

بسم الله الرحمن الرحيم

نظريه علوم کامپيوتر

نظريه علوم کامپيوتر - بهار ۱۴۰۰-۱۴۰۱ - جلسه بيستم: نظريه يادگيری محاسباتی
Theory of computation - 002 - S20 - Computational Learning Theory

جمع‌بندی نظریه محاسبه

جمع‌بندی نظریه محاسبه

- یک زبان A ، محاسبه‌پذیر است اگر
- یک ماشین تورینگ T برای آن باشد که درست تصمیم بگیرد
- یا، با احتمال خوبی درست تصمیم بگیرد

جمع‌بندی نظریه محاسبه

- یک زبان A ، محاسبه‌پذیر است اگر
- یک ماشین تورینگ T برای آن باشد که درست تصمیم بگیرد
- یا، با احتمال خوبی درست تصمیم بگیرد
- پیچیدگی محاسباتی
 - پیچیدگی زمانی
 - پیچیدگی حافظه

جمع‌بندی نظریه محاسبه

- یک زبان A ، محاسبه‌پذیر است اگر
- یک ماشین تورینگ T برای آن باشد که درست تصمیم بگیرد
- یا، با احتمال خوبی درست تصمیم بگیرد
- پیچیدگی محاسباتی
- پیچیدگی زمانی
- پیچیدگی حافظه
- دانشمندان چه می‌کنند؟
- یافتن ماشین تورینگ، یا اثبات اینکه تورینگ ماشین وجود ندارد

محاسبات

محاسبات

- محاسبه پذیری بر اساس ماشین تورینگ
- ماشین تورینگ = منطق ما

محاسبات

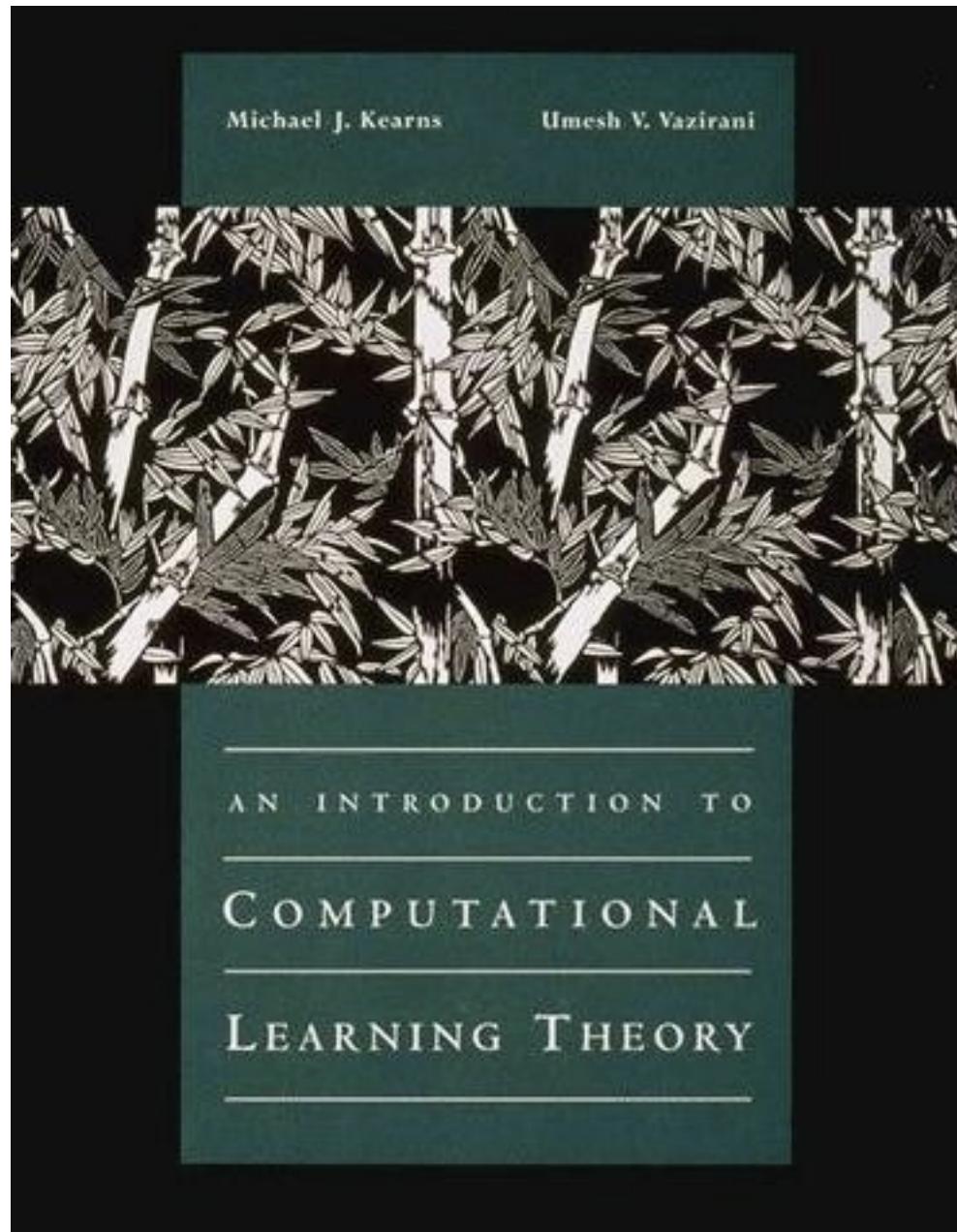
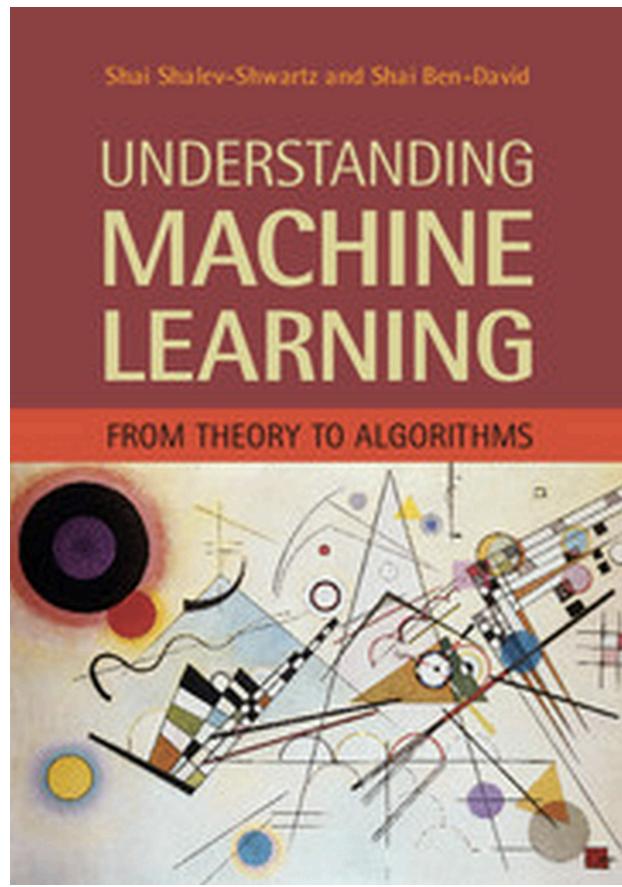
- محاسبه پذیری بر اساس ماشین تورینگ
- ماشین تورینگ = منطق ما
- محاسبه پذیری با محدودیت حافظه و زمان

محاسبات

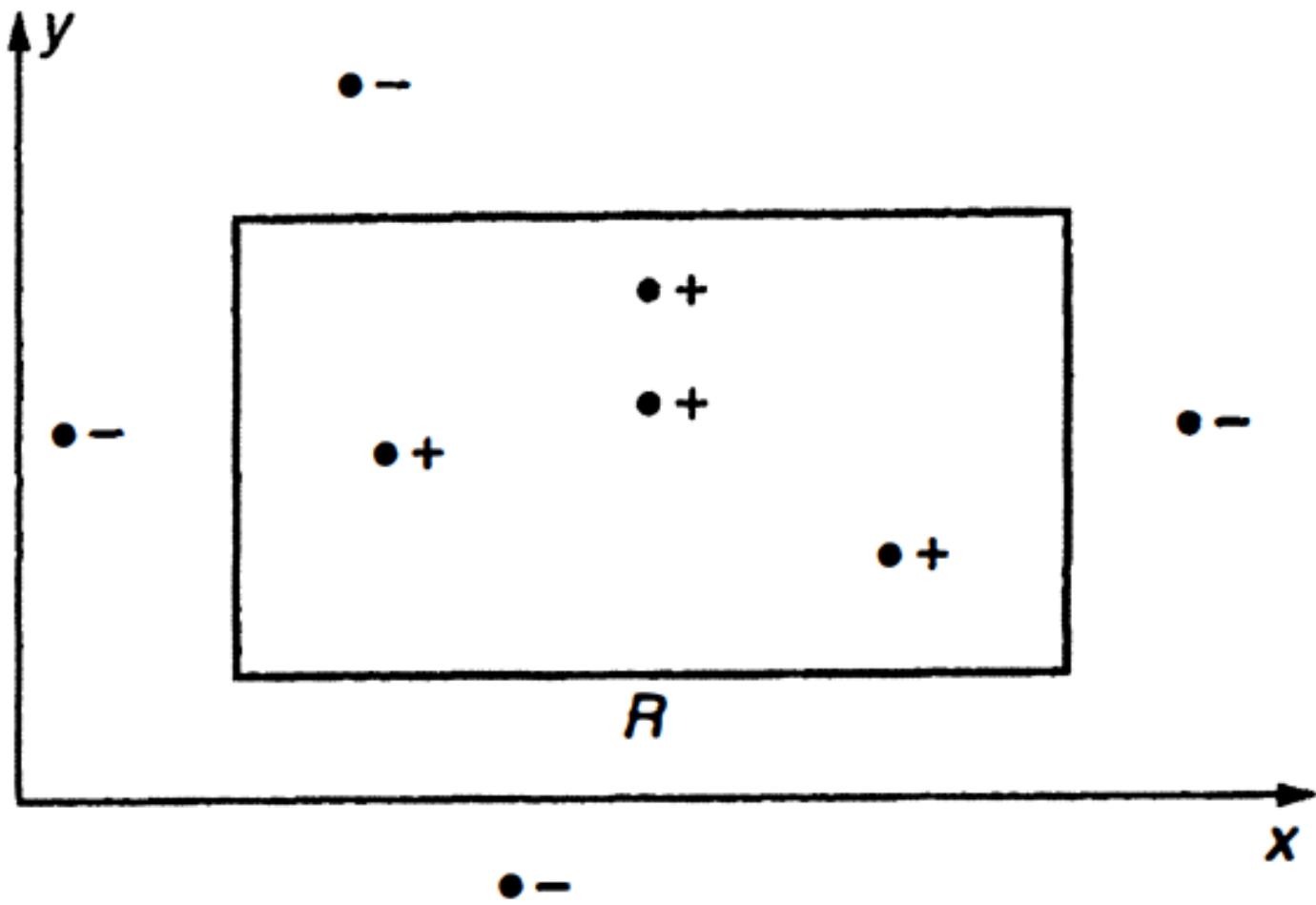
- محاسبه‌پذیری بر اساس ماشین تورینگ
- ماشین تورینگ = منطق ما
- محاسبه‌پذیری با محدودیت حافظه و زمان
- آیا ما کار بیشتری هم از ماشین تورینگ انجام می‌دهیم؟
- فرمالیسم یکی از توانایی‌های ما ماشین تورینگ است،
- آیا توانایی‌های دیگری هم داریم که آن را فرمالیزه کنیم؟

یادگیری ماشین

- دانشمندان چه می‌کنند؟
- یافتن ماشین تورینگ، یا اثبات اینکه تورینگ ماشین وجود ندارد
- آیا الگوریتمی هست که جای همه الگوریتم‌ها کار کند؟
 - فیزیک!
 - کودک



یادگیری پاپایا



- فرض:
- یک توزیع پاپایا
- مستطیل خوشمزه

الگوريتم يادگيري پاپايا

الگوريتم يادگيري پاپايا

- کوچکترین مستطيل شامل همه نقاط مثبت:

الگوريتم يادگيري پاپايا

- کوچکترین مستطيل شامل همه نقاط مثبت:
- خطا = احتمال اينكه بر اساس توزيع D، نقاط را غلط برچسبگذاري کنيم.

الگوريتم يادگيري پاپايا

- کوچکترین مستطيل شامل همه نقاط مثبت:
- خطا = احتمال اينكه بر اساس توزيع D، نقاط را غلط برچسبگذاري کنيم.
- ۱) هر چند نقطه منفی را + نمی داند

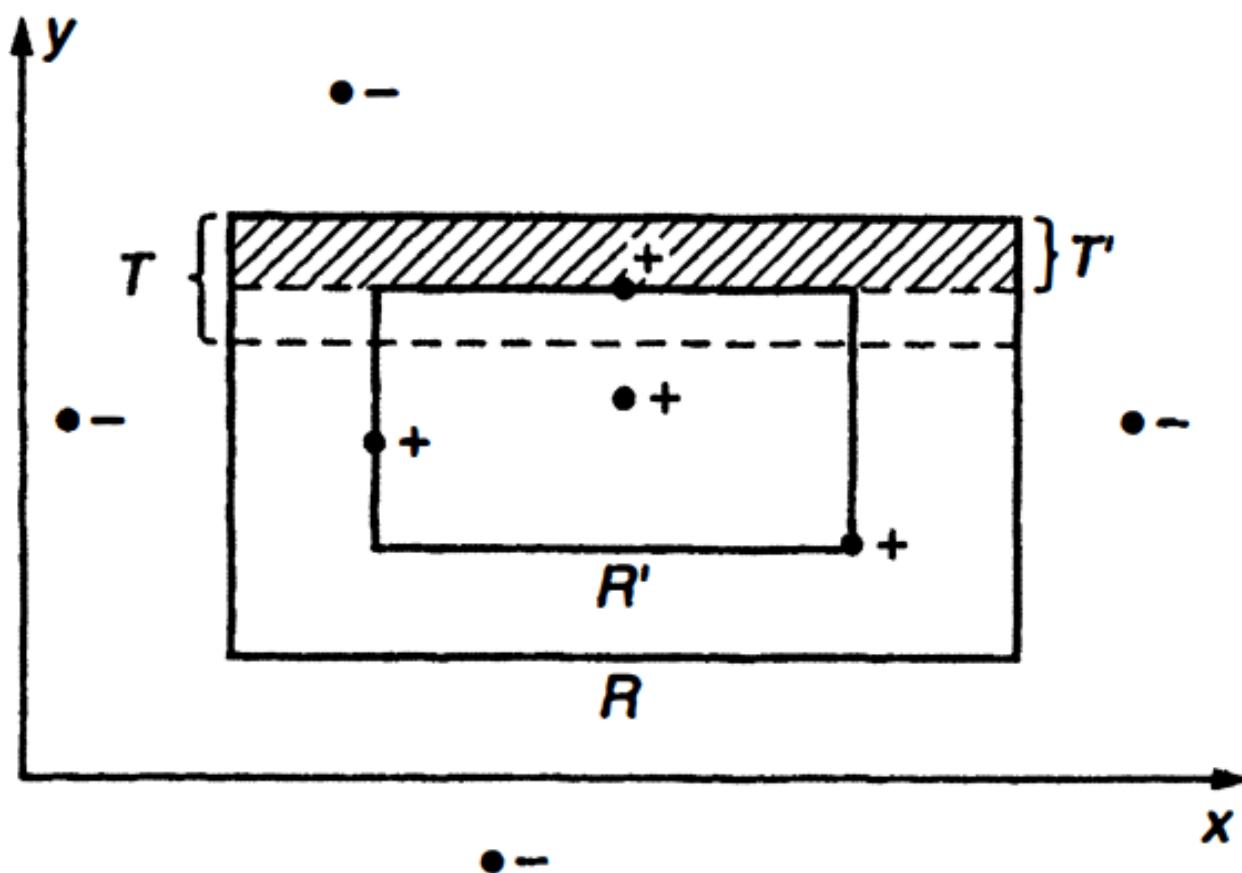
الگوريتم يادگيري پاپايا

- کوچک‌ترین مستطيل شامل همه نقاط مثبت:
- خطا = احتمال اينكه بر اساس توزيع D، نقاط را غلط برچسب‌گذاري کنيم.
 - ۱) هiqj نقطه منفي را + نمي داند
 - ۲) چقدر نقطه مثبت را اشتباه مي‌گويد؟

الگوريتم يادگيري پاپايا

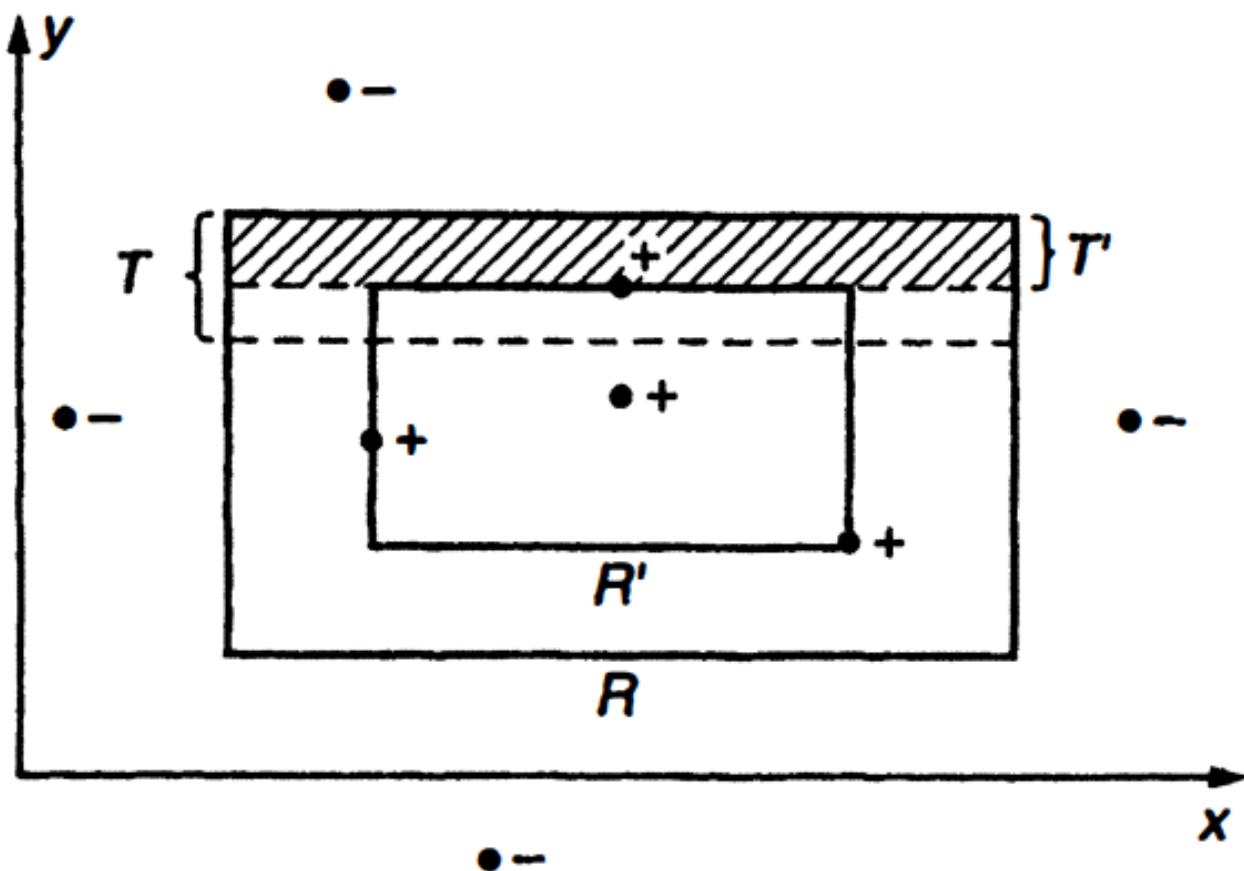
- کوچک‌ترین مستطيل شامل همه نقاط مثبت:
- خطا = احتمال اينكه بر اساس توزيع D، نقاط را غلط برچسب‌گذاري کنيم.
 - ۱) هiqچ نقطه منفی را + نمی‌داند
 - ۲) چقدر نقطه مثبت را اشتباه می‌گويد؟
- بنابر توزيع D، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاريم؟

الگوريتم پادگيري پاپايا



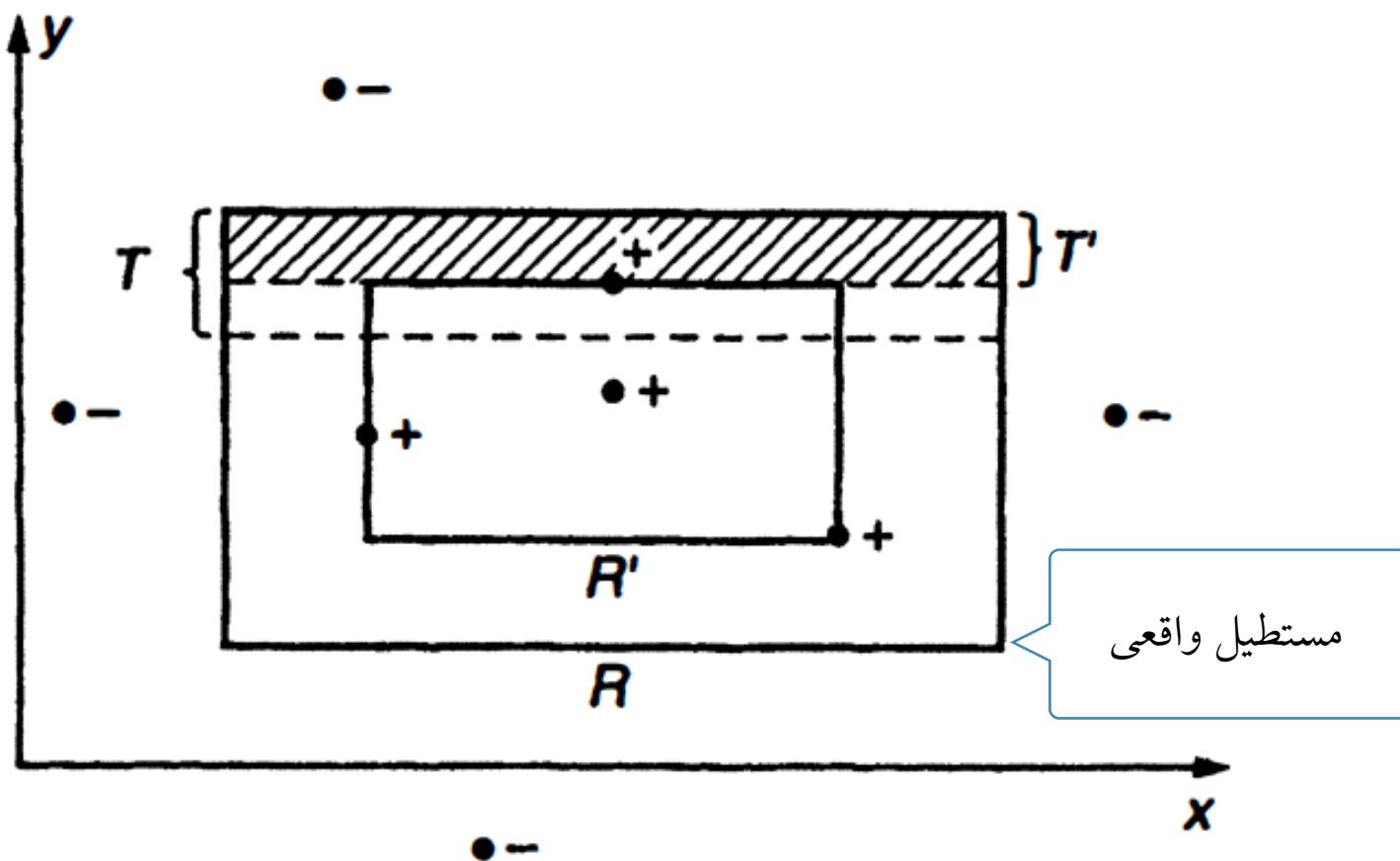
الگوريتم يادگيري پاپايا

- بنابر توزيع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفي برچسب بگذاريم؟



الگوريتم يادگيري پاپايا

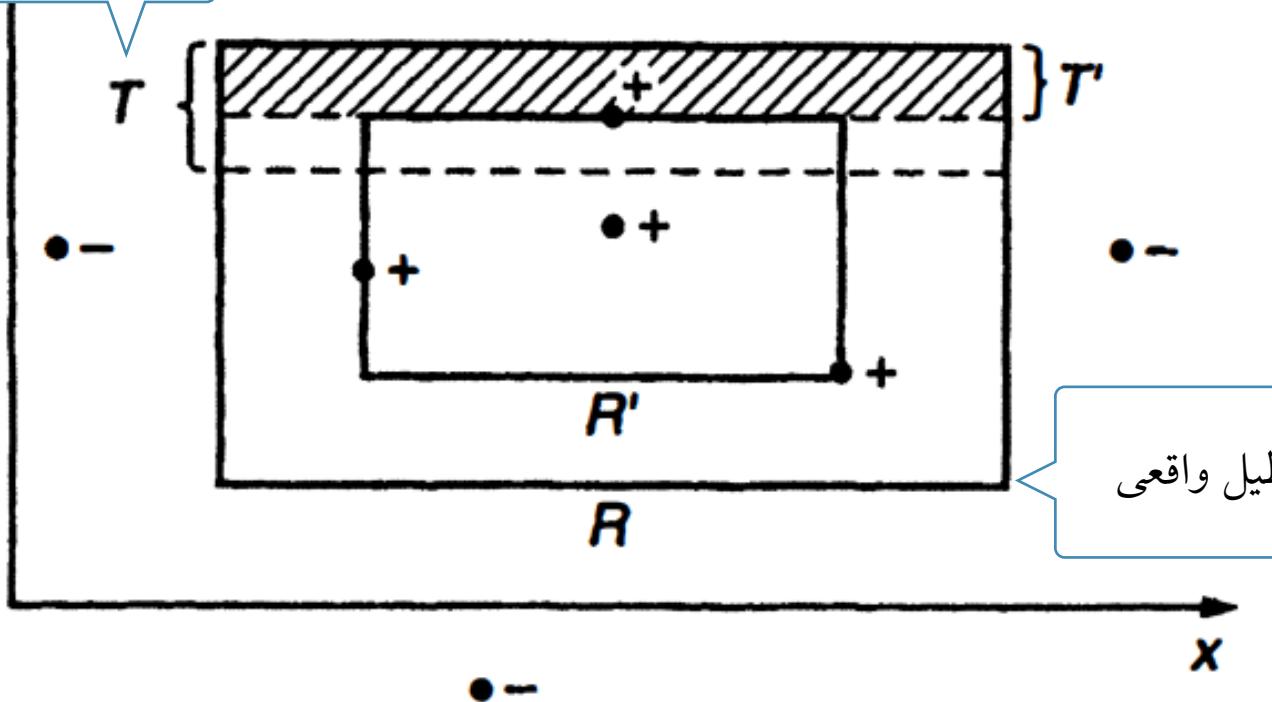
- بنابر توزيع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفي برچسب بگذاريم؟



الگوریتم یادگیری پاپایا

نواری با

مساحت $e/4$

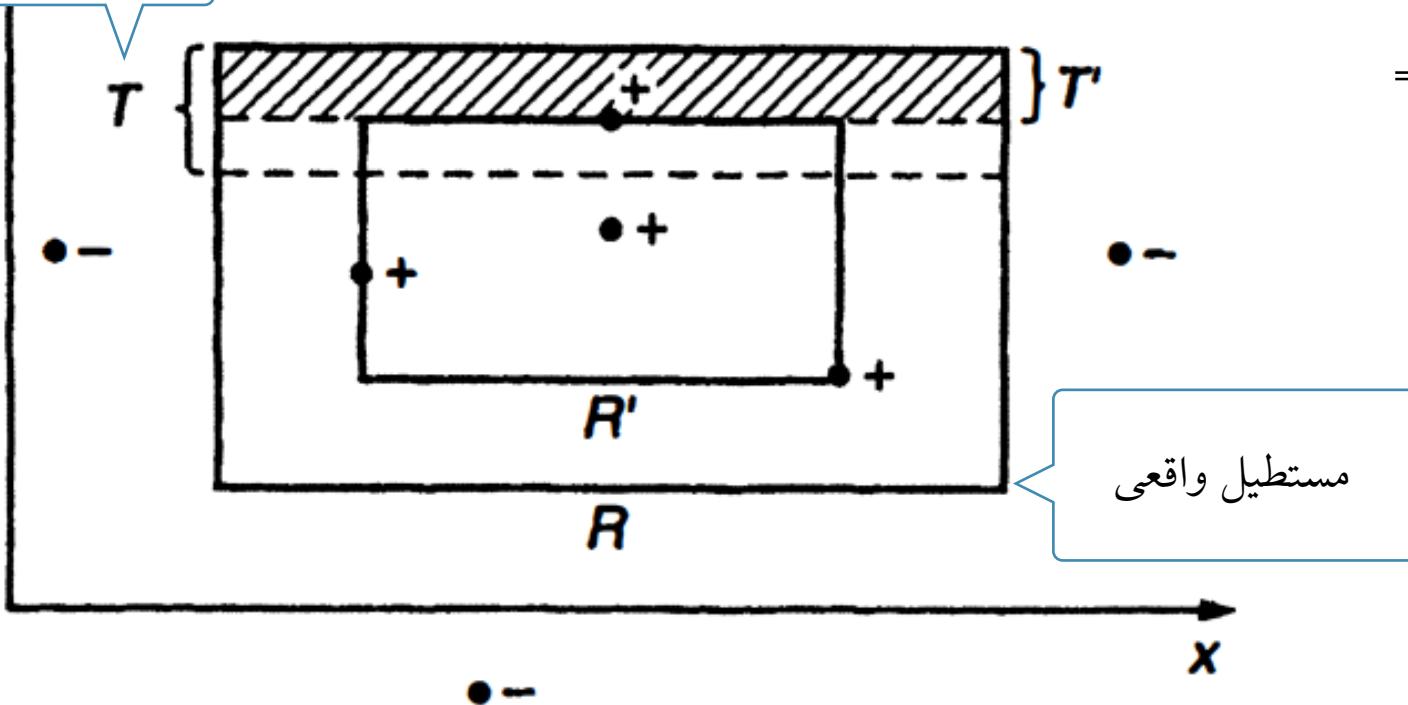


- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟
- = مساحت بین مستطیل‌ها
- ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد

الگوریتم یادگیری پاپایا

نواری با

مساحت $e/4$



- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟

= مساحت بین مستطیل‌ها

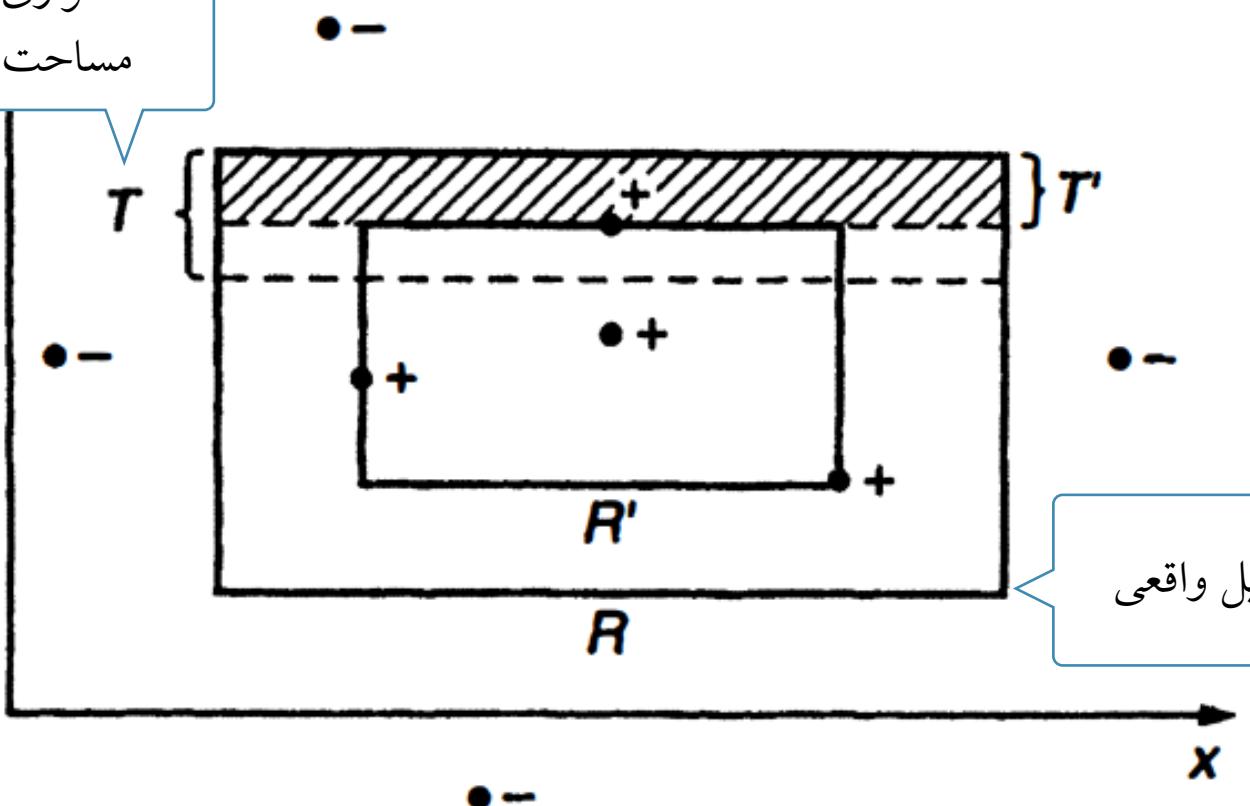
- ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد

= احتمال اینکه یک نقطه در این نوار نیاید =
 $1 - e/4$

الگوریتم یادگیری پاپایا

نواری با

مساحت $e/4$



- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟

= مساحت بین مستطیل‌ها

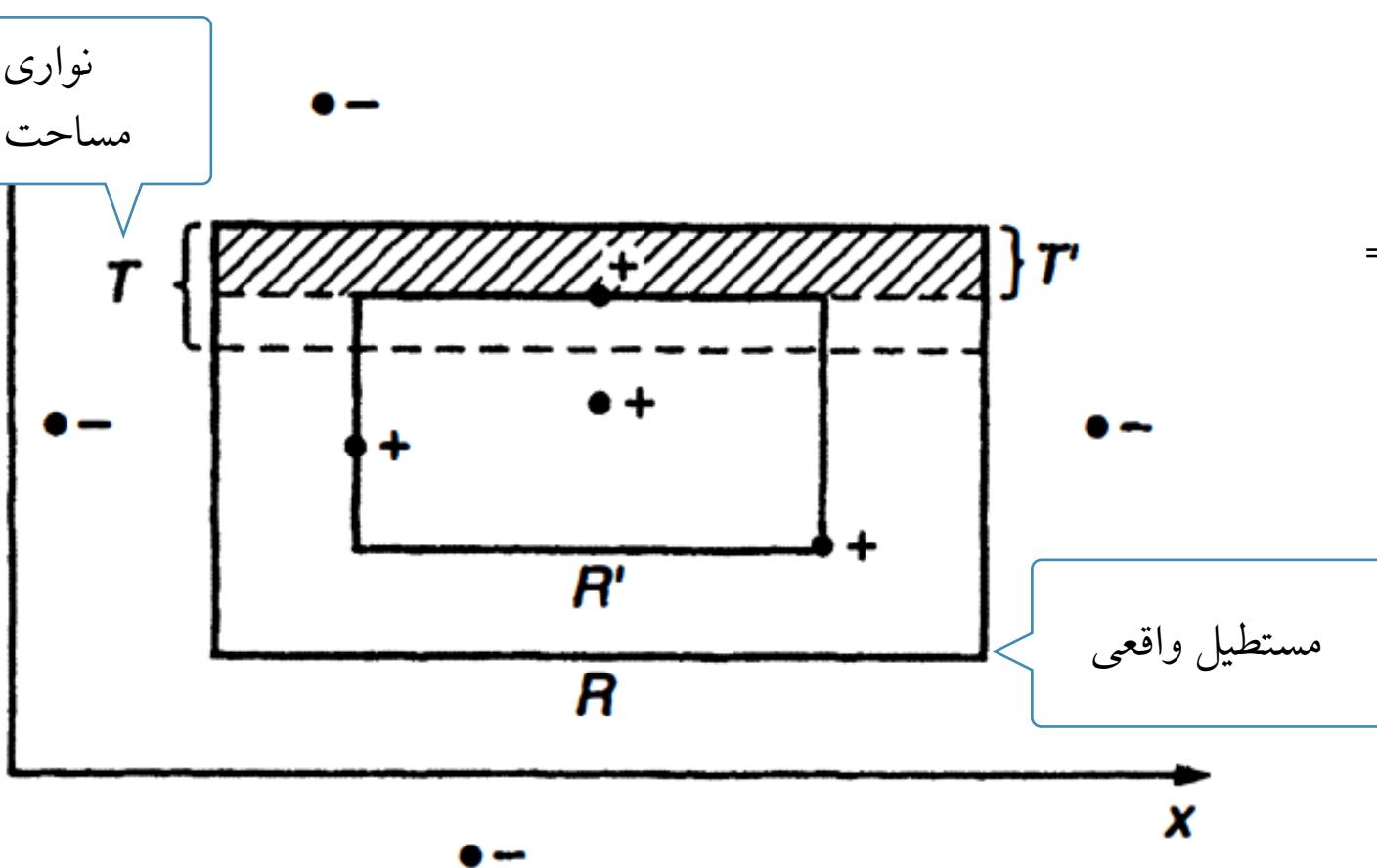
- ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد

• احتمال اینکه یک نقطه در این نوار نیاید =
 $1 - e/4$

• احتمال اینکه هیچ کدام از نقطه‌ها در این مستطیل نباشد $(1 - e/4)^m$

الگوريتم يادگيري پاپا يا

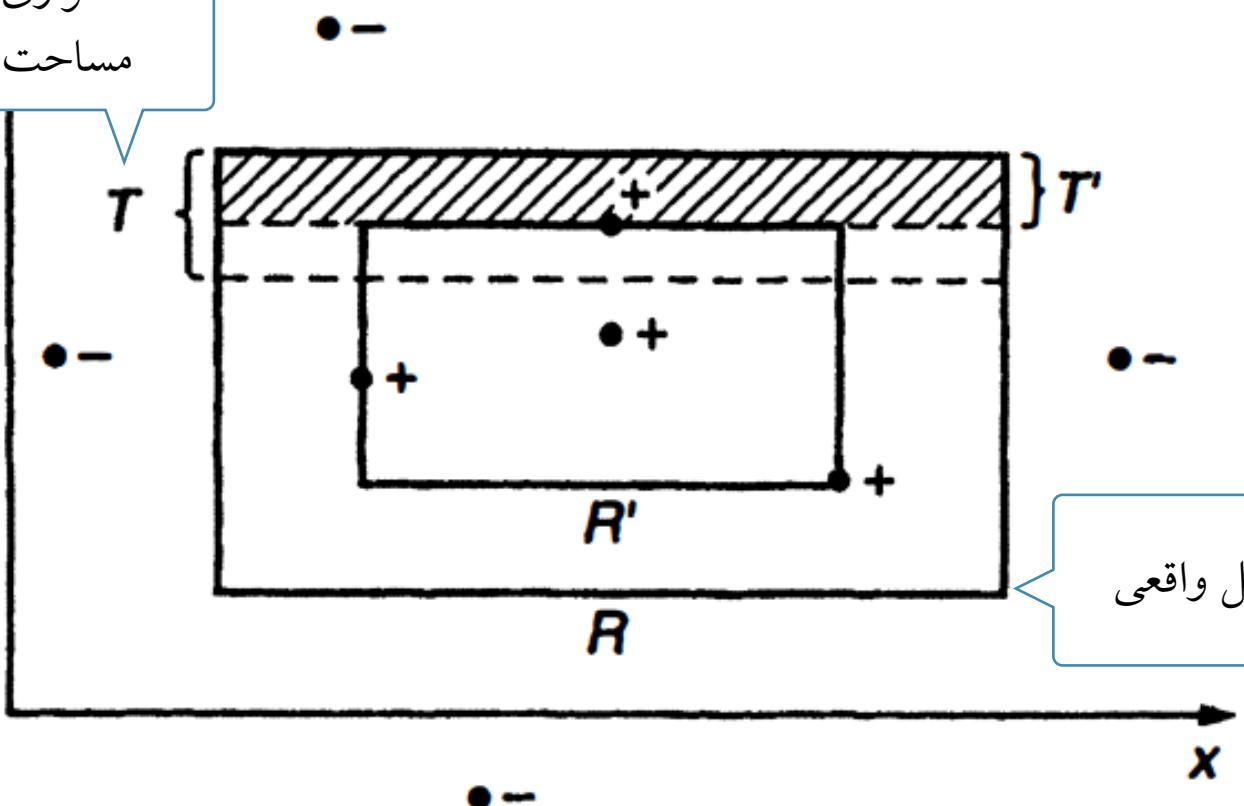
- بنابر توزیع D، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟
 - مساحت بین مستطیل‌ها
 - ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد
 - احتمال اینکه یک نقطه در این نوار نیاید = $1 - e/4$
 - احتمال اینکه هیچ کدام از نقطه‌ها در این مستطیل نباشد $(1 - e/4)^m$
 - احتمال اینکه حداقل از یکی از ۴ طرف مستطیل ما بد باشد $= 4(1 - e/4)^m$



الگوریتم یادگیری پاپایا

نواری با

مساحت $e/4$



مستطیل واقعی

- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟

= مساحت بین مستطیل‌ها

- ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد

احتمال اینکه یک نقطه در این نوار نیاید =
 $1 - e/4$

احتمال اینکه هیچ کدام از نقطه‌ها در این مستطیل نباشد $(1 - e/4)^m$

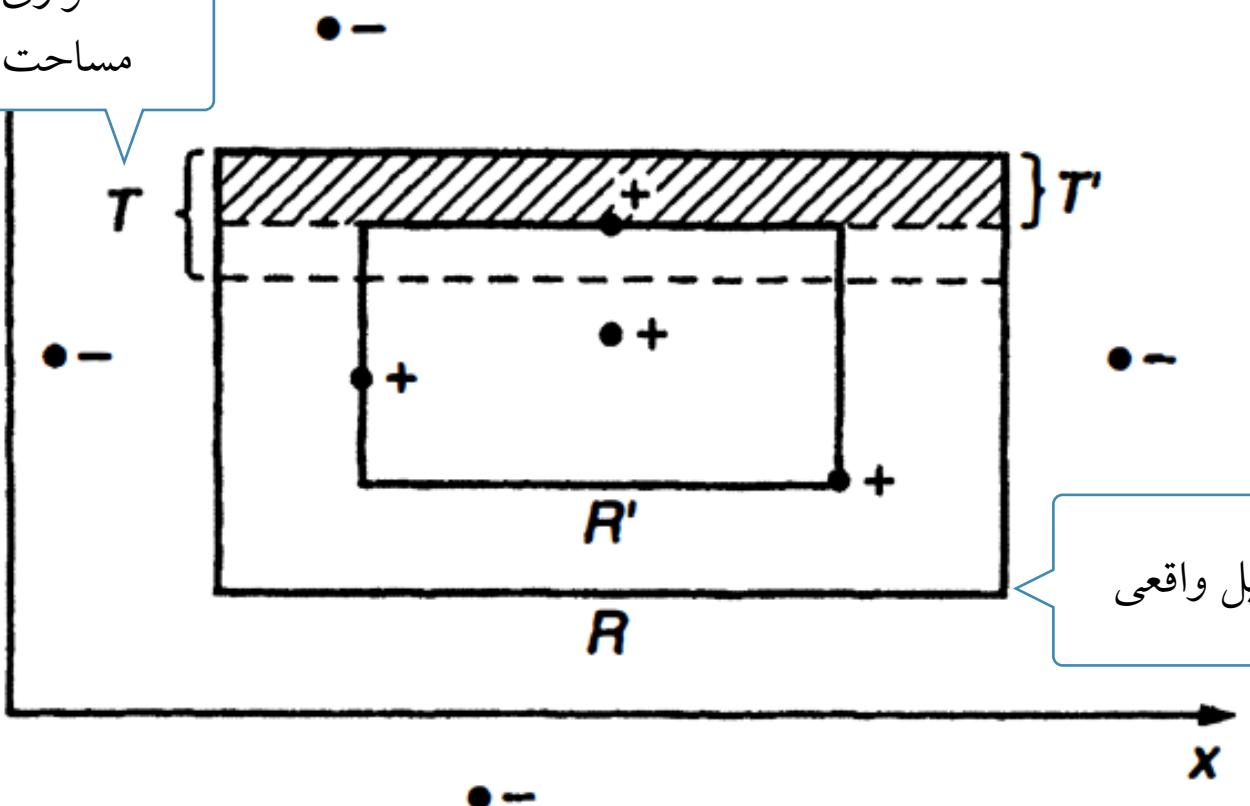
احتمال اینکه حداقل از یکی از ۴ طرف مستطیل ما بد باشد $\geq 4(1 - e/4)^m$

$$4(1 - e/4)^m \leq 4 \exp(-me/4) \leq \delta$$

الگوریتم یادگیری پاپایا

نواری با

مساحت $e/4$



- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟

= مساحت بین مستطیل‌ها

- ادعا: بعید است نقطه‌ای در این نوارها نباشد

احتمال اینکه یک نقطه در این نوار نیاید =
 $1 - e/4$

احتمال اینکه هیچ کدام از نقطه‌ها در این مستطیل نباشد $(1 - e/4)^m$

احتمال اینکه حداقل از یکی از ۴ طرف مستطیل ما بد باشد $\geq 4(1 - e/4)^m$

$$4(1 - e/4)^m \leq 4 \exp(-me/4) \leq \delta$$

اگر $m \geq (4/e)\ln(4/\delta)$

الگوریتم یادگیری پاپایا

- کوچکترین مستطیل شامل همه نقاط مثبت:
- خطا = احتمال اینکه بر اساس توزیع D ، نقاط را غلط برچسب‌گذاری کنیم.
 - ۱) هیچ نقطه منفی را + نمی‌داند
 - ۲) چقدر نقطه مثبت را اشتباه می‌گوید؟
- بنابر توزیع D ، چقدر احتمال دارد نقطه مثبت را منفی برچسب بگذاریم؟
 - قضیه:
- الگوریتم کوچکترین مستطیل، با دریافت $m \geq (4/e)\ln(4/\delta)$ نمونه، مستطیلی تولید می‌کند که با احتمال حداقل $\delta - 1$ خطایش از e کمتر است.

Example: Learning OR of literals

- Inputs: x_1, \dots, x_n
- Literals : x_1, \bar{x}_1
- OR functions: $x_1 \vee \bar{x}_4 \vee x_7$
- For each variable, target disjunction may contain x_i or not, thus
Number of disjunctions is 3^n

ELIM: Algorithm for learning OR

$$\overline{x}_1$$

ELIM: Algorithm for learning OR

- Keep a list of all literals

$$\bar{x}_1$$

ELIM: Algorithm for learning OR

- Keep a list of all literals
- For every example whose classification is 0:
 - Erase all the literals that are 1.

\bar{x}_1

ELIM: Algorithm for learning OR

- Keep a list of all literals
- For every example whose classification is 0:
 - Erase all the literals that are 1.
- Example $c(00110)=0$ results in deleting \bar{x}_1

ELIM: Algorithm for learning OR

- Keep a list of all literals
- For every example whose classification is 0:
 - Erase all the literals that are 1.
- Example $c(00110)=0$ results in deleting \bar{x}_1
- Correctness:
 - Our hypothesis h : An OR of our set of literals.
 - Our set of literals includes the target OR literals.
 - Every time h predicts zero: we are correct.

ELIM: Algorithm for learning OR

- Keep a list of all literals
- For every example whose classification is 0:
 - Erase all the literals that are 1.
- Example $c(00110)=0$ results in deleting \bar{x}_1
- Correctness:
 - Our hypothesis h : An OR of our set of literals.
 - Our set of literals includes the target OR literals.
 - Every time h predicts zero: we are correct.
- Sample size: $m > (1/\varepsilon) \ln (3^n/\delta)$

Learning parity

- Functions: $x_1 \oplus x_7 \oplus x_9$

Learning parity

- Functions: $x_1 \oplus x_7 \oplus x_9$
- Number of functions: 2^n

Learning parity

- Functions: $x_1 \oplus x_7 \oplus x_9$
- Number of functions: 2^n
- Algorithm:
 - Sample set of examples
 - Solve linear equations (Matrix exists)

Learning parity

- Functions: $x_1 \oplus x_7 \oplus x_9$
- Number of functions: 2^n
- Algorithm:
 - Sample set of examples
 - Solve linear equations (Matrix exists)
- Sample size: $m > (1/\varepsilon) \ln (2^n/\delta)$

PAC Learning: Definition

- C is concept classes over X .
- C is PAC learnable if
- There Exist an Algorithm L such that:
 - For any distribution D over X and c_t in C
 - for every input ϵ and δ :
 - outputs a hypothesis h in H ,
 - while having access to $EX(c_t, D)$
 - with probability $1-\delta$ we have $\text{error}(h) < \epsilon$
 - $\text{error}(h) = \Pr_{x \in D} [h(x) \neq c_t(x)]$

(The PAC Model, Preliminary Definition)

- قضیه: مجموعه مستطیل‌ها، PAC-یادگیری‌پذیری است

Efficient PAC Learning: Definition

- C is concept classes over X .
- C is PAC learnable if
- There Exist an Algorithm L such that:
 - For any distribution D over X and c_t in C
 - for every input ϵ and δ :
 - outputs a hypothesis h in H ,
 - while having access to $EX(c_t, D)$
 - with probability $1-\delta$ we have $\text{error}(h) < \epsilon$
 - L is polynomial time
 - $\text{error}(h) = \Pr_{x \in D} [h(x) \neq c_t(x)]$

یادگیری عبارت‌های DNF سه جمله‌ای

- عبارت DNF سه جمله‌ای: $T_1 \vee T_2 \vee T_3$ که هر کدام از T ‌ها به صورت «و»ی چند متغیر یا نقیض متغیر هستند.
- قضیه: اگر $\text{NP} \leftrightarrow \text{RP}$ آنگاه عبارت‌های DNF سه جمله‌ای PAC-یادگیری پذیر کارا نیستند.

PAC - یادگیری پذیری

- کدام C ‌ها یادگیری پذیرند؟
- الگوریتم یادگیری برای هر C چیست؟
- مثلا: C =مستطیل‌ها، C =«و» منطقی، C =عبارت‌های منطقی

Agnostic PAC Learning: Definition

- C and H are concept classes over X .
- C is PAC learnable by H if
- There Exist an Algorithm A such that:
 - For any distribution D over X and c_t in C
 - for every input ϵ and δ :
 - outputs a hypothesis h in H ,
 - while having access to $EX(c_t, D)$
 - with probability $1-\delta$ we have $\text{error}(h) < \epsilon$
- Complexities.

الگوریتم یادگیری PAC

- الگوریتم کمینه خطای نمونه:
- روی m نمونه، فرضیه‌ای که خطا را روی این نمونه‌ها کم می‌کند انتخاب کن!

الگوریتم یادگیری PAC

- الگوریتم کمینه خطای نمونه:
- روی m نمونه، فرضیه‌ای که خطأ را روی این نمونه‌ها کم می‌کند انتخاب کن!
- قضیه: اگر H یادگیری‌پذیر PAC باشد، الگوریتم کمینه خطای نمونه یاد می‌گیرد.

الگوریتم یادگیری PAC

- الگوریتم کمینه خطای نمونه:
- روی m نمونه، فرضیه‌ای که خطای را روی این نمونه‌ها کم می‌کند انتخاب کن!
- قضیه: اگر H یادگیری‌پذیر PAC باشد، الگوریتم کمینه خطای نمونه یاد می‌گیرد.
- قضیه: H یادگیری‌پذیر PAC است اگر و تنها اگر بعد VC آن متناهی باشد.

الگوریتم یادگیری PAC

- الگوریتم کمینه خطای نمونه:
- روی m نمونه، فرضیه‌ای که خطأ را روی این نمونه‌ها کم می‌کند انتخاب کن!
- قضیه: اگر H یادگیری‌پذیر PAC باشد، الگوریتم کمینه خطای نمونه یاد می‌گیرد.
- قضیه: H یادگیری‌پذیر PAC است اگر و تنها اگر بعد VC آن متناهی باشد.
- مثلا: بدون پیش‌فرض نمی‌توان یاد گرفت.

الگوریتم یادگیری PAC

- الگوریتم کمینه خطای نمونه:
- روی m نمونه، فرضیه‌ای که خطأ را روی این نمونه‌ها کم می‌کند انتخاب کن!
- قضیه: اگر H یادگیری‌پذیر PAC باشد، الگوریتم کمینه خطای نمونه یاد می‌گیرد.
- قضیه: H یادگیری‌پذیر PAC است اگر و تنها اگر بعد VC آن متناهی باشد.
- مثلا: بدون پیش‌فرض نمی‌توان یاد گرفت.
- اگر نتوان یاد گرفت، باید حفظ کرد!

یادگیری کمی ضعیفتر

یادگیری کمی ضعیفتر

- قضیه: H یادگیری پذیر PAC (ضعیف) است اگر بتوان آن را به شمارا مجموعه با بعد VC متناهی افزایش داد.

یادگیری کمی ضعیفتر

- قضیه: H یادگیری پذیر PAC (ضعیف) است اگر بتوان آن را به شمارا مجموعه با بعد VC متناهی افزایش کرد.
- الگوریتم: h با کمترین خطای روی نمونه، با تمایل به h های ساده تر
- تیغ اوکام

تکامل پذیری

"This is science at its best." —*New York Times*

PROBABLY
APPROXIMATELY
CORRECT

Nature's Algorithms for Learning and
Prospering in a Complex World



LESLIE VALIANT

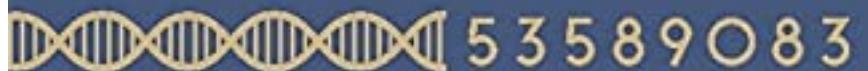
تکامل پذیری

- آیا تکامل امکان‌پذیر است؟
- مشکلات فلسفی؟!
- مشکلات محاسباتی
- مشکلات یادگیری
- مشکلات یادگیری تکاملی

"This is science at its best." —*New York Times*

PROBABLY
APPROXIMATELY
CORRECT

Nature's Algorithms for Learning and
Prospering in a Complex World



LESLIE VALIANT

یادگیری برخط

- تصمیم برای آینده نامعلوم ...
- هر مرحله،
- تصمیم بگیریم
- نتیجه تصمیم را بدانیم
- در نهایت: سود تصمیم‌هایمان را با سود تعدادی رقیب مقایسه کنیم.

یادگیری برخط

- مثال: یک سهام
- هر روز صبح،
- تصمیم بگیریم بخریم یا بفروشیم
- شب، متوجه می‌شویم سود داده بود یا خیر
- در نهایت: سود تصمیم‌هایمان را با سود تعدادی رقیب مقایسه می‌کنیم.
- یادگیری تدریجی
- چه کنیم؟

• و این داستان ادامه دارد ...