# جلسه ششم

درس تحقیق در عملیات

# قضیه

$$maximize\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}\ subject\ to\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

۱) اگر مساله جواب شدنی داشته باشد و تابع هدف از بالا کران‌دار باشد جواب بهینه دارد

۲) اگر مساله جواب بهینه داشته باشد جواب پایه‌ای شدنی بهینه دارد

# اثبات

فرض $x \leftarrow x^*$ : ۱) بهینه ۲) بیشترین ۰

حکم : $c^T x^* \geq c^T x$

: $x^*$ هست که همه صفرها را پیدا کرد(ی)

$L$ : ستون غیرصفر $x$

اگر $A_L$ مستقل $\Leftrightarrow$ $m \geq |L|$

بودن $x_L$ صفرها $\Leftarrow$ X

پس $y$ هست که $Ay = 0$ ، $y_i \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0$

$$A(x + ty) = b$$

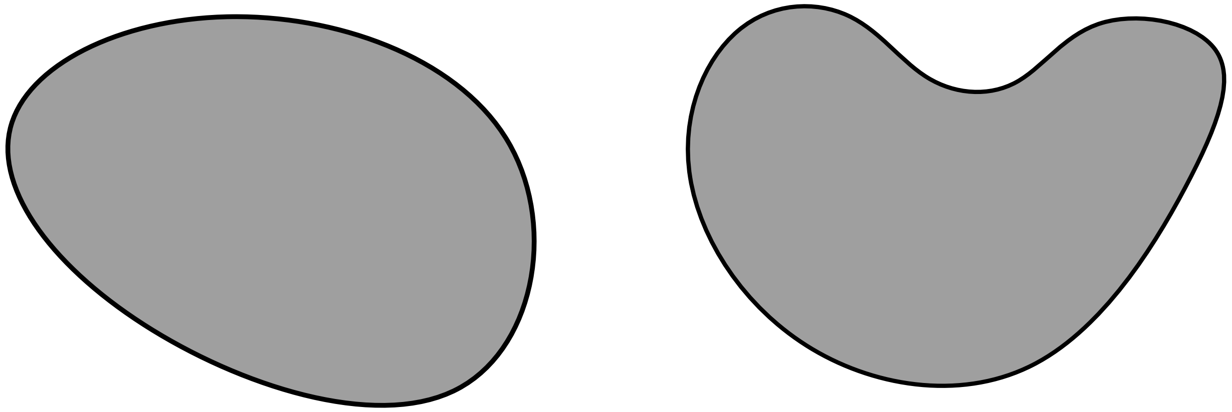
$$c^T(x + ty) = c^T x + t c^T y$$

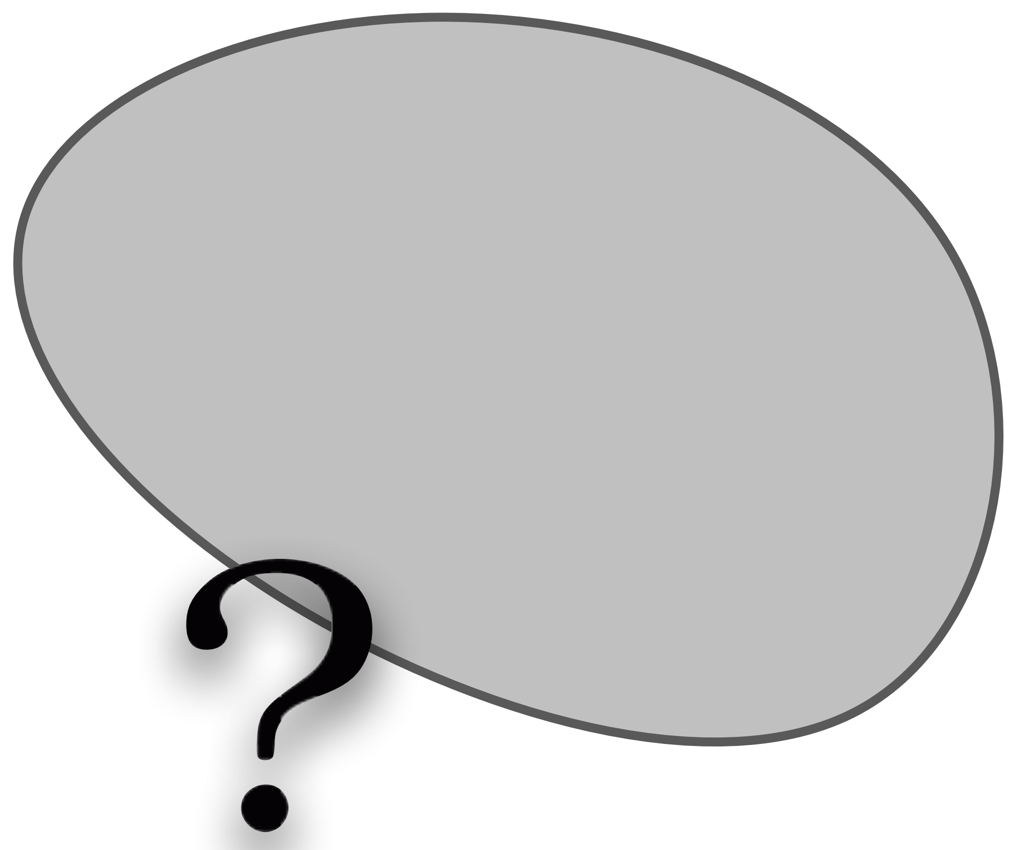
$c^T y \neq 0$ X.

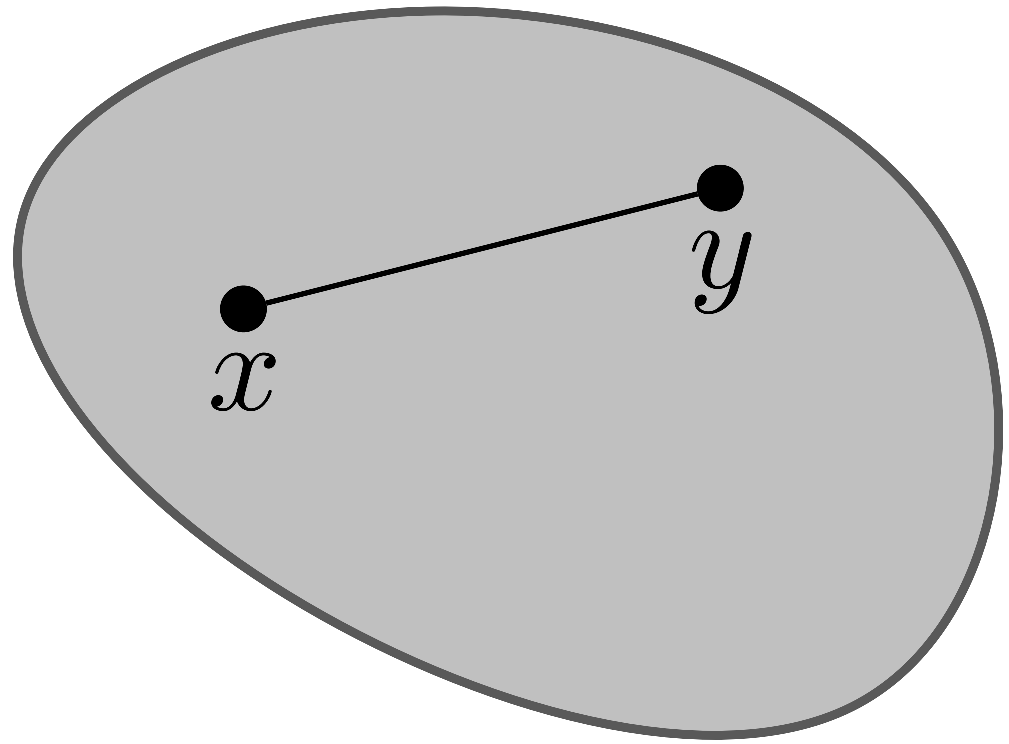
$\exists t: x + ty$ بیشتر صفر دارد X.

# محدب

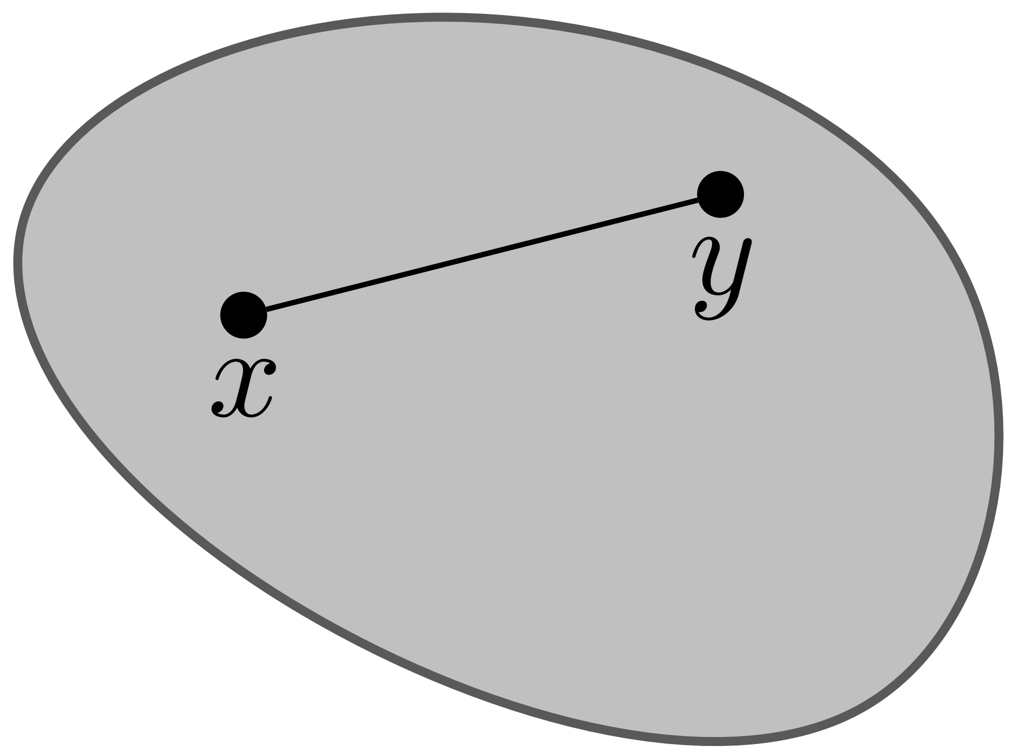
# مجموعه‌های محدب







$y$
$x$



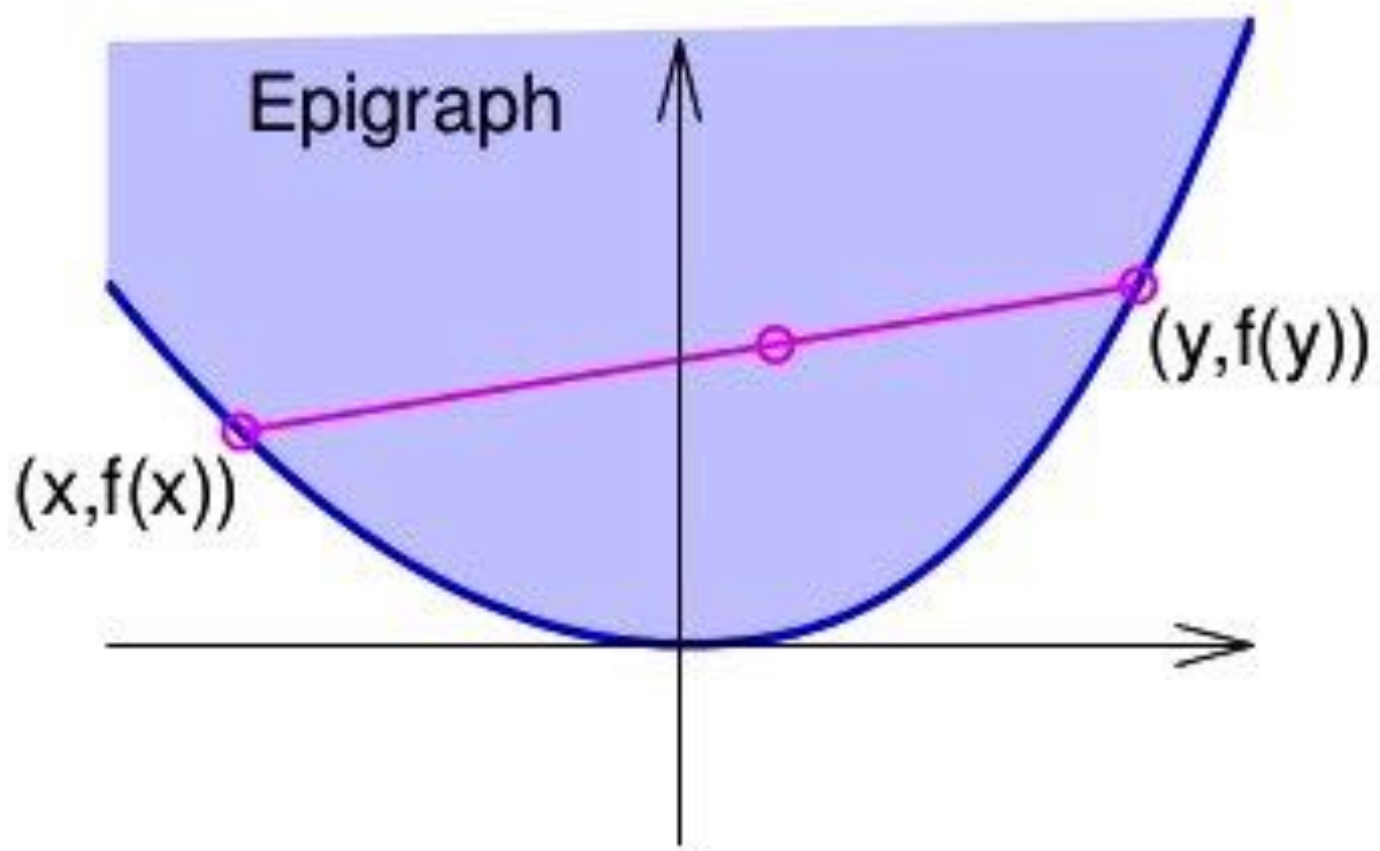

$$tx + (1-t)y \quad t \in [0,1]$$

# توابع محدب

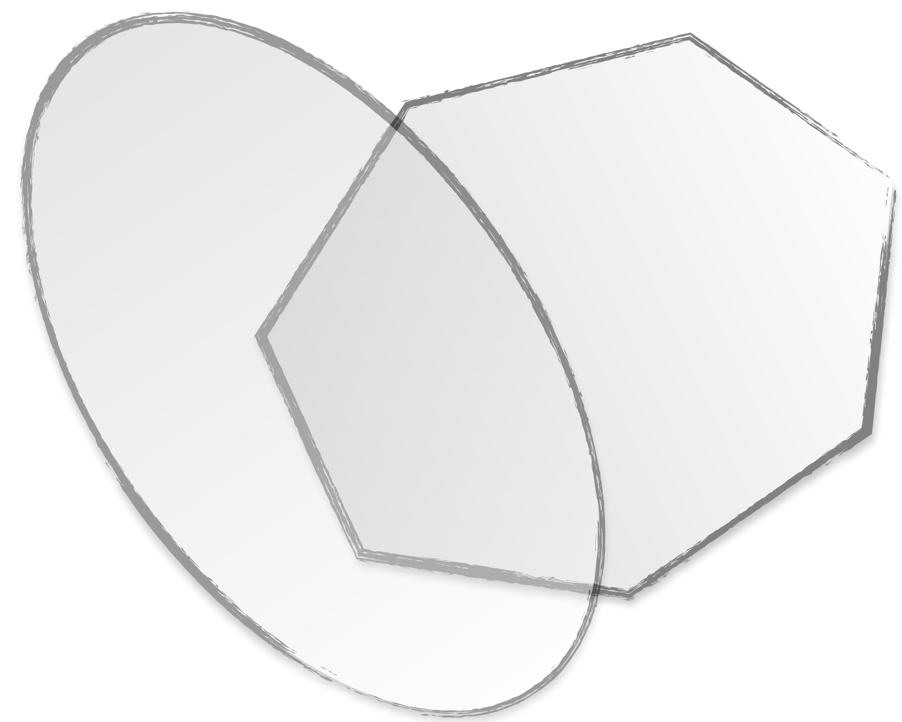
# تابع محدب

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})$$

$$t \in [0, 1]$$


Epigraph
(y,f(y))
(x,f(x))

اشتراک/اجتماع ؟



# توصیف‌های مختلف چندوجهی‌ها

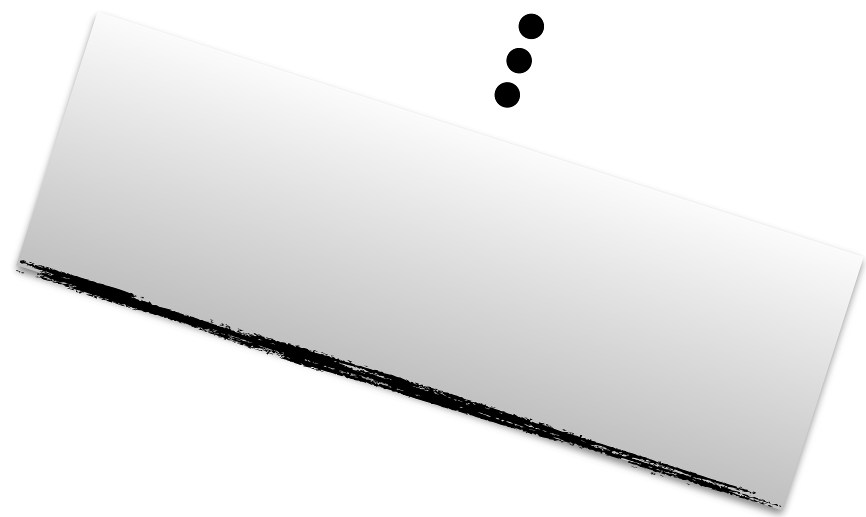
توصیف با وجوه

ابرصفحه

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

زیرفضای n-1 بعدی

# نیم‌فضا



$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b\right\}$$

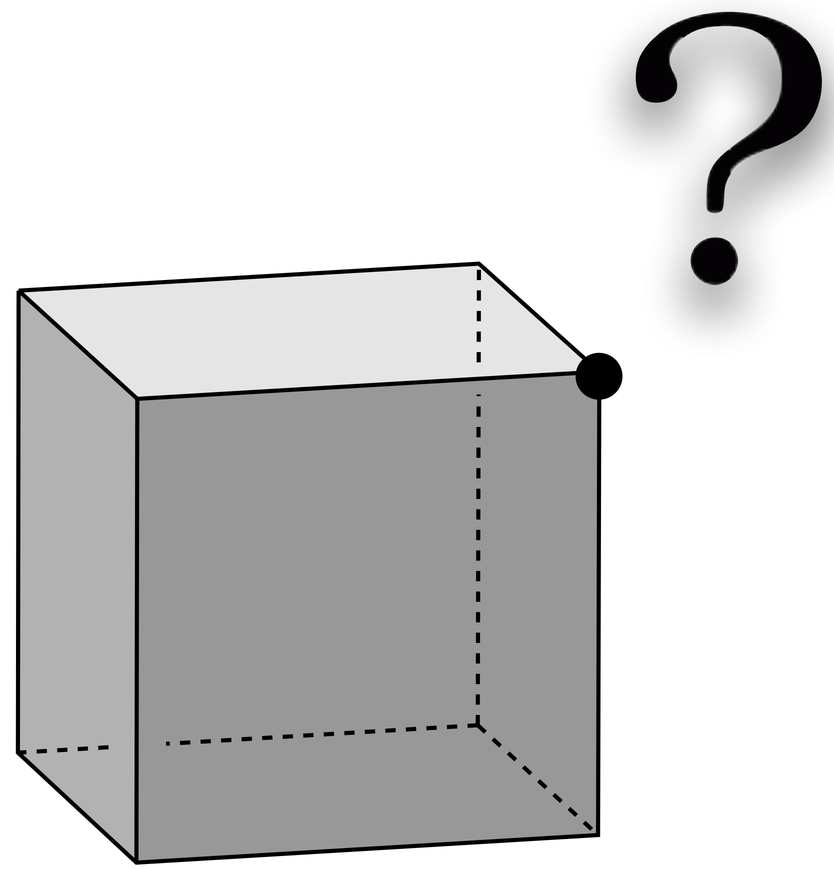
# چند وجهی

A **convex polyhedron** is an intersection of finitely many closed half-spaces in $\mathbb{R}^n$.

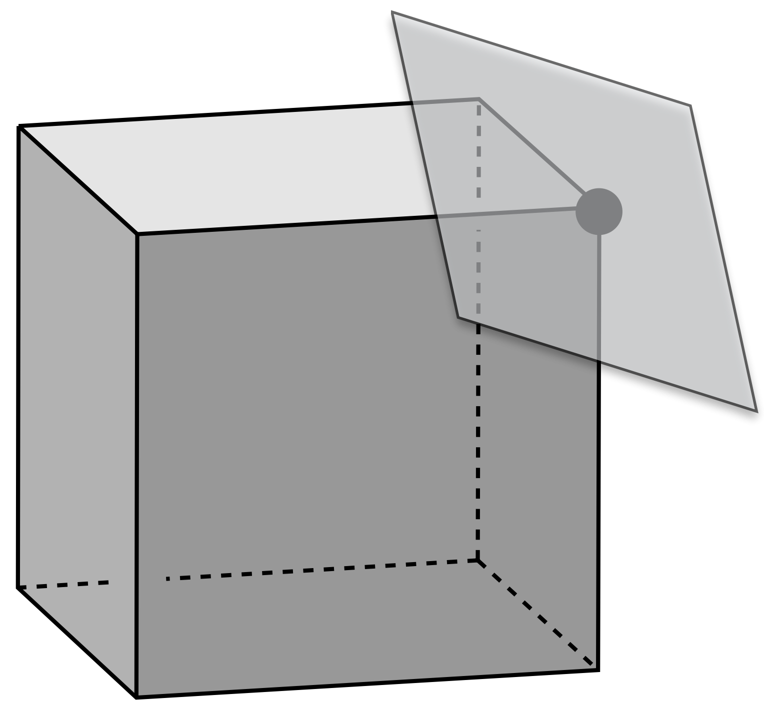
چندسطحی محدب:

چندوجهی محدب کران‌دار

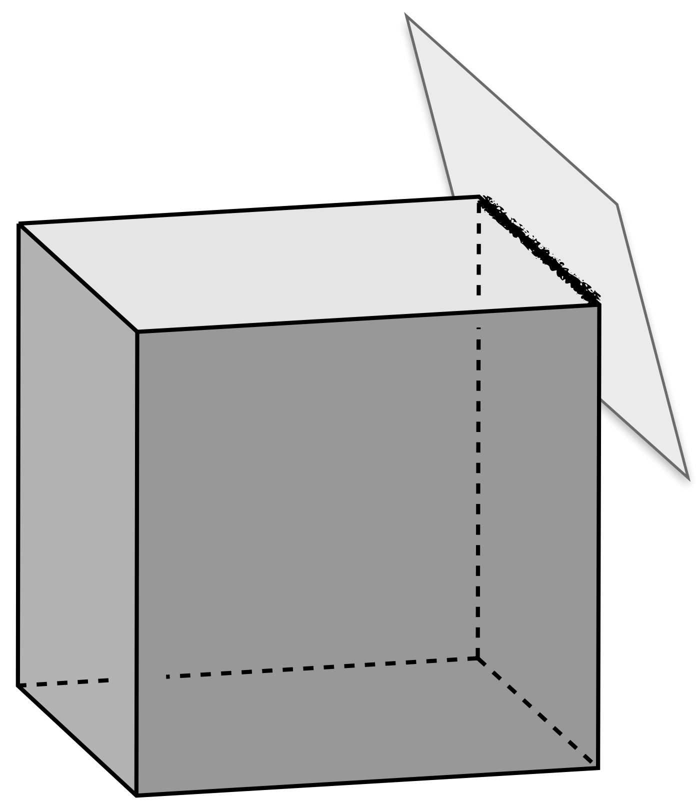
توصیف راسی

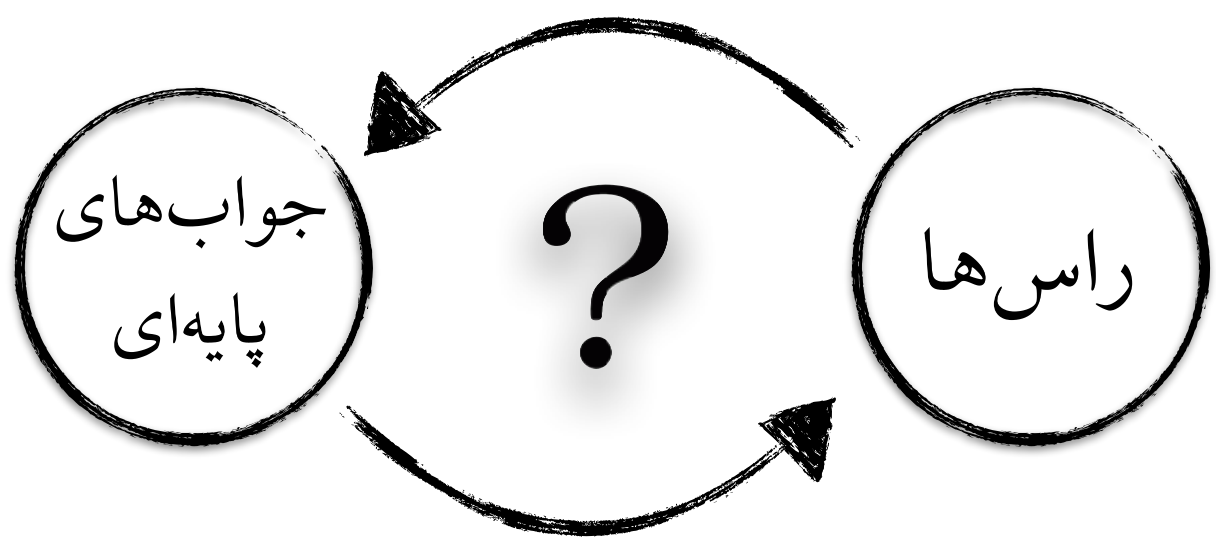


راس



# وجه




جواب‌های
پایه‌ای
?
راس‌ها

**4.4.1 Theorem.** *Let $P$ be the set of all feasible solutions of a linear program in equational form (so $P$ is a convex polyhedron). Then the following two conditions for a point $\mathbf{v} \in P$ are equivalent:*

(i) $\mathbf{v}$ *is a vertex of the polyhedron $P$.*
(ii) $\mathbf{v}$ *is a basic feasible solution of the linear program.*

(i)⇒(ii) حتما یک جواب bfs بزرگ‌تر مساوی دارد

(ii)⇒(i) B به طور یکتا جواب را مشخص می‌کند.

**4.4.1 Theorem.** *Let $P$ be the set of all feasible solutions of a linear program in equational form (so $P$ is a convex polyhedron). Then the following two conditions for a point $\mathbf{v} \in P$ are equivalent:*

(i) $\mathbf{v}$ *is a vertex of the polyhedron $P$.*
(ii) $\mathbf{v}$ *is a basic feasible solution of the linear program.*

$$Ax = b \qquad x \geq 0$$

$$B \longrightarrow A_B x_B = b, \quad x_{\bar{B}} = 0$$

(i)⇒(ii) حتما یک جواب bfs بزرگ‌تر مساوی دارد

(ii)⇒(i) B به طور یکتا جواب را مشخص می‌کند.

$B$: $\begin{cases} A_B: \text{مستقل} \\ x \text{ بیرون } B = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow c$ $\quad c^T x$

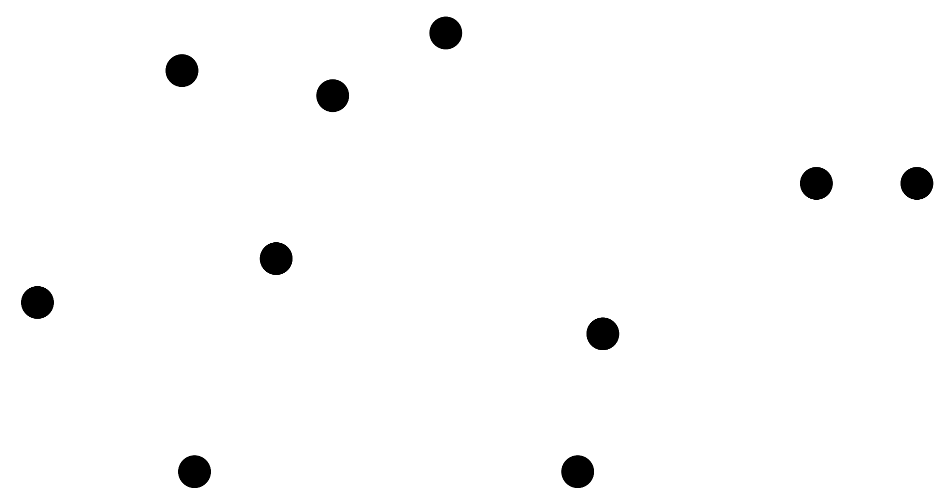
$c^T x^* = 0$

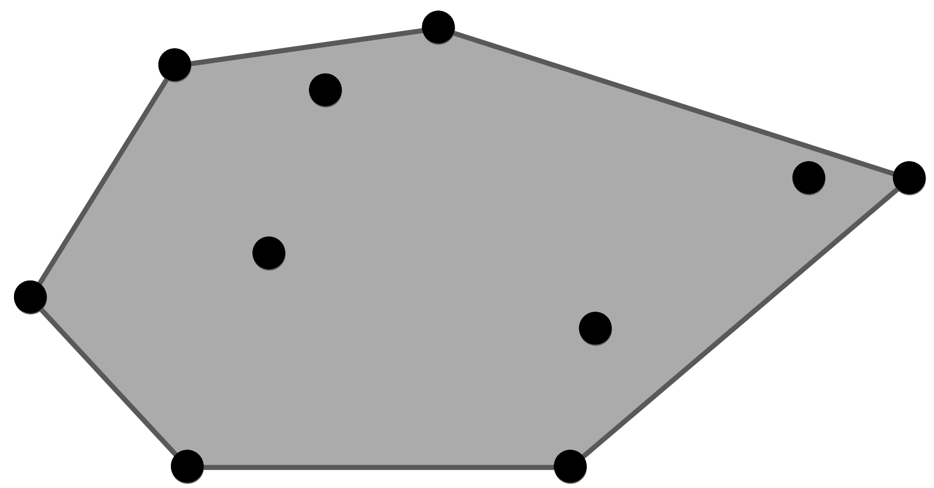
$\forall x: \exists i \notin B: x_i \neq 0 \Rightarrow c^T x < 0$

$\forall x$ : $c^T x = 0 \Rightarrow$ $x_B$ یکتا

$$\begin{cases} c_i = -1 & i \notin B \\ c_i = 0 & i \in B \end{cases}$$

# پوش محدب





## تعریف: پوش محدب =

## اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل شکل (نقاط)

کوچک‌ترین مجموعه محدب شامل شکل (نقاط)

چون:

۱ـ اشتراک زیر مجموعه کوچکترین (چون شامل کوچکترین است)

۲ـ اشتراک کوچکتر از کوچکترین نیست

# ترکیب محدب

$$t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_m\mathbf{x}_m$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_m \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{m} t_i = 1$$

$$\tilde{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i \mathbf{x}_i : m \geq 1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X, t_1, \ldots, t_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}$$

اشتراک همه مجوعه‌های محدب شامل شکل (نقاط)

**4.3.1 Lemma.** *The convex hull $C$ of a set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ equals the set*

$$\tilde{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i \mathbf{x}_i : m \geq 1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X, t_1, \ldots, t_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}$$

*of all convex combinations of finitely many points of $X$.*

اثبات:

قدم ۱: $C \subseteq \tilde{C}$

$\tilde{C}$ محدب و شامل نقاط

چون $\longrightarrow$ $C = \ldots \cup \ldots \cup \tilde{C} \cup \ldots$ $\longrightarrow$ $C \subseteq \tilde{C}$

کافی: $tx + (1-t)y \in \tilde{C} \longrightarrow x, y \in \tilde{C}$

ادامه اثبات: $\tilde{C} \subseteq C$

استقرا روی m:

- برای m= ۱ یا ۲
- کافی $\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_m\mathbf{x}_m$ باید در C باشد

$$\mathbf{x}' = t'_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t'_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}$$

$$t'_i = t_i/(1-t_m),\ i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\mathbf{x} = (1-t_m)\mathbf{x}' + t_m\mathbf{x}_m$$