دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

برنامه‌ریزی صحیح مجموعه پوشش راسی کمینه و مجموعه مستقل راسی بیشینه و تعریف جواب شدنی پایه‌ای

جلسه پنجم

نگارنده: عارفه محمدنژاد

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه گذشته، تلاش کردیم برخی مسائلی که به‌نظر می‌رسد برنامه‌ریزی صحیح هستند را نوشته و بررسی کنیم که برنامه‌ریزی خطی آن‌ها به چه صورت است. به عنوان مثال برای مسئله تطابق کامل وزن‌دار بیشینه در گراف دوبخشی، نشان دادیم که اگر برنامه‌ریزی صحیح آن را نوشته و آن را آرام‌سازی کنیم، با حل برنامه‌ریزی خطی حاصل با بهره‌گیری از تکنیک‌هایی که البته مختص این مسئله هستند، می‌توانیم جوابی صحیح برای آن بیابیم.

۲ مسئله کوچک‌ترین پوشش رأسی

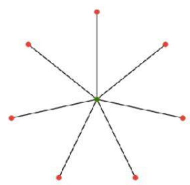
این مسئله نمونه‌ای از مسائل برنامه‌ریزی صحیح است که برای حل آن‌ها برنامه‌ریزی خطی نسبتا کافی است.
ابتدا به تعریف پوشش رأسی می‌پردازیم.
پوشش رأسی: زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف به طوری که هر یال لااقل یکی از دو سرش در این مجموعه باشد.
حال در این مسئله به دنبال یافتن کوچک‌ترین پوشش رأسی در یک گراف هستیم. برنامه‌ریزی صحیح این مسئله به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\text{کمینه کن} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\
\text{که} \quad & x_u + x_v \geq ۱, \quad for\ every\ edge\ \{u,v\}\in E \\
& x_v \in \{۰,۱\}, \quad for\ all\ v\in V
\end{aligned}
$$

که در آن متغیر x_v برابر یک است اگر و تنها اگر رأس v انتخاب شده باشد و در غیر این صورت برابر صفر است.
با توجه به این که برنامه‌ریزی صحیح را نمی‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد، آن را آرام‌سازی می‌کنیم. بنابراین برنامه‌ریزی صحیح به برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{کمینه کن} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\
\text{که} \quad & x_u + x_v \geq ۱, \quad for\ every\ edge\ \{u,v\}\in E \\
& ۰ \leq x_v \leq ۱, \quad for\ all\ v\in V
\end{aligned}
$$

می‌دانیم که مسئله کوچک‌ترین پوشش رأسی NP-hard است و الگوریتم حریصانه نیز روی آن جواب نمی‌دهد. به عنوان مثال در گراف زیر با به کار بردن الگوریتم حریصانه ممکن است تمام رأس‌های خارجی را به عنوان جواب انتخاب کنیم در حالی که جواب مسئله رأس مرکزی است.



با توجه به این که در جواب برنامه‌ریزی خطی، هر یال به اندازه حداقل یک واحد پوشانده شده است، پس جمع دو سر هر یالی حداقل برابر یک است و بنابراین حداقل یک سر آن بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است. پس مجموعه تمام رئوسی که متغیر x متناظر با آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است، تمام یال‌های گراف را می‌پوشاند. با توجه به این که این مجموعه رئوس احتمالا جواب کمینه نیست، باید مشخص کنیم که با جواب کمینه چقدر تفاوت دارد. چون در اینجا مسئله کمینه‌سازی است و با توجه به این که برنامه‌ریزی صحیح فقط جواب‌های صحیح و برنامه‌ریزی خطی جواب‌های حقیقی می‌تواند داشته باشد، پس جواب برنامه‌ریزی خطی کوچک‌تر یا مساوی جواب برنامه‌ریزی صحیح خواهد بود. حال مجموعه S_{LP} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_{LP} = \{v\in V : x_v^* \geq \frac{۱}{۲}\}$$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
|S_{LP}| &= \sum_{v\in S_{LP}} ۱ \leq \sum_{v\in V} ۲x_v^* \\
|S_{LP}| &\leq ۲\cdot \sum_{v\in V} x_v^* \leq \sum_{v\in V} \widetilde{x}_v = ۲\cdot |S_{OPT}|
\end{aligned}
$$

چون جواب برنامه‌ریزی خطی حداکثر ۲ برابر جواب برنامه‌ریزی صحیح است، این الگوریتم ۲ ـ تقریب است.

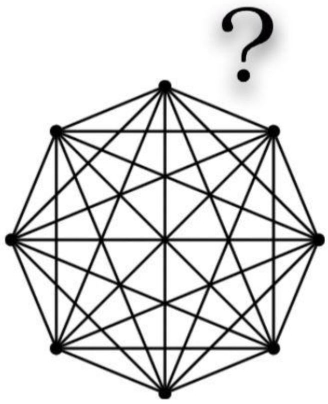
۳ مسئله بزرگ‌ترین مجموعه مستقل

ابتدا به تعریف مجموعه مستقل می‌پردازیم.
مجموعه مستقل: زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف که هیچ دو تایی از آن‌ها به یکدیگر یال ندارند.

حال در این مسئله به دنبال یافتن بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در یک گراف هستیم. برنامه‌ریزی صحیح این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{که} \quad & x_u + x_v \leq ۱, \quad for\ every\ edge\ \{u,v\} \in E \\ & x_v \in \{۰,۱\}, \quad for\ all\ v \in V \end{aligned}$$

که در آن متغیر x_v برابر یک است اگر و تنها اگر رأس v انتخاب شده باشد و در غیر این صورت برابر صفر است.
اگر این برنامه‌ریزی صحیح را آرام‌سازی کرده و برنامه‌ریزی خطی حاصل را حل کنیم، ممکن است حتی به تقریب خوبی از جواب برنامه‌ریزی صحیح نرسیم. به عنوان مثال گراف کامل زیر را در نظر بگیرید:



برای این گراف جواب برنامه‌ریزی صحیح برابر ۱ است در حالی که جواب برنامه‌ریزی خطی حاصل از آرام‌سازی آن، برابر $\frac{n}{۲}$ است. زیرا برای برقراری قیود کافی است جمع دو سر هر یالی حداکثر برابر ۱ باشد. بنابراین اگر متغیر x متناظر با هر رأسی برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، قیود برقرارند و در این حالت تابع هدف برابر $\frac{n}{۲}$ است. در نتیجه در این مسئله از تکنیک مورد استفاده در مسئله کوچک‌ترین پوشش رأسی نمی‌توان استفاده کرد. زیرا مثلا برای گراف کامل n رأسی با افزایش مقدار n، جواب برنامه‌ریزی خطی مرتبا افزایش می‌یابد در حالی که جواب برنامه‌ریزی صحیح ثابت و برابر ۱ است. بنابراین جواب برنامه‌ریزی خطی برای مسئله بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در یک گراف، می‌تواند فاصله بسیار زیادی با جواب برنامه‌ریزی صحیح داشته باشد.
قضیه زیر از J. H astad در رابطه با این مسئله وجود دارد:
قضیه: مسئله بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در یک گراف را نمی‌توان به صورت $n^{۱-\epsilon}$ تقریب زد.
این به این معناست که این مسئله را نه‌تنها نمی‌توان با ضرایب ثابت تقریب زد، بلکه با ضرایب لگاریتمی و حتی n به توان یک عدد ثابت کمتر از یک نیز نمی‌توان آن را تقریب زد.

۴ نظریه برنامه‌ریزی خطی

تاکنون با فرمی از برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر مواجه بودیم که آن را فرم کانونی می‌نامند:

$$\text{بیشینه کن} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{که} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

تمام مسائل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به این صورت نوشت. در صورتی که مسئله به صورت کمینه کردن تابع هدف باشد نیز با منفی کردن c، مسئله به این فرم تبدیل می‌شود و یا اگر مسئله دارای قیدی به صورت تساوی باشد، می‌توان آن را به صورت دو نامساوی نوشته و به فرم کانونی تبدیل کرد.

فرم دیگری نیز برای نمایش برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که فرم معادله‌ای نامیده می‌شود و به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{که} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

حال با توجه به این که فرم معادله‌ای خواص جالبی از خود نشان می‌دهد و استفاده از آن در الگوریتم‌هایی که با آن‌ها سر و کار داریم راحت‌تر است، نحوه تبدیل فرم کانونی به فرم معادله‌ای را نشان می‌دهیم:

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & ۳x_۱ - ۲x_۲ \\ \text{که} \quad & ۲x_۱ - x_۲ \leq ۴ \\ & x_۱ + ۳x_۲ \geq ۵ \\ & x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

با توجه به این که $۲x_۱ - x_۲$ کوچکتر یا مساوی ۴ است، بنابراین با افزودن یک متغیر جدید نامنفی مانند $x_۳$ به $۲x_۱ - x_۲$، می‌توان نامساوی را به تساوی تبدیل کرد. هم‌چنین برای تبدیل نامساوی دوم به تساوی، می‌توان ابتدا دو طرف نامساوی را در -۱ ضرب کرده و سپس با افزودن یک متغیر جدید نامنفی مانند $x_۴$ به $-(x_۱ + ۳x_۲)$، نامساوی را به تساوی تبدیل کرد. هم‌چنین برای از بین بردن متغیر آزاد $x_۱$ می‌توان آن را به صورت تفاضل دو متغیر جدید نامنفی مانند $y_۱$ و $z_۱$ نوشت. به این ترتیب برنامه‌ریزی خطی به فرم معادله‌ای زیر تبدیل می‌شود:

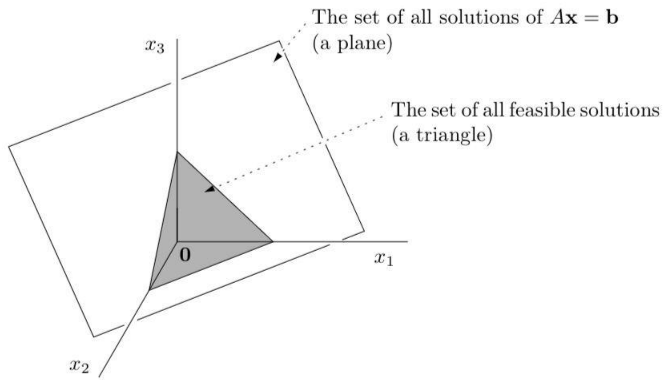
$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & ۳y_۱ - ۳z_۱ - ۲x_۲ \\ \text{که} \quad & ۲y_۱ - ۲z_۱ - x_۲ + x_۳ = ۴ \\ & -y_۱ + z_۱ - ۳x_۲ + x_۴ = -۵ \\ & y_۱ \geq ۰,\ z_۱ \geq ۰,\ x_۲ \geq ۰,\ x_۳ \geq ۰,\ x_۴ \geq ۰ \end{aligned}$$

بنابراین هر جواب فرم معادله‌ای یک جواب فرم کانونی است و برعکس و مقدار تابع هدف به ازای جواب‌های معادل برابر است.

دقت کنید که اگر در ابتدا m معادله و n متغیر داشته باشیم، پس از تبدیل به فرم معادله‌ای، چون تعداد معادله‌ها ثابت می‌ماند، بنابراین هم‌چنان m معادله خواهیم داشت. هم‌چنین چون ممکن است به ازای هر معادله یک متغیر و نیز به ازای هر متغیر، یک متغیر اضافه کنیم، بنابراین تعداد متغیرها در این حالت، حداکثر برابر با $۲n + m$ خواهد بود.

حال می‌خواهیم از دید هندسی این مسئله را بررسی کنیم:

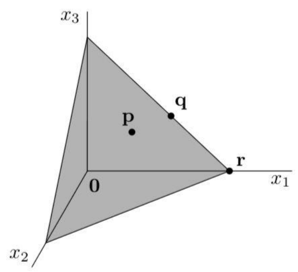
می‌دانیم که $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ به صورت یک صفحه است. با توجه به شرط $\mathbf{x} \geq ۰$، در حالت سه بعد مجموعه جواب‌های شدنی یک برنامه‌ریزی خطی که به فرم معادله‌ای است، به صورت مثلث شکل زیر است:



حال برای سادگی دو فرض زیر را داریم:
۱) فرض می‌کنیم $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای لااقل یک جواب باشد. زیرا در غیر این صورت برنامه‌ریزی خطی نیز جواب ندارد و نیاز به بررسی بیشتر نیست.
۲) فرض می‌کنیم سطرهای ماتریس A مستقل هستند. زیرا در غیر این صورت، یا چند سطر نامستقل با یکدیگر همخوانی نداشته و بنابراین $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ جواب ندارد و یا این سطرها با یکدیگر همخوانی دارند که در این صورت سطرهای نامستقل را کنار گذاشته و تنها سطرهای مستقل را نگه می‌داریم.

۵　جواب شدنی پایه‌ای

به شکل زیر که در آن مثلث خاکستری رنگ، مجموعه جواب‌های شدنی یک برنامه‌ریزی خطی به فرم معادله‌ای است، توجه کنید. به طور هندسی، جواب شدنی پایه‌ای (basic feasible solution) نه p است و نه q، بلکه r است. به طور کلی جواب‌های بهینه در نقاط گوشه (نقاطی که تعداد زیادی از ابعاد آن‌ها برابر صفر است) قرار دارند. در واقع جواب‌های شدنی پایه‌ای جواب‌هایی هستند که تعداد زیادی از ابعاد آن‌ها برابر صفر است.



حال به طور دقیق‌تر به توضیح این موضوع می‌پردازیم:
فرض کنید ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$$

همچنین مجموعه B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{۲, ۴\}$$

در این صورت برای ساختن ماتریس A_B، ستون‌هایی از A که در B آمده است را انتخاب می‌کنیم. بنابراین ماتریس A_B به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

به شکل مشابه $\mathbf{x}_B$ نیز تعریف می‌شود. فرض کنید بردار $\mathbf{x}$ به صورت زیر باشد:

$$(۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱)$$

در این صورت $\mathbf{x}_B$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(۵, ۹)$$

حال به تعریف جواب شدنی پایه‌ای می‌پردازیم:
یک جواب شدنی پایه‌ای برای یک برنامه‌ریزی خطی به فرم معادله‌ای زیر

$$\begin{aligned} &\text{بیشینه کن} && \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{که} && A\mathbf{x} = b \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

جوابی شدنی مانند $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ است اگر مجموعه‌ای مانند B وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$ و اندازه آن برابر m باشد و دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) ماتریس A_B نامنفرد باشد به این معنی که علاوه بر سطرهای آن، ستون‌های آن نیز مستقل باشند.
۲)متغیرهایی از بردار x که در ستون‌هایی قرار دارند که در مجموعه B نیامده است، برابر صفر باشند.

دقت کنید که B ممکن است یکتا نباشد. به عنوان مثال جواب $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ را در نظر بگیرید. این جواب یک جواب شدنی پایه‌ای است که ممکن است بتوان برای آن بیش از یک B یافت. زیرا با در نظر گرفتن هر زیرمجموعه m تایی از ستون‌های ماتریس A که مستقل باشند، یک B جدید تولید می‌شود.

اگر بردار x دارای دقیقا m مؤلفه ناصفر باشد، دو حالت پیش می‌آید: اگر ستون‌های متناظر با این مؤلفه‌ها در A مستقل باشند، آن‌ها را در B قرار می‌دهیم و x جواب شدنی پایه‌ای است. در غیر این صورت x جواب شدنی پایه‌ای نیست.
اگر بردار x دارای کمتر از m مؤلفه ناصفر باشد، ستون‌های متناظر با مولفه‌های ناصفر را در صورت مستقل بودن در B قرار داده و سعی می‌کنیم تعدادی از ستون‌های دیگر را که مستقل خطی هستند نیز در B قرار دهیم تا دارای m عضو شود. اگر این کار مقدور باشد، x جواب شدنی پایه‌ای است. در غیر این صورت x جواب شدنی پایه‌ای نیست.
حال به بیان مثال‌هایی برای بررسی جواب شدنی پایه‌ای می‌پردازیم. فرض کنید ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$$

اگر x به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

چون x دارای ۳ مؤلفه ناصفر است، بنابراین هیچ B ای نمی‌توان یافت که x در بیرون آن برابر صفر باشد و در نتیجه x جواب شدنی پایه‌ای نیست.
اگر x به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

با توجه به این که x باید در بیرون B برابر صفر باشد، B تنها می‌تواند برابر $\{۳, ۵\}$ باشد که چون در این حالت ستون‌های مربوط به B در A مستقل نیستند، بنابراین x جواب شدنی پایه‌ای نیست.
اگر x به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

چون یک B برای آن وجود دارد ($\{۱, ۲\}$)، بنابراین x جواب شدنی پایه‌ای است.
اگر x به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

چون یک B برای آن وجود دارد ($\{۱, ۳\}$)، بنابراین x جواب شدنی پایه‌ای است. دقت کنید در این جا B یکتا نیست و مثلا می‌تواند برابر با $\{۳, ۴\}$ نیز باشد.

قضیه: فرض کنید x یک جواب شدنی باشد و K به صورت زیر تعریف شود:

$$K = \{j \in \{۱, ۲, ..., n\} : x_j > ۰\}$$

در این صورت x پایه‌ای است اگر و تنها اگر ستون‌های A_K مستقل باشند.
اثبات:
ابتدا فرض کنید x یک جواب شدنی پایه‌ای باشد. اندازه K حداکثر برابر m است زیرا در غیر این صورت x پایه‌ای نیست. حال چون x پایه‌ای است، پس یک B با شرایطی که پیش‌تر ذکر شد وجود دارد. چون تمام ستون‌هایی که x در آن‌ها ناصفر است در B وجود دارند، بنابراین $K \subseteq B$ است. در نتیجه چون ستون‌های B مستقل هستند، ستون‌های K نیز مستقل‌اند و حکم ثابت می‌شود.
حال فرض کنید ستون‌های A_K مستقل باشند. اگر اندازه K برابر m باشد، B برابر K خواهد بود و چون یک B به دست آمد، نتیجه می‌شود که x پایه‌ای است و حکم ثابت می‌شود. پس فرض کنید اندازه K کوچکتر از m باشد. چون رنک سطری(تعداد سطرهای مستقل) A برابر m است، پس رنک ستونی(تعداد ستون‌های مستقل) آن نیز باید برابر m باشد. پس چون اندازه K کمتر از m است، می‌توان آن قدر ستون‌های مستقل را به آن اضافه کرد تا اندازه آن برابر m شود و به این ترتیب B به دست می‌آید. چون یک B به دست آمد، نتیجه می‌شود که x پایه‌ای است و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه: به ازای هر B حداکثر یک جواب شدنی پایه‌ای وجود دارد. زیرا با توجه به مستقل بودن ستون‌های B و این که x در خارج از B برابر صفر است، ماتریس A_B یک ماتریس مربعی با رنک m است و بنابراین معادله زیر تنها یک جواب دارد.

$$A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

حال اگر این جواب شدنی باشد، پایه‌ای است. بنابراین با توجه این که تعداد جواب‌های شدنی پایه‌ای حداکثر برابر با تعداد انتخاب‌های مختلف B است، هدف ما این است که از بین بی‌نهایت نقطه‌ای که می‌توانند جواب بهینه باشند، انتخاب خود را به جواب‌های شدنی پایه‌ای محدود کنیم.

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر مسئله جواب بهینه داشته باشد، برای یافتن جواب بهینه کافی است جواب‌های شدنی پایه‌ای را بررسی کنیم.
قضیه: مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{که} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

۱) اگر مسئله جواب شدنی داشته باشد و تابع هدف از بالا کران‌دار باشد، مسئله جواب بهینه دارد.
۲) اگر مسئله جواب بهینه داشته باشد، جواب شدنی پایه‌ای بهینه دارد.