از قضیه‌ی چندوجهی اشتراک مترویدها نتیجه بگیرید.