

فصل ۴: روش توان

الگوریتم افراز طبیعی:

S : خروجی $\Rightarrow X$: ورودی

$$\phi(S) \leq \sqrt{2R(X)}$$

\Rightarrow استاندارد متناظر با ϕ : ورودی

$$\phi(S) \leq 2\sqrt{\phi(G)}$$

هدف: پیدا کردن تقریبی از λ_r به طوری که محاسبه آن ساده باشد:

X_r^* :

تقریبی از X_r

$$\frac{X_r^{*T} M X_r^*}{X_r^{*T} X_r^*} \leq \lambda_r + \epsilon$$

$$X_r^* \perp 1$$

اگر X_r به الگوریتم افراز طبیعی بدهیم: $S \rightarrow \phi(S) \leq 2\sqrt{\phi(G)}$

اگر X_r^* بدهیم آن گاه،

$$\phi(S) \leq \sqrt{2R(X_r^*)} \leq \sqrt{2\lambda_r + 2\varepsilon} \leq \sqrt{4\phi(G) + 2\varepsilon}$$

حال راه سریعی برای محاسبه X_r^* داریم.

وکی محاسبه X_r سخت است.

$$X_r^* \text{ محاسبه } O\left((|V|+|E|) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \log \frac{|V|}{\varepsilon}\right)$$

روش توان برای تقریب محاسبه V_1 : (X_1)

هم مقادیر موجبه نامفی $\lambda_i \geq 0$ مثبت نیز معین: M

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & \geq & \mu_2 & \geq & \mu_3 & \geq & \dots & \geq & \mu_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ V_1 & & V_2 & & V_3 & & \dots & & V_n \end{array}$$

هدف: تقریب V_1

الگوریتم توان:

(k, m) ورودی

↓
مشت نیم مقیم

۱- x_0 را به طور تصادفی یلواخت از $\{-1, +1\}^n$ انتخاب کن.

۲- for $i: 1$ تا k

$$M \cdot x_{i-1} \rightarrow x_i$$

۳- x_k را برگردان

بنابین $x_k = M^k x_0$

آر M را به سبب زمان شده باشد \Leftarrow

$$O(k(|V| + |E|)) = O(k(|V| + |E|))$$

Subject: _____
Date _____

قضیه: M ماتریس نیمه مثبت، k صحیح، $\varepsilon > 0$

\tilde{A}^T و \tilde{A} با احتمال حداقل $\frac{3}{16}$ داریم:

$$\frac{X_k^T M X_k}{X_k^T X_k} \geq \mu_1 (1 - \varepsilon) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon n (1 - \varepsilon)^{r_k}}$$

$$\tilde{A}^T \quad k = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{n}{\varepsilon}\right) \quad \mu_1$$

$$\mu_1 (1 - \varepsilon) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon n (1 - \varepsilon)^{r_k}} \geq (1 - o(\varepsilon)) \mu_1$$

ایده ای اینله چرا الگوریتم توان خوب است:

$$X = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$M X = \alpha_1 \mu_1 v_1 + \dots + \alpha_n \mu_n v_n$$

$$M^k X = \alpha_1 \mu_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \mu_n^k v_n.$$

↓

این به تدریج بقیه رفته می‌کند

چون $\mu_1 > \mu_i$

$$M^k X \approx \alpha_1 \mu_1^k v_1 \quad \text{بنابراین}$$

البته اگر α_1 صفر و یا خیلی کوچک باشد

الگوریتم خوب جواب نمی‌دهد.

Subject:

Date:

لم 1: با احتمال خوب α بزرگ است.

$$\text{آر } \sqrt{V \in R^n} \quad \|V\| = 1 \quad \text{و } \tilde{O}(\frac{1}{\alpha})$$

$$P(|\langle V, X \rangle| \geq \frac{1}{r}) \geq \frac{r}{15}$$

$$X \sim \{\pm 1\}^n$$

$$\text{لم 2: آر } X \in R^n \text{ به طور تصادفی } |\langle X, V_1 \rangle| \geq \frac{1}{r}$$

$$Y = M^k X, \quad \text{که } \epsilon > 0$$

$$\frac{Y^T M Y}{Y^T Y} \geq \frac{1}{1 + \epsilon \|X\|^2 (1 - \epsilon)^{2k}} \lambda_1 (1 - \epsilon)$$

لم 1 و 2، قضیه را ثابت می کنند.

Subject:

Date

اثبات لمها.

$$V = (V_1, \dots, V_n)$$

اثبات م 1.

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$S = \sum X_i V_i$$

$$E S = 0$$

$$E S^T = E \left(\sum X_i V_i \right) \left(\sum X_j V_j \right) = 1$$

$$E S^T \leq I$$

* z: یک متغیر تصادفی نامعین:

$$0 \leq \delta \leq 1$$

$$P(z \geq \delta E z) \geq (1 - \delta^2) \frac{(E z)^2}{E z^2}$$

Subject:

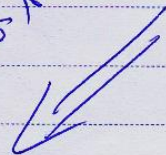
Date:

بنابر *

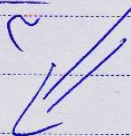
$$Z = S^T, \quad \delta = \frac{1}{r}$$



$$P\left(S^T \geq \frac{1}{r} E S^T\right) \geq \left(\frac{r}{r}\right)^r \frac{(E S^T)^T}{E S^T}$$



$$P\left(S^T \geq \frac{1}{r}\right) \geq \left(\frac{r}{r}\right)^r \times \frac{1}{r}$$



$$P\left(S^T \geq \frac{1}{r}\right) \geq \frac{r}{15}$$

$$S^T = \left(\sum x_i v_i\right)^T, \quad S^T \geq \frac{1}{r} \Rightarrow |S| \geq \frac{1}{r} \Rightarrow \left|\sum x_i v_i\right| \geq \frac{1}{r}$$

$$\left|\sum x_i v_i\right| = |\langle x, v \rangle| \Rightarrow |\langle x, v \rangle| \geq \frac{1}{r}$$

بنابرین اثبات کم 1 تمام است.

Subject: _____

Date _____

اثبات ۲م:

$$X = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$$

$$Y = \alpha_1 \mu_1^k V_1 + \dots + \alpha_n \mu_n^k V_n$$

$$|\alpha_i| \leq \frac{1}{r}$$

$$Y^T M Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1} \geq \sum_{i=1}^L \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1}$$

مقدار ویژه های بزرگتر از L :

$$\mu_1(1-\varepsilon)$$

$$\mu_1 - \mu_L \geq \mu_1(1-\varepsilon)$$

$$\geq \mu_1(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^L \alpha_i^2 \mu_i^{2k}$$

Subject: _____

Date: _____

$$\sum_{i=L+1}^n \alpha_i^r \mu_i^{rk} \leq \mu_1^{rk} (1-\varepsilon) \sum_{i=L+1}^n \alpha_i^r$$

$$\leq \mu_1^{rk} (1-\varepsilon) \|X\|^r$$

$$\leq r \|X\|^r (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^L \alpha_i^r \mu_i^{rk}$$

$$\|Y\|^r = \sum_{i=1}^n \alpha_i^r \mu_i^{rk} = \sum_{i=1}^L \alpha_i^r \mu_i^{rk} + \sum_{i=L+1}^n \alpha_i^r \mu_i^{rk}$$

$$\leq \left(1 + r \|X\|^r (1-\varepsilon)\right) \sum_{i=1}^L \alpha_i^r \mu_i^{rk}$$

$$\frac{\|Y\|^r}{\|X\|^r} \geq \frac{\mu_1^{rk} (1-\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^r \mu_i^{rk}\right)}{\left(1 + r \|X\|^r (1-\varepsilon)\right) \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^r \mu_i^{rk}\right)}$$

PAPCO

10
من

بنابراین اثبات تمام است.

هدف میانی ۱

بردار ویژه مربوط به دومین بزرگترین

مقدار ویژه M (نیمه مثبت)

الگوریتم توان ۲:

ورودی: (M, k, τ_1)

بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه τ_1

ماتریس نیمه مثبت M

۱- تصادفی $X \leftarrow \{-1, +1\}$

۲- $X_0 := X - \tau_1 \langle X, \tau_1 \rangle$

۳- for $i := 1$ to k

$X_i := M \cdot X_{i-1}$

۴- X_k را برگردان $(M^k X_0 = X_k)$

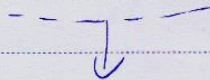
Subject:

Date

$$X = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$X_0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\mu^k X_0 = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$$



رشد این قوت لذت بیشتر است.

$$\frac{X_k^T \mu X_k}{X_k^T X_k} \geq \mu_1 (1 - \tau \varepsilon)$$

! اول حد اول

Subject: _____

Date _____

جواب نهایی:

$$L = I - \frac{1}{d} A$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda_n \leq -\lambda_{n-1} \leq \dots \leq -\lambda_1 =$$

$$\lambda_n \leq 2 \Rightarrow$$

$$0 \leq 2 - \lambda_n \leq \dots \leq 2 - \lambda_1 = 2$$

$$2[I - L] = n \quad \text{و} \quad \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{n}{\varepsilon} = k, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = V_1: \text{ در روی آنتن مقلد}$$

Subject:

Date

$$x_k^T x_k - x_k^T L x_k = x_k^T (I - L) x_k \geq$$

$$(1 - \varepsilon) (1 - \lambda_1) (x_k^T x_k) \Rightarrow$$

$$x_k^T L x_k \leq (\varepsilon + \lambda_1) \quad v_k \perp v_1$$

الگوریتم در زمان اجرا:

$$O((|V| + |E|) \frac{1}{\varepsilon} \log |V| \frac{1}{\varepsilon})$$

که برای v_1^* داریم:

$$R(v_1^*) \leq \lambda_1 + \varepsilon$$

اگر ε ، خیلی کوچک باشد زمان اجرا بالا می‌رود.
اگر λ_1 بزرگ باشد (ترافیک همتا باشد) ε نیاز به کوچک شدن ندارد زمان اجرا

خوب است.

آلبرای L ، λ_2 کوچک باشد آنگاه،

چون L دارد پندیرنیت. ($\lambda_1 \approx 0$)

شبه دار L^+

λ_i مقدار ویژه L ، آنگاه $\frac{1}{\lambda_i}$ مقدار ویژه L^+

$$LV = \lambda^* V$$

$$L = \sum \lambda_i v_i v_i^T$$

$$L^+ V = \frac{1}{\lambda} V$$

$$L^+ = \sum \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^T$$

$$\lambda_i \neq 0$$

آر λ_2 کوچک بود به جای L^+ در آلورتی توان L^+

می‌توانیم. اما باید $x_i \rightarrow x_{i-1}$ را سریع حساب کنیم یعنی باید مقدار خطی

را تقریباً خطی بوجه غیر صفرهای L حل کنیم که خودست صافانه ایست.

$$x_{i-1} = Lx_i$$

PAPCO

۱۵
ص

آلورتی برای حل آن ارائه شده است که لزومی: $O((|V|+|E|)g(|V|)^{\alpha(L)})$