بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه شانزدهم

درس تحقیق در عملیات

کاربرد جبرخطی در زمان‌بندی

زمان‌بندی: مثال

	Single B&W	Duplex B&W	Duplex Color
Master's thesis, 90 pages two-sided, 10 B&W copies	—	45 min	60 min
All the Best Deals flyer, 1 page one-sided, 10,000 B&W copies	2h 45 min	4h 10 min	5h 30 min
Buyer's Paradise flyer, 1 page one-sided, 10,000 B&W copies	2h 45 min	4h 10 min	5h 30 min
Obituary, 2 pages two-sided, 100 B&W copies	—	2 min	3 min
Party platform, 10 pages two-sided, 5,000 color copies	—	—	3h 30 min

چون جواب بهتر از ۵:۳۰ داریم،
این‌ها در جواب بهینه نیستند!

تعریف‌ها

ماشین‌ها

$$M := \{1, \ldots, m\}$$

کارها

$$J := \{m+1, \ldots, m+n\}$$

هزینه ماتریس

ماشین i کار j

$$d_{ij} \qquad\qquad d_{ij} > 0$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimize} & & & t & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq & t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & \in & \mathbb{Z} & \text{for all } i \in M, j \in J.
\end{array}
$$

کارها

ماشین‌ها

هزینه ماتریس

ماشین i کار j

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimize} & & & t & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq & t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & \in & \mathbb{Z} & \text{for all } i \in M, j \in J.
\end{array}
$$

کارها

ماشین‌ها

هزینه ماتریس

ماشین **i** کار **j**

$x \in \{0,1\}$

لازم نیست

آرام‌سازی

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimize} & t & & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq & t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J
\end{array}
$$

آرام‌سازی

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimize} & t & & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq & t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J
\end{array}
$$

اضافه کنیم

$$x_{ij} \;=\; 0 \qquad \text{for all } i \in M, j \in J \text{ with } d_{ij} > T$$

T = بهینه

آرام‌سازی شده + قیود اضافه

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize} & t & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & = 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \text{ with } d_{ij} > T.
\end{array}
$$

آرام‌سازی شده + قیود اضافه

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize} & t & & \\
\text{subject to} & \sum_{i\in M} x_{ij} = 1 & & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j\in J} d_{ij}x_{ij} \le t & & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} \ge 0 & & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} = 0 & & \text{for all } i \in M, j \in J \text{ with } d_{ij} > T.
\end{array}
$$

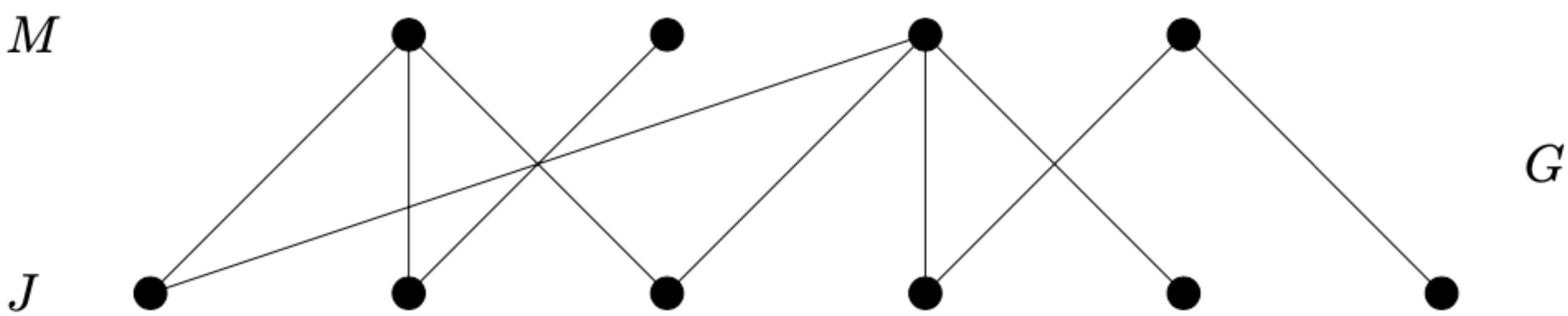
الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه آرام‌سازی شده

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

8.3.2 Lemma. *In any subgraph of G (obtained by deleting edges, or vertices with their incident edges), the number of edges is at most the number of vertices.*



۱ های ستون‌های مربوط به یال حاضرند

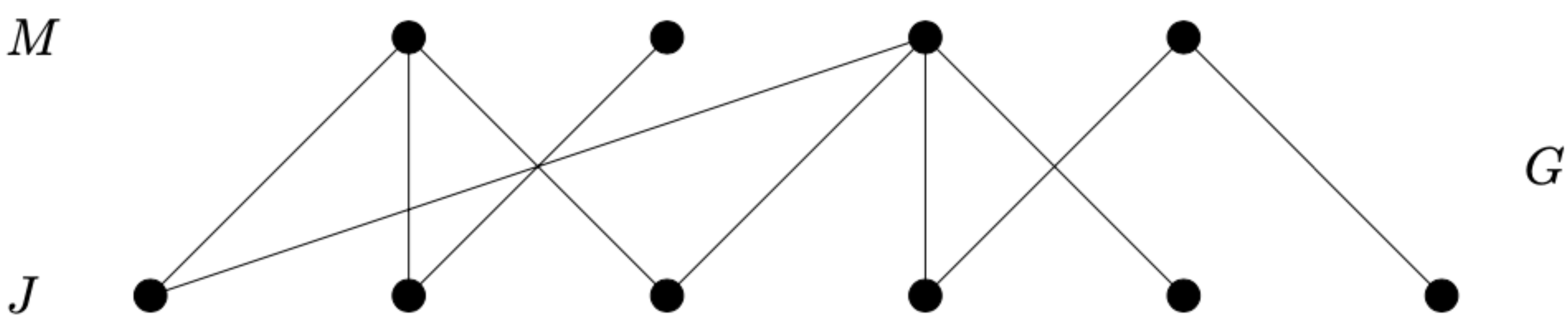
=> ستون‌ها مستقل‌اند

=> مرتبه سطری = مرتبه ستونی

=> تعداد ستون‌ها نابیشتر از سطرها

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* $\mathrm{LPR}(T)$ *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

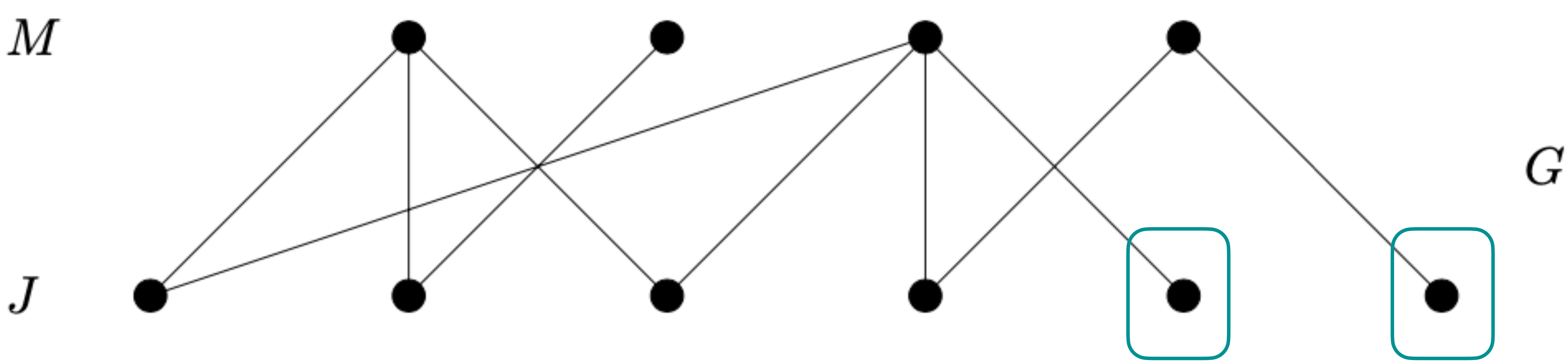
bfs



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱



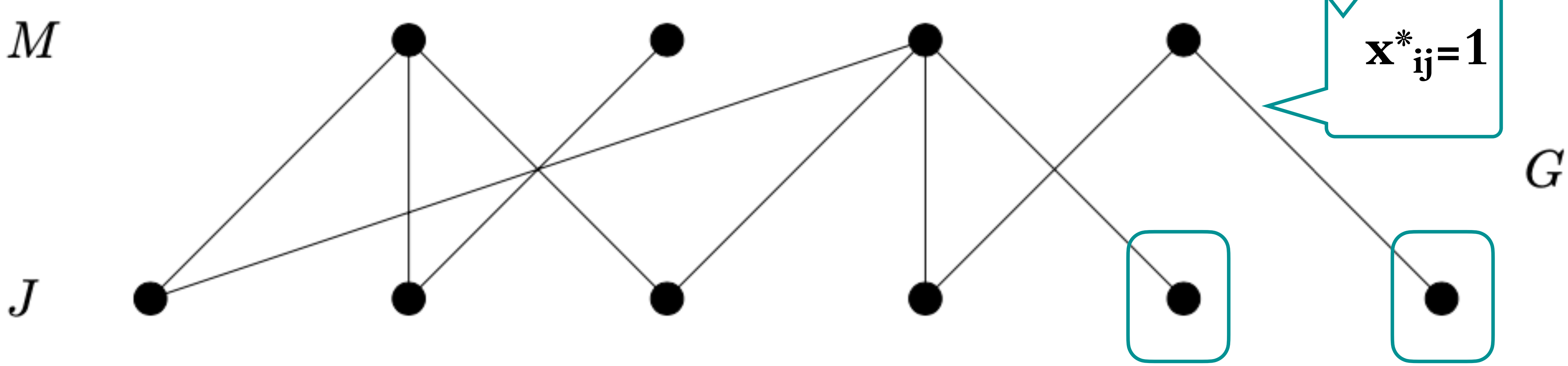
8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimize} & & t & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq & t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & = & 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \text{ with } d_{ij} > T.
\end{array}
$$

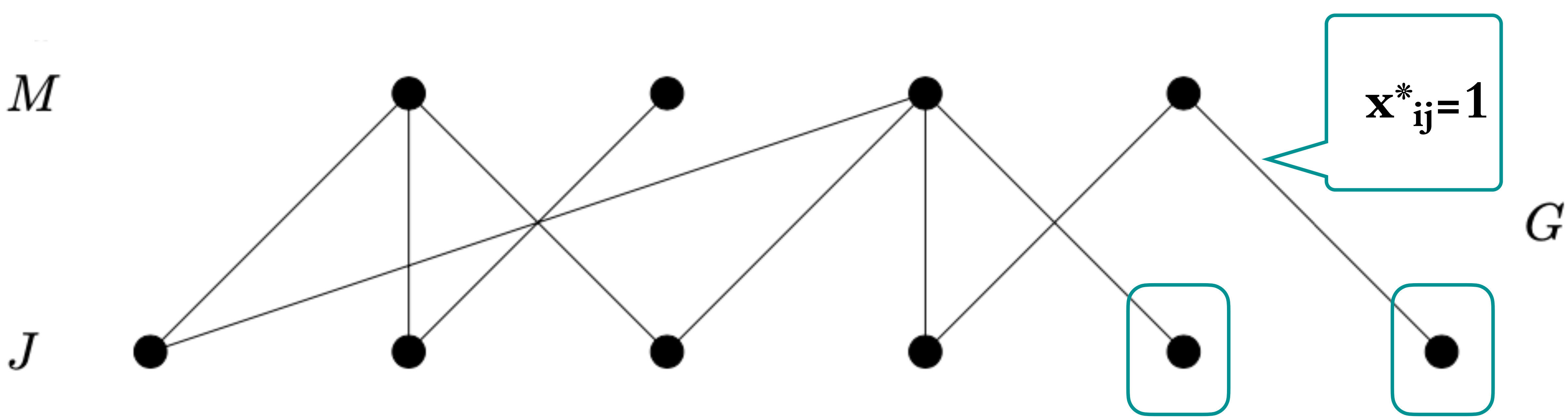
$x^*_{ij}=1$



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱



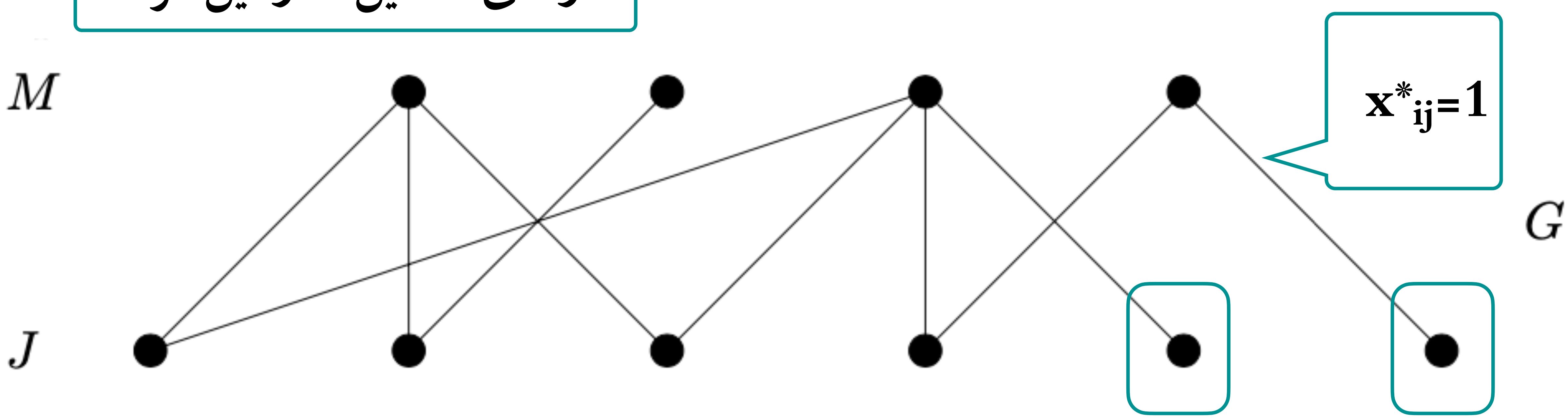
8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i: $\sum_{j\in S_i} d_{ij} =$

کارهای ماشین i در این مرحله



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

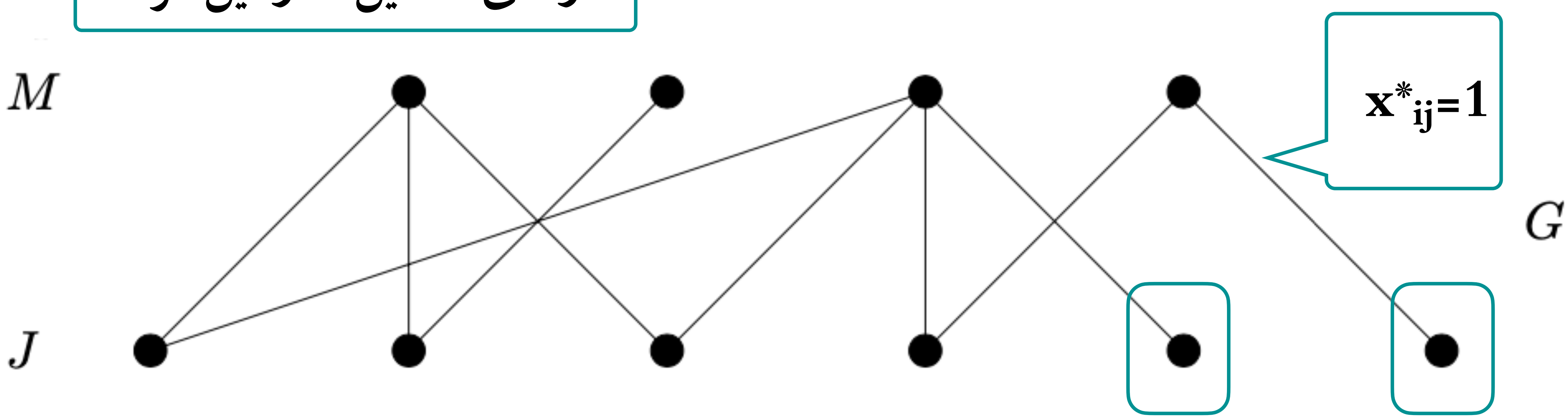
مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

$x^*_{ij}=1$

برای هر ماشین i:

$$\sum_{j\in S_i} d_{ij} = \sum_{j\in S_i} d_{ij} x^*_{ij}$$

کارهای ماشین i در این مرحله



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

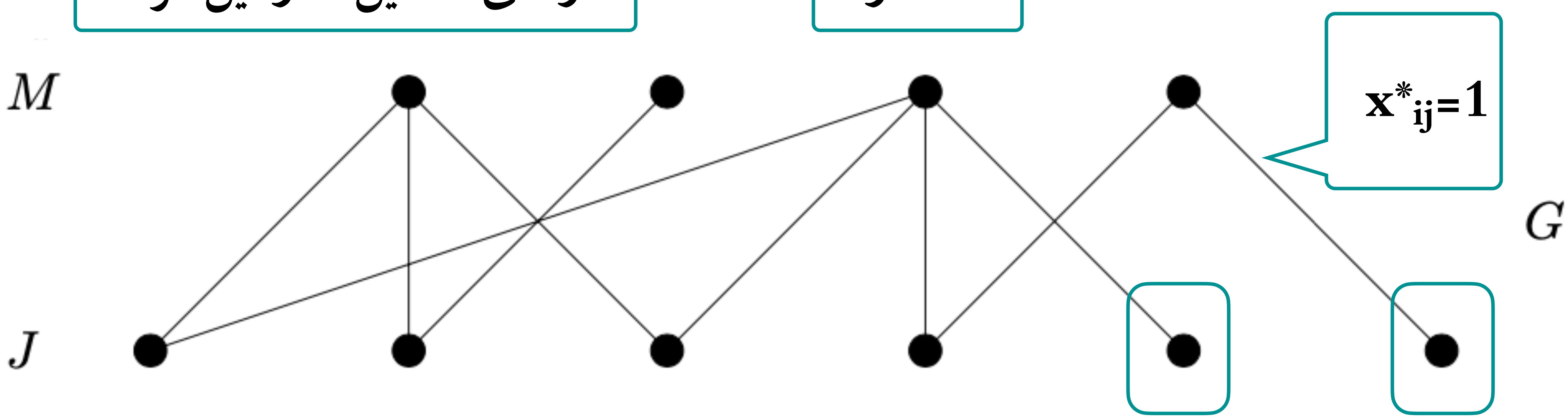
$x^*_{ij}=1$

برای هر ماشین i:

$$\sum_{j\in S_i} d_{ij} = \sum_{j\in S_i} d_{ij}x^*_{ij} \le \sum_{j\in J} d_{ij}x^*_{ij}$$

کارهای ماشین i در این مرحله

همه کارها



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation LPR(T) is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

$x^*_{ij}=1$

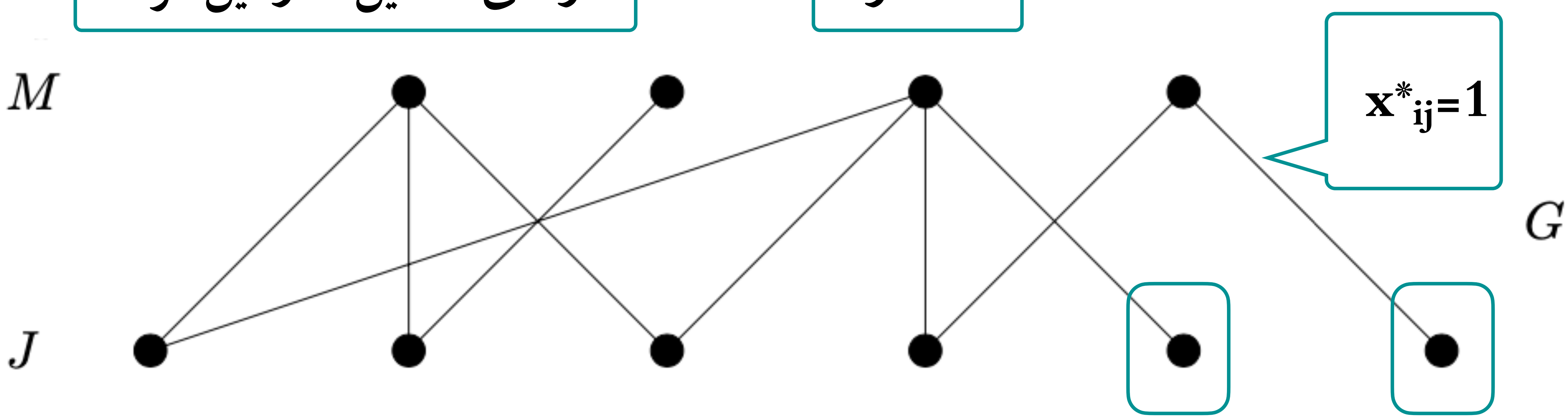
برنامه‌ریزی

برای هر ماشین i:

$$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

کارهای ماشین i در این مرحله

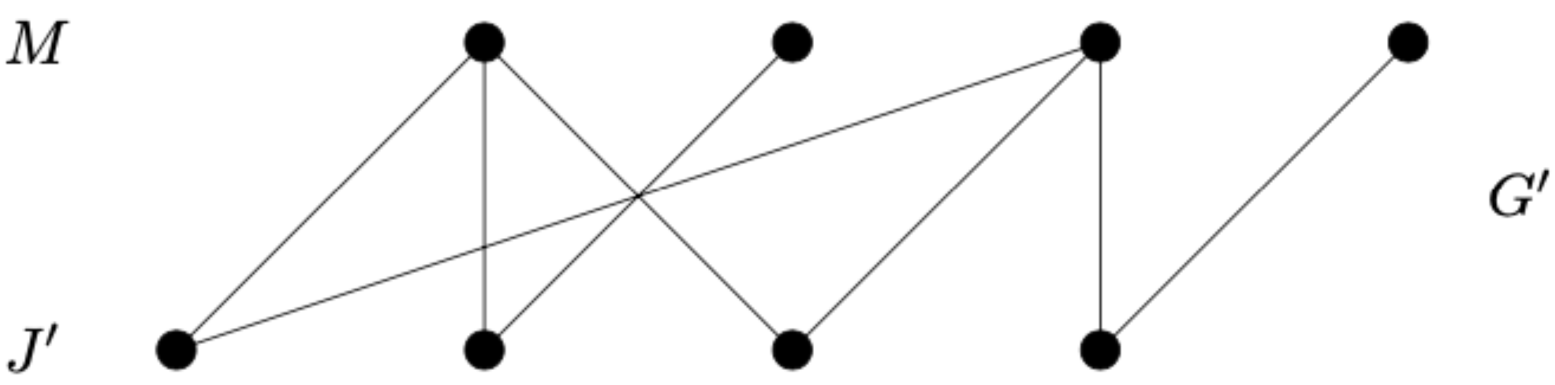
همه کارها



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* $\mathrm{LPR}(T)$ *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۲: بقیه کارها

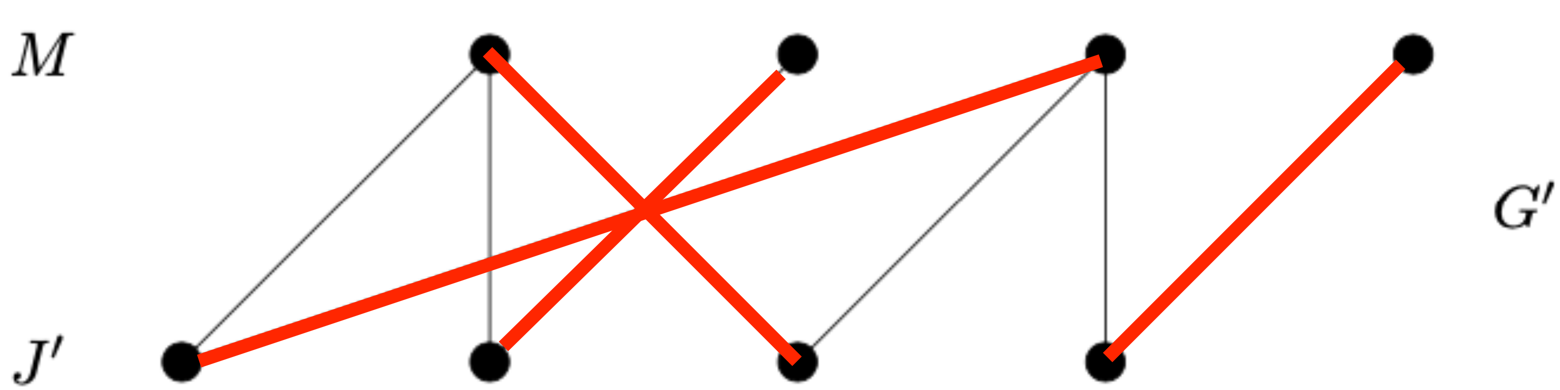


8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۲ : بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation $\mathrm{LPR}(T)$ is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

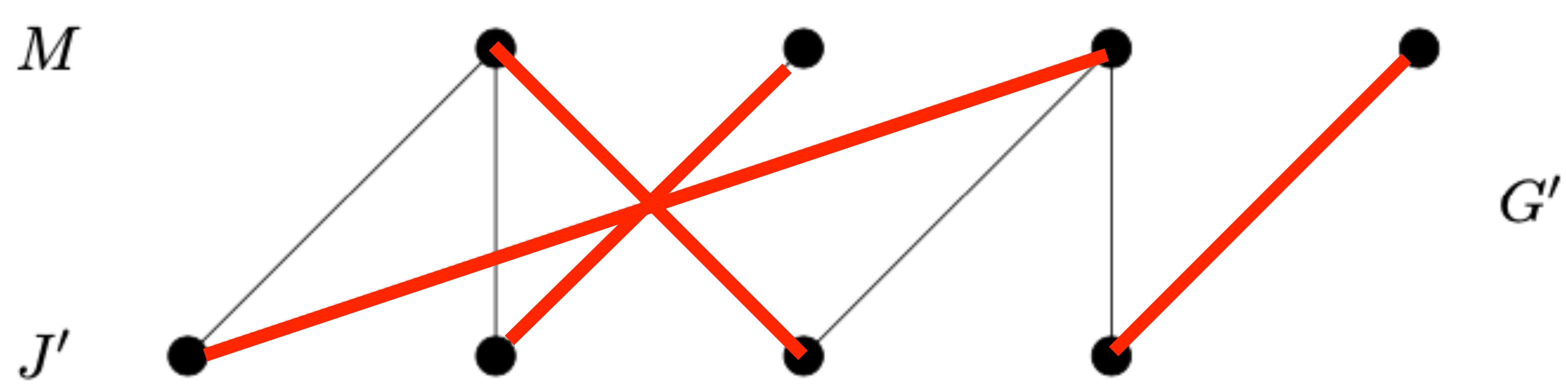
bfs

مرحله ۲ : بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

قضیه هال:

به ازای هر $J' \in J''$ داریم $|J''| \geq |N(J'')|$ <==> تطابق پوشاننده J' داریم



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation $\mathrm{LPR}(T)$ is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

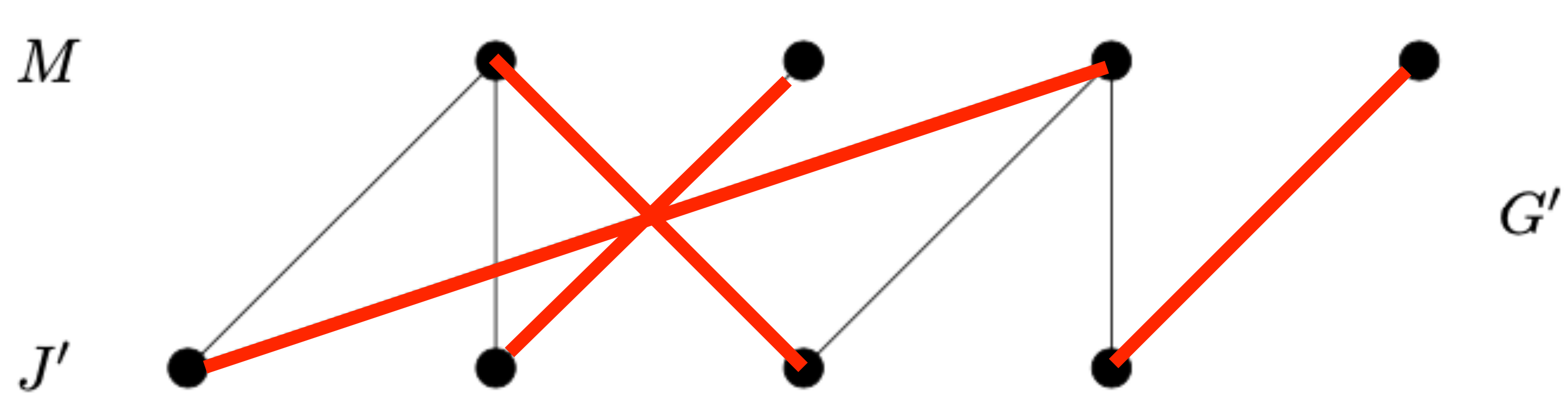
مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

قضیه هال:

به ازای هر $J'' \in J'$ داریم $|N(J'')| \geq |J''|$ <==> تطابق پوشاننده J' داریم

$|J'' \cup N(J'')| \geq e \geq 2|J''|$



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۲: بقیه کارها

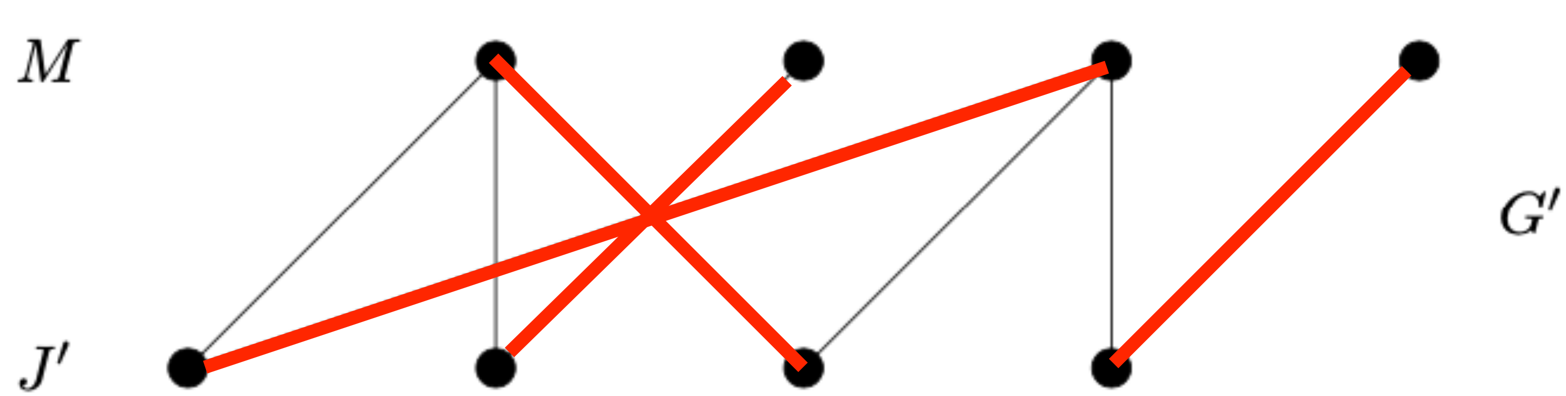
یک تطابق پوشاننده کارها دارد

قضیه هال:

به ازای هر $J'' \in J'$ داریم $|N(J'')| \geq |J''|$ <==> تطابق پوشاننده J' داریم

$|J'' \cup N(J'')| \geq e \geq 2|J''|$

یال‌های خارج شونده از J''



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

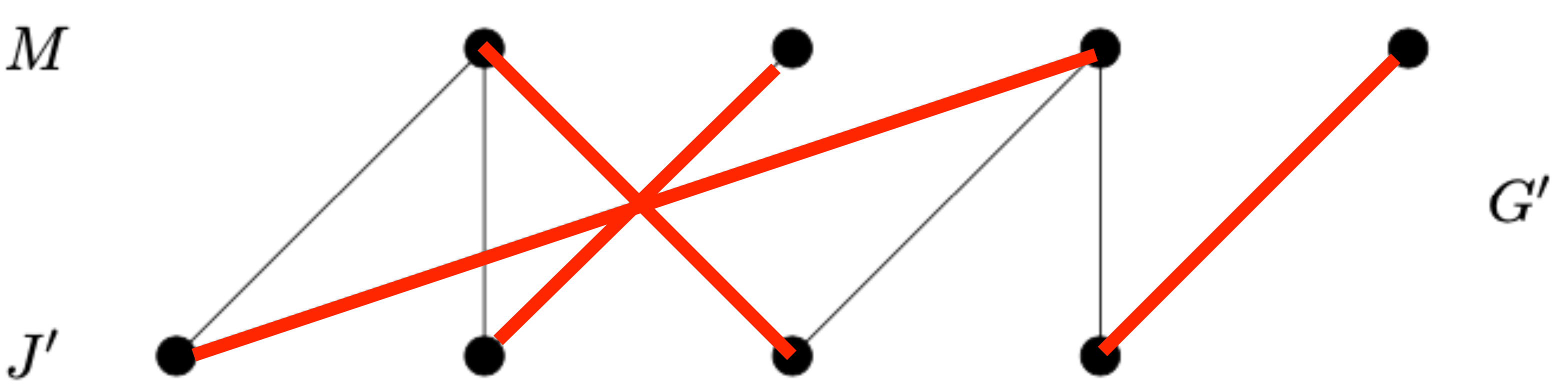
قضیه هال:

به ازای هر $J'' \in J'$ داریم $|N(J'')| \geq |J''|$ <==> تطابق پوشاننده J' داریم

$|J'' \cup N(J'')| \geq e \geq 2|J''|$

درجه هر راس => ۲

یال‌های خارج شونده از J''



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۲ : بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

قضیه هال:

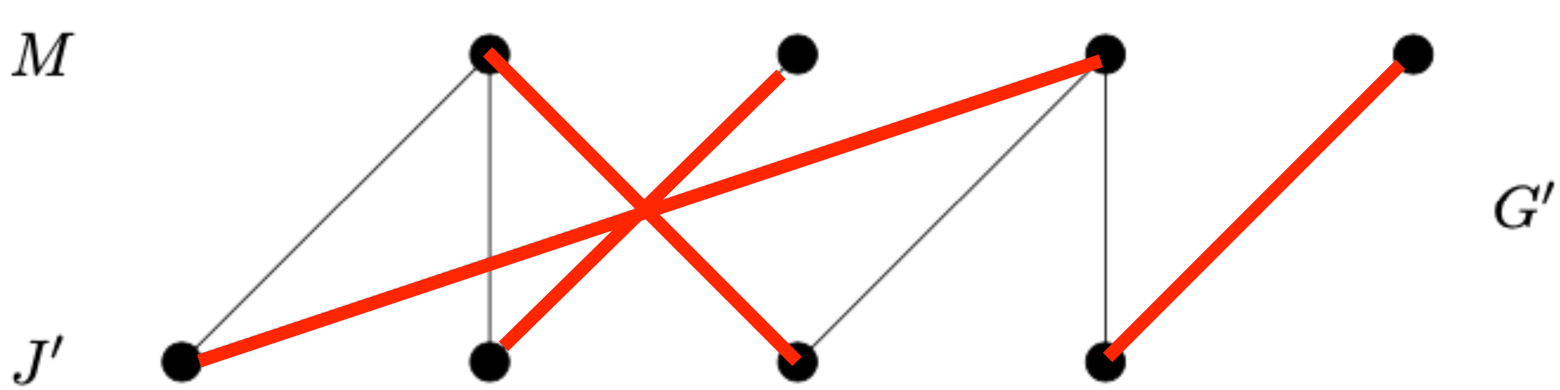
به ازای هر $J'' \in J'$ داریم $|N(J'')| \geq |J''|$ <==> تطابق پوشاننده J’ داریم

$$|J'' \cup N(J'')| \geq e \geq 2|J''|$$

قضیه قبل

درجه هر راس => ۲

یال‌های خارج شونده از J’’



8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i: $$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation LPR(T) is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i:
$$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

زمان مرحله ۱ + زمان مرحله ۲ => زمان اتمام کار ماشین i

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation LPR(T) is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i: $$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

زمان مرحله ۱ + زمان مرحله ۲ =< زمان اتمام کار ماشین i

حداکثر t*

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i:

$$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x_{ij}^* \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^* \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

زمان اتمام کار ماشین i <= زمان مرحله ۱ + زمان مرحله ۲

یک کار،
هر کار => T

حداکثر t*

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* LPR(T) *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i:
$$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

زمان مرحله ۱ + زمان مرحله ۲ => زمان اتمام کار ماشین i

حداکثر t*

حداکثر T

یک کار،
هر کار => T

8.3.3 Lemma. *Let $T \geq 0$ be such that the LP relaxation* $\mathrm{LPR}(T)$ *is feasible, and suppose that a feasible solution is given that satisfies Assumption 8.3.1 and has value $t = t^*$. Then we can efficiently construct a schedule of makespan at most $t^* + T$.*

bfs

مرحله ۱: کارهای با درجه ۱

برای هر ماشین i:
$$\sum_{j \in S_i} d_{ij} = \sum_{j \in S_i} d_{ij} x^*_{ij} \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x^*_{ij} \leq t^*$$

مرحله ۲: بقیه کارها

یک تطابق پوشاننده کارها دارد

$<= t^* + T$ زمان مرحله ۱ + زمان مرحله ۲ => زمان اتمام کار ماشین i

حداکثر t^*

حداکثر T

یک کار،
هر کار => T

تا اینجا:

$t^* + T \Rightarrow$

تا اینجا:

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه آرام‌سازی شده

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$t^* + T$ =>

انتخاب T

الگوریتم نهایی:

۱ــ محاسبه T مناسب،

۲ــ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ــ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$t^* + T \Rightarrow$

انتخاب T

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$t^* + T$ =>

برای اینکه

« $t^* <= IP^*$ »

انتخاب T

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

T >= IP*

برای اینکه

« t* <= IP* »

t* + T =>

انتخاب T

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

باید بگذاریم:

$T = IP^*$

$T >= IP^*$

برای اینکه

« $t^* <= IP^*$ »

$t^* + T =>$

انتخاب T

چطوری؟!

باید بگذاریم:

$T = IP^*$

$T >= IP^*$

برای اینکه

« $t^* <= IP^*$ »

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$t^* + T =>$

انتخاب T

چطوری؟!

باید بگذاریم:

$T = IP^*$

الگوریتم نهایی:

۱ـ محاسبه T مناسب،

۲ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$T >= IP^*$

برای اینکه

« $t^* <= IP^*$ »

$t^* + T =>$

انتخاب T

چطوری؟!

باید بگذاریم:

$T = IP^*$

الگوریتم نهایی:

۱ ـ محاسبه T مناسب،

$T >= IP^*$

۲ ـ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

برای اینکه

« $t^* <= IP^*$ »

۳ ـ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$t^* + T =>$

به هر حال جوابی داریم که $t^*+T =>$

انتخاب T

چطوری؟!

باید بگذاریم:

$T = IP^*$

الگوریتم نهایی:

۱ــ محاسبه T مناسب،

۲ــ حل نسخه ~~آرام‌سازی شده~~

۳ــ جواب خوب براساس برنامه‌ریزی خطی

$T >= IP^*$

برای اینکه

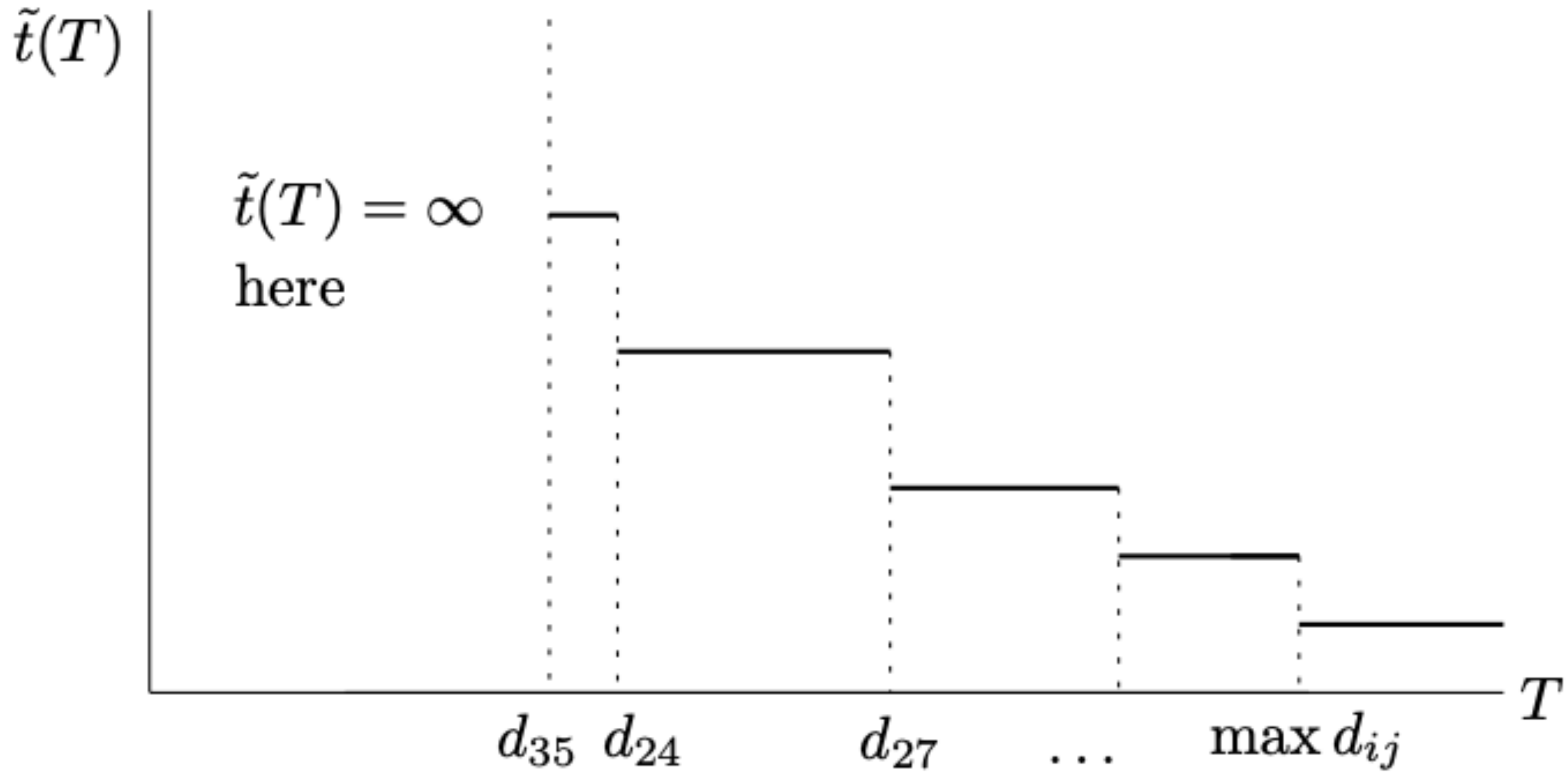
« $t^* <= IP^*$ »

$t^* + T =>$

به هر حال جوابی داریم که $t^* + T =>$

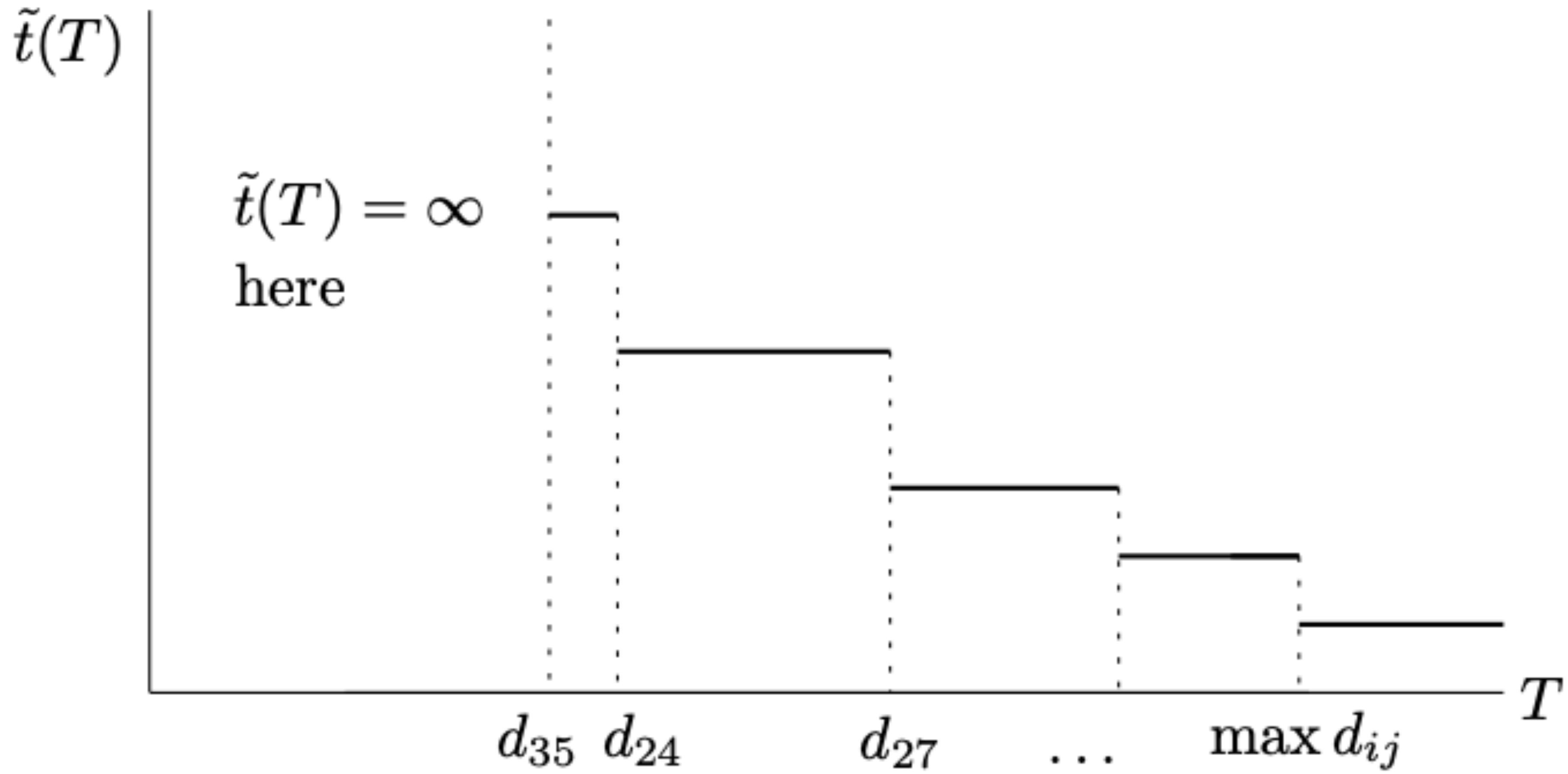
بهترین T: که $t^* + T$ را کمینه کند

چگونگی پیدا کردن بهترین T:



چگونگی پیدا کردن بهترین T:

بهترین T: که T+t* را کمینه کند



انتخاب پارامتر T

8.3.4 Theorem. *Let T^* be the value of T that minimizes $t^*(T) + T$. With $T = T^*$, the algorithm in the proof of Lemma 8.3.3 computes a schedule of makespan at most $2t_{\text{opt}}$.*

انتخاب پارامتر T

8.3.4 Theorem. *Let T^* be the value of T that minimizes $t^*(T) + T$. With $T = T^*$, the algorithm in the proof of Lemma 8.3.3 computes a schedule of makespan at most $2t_{\text{opt}}$.*

$$t^*(T^*) + T^* = \min_T \Big(t^*(T) + T\Big)$$

انتخاب پارامتر T

8.3.4 Theorem. *Let T^* be the value of T that minimizes $t^*(T) + T$. With $T = T^*$, the algorithm in the proof of Lemma 8.3.3 computes a schedule of makespan at most $2t_{\text{opt}}$.*

$$\begin{aligned} t^*(T^*) + T^* &= \min_T \Big(t^*(T) + T \Big) \\ &\leq t^*(t_{\text{opt}}) + t_{\text{opt}} \end{aligned}$$

T کمینه کننده

انتخاب پارامتر T

8.3.4 Theorem. *Let T^* be the value of T that minimizes $t^*(T) + T$. With $T = T^*$, the algorithm in the proof of Lemma 8.3.3 computes a schedule of makespan at most $2t_{\text{opt}}$.*

$$\begin{aligned} t^*(T^*) + T^* &= \min_T \Big(t^*(T) + T \Big) \\ &\leq t^*(t_{\text{opt}}) + t_{\text{opt}} \\ &\leq 2t_{\text{opt}}. \end{aligned}$$

T کمینه کننده

برای IP*،
LP آرام‌سازی است