۱ فصل ۲

در فصل قبل نشان دادیم که ماتریس لاپلاسین نرمال‌شده (L) دارای n مقدار ویژه‌ی $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ است که $\lambda_1 = 0$ است و $\lambda_2 = 0$ است اگر و تنها اگر گراف ناهمبند باشد. از طرف دیگر ناهمبند بودن باعث صفر شدن گسترش یالی گراف منتظم می‌شود، چون

$$\Phi(G) = \min_{\substack{s\subset V\\ S\neq\emptyset\\ |S|\leq\frac{|V|}{2}}} \frac{|E(S,V-S)|}{|S|\,|V-S|\,d/|V|}$$

قضیه ۱ (نامساوی چریگر (Chreeger)).

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \Phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

اثبات. اثبات طرف اول یعنی $\frac{\lambda_2}{2} \leq \Phi(G)$
برای این کار ثابت می‌کنیم

$$\lambda_2 \leq \sigma(G) \leq 2\Phi(G)$$

طبق قضیه‌ای که در فصل قبل داشتیم، مقدار ویژه‌ی k–ام یک ماتریس حقیقی متقارن M از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_k = \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\perp x_1,\cdots,x_{k-1}\\ x\neq 0}} \frac{x^TMx}{x^Tx}$$

در رابطه‌ی بالا، بردار $(0,\cdots,0) = 0$ است. در فصل قبل، نامساوی سمت راست یعنی $\sigma(G) \leq 2\Phi(G)$ را ثابت کردیم، پس کافی است که سمت چپ آن را ثابت کنیم. این رابطه را برای دومین مقدار ویژه‌ی ماتریس L می‌نویسیم:

$$\lambda_2 = \min_{\substack{x\neq 0\\ x\perp 1\\ x\in\mathbb{R}^n}} \frac{x^TLx}{x^Tx} = \min \frac{\sum_{(u,v)\in E}(x_u-x_v)^2}{d\sum_{v\in V} x_v^2}$$

در رابطه‌ی بالا بردار $(1,\cdots,1) = 1$ است.
عبارت $\sigma(G)$ را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم. فرض کنید که $x \in \{0,1\}^n$ بردار متناظر برش S باشد، به این صورت که اگر یک رأس مقدار x_v صفر داشته باشد عضو S نیست و در غیر این صورت عضو S است. در نتیجه تعداد یالهای بین S و $V-S$ تعداد زوج‌های مرتب (u,v) از یالها هستند که $x_u \neq x_v$ است، چون یکی از آنها صفر (عضو $V-S$) و دیگری یک (عضو S) است. مقدار $|S|\,|V-S|$ حداکثر تعداد یالهای ممکن برش را نشان می‌دهد، پس می‌توانیم آن را به صورت همه‌ی زوج‌های $\{u,v\}$ بنویسیم که $x_u \neq x_v$ است. مقدار $|x_u - x_v|$ صفر یا یک است، چون مقادیر x_u, x_v صفر و یک هستند، پس توان ۲ آن هم با خودش برابر است.
چون برش S در تعریف گسترش یالی $(\sigma(G))$ باید شرایط $S \neq \emptyset$ و $S \neq V$ را داشته باشد، در نتیجه بردار x هم باید شرایط $x \neq 0$ و $x \neq 1$ را داشته باشد.

$$\sigma(G) = \min_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x\neq 0\\ x\neq 1}} \frac{\sum_{(u,v)\in E}|x_v-x_u|^2}{d/n\sum_{\{u,v\}}|x_u-x_v|^2}$$

در عبارت بالا، جمعی که در مخرج کسر هست را باز می‌کنیم تا به صورت ساده‌تری بنویسیم:

$$\sum_{\{u,v\}}(x_u-x_v)^2 = \sum_{u,v}(x_v^2+x_u^2) - 2\sum_{u,v}x_vx_u$$

در تعریف λ_2، چون $x\perp 1$ پس ضرب داخلی آنها صفر است یعنی $\sum_{v\in V} x^v = 0$؛ همچنین مقادیر x_v در این عبارت صفر و یک هستند پس $\sum_{v\in V} x_v^2 = 1$.
در نتیجه مخرج کسرهای λ_2 و $\sigma(G)$ برابر با $d\sum_{x\in V} x_v^2$ می‌شود. با توجه به اینکه صورت این کسرها هم برابر است، کسرها برابر هستند. تنها تفاوت λ_2 و $\sigma(G)$ در فضایی است که روی آن کمینه گرفته می‌شود. شرط $x \neq 1$ در هر دو مشترک است، چون در غیر این صورت مخرج کسر صفر می‌شود. شرط عمود بودن بر $(1,\cdots,1)$، که معادل این است که مجموع عناصر x صفر شود نیز مقدار کمینه را تغییر نمی‌دهد، چون می‌توان به تمام اعضای x یک مقدار ثابت اضافه یا کم کرد و مقدار کسر تغییر نمی‌کند. (به طور معادل می‌توان هر حالت دیگری را با اضافه کردن قرینه‌ی میانگین عناصر x فعلی به حالتی رساند که مجموع درایه‌های آن صفر شود.)
اثبات طرف دوم یعنی $\Phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$
چون بردار ویژه‌ی متناظر λ_2 شرط خاصی مثل داشتن درایه‌های ۰ و ۱ را ندارد، باید بردار x داده‌شده‌ای را در نظر بگیریم. رابطه‌ی بین $\Phi(G)$ و λ_2 را با به دست آوردن یک برش از روی x پیدا می‌کنیم.

الگوریتم ۱ الگوریتم افراز طیفی

۱: رأس‌ها را بر حسب مقدار درایه‌ی x متناظر آن مرتب می‌کنیم، یعنی اگر $x_{v_1} \leq x_{v_2} \leq \cdots \leq x_{v_n}$ آنگاه ترتیب رأسها $v_1, \cdots, v_n$ است.
۲: به ازای $1 \leq i \leq n-1$، مقدار $\Phi_i = \max_i(\Phi(v_1, \cdots, v_i), \Phi(v_{i+1}, \cdots, v_n))$ را محاسبه می‌کنیم.
۳: کمینه‌ی Φ_iها (t) را حساب می‌کنیم:

$$t = \min_{1 \leq i \leq n-1} \Phi_i$$

۴: مجموعه‌ی S را مجموعه‌ی کم‌عضوتر از بین $\{v_1, \cdots, v_t\}$ و $\{v_{t+1}, \cdots, v_n\}$ گزارش می‌کنیم.

در خط دوم الگوریتم افراز طیفی، بیشینه‌ی Φ در قسمتی رخ می‌دهد که تعداد رأس کمتری دارد، چون صورت کسر گسترش که تعداد یالها است ثابت می‌ماند اما مخرج آن که جمع درجه‌ی رأسهای آن مجموعه است کاهش پیدا می‌کند. پس همان شرط قسمت کوچکتر برش که در تعریف Φ آمده است، یعنی $S, |S| \leq \frac{|V|}{2}$ برقرار است.

در رابطه‌ی لم ؟؟، اگر به x مقدار بردار ویژه‌ی دوم (متناظر λ_2) را بدهیم، آنگاه مقدار $R(x) = \lambda_2$ می‌شود، پس

$$\Phi(S) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

□

پس یک الگوریتم چندجمله‌ای داریم که به ازای هر σ یک S پیدا می‌کند که

$$\sigma(S) \leq \sqrt{2\lambda_2} \leq \sqrt{2(2\Phi(G))} \leq 2\sqrt{2\Phi(G)}$$

زمان الگوریتم افراز طیفی، برابر است با $O(|V|\log|V| + |E|)$، چون مرتب‌سازی رأسها بر اساس مقدار x اختصاص داده شده به آنها (دستور اول الگوریتم) زمان $O(|V|\log|V|)$ را لازم دارد و به روز رسانی مقادیر Φ متناسب با جمع درجه‌ی رأسها زمان می‌برد، چون ترتیب ثابت است و هر رأس یک بار از سمت قسمت شامل v_1 به قسمت شامل v_n می‌رود. جمع درجه‌ی رأسها برابر است با $2|E|$ پس زمان الگوریتم $O(|V|\log|V| + 2|E|)$ است.

لم ۲. فرض کنید گراف G، d-منتظم باشد و $x \in \mathbb{R}^n, x \perp 1$ داده شده باشد، ضریب رایلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) = \frac{\sum_{\{u,v\} \in E}(x_v - x_u)^2}{d\sum_{v \in V} x_v^2}$$

اگر S خروجی الگوریتم افراز طیفی گراف باشد، آنگاه

$$\Phi(S) \leq \sqrt{2R(x)}$$

اثبات. با روش احتمالاتی ثابت می‌کنیم که بردار x وجود دارد که برش S به دست آمده از الگوریتم افراز طیفی، شرط حکم را داشته باشد. ثابت می‌کنیم توزیع D روی پیشوندهای دنباله‌ی $1, 2, \cdots, n$ وجود دارد که برای هر پیشوند $1, 2, \cdots, i$ از این دنباله $(i \leq n)$، برش متناظر آن در شرط زیر صدق کند:

$$\frac{\mathbb{E}_{S \sim D} E(S, V-S)}{d\ \mathbb{E}_{S \sim D} \min\{|S|, |V-S|\}} \leq \sqrt{2R(x)}$$

ابتدا یک نرمال‌سازی انجام می‌دهیم. اگر همه‌ی درایه‌های x را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، نسبت رایلی تغییر نمی‌کند. پس می‌توانیم فرض کنیم $x_1^2 + x_n^2 = 1$. همچنین اگر به همه‌ی درایه‌های x یک مقدار ثابت اضافه یا کم کنیم، نسبت رایلی تغییر نمی‌کند، چون $x \perp 1$ است (جمع درایه‌های x صفر می‌شود). پس می‌توانیم فرض که $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$ است.

توزیع D را به این صورت می‌سازیم که عدد t را به صورت تصادفی با تابع توزیع احتمال $f(t) = 2|t|$ در بازه‌ی $[x_1, x_n]$ تولید می‌کند و بزرگترین $1 \leq i \leq n$ که $i \leq t$ است را پیدا می‌کند و $\{1, \cdots, i\}$ را به عنوان پیشوند اعلام می‌کند.

$$pr(a \leq t \leq b) = \int_1^b 2|t|dt = \begin{cases} |b^2 - a^2| & ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 & ab \leq 0 \end{cases}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع فوق یک تابع چگالی احتمال است. نامنفی بودن احتمال‌ها که طبق تعریف تابع $f(.)$ مشخص است. نشان می‌دهیم جمع احتمالها برابر ۱ است. چون $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$ پس x_1 و x_n مختلف العلامت هستند و $\int_{x_1}^{x_n} f(t)dt = x_1^2 + x_n^2$ است که طبق نرمال‌سازی که انجام دادیم برابر ۱ است.

مخرج کسر $\frac{\mathbb{E}_{S \sim D} E(S, V-S)}{\mathbb{E}_{S \sim D} \min\{|S|, |V-S|\}}$ را حساب می‌کنیم. طبق تعریف باید اندازه‌ی برش کمتر بین S و $V - S$ را در نظر بگیریم. اگر S برش کمتر باشد، آنگاه $t \leq x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ است و در غیر این صورت $t \geq x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ است. چون $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$ است پس در حالت اول $x_1 \leq t \leq 0$ و در حالت دوم $0 \leq t \leq x_n$ است. احتمال اینکه پیشوند $\{1, \cdots, i\}$ انتخاب شود، برابر است با:

$$pr(x_i \leq t \leq 0) = x_i^2$$

$$pr(t \geq x_i) = 1 - (x_1^2 + x_n^2 - pr(0 \leq t \leq x_i)) = pr(0 \leq t \leq x_i) = x_i^2$$

امید ریاضی را با رابطه‌ی $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} pr(X \geq i)$ حساب می‌کنیم. پس امید ریاضی $\min\{|S|, |V - S|\}$ برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} x_i^2 + \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

حالا صورت کسر را حساب می‌کنیم. صورت کسر متوسط تعداد یالهای بین رأسهای S و $V - S$ هستند. برای اینکه یکی از دو رأس در S و دیگری در $V - S$ باشد باید t (محل برش) بین آنها باشد. بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض کنید $x_u \geq x_v$ باشد.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{S\sim D} E(S, V-S) &= \sum_{\{v,u\}\in E} pr(x_v \leq t \leq x_u) \\
&= \sum_{\{v,u\}\in E} \begin{cases} x_v^2 + x_u^2 & x_u x_v \leq 0 \\ |x_u^2 - x_v^2| & x_u x_v \geq 0 \end{cases} \\
&\leq \sum_{\{v,u\}\in E} \begin{cases} (x_v - x_u)^2 & x_u x_v \leq 0 \\ |x_v - x_u|(|x_v| + |x_v|) & x_u x_v \geq 0 \end{cases} \\
&\leq \sum_{\{v,u\}\in E} |x_u - x_v|(|x_v| + |x_u|) \\
&\leq \sqrt{\sum_{\{v,u\}\in E} (x_v - x_u)^2} \sqrt{\sum_{\{v,u\}\in E} (|x_v| + |x_u|)^2} \quad \text{طبق نامساوی کوشی شوارتز} \\
&\leq \sqrt{\sum_{\{v,u\}\in E} (x_v - x_u)^2} \sqrt{2d \sum_{v\in V} x_v^2}
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مقدارها، کسر به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\mathbb{E}_{S\sim D} E(S, V-S)}{d\, \mathbb{E}_{S\sim D} \min\{|S|, |V-S|\}} \leq \frac{\sqrt{\sum_{\{v,u\}\in E} (x_v - x_u)^2} \sqrt{2d \sum_{v\in V} x_v^2}}{d \sum_{v\in V} x_v^2} = \sqrt{2R(x)}$$

$\square$