دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۹

کاربرد جبرخطی در برخی قضیه های نظریه گراف

جلسهٔ پانزدهم

نگارنده: سپیده عابدینی

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه گذشته به مبحث کاربرد برنامه‌ریزی خطی در نظریه بازیها پرداخته بودیم و در این جلسه هم درباره کاربرد آن در برخی قضایای نظریه گراف خواهیم پرداخت.

۲ قضیه کونیگ

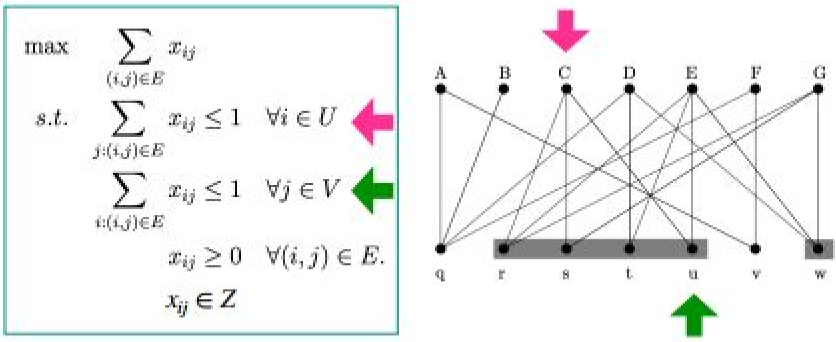
ابتدا به تعریف دو مفهوم مهم در گراف دو بخشی میپردازیم:

تطابق بیشینه در گراف دو بخشی: بیشینه تعداد یال هایی که هیچ دو راسی از آنها باهم اشتراک نداشته باشند.

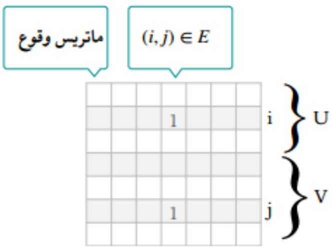
پوشش راسی در گراف دو بخشی: مجموعه تعدادی رئوس از گراف به طوری که هر یال گراف حداقل یکی از دو سرش در مجموعه باشد.

قضیه کونیگ : اگر یک گراف دو بخشی داشته باشیم ، اندازه تطابق بیشینه با اندازه پوشش راسی کمینه برابر است.
برای اثبات این قضیه ، ابتدا سعی میکنیم برای مساله تطابق بیشینه یک IP بنویسیم :
x_{ij} : به ازای هر یال یک متغیر تعریف میکنیم که نشان دهنده این است که آن یال در تطابق هست یا نه.

شرط تطابق : هر راسی را که در نظر بگیریم، حداکثر یک یال تطابق به آن وصل باشد.



قید $x \in \{۰, ۱\}$ را لازم نیست به قیودمان اضافه کنیم چون قیود اول و دوم اجازه نمیدهند هیچ متغیری بزرگتر از ۱ شود .
حالا میخواهیم صورت ماتریسی این برنامه ریزی صحیح را بنویسیم:
ماتریس وقوع A را به این صورت میسازیم : به ازای هر راس از u و v یک سطر و به ازای هر یال x_{ij} هم یک ستون داریم.
ستون مربوط به هر یال x_{ij} دقیقا ۲ تا درایه ۱ دارد که یکی مرتبط با یک راسش در بخش u و دیگری مرتبط با راس دیگرش در بخش v است (چون گراف دو بخشی است و هر یالی دقیقا یک سرش در بخش u و سر دیگرش در بخش v است) و باقی درایه های ستون اش ۰ است.

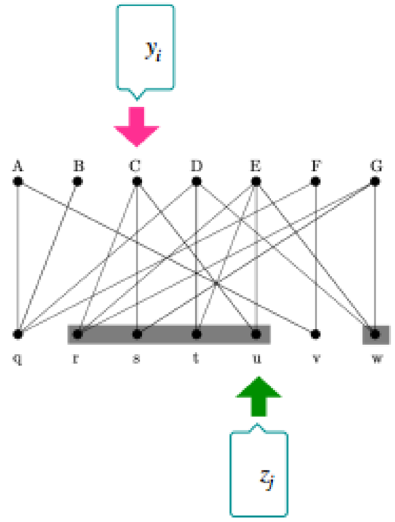


در این صورت برنامه ریزی صحیح جدید به صورت زیر میشود :

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{j=1}^{m} x_j \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

که A ماتریس وقوع و x_j متغیر به ازای هر یال است.

حالا میخواهیم یک برنامه ریزی صحیح برای مساله پوشش راسی کمینه بنویسیم :
به ازای رئوس هر بخش یک متغیر تعریف میکنیم مثلا به ازای هر راس بخش u متغیر y_i و به ازای هر راس بخش v متغیر z_j و چون هر یالی یک سرش در u و سر دیگرش در v است باید $y_i + z_j \succeq ۱$ باشد به ازای هر یال.



$$\min \quad \sum_{i\in U} y_i + \sum_{j\in V} z_j$$

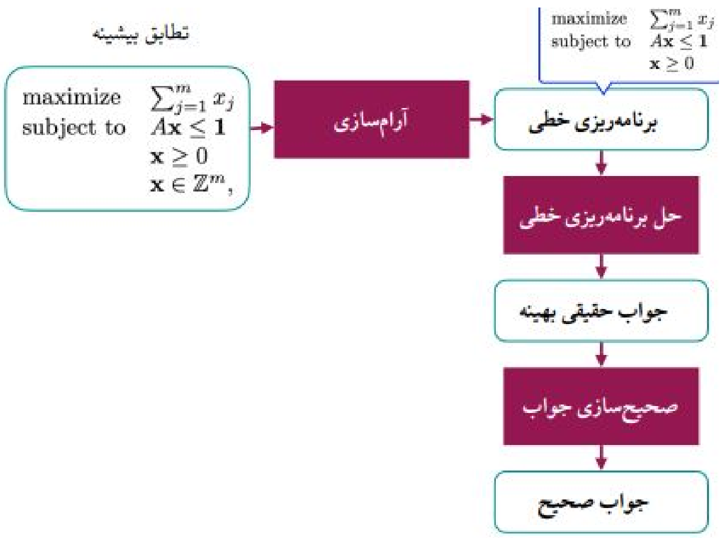
$$\begin{aligned} s.t. \quad & y_i + z_j \geq 1 \quad \forall (i,j) \in E \\ & y_i,\, z_j \geq 0 \quad \forall (i,j) \\ & y_i, z_j \in Z \end{aligned}$$

قید $y, z \in \{۰, ۱\}$ را لازم نیست به قیودمان اضافه کنیم اگر این قیود عددی بزگتر از ۱ باشند، میتوان در حالت بهینه آن عدد را با ۱ جایگزین کرد و در اینصورت شروط برقرار باقی میمانند و تابع هدف کوچکتر میشود.
حالا میخواهیم صورت ماتریسی این برنامه ریزی صحیح را بنویسیم:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{subject to} & A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{1} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \\ & \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

ماتریس این برنامه ریزی صحیح، ترانهاده ماتریس وقوع میشود. زیرا به ازای راس یک متغیر (y_i) و به ازای هر یال یک نامعادله داریم .

طبق قضیه کنیگ، جواب این دو برنامه ریزی صحیح باهم مساوی است. که میخواهیم این قضیه را ثابت کنیم :
اگر این دو برنامه ریزی صحیح را آرام سازی کنیم، میتوان نشان داد که دوگان یکدیگر میشوند ولی چون برنامه ریزی اصلی صحیح است،نمیتوانیم از قضیه دوگانی قوی استفاده کنیم مگر اینکه نشان دهیم هر دو برنامه ریزی آرام شده دارای جواب بهینه صحیح هستند.
برای حل مساله تطابق بیشینه فرآیندهای زیر را طی میکنیم:



حالا میخواهیم به این موضوع بپردازیم که چرا همه راس های مساله تطابق بیشینه ، صحیح میشوند؟ به عبارتی چرا تمام bfsها صحیح هستند؟ اگر بخواهیم bfs جواب صحیح داشته باشد، یعنی باید جواب معادله هایی به صورت $Ax = b$ صحیح باشد، از طرفی طبق قانون کرامر :

Ai = (A)
ستون i تبدیل به b

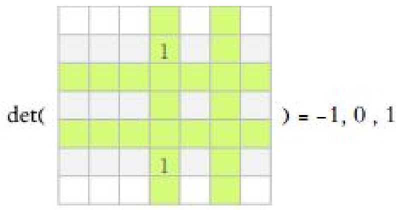
قانون کرامر

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

یعنی برای اینکه جواب bfs صحیح باشد کافیست x_i ها صحیح باشند، که در صورتی این اتفاق میوفتد که $det(A_i)$ صحیح باشد (اگر همه ی درایه های A صحیح باشد و b هم صحیح ، $det(A_i)$ صحیح میشود) و همچنین $det(A)$ نیز عدد خوبی باشد که جواب کسر صحیح شود ، اگر این قید را اضافه کنیم که $det(A)$ همیشه ۱ یا ـ۱ باشد یا در اینصورت همیشه جواب های bfs صحیح میشوند.

۳ ماتریس تک پیمانه ای

ماتریس کاملا تک پیمانه ای: ماتریس A کاملا تک پیمانه ای است اگر دترمینان هر زیرماتریس مربعی از آن ۱−، ۰ یا ۱ باشد.



قضیه: اگر ماتریس A کاملا تک پیمانه ای و b صحیح باشد ، آنگاه تمام bfs های چندوجهی زیر، صحیح میشود :

$$\begin{aligned} \textit{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

اثبات: تمام جواب های شدنی پایه ای از معادله ای به شکل $A_B x_B = b$ بدست می ایند و طبق قانون کرامر :

قانون کرامر

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

و چون A کاملا تک پیمانه ای است $det(A)$ ۰ یا ۱ یا ۱− است از طرفی چون A_B در جواب های شدنی پایه ای ستون های مستقل از هم دارد پس دترمینان اش ۰ نخواهد شد پس $det(A) \neq 0$ پس مخرج یا ۱ یا ۱− است و $det(A_i)$ هم که صحیح است در نتیجه x_i صحیح است.

قضیه: اگر ماتریس A کاملا تک پیمانه ای باشد ، آنگاه ماتریس $(A|e_i)$ نیز کاملا تک پیمانه ای است که e_i بردار ۰ با یک ۱ است .

اثبات : باید نشان دهیم هر زیر ماتریس از $(A|e_i)$ را در نظر بگیریم، دترمینانش ۰ یا ۱ یا ۱− خواهد شد .

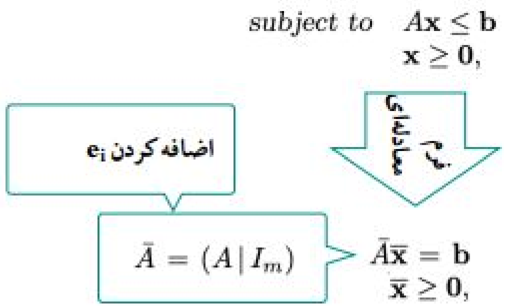
اگر زیر ماتریس مدنظر شامل ستون j (همان e_i) نشود که قضیه حل است! زیرا طبق فرض A زیر پیمانه ای بود. اگر زیر ماتریس موردنظر شامل ستون j و سطر غیرصفر از آن باشد، آنگاه میتوانیم دترمینان را روی این ستون به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_i (-1) a_{ij} det(A')$$

که A' ماتریسی است که از حذف سطر i و ستون j ماتریس A تشکیل شده است.

چون در ستون j همه درایه ها بجز یک درایه، ۰ بودند پس a_{ij} برابر با ۰ است بجز برای یک درایه، که برابر ۱ است. پس جواب $\sum_i (-1) a_{ij} det(A')$ برابر میشود با ۱ یا ۱− یا ۰ چون A' از حذف یک سطر و ستون در ماتریس A تشکیل شده که طبق تک پیمانه ای بودن $det(A')$ حتما ۱ یا ۱− یا ۰ است.

قضیه: اگر ماتریس A کاملا تک پیمانه ای باشد و b صحیح باشد ، آنگاه برنامه ریزی خطی زیر، جواب بهینه صحیح دارد :



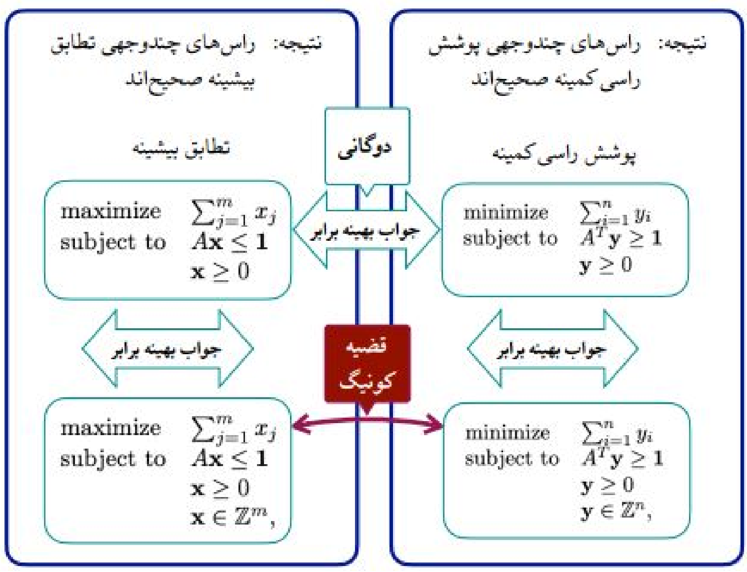
چون $\bar{A}$ کاملا تک پیمانه ای است (طبق قضیه قبلی) پس تمام bfs های این برنامه ریزی خطی صحیح میباشد، پس حتما یک جواب بهینه صحیح دارد.

قضیه: اگر یک گراف دوبخشی داشته باشیم، ماتریس وقوع آن کاملا تک پیمانه ای است.

اثبات : روی اندازه زیر ماتریس استقرا میزنیم :

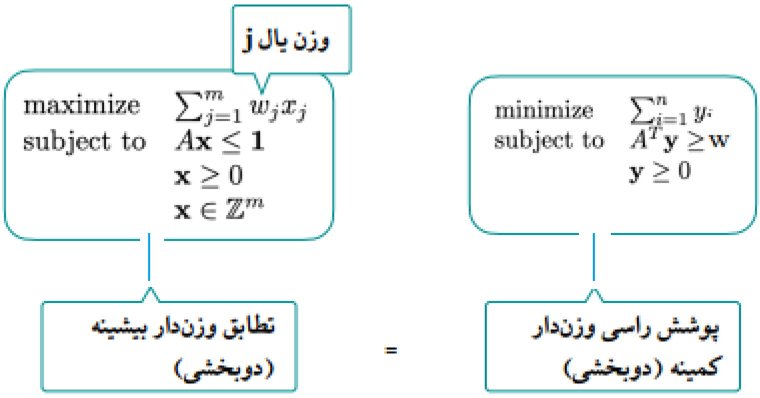
- اگر زیر ماتریس دارای ستونی بود که تمام درایه هایش ۰ بود ، دترمینان ۰ میشود پس کاملا تک پیمانه ای است.
- اگر ستونی داشت که فقط یک عدد ۱ داشت، در قضیه های قبل نشان دادیم که دترمینان این ماتریس ۰ یا ۱ یا ۱− میشود و کاملا تک پیمانه ای است.
- اگر هیچ کدام از دوحالت بالا را نداشت و همه ستون ها دقیقا ۲ تا ۱ داشتند، یکی در بخش (u) و دیگری در بخش (v) ، آنگاه اگر تمام سطرهای مربوط به بخش (u) را باهم جمع کنیم ، یک بردار که تمام درایه هایش ۱ است تشکیل میشود. برای بخش (v) نیز همینطور است و اگر تمام سطرهای مربوط به بخش (v) را باهم جمع کنیم ، یک بردار که تمام درایه هایش ۱ است تشکیل میشود. پس دترمینان این ماتریس ۰ میشود زیرا میتوانیم یک ترکیب خطی از سطرها بسازیم که بردار ۰ را تولید کند . (سطرها مستقل نیستند)

از قضیه قبل میتوانیم به نتایج زیر برسیم :



۴ نسخه وزن دار کونیگ

فرض کنید هر یالی وزن w_j داشته باشد، در این صورت میتوانیم نشان دهیم در یک گراف دوبخشی، تطابق وزن دار بیشینه با پوشش راسی وزن دار کمینه باهم برابر است.



اثبات : چون ماتریس A کاملا تک پیمانه ای است ، جواب بهینه IP و LP مساله تطابق وزن دار بیشینه باهم برابر است، و چون LPاش دوگان نسخه وزن دار مساله پوشش راسی کمینه است، در نتیجه جواب های بهینه این دو مساله باهم برابر میشود.
قضیه کونیگ برای گراف های غیر دوبخشی درست نیست! چون ماتریس قیود IPشان تک پیمانه ای نمیشود و اگرچه جواب LPهاشون باهم برابره ولی چون جواب LP و IP باهم برابر نمیشه ، قضیه کونیگ برایشان صدق نمیکند.
قضیه: شار بیشینه مساوی است با برش کمینه .
اثبات : شبیه همان کارهایی که برای اثبات قضیه قبلی داشتیم ، میتوانیم نشان دهیم LP شاربیشینه و برش کمینه ، دوگان یکدیگرند و چون ماتریس وقوع قیودشان کاملا تک پیمانه ای است، پس جواب بهینه IP و LP برای هر مساله یکی میشود و درنتیجه حکم اثبات میشود.

۵ کاربرد جبر خطی در زمان بندی

۱.۵ مساله برنامه ریزی ماشین :

۳ دستگاه کپی و تعدادی کار داریم که میخواهیم تصمیم بگیریم کارها را با چه ترتیبی و با کدام دستگاه ها انجام به طوری که زمان تمام شدن کارها کمینه شود.

	Single B&W	Duplex B&W	Duplex Color
Master's thesis, 90 pages two-sided, 10 B&W copies	—	45 min	60 min
All the Best Deals flyer, 1 page one-sided, 10,000 B&W copies	2h 45 min	4h 10 min	5h 30 min
Buyer's Paradise flyer, 1 page one-sided, 10,000 B&W copies	2h 45 min	4h 10 min	5h 30 min
Obituary, 2 pages two-sided, 100 B&W copies	—	2 min	3 min
Party platform, 10 pages two-sided, 5,000 color copies	—	—	3h 30 min

برای پیدا کردن جواب بهینه به این ترتیب عمل میکنیم : کار ۵ که فقط باید با دستگاه ۳ انجام شود، حالا اگر کار اول را هم با دستگاه ۳ و کار دوم را با دستگاه ۱ و کار سوم و چهارم را با دستگاه ۲ انجام دهیم ، توانسته ایم یک جواب ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه ای پیدا کنیم که جواب بهینه است.
IP این مساله به صورت زیر میشود:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize} & t & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & \in \mathbb{Z} & \text{for all } i \in M, j \in J.
\end{array}
$$

کارها

ماشین‌ها

هزینه ماتریس
ماشین i کار j

x_{ij} : ماشین i کار j را انجام دهد.

d_{ij} : زمانی که طول میکشد تا ماشین i کار j را انجام دهد.

فرض کنید m ماشین داریم که با مجموعه $M = \{۱, ۲, ۳, ..., m\}$ نشان میدهیم.

و همچنین n کار داریم که با مجموعه $J = \{m + ۱, ..., m + n\}$ نمایش میدهیم.

t: ماکسیمم زمان همه ماشین ها.

باید اشاره کنیم کنیم که در این برنامه ریزی کارها غیر قابل تقسیم هستند ، بنابراین هر کار باید بر روی یک ماشین پردازش شود.
از قید اول و سوم میتوان نتیجه گرفت که $x_{ij} \in \{۰, ۱\}$

برای آرام سازی این برنامه ریزی صحیح، یک برنامه ریزی صحیح دیگری که با اضافه کردن قیود اضافه به برنامه ریزی صحیح قبلی مان بدست می آید را آرام سازی خواهیم کرد. زیرا آرام سازی برنامه ریزی اولیه ، ممکن است جوابی دهد که جوابی برای برنامه ریزی صحیح نباشد!
فرض کنید T یک جواب بهینه برای این مساله باشد ، اگر $d_{ij} \succ T$ کار j ام نمیتواند به صورت بهینه روی ماشین i ام اجرا شود ، پس برای این حالت $x_{ij} = ۰$ در نظر میگیریم.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize} & t & & \\
\text{subject to} & \sum_{i \in M} x_{ij} & = 1 & \text{for all } j \in J \\
& \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & \leq t & \text{for all } i \in M \\
& x_{ij} & \geq 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \\
& x_{ij} & = 0 & \text{for all } i \in M, j \in J \text{ with } d_{ij} > T \\
& x_{ij} & \in \mathbb{Z} & \text{for all } i \in M, j \in J.
\end{array}
$$

۶ ارجاع و منابع

ویدیو جلسه پانزدهم.