بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه چهاردهم: کران پایین برای الگوریتم GW (۲)

Project: People

مرحله ۲ :

گسسته‌سازی

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\operatorname{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$$P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset S^{d-1}$$

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\mathrm{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$\mathrm{diam}(U_i) \leq O(\gamma)$

$$P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset S^{d-1}$$

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\operatorname{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$\operatorname{diam}(U_i) \leq O(\gamma)$

- P: مجموعه نقاط ماکسیمال با فاصله γ

$$P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset S^{d-1}$$

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\mathrm{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$\boxed{\mathrm{diam}(U_i) \leq O(\gamma)}$

- P: مجموعه نقاط ماکسیمال با فاصله γ

$$P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset S^{d-1}$$

- Vi: مجموعه نزدیک‌ترین نقاط به pi نسبت به P
  - کران بالا و پایین برای حجم Vi

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\mathrm{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$\mathrm{diam}(U_i) \leq O(\gamma)$

- P: مجموعه نقاط ماکسیمال با فاصله γ

$$P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset S^{d-1}$$

- Vi: مجموعه نزدیک‌ترین نقاط به pi نسبت به P
  - کران بالا و پایین برای حجم Vi

- ایده:
  - n که 1/n از همه Viها کوچکتر باشد
  - جابجایی قسمت‌هایی با ناحیه‌های مجاور که همه مضربی از 1/n شوند
  - تقسم ناحیه‌های هر فرد به 1/nها

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2\gamma$$

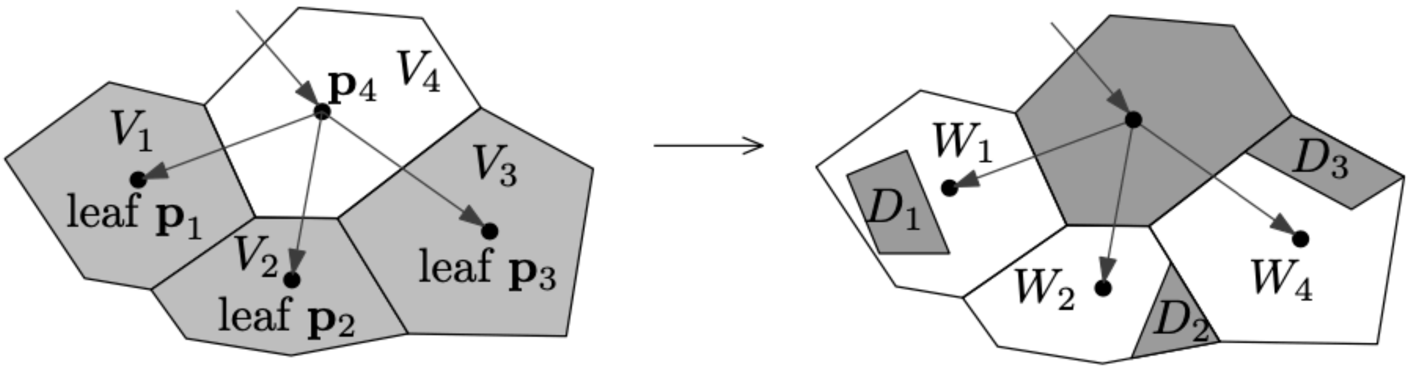
- ناحیه i و j مجاورند اگر $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2\gamma$

- ناحیه i و j مجاورند اگر $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2\gamma$
- گراف بالا همبند است
  - کمان بین pi و pj
  - نزدیک‌ترین نقطه از P به هر نقطه از کمان،
    - فاصله $> \gamma$
  - ببریم بین نزدیک‌ترین نقطه‌ها

- ناحیه i و j مجاورند اگر $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2\gamma$
- گراف بالا همبند است
  - کمان بین pi و pj
  - نزدیک‌ترین نقطه از P به هر نقطه از کمان،
    - فاصله $< \gamma$
  - بپریم بین نزدیک‌ترین نقطه‌ها
- درخت ریشه‌دار فراگیر
  - بازگشتی

- برگ‌ها:
  - باقی‌مانده به $1/n$ را جدا می‌کنیم به پدرش می‌دهیم
  - Wi قسمت باقی‌مانده (حجم = مضربی از $1/n$)

- برگ‌ها:
  - باقی‌مانده به 1/n را جدا می‌کنیم به پدرش می‌دهیم
  - Wi قسمت باقی‌مانده (حجم = مضربی از 1/n)
- غیر برگ:
  - بعد از تمام تقسیم‌بندی همه فرزندان
  - از قسمت اصلی خودش به اندازه باقی‌مانده حجم جدید (حجم اولیه + حجم اضافه شده از فرزندان) به پدر
  - Wi قسمت باقی‌مانده (حجم = مضربی از 1/n)



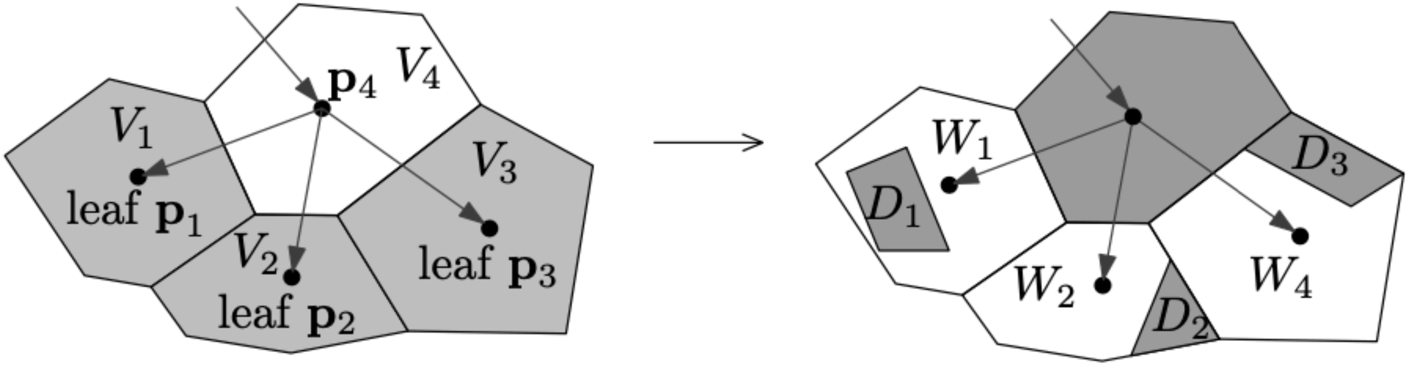
$$V_4' = V_4 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

- برگ‌ها:
  - باقی‌مانده به 1/n را جدا می‌کنیم به پدرش می‌دهیم
  - Wi قسمت باقی‌مانده (حجم = مضربی از 1/n)
- غیر برگ:
  - بعد از تمام تقسیم‌بندی همه فرزندان
  - از قسمت اصلی خودش به اندازه باقی‌مانده حجم جدید (حجم اولیه + حجم اضافه شده از فرزندان) به پدر
  - Wi قسمت باقی‌مانده (حجم = مضربی از 1/n)
- ریشه:
  - چون کل بر 1/n بخش‌پذیر است
  -

Lemma. *For every d and every $\gamma > 0$ there exists an integer n such that S^{d-1} can be subdivided into cells $U_1, \ldots, U_n$ with $\mu(U_i) = \frac{1}{n}$ and* $\operatorname{diam}(U_i) \leq \gamma$ *for all i.*

$\boxed{\operatorname{diam}(U_i) \leq O(\gamma)}$

- قطر هر مجموعه = $O(\gamma)$
- حجم هر مجموعه = $1/n$



$$V_4' = V_4 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

- گسسته‌سازی برای γ و n مناسب
- از هر ناحیه یک راس

ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

- گسسته‌سازی برای γ و n مناسب
- از هر ناحیه یک راس

$$\begin{aligned} V(G) &:= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \\ E &= E(G) := \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} : \angle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\} \end{aligned}$$

ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

- گسسته‌سازی برای γ و n مناسب
- از هر ناحیه یک راس

$$\begin{aligned} V(G) &:= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \\ E &= E(G) := \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} : \angle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathsf{SDP}(G)}{|E|} \geq \frac{1 - \cos \vartheta_{\mathrm{GW}}}{2} - \epsilon$$

ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

- گسسته‌سازی برای γ و n مناسب
- از هر ناحیه یک راس

$$\begin{aligned} V(G) &:= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \\ E &= E(G) := \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} : \angle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\} \end{aligned}$$

؟

$$\frac{\mathsf{Opt}(G)}{|E|} \leq \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta) \qquad \frac{\mathsf{SDP}(G)}{|E|} \geq \frac{1 - \cos \vartheta_{\mathrm{GW}}}{2} - \epsilon$$

ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

- گسسته‌سازی برای γ و n مناسب
- از هر ناحیه یک راس

$$\begin{aligned} V(G) &:= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \\ E &= E(G) := \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} : \angle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \in [\vartheta_{\mathrm{GW}} - \delta, \vartheta_{\mathrm{GW}} + \delta]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathsf{Opt}(G)}{|E|} \overset{?}{\leq} \frac{\vartheta_{\mathrm{GW}}}{\pi} + O(\delta) \qquad \frac{\mathsf{SDP}(G)}{|E|} \geq \frac{1 - \cos \vartheta_{\mathrm{GW}}}{2} - \epsilon$$

اگر به ازای هر $\delta > 0$ داشته باشیم $f \geq \frac{A - \delta}{B + \delta}$

به ازای هر $\gamma > 0$، عدد $\delta > 0$ هست که $f \geq \frac{A}{B} - \gamma$

مجموعه بدها

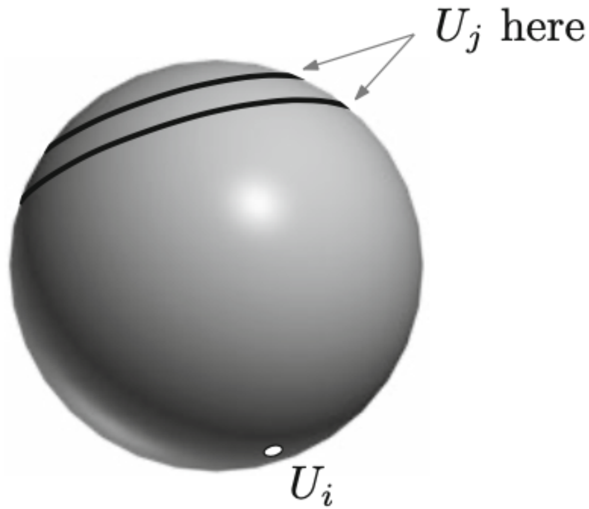
مجموعه بدها

U_i: ناحیه مربوط به v_i

مجموعه بدها

Ui: ناحیه مربوط به vi

$\{U_i, U_j\}$ اگر Ui x Uj هم شامل یال‌های Ec و شامل غیریال‌های Ec شود.

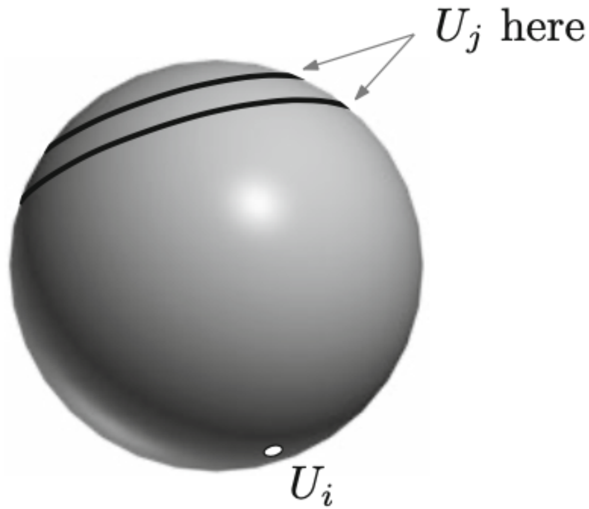


مجموعه بدها

Ui: ناحیه مربوط به vi

$\{U_i, U_j\}$ اگر Ui x Uj هم شامل یال‌های Ec و شامل غیریال‌های Ec شود.

می‌توان γ را کوچک کرد تا : $|\mathcal{B}| \leq \beta n^2$



$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) \geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|)$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\begin{aligned} \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) &\geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|) \\ &\geq 2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)| - 2\beta. \end{aligned}$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\begin{aligned}\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) &\geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|) \\ &\geq 2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)| - 2\beta.\end{aligned}$$

$$\mu^2(E_c) \leq 2n^{-2}|E| + 2\beta$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\begin{aligned} \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) &\geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|) \\ &\geq 2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)| - 2\beta. \end{aligned}$$

$$\mu^2(E_c) \leq 2n^{-2}|E| + 2\beta$$

$$\frac{2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)|}{2n^{-2}|E|}$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\begin{aligned} \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) &\geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|) \\ &\geq 2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)| - 2\beta. \end{aligned}$$

$$\mu^2(E_c) \leq 2n^{-2}|E| + 2\beta$$

$$\frac{2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)|}{2n^{-2}|E|} \leq \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) + 2\beta}{\mu^2(E_c) - 2\beta.}$$

$$A_c := \bigcup_{\mathbf{v}_i \in A} U_i.$$

هر یال vi و vj، به اندازه $2/n^2$ به یال‌های گراف پیوسته اضافه می‌کند
(به جز مجموعه‌های بد)

$$\begin{aligned} \mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) &\geq 2n^{-2}(|\mathrm{cut}(E, A)| - |\mathcal{B}|) \\ &\geq 2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)| - 2\beta. \end{aligned}$$

$$\mu^2(E_c) \leq 2n^{-2}|E| + 2\beta$$

$$\frac{2n^{-2}|\mathrm{cut}(E, A)|}{2n^{-2}|E|} \leq \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c)) + 2\beta}{\mu^2(E_c) - 2\beta.} \leq \frac{\mu^2(\mathrm{cut}(E_c, A_c))}{\mu^2(E_c)} + \delta.$$

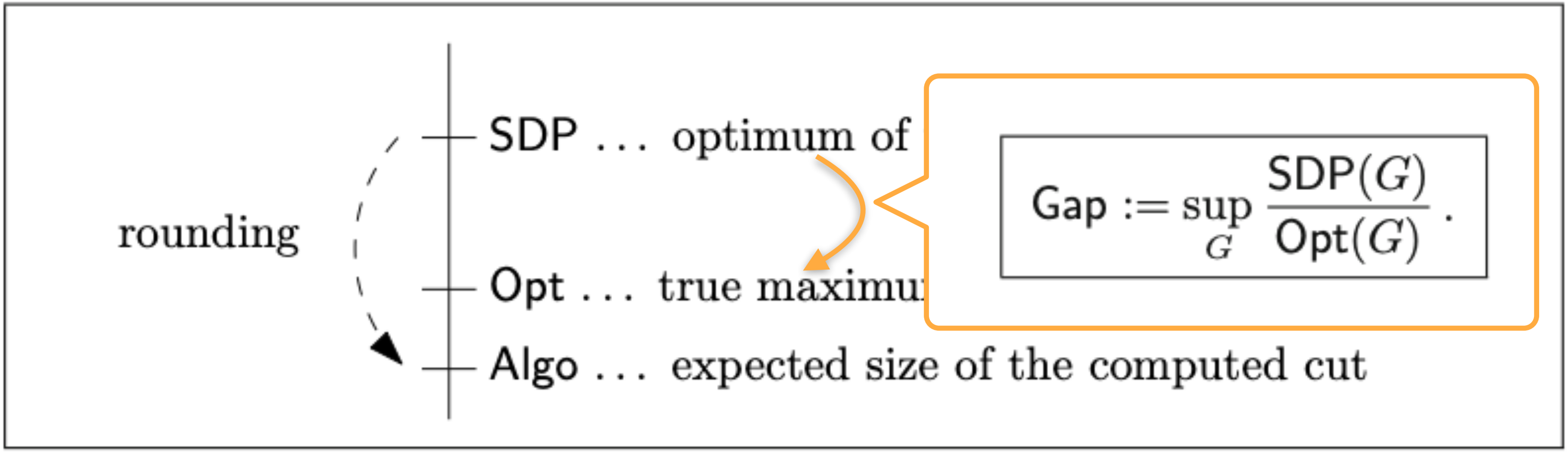
ادامه اثبات قضیه

8.3.2 Theorem (Feige and Schechtman [FS02]). *The integrality gap of the Goemans–Williamson semidefinite relaxation of* MaxCut *satisfies* $\mathsf{Gap} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} \approx 1.1382$. *In other words, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a graph* G *with*

$$\frac{\mathsf{SDP}}{\mathsf{Opt}} \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{GW}}} - \varepsilon.$$

زیرفصل ۲:
کران پایین α_{GW} برای الگوریتم GW

- مسئله قبل: SDP/Opt
- اما الگوریتم = Opt



Theorem (Karloff [Kar99]). *For every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

where Opt *is the number of edges of a maximum cut and* Algo *is the expected size of the cut found by the random hyperplane rounding.*

گراف همینگ (d و h)

$$V := \{-1, 1\}^d$$

$$E := \{\{a, b\} : a, b \in V, d_H(a, b) = h\}$$

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1 - \cos(\vartheta)}{2}$$

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} / \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} / \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین بعد i =۰ و ۱

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

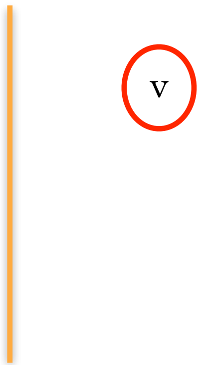
Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین
بعد i =۰ و ۱



بعد i = ۱

بعد i = ۰

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

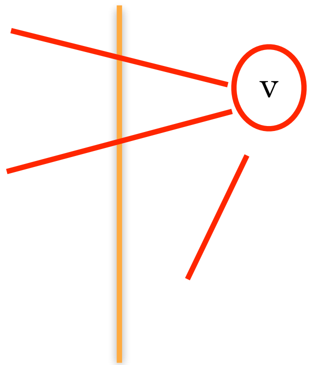
Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \leq \alpha_{\text{GW}} + \varepsilon,$$

یک برش بین بعد i =۰ و ۱

یک جواب شدنی

Opt از چیزی بزرگ‌تر است



بعد i = ۱

بعد i = ۰

$$\frac{\vartheta}{\pi} / \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

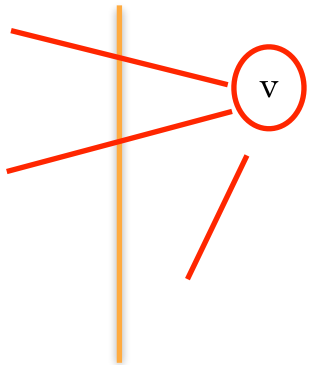
Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \le \alpha_{\text{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین بعد i =۰ و ۱



تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

بعد i = ۱

بعد i = ۰

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

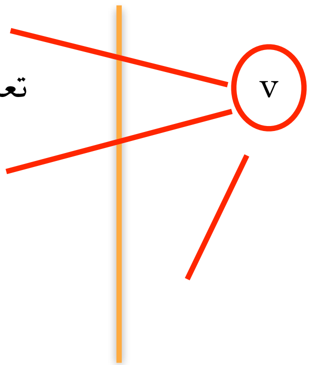
$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \leq \alpha_{\text{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین
بعد i =۰ و ۱

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

بعد i = ۱

بعد i = ۰

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \le \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

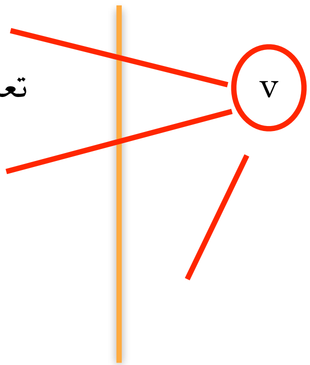
یک جواب شدنی

یک برش بین بعد i =۰ و ۱

$$|E|\binom{d-1}{h-1} \Big/ \binom{d}{h}$$

تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



بعد i = ۱

بعد i = ۰

$$\frac{\vartheta}{\pi} / \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \le \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

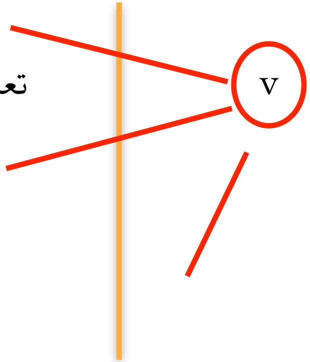
یک برش بین
بعد i =۰ و ۱

$$|E|\binom{d-1}{h-1}/\binom{d}{h}$$

$$\frac{h}{d}|E|$$

تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



بعد i = ۱

بعد i = ۰

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \le \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین
بعد i =۰ و ۱

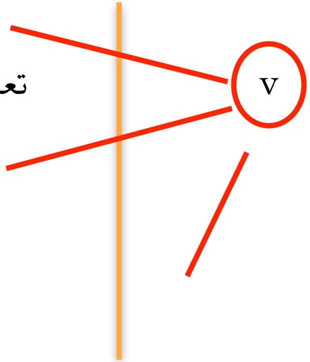
$$|E|\binom{d-1}{h-1}\Big/\binom{d}{h}$$

$$\frac{h}{d}|E|$$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



بعد i = ۰

بعد i = ۱

باید نشان بدهیم:

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \le \alpha_{\text{GW}} + \varepsilon,$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} / \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین
بعد i =۰ و ۱

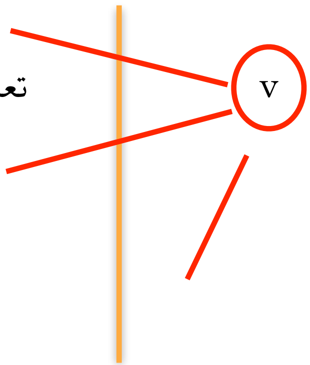
$$|E|\binom{d-1}{h-1}/\binom{d}{h}$$

$$\frac{h}{d}|E|$$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



بعد i = ۱

بعد i = ۰

باید نشان بدهیم:

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

Algo از چیزی کوچک‌تر است

جواب بهینه SDP و بازدهی الگوریتم روی آن

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

یک برش بین بعد i =۰ و ۱

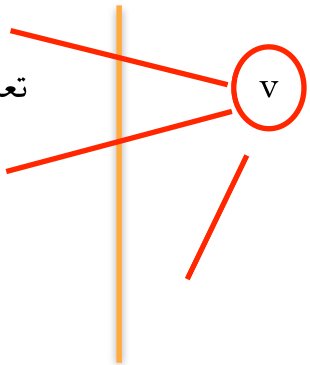
$$|E| \binom{d-1}{h-1} \Big/ \binom{d}{h}$$

$$\frac{h}{d} |E|$$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

تعداد کل همسایه‌ها = $\binom{d}{h}$

تعداد همسایه‌های شامل i = $\binom{d-1}{h-1}$



بعد i = ۱

بعد i = ۰

باید نشان بدهیم:

جواب بهینه SDP و بازدهی الگوریتم روی آن

Algo از چیزی کوچک‌تر است

$$\frac{\vartheta}{\pi} = \text{زاویه بین یال‌ها}$$

$$\frac{\vartheta}{\pi} \Big/ \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

$$\frac{\text{Algo}}{\text{Opt}} \leq \alpha_{\text{GW}} + \varepsilon,$$

Opt از چیزی بزرگ‌تر است

یک جواب شدنی

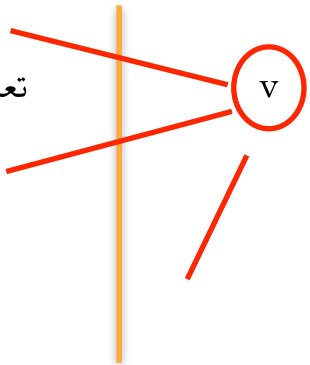
یک برش بین بعد i = ۰ و ۱

$$|E| \binom{d-1}{h-1} \Big/ \binom{d}{h}$$

$$\frac{h}{d}|E|$$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

$$\text{تعداد همسایه‌های شامل i} = \binom{d-1}{h-1}$$



$$\text{تعداد کل همسایه‌ها} = \binom{d}{h}$$

بعد i = ۱

بعد i = ۰

یک جواب برای SDP

برای هر راس a:
$$a \in \{-1, 1\}^d$$

جواب ما:
$$\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$$

یک جواب برای SDP

برای هر راس a: $a \in \{-1,1\}^d$

جواب ما: $\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$

برای هر یال: $\mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b = 1 - \frac{2h}{d}$

یک جواب برای SDP

برای هر راس a: $a \in \{-1,1\}^d$

جواب ما: $\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$

برای هر یال: $\mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b = 1 - \frac{2h}{d}$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}$$

یک جواب برای SDP

برای هر راس a:
$$a \in \{-1, 1\}^d$$

جواب ما:
$$\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$$

برای هر یال:
$$\mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b = 1 - \frac{2h}{d}$$

$$\frac{h}{d} \to \frac{1 - \cos(\vartheta)}{2}$$

زاویه هر یال ϑ

یک جواب برای SDP

باید نشان بدهیم:

این جواب برای
SDP بهینه است

برای هر راس a: $a \in \{-1, 1\}^d$

جواب ما: $\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$

برای هر یال: $\mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b = 1 - \frac{2h}{d}$

$\frac{h}{d} \rightarrow \frac{1 - \cos(\vartheta)}{2}$

زاویه هر یال ϑ

Proposition. *Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices, let $A = A_G$ be its adjacency matrix and let $\lambda_{\min}$ be the smallest eigenvalue of A (most negative,* not *with a small absolute value; typically $\lambda_{\min} < 0$). Then*

$$\mathsf{SDP}(G) \leq \frac{1}{2}|E| + \frac{-\lambda_{\min} n}{4}.$$

Proposition. *Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices, let $A = A_G$ be its adjacency matrix and let $\lambda_{\min}$ be the smallest eigenvalue of A (most negative, not with a small absolute value; typically $\lambda_{\min} < 0$). Then*

$$\mathsf{SDP}(G) \leq \frac{1}{2}|E| + \frac{-\lambda_{\min} n}{4}.$$

$$\begin{aligned} \mathsf{SDP} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{1 - \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} = \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}v_{ik}v_{jk} \\ &= \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^T A\mathbf{r}_k. \end{aligned}$$

سطرهای ماتریس

$(v_a, \ldots)$

Proposition. *Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices, let $A = A_G$ be its adjacency matrix and let $\lambda_{\min}$ be the smallest eigenvalue of A (most negative, not with a small absolute value; typically $\lambda_{\min} < 0$). Then*

$$\mathsf{SDP}(G) \leq \frac{1}{2}|E| + \frac{-\lambda_{\min} n}{4}.$$

$$\begin{aligned}\mathsf{SDP} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} = \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}v_{ik}v_{jk} \\ &= \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^T A\mathbf{r}_k \leq \tfrac{1}{2}|E| - \tfrac{1}{4}\lambda_{\min}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{r}_k\|^2\end{aligned}$$

سطرهای ماتریس

$(v_a, \ldots)$

Proposition. *Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices, let $A = A_G$ be its adjacency matrix and let $\lambda_{\min}$ be the smallest eigenvalue of A (most negative, not with a small absolute value; typically $\lambda_{\min} < 0$). Then*

$$\mathsf{SDP}(G) \le \frac{1}{2}|E| + \frac{-\lambda_{\min} n}{4}.$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{SDP} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{1-\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j}{2} = \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}v_{ik}v_{jk} \\
&= \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^T A\mathbf{r}_k \le \tfrac{1}{2}|E| - \tfrac{1}{4}\lambda_{\min}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{r}_k\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}|E| - \tfrac{1}{4}\lambda_{\min} n
\end{aligned}$$

سطرهای ماتریس

$(v_a, \ldots)$

باید نشان بدهیم:

این جواب برای SDP بهینه است

یک جواب برای SDP

جواب ما:

$$\mathbf{v}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} a \in \mathbb{R}^d$$

Proposition. *Let* $G = (V, E)$ *be a graph on* n *vertices, let* $A = A_G$ *be its adjacency matrix and let* $\lambda_{\min}$ *be the smallest eigenvalue of* A *(most negative,* not *with a small absolute value; typically* $\lambda_{\min} < 0$*). Then*

$$\mathsf{SDP}(G) \leq \frac{1}{2}|E| + \frac{-\lambda_{\min} n}{4}.$$

قضیه:

سطرهای ($v_a, \ldots$) بردارهای ویژه برای کم‌ترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت G هستند.

Theorem (Karloff [Kar99]). *For every $\varepsilon > 0$ there exists a graph G with*

$$\frac{\mathsf{Algo}}{\mathsf{Opt}} \leq \alpha_{\mathrm{GW}} + \varepsilon,$$

where Opt *is the number of edges of a maximum cut and* Algo *is the expected size of the cut found by the random hyperplane rounding.*