بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین‌های زیرمجموعه‌ها و ضرایب دوجمله‌ای – درس ریاضیات گسسته نیمسال دوم ۹۲-۹۳ – دانشگاه شریف

مهلت تحویل : سه شنبه ، ۶ اسفند ، ۱۵:۳۰

تمرین ها:

2 For which value(s) of k is $\binom{n}{k}$ a maximum, when n is a given positive integer? Prove your answer.

3. Prove the following identities:

(a) $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

۶.۴.۴ ضریب $x^{۵}$ را در بسط $(۱ + x + x^{۲})^{۸}$ بیابید.

۱۰.۳.۴ ضریب x^k را در هر یک از بسطهای $\left(x + \frac{۱}{x}\right)^{۱۰۰}$ و $\left(x^{۲} - \frac{۱}{x}\right)^{۱۰۰}$ بیابید.

***۱۷.۳.۴** الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} \frac{۱}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱}(۲^{n+۱} - ۱)$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^r}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱}$$

تمرین های مفید (عیر تحویلی):

5. Let k be a given positive integer. Show that any non-negative integer N can be written uniquely in the form

$$N = \binom{x_k}{k} + \binom{x_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{x_1}{1},$$

where $0 \le x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k$. [HINT: Let x be such that $\binom{x}{k} \le N < \binom{x+1}{k}$. Then any possible representation has $x_1 = x$. Now use induction and the fact that $N - \binom{x}{k} < \binom{x}{k-1}$ (Fact 3.2.5) to show the existence and uniqueness of the representation.]

6. Use the fact that $(1+t)^p \equiv 1+t^p \pmod p$ to prove by induction that $n^p \equiv n \pmod p$ for all positive integers n.

68 Find a closed form for

$$\sum_k \binom{n}{k} \min(k, n-k), \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

67 Find a closed form for

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2} \binom{2n-k}{n}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

100 Find a recurrence relation for the sum

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}},$$

and use the recurrence to find another formula for S_n.

*۴۰.۱.۴ تابع $f : X \to X$ را خودتوان می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x \in X$، $f(f(x)) = f(x)$. اگر $|X| = n$، ثابت کنید تعداد توابع خودتوان مانند $f : X \to X$ برابر است با

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$$

*۴۵.۱.۴ در هر خانه از یک جدول که 2^k سطر و n ستون دارد، $n > 1$، یکی از اعداد ۰ و ۱ نوشته شده است، به‌طوری که تعداد ۱های هر سطر بیشتر از یا مساوی با تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید می‌توان k ستون (یا کمتر) از n ستون جدول انتخاب و خانه‌های آن ستونها را رنگ کرد، به گونه‌ای که حداقل یکی از ۱های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱).

مسئلهٔ ۶.۳.۴ فرض کنید $۰ \leq k \leq n$. ثابت کنید

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k} ۲^{n-k}$$

۱۲.۳.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $\sum_{r=۰}^{n} \binom{۲n+۱}{r} = ۲^{۲n}$

ب) $\sum_{r=۰}^{n} \binom{۲n}{r} = ۲^{۲n-۱} + \frac{۱}{۲}\binom{۲n}{n}$

۸.۴.۴ ضریب $x^{۱۸}$ را در بسط $(۱ + x^{۳} + x^{۵} + x^{۷})^{۱۰۰}$ بیابید.

۱۰.۴.۴ ضریب $x^{۳}y^{۲}zw^{۲}$ را در بسط $(x - y + ۲z - ۲w)^{۹}$ بیابید.

تمرین های امتیازی:

24. Project. A couple of harder binomial identities. Prove:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m}{2n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^3 = \begin{cases} (-1)^m (3m)!/(m!)^3 & \text{if } n = 2m; \\ 0 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$