

## سوال ۱: وارونگی ماتریس

یک ماتریس  $n$  در  $n$  به نام  $A$  از اعداد صحیح متفاوت به ما داده شده است. وارونگی درایه  $i$  و  $j$  از ماتریس برابر است با تعداد اعداد کوچکتر از آن که در سطر یا ستون آن قبل از آن آمده‌اند. به عبارت دیگر،

$$\text{inv}(i, j) = |\{(i', j') : i' \leq i, j' \leq j, (i = i' \vee j = j'), A[i', j'] < A[i, j]\}|$$

الگوریتمی ارائه کنید با داشتن ماتریس  $A$  مجموع وارونگی همه اعضای ماتریس را محاسبه کند. زمان اجرای الگوریتم شما باید  $O(n^2 \lg n)$  باشد. درستی و زمان اجرای الگوریتم خود را اثبات کنید.

## سوال ۲: مرتب‌سازی بی‌جهت

یک آرایه از اشیاء به ما داده شده است. همچنین یک تابع کمکی به ما داده شده که وقتی یک زیرآرایه به طول فرد از اشیاء را به آن بدهیم، عنصر وسط را برای ما مشخص می‌کند. می‌خواهیم با استفاده از تابع کمکی آرایه را مرتب کنیم. آرایه مرتب شده چه صعودی و چه نزولی قابل قبول است. فرض کنید فقط می‌توانیم تابع کمکی را با آرایه‌هایی به طول ۳ به عنوان ورودی اجرا کنیم. الگوریتمی ارائه کنید که با کمترین تعداد فراخوانی تابع کمکی (از لحاظ مرتبه بزرگی) آرایه را مرتب کند.

## سوال ۳: معرفی ساختمان‌های داده

برای ساختمان داده‌های زیر، زمان اجرای سرشکن و زمان اجرای حداکثر هر کدام از عملیات را ذکر کنید.

درخت ون امد بواس (vEB)	هرم فیبوناچی	درخت قرمز-سیاه	درهم‌ساز
			جستجو
			درج
			حذف
			جستجوی کمینه
			جستجوی بیشینه
			عدد بعدی
			کاهش کلید

#### سوال ۴: ترتیب اضافه شدن در هرم

هرم  $H$  و اعداد  $v$  و  $u$  را به صورتی مثال بنزید که اگر به هرم  $H$  ابتدا  $v$  و سپس  $u$  را اضافه کنیم با حالتی که به هرم  $H$  ابتدا  $u$  و سپس  $v$  را اضافه کنیم، دو هرم متفاوت به دست بیایند. هرم  $H$  و دو هرم تولید شده پس از اضافه کردن  $v$  و  $u$  به دو ترتیب را ذکر کنید.

#### سوال ۵: درهم سازی

فرض کنید می خواهیم اعداد زیر را به ترتیب، از چپ به راست در یک آرایه درهم سازی به طول ۱۳ اضافه کنیم.

۲۷, ۴۰, ۳۰, ۵۶, ۵۳, ۱۱۸, ۱۲۱, ۱۳۱, ۱۳۴

فرض کنید تابع درهم سازی تابع  $f(x) = x \bmod 13$  باشد.

(الف) نشان دهید اگر قرار بود هر کدام از اعداد را به تنهایی در یک آرایه درهم سازی خالی اضافه کنیم، هر کدام در کدام خانه قرار می گرفت.

(ب) با روش حل پر بودن درهم سازی خطی، آرایه پس از اضافه کردن اعداد به چه صورتی خواهد بود.

(ج) با روش زنجیر (لیست پیوندی برای هر خانه)، در نهایت آرایه به چه صورتی خواهد بود.

#### سوال ۶: مجموعه های مجزا

برای ساختمان داده مجموعه های مجزا، عملیات این ساختمان داده را نام ببرید. پیاده سازی هر کدام را بنویسید و زمان اجرای هر کدام را تنها ذکر کنید.

موفق باشید