

به نام خداوند رحمت‌گر مهربان

پیچیدگی محاسبات (بهار ۱۳۹۴) - امتحان پایان‌ترم

نام و نام خانوادگی:

زمان: ۲ ساعت

پاسخ سوال‌ها را مختصر بنویسید.

سوال ۱ (پیچیدگی مداری): اثبات کنید اگر برای یک $i > 1$ داشته باشیم: $NC = NC^i$ آنگاه $NC^i = NC^{i+1}$.

سوال ۲ (اثبات تعاملی برای درجه چندجمله‌ای): فرض کنید یک چندجمله‌ای با اعدادی در \mathbb{Z}_p به صورت یک مدار جبری (با عملیات جمع و ضرب و تفریق) به همراه یک عدد d به شما داده شده است. یک اثبات تعاملی پیشنهاد بدهید برای اینکه نشان بدهد که چندجمله‌ای داده شده درجه‌اش برابر با d است. زمان اجرای الگوریتم‌های شما باید بر حسب طول مدار و $\log(p)$ چندجمله‌ای باشد.

سوال ۳ (اثبات تعاملی برای صحت عبارت منطقی): یک عبارت منطقی کاملاً صوری یک عبارت منطقی است به شکل زیر

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2, \dots, Q_n x_n : \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

که ψ یک عبارت منطقی است که شامل هیچ صوری نیست و هر کدام از Q_i ‌ها یا یک صور وجودی و یا یک صور عمومی هستند. در مسئله QSAT یک عبارت منطقی کاملاً صوری به شما داده شده و هدف این است که بررسی کنید آیا این عبارت یک عبارت منطقی صحیح است و یا خیر. یک اثبات تعاملی برای مسئله QSAT ارائه کنید.

سوال ۴ (تقریب‌ناپذیری ۳-رنگ‌پذیری): فرض کنید یک گراف G به شما داده شده و هدف شما این است که راس‌های آن را با ۳ رنگ رنگ‌آمیزی کنید به صورتی که تعداد راس‌هایی که رنگشان با رنگ تمامی راس‌های مجاور متفاوت است بیشینه شود. این عدد را $\gamma(G)$ می‌نامیم. در مسئله $\text{Gap-MAX-DEG4-3COL}(\epsilon)$ به شما یک گراف که درجه هر راس آن حداکثر ۴ است داده شده است به صورتی که می‌دانیم که یا $\gamma(G) = n$ و یا $\gamma(G) \leq n/(1 + \epsilon)$ که $\epsilon < 1$ یک عدد ثابت است. یک اثبات قابل بررسی احتمالاتی مناسب برای این مسئله ارائه کنید و درستی اثبات خود را شرح دهید، یعنی اثبات کنید $\text{Gap-MAX-DEG4-3COL}(\epsilon) \in \text{PCP}(\log n, 1)$.

سوال ۵ (تصادف در اثبات قابل بررسی): اثبات کنید $\text{PCP}(\circ, \log n) = \text{P}$ و $\text{PCP}(\circ, \text{poly } n) = \text{NP}$.

موفق باشید