دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

یادگیری برخط

جلسه بیست و دوم

نگارنده: احمد آقاپوربناب

در این جلسه به حل مسئله بیشینه‌سازی سود در سرمایه گذاری با استفاده از نظرات متخصصین می‌پردازیم و با مراحل گام به گام سعی می‌کنیم مدل مان را به دنیای واقعی نزدیک کنیم در آخر هم اشاره‌ای کوتاه به حل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روشی که این جلسه ارائه دادیم می‌کنیم و آن را در جلسات بعدی تکمیل می‌کنیم

۱ بیشینه‌سازی سود با استفاده از نظر متخصصین

مدلمان را بدین صورت تعریف می‌کنیم :

- به تعداد N متخصص داریم که هر کدامشان نظرشان را درباره وضعیت امروز بازار سرمایه اعلام می‌کنند
- بورس دشمن ماست! بورس از انتخاب و روش ما آگاهی دارد و سعی دارد سود ما را کمینه کند
- ما هر روز با اتخاذ شیوه‌ای و بر اساس نظرات کارشناسان سهامی را می‌خریم
- در پایان روز سود ضرر ما معلوم می‌شود
- در پایان همان روز ما از سود و ضرری که کارشناسان متحمل می‌شوند آگاه می‌شویم

حال سعیمان بر این است روشی ارائه دهیم که بتوانیم سودمان را بیشینه کنیم برای حل این مسئله فرض‌هایی میکنم به ترتیب در بخش‌های بعدی گفته خواهد شد

۱.۱ حالت اول: فرض وجود یک کارشناس با تحلیل همیشه درست

در این حالت فرضمان این است که حداقل یک کارشناسی داریم که نظراتش صحیح است حال تلاشمان بر این است که آن کارشناس را پیدا کنیم. چون مطمئنیم حتما یک کارشناس همیشه راستگو وجود دارد پس در پایان روز آن کارشناسانی که نظراتشان خلاف واقع بوده را میتوانیم حذف کنیم. طبیعی است که سعی‌مان بر این است که یا امروز بتوانیم سود کنیم یا اگر سود نکردیم تعداد کارشناسانی که حذف میکنیم زیاد باشد پس به خاطر همین به نظریت اکثریت رجوع می‌کنیم چون اگر آن روز سود نکردیم می‌توانیم بیشترین تعداد کارشناس را حذف کنیم بنابراین الگوریتمی که ارائه کردیم بدین صورت است

- برای $i = ۱, ۲, \ldots, T$ تکرار کن
  - به نظر اکثریت کارشناسان نگاه کن بر اساس آن تصمیم بگیر
  - اگر سود کردی که هیچ وگرنه آن کارشناسانی که نظراتشان خلاف واقع بود را از لیست کارشناسانت حذف کن

چون میدانم حداقل یک کارشناسی هست که نظراتش مطابق واقع باشد به مجوعه تهی از کارشناسان نمی‌رسیم واضح است که در این الگوریتم ما حداکثر $\log(N)$ روز در ضرر هستیم

۲.۱ بدون فرض وجود کارشناس با تحلیل همیشه درست

در این مدل همانند دنیای واقع ما برای هر کارشناس **اعتبار** در نظر میگیرم و در زمان تصمیم گیری برای سرمایه گذاری خود این اعتبار را هم مدنظر قرار می‌دهیم بدین صورت در زمان تصمیم‌گیری، ما آن تصمیم را خواهیم گرفت که مجموع اعتبار کارشناسانی که آن تصمیم را گرفته‌اند بیشتر باشد سپس در پایان روز اعتبار کسانی که درست تحلیل نکرده‌اند را با ضریبی کاهش می‌دهیم پس الگوریتم زیر را داریم

- برای تمامی کارشناسان اعتبار را برابر یک قرار بده $w_i^۱ = ۱$
- برای $t = ۱, ۲, \ldots, T$ تکرار کن
- تحلیل کارشناسان به صورت $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_N\}$ می‌باشد که x_i ها یا صفر هستند یا یک
- اگر $\sum_{i:x_i=۱} w_i \geq \sum_{i:x_i=۰} w_i$ تصمیم ما برابر یک است در غیر اینصورت تصمیم ما صفر است
- در پایان روز سودها ضررها را برای هر کارشناس مشخص کن
- اعتبارها را به صورت زیر تغییر بده
  - برای تحیلیلها غلط اعتبار آن افراد را کاهش بده $w_i^{t+۱} = (۱ - \epsilon)w_i^t$
  - برای تحلیل‌ها صحیح اعتبار ها را تغییر نده

دقت کنید چون بورس شیوه خصمانه دارد و از شیوه ما آگاه هست اگر ما هر بار بهترین کارشناس را انتخاب کنیم نمی‌توانیم تعداد خطاهایمان را با ضریب ثابتی از بهترین کارشناس کران بزنیم چون فرض کنیم کارشناسی که از قضا کارشناس خوبیست ۱۰ روز اول را به غلط پیشبینی کرده باشد ولی کارشناس‌ها دیگر که توسط بورس برای فریب ما اجیر شده اند درست پیشبینی کنند در آن صورت بورس میتواند به توسط این کارشناسان اجیر شده کاری کند که ما در $۱۰(n - ۱)$ روز بعدی در ضرر باشیم پس در پایان $۱۰n$ روز حداقل $۱۰(n - ۱)$ روز آن در ضرر بودیم این در حالی است که کارشناسان ما فقط ۱۰ روز در ضرر بودند! این الگوریتم که ارائه کردیم از آمدن چنین شرایطی جلوگیری می‌کند و به نوعی ضرر ما از ضریب ثابتی از ضرر بهترین کارشناس کمتر خواهد بود. این گفته را توسط قضیه زیر نشان میدهیم

قضیه ۱. *اگر بعد T روز m_i^T برابر تعداد تحلیل‌های اشتباه کارشناس i ام باشد و M^T تعداد تصمیم‌های اشتباه ما باشد و همچنین $\epsilon \in (۰, \frac{۱}{۲}]$ آنگاه کران زیر را داریم*

$$M^T \leq \frac{۲ln\ n}{\epsilon} + ۲(۱ + \epsilon) \cdot m_i^T \quad \forall i$$

اثبات: ابتدا $\Phi^{(t)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi^{(t)} = \sum_i w_i^t$$

حال اگر در مرحله T خطا کنیم و بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم که انتخابمان ۱ باشد پس داریم $2\sum_{i:x_i^{(T)}=1} w_i^{(T)} \geq \Phi^{(T)}$ حال نامساوی زیر را داریم

$$\Phi^{(T+1)} = (1-\epsilon)\sum_{i:x_i^{(T)}=1} w_i^{(T)} + \sum_{i:x_i^{(T)}=0} w_i^{(T)} = \Phi^{(T)} - \epsilon \sum_{i:x_i^{(T)}=1} w_i^{(T)} \leq \Phi^{(T)}(1-\frac{\epsilon}{2})$$

واضح است که وقتی خطا نمی‌کنیم هم رابطه برقرار است پس در کل داریم

$$\Phi^{(T+1)} \leq n(1-\frac{\epsilon}{2})^{M^{(T)}}$$

حال حکم را ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\Phi^{(T+1)} &\geq w_i^{(T+1)} \\
n(1-\frac{\epsilon}{2})^{M^{(T)}} &\geq (1-\epsilon)^{m_i^{(T)}} \\
-m_i^{(T)}\log(1-\epsilon) &\geq -\log\ n - M^{(T)}\log(1-\frac{\epsilon}{2}) \\
m_i^{(T)}(\epsilon+\epsilon^2) \geq^{(1)} -m_i^{(T)}\log(1-\epsilon) &\geq -\log\ n - M^{(T)}\log(1-\frac{\epsilon}{2}) \geq^{(2)} -\log\ n + M^{(T)}\frac{\epsilon}{2} \\
\frac{2\log\ n}{\epsilon} + 2(1+\epsilon)m_i^{(T)} &\geq M^{(T)}
\end{aligned}$$

که رابطه (۱) را از نامساوی $-ln(1-x) \leq x + x^2$ و رابطه (۲) را از نامساوی $ln\ x \leq x - 1$ داریم

۳.۱ حالت سوم: سرمایه گذاری وزن دار یا احتمالاتی

شرایط مسئله به صورت زیر است برای $t = 1, 2, \dots, T$

- تحلیل متخصص i ام عددی است در بازه $[-1, 1]$
- بر اساس توزیع $\overrightarrow{p}^{(t)} = (p_1^{(t)}, p_2^{(t)}, \dots, p_N^{(t)})$ متخصص را انتخاب می‌کنیم
- بورس براساس آگاهی از توزیع و تحلیل‌ها یک بردار هزینه دارد $\overrightarrow{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, m_2^{(t)}, \dots, m_N^{(t)})$
- سود ضرر در روز t به صورت $\overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)}$ تعیین می‌شود

الگوریتم ما نیز به صورت زیر است

- توزیع احتمال به صورت $p_j^{(t)} = \frac{w_j^{(t)}}{\Phi^{(t)}}$ می‌باشد
- بعد از دیدن بردار هزینه وزن‌ها را به صورت $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} \cdot \exp(-\epsilon \cdot m_i^{(t)})$ به روز رسانی می‌کنم

حال بنابه قضیه زیر نشان می‌دهیم که این الگوریتم می‌تواند عملکرد ما را به صورت تقریبی به خوبی بهترین متخصص کند

قضیه ۲. *فرض کنید $\epsilon \leq 1$ و $t \in [T]$ و $\overrightarrow{p}^{(t)}$ توزیع احتمال انتخاب ما باشد در آن صورت برای هر متخصص i داریم*

$$\sum_{t\leq T} \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)} \leq \sum_{t \leq T} m_i^{(t)} + \frac{ln\ N}{\epsilon} + \epsilon T$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(t+1)} &= \sum_j w_j^{(t+1)} \\
&= \sum_j w_j^{(t)} \cdot \exp(-\epsilon m_j^{(t)}) \\
&\leq \sum_j w_j^{(t)}(1 - \epsilon w_j^{(t)} + \epsilon^2 (w_j^{(t)})^2) \quad [e^x \leq 1 + x + x^2] \\
&\leq \sum_j w_j^{(t)}(1 - \epsilon w_j^{(t)} + \epsilon^2) \\
&= \sum_j w_j^{(t)}(1 + \epsilon^2) - \sum_j w_j^{(t)} \cdot \epsilon \cdot m_j^{(t)} \\
&= \Phi^{(t)}(1 + \epsilon^2) - \epsilon \sum_j \Phi^{(t)} \cdot p_j^{(t)} \cdot m_j^{(t)} \\
&= \Phi^{(t)}(1 + \epsilon^2 - \epsilon(\overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)})) \\
&\leq \Phi^{(t)} \cdot \exp(\epsilon^2 - \epsilon \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)})
\end{aligned}$$

پس $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(1)} \cdot \exp(\epsilon^2 T - \epsilon \sum_t \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)})$ از طرفی داریم

$$\Phi^{(T+1)} \geq w_i^{(T+1)} = exp(-\epsilon \sum_{t \leq T} m_i^{(t)})$$

پس در نهایت داریم

$$-\epsilon \sum_t m_i^{(t)} \leq ln\ \Phi^{(1)} + \epsilon^2 T - \epsilon \sum_t \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)}$$

در نهایت

$$\sum_{t \leq T} \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)} \leq \sum_{t \leq T} m_i^{(t)} + \frac{ln\ N}{\epsilon} + \epsilon T$$

و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۳. *فرض کنید $1 \leq \epsilon$ و $t \in [T]$ و $1 \geq |\rho|$ همچنین $\overrightarrow{p}^{(t)}$ توزیع انتخاب متخصص بر اساس بردار هزینه $\overrightarrow{m}^{(t)} \in [-\rho, \rho]^N$ باشد. اگر $T \geq \frac{(4\rho^2 ln\ N)}{\epsilon^2}$ آنگاه برای هر متخصص i داریم*

$$\frac{1}{T} \sum_t \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T} \sum_t m_i^{(t)} + 2\epsilon$$

اثبات

چون $1 \leq \frac{\epsilon}{2\rho}$ و همچنین $\frac{\overrightarrow{m}^{(t)}}{\rho} \in [-1, 1]^N$ طبق قضیه دو داریم

$$\sum_{t \leq T} \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \frac{\overrightarrow{m}^{(t)}}{\rho} \leq \sum_{t \leq T} \frac{\overrightarrow{m}^{(t)}}{\rho} + \frac{ln\ N}{\frac{\epsilon}{2\rho}} + \frac{\epsilon}{2\rho} T$$

طرفین نامساوی را در $\frac{\rho}{T}$ ضرب می‌کنیم پس داریم

$$\frac{1}{T} \sum_t \overrightarrow{p}^{(t)} \cdot \overrightarrow{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T} \sum_t m_i^{(t)} + \frac{\rho^2}{T} \frac{\log\ N}{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2}$$

حال طبق فرض $T \geq \frac{(4\rho^2 ln\ N)}{\epsilon^2}$ حکم ننیجه می‌شود. □

۲ استفاده از MWU برای حل LP

برنامه‌ریزی زیر را داریم

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T x \\ \text{که} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با کمی تقریب آن را به

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & c^T \tilde{x} = OPT \\ \text{که} \quad & A\tilde{x} \geq b - \epsilon 1 \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

تبدیل می‌کنیم و اگر جواب شدنی داشته باشد توانستیم جواب را پیدا کنیم و جوابی شدنی است که در مجموعه K باشد که به صورت $K = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0 c^T = OPT, Ax \geq b - \epsilon 1\}$ می‌باشد که اگر ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد اشتراک چند مجموعه مانند $K' = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0 c^T = OPT, \alpha x \geq \beta\}$ حال میتوانیم هر کدام از اینها را یک متخصص در نظر بگیریم و با توجه حل MWU می‌توانیم راه حلی برای برنامه‌ریزی خطی خود بیابیم.