بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه دوازدهم

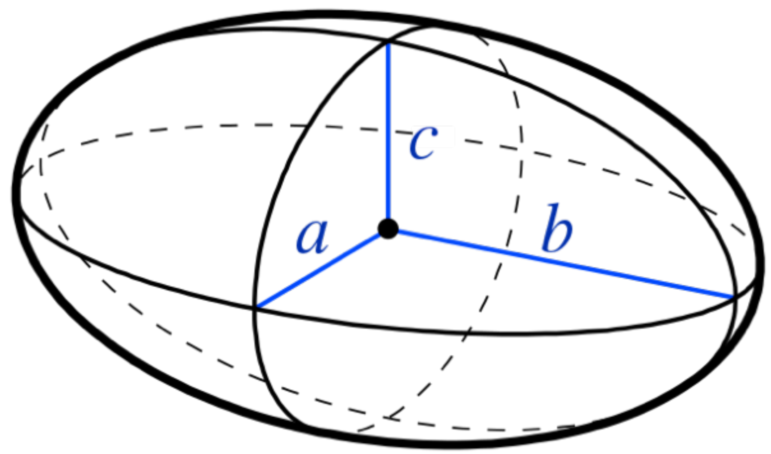
درس تحقیق در عملیات

یک کاربرد برای روش بیضی‌گون: برش بیشینه

روش بیضی‌گون

- نگه می‌داریم: یک بیضی‌گون

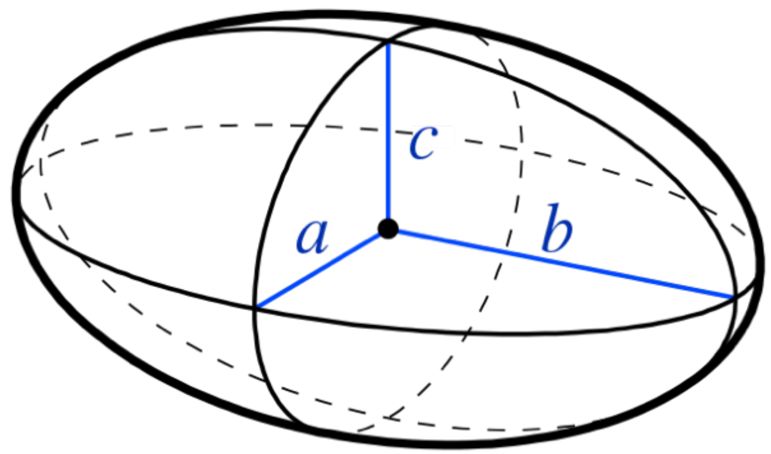
$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y} - \mathbf{s})^T Q^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}) \leq 1\},$$

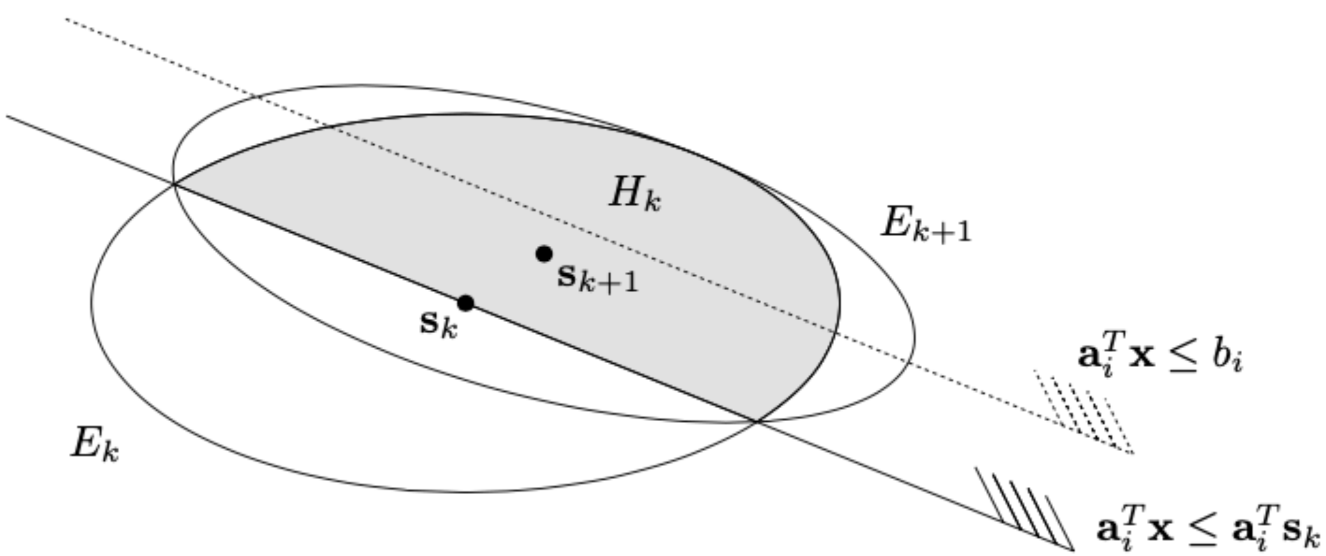


روش بیضی‌گون

- نگه می‌داریم: یک بیضی‌گون
- هر دفعه
  - <u>پرسش</u>: مرکز بیضی‌گون در LP؟
    - بله: تمام شد!
    - خیر: به‌روزرسانی بیضی‌گون
  - بر اساس <u>قید نقض شده</u>

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y} - \mathbf{s})^T Q^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}) \leq 1\},$$

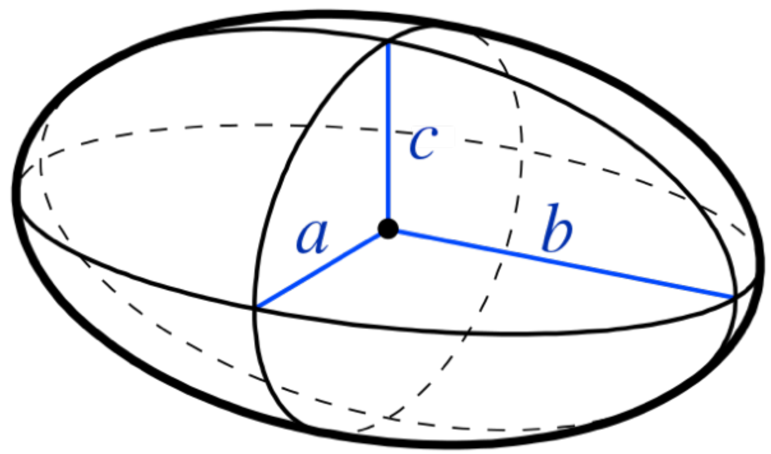


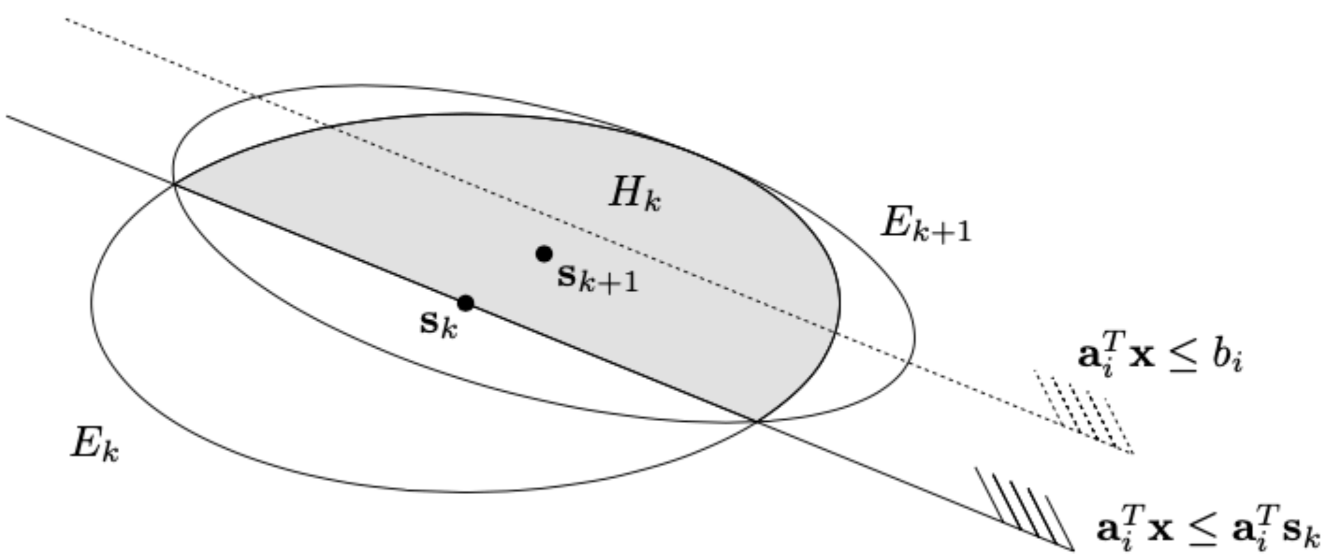


روش بیضی‌گون

- نگه می‌داریم: یک بیضی‌گون
- هر دفعه
  - پرسش: مرکز بیضی‌گون در LP؟
    - بله: تمام شد!
    - خیر: به‌روزرسانی بیضی‌گون
  - بر اساس قید نقض شده

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y}-\mathbf{s})^T Q^{-1} (\mathbf{y}-\mathbf{s}) \le 1\},$$



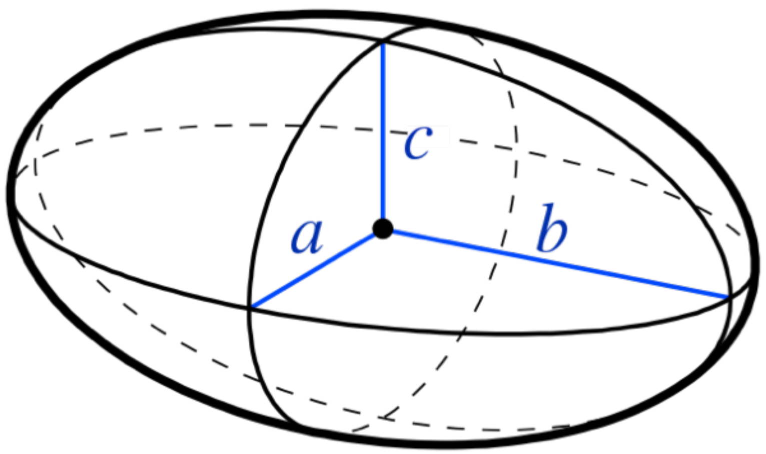


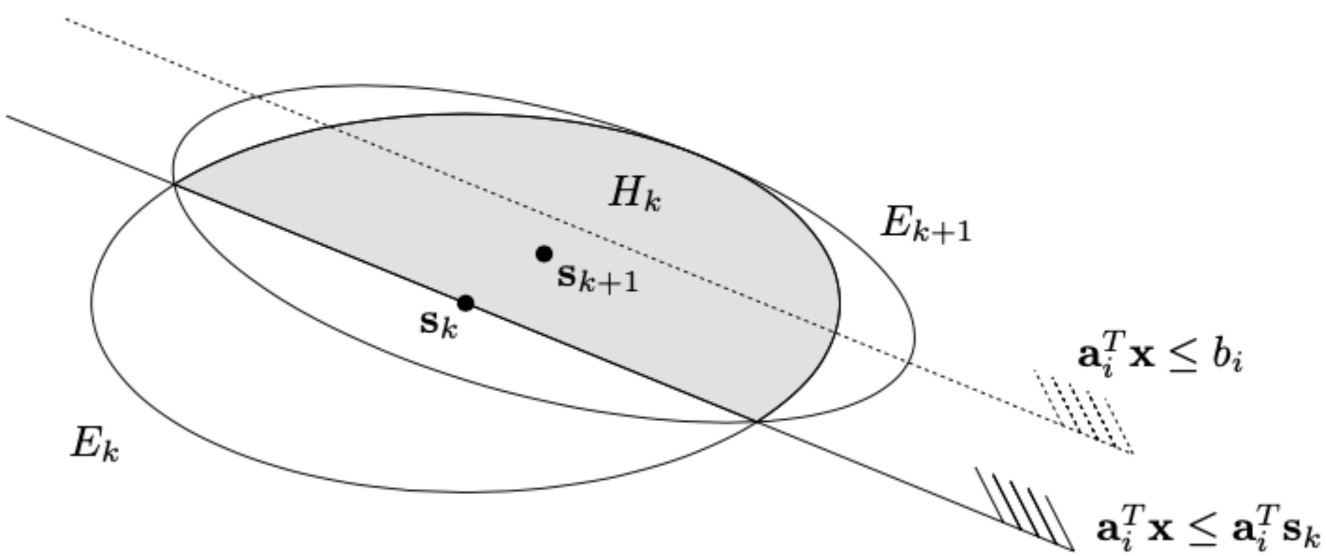
مسئول LP:

$$Ax \le b$$

روش بیضی‌گون

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y}-\mathbf{s})^T Q^{-1} (\mathbf{y}-\mathbf{s}) \le 1\},$$





- نگه می‌داریم: یک بیضی‌گون
- هر دفعه
  - پرسش: مرکز بیضی‌گون در LP؟
    - بله: تمام شد!
    - خیر: به‌روزرسانی بیضی‌گون
  - بر اساس قید نقض شده

مسئول LP:

$Ax \le b$

برای مجموعه شدنی با بی‌نهایت قید؟

روش بیضی‌گون ـ برای مجموعه با بی‌نهایت قید

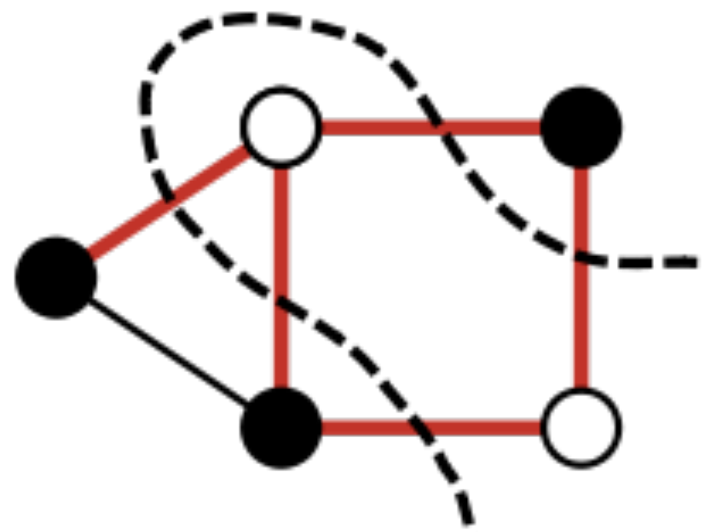
$$\max c^{T}x$$

$$Ax \leq b$$

مسئله برش بیشینه

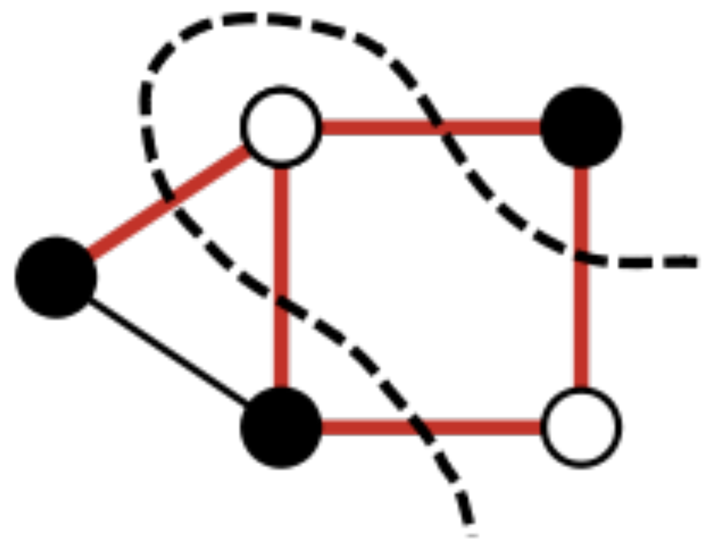
با روش بیضی‌گون

برش بیشینه

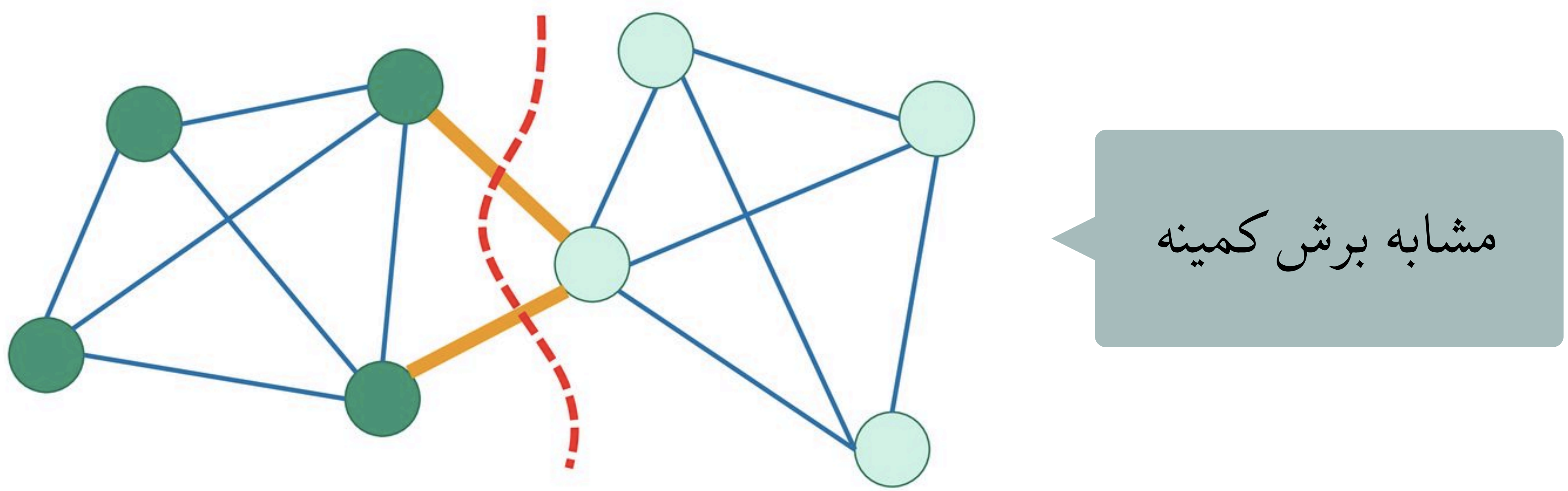


- ورودی: گراف
- خروجی: مجموعه $S \subseteq V$
  - که $E[S, \bar{S}]$ بیشینه باشد
  - یا وزن‌دار $w(S) := w[S, \bar{S}]$

برش بیشینه

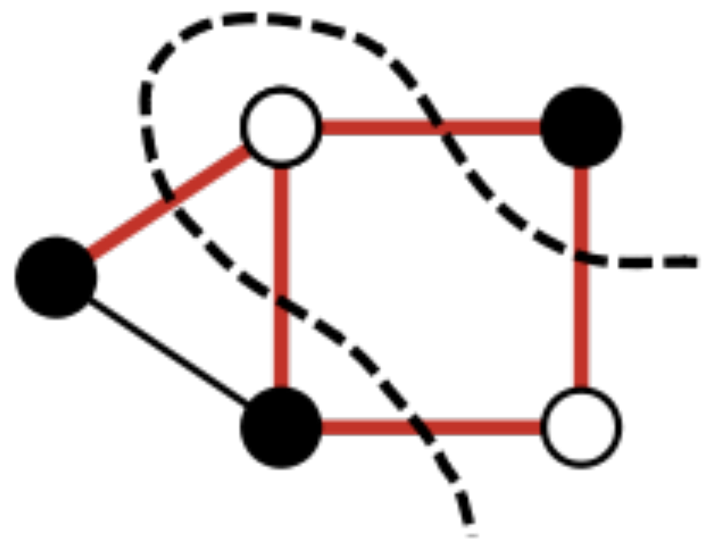


- ورودی: گراف
- خروجی: مجموعه $S \subseteq V$
  - که $E[S,\bar{S}]$ بیشینه باشد
  - یا وزن‌دار $w(S) := w[S,\bar{S}]$

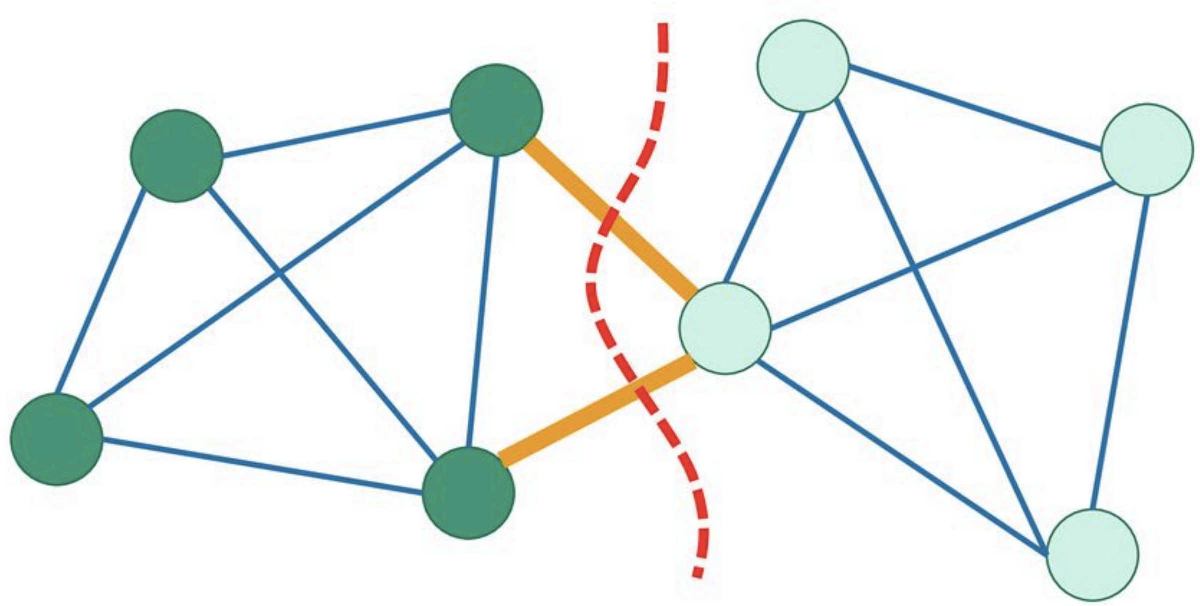


برش بیشینه

- ورودی: گراف
- خروجی: مجموعه $S \subseteq V$
  - که $E[S, \bar{S}]$ بیشینه باشد
  - یا وزن‌دار $w(S) := w[S, \bar{S}]$



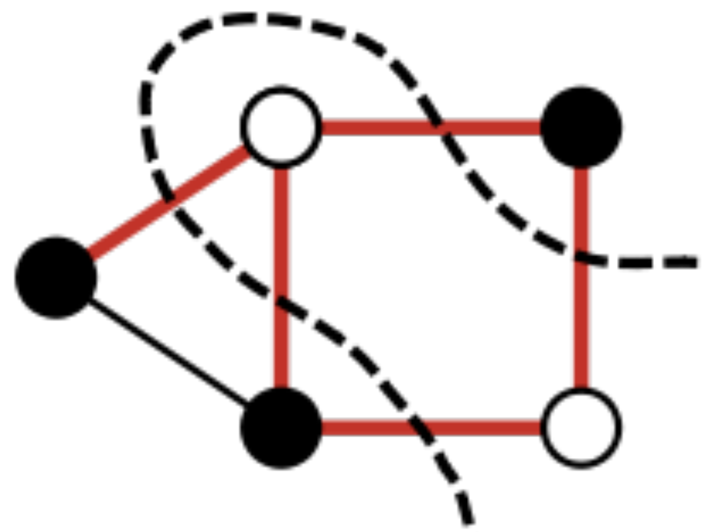
الگوریتم چندجمله‌ای



مشابه برش کمینه

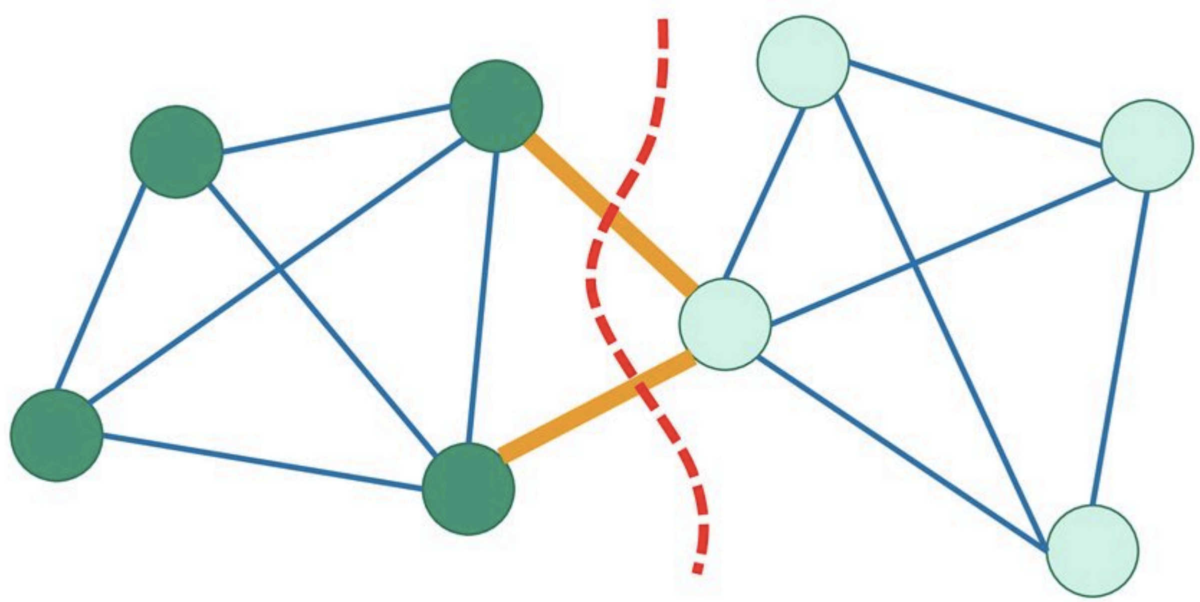
برش بیشینه

- ورودی: گراف
- خروجی: مجموعه $S \subseteq V$
  - که $E[S,\bar{S}]$ بیشینه باشد
  - یا وزن‌دار $w(S) := w[S,\bar{S}]$



NP_سخت

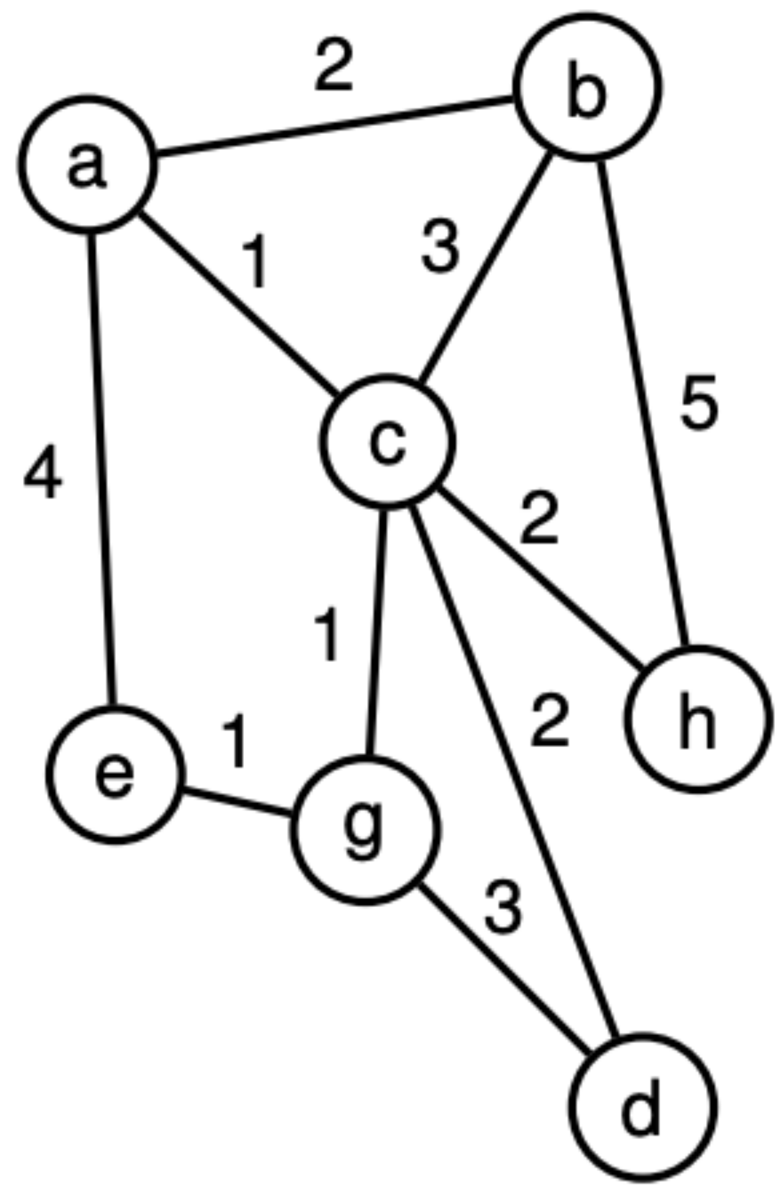
الگوریتم تقریبی

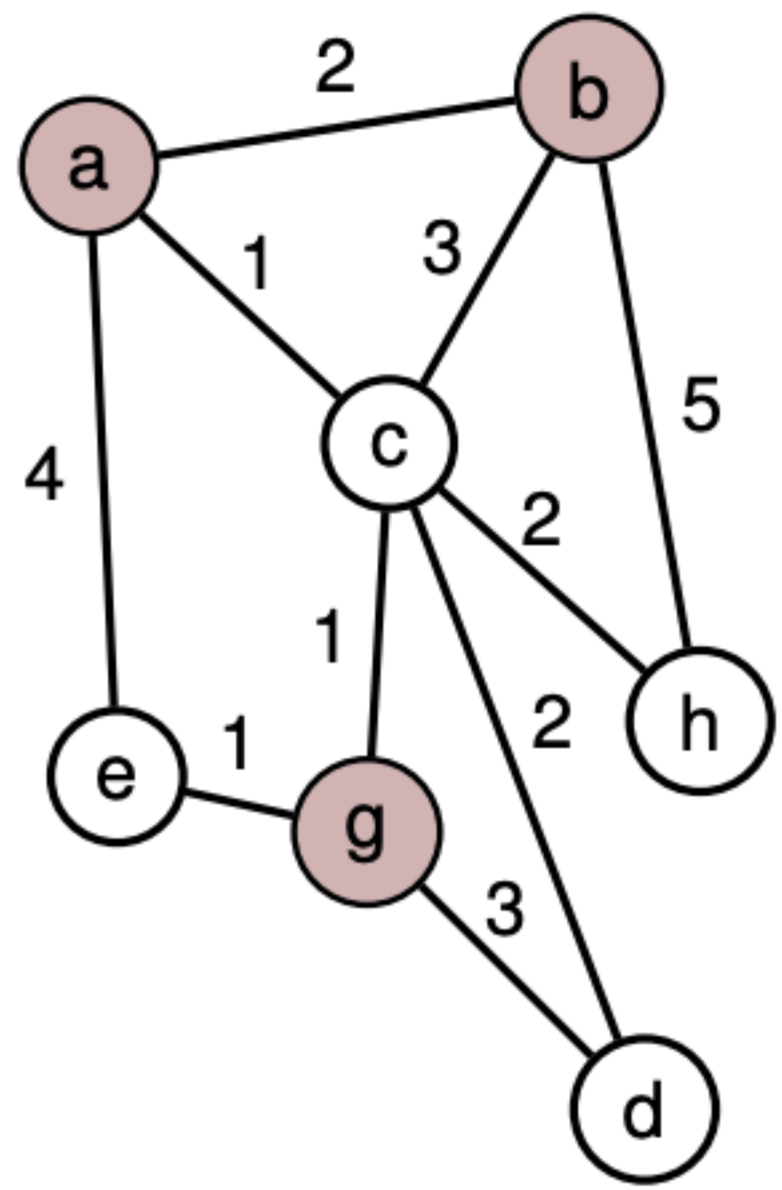


الگوریتم
چندجمله‌ای

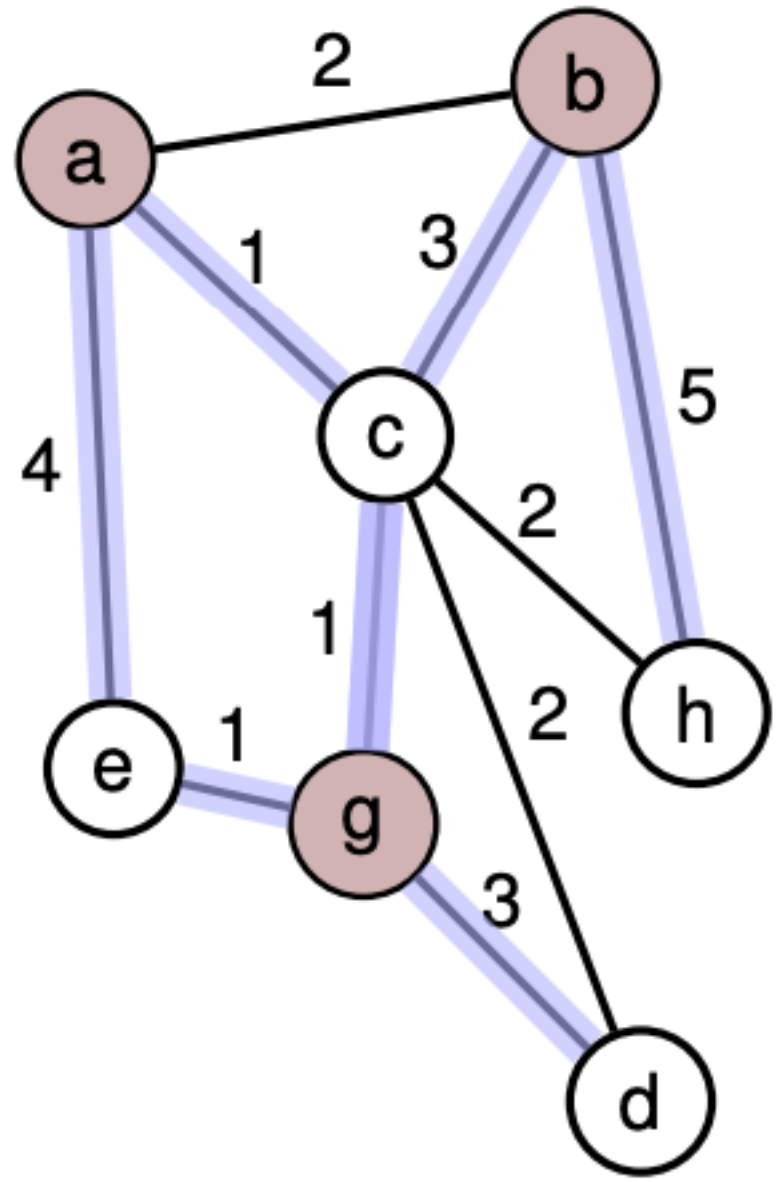
مشابه برش کمینه

مثال





$S = \{a, b, g\}$



$S = \{a, b, g\}$

$w(S) = 18$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی

- هدف: الگوریتم تصادفی که امید خروجی خوب باشد.

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها
  - تحلیل

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها
  - تحلیل

$$\mathbf{E}[\, w(S, V \setminus S) \,]$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها

  - تحلیل

$$\mathbf{E}[\, w(S, V \setminus S) \,]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{\{u,v\} \in E(S, V \setminus S)} w(\{u, v\}) \right]$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها

- تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\, w(S, V \setminus S) \,\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{\{u,v\} \in E(S, V \setminus S)} w(\{u, v\}) \right]$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} \mathbf{Pr}\left[\, \{u \in S \cap v \in (V \setminus S)\} \cup \{u \in (V \setminus S) \cap v \in S\} \,\right] \cdot w(\{u, v\})$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها

- تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\, w(S, V \setminus S) \,\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{\{u,v\} \in E(S, V \setminus S)} w(\{u,v\}) \right]$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} \mathbf{Pr}\left[\, \{u \in S \cap v \in (V \setminus S)\} \cup \{u \in (V \setminus S) \cap v \in S\} \,\right] \cdot w(\{u,v\})$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot w(\{u,v\})$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها
  - تحلیل

$$\mathbf{E}\left[\, w(S, V \setminus S) \,\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{\{u,v\} \in E(S, V\setminus S)} w(\{u,v\}) \right]$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} \mathbf{Pr}\left[\, \{u \in S \cap v \in (V \setminus S)\} \cup \{u \in (V \setminus S) \cap v \in S\} \,\right] \cdot w(\{u,v\})$$

$$= \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot w(\{u,v\}) \quad = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} w(\{u,v\}) \geq \frac{1}{2} w^*$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۱

- روش اول: چیدمان تصادفی راس‌ها

  - تحلیل

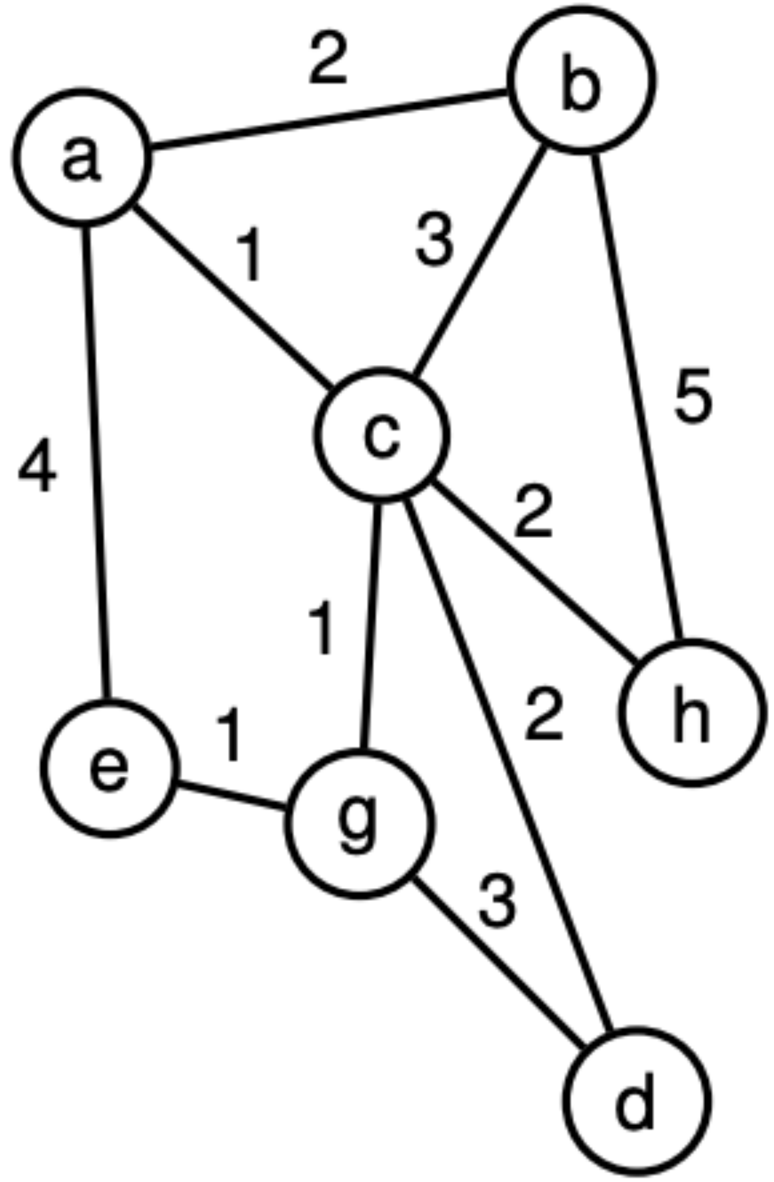
$$\mathbf{E}[\,w(S, V \setminus S)\,]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{\{u,v\}\in E(S,V\setminus S)} w(\{u,v\})\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{uv\in E} X_{uv}\, \omega(u,v)\right]$$

$uv \in E(S,\bar{S})$

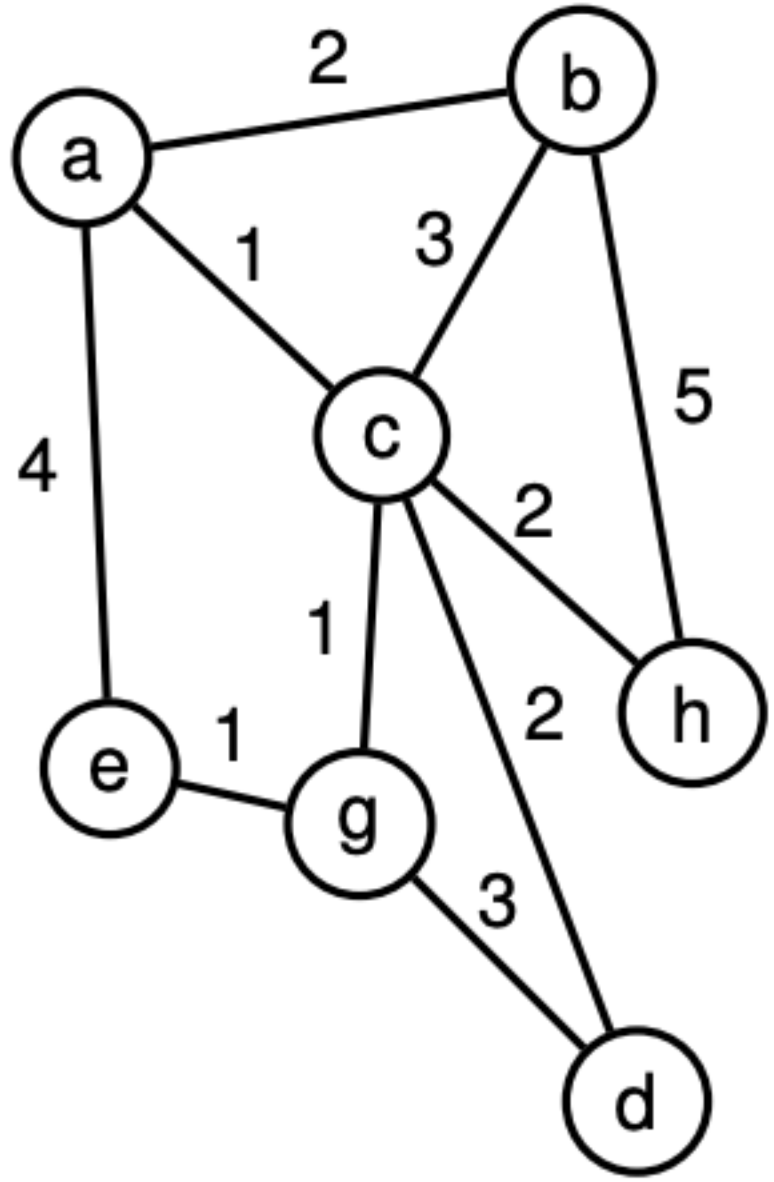
$$= \sum_{\{u,v\}\in E} \mathbf{Pr}[\{u\in S \cap v \in (V\setminus S)\} \cup \{u \in (V\setminus S) \cap v \in S\}]\cdot w(\{u,v\})$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

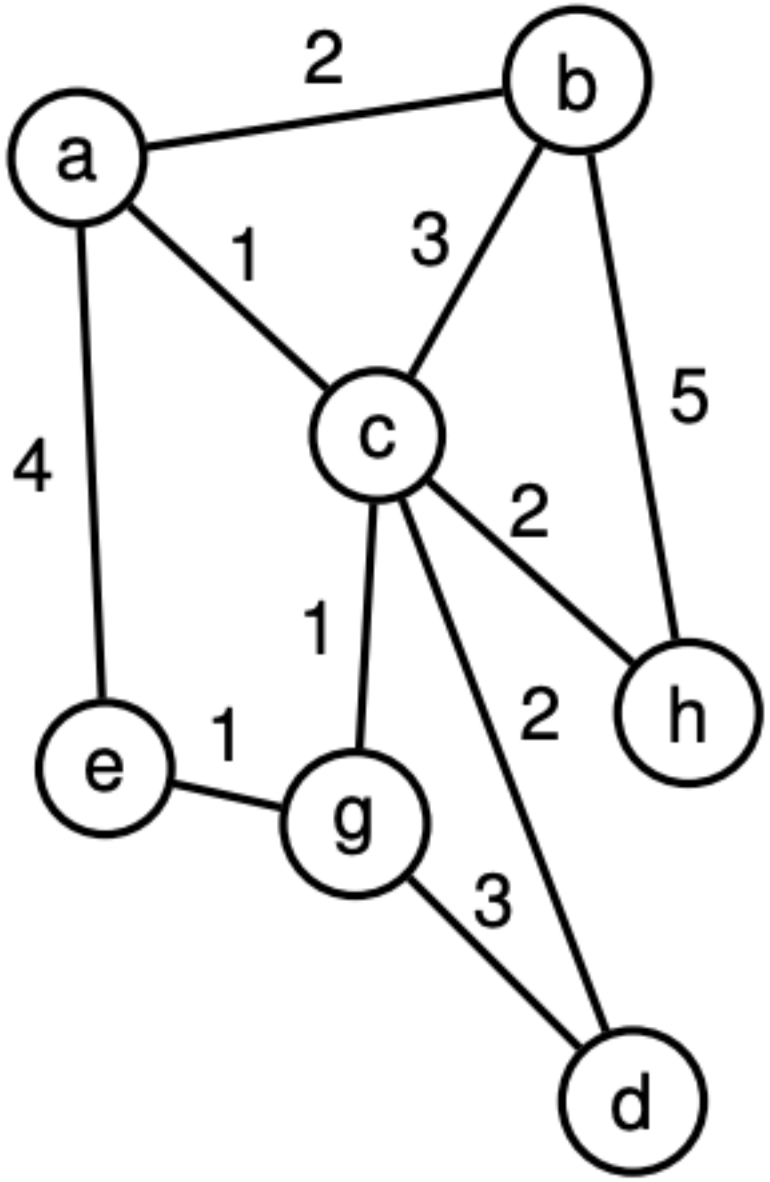
برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

$$x_i \in \{-1, +1\}$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



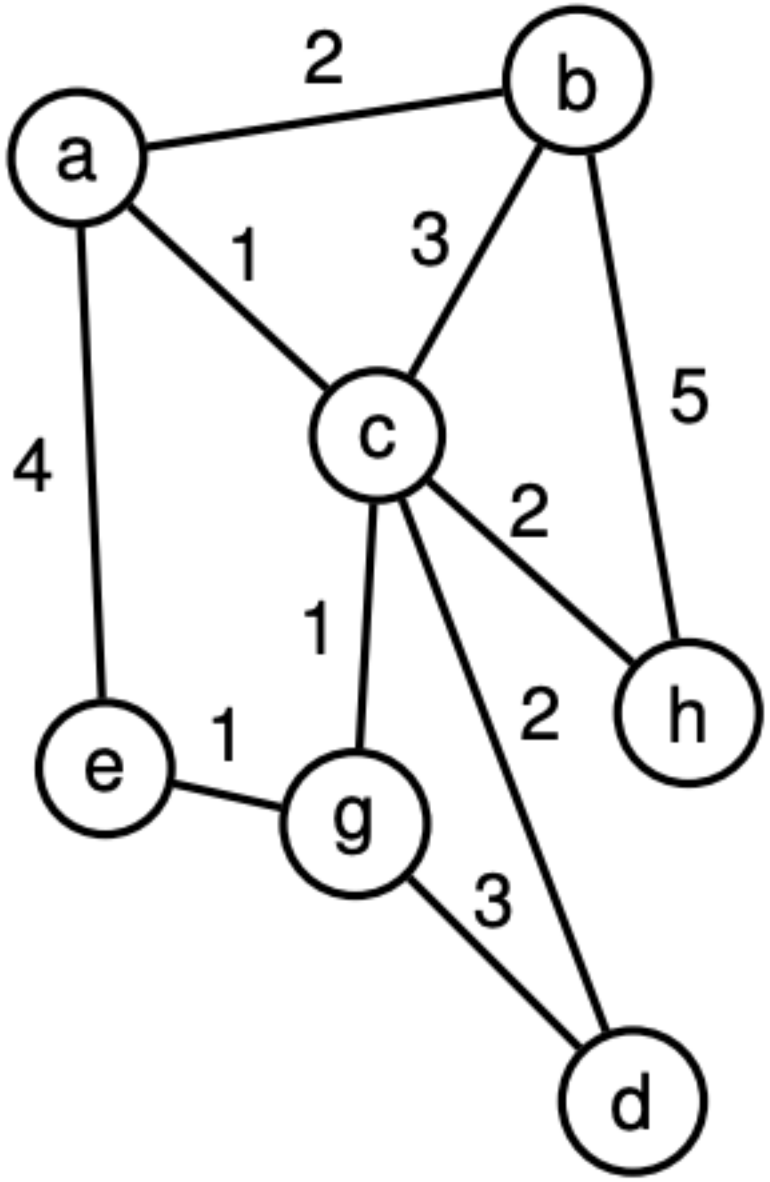
- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

$$x_i \in \{-1, +1\}$$

برای یال ij:

$$|x_i - x_j|$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

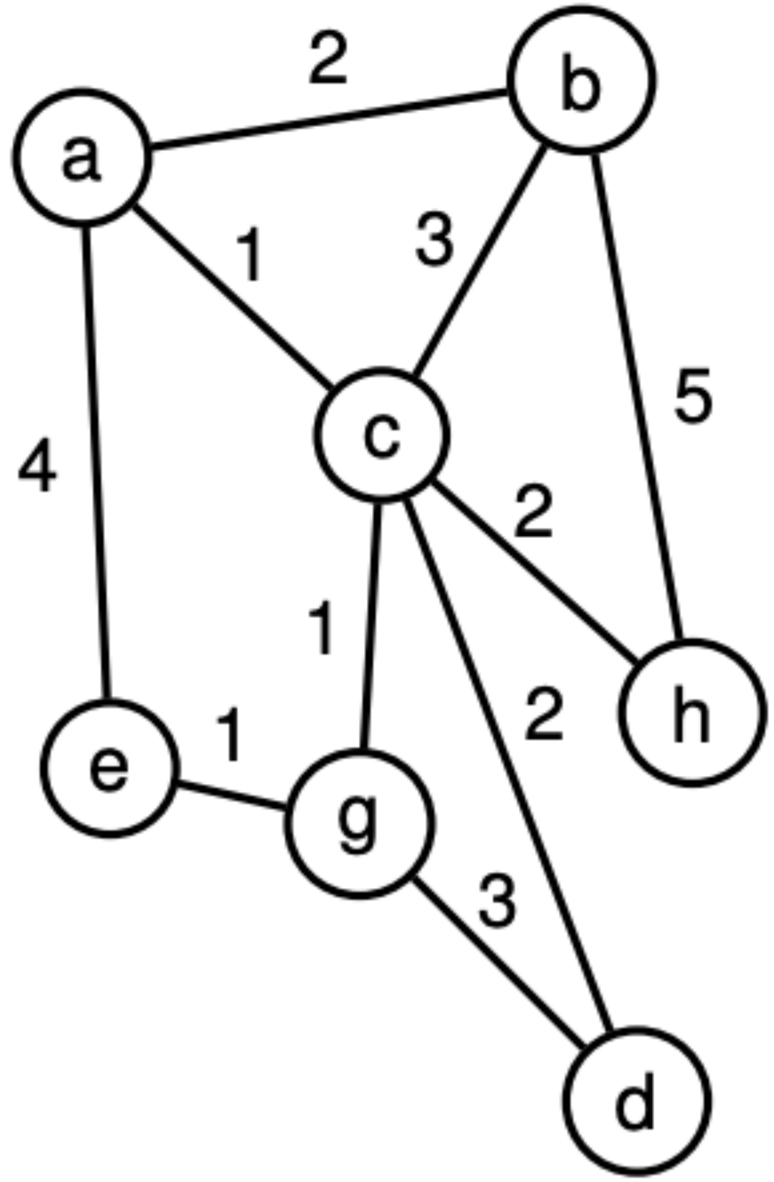
$$x_i \in \{-1, +1\}$$

برای یال ij:

$$|x_i - x_j|$$

$$= (x_i - x_j)^2$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

$$x_i \in \{-1, +1\}$$

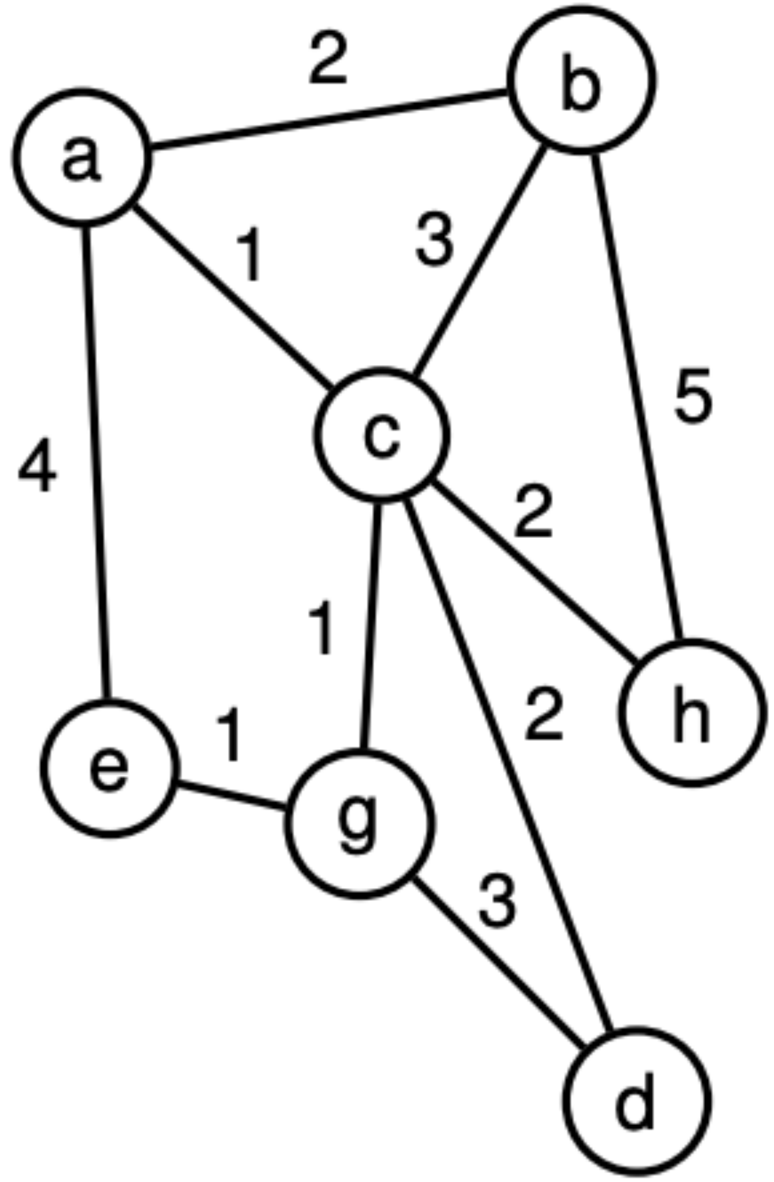
برای یال ij:

$$|x_i - x_j|$$

$$= (x_i - x_j)^2$$

$$= x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟ $x_i \in \{-1, +1\}$

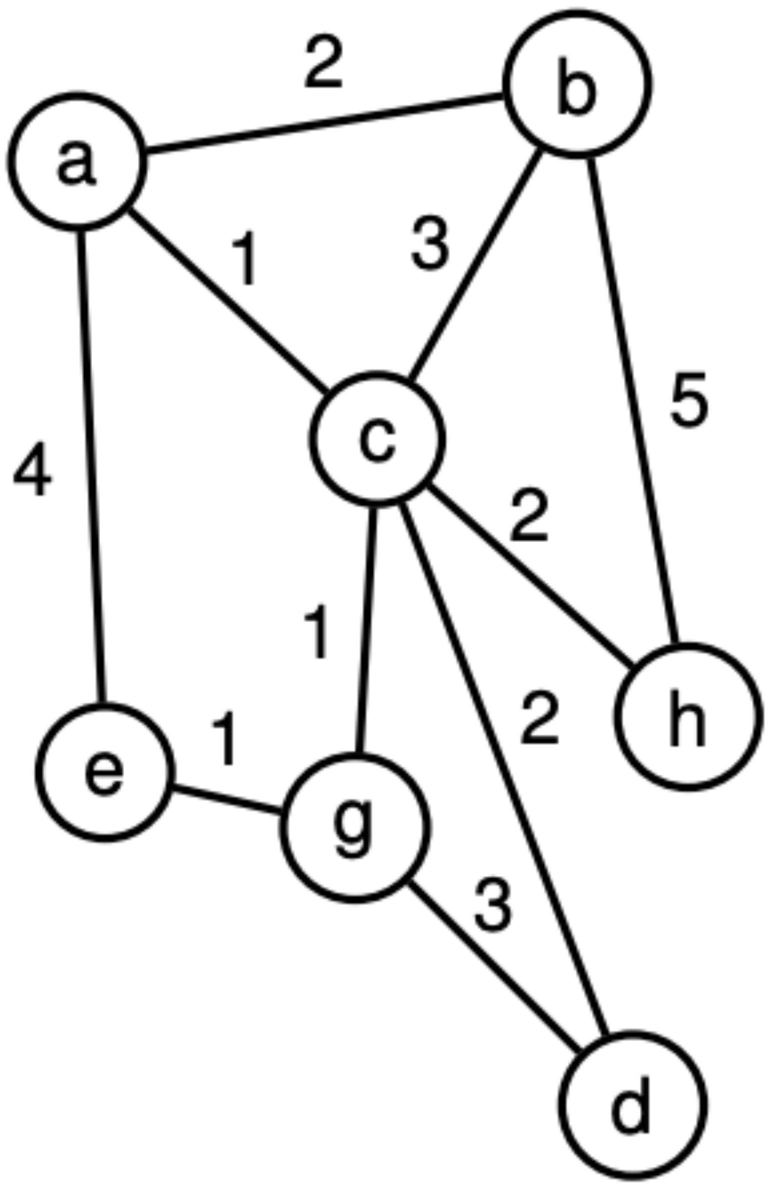
برای یال ij: $|x_i - x_j|$

$$= (x_i - x_j)^2$$

$$= x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j$$

$$= \frac{1}{2}(1 - x_i x_j)$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟

$$x_i \in \{-1, +1\}$$

برای یال ij:

$$|x_i - x_j|$$

$$= (x_i - x_j)^2$$

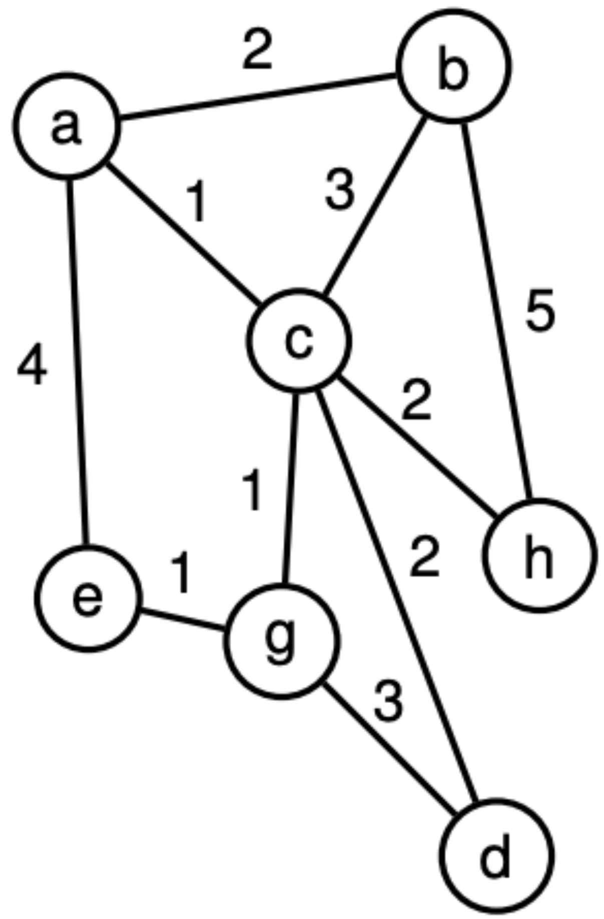
$$= x_i^2 + x_j^2 - 2x_ix_j$$

$$= \frac{1}{2}(1 - x_ix_j)$$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_ix_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲



- برنامه‌ریزی ریاضی (صحیح)؟
- متغیر: ؟ $x_i \in \{-1, +1\}$

هدف:

$$\sum_{ij \in E} \frac{1}{2}(1 - x_i x_j) w_{ij}$$

برای یال ij:

$$
\begin{aligned}
2\,|x_i - x_j| &= (x_i - x_j)^2 \\
&= x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j \\
&= \frac{1}{2}(1 - x_i x_j)
\end{aligned}
$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

- متغیر: $x_i \in \{-1, +1\}$
- (تلاش) متغیر جدید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j \in E}(1 - x_i x_j) \\ \text{s.t.} \quad & x_i \in \{-1, +1\} \end{aligned}$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

- متغیر: $x_i \in \{-1, +1\}$
- (تلاش) متغیر جدید:
  - $a_{i,j}$ $(=x_i x_j)$

$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-x_ix_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1,+1\}$$

- متغیر: $x_i \in \{-1,+1\}$
- (تلاش) متغیر جدید:
  - $a_{i,j}$ $(= x_ix_j)$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$A= \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & x_j & \\ & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; \\ & & & \\ & & x_ix_j & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow x_i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

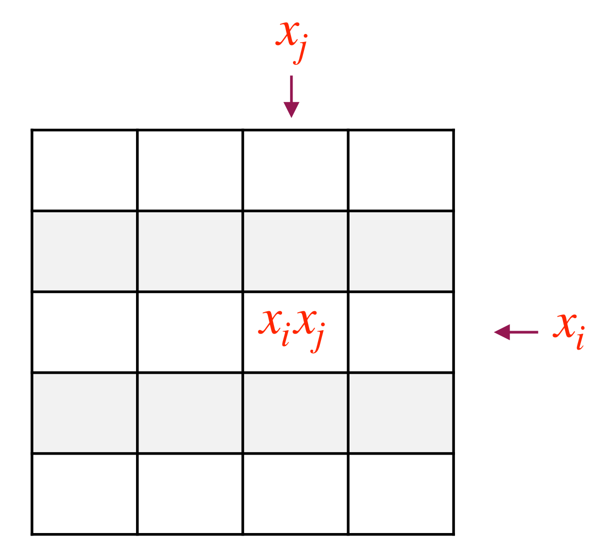
برش بیشینه ــ الگوریتم تقریبی ۲

- متغیر: $x_i \in \{-1, +1\}$
- (تلاش) متغیر جدید:
  - $a_{i,j}$ $(= x_i x_j)$

$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

A=


$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

برش بیشینه ــ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & x_j & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & x_i x_j & \ \\ \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow x_i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

برش بیشینه ــ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} & & x_j & \\ & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; \\ & & & \\ & & x_i x_j & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow x_i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = x \cdot x^T$$

بردار x

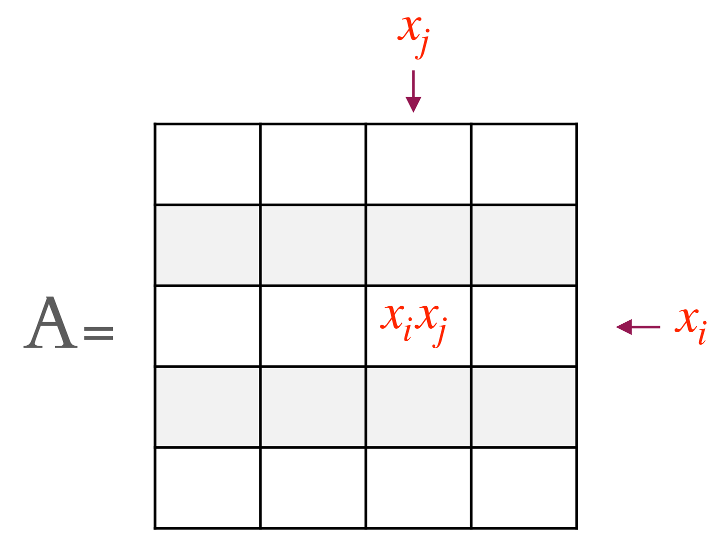
برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد



بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = x \cdot x^T$$

بردار x

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z \cdot z^T$$

ماتریس z

برش بیشینه ــ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$A=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \quad & \quad & x_j & \quad \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & x_ix_j & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow x_i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = x \cdot x^T$$

بردار x

آرامسازی

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z \cdot z^T$$

ماتریس z

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j}) \\
\text{s.t.} \quad & a_{i,j} = x_i x_j \\
& 1 = x_i x_i
\end{aligned}
$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$
A = \begin{array}{cccc c}
 & & x_j & & \\
 & & \downarrow & & \\
\end{array}
$$

$$
A = \left[\begin{array}{cccc}
\; & \; & \; & \; \\
\; & \; & \; & \; \\
\; & \; & x_i x_j & \; \\
\; & \; & \; & \; \\
\; & \; & \; & \;
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\\ \\ \leftarrow x_i \\ \\ \\
\end{array}
$$

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = x \cdot x^T$$

بردار x

آرامسازی

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z \cdot z^T$$

ماتریس z

ماتریس A مثبت نیمه‌معین است

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & x_j \downarrow & \end{array} \\ A= & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & x_i x_j & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \leftarrow x_i \end{array}$$

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

بردار x

$$A = x \cdot x^T$$

آرامسازی

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

ماتریس z

$$A = z \cdot z^T$$

ماتریس A مثبت نیمه‌معین است

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t.   A مثبت نیمه معین

$$1 = a_{i,i}$$

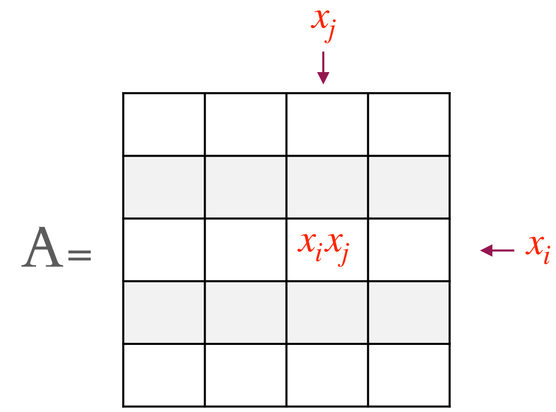
برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

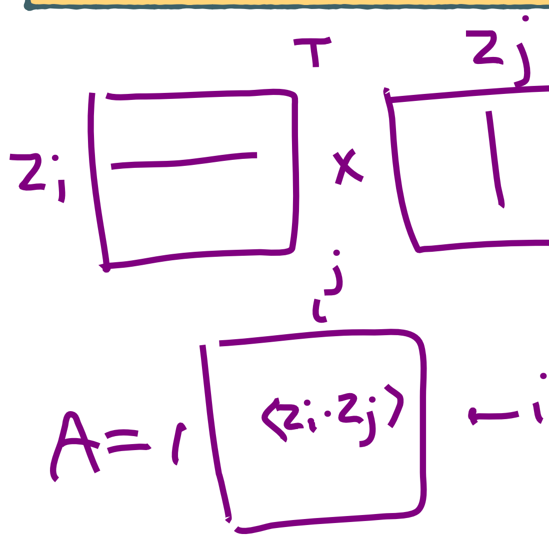
$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} = x_i x_j$$

$$1 = x_i x_i$$

$a_{i,j}$ قابلیت تجزیه مزبور را داشته باشد





بردار x

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$A = x \cdot x^T$

آرامسازی

ماتریس z

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$A = z \cdot z^T$

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- تعریف: ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **مثبت نیمه‌معین** اگر و فقط اگر به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $y^T A y \geq 0$.

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- تعریف: ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **مثبت نیمه‌معین** اگر و فقط اگر به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $y^T A y \geq 0$.
- قضیه: اگر $A = B^T B$ آنگاه A مثبت نیمه‌معین است.
  - اثبات:

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- تعریف: ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **مثبت نیمه‌معین** اگر و فقط اگر به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $y^T A y \geq 0$.

- قضیه: اگر $A = B^T B$ آنگاه A مثبت نیمه‌معین است.
  - اثبات:

- قضیه: اگر A مثبت نیمه‌معین باشد، آنگاه $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ای هست که $A = B^T B$.
  - اثبات:

$$M = Q^{-1} D Q = Q^* D^{\frac{1}{2}*} D^{\frac{1}{2}} Q$$

تجزیه ویژه

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- تعریف: ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **مثبت نیمه‌معین** اگر و فقط اگر به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $y^T A y \geq 0$.

- قضیه: اگر $A = B^T B$ آنگاه A مثبت نیمه‌معین است.
  - اثبات:

- قضیه: اگر A مثبت نیمه‌معین باشد، آنگاه $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ای هست که $A = B^T B$.
  - اثبات:

$$M = Q^{-1} D Q = Q^* D^{\frac{1}{2}*} D^{\frac{1}{2}} Q$$

تجزیه ویژه

- پس: مثبت نیمه‌معین معادل است با $\underline{A = B^T B}$

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- تعریف: ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **مثبت نیمه‌معین** اگر و فقط اگر به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $y^T A y \geq 0$.
- قضیه: اگر $A = B^T B$ آنگاه A مثبت نیمه‌معین است.
  - اثبات:

$$y^T A y = y^T B^T B y = \|By\|_2^2 \geq 0$$

ماتریس مثبت نیمه‌معین

- پس: مثبت نیمه‌معین معادل است با $A = B^T B$
- الگوریتم
  - A مثبت نیمه‌معین:
    - تجزیه $A = B^T B$ (الگوریتم تجزیه چولسکی)
  - A مثبت نیمه‌معین نباشد:
    - y که $y^T A y < 0$ (الگوریتم تجزیه چولسکی)

الگوریتم چولسکی

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,i} & \mathbf{b}_i^* \\ 0 & \mathbf{b}_i & \mathbf{B}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{(i)}$

$$\mathbf{L}_i := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{i,i}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}\mathbf{b}_i & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{L}_i \mathbf{A}^{(i+1)} \mathbf{L}_i^*$$

$$\mathbf{A}^{(i+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{(i)} - \frac{1}{a_{i,i}}\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^* \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{(i+1)}$

در نهایت

$$\mathbf{L} := \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \ldots \mathbf{L}_n$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t.   A مثبت نیمه معین

$$1 = a_{i,i}$$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \;\forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t. A مثبت نیمه معین

$1 = a_{i,i}$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

برنامه‌ریزی خطی
با بی‌نهایت قید

$$\sum_{ij} y_i a_{i,j} y_j \geq 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t. $\quad$ A مثبت نیمه معین

$$1 = a_{i,i}$$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

برنامه‌ریزی خطی
با بی‌نهایت قید

$$\sum_{ij} y_i a_{i,j} y_j \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

قابل حل با
روش بیضی‌گون

برش بیشینه ـ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t.   A مثبت نیمه معین

$$1 = a_{i,i}$$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

پرسش بیضی‌گون:
آیا A شدنی است؟
اگر نه، یک قید نقض شده

قابل حل با
روش بیضی‌گون

برنامه‌ریزی خطی
با بی‌نهایت قید

$$\sum_{ij} y_i a_{i,j} y_j \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

برش بیشینه ــ الگوریتم تقریبی ۲

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t. $\quad$ A مثبت نیمه معین

$1 = a_{i,i}$

ماتریس A

- شدنی: مثبت نیمه‌معین
- نشدنی: y که $y^T A y < 0$

پرسش بیضی‌گون:

آیا A شدنی است؟

اگر نه، یک قید نقض شده

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

s.t. $\quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$

$1 = a_{i,i}$

برنامه‌ریزی خطی

با بی‌نهایت قید

قابل حل با

روش بیضی‌گون

$$\sum_{ij} y_i a_{i,j} y_j \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرام‌سازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

x_j

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-x_i x_j) \\ \text{s.t.} \quad & x_i \in \{-1,+1\} \end{aligned}$$

آرامسازی

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j}) \\ \text{s.t.} \quad & y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n \\ & 1 = a_{i,i} \end{aligned}$$

حل

x_j

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

x_j

آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

حل

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z^T \cdot z$$

ماتریس z

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرام‌سازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

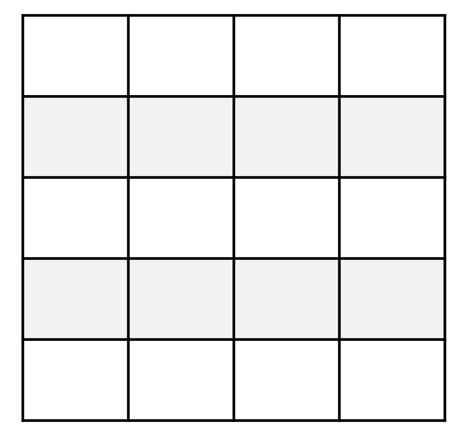
حل

بردار z_i

$$a_{i,j} = z_i z_j$$

x_j

x=



بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z^T \cdot z$$

ماتریس z

$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

حل

بتوان A را به صورت زیر تجزیه کرد

$$A = z^T \cdot z$$

ماتریس z

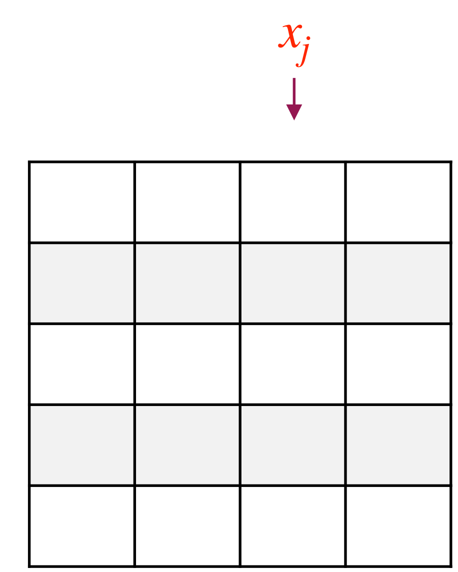
بردار z_i

$$a_{i,j} = z_i z_j$$

گرد

عدد x_i

x=



$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - x_i x_j)$$

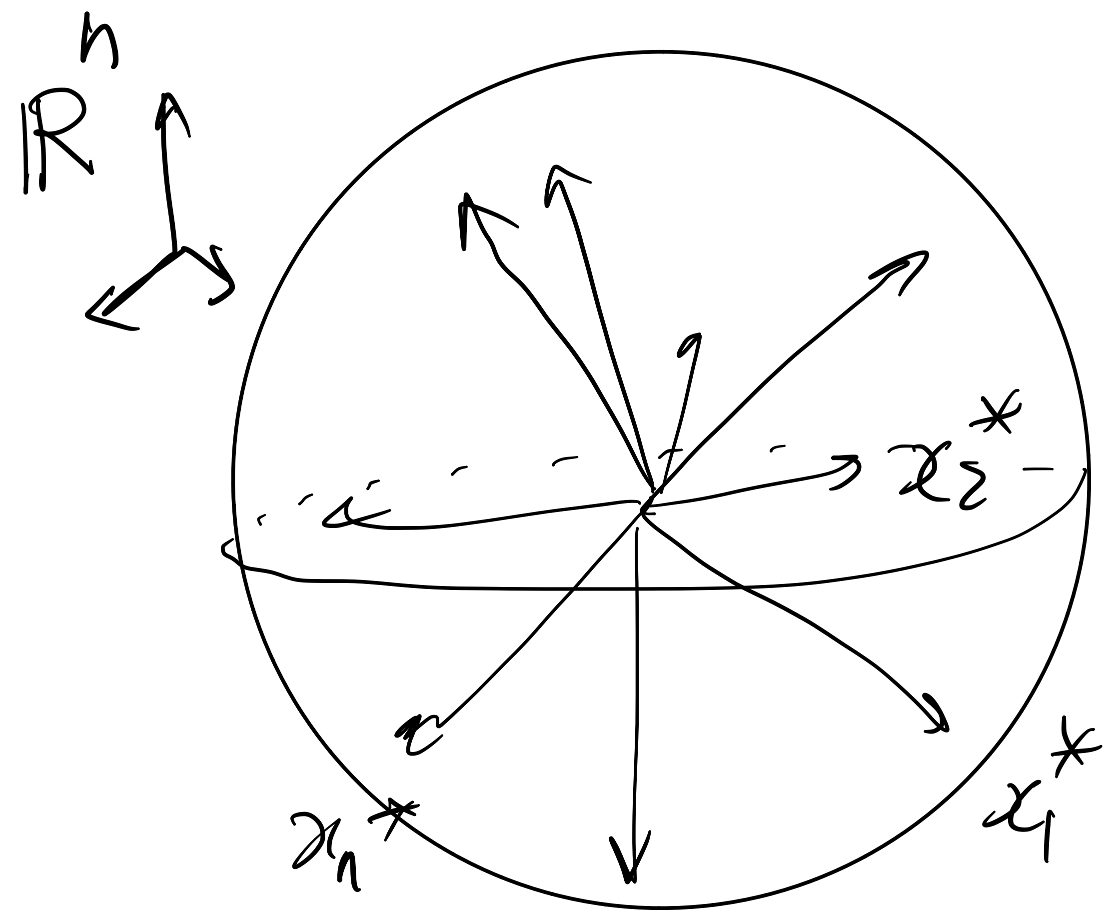
$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j \in E} (1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$



$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

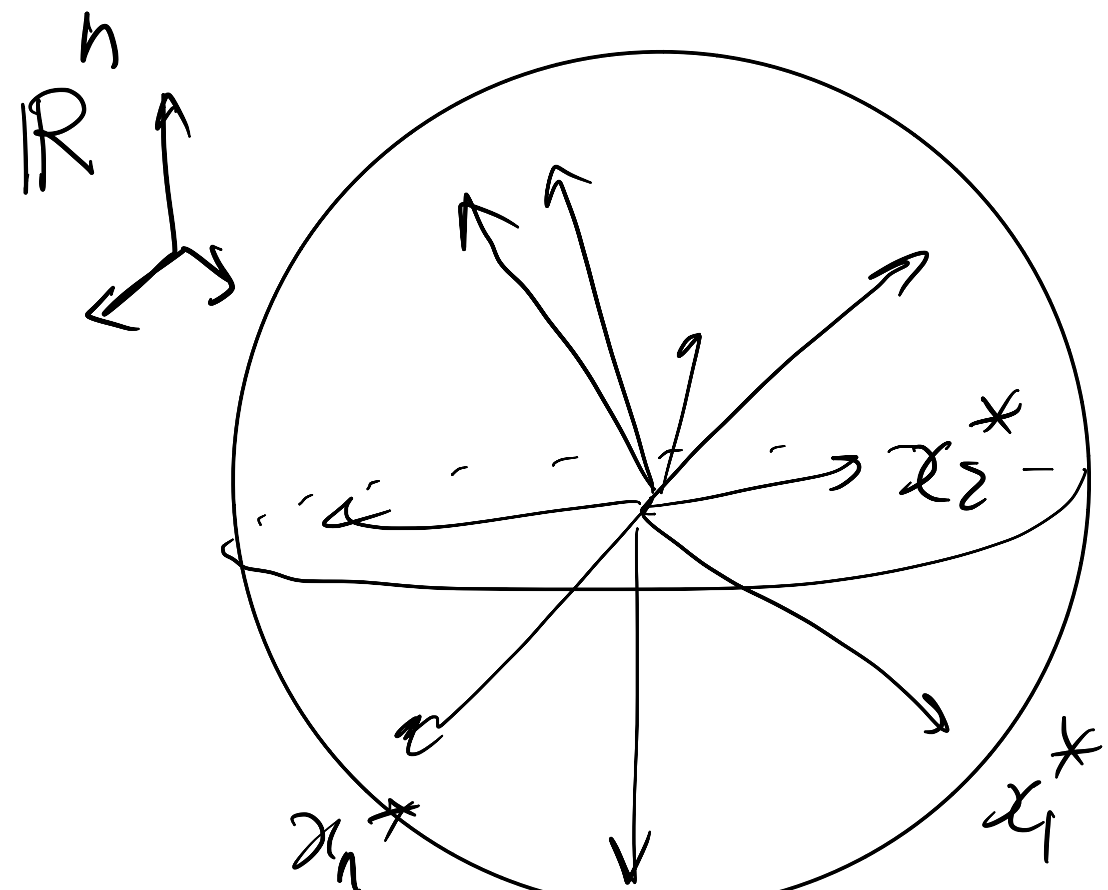
آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

ایده: یک صفحه تصادفی



$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرامسازی

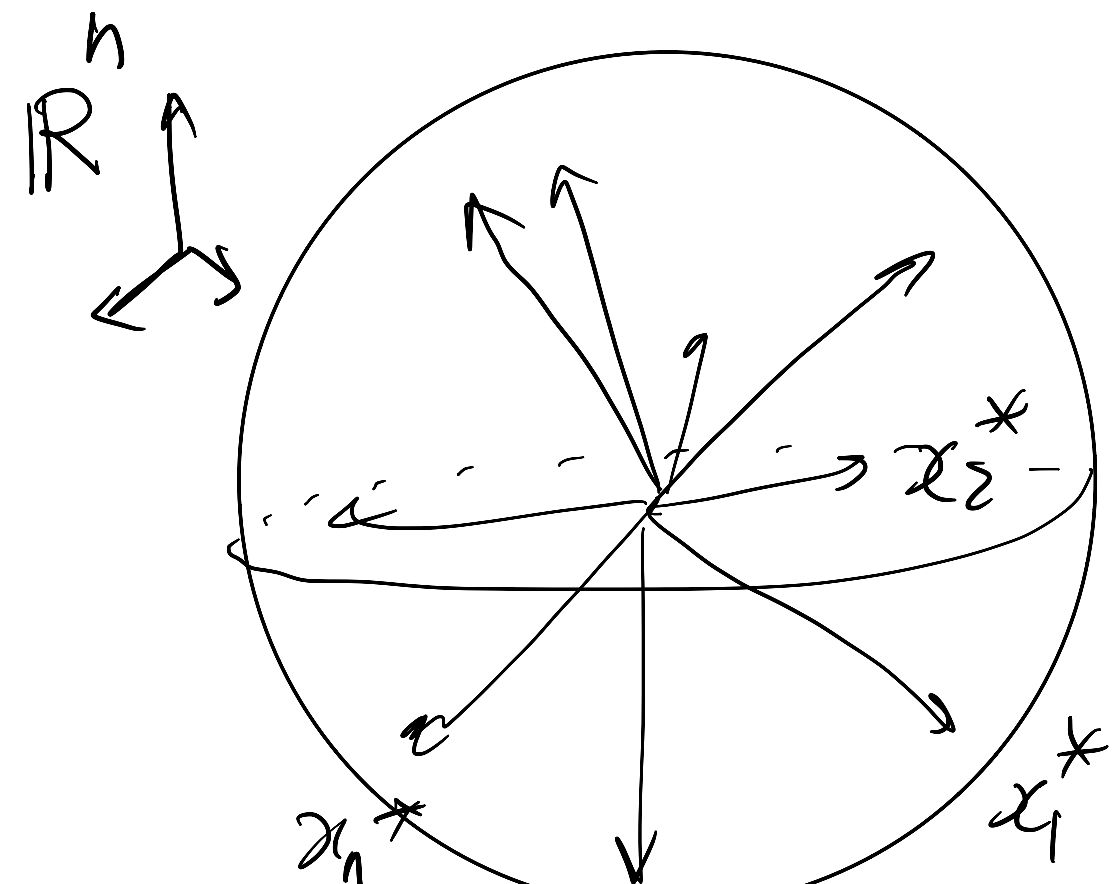
$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

ایده: یک صفحه تصادفی

E[تعداد یال] ~ $(1-z_i z_j)$



تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}]$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}]$

خطی بودن امید ریاضی

$$\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}] = \sum_{ij \in E} \mathbb{E}[Y_{ij} w_{ij}] =$$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}]$

خطی بودن امید ریاضی

متغیر ۰ و ۱

$$\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{E}[Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{P}r[Y_{ij}=1]w_{ij} =$$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}$

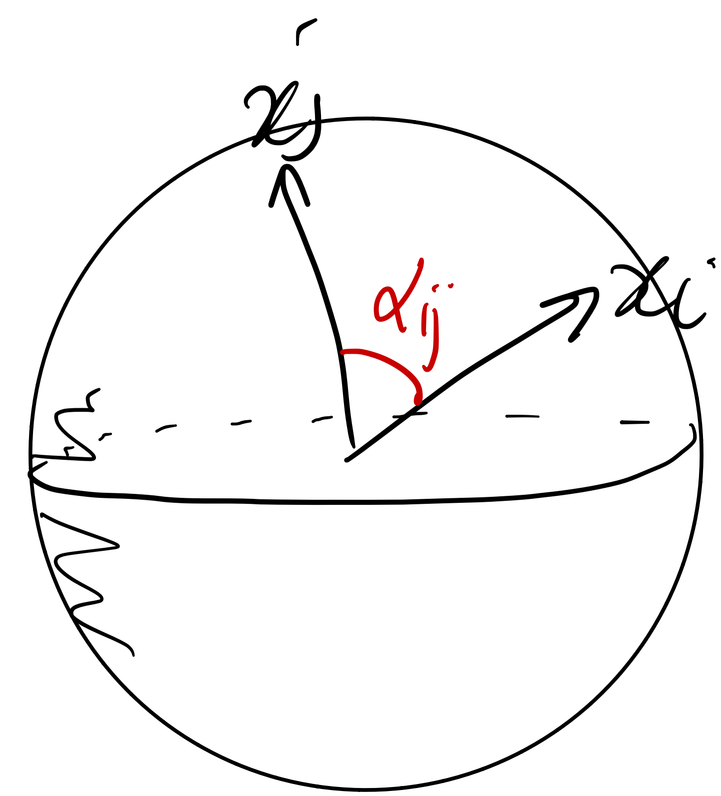
امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}]$

خطی بودن امید ریاضی

متغیر ۰ و ۱

$$\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{E}[Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{P}r[Y_{ij}=1]w_{ij} =$$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij}=1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi}$$



تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}]$

خطی بودن امید ریاضی

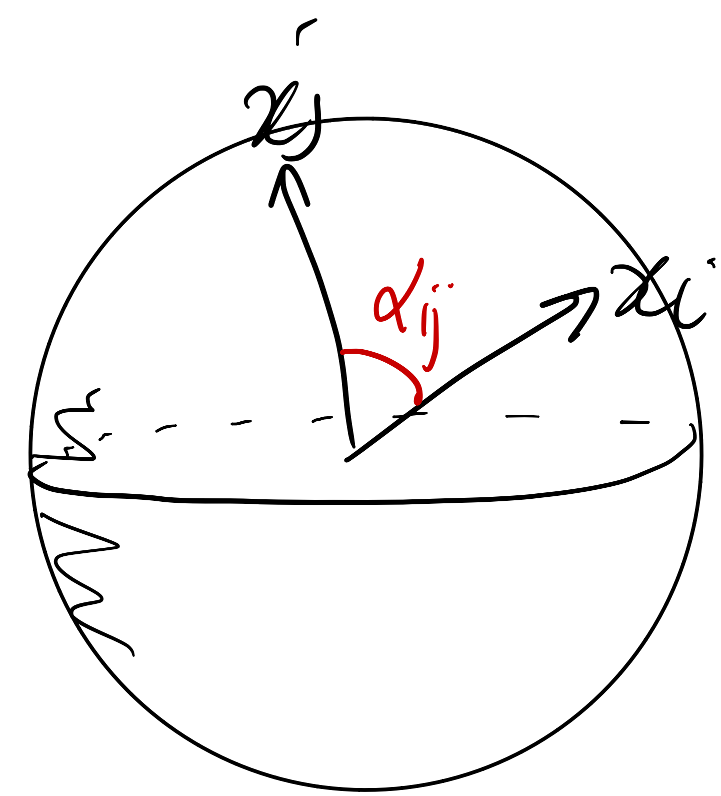
متغیر ۰ و ۱

$$\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E}\mathbb{E}[Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E}\mathbb{P}r[Y_{ij}=1]w_{ij} =$$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij}=1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi}$$

؟؟؟

$\sim (1 - z_i z_j)$



تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}$

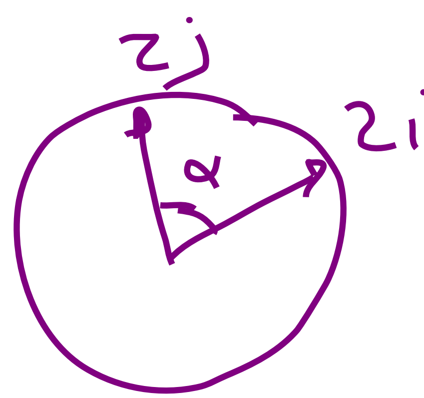
امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}]$

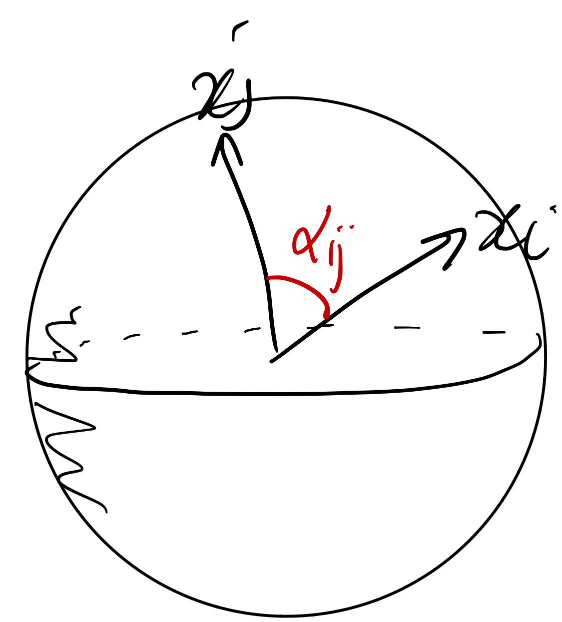
خطی بودن امید ریاضی

متغیر ۰ و ۱

$$\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{E}[Y_{ij}] = \sum_{ij\in E} \mathbb{P}r[Y_{ij}=1] =$$

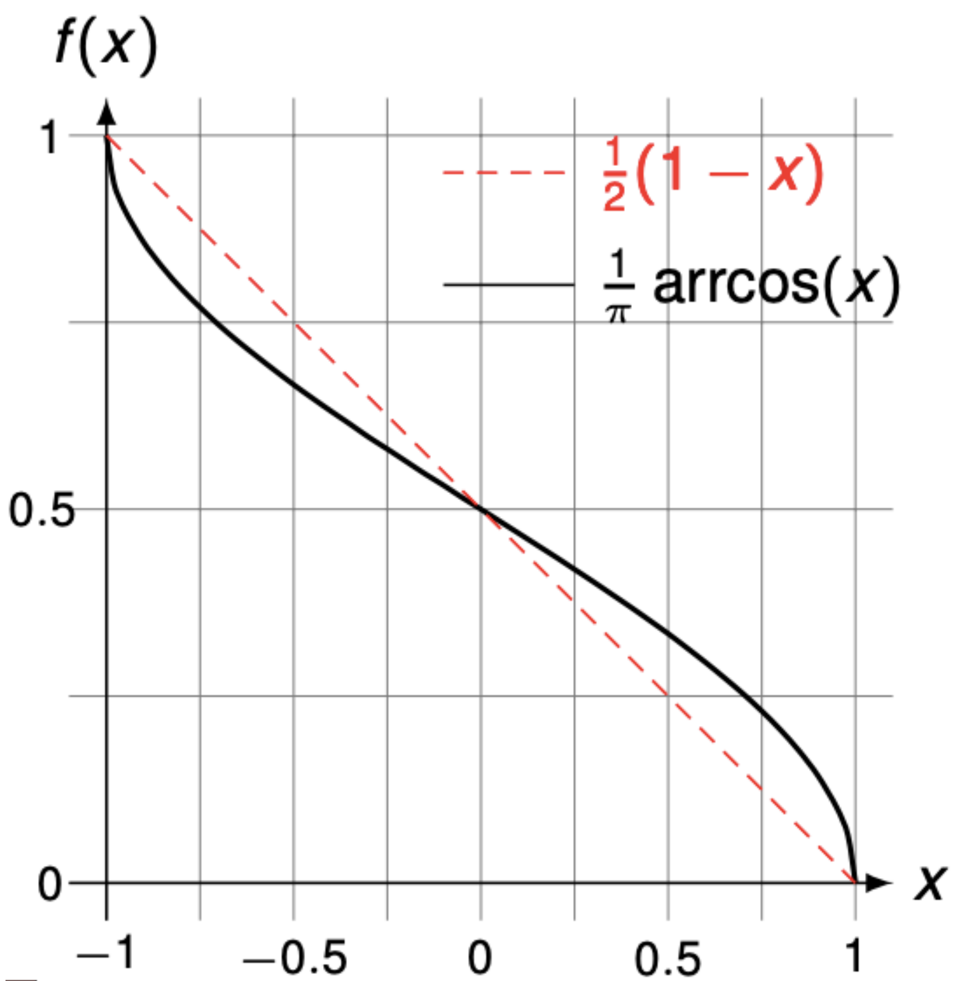
$$\mathbb{P}r[Y_{ij}=1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi}$$



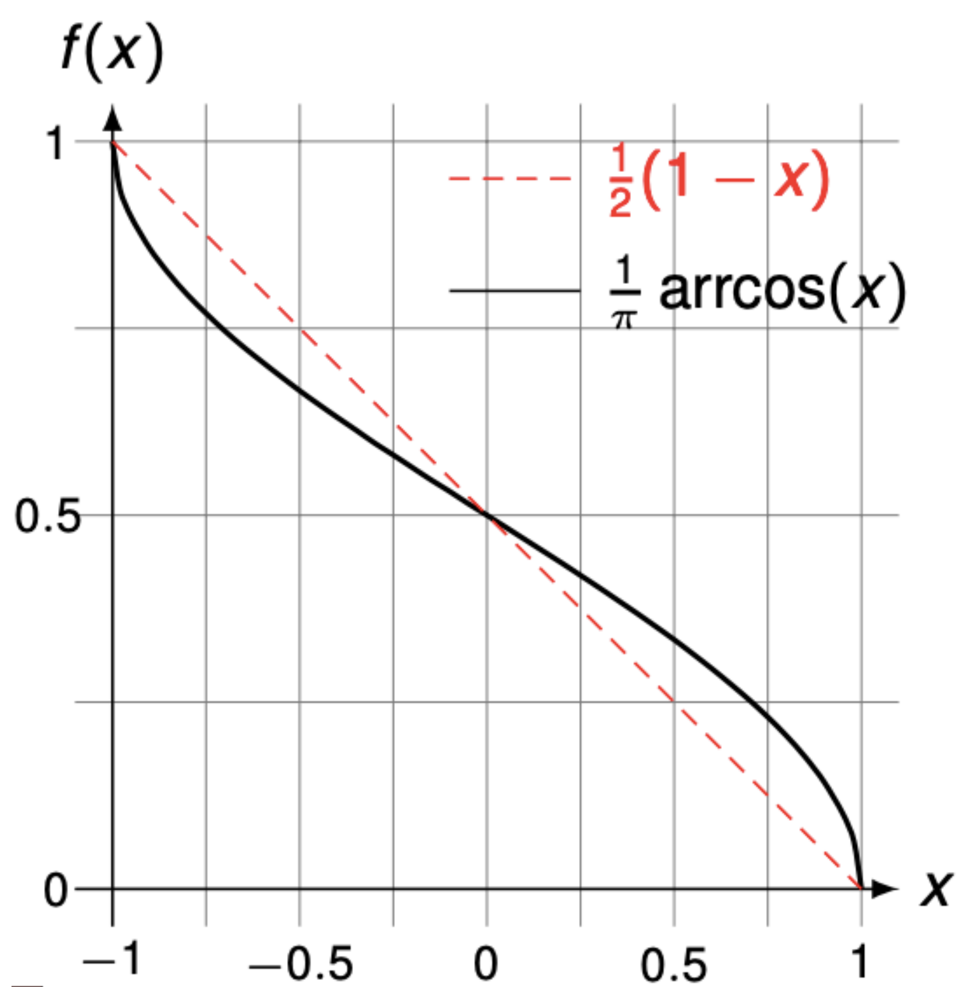


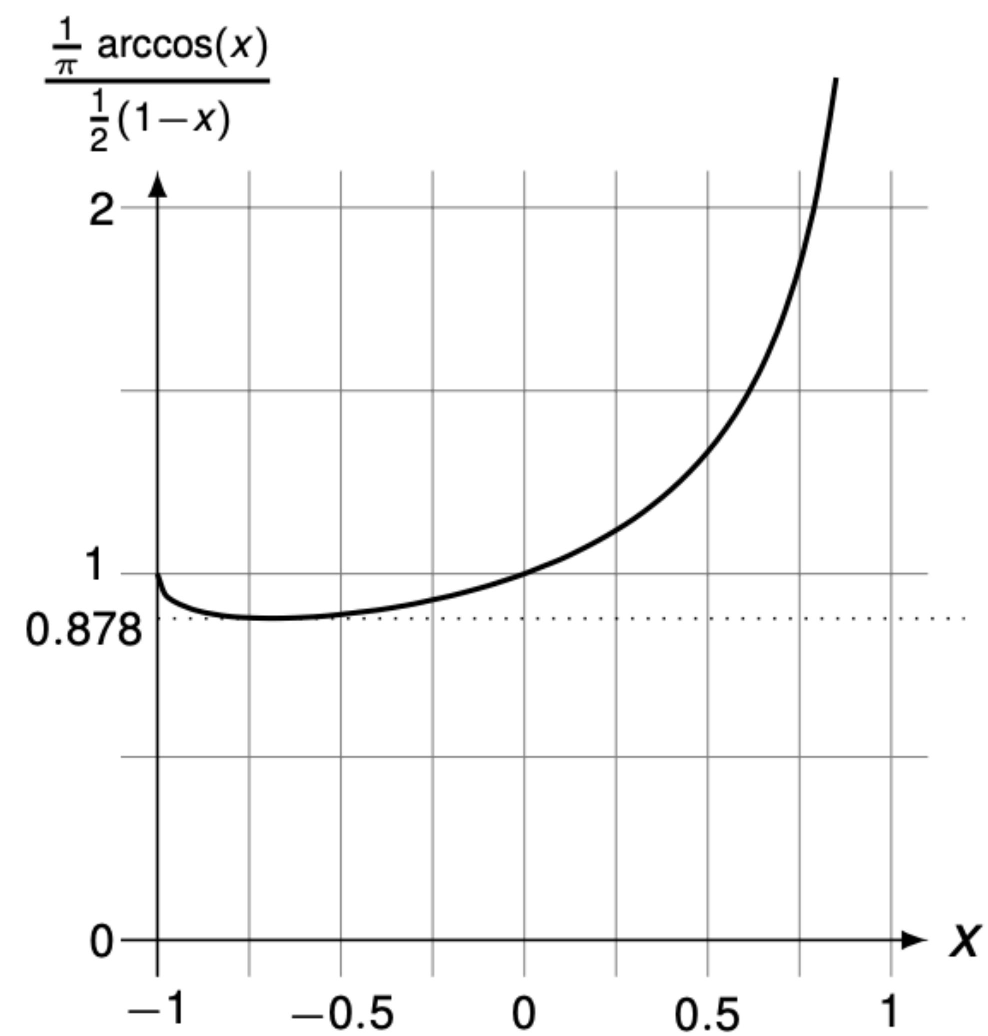
$\mathrm{acos}(z_i z_j)$ ~?~ $1 - z_i z_j$

$\mathrm{acos}(z_i z_j) \sim ? \sim 1 - z_i z_j$



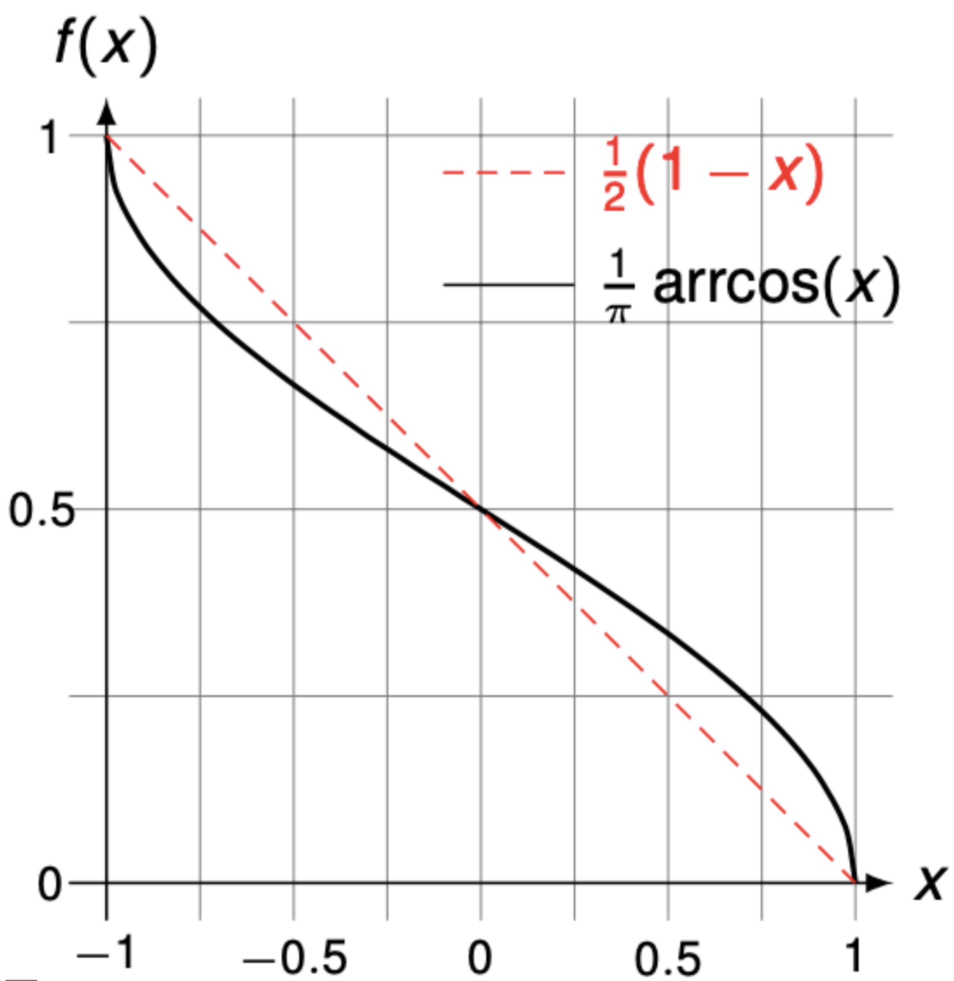
$\mathrm{acos}(z_i z_j)$ ~?~ $1 - z_i z_j$

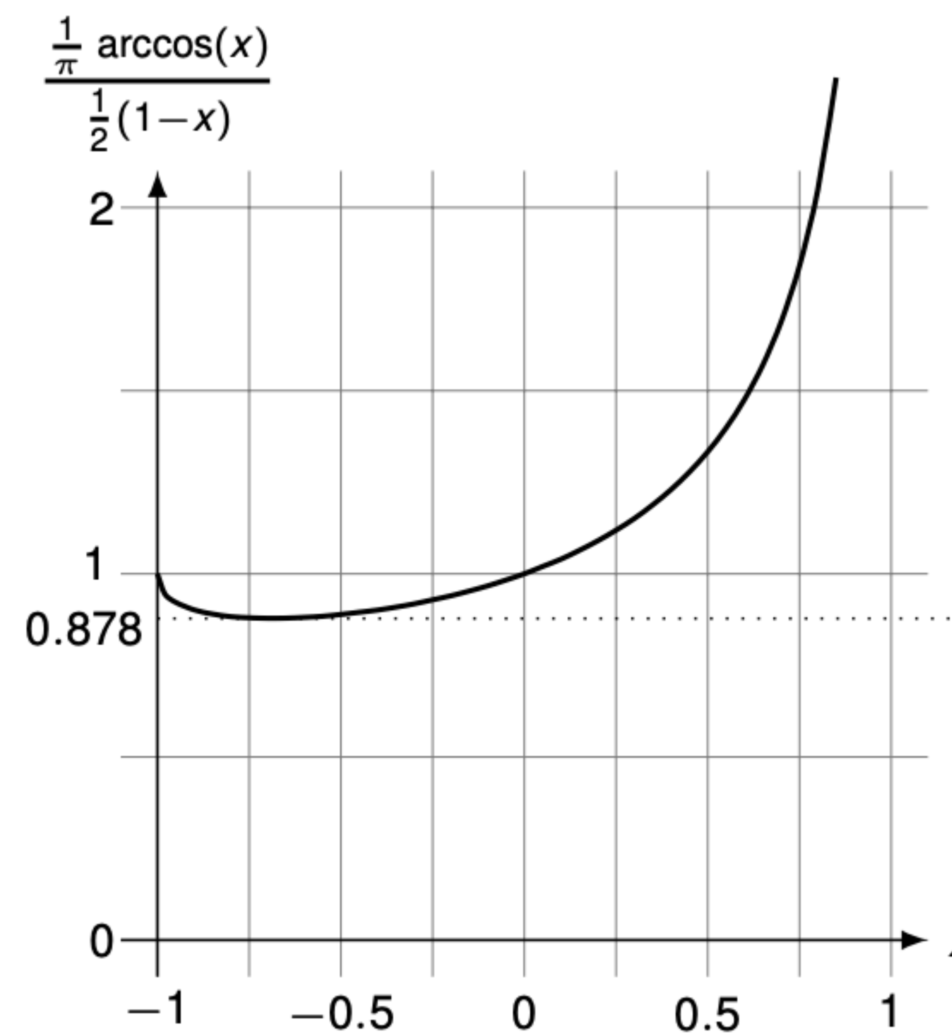




$\operatorname{acos}(z_i z_j) \sim ? \sim 1 - z_i z_j$

قضیه: For any $x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{\pi}\arccos(x) \geq 0.878 \cdot \frac{1}{2}(1 - x)$.





تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij} = 1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878 \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2}$$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij} = 1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878\frac{(1 - z_i^T z_j)}{2}$$

$$\geq 0.878 \sum_{ij\in E} \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2} w_{ij}$$

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij}=1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878 \frac{(1-z_i^T z_j)}{2}$$

$$\geq 0.878 \sum_{ij\in E} \frac{(1-z_i^T z_j)}{2} w_{ij} = 0.878\ Z^*$$

جواب بهینه نسخه
آرام‌سازی‌شده

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij} = 1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878 \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2}$$

$$\geq 0.878 \sum_{ij \in E} \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2} w_{ij} = 0.878\ Z^* \geq 0.878\ OPT$$

جواب بهینه نسخه آرام‌سازی‌شده

جواب آرام‌سازی بهتر از جواب نسخه اصلی

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij \in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij} = 1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878 \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2}$$

$$\mathbb{E}[\sum_{ij \in E} Y_{ij} w_{ij}] = \sum_{ij \in E} \mathbb{E}[Y_{ij} w_{ij}] =$$

$$\geq 0.878 \sum_{ij \in E} \frac{(1 - z_i^T z_j)}{2} w_{ij} = 0.878\ Z^* \geq 0.878\ OPT$$

جواب بهینه نسخه
آرام‌سازی‌شده

جواب آرام‌سازی بهتر از
جواب نسخه اصلی

تحلیل الگوریتم ۲

Y_{ij}: یال i و j در برش ما باشد

امتیاز ما: $\sum_{ij\in E} Y_{ij}$

امید امتیاز ما: $\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}]$

$$\mathbb{P}r[Y_{ij}=1] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{acos(z_i^T z_j)}{\pi} \geq 0.878\frac{(1-z_i^T z_j)}{2}$$

$$\mathbb{E}[\sum_{ij\in E} Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E}\mathbb{E}[Y_{ij}w_{ij}] = \sum_{ij\in E}\mathbb{P}r[Y_{ij}=1]w_{ij}$$

$$\geq 0.878\sum_{ij\in E}\frac{(1-z_i^T z_j)}{2}w_{ij} = 0.878\ Z^* \geq 0.878\ OPT$$

جواب بهینه نسخه
آرام‌سازی‌شده

جواب آرام‌سازی بهتر از
جواب نسخه اصلی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

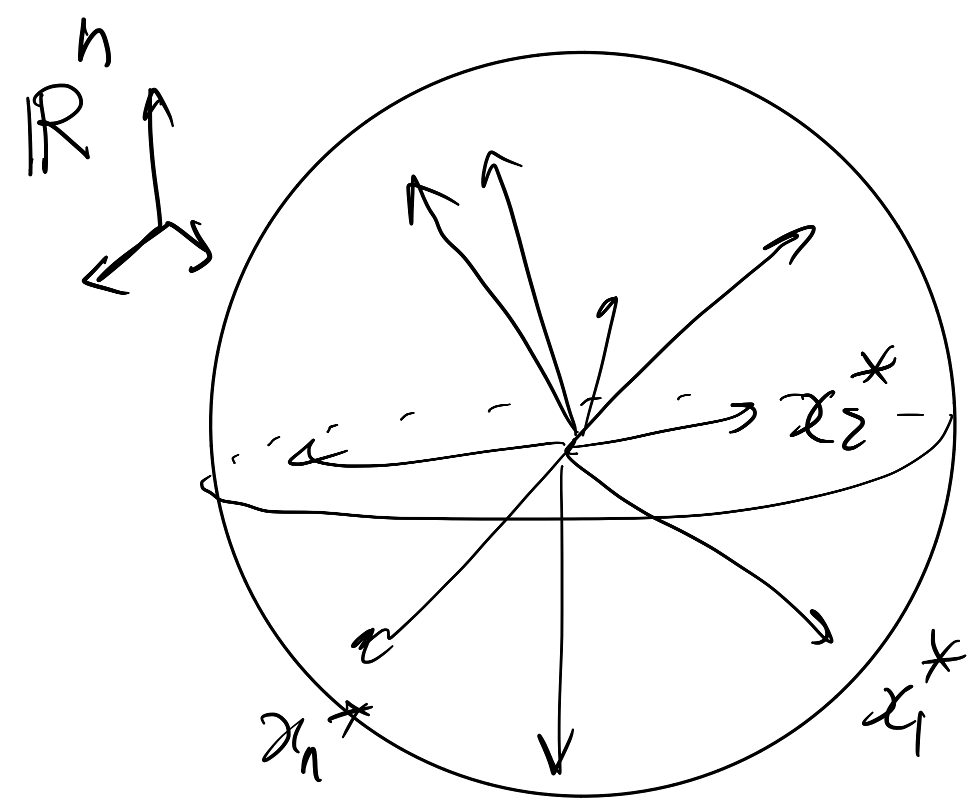
$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

امید تعداد یال‌ها ≥ ۰٫۸۷۸ بهترین جواب

یک صفحه تصادفی،

هر طرف صفحه یک مجموعه



$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-x_ix_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1,+1\}$$

آرامسازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1-a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^TAy \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

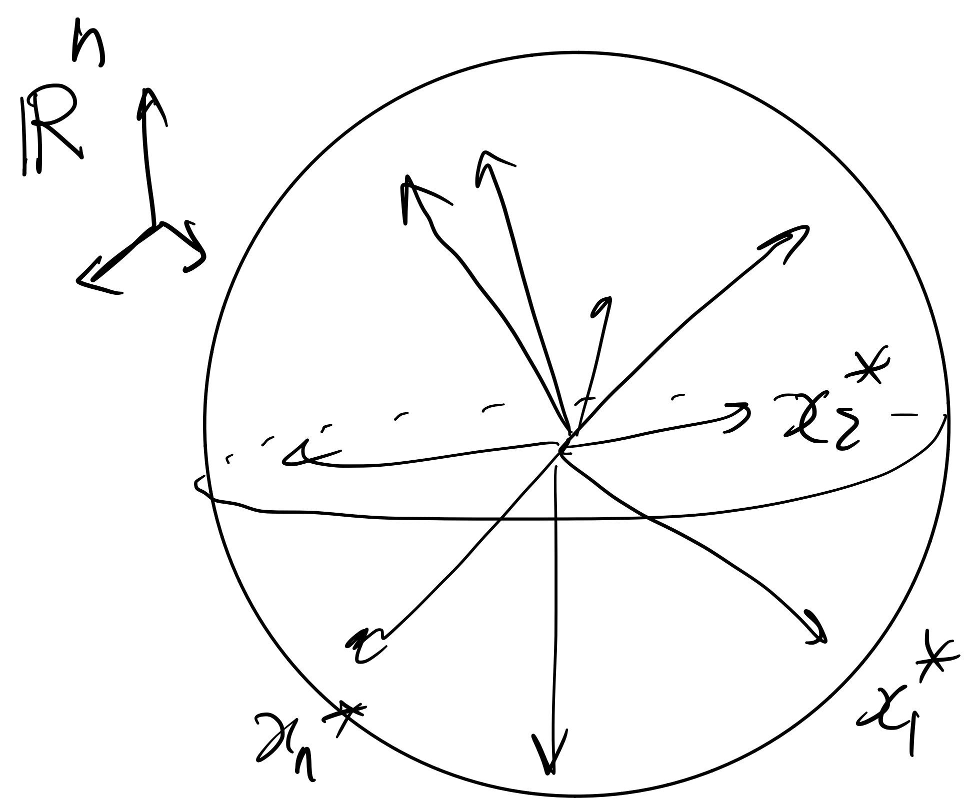
$$1 = a_{i,i}$$

حل

امید تعداد یال‌ها ≥ ۰٫۸۷۸ بهترین جواب

یک صفحه تصادفی،

هر طرف صفحه یک مجموعه



$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \in \{-1, +1\}$$

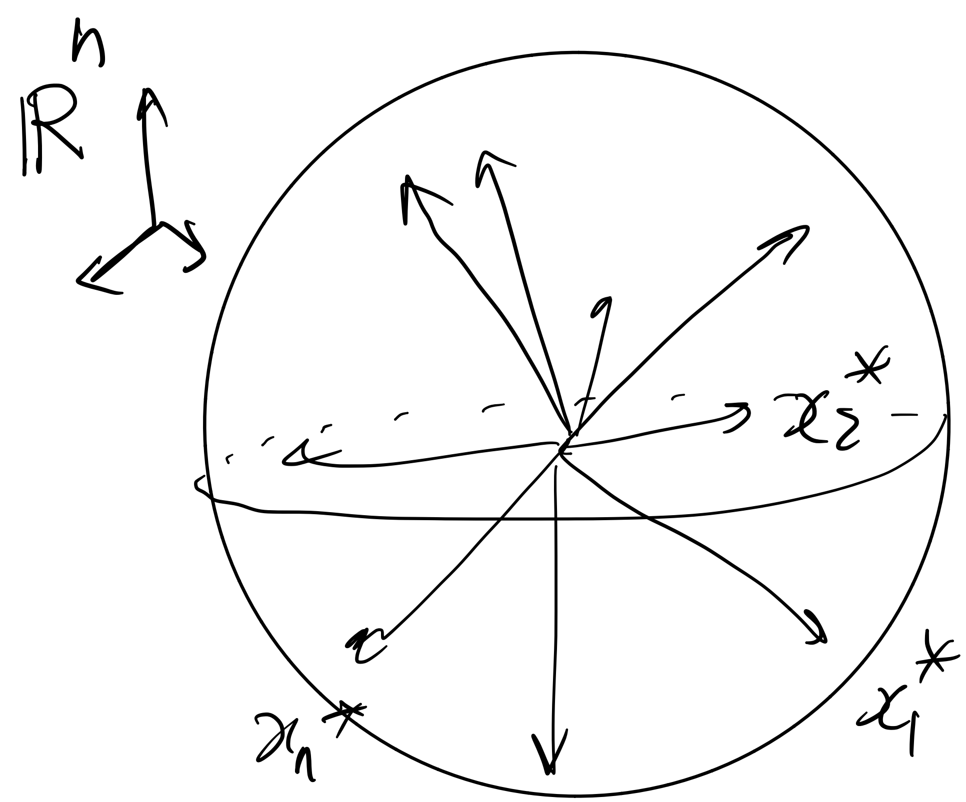
آرام‌سازی

$$\max \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}(1 - a_{i,j})$$

$$\text{s.t.} \quad y^T A y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$1 = a_{i,i}$$

حل



گرد کردن

یک صفحه تصادفی،

هر طرف صفحه یک مجموعه

امید تعداد یال‌ها ≥ ۰٫۸۷۸ بهترین جواب