بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه شانزدهم: تابع درجه ۲ روی گراف (انتهای رنگ کردن گراف‌های ۳-رنگ‌پذیر)

Project: People

رنگ‌آمیزی گراف‌های ۳ ــ رنگ‌پذیر
باقی‌مانده از جلسه قبل

رنگ‌کردن گراف‌های ۳ـ رنگ‌پذیر

- اگر $\chi(G) = 3$؟
  - اگر $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$، با ۴ رنگ نمی‌توان رنگ کرد
  - اگر «فرض ۲ـ به ـ۱»، با تعداد ثابتی رنگ نمی‌توان رنگ کرد
  -

الگوریتم‌های ابتدایی برای رنگ کردن گراف‌های ۳ـ رنگ‌پذیر

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ
  - یک راس با درجه حداقل D
    - همسایه‌ها ۲ـ رنگ‌پذیر (دوبخشی)
    - همه را با ۳ راس رنگ می‌کنیم و حذف می‌کنیم
    - حداکثر $O(n/D)$ رنگ مصرف می‌شود
    - در نهایت، درجه‌ها > D
  - بقیه با D رنگ
  - کل رنگ = $O(n/D + D)$

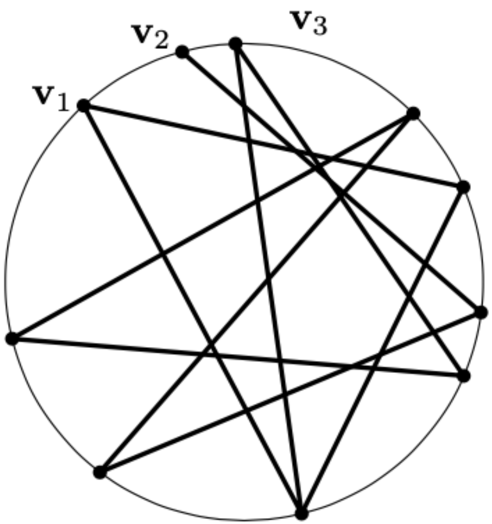
$$D = \sqrt{n}$$

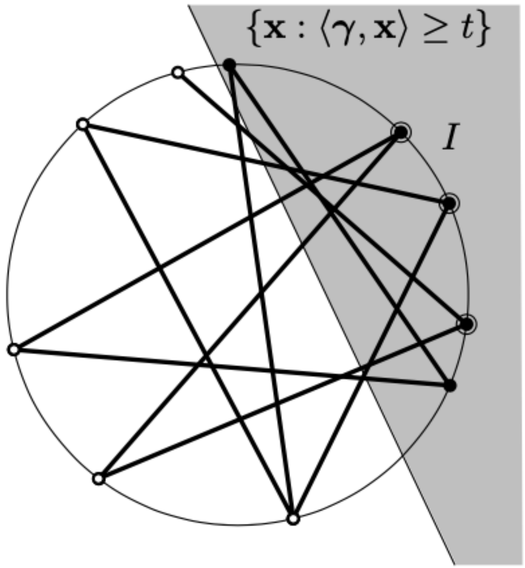
الگوریتم‌های ابتدایی برای رنگ کردن گراف‌های ۳ـ رنگ‌پذیر

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ (تکنیک ویگدرسون)
- تکنیک بلوم:
- $\tilde{O}(n^{0.375})$

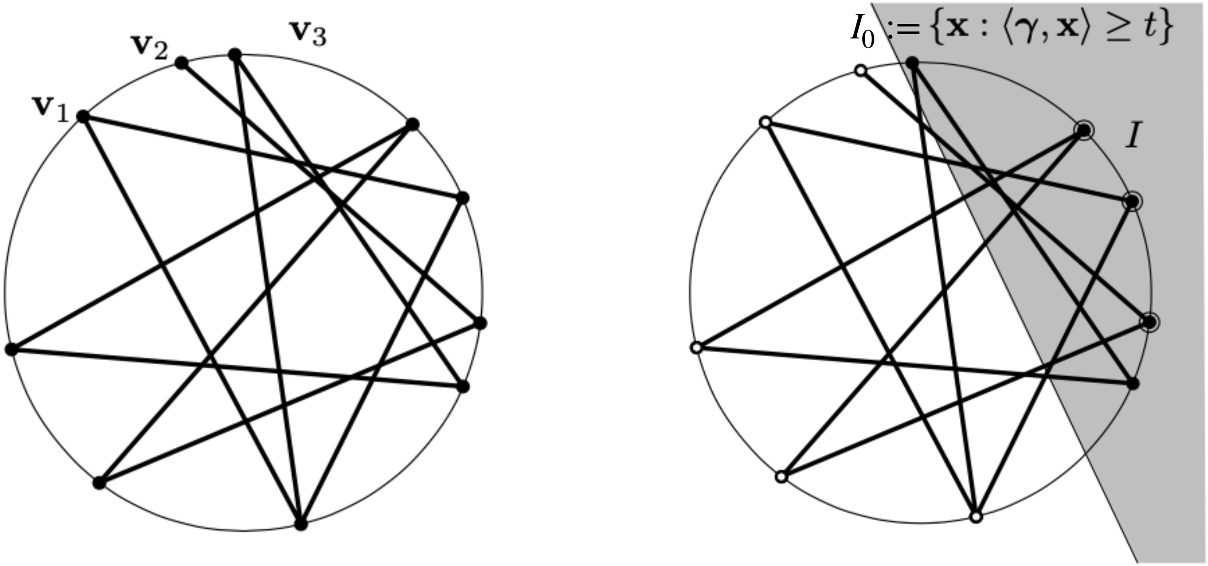
ایده

- ۳ـ رنگ‌پذیر ==(با SDP)==> ۳ـ رنگ‌پذیر برداری
- یال‌ها از هم دورند
  - با یک صفحه راس‌ها را جدا کنیم
  - مجموعه مستقل بزرگی پیدا کنیم.



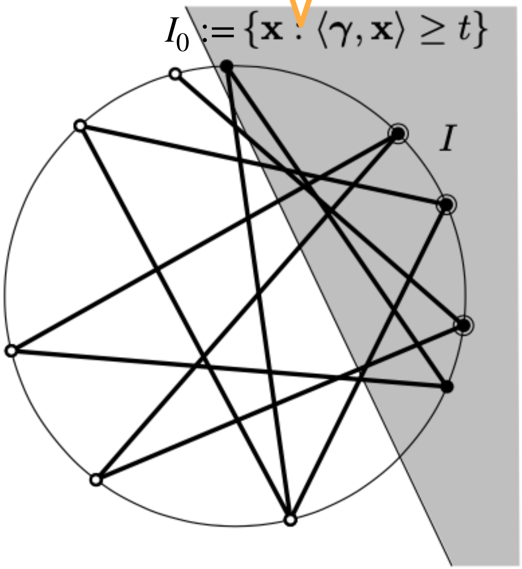


الگوریتم


$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$
$I_0 := \{\mathbf{x} : \langle \gamma, \mathbf{x} \rangle \geq t\}$
I

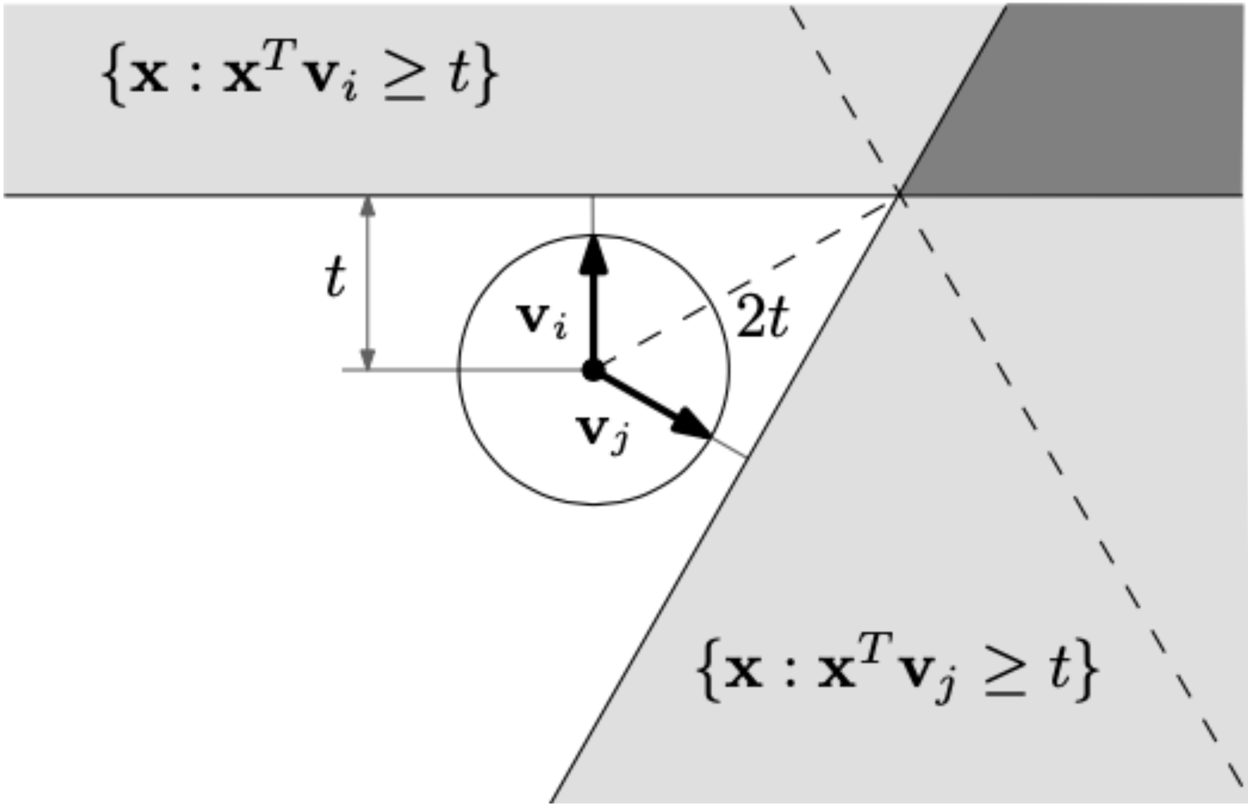
الگوریتم

$$\mathbf{E}\left[\,|I_0|\,\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t\right] = nN(t)$$



$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\,|I_0 \setminus I|\,\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0 \text{ and } j \in I_0 \text{ for some edge } \{i,j\}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{i,j\} \in E} \mathrm{Prob}[i, j \in I_0]
\end{aligned}$$

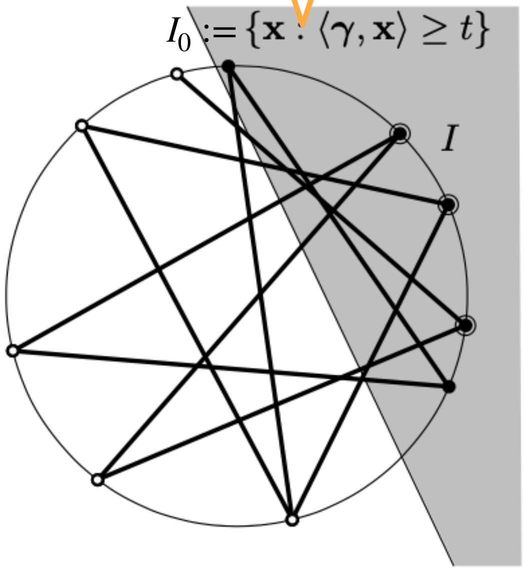
$$\text{Prob}[i, j \in I_0] = \text{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t \text{ and } \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_j \geq t\right] \leq N(2t)$$



تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\,|I|\,\right] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

$$\mathbf{E}\left[\,|I_0|\,\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}\left[\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}_i \geq t\right] = nN(t)$$



$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[\,|I_0 \setminus I|\,\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[i \in I_0 \text{ and } j \in I_0 \text{ for some edge } \{i,j\}] \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{i,j\} \in E} \mathrm{Prob}[i, j \in I_0] \end{aligned}$$

$$\boxed{\leq N(2t)}$$

$$\leq n\Delta N(2t)$$

$$\mathbf{E}\left[\,|I|\,\right] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

Lemma. *For all $t \geq 0$, we have*

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \leq N(t) \leq \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

$$N(t) - \Delta N(2t) \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} - \frac{\Delta}{2t}e^{-4t^2/2}\right)$$

$$t := \left(\tfrac{2}{3}\ln\Delta\right)^{1/2}$$

$$=\; \Omega\left(\Delta^{-1/3}/\sqrt{\ln\Delta}\right)$$

$$N(t) - \Delta N(2t) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} - \frac{\Delta}{2t}e^{-4t^2/2}\right)$$

$$t := \left(\tfrac{2}{3}\ln\Delta\right)^{1/2}$$

$$2^{-t^2/2} = e^{-\ln(\Delta)/3} = \Delta^{-1/3}$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\Delta^{-1/3} - \frac{\Delta}{2t}(\Delta^{-1/3})^4\right)$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\Delta^{-1/3} - \frac{\Delta^{-1/3}}{2t}\right)$$

$$= \Omega\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{2t}\right)\Delta^{-1/3}\right) = \Omega\left(\frac{1}{8t}\Delta^{-1/3}\right)$$

$$= \Omega\left(\Delta^{-1/3}/\sqrt{\ln\Delta}\right) = \tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3}n)$$

تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\,|I|\,\right] \geq n(N(t) - \Delta N(2t))$$

$$= \tilde{\Omega}(\Delta^{-1/3} n)$$

با $O(n^{0.25})$ رنگ

$D = n^{0.75}$

- بزرگ‌تر از D را با تکنینک ویگدرسون <= O(n/D)
- گراف باقی‌مانده،
  - مجموعه مستقل با اندازه حداقل $O(n/n^{0.75})$
    - حداکثر $n^{0.25}$ بار مجموعه مستقل <= هر کدام یک رنگ
- کل رنگ = $O(n/D+D^{1/3})$
  - $O(n^{1/4})$

با $O(n^{0.25})$ رنگ

با $O(n^{0.25})$ رنگ

گراف‌های سخت

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

راس‌ها: $V(G) := \{A \subseteq [d] : |A| = s\}$

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

راس‌ها:

$$V(G) := \{A \subseteq [d] : |A| = s\}$$

تعداد = $\binom{d}{s}$

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

راس‌ها: $V(G) := \{A \subseteq [d] : |A| = s\}$

تعداد = $\binom{d}{s}$

یال‌ها: $E(G) := \{\{A, B\} : A, B \subseteq [d], |A \cap B| \le t\}$

گراف G: با سه پارامتر d و s و t

$$[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$$

راس‌ها: $V(G) := \{A \subseteq [d] : |A| = s\}$

تعداد = $\binom{d}{s}$

یال‌ها: $E(G) := \{\{A, B\} : A, B \subseteq [d], |A \cap B| \le t\}$

- پارامترهای مناسب:

$$d = 8t \qquad s = 4t$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_ رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_ رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} & \text{if } i \in A \\ -d^{-1/2} & \text{if } i \notin A \end{cases}$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_ رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} & \text{if } i \in A \\ -d^{-1/2} & \text{if } i \notin A \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B \leq \tfrac{1}{d}(d - 4s + 4t).$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

d-2s+t	s-t	t	s-t
	+	+	
		+	+

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} & \text{if } i \in A \\ -d^{-1/2} & \text{if } i \notin A \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B \leq \tfrac{1}{d}(d-4s+4t).$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

d-2s+t	-(s-t)	t	-(s-t)
d-2s+t	s-t	t	s-t
	+	+	
		+	+

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} \text{ if } i \in A \\ -d^{-1/2} \text{ if } i \notin A \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B \leq \tfrac{1}{d}(d - 4s + 4t).$$

سه‌رنگ‌پذیری برداری G:

k_رنگ‌پذیر برداری

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \leq -\frac{1}{k-1}.$$

$$(\mathbf{v}_A)_i := \begin{cases} d^{-1/2} \text{ if } i \in A \\ -d^{-1/2} \text{ if } i \notin A \end{cases}$$

d-2s+t	-(s-t)	t	-(s-t)
d-2s+t	s-t	t	s-t
	+	+	
		+	+

$$\mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B \leq \tfrac{1}{d}(d - 4s + 4t). = \frac{1}{8t}(-4t) = -\frac{1}{2}$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^δ.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

$$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$$

$$\alpha(G) \leq n^{1-\delta}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t+1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} \quad = 3t2^{dH(8t/3t)}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} = 3t2^{dH(8t/3t)} = 3t2^{0.9544d}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} = 3t 2^{dH(8t/3t)} = 3t 2^{0.9544d}$$

$$= 2^{0.9544d + \log d}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} = 3t2^{dH(8t/3t)} = 3t2^{0.9544d}$$

$$= 2^{0.9544d + \log d} \leq 2^{0.955d}$$

9.5.5 Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a system of s-element subsets of $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that every two distinct $A, B \in \mathcal{F}$ satisfy $|A \cap B| \geq t + 1$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{d}{0} + \binom{d}{1} + \cdots + \binom{d}{s-t-1}.$$

$d = 8t$ and $s = 4t$

$$|F| \leq \sum_{i=0}^{3t-1} \binom{8t}{i} = 3t2^{dH(8t/3t)} = 3t2^{0.9544d}$$

$$= 2^{0.9544d + \log d} \leq 2^{0.955d}$$

$$n = 2^{nH(4t/8t)} = 2^d$$

مشابه شکاف صحیح

Proposition. *There exists a constant $\delta > 0$ such that for infinitely many values of n, one can construct an n-vertex graph with vector chromatic number at most 3 and with chromatic number at least n^{δ}.*

مشابه جواب بهینه SDP

مشابه جواب بهینه واقعی

$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$

$\chi(G) \geq 2^d/2^{0.955d}$

بهتر ...

- با n رنگ
- با بیشترین درجه + ۱ رنگ
- با $O(\sqrt{n})$ رنگ (تکنیک ویگدرسون)
- تکنیک بلوم: $\tilde{O}(n^{0.375})$
- روش SDP:
- روش SDP + بلوم: $\tilde{O}(n^{0.25})$
- روش Karger–Motwani–Sudan : $\tilde{O}(n^{0.2111})$
- روش Chlamtac $\tilde{O}(n^{0.2072})$

MaxQP

چند مسئله کاربردی (حالت خاص)

چهار مسئله جزئی

- ۱ـ برش با بیشینه نفع
- ۲ـ حالت بهینه مدل آیزینگ
- ۳ـ خوشه‌بندی هم‌بستگی مبنا
- ۴ـ نرم برشی

۱ـ برش با بیشینه نفع

$$\textsc{MaxCut} - \frac{1}{2}|E|$$

۱ـ برش با بیشینه نفع

- نفع $:= \textsc{MaxCut} - \frac{1}{2}|E|$

۱ــ برش با بیشینه نفع

- نفع $=:$ $\textsc{MaxCut}-\frac{1}{2}|E|$

- چرا تقریب نفع مهم‌تر است؟

$$\frac{1}{2}|E|+|E|^{0.9} \qquad\qquad \frac{1}{2}|E|+10$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i=1,\ldots,n. \end{array}$$

$$\textsc{MaxCut}-\tfrac{1}{2}|E| = |A| - \frac{1}{2}|E|$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{array}$$

$$\textsc{MaxCut}-\tfrac{1}{2}|E| = |A| - \frac{1}{2}|E| = \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}|E|$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{array}$$

$$\textsc{MaxCut} - \tfrac{1}{2}|E| = |A| - \frac{1}{2}|E| = \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}|E|$$

$$= \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}(|E| - |A|)$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i=1,\ldots,n. \end{array}$$

$$\textsc{MaxCut}-\tfrac{1}{2}|E| \;=|A|-\frac{1}{2}|E| \;=\frac{1}{2}|A|+\frac{1}{2}|A|-\frac{1}{2}|E|$$

$$=\frac{1}{2}|A|-\frac{1}{2}(|E|-|A|) \;=\frac{1}{2}|A|-\frac{1}{2}|E-A|$$

برنامه‌ریزی صحیح درجه ۲ برای نفع

برش بیشینه:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{1-z_i z_j}{2} \\ \text{subject to} & z_i \in \{-1,1\}, \quad i=1,\ldots,n. \end{array}$$

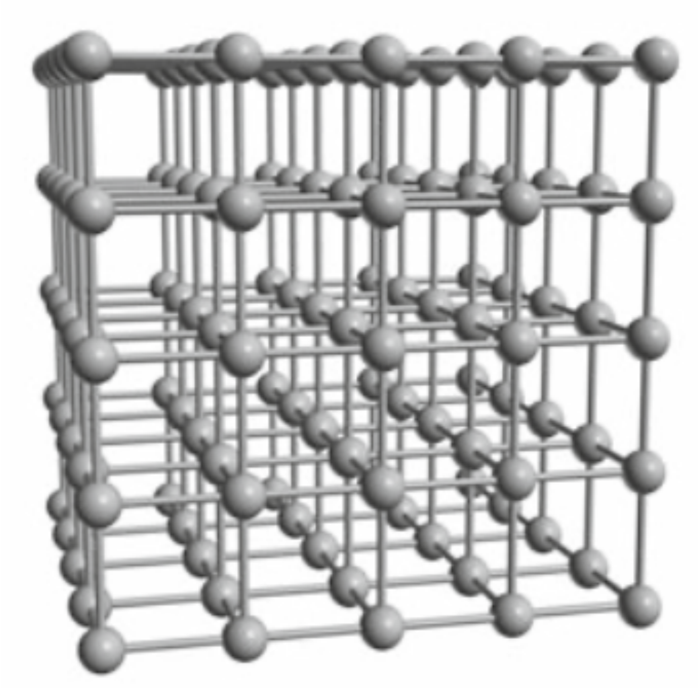
$$\textsc{MaxCut}-\tfrac{1}{2}|E| = |A| - \frac{1}{2}|E| = \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}|E|$$

$$= \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}(|E| - |A|) = \frac{1}{2}|A| - \frac{1}{2}|E - A|$$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} \frac{-x_i x_j}{2} : x_1,\ldots,x_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

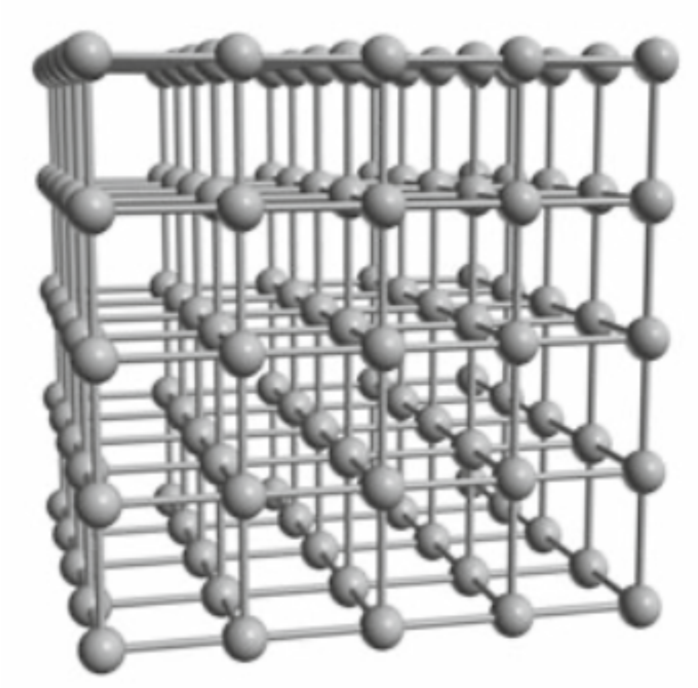
۲ ـ مدل آیزینگ

- کریستال



۲ ــ مدل آیزینگ

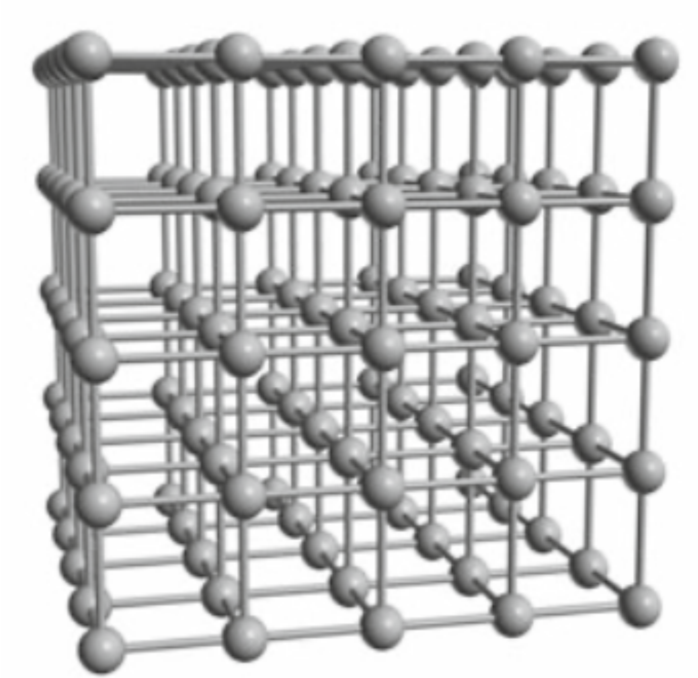
- کریستال



$$-\sum_{\{i,j\}\in E} J_{ij}x_ix_j$$

۲ـ مدل آیزینگ

- کریستال



$$-\sum_{\{i,j\}\in E} J_{ij}x_ix_j$$

مسئله: پیدا کردن حالت با کم‌ترین انرژی

۳ـ خوشه‌بندی همبستگی مبنا

۳ـ خوشه‌بندی همبستگی مبنا

- گراف با ۲ نوع یال:
  - راس‌های مشابه
  - راس‌های مخالف

۳ـ خوشه‌بندی همبستگی مبنا

- گراف با ۲ نوع یال:
  - راس‌های مشابه
  - راس‌های مخالف

- خوشه‌بندی مناسب: تعداد یال‌های متناسب با خوشه‌بندی

۳ـ خوشه‌بندی همبستگی مبنا

- گراف با ۲ نوع یال:
  - راس‌های مشابه
  - راس‌های مخالف

- خوشه‌بندی مناسب: تعداد یال‌های متناسب با خوشه‌بندی
- قضیه: خوشه‌بندی ۲ـ خوشه‌ای، تقریب ۱/۳ برای خوشه‌بندی کلی است!

۳ـ خوشه‌بندی همبستگی مبنا

- گراف با ۲ نوع یال:
  - راس‌های مشابه
  - راس‌های مخالف

- خوشه‌بندی مناسب: تعداد یال‌های متناسب با خوشه‌بندی
- قضیه: خوشه‌بندی ۲ـ خوشه‌ای، تقریب ۱/۳ برای خوشه‌بندی کلی است!

$$\max\left\{\sum_{\{i,j\}\ \text{similar}} x_i x_j - \sum_{\{i,j\}\ \text{dissimilar}} x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\}\right\}$$

قضیه: خوشه‌بندی ۲ ـ خوشه‌ای، تقریب ۱/۳ برای خوشه‌بندی کلی است.

۴ــ نرم برشی

$$\max\left\{ \left| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \right| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

۴ـ نرم برشی

$$\max\left\{ \Big| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \Big| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

- به چه دردی می‌خورد؟ برش‌های بیشینه

۴ـ نرم برشی

$$\max\left\{ \Big|\sum_{i\in I, j\in J} a_{ij}\Big| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

- به چه دردی می‌خورد؟ برش‌های بیشینه

ماتریس A

۴ـ نرم برشی

$$\max\left\{ \left| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \right| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

- به چه دردی می‌خورد؟ برش‌های بیشینه

ماتریس A

۴ـ نرم برشی

$$\max\left\{ \Big| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \Big| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

- به چه دردی می‌خورد؟ برش‌های بیشینه

ماتریس A

ماتریس B:

اضافه کردن یک سطر و یک ستون که

جمع سطرها و ستون‌ها = ۰

جمع کل=۰

۴ـ نرم برشی

$$\max\left\{ \Big| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \Big| : I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

- به چه دردی می‌خورد؟ برش‌های بیشینه

ماتریس A

ماتریس B:

اضافه کردن یک سطر و یک ستون که

جمع سطرها و ستون‌ها = ۰

جمع کل=۰

$$\|A\|_{\text{cut}} = \|B\|_{\text{cut}}$$

برای ماتریس B با جمع سطر و ستون = ۰

$$\|B\|_{\text{cut}} = \frac{1}{4}\max\left\{\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}x_iy_j : x_1,\ldots,x_{m+1},y_1,\ldots,y_{n+1}\in\{\pm1\}\right\}$$

$$\max\left\{\left|\sum_{i\in I,j\in J} a_{ij}\right| : I\subseteq\{1,2,\ldots,m\}, J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\right\}$$

مسئله MaxQP

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph

$$G = (V, E)$$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij} x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

مسئله کلی

$\textsc{MaxQP}[G]$: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_ix_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- حالت خاص
  - ۱ـ برش با بیشینه نفع
  - ۲ـ حالت بهینه مدل آیزینگ
  - ۳ـ خوشه‌بندی هم‌بستگی مبنا
  - ۴ـ نرم برشی

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph

$$G = (V, E)$$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij} x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph $G=(V,E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_ix_j : x_1,\ldots,x_n \in \{\pm 1\}\right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- آرام‌سازی؟

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- آرام‌سازی؟
  - الف) $-1<=xi<=1$

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij} x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- آرام‌سازی؟
  - الف) $-1 <= xi <= 1$
    - جواب فرق نمی‌کند

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_i x_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- آرام‌سازی؟
  - الف) $-1 <= xi <= 1$
    - جواب فرق نمی‌کند
    - می‌توانیم جواب صحیح بسازیم

مسئله کلی

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_ix_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

- آرام‌سازی؟
  - الف) $-1<=xi<=1$
    - جواب فرق نمی‌کند
    - می‌توانیم جواب صحیح بسازیم
  - ب) برداری

نسخه SDP:

MaxQP[G]: maximizing a quadratic form on a graph
$G = (V, E)$

$$\max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}x_ix_j : x_1, \ldots, x_n \in \{\pm 1\} \right\},$$

where a_{ij} are real weights on edges, generally both positive and negative.

SDP relaxation of MaxQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \le 1 \right\}$$

نسخه SDP:

SDP relaxation of MaxQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \leq 1 \right\}$$

نسخه SDP:

SDP relaxation of MaxQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \le 1 \right\}$$

الگوریتم: ؟

نسخه SDP:

SDP relaxation of MaxQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \leq 1 \right\}$$

الگوریتم: ؟

روش GW:؟

نسخه SDP:

SDP relaxation of MAXQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \leq 1 \right\}$$

الگوریتم: ؟

روش GW:؟

به ازای هر یال

ما >= بهینه ρ

نسخه SDP:

SDP relaxation of MaxQP[G]

$$S_{\max} := \max\left\{ \sum_{\{i,j\}\in E} a_{ij}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j : \|\mathbf{v}_1\|, \ldots, \|\mathbf{v}_n\| \leq 1 \right\}$$

الگوریتم: ؟

روش GW:؟

به ازای هر یال

ما >= بهینه ρ

؟

سختی MaxQP

سختی MaxQP

- اگر P/= NP، یک c>0 هست که هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب بهتر از $\log^c n$ برای مسئله $\mathrm{MaxQP}[K_n]$ وجود ندارد.

سختی MaxQP

- اگر $P \neq NP$، یک $c>0$ هست که هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب بهتر از $\log^c n$ برای مسئله $\mathrm{MaxQP}[K_n]$ وجود ندارد.
- شکاف صحیح SDP، حداقل $\Omega(\log n)$ است.

سختی MaxQP

- اگر $P \neq NP$، یک $c>0$ هست که هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب بهتر از $\log^c n$ برای مسئله $\text{MaxQP}[K_n]$ وجود ندارد.
- شکاف صحیح SDP، حداقل $\Omega(\log n)$ است.
- اگر UGC، با ضریب بهتر از $\Omega(\log n)$ نمی‌توان تقریب زد.

Let G be a (loopless) graph. The *Grothendieck constant* K_G of G is defined as

$$\sup \frac{S_{\max}}{\mathsf{Opt}},$$

where Opt is the optimum value of $\textsc{MaxQP}[G]$, $S_{\max}$ is the optimum of the SDP relaxation, and the supremum is over all choices of the edge weights a_{ij} (not all zeros).

Let G be a (loopless) graph. The *Grothendieck constant* K_G of G is defined as

$$\sup \frac{S_{\max}}{\mathsf{Opt}},$$

where Opt is the optimum value of MaxQP$[G]$, $S_{\max}$ is the optimum of the SDP relaxation, and the supremum is over all choices of the edge weights a_{ij} (not all zeros).

Theorem (Alon et al. [AMMN06]). *For every graph G, we have*

$$K_G = O(\log \vartheta(\overline{G})),$$

where $\overline{G}$ is the complement of G and $\vartheta(.)$ is the Lovász theta function. Moreover, there is a randomized rounding algorithm which, for given G and weights a_{ij}, computes a solution of MaxQP$[G]$ *with value at least $\Omega(S_{\max}/\log\vartheta(\overline{G}))$ in expected polynomial time.*

سختی MaxQP برای گراف کامل

- اگر P/= NP، یک c>0 هست که هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب بهتر از $\log^c n$ برای مسئله $\mathrm{MaxQP}[K_n]$ وجود ندارد.
- شکاف صحیح SDP، حداقل $\Omega(\log n)$ است.
- اگر UGC، با ضریب بهتر از $\Omega(\log n)$ نمی‌توان تقریب زد.

Theorem (Alon et al. [AMMN06]). *For every graph G, we have*

$$K_G = O(\log \vartheta(\overline{G})),$$

where $\overline{G}$ is the complement of G and $\vartheta(.)$ is the Lovász theta function. Moreover, there is a randomized rounding algorithm which, for given G and weights a_{ij}, computes a solution of MaxQP$[G]$ *with value at least $\Omega(S_{\max}/\log \vartheta(\overline{G}))$ in expected polynomial time.*

مثال: گراف تهی

$\vartheta(G) = n$ $\quad \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i/\sqrt{n}$ $\quad \mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$

$$\vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G)$$

Theorem (Alon et al. [AMMN06]). *For every graph G, we have*

$$K_G = O(\log \vartheta(\overline{G})),$$

where $\overline{G}$ is the complement of G and $\vartheta(.)$ is the Lovász theta function. Moreover, there is a randomized rounding algorithm which, for given G and weights a_{ij}, computes a solution of MaxQP$[G]$ *with value at least $\Omega(S_{\max}/\log \vartheta(\overline{G}))$ in expected polynomial time.*

$$\vartheta(\overline{G}) \ \leq \ \chi(G)$$

- => تقریب با ضریب ثابت
- گراف‌های ۲ـ بخشی
    - آیزینگ، نرم برشی
- گراف‌های با بزرگترین درجه ثابت

Theorem (Alon et al. [AMMN06]). *For every graph G, we have*

$$K_G = O(\log \vartheta(\overline{G})),$$

where $\overline{G}$ is the complement of G and $\vartheta(.)$ is the Lovász theta function. Moreover, there is a randomized rounding algorithm which, for given G and weights a_{ij}, computes a solution of $\textsc{MaxQP}[G]$ *with value at least $\Omega(S_{\max}/\log \vartheta(\overline{G}))$ in expected polynomial time.*

پایان