فصل ۴: روش توان

الگوریتم افراز طبیعی:

ورودی: X $\Longrightarrow$ خروجی: S

$$\phi(S) \le \sqrt{2R(X)}$$

ورودی: X_2 با مقدار ویژه متناظر $\Longrightarrow$

$$\phi(S) \le 2\sqrt{\phi(G)}$$

هدف: پیدا کردن تقریبی از X_2 به طوری که محاسبه آن ساده باشد:

X_2^*: تقریبی از X_2

$$\frac{X_2^{*T} M X_2^*}{X_2^{*T} X_2^*} \le \lambda_2 + \epsilon$$

$$X_2^* \perp 1$$

Subject:
Date

اگر X_2 به الگوریتم افراز طبیعی بدهیم: $S \to \phi(S) \le 2\sqrt{\phi(G)}$

اگر X_2^* بدهیم آنگاه،

$$\phi(S) \le \sqrt{2R(X_2^*)} \le \sqrt{2\lambda_2 + 2\epsilon} \le \sqrt{4\phi(G) + 2\epsilon}$$

حال راه سریعی برای محاسبه X_2^* داریم

ولی محاسبه X_2 سخت است.

محاسبه X_2^* : $O\left((|V|+|E|)\cdot\frac{1}{\epsilon}\cdot \log\frac{|V|}{\epsilon}\right)$

روش توان برای تقریب محاسبه V_1 : (X_1)

همه مقادیر ویژه نامنفی $\forall i \ \lambda_i \ge 0$ مثبت نیم معین : M

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu_1 & \ge & \mu_2 & \ge & \mu_3 & \ge & \cdots & \ge & \mu_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ V_1 & & V_2 & & V_3 & & \text{—} & & V_n \end{array}$$

هدف: تقریب V_1

Subject:
Date

الگوریتم توان:

ورودی: (k , M)

مثبت نیم معین

۱- X_0 را به طور تصادفی یکنواخت از $\{+1,-1\}^n$ انتخاب کن.

۲- از ۱ تا k : for i

$$M \cdot X_{i-1} \longrightarrow X_i$$

۳- X_k را برگردان

بنابراین $X_k = M^k X_0$

اگر M لاپلاسین نرمال شده باشد $\Longleftarrow$

زمان اجرا: $O\left(k(|V|+|2E|)\right) = O\left(k(|V|+|E|)\right)$

Subject:
Date

قضیه: M مثبت نیم معین ، k: صحیح ، $\varepsilon > 0$

آنگاه با احتمال حداقل $\frac{3}{16}$ داریم:

$$\frac{X_k^T M X_k}{X_k^T X_k} \geq \mu_1 (1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{1+4n(1-\varepsilon)^{2k}}$$

اگر $k = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \log n/\varepsilon\right)$ آنگاه

$$\mu_1 (1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{1+4n(1-\varepsilon)^{2k}} \geq (1-O(\varepsilon))\, \mu_1$$

Subject:
Date

ایده ی اینکه چرا الگوریتم توان خوب است:

$$X = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$M X = \alpha_1 \mu_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \mu_n v_n$$

$$M^k X = \underbrace{\alpha_1 \mu_1^k v_1}_{} + \cdots + \alpha_n \mu_n^k v_n.$$

این بیشتر از بقیه رشد می کند

چون $\mu_1 > \mu_i \quad \forall i$

بنابرین: $M^k X \simeq \alpha_1 \mu_1^k v_1$

البته اگر α_1 صفر و یا خیلی کوچک باشد

الگوریتم خوب جواب نمی دهد.

لم ۱: با احتمال خوبی x_1 بزرگ است،

اگر $v \in R^n$ که $\|v\| = 1$ آنگاه،

$$P\left(|\langle v . x \rangle| \geq \frac{1}{۲} \right) \geq \frac{۳}{۱۶}$$

$$X \sim \{\pm 1\}^n$$

لم ۲، اگر $X \in R^n$ به طوری که $|\langle X, v_1 \rangle| \geq \frac{1}{۲}$

k صحیح، $\varepsilon > 0$ ، $Y = M^k X$:

$$\frac{Y^T M Y}{Y^T Y} \geq \lambda_1 (1-\varepsilon) \frac{1}{1 + ۴\|X\|^۲ (1-\varepsilon)^{2k}}$$

لم ۱، لم 2 قضیه را ثابت می‌کند.

Subject:
Date

اثبات لم‌ها:

اثبات لم ۱:

$V = (V_1, \ldots, V_n)$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$

$S = \sum X_i V_i$

$\mathbb{E} S = 0$

$\mathbb{E} S^2 = \mathbb{E}\left(\sum X_i V_i\right)\left(\sum X_j V_j\right) = 1$

$\mathbb{E} S^4 \leq 3$

---

*: Z یک متغیر تصادفی نامنفی:

$0 \leq \delta \leq 1$

$P(Z \geq \delta E Z) \geq (1 - \delta^2) \dfrac{(EZ)^2}{EZ^2}$

P4PCO

ص ۷

Subject:
Date

بنابر * :

$$Z = S^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$P\left(S^2 \geq \frac{1}{4} E S^2\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{(ES^2)^2}{ES^4}$$

$$P\left(S^2 \geq \frac{1}{4}\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$P\left(S^2 \geq \frac{1}{4}\right) \geq \frac{3}{16}$$

$$S^2 = \left(\sum X_i V_i\right)^2, \quad S^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |S| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\sum X_i V_i\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\sum X_i V_i\right| \leq |\langle x, v\rangle| \Rightarrow |\langle x, v\rangle| \geq \frac{1}{2}$$

بنابرین اثبات گام ۱ تمام است.

حل

Subject:
Date

اثبات لم ۲:

$$X = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$Y = \alpha_1 \mu_1^k v_1 + \cdots + \alpha_n \mu_k^k v_n$$

$$|\alpha_1| \geq \frac{1}{2}$$

$$Y^T M Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1} \geq \sum_{i=1}^{L} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1}$$

L : مقدار ویژه های بزرگتر از

$$\mu_1(1-\varepsilon)$$

$$\mu_1 \cdots \mu_L \geq \mu_1(1-\varepsilon)$$

$$\geq \mu_1(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{L} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}$$

Subject:
Date

$$\sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i^2 \mu_i^{2k} \le \mu_1^{2k} (1-\varepsilon)^{2k} \sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i^2$$

$$\le \mu_1^{2k} (1-\varepsilon)^{2k} \|x\|^2$$

$$\le 4 \|x\|^2 (1-\varepsilon)^{2k} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}$$

$$y^T y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mu_i^{2k} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 \mu_i^{2k} + \sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}$$

$$\le \left(1 + 4\|x\|^2 (1-\varepsilon)^{2k}\right) \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}$$

$$\frac{y^T M y}{y^T y} \ge \frac{\mu_1 (1-\varepsilon) \cancel{\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}\right)}}{\left(1 + 4\|x\|^2 (1-\varepsilon)^{2k}\right) \cancel{\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}\right)}}$$

بنابرین اثبات ۲م تمام است.

Subject:
Date

هدف میانی:

بردار ویژه مربوط به دومین بزرگترین

مقدار ویژه M (نیمه معین مثبت)

الگوریتم توان ۲:

ورودی: (M, k, V_1)

بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه: V_1

ماتریس نیمه معین: M

۱- $\{-1, +1\} \xrightarrow{\text{تصادفی}} X$

۲- $X_0 := X - V_1 \cdot \langle X, V_1 \rangle$

۳- $\text{for } i := 1 \text{ to } k$

$X_i := M \cdot X_{i-1}$

۴- X_k را برگردان. $(M^k X_0 = X_k)$

Subject:
Date

$$X = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$X_0 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$M^k X_0 = \underbrace{\alpha_2 \lambda_2^k v_2}_{\text{رشد این قسمت از بقیه بیشتر است.}} + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$$

$$\frac{X_k^T M X_k}{X_k^T X_k} \geq \mu_2 (1 - ۲٤)$$

با احتمال حداقل ۳/۱۶

P4PCO

Subject :
Date

جواب نهایی :

$$L = I - \frac{1}{d} A$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda_n \le -\lambda_{n-1} \cdots \le -\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_n \le 2 \quad \Longrightarrow$$

$$0 \le 2 - \lambda_n \le \cdots \le 2 - \lambda_1 = 2$$

ورودی الگوریتم سوال ۲ : $\left(M = 2I - L \right.$ ، و $\frac{1}{4} \log \frac{n}{4} \le k$ ، و $\left. V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Subject:
Date

$$X_k^T X_k - X_k^T L X_k = X_k^T (2I - L) X_k \geq$$

$$(1-\epsilon)(2-\lambda_2)(X_k^T X_k) \Rightarrow$$

$$X_k^T L X_k \leq (2\epsilon + \lambda_2) \qquad v_k \perp v_1$$

الگوریتم در زمان اجرای :

$$O\left((|V|+|E|)\frac{1}{\epsilon}\log |V|/\epsilon\right)$$

که برای v_2^* داریم :

$$R(v_2^*) \leq \lambda_2 + \epsilon$$

اگر ϵ ، خیلی کوچک باشد زمان اجرا بالا می رود .

اگر λ_2 بزرگ باشد (گراف همبند باشد) ϵ نیاز به کوچک شدن ندارد و زمان اجرا

خوب است .

اگر برای L ، λ_2 کوچک باشد آن گاه ،

چون L وارون پذیر نیست. ($\lambda_1 = 0$)

شبه وارون L : L^+

λ_i مقدار ویژه L ، آن گاه ، $\frac{1}{\lambda_i}$ مقدار ویژه L^+ .

$$LV = \lambda^* V \qquad L = \sum \lambda_i V_i V_i^T$$

$$L^+ V = \frac{1}{\lambda} V \qquad L^+ = \sum \frac{1}{\lambda_i} V_i V_i^T$$

$$\lambda_i \neq \lambda_0$$

اگر λ_2 کوچک بود به جای $2I - L^*$ در الگوریتم توان ۲ ، $2I - L^+$ می گذاریم . اما باید $L^+ x_{i-1} \Rightarrow x_i$ را سریع حساب کنیم یعنی باید معادله خطی $\boxed{X_{i-1} = L X_i}$ را، تقریباً خطی برحسب غیر صفرهای L حل کنیم که خود مبحث جداگانه‌ای است.

الگوریتمی برای حل آن ارائه شده است که از مرتبه: $O\left((|V|+|E|)(\log |V|)^{O(1)}\right)$