



تمرین سری اول

* برای هر سوال علاوه بر نوشتن برنامه ریزی خطی، مشخص کنید هر یک از متغیرهای استفاده شده نماینده چه کمیتی است.

۱ مجموعه P را در نظر بگیرید که با محدودیت‌های نامساوی خطی توصیف شده است؛ یعنی

$$P = \{x \in R^n | c^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$$

گوی به مرکز y و شعاع r ، به صورت مجموعه تمام نقاطی که از y به فاصله‌ی (اقلیدسی) r هستند تعریف شده است. می‌خواهیم گوی با بیشینه شعاع ممکن، به طوری که به طور کامل داخل مجموعه‌ی P بیفتد را پیدا کنیم. یک برنامه‌ی خطی برای این مسئله ارائه دهید.

۲ برق شهر از سه طریق تأمین می‌گردد: توربین‌های بادی، نیروگاه زغال‌سنگ و نیروگاه هسته‌ای. می‌خواهیم برای تأمین برق T سال آینده برنامه‌ریزی کنیم. میزان برق مورد نیاز در سال $t \leq T$ طبق پیش‌بینی d_t است. همچنین پیش‌بینی شده که میزان برقی که توسط توربین‌ها تولید خواهد گردید، برابر w_t است (هزینه آن ناچیز است). در همان سال، هزینه توسعه هر واحد نیروگاه زغال‌سنگ c_t و هر واحد نیروگاه هسته‌ای n_t است. هر واحد توسعه‌یافته نیروگاه زغال‌سنگ، به مدت ۱۶ سال به میزان p سالیانه تولید برق خواهد داشت و پس از آن از کار می‌افتد و هیچ تولیدی نخواهد داشت (همین پارامترها برای نیروگاه هسته‌ای به ترتیب برابر ۱۰ و q است). همچنین به خاطر خطرات پسماندهای هسته‌ای، حداکثر ۲۴ درصد برق هر سال را با انرژی هسته‌ای می‌توان تأمین کرد. مسئله را به فرم یک برنامه‌ریزی خطی درآورید. (فرض کنید در شروع نیروگاه زغال‌سنگ و هسته‌ای نداریم)

۳ فرض کنید $P = \{x : A_1 x \leq b_1\}$ و $Q = \{x : A_2 x > b_2\}$ دو چندوجهی باشند. چگونه می‌توانیم به کمک برنامه‌ریزی خطی ماکسیمم مقدار تابع خطی $c^T x$ را بر نقاط $P \setminus Q$ (نقاطی از P که در Q نیستند) پیدا کنیم؟ امتیازی: اگر داشتیم $Q = \{x : A_2 x \geq b_2\}$ آیا این کار قابل انجام است؟

۴ متغیر تصادفی X مقدار i را با احتمال p_i برای $i \in \{0, \dots, K\}$ می‌گیرد که این توزیع به ما داده نشده است. دو مقدار $E[X] = \sum i p_i$ و $E[X^2] = \sum i^2 p_i$ داده شده است. با استفاده از بهینه‌سازی خطی کران بالا و پایین برای $E[X^4]$ بیابید.

۵ می‌خواهیم فضاپیما را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B بفرستیم. فرض کنید زمان t بر حسب ثانیه و همچنین x_t, v_t, a_t به ترتیب مکان، سرعت، و شتاب فضاپیما در لحظه‌ی t باشد. با در نظر گرفتن زمان به صورت گسسته و به صورت تقریبی، معادله‌های زیر برقرار است.

$$x_{t+1} = x_t + v_t$$

$$v_{t+1} = v_t + a_t$$

فرض کنید که مقدار شتاب a_t در هر لحظه توسط ما کنترل می‌شود و اندازه‌ی آن $|a_t|$ ضربی ثابت از مقدار سوخت استفاده شده در ثانیه t تا $t+1$ باشد.

می‌خواهیم فضاپیما از مکان $x_0 = 0$ و با سرعت $v_0 = 0$ از زمین بلند شده، و همچنین پس از T ثانیه در ارتفاع $d = x_T$ به سرعت $v_T = 0$ برسد.

الف) می‌خواهیم کل سوخت مصرف‌شده در هنگام سفر یعنی $\sum_{t=0}^T |a_t|$ را مینیمم کنیم.
 ب) می‌خواهیم بیشترین مقدار سوخت موردنیاز در هر لحظه t یعنی $\max_{t=0}^T \{ |a_t| \}$ را مینیمم کنیم.

در هر حالت مسئله را به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید.

۶ کارخانه‌ای n نوع دستگاه مختلف دارد و m نوع محصول! هر دستگاه برای کارکردن هر ساعت مقداری محصول مصرف می‌کند و در نهایت نیز مقداری محصول تولید می‌کند. کارخانه مقدار نامحدودی از هر نوع دستگاه دارد و می‌خواهد خط تولید T ساعت طوری برنامه‌ریزی کند که هر ساعت چندتا دستگاه از هر نوع را روشن کند بطوری که مجموع فروشش بیشینه شود! قیمت محصول i م در ساعت اول c_i است و با گذشتن هر ساعت قیمت محصولات با توجه به تاخیر در فروش ۱۰ درصد کاهش می‌یابد. همچنین هر واحد از دستگاه i برای هر ساعت کار کردن نیاز به b_{ij} واحد از محصول نوع j دارد و در پایان ساعت a_{ij} تا از محصول نوع j تولید می‌کند. در ساعت صفر یعنی قبل از شروع خط تولید کارخانه g_i واحد از محصول i م را تهیه کرده‌است. بطوری مسئله را به برنامه‌ریزی خطی مدل سازی کنید که سود کارخانه بیشینه شود. (فرض کنید که کارخانه می‌تواند مقدار حقیقی واحد از هر دستگاه و محصول استفاده کند)

۷ کارخانه‌ای دو نوع محصول تولید می‌کند. محصول نوع اول به $\frac{1}{4}$ ساعت مونتاژکاری، $\frac{1}{8}$ ساعت آزمایش، و ۱.۲ دلار هزینه‌ی مواد اولیه نیاز دارد. محصول نوع دوم به $\frac{1}{3}$ ساعت مونتاژکاری، $\frac{1}{3}$ ساعت آزمایش، و ۰.۹ دلار هزینه‌ی مواد اولیه نیاز دارد. با پرسنل موجود کارخانه، هرروز امکان حداکثر ۹۰ ساعت مونتاژکاری و ۸۰ ساعت آزمایش وجود دارد. محصولات نوع اول و دوم به ترتیب دارای ارزش بازاری ۹ دلار و ۸ دلار هستند. الف) برنامه‌ی خطی‌ای برای بیشینه کردن سود روزانه‌ی کارخانه بنویسید.

ب) دو تغییر زیر برای مسئله‌ی اصلی را در نظر بگیرید:

(i) فرض کنید تا سقف ۵۰ ساعت مونتاژکاری اضافه، به قیمت ساعتی ۷ دلار می‌توان ترتیب داد.

(ii) فرض کنید تولیدکننده‌ی مواد اولیه در صورتی که خرید روزانه بالای ۳۰۰ دلار باشد، ۱۰٪ تخفیف می‌دهد.

کدام یک از موارد بالا می‌تواند به‌راحتی وارد برنامه‌ی خطی شوند و چگونه؟ اگر داخل کردن یکی از موارد یا هر دو مورد در برنامه‌ی خطی سخت است، در این صورت مسئله را چگونه حل می‌کنید؟

۸ شبکه‌ای با n دستگاه داریم. حداکثر ظرفیت انتقال سیم بین دو دستگاه i و j برابر $c_{i,j}$ است (اگر بین دو دستگاه سیمی موجود نباشد، ظرفیت سیم آن‌ها را صفر می‌گیریم). همچنین هزینه انتقال هر واحد اطلاعات از آن سیم $p_{i,j}$ است. هر دستگاه x ، به دستگاه y می‌خواهد $d_{x,y}$ داده انتقال دهد، به‌طوری که در مجموع هزینه شبکه کمینه شود. مسئله را به فرم یک برنامه‌ریزی خطی صورت‌بندی کنید. دقت کنید مجموع کل داده‌هایی که از یک سیم می‌گذرد نباید از ظرفیت سیم بیشتر باشد.

۹ فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد که یکی از مقادیر a_1, \dots, a_n را اختیار می‌کند. می‌دانیم x از یکی از توزیع‌های p یا q آمده است. یک نمونه تصادفی از x مشاهده می‌کنیم. هدف تعیین این است که x از توزیع p آمده است یا q . فرض کنید $0 \leq x_j \leq 1$. می‌خواهیم x_j ها را طوری تعیین کنیم که:

۱. اگر نمونه مشاهده‌شده a_j باشد، ما به احتمال x_j توزیع p را انتخاب کنیم.

۲. اگر توزیع q باشد، احتمال انتخاب p حداکثر ۰.۰۱ باشد.

۳. اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشینه باشد.

(به شرط این‌که اگر توزیع q بود احتمال انتخاب p حداکثر ۰.۰۱ باشد، کاری کنیم که اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشینه شود.) یک برنامه‌ی خطی برای پیدا کردن x_j ها بنویسید.

۱۰ یک تیم n نفره از آدم‌ها به همراه یک دوچرخه تک‌نفره، قصد دارند از نقطه A به نقطه‌ی B به فاصله‌ی d بروند. برای هر فرد i سرعت پیاده‌روی برابر با w_i و سرعت دوچرخه‌سواری برابر است با b_i . قصد داریم زمان رسیدن آخرین نفر به نقطه‌ی B را مینیمم کنیم (توجه کنید که افراد می‌توانند به سمت عقب نیز حرکت کنند و بنابراین اولین زمانی که همه در نقطه‌ی B قرار داشته باشند، زمان پایان است). آیا می‌توانید این مسئله را به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید؟