بسم الله الرحمن الرحيم

جلسه پانزدهم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

روش دوم: خلاصه‌سازی خطی غافل

انگیزه

- روش قبلی:

$$p_i \ \propto \ \|a_i\|_2\|b_i\|_2$$

احتمال انتخاب i

- این روش: Π را مستقل از A و B

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*−JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

معادل است با: $\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p \leq \varepsilon \delta^{1/p}$

$(\mathbb{E}[Z^p])^{1/p}$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

$\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p \leq \varepsilon\delta^{1/p}$ معادل است با:

$(\mathbb{E}[Z^p])^{1/p}$

1. Dense sub-Gaussian matrix: $(\varepsilon, \delta, \lg\frac{1}{\delta})-$ JLMP, with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\delta}$
2. AMS sketch matrix: $(\epsilon, \delta, 2)-$ JLMP with $m \simeq 1/\epsilon^2\delta$.
3. Fast JL matrix: $(\epsilon, \delta, \lg(\frac{n}{\delta}))-$ JLMP with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon}\lg\frac{1}{\delta}$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and D is a distribution over Π. D satisfies the (ε,δ,p)–JL moment property if for any x of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p\delta$.

3. Fast JL matrix: $(\epsilon, \delta, \lg(\frac{n}{\delta}))-$ JLMP with $m \simeq \frac{1}{\varepsilon}\lg\frac{1}{\delta}$

Theorem 5.3.1. *As long as $m \simeq \varepsilon^{-2}\log(1/\delta)$ and $s \simeq \varepsilon m$,*

$$\forall z : \|z\|_2 = 1,\ \mathbb{P}_{\Pi}(|\|\Pi z\|_2^2 - 1| > \varepsilon) < \delta.$$

$$\mathbb{E}\,|Z|^p = \int_0^\infty p x^{p-1} P(|Z| > x)dx$$

ادامه ...

Definition 37. *$\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and D is a distribution over Π. D satisfies the $(\varepsilon, \delta, p)-$JL moment property if for any x of unit norm, we have $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.*

DJL: $$\mathbb{P}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p}$$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*−JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

DJL: $$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p}$$

Definition 37. $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *and* D *is a distribution over* Π. D *satisfies the* (ε, δ, p)*−JL moment property if for any* x *of unit norm, we have* $\mathbb{E}_{\Pi\sim D}|\|\Pi x\|_2^2 - 1|^p < \varepsilon^p \delta$.

DJL: $$\mathbb{P}_{\Pi\sim\mathcal{D}}\left(\left|\|\Pi z\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{\|\|\Pi z\|_2^2 - 1\|_p^p}{\varepsilon^p} < \delta$$

Claim 38. *If* Π *comes from* (ε, δ, p)*–JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

Claim 38. *If Π comes from $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$, $p \geq 1$, then $\forall x, y$ of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

؟

Claim 38. *If* Π *comes from* (ε, δ, p)*−JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$\langle x, y \rangle = \quad ؟$$

چون JLMP امید فاصله را نگه می‌دارد.

پس: ضرب را تبدیل به فاصله

$$||x-y||_2^2 = ||x||_2^2 + ||y||_2^2 - 2\langle x, y\rangle$$

چون JLMP امید فاصله را نگه می‌دارد.

پس: ضرب را تبدیل به فاصله

$$||x-y||_2^2 = ||x||_2^2 + ||y||_2^2 - 2\langle x, y\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

Claim 38. *If* Π *comes from* (ε, δ, p)*−JLMP,* $p \geq 1$*, then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\begin{aligned} &\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \\ &\quad \leq \frac{1}{2}\Big\|\|\Pi x\|_2^2 - 1\Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\|\|\Pi y\|_2^2 - 1\Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\|\|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2\Big\|_p \end{aligned}$$

Claim 38. *If* Π *comes from* $(\varepsilon, \delta, p)-$*JLMP*, $p \geq 1$, *then* $\forall x, y$ *of unit norm,*

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

JLMP: ضرب داخلی را حفظ می‌کند

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 + \|\Pi y\|_2^2 - \|\Pi(x - y)\|_2^2)$$

$$\langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|\Pi x\|_2^2 - 1 + \|\Pi y\|_2^2 - 1 + \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi x\|_2^2 - 1 \Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi y\|_2^2 - 1 \Big\|_p + \frac{1}{2}\Big\| \|\Pi(x - y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2 \Big\|_p$$

$$\frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2} \qquad \frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2} \qquad ||(x-y)||_2^2 \cdot \frac{\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}}}{2}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$\underset{\Pi \sim D}{\mathbb{P}}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$\boxed{M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B}$$

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F)^p}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon \delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

?

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \Big\| \|M\|_F^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$$

$$\boxed{X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle}$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \Big\|\, \|M\|_F^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

?

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

ai: ستون i از A

bj: ستون j از B

؟

$$M_{ij}^2 = (\langle \Pi a_i, \Pi b_j \rangle - \langle a_i, b_j \rangle)^2$$

$$= \left(\left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle \right)^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \Big\| \|M\|_F^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

A از i ستون :ai

B از j ستون :bj

؟

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &= (\langle \Pi a_i, \Pi b_j \rangle - \langle a_i, b_j \rangle)^2 \\ &= \left(\left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle \right)^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \end{aligned}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\ &\le \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&\le \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2
\end{aligned}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}} &= \left\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \\ &\leq \sum_{i,j} \left\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \\ &= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} &= \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&\le \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \\
&\le (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \le (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}} &= \left\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sum_{i,j} \left\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2 \\
&\leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \\
&= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \left(\sum_i ||a_i||_2^2 \right) \cdot \left(\sum_j ||b_j||_2^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$X_{ij} \triangleq \left\langle \Pi \frac{a_i}{\|a_i\|}, \Pi \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle - \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{b_j}{\|b_j\|} \right\rangle$$

$$\Big\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \Big\|_{\frac{p}{2}} = \Big\| \sum_{i,j} X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \sum_{i,j} \Big\| X_{ij}^2 \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \Big\|_{\frac{p}{2}}$$

$$= \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \|X_{ij}\|_p^2$$

$$\| \langle \Pi x, \Pi y \rangle - \langle x, y \rangle \|_p \leq (3\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \sum_{i,j} \|a_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2$$

$$= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 \left(\sum_i ||a_i||_2^2 \right) \cdot \left(\sum_j ||b_j||_2^2 \right)$$

$$= (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 ||A||_F^2 \cdot ||B||_F^2$$

$$\left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \leq (3\epsilon\delta^{\frac{1}{p}})^2 ||A||_F^2 \cdot ||B||_F^2$$

$$\mathbb{E}\,\|M\|_F^p = \left\| \|M\|_F^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \left\| \sum_{i,j} M_{ij}^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \leq (3\varepsilon\delta^{\frac{1}{p}})^p \|A\|_F^p \|B\|_F^p$$

$$M \triangleq A^T B - (\Pi A)^T \Pi B$$

$$\mathbb{P}_{\Pi\sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F) < \frac{\mathbb{E}\,\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F^p}{(3\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F)^p}$$

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

الگوریتم:

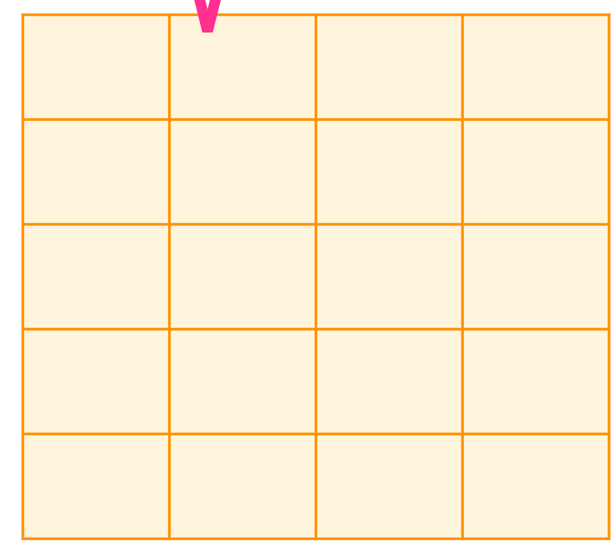
- یک Π تصادفی
- همه چیز خوب است!

D: CountSketch

با احتمال ۱/۲

یک ±۱ در هر ستون
(در سطر h(i))

$\Pi =$



Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

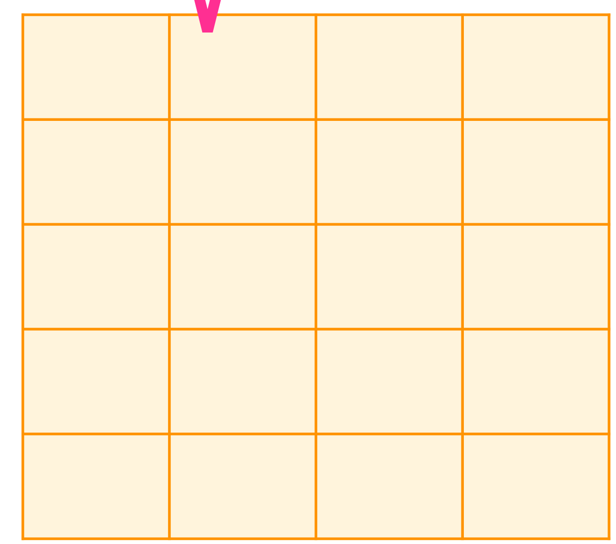
D: CountSketch

$(\varepsilon, \delta, 2)-$JLMP for $m \simeq \frac{1}{\varepsilon^2 \delta}$

با احتمال ۱/۲

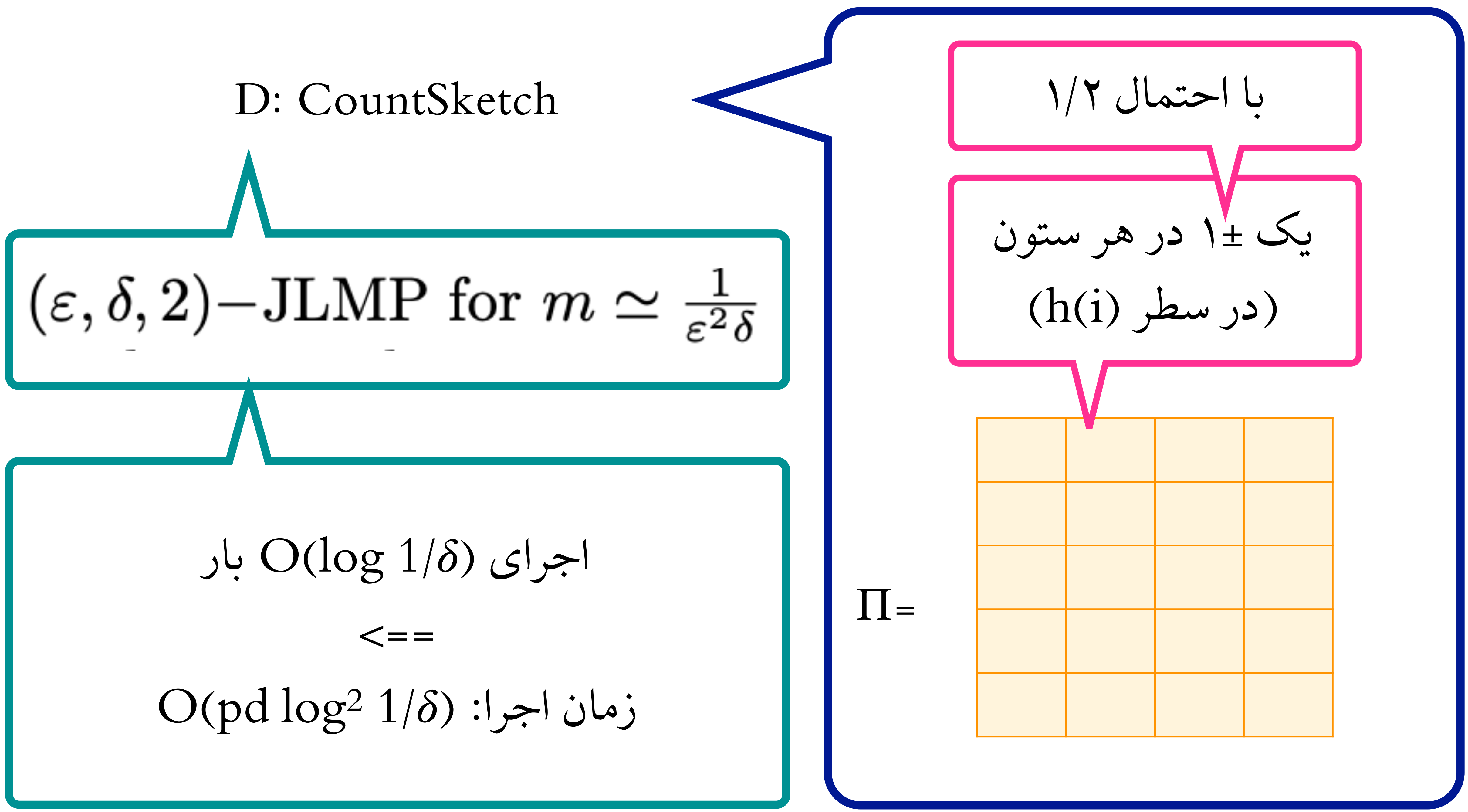
یک ±۱ در هر ستون

(در سطر h(i))

$\Pi =$ 

Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-$JLMP for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$



Theorem 39. *Suppose D has $(\varepsilon, \delta, p)-JLMP$ for $p \geq 2$, then for A, B as before,*

$$P_{\Pi \sim D}(\|A^T B - (\Pi A)^T \Pi B\|_F > 3\varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \delta$$

جمع‌بندی: ضرب ماتریس

- هدف:

$$P_{\Pi\sim D}(\|A^TB - (\Pi A)^T\Pi B\|_F > 3\varepsilon\|A\|_F\|B\|_F) < \delta$$

- روش ۱: روش نمونه‌گیری
  - زمان: $O(pd \log^2 1/\delta)$

- روش ۲: روش A و B_ غافل
  - زمان: $O(pd \log^2 1/\delta)$

نشاندن زیرفضا

تقریب ماتریس با نرم عملگری

قبلا

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

تقریب نرم فروبنیوس

الآن

$$\|(\Pi A)^\top (\Pi A) - A^\top A\| < \varepsilon \|A\|^2 = \varepsilon \|A^\top A\|$$

تقریب نرم عملگری

تقریب ماتریس با نرم عملگری

قبلا

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

تقریب نرم فروبنیوس

الآن

$$\|(\Pi A)^\top (\Pi A) - A^\top A\| < \varepsilon \|A\|^2 = \varepsilon \|A^\top A\|$$

تقریب نرم عملگری

==

$$\forall \|x\|_2 = 1,\ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \leq \sup_{\|z\|_2=1} \varepsilon \|Az\|_2^2$$

تقریب ماتریس با نرم عملگری

قبلا

$$\mathbb{P}(\|C - A^T B\|_F > \varepsilon \|A\|_F \|B\|_F) < \eta$$

تقریب نرم فروبنیوس

الآن

$$\|(\Pi A)^\top (\Pi A) - A^\top A\| < \varepsilon \|A\|^2 = \varepsilon \|A^\top A\|$$

تقریب نرم عملگری

==

$$\forall \|x\|_2 = 1, \ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \leq \sup_{\|z\|_2 = 1} \varepsilon \|Az\|_2^2$$

قوی‌تر

$$\forall \|x\|_2 = 1, \ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \leq \varepsilon \|Ax\|_2^2$$

نشاندن زیرفضا E

$$\forall \|x\|_2 = 1,\ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \le \varepsilon \|Ax\|_2^2$$

نشاندن زیرفضا E

$$\forall \|x\|_2 = 1,\ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \leq \varepsilon \|Ax\|_2^2$$

پایه متعامد یکه E

$$\forall \|z\|_2 = 1,\ \left| \|\Pi U z\|_2^2 - \|Uz\|_2^2 \right| \leq \varepsilon \|Uz\|_2^2$$

نشاندن زیرفضا E

$$\forall \|x\|_2 = 1,\ \left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \le \varepsilon \|Ax\|_2^2$$

پایه متعامد یکه E

$$\forall \|z\|_2 = 1,\ |\|\Pi U z\|_2^2 - \|Uz\|_2^2| \le \varepsilon \|Uz\|_2^2$$

$$\sup_{\|z\|_2=1} |\|\Pi U z\|_2^2 - 1| \le \varepsilon$$

نشاندن زیرفضا E

$$\forall \|x\|_2 = 1, \;\left| \|\Pi A x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \right| \leq \varepsilon \|Ax\|_2^2$$

پایه متعامد یکه E

$$\forall \|z\|_2 = 1, \;| \|\Pi U z\|_2^2 - \|Uz\|_2^2 | \leq \varepsilon \|Uz\|_2^2$$

$$\sup_{\|z\|_2=1} | \|\Pi U z\|_2^2 - 1 | \leq \varepsilon$$

Definition 6.2.1. Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a linear subspace. Then $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is an *ε-subspace embedding for E* if

$$\forall x \in E, \;(1-\varepsilon)\|x\|_2^2 \leq \|\Pi x\|_2^2 \leq (1+\varepsilon)\|x\|_2^2.$$

چگونه U را بیابیم؟

$$\sup_{\|z\|_2=1} \left| \|\Pi U z\|_2^2 - 1 \right| \le \varepsilon$$

$$U \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

$$\Pi = U^\top \in \mathbb{R}^{d\times n}$$

$$U^\top U = I$$

کند!

چگونه U را بیابیم؟

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\underset{\Pi\sim\mathcal{D}}{\mathbb{P}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

چگونه U را بیابیم؟

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m \times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathbb{P}_{\Pi \sim \mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top (\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مقادیر تکینگی

چگونه U را بیابیم؟

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مقادیر تکینگی

$$\|M\|_F \leq \|M\|$$

چگونه U را بیابیم؟

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مقادیر تکینگی

$$\|M\|_F \leq \|M\|$$

$$\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| \leq \|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\|_F,$$

چگونه U را بیابیم؟

Definition 6.2.8. An (ε, d, δ)-*oblivious subspace embedding (OSE)*, is a distribution $\mathcal{D}$ over $\mathbb{R}^{m\times n}$ such that for any matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times d}$ with orthonormal columns (i.e. for any linear subspace, which is the column space of U),

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi\sim\mathcal{D}}(\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| > \varepsilon) < \delta.$$

مقادیر تکینگی

$$\|M\|_F \leq \|M\|$$

$$\|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\| \leq \|(\Pi U)^\top(\Pi U) - I\|_F,$$

Theorem 6.1.4. *Suppose* $\Pi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *is drawn from a distribution satisfying the* (ε, δ, p)*-JL moment property for some* $p \geq 2$. *Then*

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\Pi}\left(\|(\Pi A)^\top(\Pi B) - A^\top B\|_F > \varepsilon\|A\|_F\|B\|_F\right) < \delta.$$

مثال: رگرسیون

مسئله رگرسیون

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

مسئله رگرسیون

$X \in \mathbb{R}^{n\times d}$

n>>d و

ویژگی‌ها

هدف پیش‌بینی

$$X\beta \simeq y$$

؟

فرض: رابطه خطی

مسئله رگرسیون با کم‌ترین مربعات

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$y \in \mathbb{R}^n$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = \underbrace{y^{\perp}}_{} + \underbrace{y^{\|}}_{}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2$$

حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\parallel}$$

$$\begin{aligned}\|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\parallel}\|_2^2 \\ &= \|X\beta - y^{\parallel}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\parallel}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.\end{aligned}$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آنچه دست ماست

حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\begin{aligned}
\|X\beta - y\|_2^2 &= \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2 \\
&= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.
\end{aligned}$$

آنچه دست ماست

$$\boxed{X\beta = y^{\|}}$$

حل:

در زیرفضای ستون‌های X

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آنچه دست ماست

$$X\beta = \hat{y}^{\|}$$

تصویر y: $X(X^{\top}X)^{+}X^{\top}\mathrm{y}$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آن‌چه دست ماست

$$\beta^{LS} = (X^{\top}X)^{+}X^{\top}y$$

تصویر y: $X(X^{\top}X)^{+}X^{\top}\mathrm{y}$

$$X\beta = y^{\|}$$

حل:

در زیرفضای عمود بر ستون‌های X

در زیرفضای ستون‌های X

$$y = y^{\perp} + y^{\|}$$

$$\|X\beta - y\|_2^2 = \|X\beta - y^{\perp} - y^{\|}\|_2^2$$

$$= \|X\beta - y^{\|}\|_2^2 - 2\underbrace{\langle X\beta - y^{\|}, y^{\perp}\rangle}_{0} + \|y^{\perp}\|_2^2.$$

آنچه دست ماست

$$\beta^{LS} = (X^\top X)^+ X^\top y$$

تصویر y: $X(X^\top X)^+ X^\top$y

$$X\beta = \grave{y}^{\|}$$

زمان؟

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

$$\xrightarrow{\Pi X, \, \Pi y}$$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

تصویر y: $(X^{\top}X)^{+}X^{\top}$y.

ΠX, Πy

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

ایده:

$$\beta^{LS} = \underset{\beta}{argmin} \, \|X\beta - y\|_2$$

تصویر y: $(X^\top X)^+ X^\top y$.

$\Pi X, \Pi y$

$$\tilde{\beta}^{LS} = argmin \, \|\Pi X\beta - \Pi y\|_2^2$$

تصویر y: $((\Pi X)^\top (\Pi X))^+ (\Pi X)^\top \Pi y$.