چندوجهی تطابق:

گراف دوبخشی $G(V=V_1\cup V_2, E)$ داده شده است

$$IP_{\text{تطابق}} = \left\{ x \in \{0,1\}^{|E|},\ \forall v\in V: \sum_{e\in\delta(v)} x_e \le 1 \right\}$$

$$P_{\text{تطابق}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|},\ 0 \le x_e \underline{\le 1}\ \forall e\in E,\ \forall v\in V: \sum_{e\in\delta(v)} x_e \le 1 \right\}$$

شرط اضافی است.

یک برنامه‌ی IP را به یک برنامه‌ی LP relax کردیم. تعریف می‌کنیم:

$$Q_{\text{تطابق}} = CH\left(\{ X_M : \text{مجموعه تطابق‌ها } M \} \right)$$

با این کار از جواب‌های $IP_{\text{تطابق}}$ یک چندوجهی به نام $Q_{\text{تطابق}}$ درست کردیم

Subject: Comb. Opt
Year. Month. Date. 13

قضیه: $P_{\text{تطابق}} = Q_{\text{تطابق}}$

طرف $Q_{\text{تطابق}} \subseteq P_{\text{تطابق}}$: برای $x \in Q$ داریم $x \in CH(\{\chi_M\})$ یعنی:

$$x = \sum_M \alpha_M \chi_M, \quad \sum_M \alpha_M = 1 \quad \alpha_M \geq 0$$

شرط $x_e \geq 0$ برای x درست است اما شرط $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$ باید بررسی شود. برای هر M داریم:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 : \sum_{e \in \delta(v)} (\chi_{M_1})_e \leq 1 \\ \vdots \\ M_k : \sum_{e \in \delta(v)} (\chi_{M_k})_e \leq 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\alpha_M]{\text{جمع با ضرایب}} \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$$

ترکیب محدب — شرط P تطابق

طرف $P_{\text{تطابق}} \subseteq Q_{\text{تطابق}}$: مجموعه‌ی F را تعریف کنید $F := \{x_e > 0\}$ برای $x \in P_{\text{تطابق}}$

حال روی $|F|$ استقرا می‌زنیم. پایه‌ی استقرا: اگر $|F| = 0$ باشد تطابق تهی است و به طور بدیهی حکم برقرار است. اگر $|F| = 1$ باشد یعنی به شکل زیر:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c \\ \vdots \end{bmatrix} = (1-c)\,\chi_{\text{تهی}} + c \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad 0 < c \leq 1$$

یعنی نشان دادیم به صورت ترکیب خطی دو تا χ ساخته می‌شود $x \in Q_{\text{تطابق}}$

ایده‌ی اثبات: x_1, x_2 را طوری پیدا کنیم که تعداد صفرهایشان بیشتر از x باشد. پس طبق فرض استقرا $x_1, x_2 \in Q_{\text{تطابق}}$ و کافی است x را به صورت ترکیب خطی مثبت x_1, x_2 بنویسیم.

یال‌هایی را در نظر بگیرید که $x_e > 0$. این یال‌ها سه حالت دارند:

۱ـ تطابق می‌سازند
۲ـ جنگل می‌سازند
۳ـ دور داشته باشند

PAPCO

*3

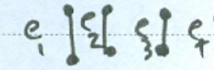
حالت ③: e_i هایی که x_{e_i} ها دوری می‌سازند. اولاً که در گراف دو بخشی دور به طول زوج داریم
بردار t را به این صورت تعریف می‌کنیم: $t_c = (+1, -1, +1, \dots, +1, -1)$
حالا قرار می‌دهیم: $x_1 := x + \varepsilon_1 t$, $x_2 := x - \varepsilon_2 t$

وجود دارند ε_1 و ε_2 به صورتی که $x_1, x_2 \in P_{\text{تطابق}}$ *1 و x_1, x_2 حداقل یک صفر بیشتر از x دارند *2

*1: به این دلیل که شرط $x_e \geq 0$ را نقض نمی‌کنیم و اما چون هر گره‌ای در این دور به دو یال وصل است که یکی x_eاش با ε_1 جمع می‌شود و دیگری ε از آن کم می‌شود پس $\sum x_e \leq 1$ حفظ می‌شود. *2: چون اگر یک یال هم ۱ شود باید یال همسایه‌اش صفر شود

حالت ②: یک مسیر از برگ به برگ در درخت بگیر که طولش از ۱ بیشتر باشد. بردار t را به صورت مشابه برای یال‌های مسیر به طور یکی در میان ۱+ و ۱- تعریف کن. برای یال‌های میانی شروط $x_e \geq 0$ و $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$ برای x_1 و x_2 نقض نمی‌شود. اما برای گره‌های لبه‌ی مسیر اگر $x_i \geq 0$ را tight کنیم مشکلی پیش نمی‌آید و x_1, x_2 در شروط مورد نظر صدق می‌کنند. اگر $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$ با این کار نقض شود، کافی است سایر یال‌هایی که به parent آن برگ وصل‌اند را xشان را صفر کنیم.

حالت ①: یال‌ها را به ترتیب x_e از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. مثال برای چهار یال:



$x_{e_1} \leq x_{e_2} \leq x_{e_3} \leq x_{e_4}$

$$x' = x_{e_1}\,(\;) + (x_{e_2} - x_{e_1})\,(\;) + (x_{e_3} - x_{e_2})\,(\;)$$
$$+ (x_{e_4} - x_{e_3})\,(\;) + (1 - x_{e_4})\,\chi_{\text{تهی}}$$

$x' \in P_{\text{تطابق}}$ و $x' \in Q_{\text{تطابق}}$

Subject: Comb. Opt.
Year. Month. Date. 15

تطابق کامل در گراف دو بخشی:

$$P_{\text{تطابق کامل}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} ; 0 \le x_e , \ \forall v \in V : \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \right\}$$

$$Q_{\text{تطابق کامل}} = CH\left(\{ \chi_M : M \text{ مجموعه تطابق های کامل} \} \right)$$

ثابت می‌کنیم $P_{\text{تطابق کامل}}$ و $Q_{\text{تطابق کامل}}$ با هم برابرند. اثبات $Q_{\text{تطابق کامل}} \subseteq P_{\text{تطابق کامل}}$ که شبیه قبل است.

اثبات $P_{\text{تطابق کامل}} \subseteq Q_{\text{تطابق کامل}}$ اگر $x \in P_{\text{تطابق کامل}}$ پس $x \in P_{\text{تطابق}}$ و در نتیجه $x = \sum_M \alpha_M \underset{\text{تطابق ها}}{\chi_M}$

ثابت می‌کنیم این χ_M ها تطابق کامل اند یا نه.

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum \alpha_M x_{eM} , \quad \sum \alpha_M = 1 , \quad 0 < x_{eM} \le 1 , \quad 0 \le \alpha_M$$

اما اگر یکی از x_{eM} ها از 1 کمتر باشد $\sum_{e \in \delta(v)} x_e < 1$ می‌شود.

راسی که حداقل در یکی از χ_M ها نپوشیده باشد.

راس های $P_{\text{تطابق کامل}}$ = χ_M ها که M تطابق کامل است

*4

اثبات: راس های $P_{\text{تطابق کامل}} \supseteq \chi_M$ که M تطابق کامل هاست.

از χ_M ها یک CH گرفتیم که شد $Q_{\text{تطابق کامل}}$ و $Q_{\text{تطابق کامل}} = P_{\text{تطابق کامل}}$ پس با توجه به این نکته که راس های CH(S) زیر مجموعه خودش است

اثبات راس های $P_{\text{تطابق کامل}} \subseteq \chi_M$ که M تطابق کامل هاست

یک χ_M را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که حتما راس است. یعنی نقطه‌ی گوشه‌ای است. یعنی وجود ندارد بردار t که در جهت آن حرکت کنیم و بتوانیم χ_M را به صورت ترکیب محدب چند راس بنویسیم. به این دلیل که اگر در جهت + حرکت کنیم نمی‌توانیم در جهت − حرکت کنیم چون اگر مولفه غیر صفر t در راستای کم کردن 1 های χ_M باشد، + باعث می‌شود شرط $\sum x_e = 1$ نقض شود و اگر مولفه غیر صفر t روی زیاد کردن 0 ها باشد − باعث می‌شود شرط $x_e \ge 0$ نقض شود. پس از دو جهت χ_M نمی‌شود حرکت کرد.

PAPCO

ماتریس تصادفی دوگانه: ماتریس مربعی که جمع هر سطر و ستونش 1 است و اعضایش نامنفی‌اند

$$\forall i \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad x_{ij} \geqslant 0 \ \forall i \ \forall j$$

$$\forall j \ \sum_{i=1} x_{ij} = 1$$

مسأله‌ی تطابق در گراف دو بخشی را می‌توان به صورت یک ماتریس تصادفی دوگانه مدل کرد

بخش n عضوی اول $\rightarrow$ o o $\overset{i}{o}$ o o o

x_{ij}

بخش n عضوی دوم $\rightarrow$ o o o $\underset{j}{o}$ o o

اگر x یک جواب بهینه برای LP تطابق کامل باشد (طبق اینکه P تطابق کامل تطابق کامل) پس می‌توان آن را به صورت ترکیب محدب تعدادی x_n تطابق کامل نوشت که x_n ها به صورت ماتریس‌های قطر پراکنده هستند (چون طبق تعریف 0/1، در هر سطر و ستون دقیقاً یک 1 وجود دارد و بقیه صفرند)
پس ماتریس تصادفی دوگانه بالا را می‌توان به صورت ترکیب محدب تعدادی ماتریس قطر پراکنده نوشت

LP تطابق بیشینه: ماتریس A را به صورت ~~[illegible]~~ ماتریس وقوع گراف تعریف می‌کنیم

$$\max \ 1^T x \rightarrow \sum x_e$$

$$Ax \leq 1$$

$$x \geqslant 0$$

$$A: \quad \begin{array}{c} \\ u \rightarrow \\ v \rightarrow \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} & e & \\ \cdots & \vdots & \\ \cdots & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix}}_{|E|} \Big\} |V|$$

e که دو سرش u و v باشد مقدارش در u و v برابر با یک است.

$$\forall v \ \sum_{e\in\delta(v)} x_e \leqslant 1 \iff Ax \leqslant 1$$

$|x| \leq |E|$ یعنی چه مقداری از آن یال را انتخاب کنیم به طوری که جمع این x_e ها برای هر راس کمتر مساوی 1

حال مسأله‌ی دوگان را در نظر بگیرید:

$$\min \ 1^T y$$

$$A^T y \geqslant 1$$

$$y \geqslant 0$$

$$A^T y \geqslant 1 \iff \quad y_u + y_v \geq 1 \quad (u,v)\in E$$

که همان مسأله‌ی پوشش کمینه راسی است.

Subject: Comb. Opt.
Year. Month. Date. ۱۷

قضیه: در گراف دوبخشی، اندازه‌ی بیشینه تطابق برابر اندازه‌ی کمینه پوشش رأسی است.

اثبات |پوشش رأسی کمینه| ≥ |تطابق بیشینه| :

می‌دانیم: $\underset{\text{تطابق بیشینه}}{IP} = \underset{\text{تطابق بیشینه}}{LP} = \underset{\text{کمینه رأسی}}{LP}$ و جواب $\underset{\text{کمینه رأسی}}{LP} \le$ جواب $\underset{\text{کمینه رأسی}}{IP}$

اثبات |پوشش رأسی کمینه| ≤ |تطابق بیشینه| ، (با استقرا)

هدف این است که رأسی v را پیدا کنیم به طوری که با حذف v اندازه‌ی تطابق کم شود. در گراف باقی‌مانده می‌توان با اندازه تطابق بیشینه اولیه منهای 1 کل گراف را بپوشانیم

*5

می‌خواهیم ثابت کنیم وجود دارد چنین v که در همه‌ی تطابق‌های بیشینه هست.
x^* و y^* را در نظر بگیرید که داشته باشیم $y^*_v > 0$. طبق قضیه‌ی Comp. slackness داریم $\sum_{e \in \delta(v)} x^*_e = 1$

ماتریس کاملاً تک‌پیمانه‌ای A: به ازای همه‌ی زیرماتریس‌های مربعی A' داشته باشیم: $\det(A') \in \{0, 1, -1\}$
پس همه‌ی عناصر آن 0 و 1 و -1 است.

قضیه: چندوجهی $Ax \le b$ که A کاملاً تک‌پیمانه‌ای و b صحیح است رأس‌هایش صحیح است.

اثبات: همه‌ی رأس‌های چندوجهی، BFS هستند. یک زیرماتریس مربعی A' وجود دارد که این x جواب معادله‌ی $A'x = b$ است. اگر جواب این دستگاه را به روش کرامر بنویسید ثابت می‌شود که عناصر x صحیح‌اند.

لم: ماتریس وقوع گراف دوبخشی کاملاً تک‌پیمانه‌ای است.

زیرماتریس A را در نظر بگیرید

اثبات: اگر یک سطر یا یک ستون همه صفر باشند که $\det(A')=0$

اگر A سطر یا ستونی که همه صفر و فقط یک 1 داشته باشد $\det(A') = \pm\det(A'')$

در غیر این صورت هر ستون دقیقاً دو تا 1 دارد. اما دو سر هر یالی هر کدام از آنهایش از یکی از بخش‌های گراف است. بدون کم کردن از کلیت فرض می‌کنیم گره‌های بخش 1 بالا باشند و گره‌های بخش 2 پایین. اگر بخش 1 ها را با هم جمع کنیم $111\ldots1111$ می‌شود و بخش 2 ها هم همینطور پس سطرها مستقل خطی نیستند پس $\det(A')=0$

انواع زیرماتریس‌های مربعی که سطر یا ستون صفر ندارند به این شکل هستند

اگر A کاملاً تک‌پیمانه‌ای باشد $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ هم کاملاً تک‌پیمانه‌ای است.

$$\det \begin{bmatrix} A'' & \boxed{\;} & A''' \\ \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \pm\det(A''')$$

تعریف b-تطابق: $X: E \to \mathbb{Z}^+$ که $\forall v\in V \quad \sum_{e\in\delta(v)} x_e \leq b_v$

یعنی می‌توان از هر یال به تعداد صحیح برداشت و هر راس یک ظرفیت b_v دارد

تعریف c-پوشش راسی: $Y: V \to \mathbb{Z}^+$ که $y_u + y_v \geq c_e \quad \forall e=(u,v)$ ‏c، b صحیح در دوبخشی

هر راس می‌تواند چند نگهبان داشته باشد و هر یال ~~[illegible]~~ حداقل c_e نگهبان می‌خواهد.

در گراف دوبخشی b-تطابق بیشینه با وزن c = c-پوشش کمینه با راس b

چرا قضایای min-max مهم اند؟ چون نسخه‌ی تصمیم تطابق بیشینه را به عکس می‌شود حل کرد. یعنی k را می‌دهند و می‌گویند آیا تطابق بزرگتر مساوی وجود دارد. Yes سند دارد اگر یک مثال نشان بدهیم که $\in NP$ است. اما No را می‌توان با حل کردن مساله‌ی دوگان و مقایسه‌ی min-max نشان داد پس No $\in coNP$