دانشکده‌ی علوم ریاضی

ریاضیات گسسته بهار ۹۳

پاسخ تمرین سری دوم

سؤال ۱ :
می‌دانیم رابطه زیر به ازای $0 \leq k < n$ برقرار می‌باشد.

$$\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

حال طبق رابطه بالا در صورتی $\binom{n}{k+1}$ از $\binom{n}{k}$ بزرگتر می‌شود که $\frac{n-k}{k+1}$ از یک بزرگتر باشد. داریم :

$$\frac{n-k}{k+1} \geq; 1 \Rightarrow n-k \geq; k+1 \Rightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$$

با این وجود با افزایش k از صفر تا $\frac{n-1}{2}$ مقدار $\binom{n}{k}$ نیز افزایش پیدا می کند که در نهایت به ازای $k = [\frac{n-1}{2}] + 1$ مقدار $\binom{n}{k}$ بیشترین می‌شود.

سؤال ۲ :
می خواهیم از جمعی n نفره ، k نفر را انتخاب کنیم و از آن k نفر L نفر را به عنوان ارشد انتخاب کنیم. می توانیم در ابتدا k نفر انتخاب کنیم و سپس از اون k نفر افراد ارشد را انتخاب کنیم و یا افراد ارشد را جدا و بقیه افراد را نیز جدا انتخاب کنیم. هر کدام از این حالت ها یک سوی تساوی می باشد که به جوابی از سوال طرح شده ختم می‌شود. در نتیجه با دوگونه شماری این سوال اثبات می‌شود.

سؤال ۳ :
در معادله $(1+x+x^2)^8$ برای بدست آوردن ضریب x^5 می دانیم این عدد یا از ضرب تعداد پنج x در هم و یا سه x و یک x^2 و یا در نهایت دو x^2 و یک x بدست آمده است. می دانیم برای انتخاب پنج x به تعداد $\binom{8}{5}$ حالت، برای سه x و یک x^2 تعداد $\binom{5}{1}\binom{8}{3}$ و برای انتخاب دو x^2 و یک x مقدار $\binom{6}{1}\binom{8}{2}$ حالت داریم که بنا بر اصل جمع جواب نهایی حاصل جمع این سه حالت یا به عبارتی ۵۰۴ می‌شود.

سؤال ۴ :
با نوشتن بسط هر دو عبارت خواهیم داشت:

$$(x+\frac{1}{x})^{100} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}x^{100-i}\cdot(\frac{1}{x})^{i} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}\,x^{100-2i}$$

$$\Rightarrow 100-2i = k \Rightarrow i = \frac{100-k}{2}$$

در نتیجه در صورت فرد بودن k جواب صفر می‌شود و در صورت زوج بودن k مقدار جواب برابر است با $\binom{100}{\frac{100-k}{2}}$ برای قسمت ب نیز همانند بالا عمل کرده و داریم :

$$(x^2-\frac{1}{x})^{100} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}(x^2)^{100-i}(-1)^{i}(\frac{1}{x})^{i} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}(-1)^{i}x^{200-3i}$$

$$\Rightarrow 200-3i = k \Rightarrow i = \frac{200-k}{3}$$

در نتیجه ضریب جمله مورد نظر در زمانی که k به صورت $۳t$ و $۳t+۱$ است صفر بوده و در موردی که k به صورت $۳t+۲$ است برابر عبارت زیر می‌باشد:

$$\binom{۱۰۰}{\frac{۲۰۰-k}{۳}}(-۱)^{\frac{۲۰۰-k}{۳}}$$

سؤال ۵ *الف)* می دانیم $\binom{n+۱}{k+۱}=\frac{n+۱}{k+۱}\binom{n}{k}$. در نتیجه داریم :

$$(n+۱)\sum_{r=۰}^{n}\frac{۱}{r+۱}\binom{n}{r} = \sum_{r=۰}^{n}\frac{n+۱}{r+۱}\binom{n}{r} = \sum_{r=۰}^{n}\binom{n+۱}{r+۱}$$

$$= \sum_{r=۱}^{n+۱}\binom{n+۱}{r} = ۲^{n+۱}-\binom{n+۱}{۰} = ۲^{n+۱}-۱$$

$$\Rightarrow \sum_{r=۰}^{n}\frac{۱}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱}\Big(۲^{n+۱}-۱\Big)$$

ب) با استفاده از $\binom{n+۱}{k+۱}=\frac{n+۱}{k+۱}\binom{n}{k}$ بدست می‌آوریم:

$$\sum_{r=۰}^{n}\frac{(-۱)^r}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱} \Rightarrow \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r\binom{n+۱}{r+۱} = ۱$$

از طرفی داریم :

$$۱ = ۱+(۱-۱)^{n+۱} = ۱+\sum_{r=۰}^{n+۱}\binom{n+۱}{r}(-۱)^r(۱)^{n-r+۱} = ۱+\sum_{r=-۱}^{n}\binom{n+۱}{r+۱}(-۱)^{r+۱}$$

$$= ۱+\binom{n+۱}{۰}-\sum_{r=۰}^{n}\binom{n+۱}{r+۱}(-۱)^r = ۱ \Rightarrow \sum_{r=۰}^{n}\binom{n+۱}{r+۱}(-۱)^r = ۱$$

که حکم مسئله ثابت شد.