بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه بیست و سوم: گرد کردن با میناتور (۲)

مرور

ایده مینیاتور

گراف:

G

SDP کانونی

جواب بهینه SDP:

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

$$\mathsf{SDP}(\hat{G}, \hat{w}) \geq \mathsf{SDP}(G) - \varepsilon|E|$$

می‌سازیم

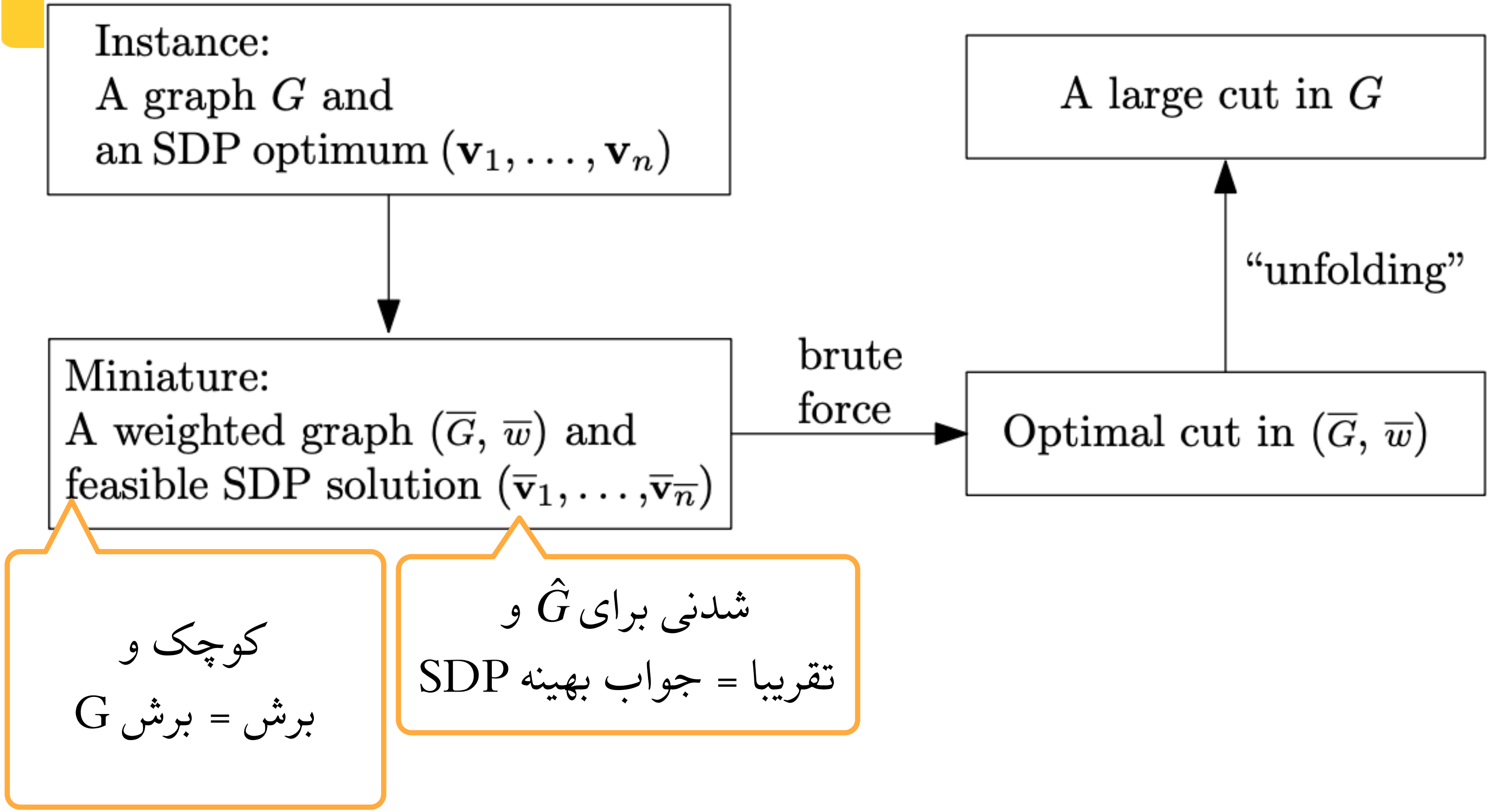
کوچک و

برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و

تقریبا = جواب بهینه SDP

$$(\hat{G}, \hat{w}) \qquad (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_{\hat{n}})$$


Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute
force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

الف)

13.2.14 Lemma (Dimension reduction). *Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors, let Φ be the random linear map as above, and let $t \geq 0$. Then, for a sufficiently large constant C,*

$$\mathrm{Prob}\Big[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\Big] \leq \frac{C}{dt^2}.$$

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{d}}(\gamma_1^T\mathbf{v}, \ldots, \gamma_d^T\mathbf{v}).$$

تصادفی گوسی n ـ بعدی

ب)

Lemma. *For every d and every $\delta \in (0,1)$, there exists a set $N \subseteq S^{d-1}$ that is δ-dense in S^{d-1} (that is, for every $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ there exists $\mathbf{z} \in N$ with $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$), and $|N| \leq (\frac{3}{\delta})^d$.*

- از روی ϵ یک $\delta > 0$

- از روی ϵ یک $0 < \delta$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم
- $$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی
- $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم
- $$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
- راس i خراب شده اگر $\|\mathbf{v}_i^*\| \notin [1-\delta, 1+\delta]$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$
- از روی δ یک $\hat{d}$ که $C/\hat{d}\delta^2 \leq \delta/3$
- مجموعه δــ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ــ بعدی
  - $$\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ــ بعدی می‌نشانیم
  - $$\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$$
- راس i خراب شده اگر $\|\mathbf{v}_i^*\| \notin [1-\delta, 1+\delta]$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - احتمال خراب شدن یک یال کمتر مساوی δ
  - $$\mathbf{E}\left[|F|\right] \leq \delta|E|$$

$$\boxed{\operatorname{Prob}\left[|\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \Phi(\mathbf{u})^T\Phi(\mathbf{v})| \geq t\right] \leq \frac{C}{dt^2}}$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δــ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ــ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ــ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $|F| \leq 2\delta |E|$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $|F| \leq 2\delta|E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*

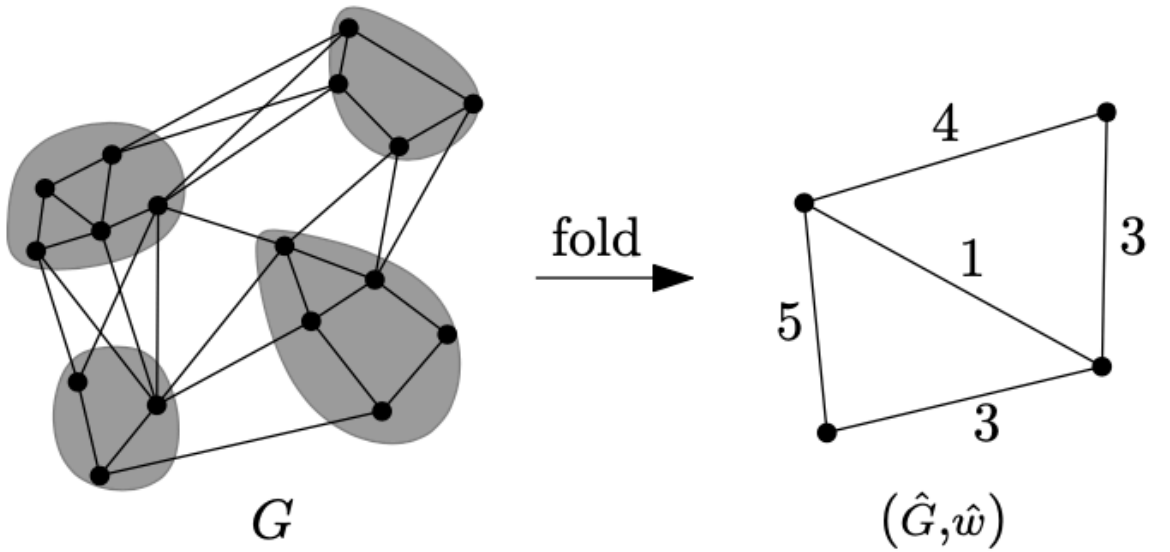
- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
    - $|F| \leq 2\delta |E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $|F| \leq 2\delta|E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*
  - راس vi* تبدیل به vi** (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - مجموعه یال‌های خراب: F
        - $|F| \leq 2\delta |E|$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف G** از روی G*
    - راس vi* تبدیل به vi** (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
        - فاصله vi* و vi** حداکثر 2δ

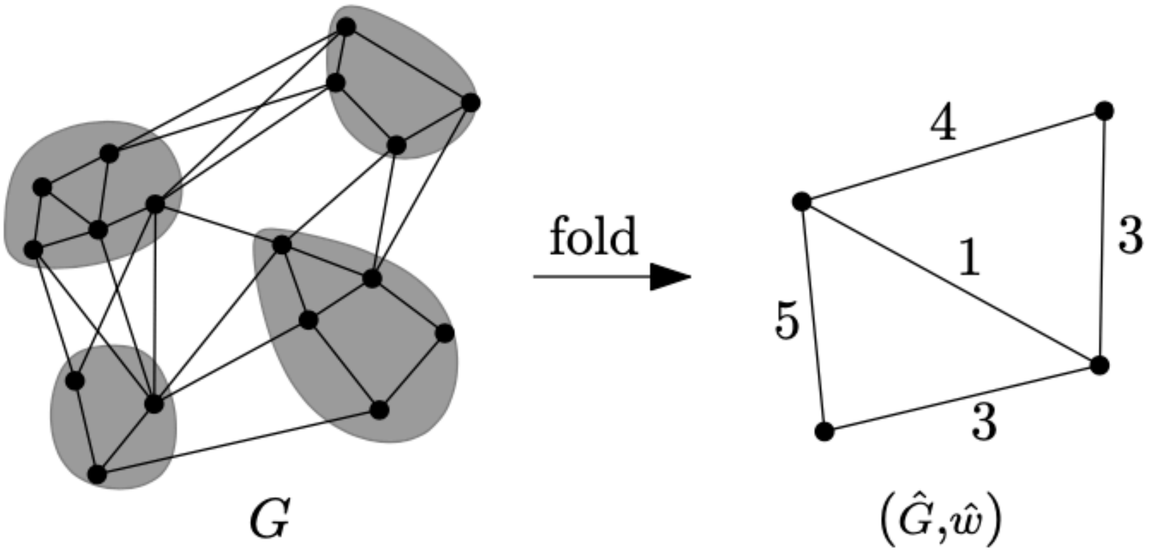
- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـچگال روی کره واحد $\hat{d}$ـبعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـبعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - مجموعه یال‌های خراب: F
  - $|F| \leq 2\delta|E|$
- G^*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi^*
- گراف G^{**} از روی G^*
  - راس vi^* تبدیل به vi^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
  - فاصله vi^* و vi^{**} حداکثر 2δ
  - یکی کردن راس‌های هم مقصد، وزن یال = تعداد یال‌های بین دو راس

- G^*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi^*
- گراف G^{**} از روی G^*
  - راس vi^* تبدیل به vi^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله vi^* و vi^{**} حداکثر 2δ
- تولید $\hat{G}$ یکی کردن راس‌های هم مقصد، وزن یال ($\hat{w}$) = تعداد یال‌های بین دو راس



- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه ـδ ـچگال روی کره واحد ـ$\hat{d}$ ـبعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \le \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای ـ$\hat{d}$ ـبعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
  - F = مجموعه یال‌های خراب $(|F| \le 2\delta |E|)$
- G*: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های vi*
- گراف وزن‌دار $(\hat{G}, \hat{w})$ از روی گسسته‌سازی G* با نقاط $\hat{N}$ (G**) و سپس تا زدن
  - بردارهای $\hat{v}_i$ از روی گسسته‌سازی v_i^* با نقاط $\hat{N}$
  - $\hat{v}_i$ یک جواب شدنی برای SDP برای $(\hat{G}, \hat{w})$
    - اندازه‌شان = ۱
    - $$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \ge \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\} \in E((\hat{G}))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}} (1 - \hat{v}_{\hat{i}}^\top \hat{v}_{\hat{j}})/2$$

تحلیل



چقدر؟

چقدر؟

$$\sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1-\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2 > \alpha\, \mathsf{SDP}(G) - \text{error}$$

- از روی ϵ یک $\delta > 0$ و از روی δ یک $\hat{d}$
- مجموعه δـ چگال روی کره واحد $\hat{d}$ـ بعدی $\hat{n} := |\hat{N}| \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{\hat{d}}$
- جواب SDP را در فضای $\hat{d}$ـ بعدی می‌نشانیم $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$
- می‌گوییم یال i و j خراب شده اگر $\left|(\mathbf{v}_i^*)^T \mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j\right| > \delta$ یا راس i یا راس j خراب شده
    - F = مجموعه یال‌های خراب ($|F| \leq 2\delta|E|$)
- *G: گراف پس از حذف F و راس‌های خراب شده و راس‌های *vi
- **G: گسسته‌سازی *G، تولید راس‌های **vi
- گراف وزن‌دار $(\hat{G}, \hat{w})$ با تا زدن (یکی کردن راس‌های با **vi مساوی)

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\} \in E((\hat{}G))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}}(1 - \hat{v}_{\hat{i}}^{\top}\hat{v}_{\hat{j}})/2$$

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$SDP(\hat{G},\hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\}\in E((\hat{G}))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}}(1-\hat{v}_{\hat{i}}^{\top}\hat{v}_{\hat{j}})/2$$

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$Gap \geq \frac{SDP(\hat{G},\hat{w})}{Opt(\hat{G},\hat{w})}$$

$$SDP(\hat{G},\hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\}\in E((\hat{G}))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}}(1-\hat{v}_{\hat{i}}^{\top}\hat{v}_{\hat{j}})/2$$

$$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$$

$$Gap \geq \frac{SDP(\hat{G},\hat{w})}{Opt(\hat{G},\hat{w})}$$

$$Opt(\hat{G},\hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G},\hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G},\hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{i},\hat{j}\}\in E((\hat{G}))} \hat{w}_{\hat{i},\hat{j}}(1 - \hat{v}_{\hat{i}}^{\top}\hat{v}_{\hat{j}})/2$$

- از G^{**} به $\hat{G}$
  - یکی کردن راس‌هایی که به یک نقطه روی $\hat{N}$ منتسب شده‌اند

- از G** به $\hat{G}$
  - یکی کردن راس‌هایی که به یک نقطه روی $\hat{N}$ منتسب شده‌اند

$$\sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1-\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)}(1-(\mathbf{v}_i^{**})^T\mathbf{v}_j^{**})/2$$

- از G** به $\hat{G}$
  - یکی کردن راس‌هایی که به یک نقطه روی $\hat{N}$ منتسب شده‌اند

$$\sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1-\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^{T}\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$=$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^{*})}(1-(\mathbf{v}_{i}^{**})^{T}\mathbf{v}_{j}^{**})/2$$

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس v_i^* تبدیل به v_i^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله v_i^* و v_i^{**} حداکثر 2δ

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس v_i^* تبدیل به v_i^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله v_i^* و v_i^{**} حداکثر 2δ

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس vi^* تبدیل به vi^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله vi^* و vi^{**} حداکثر 2δ

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$v_i{}^{**\top} v_j{}^{**} = (v_i{}^* + a_i)^\top (v_j{}^* + a_j)$$

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس vi^* تبدیل به vi^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله vi^* و vi^{**} حداکثر 2δ

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)}(1-(\mathbf{v}_i^{**})^T\mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$v_i{**}^\top v_j{**} = (v_i{*}+a_i)^\top(v_j{*}+a_j)$$
$$= v_i{*}^\top v_j{*} + v_i{*}^\top a_j + a_i^\top v_j{*} + a_i^\top a_j$$

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس v_i^* تبدیل به v_i^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله v_i^* و v_i^{**} حداکثر 2δ

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)}(1-(\mathbf{v}_i^{**})^T\mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\begin{aligned} v_i{**}^{\top} v_j{**} &= (v_i{*}+a_i)^{\top}(v_j{*}+a_j) \\ &= v_i{*}^{\top} v_j{*} + v_i{*}^{\top} a_j + a_i^{\top} v_j{*} + a_i^{\top} a_j \\ &\leq v_i{*}^{\top} v_j{*} + 8\delta \end{aligned}$$

- از G^* به G^{**}: گسسته‌سازی G^* با نقاط $\hat{N}$
  - راس v_i^* تبدیل به v_i^{**} (نزدیک‌ترین نقطه از $\hat{N}$)
    - فاصله v_i^* و v_i^{**} حداکثر 2δ

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1-(\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\begin{aligned} {v_i^{**}}^\top v_j^{**} &= (v_i^* + a_i)^\top (v_j^* + a_j) \\ &= {v_i^*}^\top v_j^* + {v_i^*}^\top a_j + a_i^\top v_j^* + a_i^\top a_j \\ &\leq {v_i^*}^\top v_j^* + 8\delta \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - {v^*_i}^\top v^*_j)/2 - 4\delta |E|$$

- از G به G^*:
  - حذف یال‌های خراب ($|F| \le 2\delta|E|$)
  - تبدیل $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$

- از G به G^*:
  - حذف یال‌های خراب ($|F| \leq 2\delta |E|$)
  - تبدیل $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - v{*}_i^{\top} v{*}_j)/2$$

- از G به G^*:
  - حذف یال‌های خراب ($|F| \leq 2\delta|E|$)
  - تبدیل $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - v{*}_i^{\top} v{*}_j)/2$$

یال‌های غیر خراب،

$$v{*}_i^{\top} v{*}_j \leq v_i^{\top} v_j + \delta$$

- از G به G^*:
  - حذف یال‌های خراب ($|F| \le 2\delta |E|$)
  - تبدیل $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - {v^*}_i^\top {v^*}_j)/2$$

یال‌های غیر خراب،

${v^*}_i^\top {v^*}_j \le v_i^\top v_j + \delta$

یال‌های خراب

- از G به G^*:
  - حذف یال‌های خراب ($|F| \leq 2\delta|E|$)
  - تبدیل $\mathbf{v}_i^* := \Phi(\mathbf{v}_i)$

$$\sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - v{*}_i^{\top} v{*}_j)/2$$

یال‌های غیر خراب،

$v{*}_i^{\top} v{*}_j \leq v_i^{\top} v_j + \delta$

یال‌های خراب

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G)} (1 - v_i^{\top} v_j)/2 - 2\delta|E| - \frac{\delta}{2}|E|$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} (1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} (1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - v *_i^\top v*_j)/2 - 4\delta |E|$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} (1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\geq \sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - v*_i^\top v*_j)/2 - 4\delta |E|$$

$$\geq \sum_{\{i,j\} \in E(G)} (1 - v_i^\top v_j)/2 - 2\delta |E| - \frac{\delta}{2} |E| - 4\delta |E|$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - v*_i^\top v*_j)/2 - 4\delta|E|$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G)} (1 - v_i^\top v_j)/2 - 2\delta|E| - \frac{\delta}{2}|E| - 4\delta|E|$$

$$= SDP(G) - O(\delta)|E|$$

$$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$$

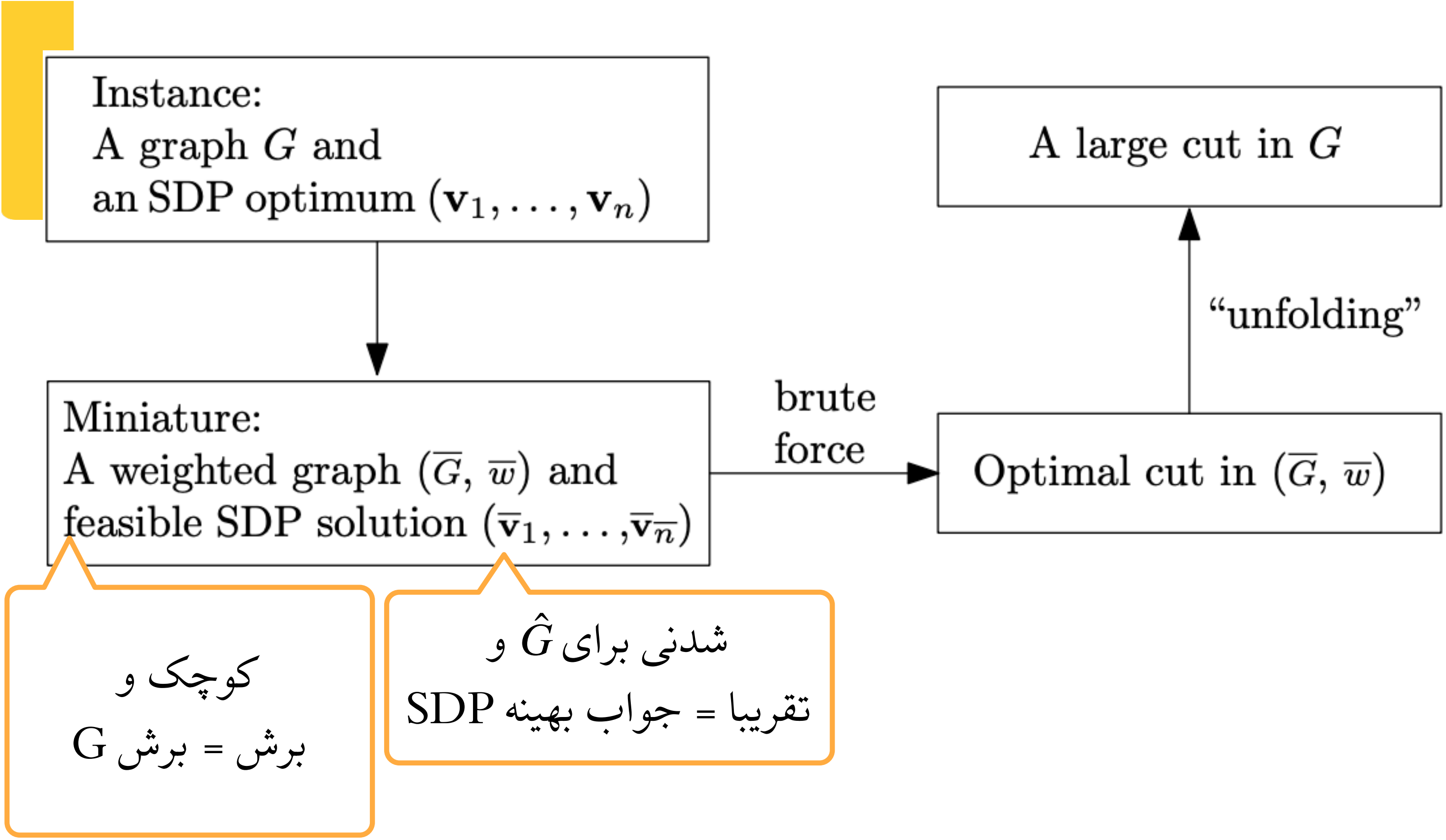
$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum\nolimits_{\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} \in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} (1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

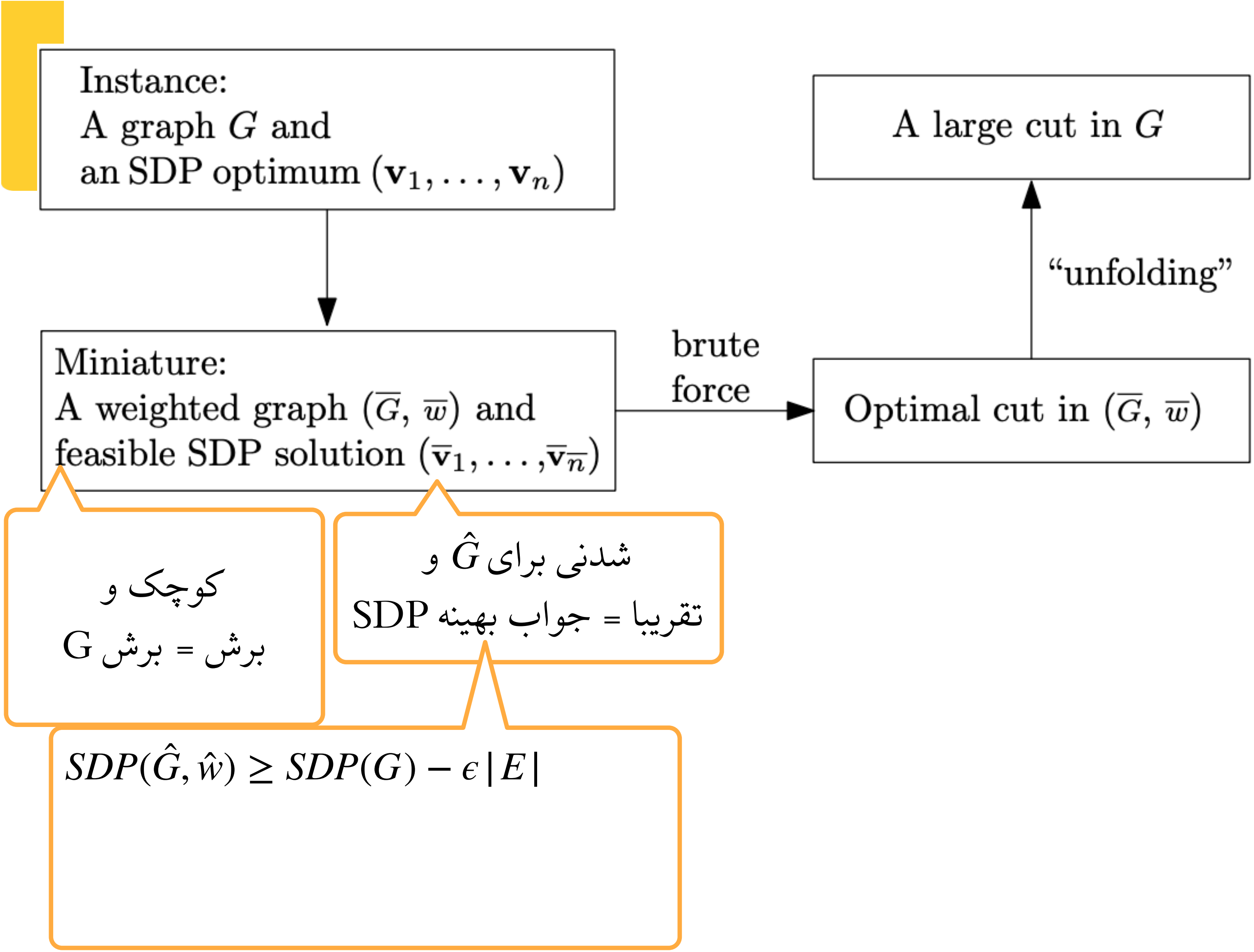
$$= \sum\nolimits_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

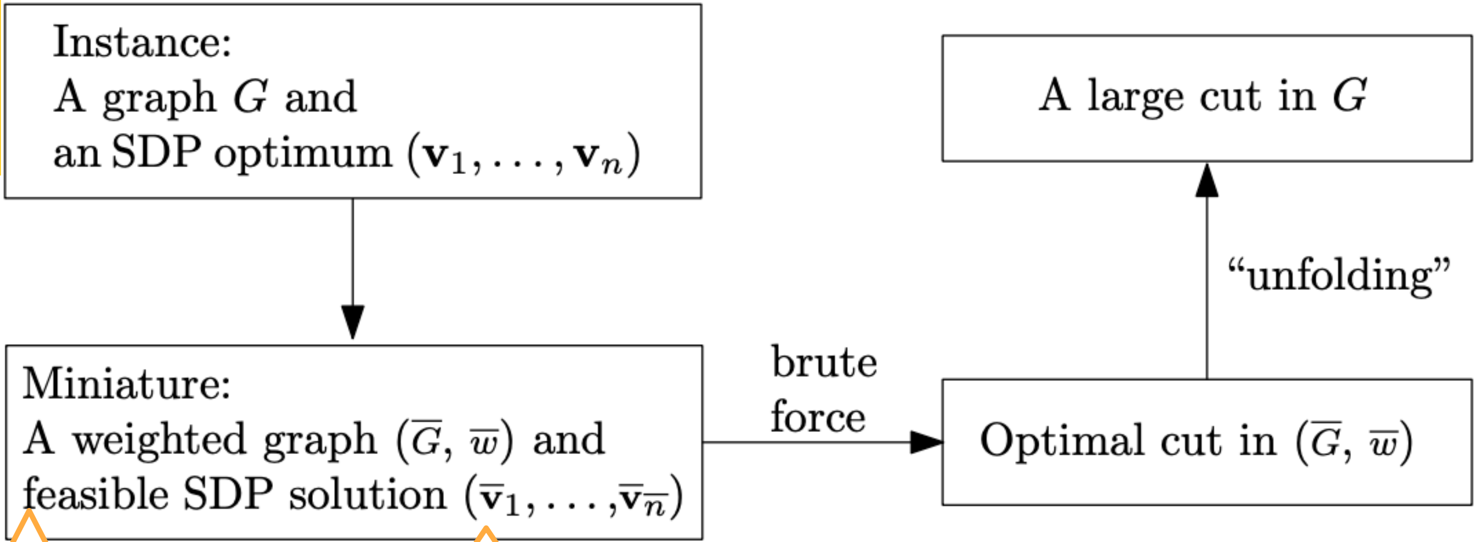
$$\geq \sum_{\{i,j\} \in E(G^*)} (1 - v *_i^\top v*_j)/2 - 4\delta |E|$$

$$\geq \sum_{\{i,j\} \in E(G)} (1 - v_i^\top v_j)/2 - 2\delta |E| - \frac{\delta}{2} |E| - 4\delta |E|$$

$$= SDP(G) - O(\delta) |E| = SDP(G) - \epsilon |E|$$


Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
A large cut in G
"unfolding"
brute
force
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP


Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq SDP(G) - \epsilon |E|$



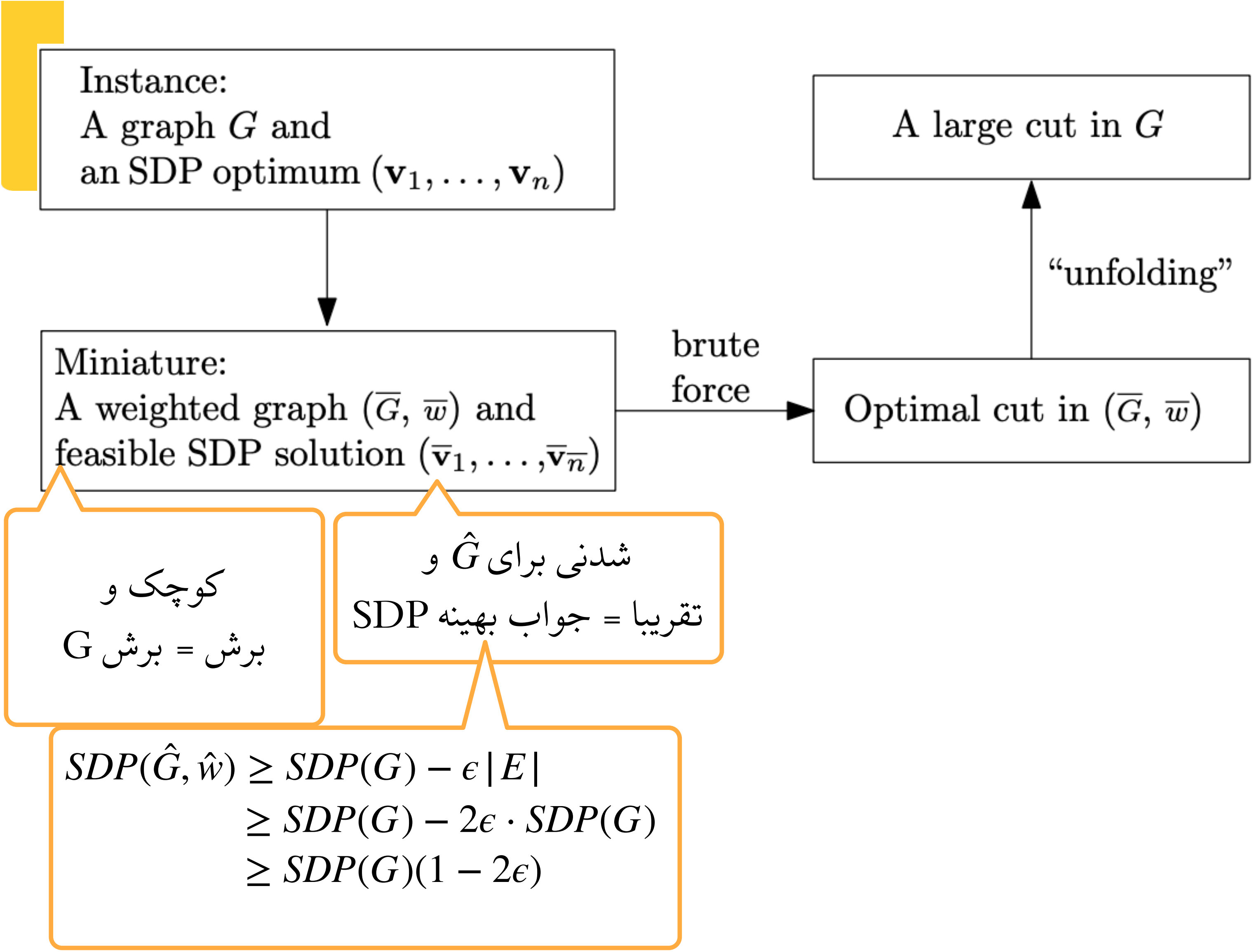
کوچک و

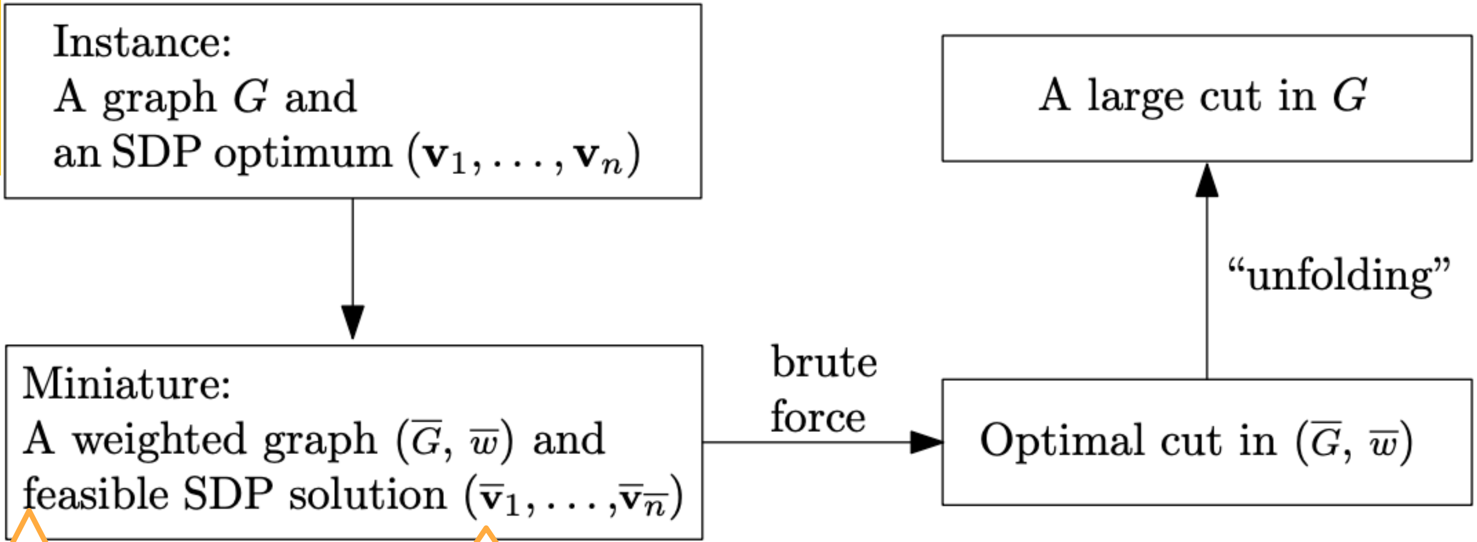
برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و

تقریبا = جواب بهینه SDP

$$
\begin{aligned}
SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon |E| \\
&\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G)
\end{aligned}
$$


Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$$\begin{aligned} SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon\,|E| \\ &\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \\ &\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon) \end{aligned}$$

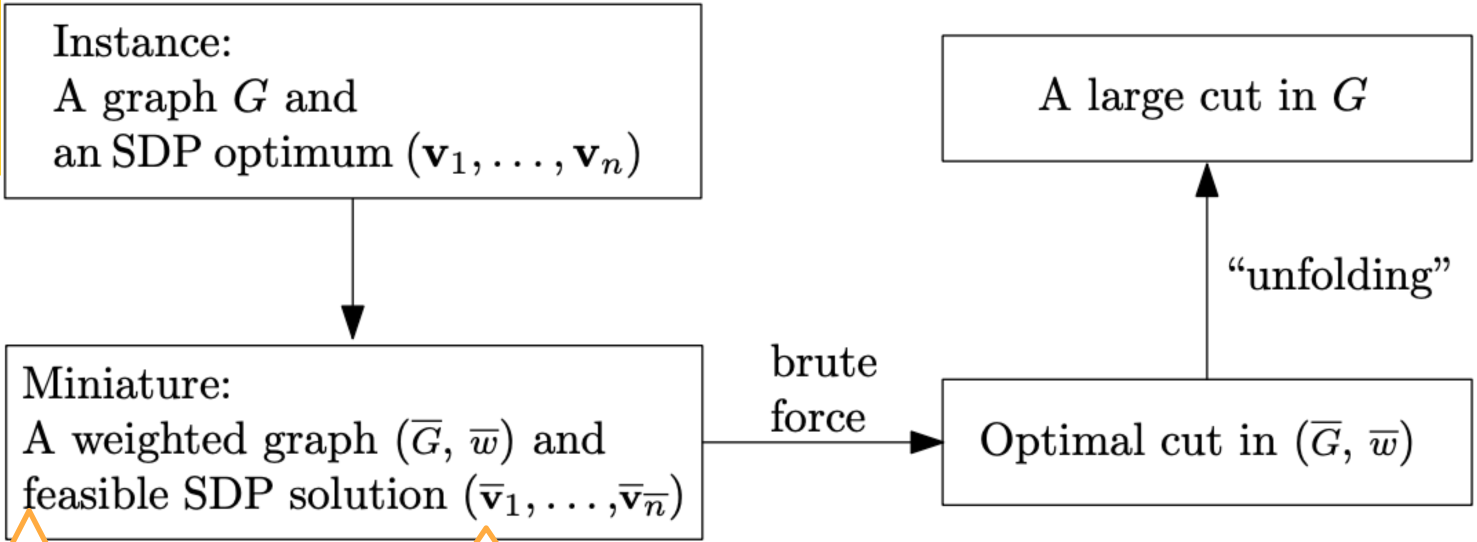


کوچک و
برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

$$\begin{aligned} SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon\,|E| \\ &\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \\ &\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon) \end{aligned}$$

$$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1 + 3\epsilon}$$

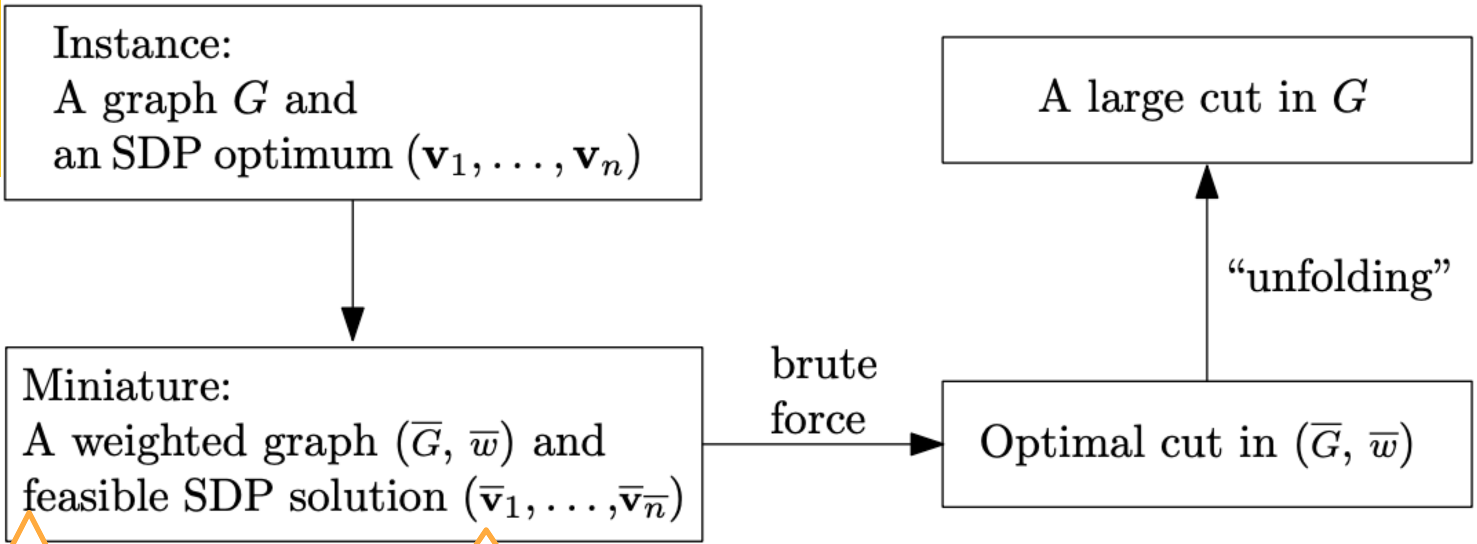


کوچک و
برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

$$
\begin{aligned}
SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon |E| \\
&\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \\
&\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon) \\
&\geq SDP(G)/(1 + 3\epsilon)
\end{aligned}
$$

$$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1 + 3\epsilon}$$



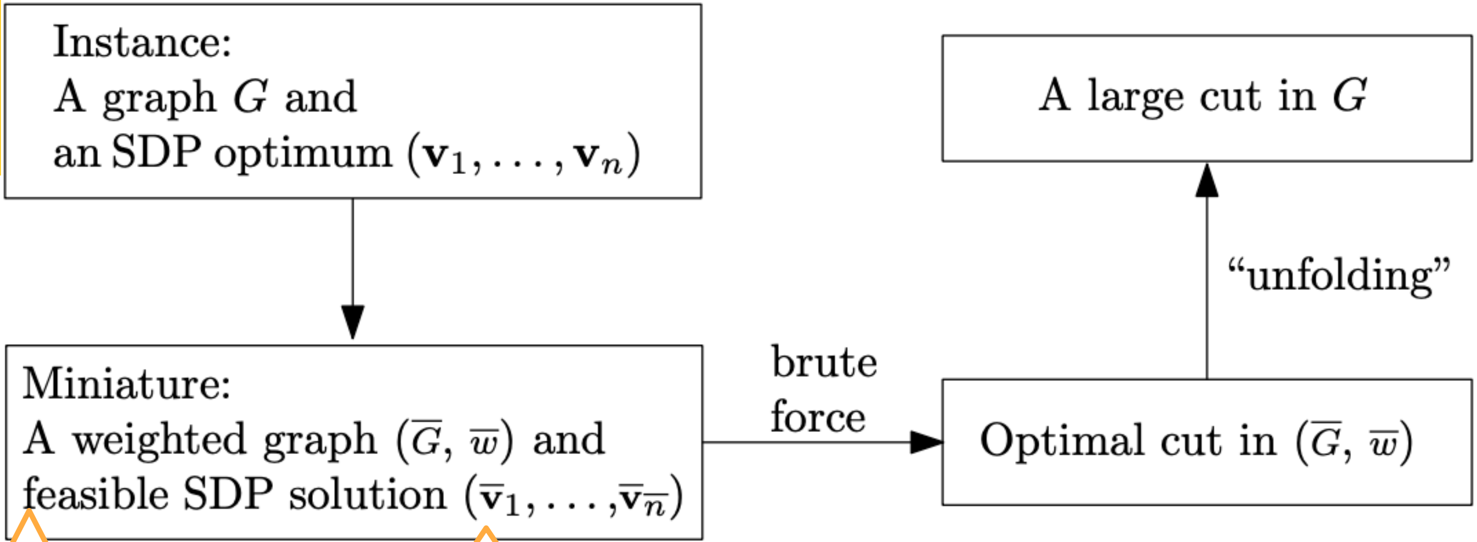
کوچک و
برش = برش G

شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

$$
\begin{aligned}
SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon |E| \\
&\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \\
&\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon) \\
&\geq SDP(G)/(1 + 3\epsilon)
\end{aligned}
$$

$$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1 + 3\epsilon}$$

$$\text{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\text{SDP}(G, w)}{\text{Opt}(G, w)}$$



کوچک و
برش = برش G

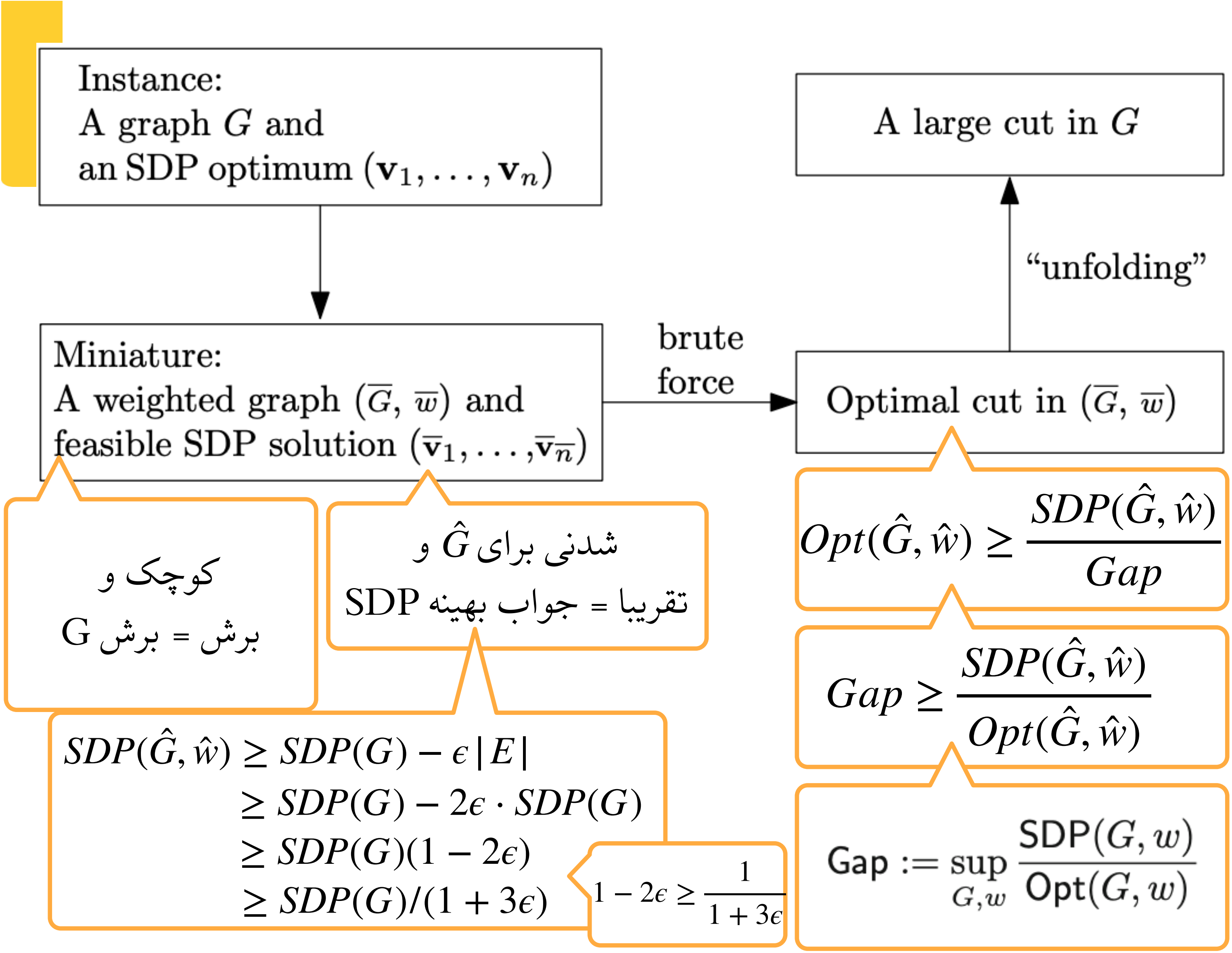
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP

$$\text{Gap} \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Opt(\hat{G}, \hat{w})}$$

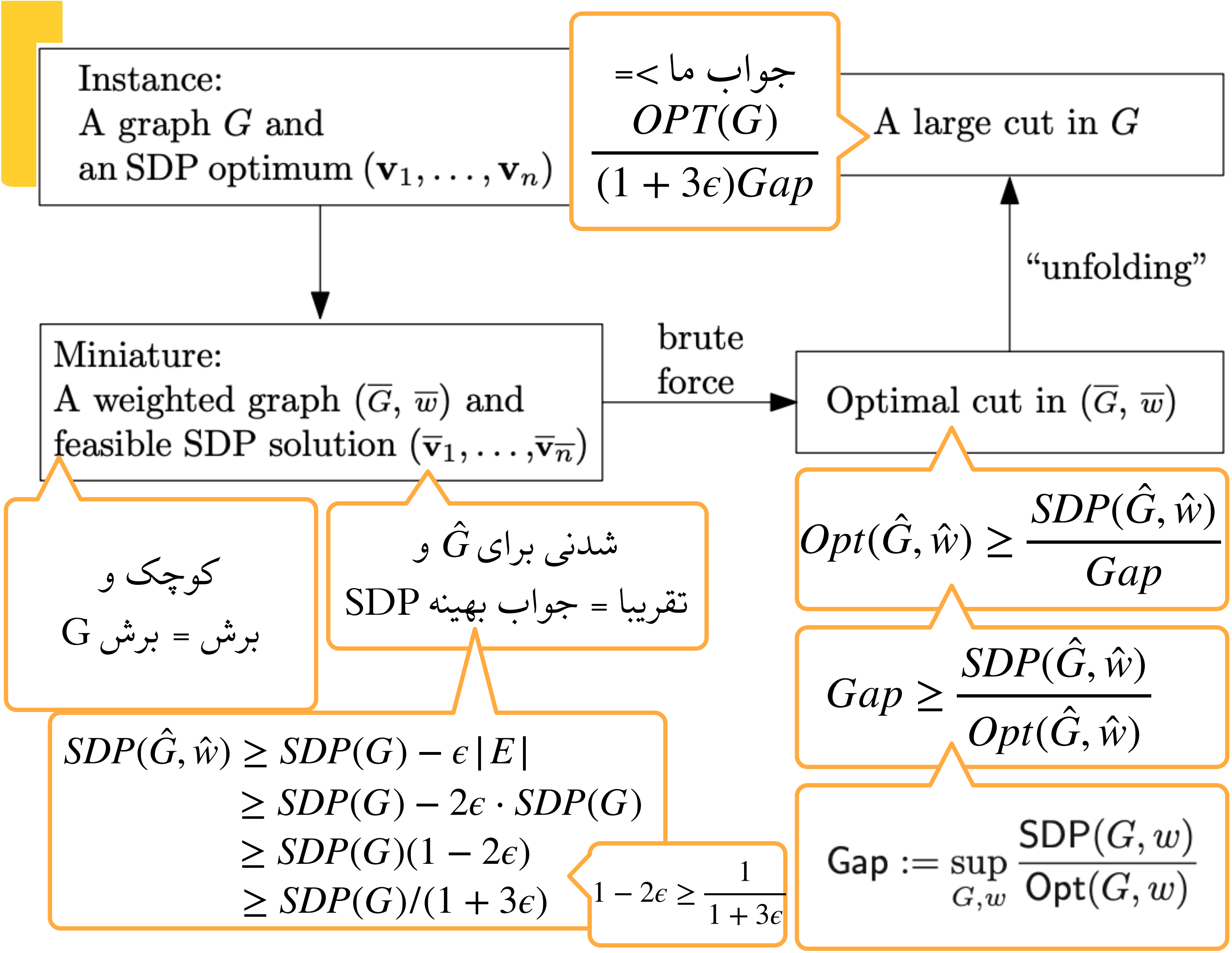
$$\begin{aligned} SDP(\hat{G}, \hat{w}) &\geq SDP(G) - \epsilon|E| \\ &\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \\ &\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon) \\ &\geq SDP(G)/(1 + 3\epsilon) \end{aligned}$$

$$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1 + 3\epsilon}$$

$$\text{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathrm{SDP}(G, w)}{\mathrm{Opt}(G, w)}$$



Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
"unfolding"
A large cut in G
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq SDP(G) - \epsilon|E| \geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G) \geq SDP(G)(1-2\epsilon) \geq SDP(G)/(1+3\epsilon)$
$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1+3\epsilon}$
$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$
$Gap \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Opt(\hat{G}, \hat{w})}$
$\mathrm{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathrm{SDP}(G,w)}{\mathrm{Opt}(G,w)}$



Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
جواب ما =<
$\frac{OPT(G)}{(1+3\epsilon)Gap}$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$
$Gap \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Opt(\hat{G}, \hat{w})}$
$\mathsf{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathsf{SDP}(G,w)}{\mathsf{Opt}(G,w)}$
$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq SDP(G) - \epsilon|E|$
$\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G)$
$\geq SDP(G)(1 - 2\epsilon)$
$\geq SDP(G)/(1 + 3\epsilon)$
$1 - 2\epsilon \geq \frac{1}{1+3\epsilon}$

Theorem. *For every fixed $\varepsilon > 0$, and for every input graph G, the above rounding algorithm computes a cut of size at least*

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)\mathsf{Gap}} \cdot \mathsf{Opt}(G),$$

in expected polynomial time.

روش ما روی گراف‌های وزن‌دار هم کار می‌کند

$$\mathsf{SDP}(G,w) := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\,\frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} : \|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \right\}$$

مینیاتور برای
MAX-k-SAT (یا MAX-k-CSP)

The canonical semidefinite relaxation of a Boolean MAX-k-CSP[$\mathcal{P}$]

Vector variables: $\mathbf{e}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$.
Scalar variables: $z_{\ell,\omega}$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k$.

$$\text{Maximize} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^k :\, P_\ell(\omega)=\mathsf{T}} z_{\ell,\omega}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{subject to} & \mathbf{e}^T\mathbf{e} = 1 & \\
& \mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0 & 1 \le i \le n \\
& z_{\ell,\omega} \ge 0 & 1 \le \ell \le m,\ \omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^k \\
& \sum_\omega z_{\ell,\omega} = 1 & 1 \le \ell \le m \\
& \displaystyle\sum_{\omega:\, \omega_j = \mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_{\ell j}} & 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j \le k \\
& \displaystyle\sum_{\omega:\, \omega_j = \omega_{j'} = \mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{t}_{i_{\ell j}}^T \mathbf{t}_{i_{\ell j'}} & \\
& & 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j < j' \le k.
\end{array}$$

13.3.3 Theorem. *For every fixed $\varepsilon > 0$, k, and a set $\mathcal{P}$ of k-ary predicates over the domain $D = \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}$, there is a randomized algorithm that, for every input instance φ of* MAX-k-CSP$[\mathcal{P}]$, *computes an assignment satisfying at least*

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)\mathsf{Gap}_{\mathcal{P}}} \cdot \mathsf{Opt}(\varphi)$$

of the clauses of φ, in expected polynomial time.

الگوریتم

- ورودی ϕ و

$$\mathbf{s} = \left(\mathbf{e}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n\,;\, z_{\ell,\omega} : \ell = 1, \ldots, m,\ \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k\right)$$

- مرحله ۱: نشاندن و حذف خراب‌ها

$$\mathbf{t}_i^* := \Phi(\mathbf{t}_i) \qquad \mathbf{e}^* := \Phi(\mathbf{e})$$

  - می‌گوییم C_l خراب شده اگر $e^\top t_i$ یا $t_i^\top t_j$ برای متغیرهای در C_l بیش از δ تغییر کرده
  - تکرار می‌کنیم تا تعداد خوبی خراب نشده باشد
- مرحله ۲: گسسته‌سازی (G^{**})
  - جایگزینی با یکی از نقاط درون کره واحد

الگوریتم

- ورودی ϕ و

$$\mathbf{s} = \left(\mathbf{e}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n \, ; \, z_{\ell,\omega} : \ell = 1, \ldots, m, \, \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k\right)$$

- مرحله ۱: نشاندن و حذف خراب‌ها
- مرحله ۲: گسسته‌سازی (G^{**})
- مرحله ۳: تا زدن
  - ساختن $(\hat{\varphi}, \hat{w})$
- مرحله ۴: جواب بهینه $(\hat{\varphi}, \hat{w})$
- مرحله ۵: بازکردن جواب روی مسئله اصلی

تحليل

آیا همان تحلیل الگوریتم برش بیشینه کار می‌کند؟

کار نمی‌کند!

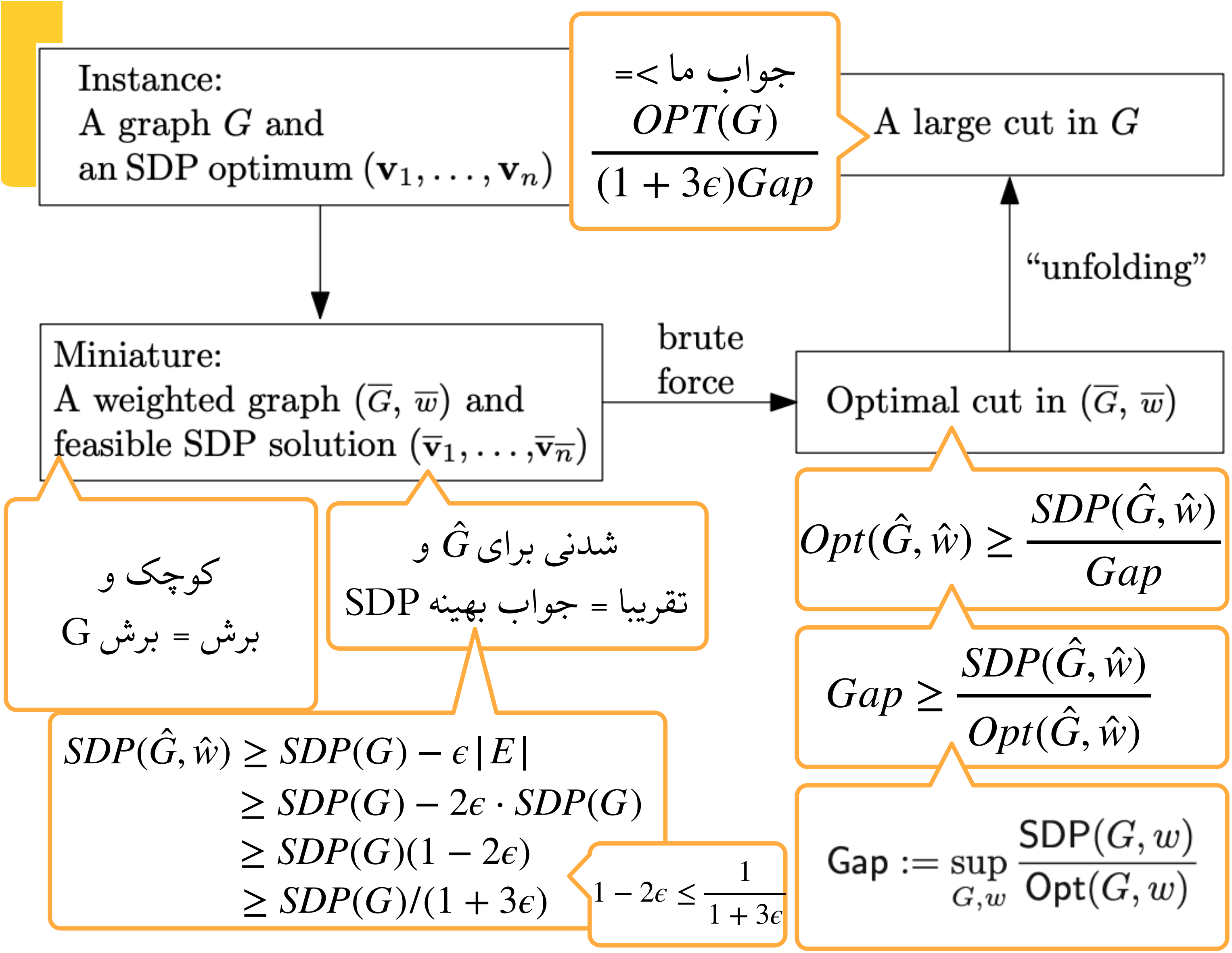
$$SDP(\hat{G},\hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1-\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^{T}\hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)}(1-(\mathbf{v}_i^{**})^T\mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)}(1-v*_i^\top v*_j)/2 - 3\delta|E|$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G)}(1-v_i^\top v_j)/2 - 2\delta|E| - \frac{\delta}{2}|E| - 3\delta|E|$$

$$= SDP(G) - O(\delta)|E| = SDP(G) - \epsilon|E|$$



Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
جواب ما >=
$\dfrac{OPT(G)}{(1+3\epsilon)Gap}$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \dfrac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$
$Gap \geq \dfrac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Opt(\hat{G}, \hat{w})}$
$\mathrm{Gap} := \sup_{G,w} \dfrac{\mathrm{SDP}(G,w)}{\mathrm{Opt}(G,w)}$
$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq SDP(G) - \epsilon|E|$
$\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G)$
$\geq SDP(G)(1-2\epsilon)$
$\geq SDP(G)/(1+3\epsilon)$
$1 - 2\epsilon \leq \dfrac{1}{1+3\epsilon}$

The canonical semidefinite relaxation of a Boolean Max-k-CSP[$\mathcal{P}$]

Vector variables: $\mathbf{e}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$.
Scalar variables: $z_{\ell,\omega}$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k$.

$$\text{Maximize} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\omega \in \{\mathsf{F},\mathsf{T}\}^k :\, P_\ell(\omega)=\mathsf{T}} z_{\ell,\omega}$$

subject to

$$\mathbf{e}^T\mathbf{e} = 1$$

et-*constraints*

$$\mathbf{t}_i^T(\mathbf{e} - \mathbf{t}_i) = 0 \qquad 1 \le i \le n$$

nonnegativity constraints

$$z_{\ell,\omega} \ge 0 \qquad 1 \le \ell \le m,\ \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k$$

z-sum constraints

$$\textstyle\sum_\omega z_{\ell,\omega} = 1 \qquad 1 \le \ell \le m$$

et*z-constraints*

$$\sum_{\omega:\, \omega_j=\mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{e}^T\mathbf{t}_{i_{\ell j}} \qquad 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j \le k$$

$$\sum_{\omega:\, \omega_j=\omega_{j'}=\mathsf{T}} z_{\ell,\omega} = \mathbf{t}_{i_{\ell j}}^T\mathbf{t}_{i_{\ell j'}} \qquad 1 \le \ell \le m,\ 1 \le j < j' \le k.$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{t}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{t}}_n; \tilde{z}_{\ell,\omega} : \ell = 1, \ldots, m, \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k)$$

et-*constraints*

nonnegativity constraints

et$z$-*constraints*

z-*sum constraints*

با خطای حداکثر δ دقیق

Proposition (Fixing an almost-feasible solution). *For every $\varepsilon > 0$ (and every k) there exists $\delta > 0$ with the following property. Let $\tilde{\mathbf{s}}$ be a δ-almost feasible solution of the canonical semidefinite relaxation for an input instance (φ, w), and let M be the value of the objective function for $\tilde{\mathbf{s}}$. Then there is a feasible solution with value at least $M - \varepsilon W$, where W is the total weight of the clauses of φ.*

- نتیجه این :

$$SDP(\hat{\phi}, \hat{w}) \geq M - \epsilon W$$

$$M \geq O(1)W$$

کار نمی‌کند!

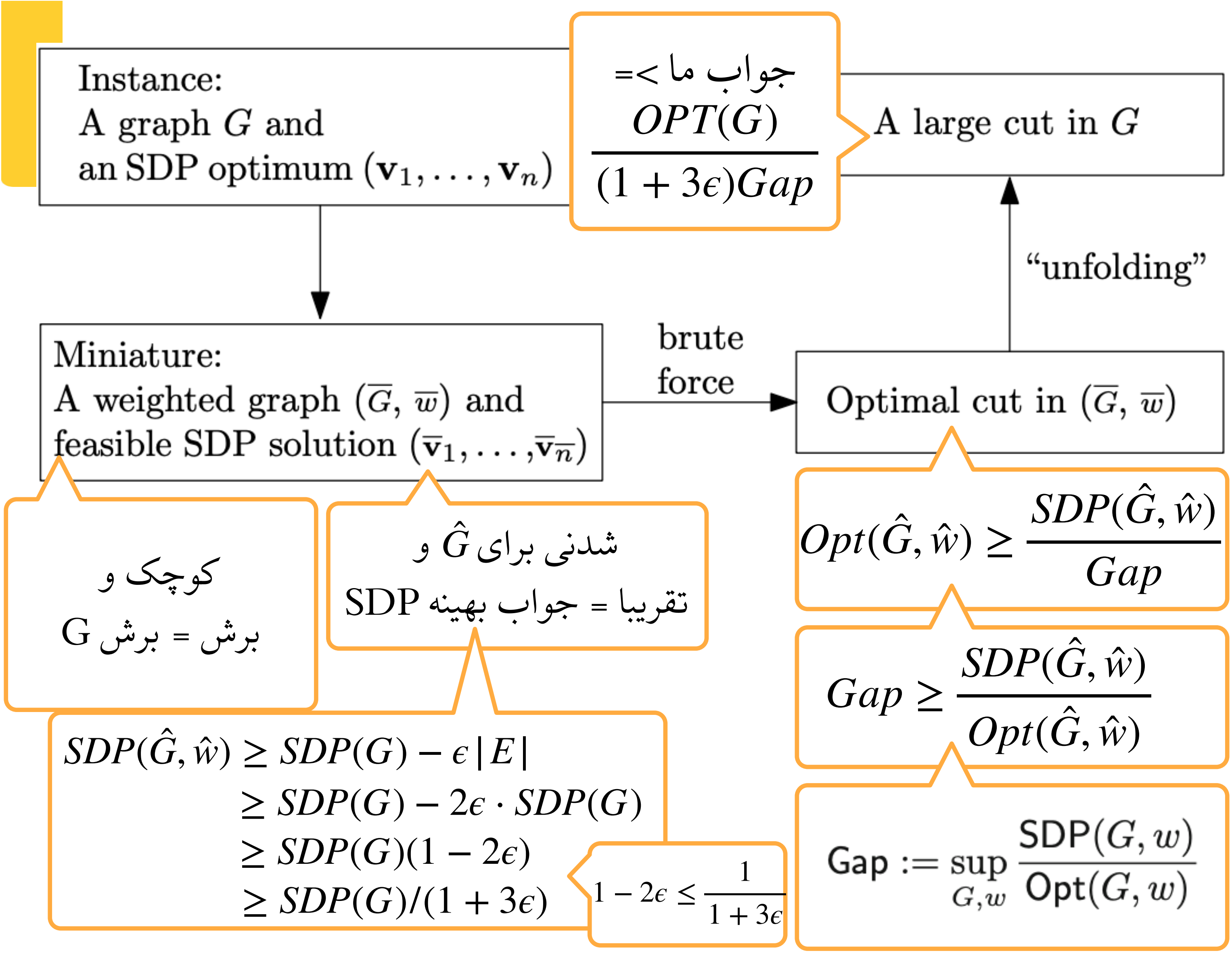
$$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq \sum_{\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\in E(\hat{G})} \hat{w}_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}(1 - \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\imath}}^T \hat{\mathbf{v}}_{\hat{\jmath}})/2$$

$$= \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - (\mathbf{v}_i^{**})^T \mathbf{v}_j^{**})/2$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G^*)} (1 - v*_i^\top v*_j)/2 - 3\delta|E|$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in E(G)} (1 - v_i^\top v_j)/2 - 2\delta|E| - \frac{\delta}{2}|E| - 3\delta|E|$$

$$= SDP(G) - O(\delta)|E| = SDP(G) - \epsilon|E|$$


Instance:
A graph G and
an SDP optimum $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$
جواب ما >=
$\frac{OPT(G)}{(1+3\epsilon)Gap}$
A large cut in G
"unfolding"
Miniature:
A weighted graph $(\overline{G}, \overline{w})$ and
feasible SDP solution $(\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_{\overline{n}})$
brute force
Optimal cut in $(\overline{G}, \overline{w})$
کوچک و
برش = برش G
شدنی برای $\hat{G}$ و
تقریبا = جواب بهینه SDP
$Opt(\hat{G}, \hat{w}) \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Gap}$
$Gap \geq \frac{SDP(\hat{G}, \hat{w})}{Opt(\hat{G}, \hat{w})}$
$\mathrm{Gap} := \sup_{G,w} \frac{\mathrm{SDP}(G,w)}{\mathrm{Opt}(G,w)}$
$SDP(\hat{G}, \hat{w}) \geq SDP(G) - \epsilon|E|$
$\geq SDP(G) - 2\epsilon \cdot SDP(G)$
$\geq SDP(G)(1-2\epsilon)$
$\geq SDP(G)/(1+3\epsilon)$
$1 - 2\epsilon \leq \frac{1}{1+3\epsilon}$

اثبات

Proposition (Fixing an almost-feasible solution). *For every $\varepsilon > 0$ (and every k) there exists $\delta > 0$ with the following property. Let $\tilde{\mathbf{s}}$ be a δ-almost feasible solution of the canonical semidefinite relaxation for an input instance (φ, w), and let M be the value of the objective function for $\tilde{\mathbf{s}}$. Then there is a feasible solution with value at least $M - \varepsilon W$, where W is the total weight of the clauses of φ.*

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{t}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{t}}_n; \tilde{z}_{\ell,\omega} : \ell = 1, \ldots, m,\ \omega \in \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}^k)$$

et-*constraints* **et**z-*constraints* با خطای حداکثر δ

nonnegativity constraints z-*sum constraints* دقیق

$$\mathbf{e}' := \tilde{\mathbf{e}}/\|\tilde{\mathbf{e}}\|$$

$$\|\tilde{\mathbf{t}}_i - \mathbf{t}'_i\| = O(\delta) \qquad (\mathbf{t}'_i)^T(\mathbf{e}' - \mathbf{t}'_i) = 0$$

$$|z'_{\ell,\omega} - \tilde{z}_{\ell,\omega}| = O(\delta) \quad \mathbf{s}' := (\mathbf{e}', \mathbf{t}'_1, \ldots \mathbf{t}'_n; z'_{\ell,\omega})$$

تغییر s به s’ و اصلاح z’ها

اصلاح et_قیود

- تبدیل به فضای viها

$$\tilde{\mathbf{v}}_i := 2\tilde{\mathbf{t}}_i - \mathbf{e}'$$

$$\mathbf{v}'_i := \tilde{\mathbf{v}}_i / \|\tilde{\mathbf{v}}_i\|$$

$$\mathbf{t}'_i := \frac{1}{2}(\mathbf{e}' + \mathbf{v}'_i)$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{t}}_i - \mathbf{t}'_i\| &= \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}'_i\| = \frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{v}}_i - \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{\|\tilde{\mathbf{v}}_i\|}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{v}}_i\|\left(1 - \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_i\|}\right)
\end{aligned}$$

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_i\|^2 = \|2\tilde{\mathbf{t}}_i - \mathbf{e}'\|^2 = 1 - 4(\mathbf{e}' - \tilde{\mathbf{t}}_i)^T\tilde{\mathbf{t}}_i = 1 + O(\delta)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + O(\delta))\left(1 - \frac{1}{1 + O(\delta)}\right) = O(\delta)$$

اصلاح etz_قیود

- تبدیل به فضای viها

$$\tilde{\mathbf{v}}_i := 2\tilde{\mathbf{t}}_i - \mathbf{e}'$$

$$\mathbf{v}'_i := \tilde{\mathbf{v}}_i / \|\tilde{\mathbf{v}}_i\|$$

$$\mathbf{t}'_i := \frac{1}{2}(\mathbf{e}' + \mathbf{v}'_i)$$

پایان