بسم الله الرحمن الرحیم

درس تحقیق در عملیات

ترم پاییز ۱۳۹۹-۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه سیزدهم

درس تحقیق در عملیات

روش نقطه درونی

نگاهی از دور

خواص روش نقطه درونی

- سریع‌تر از سیمپلکس در عمل
  - برای برنامه‌ریزی‌های بزرگ
  - قبلاً کُند!

خواص روش نقطه درونی

- سریع‌تر از سیمپلکس در عمل
  - برای برنامه‌ریزی‌های بزرگ
  - قبلاً کُند!
- زمان اجرا چند جمله‌ای

خواص روش نقطه درونی

- سریع‌تر از سیمپلکس در عمل
  - برای برنامه‌ریزی‌های بزرگ
  - قبلا کُند!
- زمان اجرا چند جمله‌ای
- حل برنامه‌ریزی خطی
  - حل برنامه‌ریزی محدب

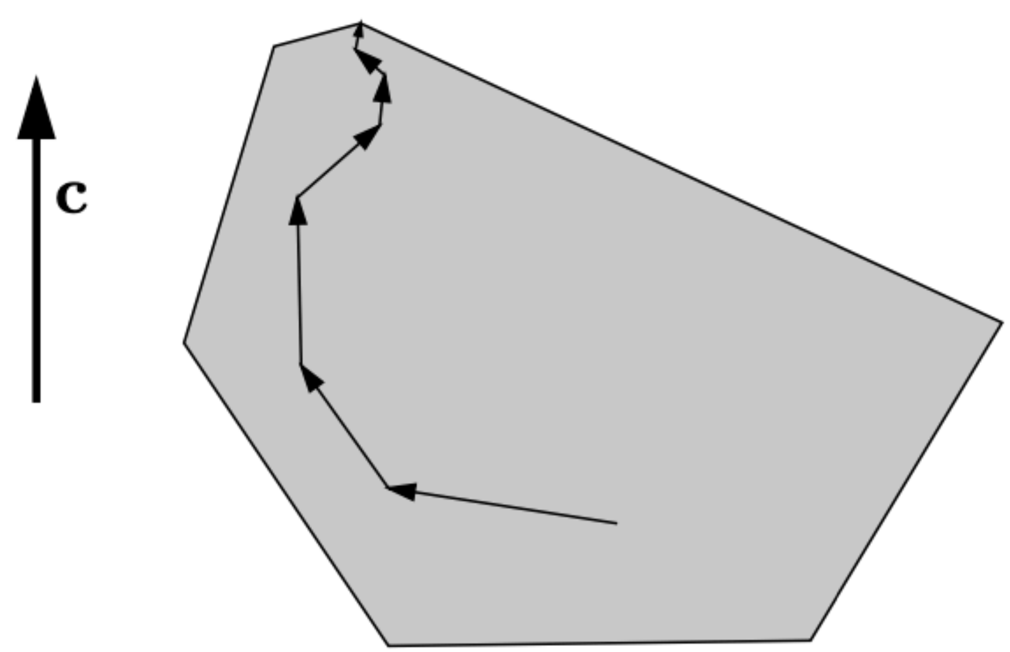
$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$$

ایده

- ترجمه هندسی:
  - بیضی‌گون: مرکز بیضی‌گون بیرون P
  - سیمپلکس: روی مرز P
  - نقطه درونی: ؟؟؟

ایده

- ترجمه هندسی:
  - بیضی‌گون: مرکز بیضی‌گون بیرون P
  - سیمپلکس: روی مرز P
  - نقطه درونی: ؟؟؟



مسیر مرکزی

$$\max \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

تعریف مسیر مرکزی

$$f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln\left(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$$

$$f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln\left(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$$

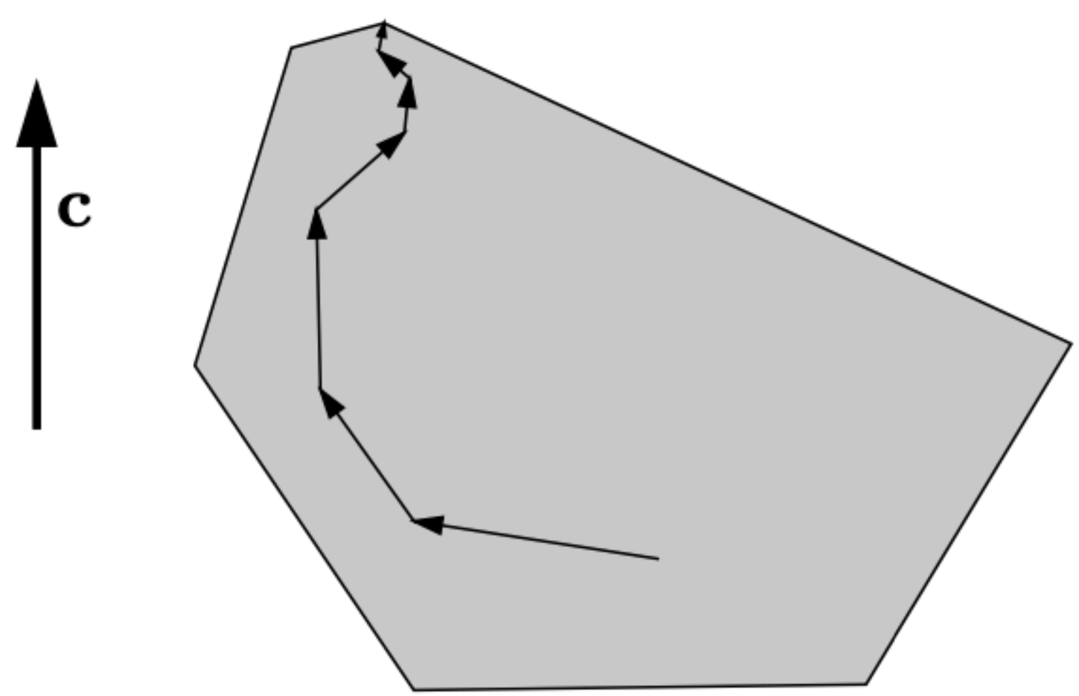
$$f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln\left(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$$

$$f_0 = f$$

$$f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln\left(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$$

$$f_0 = f$$

f_μ $\qquad\qquad$ $\mu > 0$



بهینه تابع $f_\mu(x)$

$$f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln\left(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$$

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و μ>۰ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{int}(P) \ : \ f_\mu(\mathbf{x}) \ \geq \ f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \mathrm{int}(P) : f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{int}(P) : f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{int}(P) : \; f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قسمت ۲:

فرض خلف: دو بیشینه x و y: $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{y})$

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{int}(P) : \; f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:
۱) کران‌دار
۲) بسته

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قسمت ۲:

فرض خلف: دو بیشینه x و y: $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{y})$

تمام خط بین x و y شدنی‌اند (<== تحدب)

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{int}(P) : \; f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قسمت ۲:

فرض خلف: دو بیشینه x و y: $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{y})$

تمام خط بین x و y شدنی‌اند (<== تحدب)

تابع f اکیدا مقعر

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \mathrm{int}(P) : \; f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قسمت ۲:

فرض خلف: دو بیشینه x و y: $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{y})$

تمام خط بین x و y شدنی‌اند (تحدب ==>)

تابع f اکیدا مقعر ==> بین x و y بزرگ‌تر از f(x) و f(y)

قضیه: P کران‌دار و درون‌دار و $\mu>0$ آنگاه $f_\mu(x)$ یک بیشینه درون P دارد

قسمت ۱:

$$\{\mathbf{x} \in \mathrm{int}(P) : \; f_\mu(\mathbf{x}) \geq f_\mu(\mathbf{x}_0)\}$$

فشرده:

۱) کران‌دار

۲) بسته

تابع پیوسته روی مجموعه فشرده بیشینه دارد

قسمت ۲:

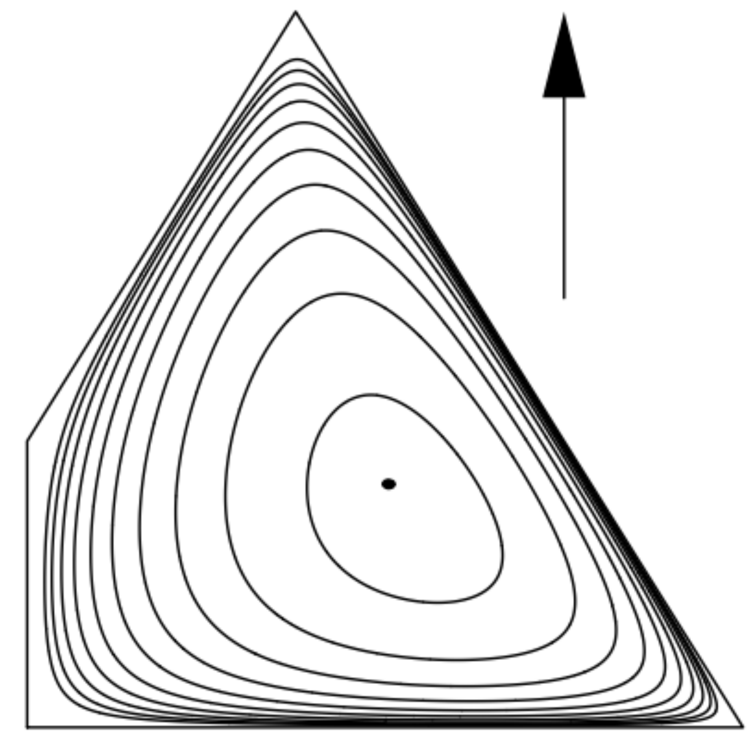
فرض خلف: دو بیشینه x و y: $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{y})$

تمام خط بین x و y شدنی‌اند (==> تحدب)

تابع f اکیدا مقعر <== بین x و y بزرگ‌تر از f(x) و f(y) <== ※

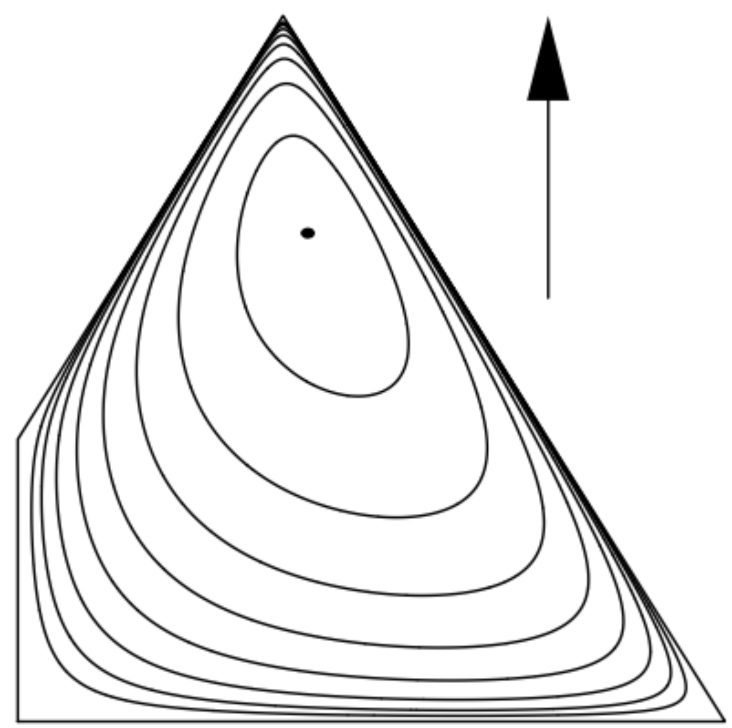
بهینه $f_{\mu}(x)$ در خلال تغییرات μ

بهینه $f_{\mu}(x)$ در خلال تغییرات μ

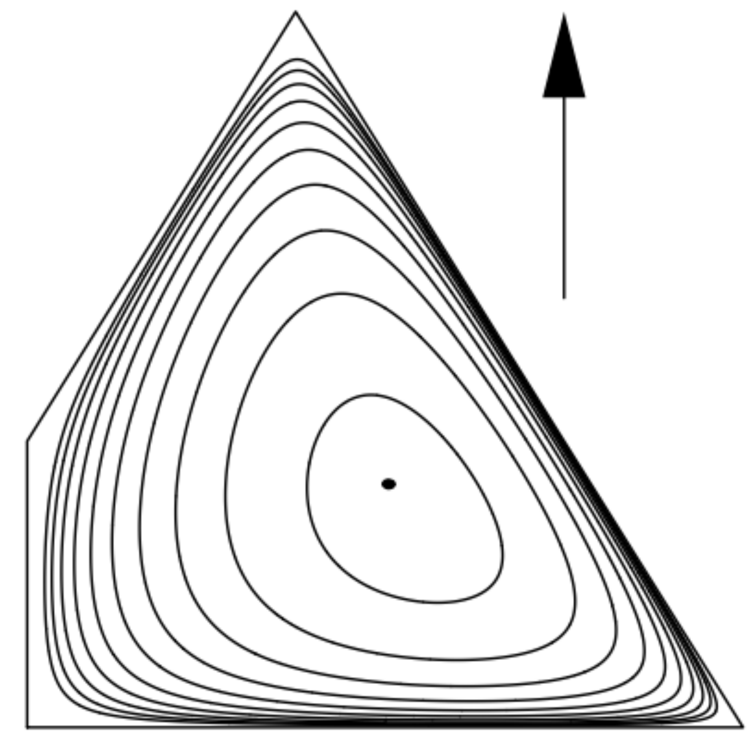


μ بزرگ

بهینه $f_\mu(x)$ در خلال تغییرات μ

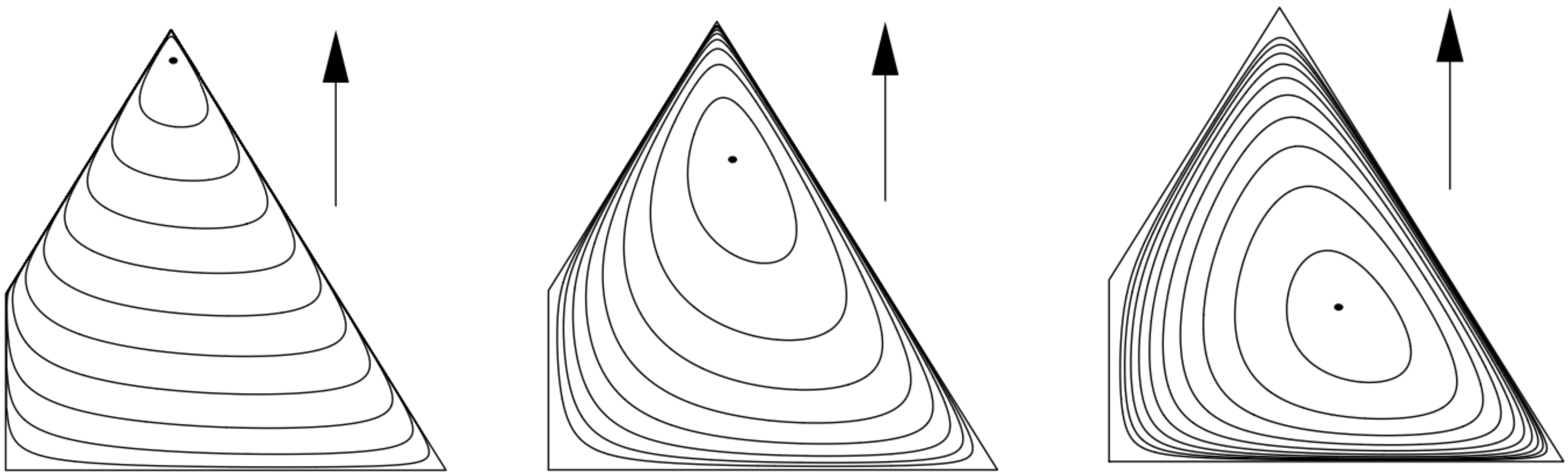


μ کم‌تر



μ بزرگ

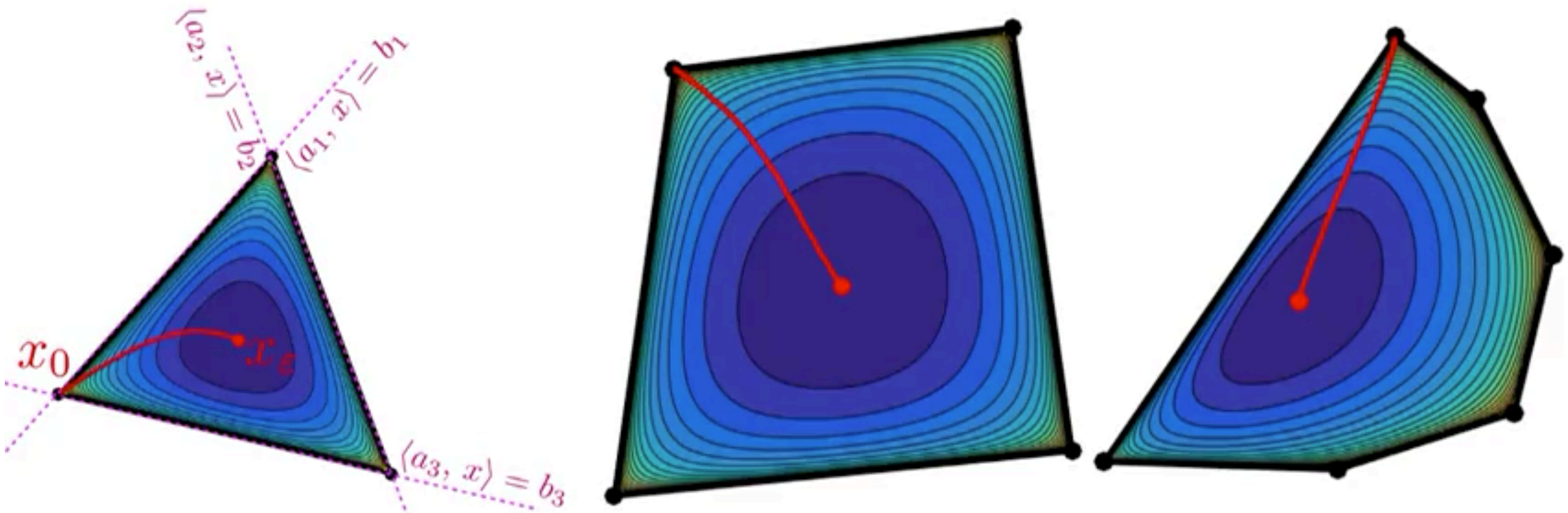
بهینه $f_\mu(x)$ در خلال تغییرات μ



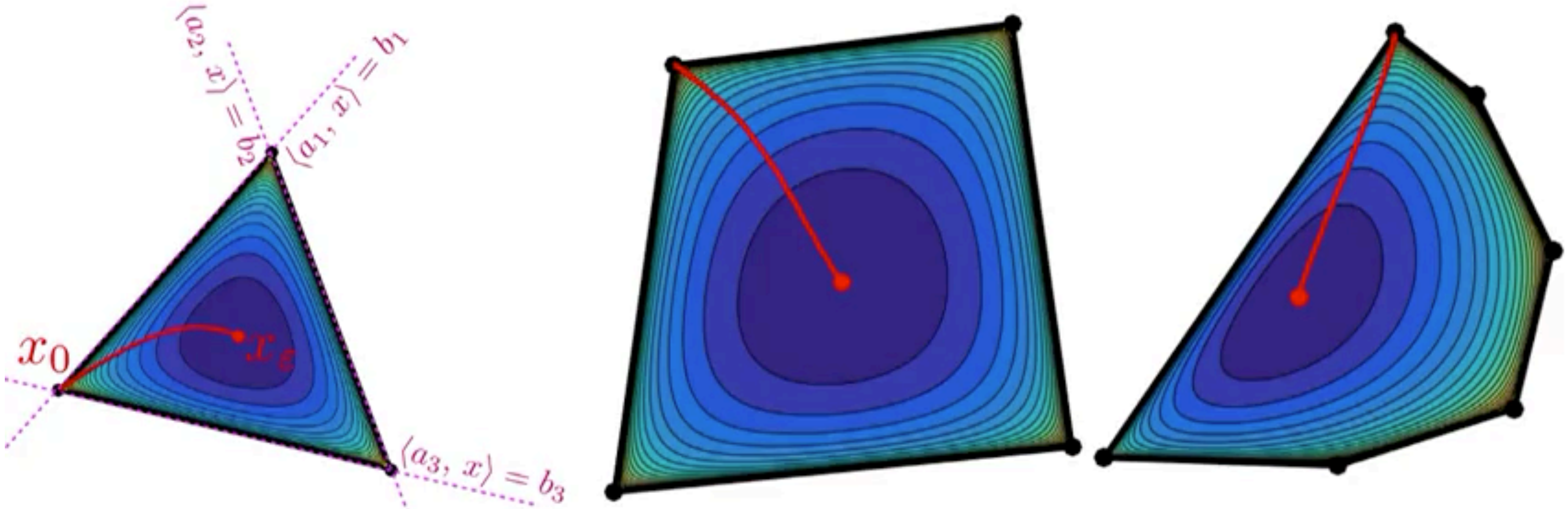
μ بزرگ

μ کم‌تر

μ خیلی کم

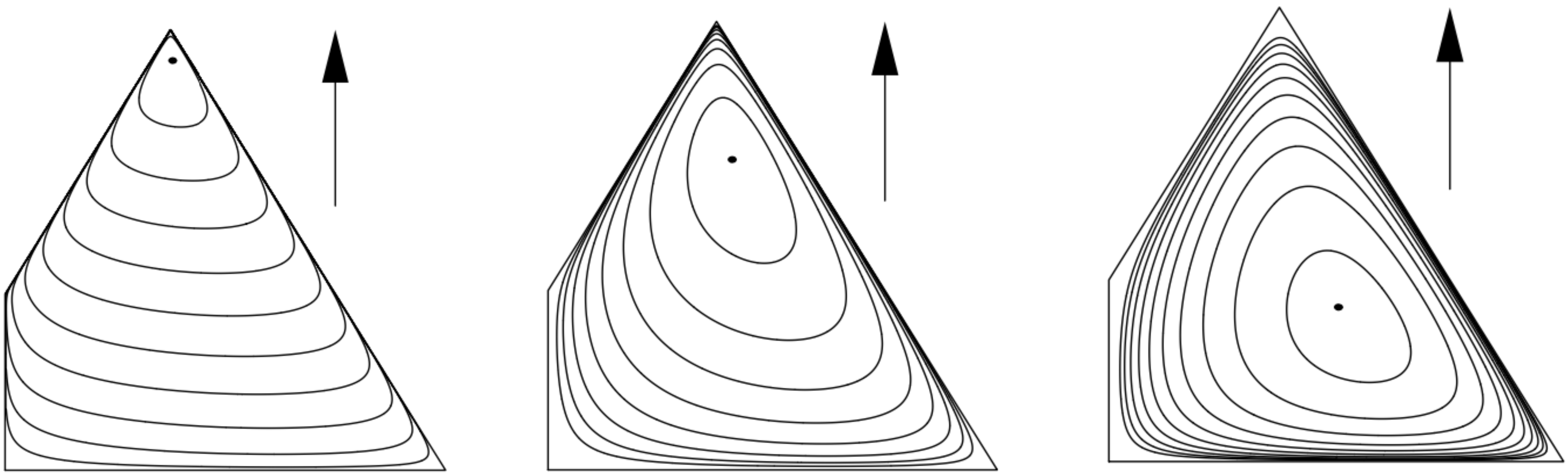


$\langle a_2, x \rangle = b_2$
$\langle a_1, x \rangle = b_1$
$\langle a_3, x \rangle = b_3$
x_0
x_ε



$\langle a_2, x\rangle = b_2$
$\langle a_1, x\rangle = b_1$
x_0
x_ε
$\langle a_3, x\rangle = b_3$

بهینه $f_{\mu}(x)$ در خلال تغییرات μ

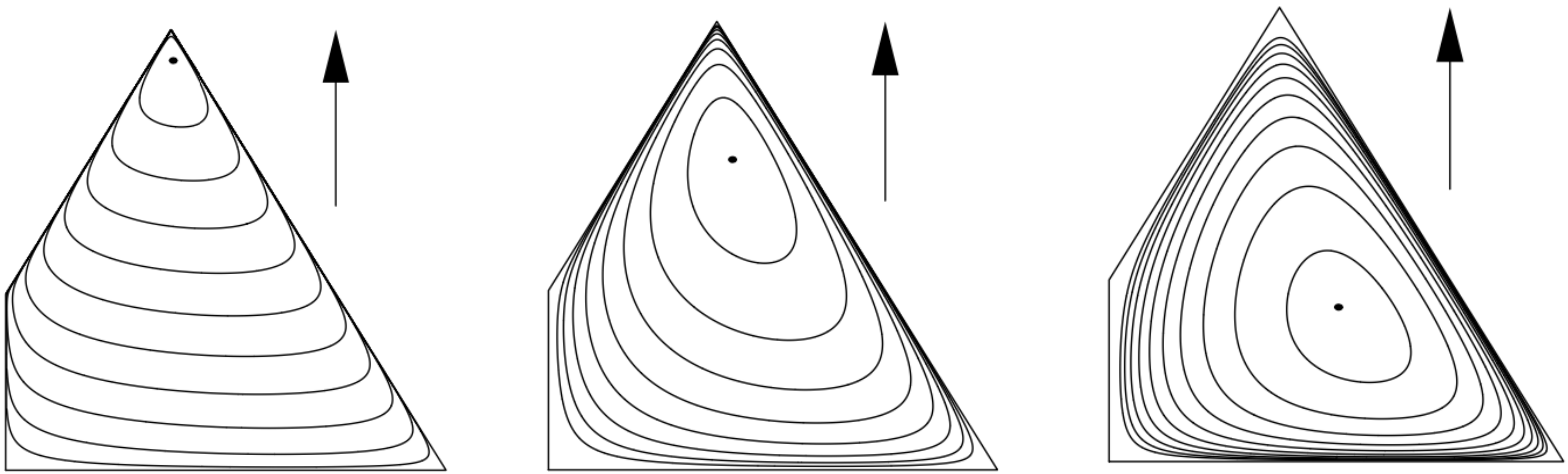


μ خیلی کم

μ کم‌تر

μ بزرگ

بهینه $f_\mu(x)$ در خلال تغییرات μ



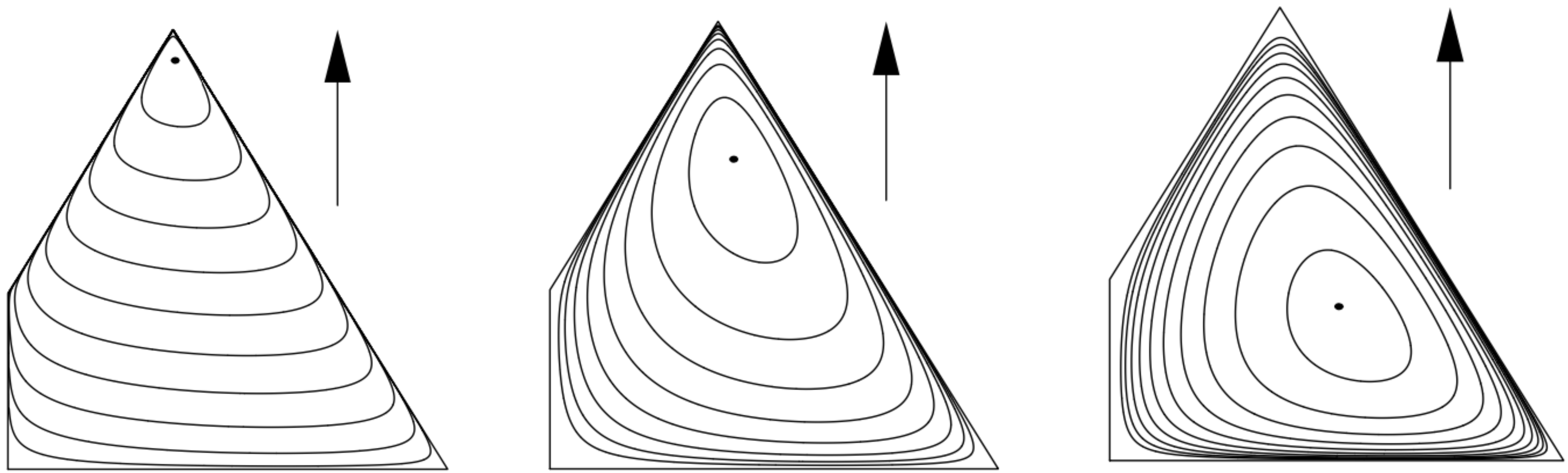
μ بزرگ

μ کم‌تر

μ خیلی کم

ایده: روی مسیر مرکزی، μ را کم کنیم.

بهینه $f_\mu(x)$ در خلال تغییرات μ



μ خیلی کم　　μ کم‌تر　　μ بزرگ

ایده: روی مسیر مرکزی، μ را کم کنیم.

چگونه روی مسیر مرکزی حرکت کنیم؟

یک ابزار: ضرایب لاگرانژی

تابع f خطی نیست!

یک ابزار: ضرایب لاگرانژی

تابع f خطی نیست!

برای برنامه‌ریزی زیر:

$$\max \quad f(\mathbf{x})$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 0,\ g_2(\mathbf{x}) = 0, \ldots,\ g_m(\mathbf{x}) = 0$$

یک ابزار: ضرایب لاگرانژی

تابع f خطی نیست!

برای برنامه‌ریزی زیر:

$$\max \quad f(\mathbf{x})$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

قضیه: x بهینه است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد y که

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x})$$

با برخی شرایط

ضرایب لاگرانژی برای مسئله ما

برنامه‌ریزی خطی

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

برنامه‌ریزی مسیر درونی

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \\
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

شرایط لاگرانژی

$$
g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x})
$$

ضرایب لاگرانژی برای مسئله ما

برنامه‌ریزی خطی

$$\max \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

برنامه‌ریزی مسیر درونی

$$\max \quad f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{j=1}^{n} \ln x_j$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

شرایط لاگرانژی

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}$$

ضرایب لاگرانژی برای مسئله ما

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی مسیر درونی

$$\begin{aligned} \max \quad & f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

شرایط لاگرانژی

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}$$

قیود x>= 0 مهم نیستند!

ضرایب لاگرانژی برای مسئله ما

برنامه‌ریزی خطی

$$\max \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

برنامه‌ریزی مسیر درونی

$$\max \quad f_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mu \cdot \sum_{j=1}^{n} \ln x_j$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

شرایط لاگرانژی

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}$$

قیود 0 =<x مهم نیستند!

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} + \mu\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = A^T\mathbf{y}$$

نسخه‌ای دیگر

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} + \mu \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n} \right) = A^T \mathbf{y}}$$

نسخه‌ای دیگر

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} + \underbrace{\mu \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n} \right)}_{\mathbf{s}} = A^T \mathbf{y}$$

نسخه‌ای دیگر

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} + \underbrace{\mu\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)}_{\mathbf{s}} = A^T\mathbf{y}$$

تنها قید غیر خطی

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

نسخه‌ای دیگر

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} + \underbrace{\mu\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)}_{\mathbf{s}} = A^T\mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

تنها قید غیر خطی

ایده: این را حل کنیم. **μ** را کم کنیم.

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$\boxed{\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}}$$

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\mu = 0$

$$0 = \mathbf{s}^T\mathbf{x}$$

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$\boxed{\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}}$$

$\mu = 0$

$$0 = \mathbf{s}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$\mathbf{s} = A^T\mathbf{y} - \mathbf{c}$

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$
\boxed{
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\
(s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\
\mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
}
$$

$$
0 \overset{\mu = 0}{=} \mathbf{s}^T\mathbf{x} \underset{\mathbf{s} = A^T\mathbf{y} - \mathbf{c}}{=} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} \overset{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}{=} \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}
$$

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$\boxed{\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}}$$

$$0 \overset{\mu = 0}{=} \mathbf{s}^T\mathbf{x} \underset{\mathbf{s} = A^T\mathbf{y} - \mathbf{c}}{=} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} \overset{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}{=} \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

اولیه	maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
دوگان	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ subject to $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

بازنگری برنامه‌ریزی سبز، برای μ=۰

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

معادل با بهینگی

$$\mu = 0 \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$0 = \mathbf{s}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{s} = A^T\mathbf{y} - \mathbf{c}$$

اولیه maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

دوگان minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ subject to $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\
(s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\
\mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

لم: $\mu>0$

اولیه جواب $\bar{x} > 0$ و $\bar{y}$ جواب دوگان شدنی که $\tilde{\mathbf{s}} = A^T\tilde{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{c}} > 0$

آنگاه

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\
(s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\
\mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

لم: $\mu>0$

اولیه جواب $\bar{x} > 0$ و $\bar{y}$ جواب دوگان شدنی که $\tilde{\mathbf{s}} = A^T\tilde{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{c}} > 0$

آنگاه

سبز جواب یکتای $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mu)$ و $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*(\mu)$ و $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}^*(\mu)$

دارد که $\mathbf{x}^*(\mu)$ جواب یکتای بیشینه کن f_μ به شرط $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ است

ایده الگوریتم نقطه درونی

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

الگوریتم:

- مقدار μ = ۱
- یک جواب اولیه x و y و s
  - تقریبا سبز
- یک تغییر کوچک روی μ
- یک تغییر کوچک روی x و y و s
  - x =+ Δx و y =+ Δy و s =+ Δs

ایده الگوریتم نقطه درونی

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

الگوریتم:

- مقدار μ = ۱
- یک جواب اولیه x و y و s
  - تقریبا سبز
- یک تغییر کوچک روی μ
- یک تغییر کوچک روی x و y و s
- x =+ Δx و y =+ Δy و s =+ Δs

این‌ها را چند بگذاریم؟

$\Delta \mathbf{x}$ و $\Delta \mathbf{y}$ و $\Delta \mathbf{z}$ چند؟

شرایط مرحله قبل

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu_{\text{قدیم}}\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

جدید

جدید

Δx و Δy و Δz چند؟

شرایط مرحله قبل

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu_{\text{قدیم}}\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

شرایط مرحله جدید

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{b} \\ A^T(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}) - (\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) &= \mathbf{c} \\ \Big((s_1 + \Delta s_1)(x_1 + \Delta x_1), \ldots, (s_n + \Delta s_n)(x_n + \Delta x_n)\Big) &= \mu_{\text{جدید}}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s} &> \mathbf{0}. \end{aligned}$$

جدید

Δx و Δy و Δz چند؟

شرایط مرحله قبل

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \mu_{\text{قدیم}}\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

شرایط مرحله جدید

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{b} \\ A^T(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}) - (\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) &= \mathbf{c} \\ \Big((s_1 + \Delta s_1)(x_1 + \Delta x_1), \ldots, (s_n + \Delta s_n)(x_n + \Delta x_n)\Big) &= \mu_{\text{جدید}}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s} &> \mathbf{0}. \end{aligned}$$

جدید

Δx و Δy و Δz چند؟

شرایط مرحله قبل

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_nx_n) &= \underset{\text{قدیم}}{\mu}\mathbf{1} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

شرایط مرحله جدید

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{b} \\ A^T(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}) - (\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) &= \mathbf{c} \\ \Big((s_1 + \Delta s_1)(x_1 + \Delta x_1), \ldots, (s_n + \Delta s_n)(x_n + \Delta x_n)\Big) &= \underset{\text{جدید}}{\mu}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s} &> \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ A^T\Delta\mathbf{y} - \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ (s_1\Delta x_1 + x_1\Delta s_1, \ldots, s_n\Delta x_n + x_n\Delta s_n) &= \underset{\text{جدید}}{\mu}\mathbf{1} - (s_1x_1, \ldots, s_nx_n) \end{aligned}$$

تقریب درجه ۱

انشاء الله x,s>0

الگوریتم

$$\rho(a, \mu) = \sqrt{a/\mu} - \sqrt{\mu/a}$$

$$\operatorname{cdist}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \left\| \Big(\rho(s_1 x_1, \mu), \rho(s_2 x_2, \mu), \ldots, \rho(s_n x_n, \mu) \Big) \right\|$$

1. Set $\mu = 1$ and initialize $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}$ so that $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A^T\mathbf{y} - \mathbf{s} = \mathbf{c}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{s} > \mathbf{0}$, and $\operatorname{cdist}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) < \sqrt{2}$.
2. (Main loop) While $\mu \geq \varepsilon$, repeat Steps 3 and 4. As soon as $\mu < \varepsilon$, return $\mathbf{x}$ as an approximately optimal solution and stop.
3. Replace μ with $\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \mu$.
4. (Newton step) Compute $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{y}$, $\Delta\mathbf{s}$ as the (unique) solution of the linear system (7.6). Replace $\mathbf{x}$ by $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ by $\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$, and $\mathbf{s}$ by $\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$. Go to the next iteration of the main loop.

$$\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ A^T\Delta\mathbf{y} - \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ \big(s_1\Delta x_1 + x_1\Delta s_1, \ldots, s_n\Delta x_n + x_n\Delta s_n\big) &= \mu\mathbf{1} - \big(s_1x_1, \ldots, s_nx_n\big) \end{aligned}$$

درستی الگوریتم

Invariant: $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{s} > \mathbf{0}$, and $\text{cdist}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) < \sqrt{2}$

درستی الگوریتم

$$\textbf{Invariant:}\quad \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{s} > \mathbf{0},\ \text{and } \mathrm{cdist}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) < \sqrt{2}$$

مشکلات عددی

درستی الگوریتم

$$\textbf{Invariant:}\quad \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{s} > \mathbf{0},\ \text{and } \mathrm{cdist}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) < \sqrt{2}$$

تعداد مراحل: $O(\sqrt{n}\,\log\frac{1}{\varepsilon})$

مشکلات عددی

شروع!

$$\begin{array}{rcrcl} & & A\mathbf{x} - \tau\mathbf{b} & \leq & \mathbf{0} \\ -A^T\mathbf{y} & & + \tau\mathbf{c} & \leq & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & & \leq & 0 \\ & & \multicolumn{3}{r}{\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \tau \geq 0.} \end{array}$$

یک بار دیگر اجرای الگوریتم با شروع بدیهی

تحلیل زمان اجرا

- L: تعداد بیت‌ها
- n: تعداد معادله
- تعداد مرحله: $O(\sqrt{n}L)$مرحله
- کران پایین $O(\sqrt{n}\log n)$ مرحله برای همه الگوریتم‌های نقطه میانی
- در عمل حدود lg n مرحله