دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

مثال‌هایی از برنامه‌ریزی خطی

جلسهٔ دوم

نگارنده: امیرعباس استوار

۱ مثال و مفاهیم آغازین

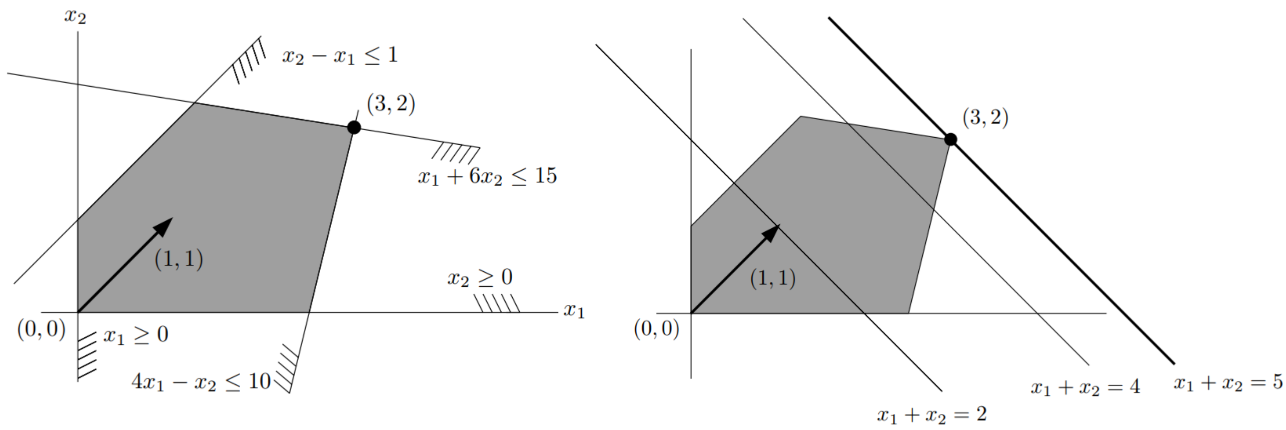
انگیزهٔ پیدایش مباحث درس تحقیق در عملیات، تصمیم‌گیری بهتر بوده است؛ بهتر به معنی بهینه‌تر. هر جا نیاز داریم برای تصمیم‌گیری بهتر چیزی را بهینه کنیم تحقیق در عملیات به ما کمک خواهد کرد؛ مثلا در یک کارخانه چه مقدار از چه محصولاتی باتوجه به منابعمان تولید کنیم تا سودمان بیشینه شود. می‌خواهیم مؤلفه‌ای را، روی همهٔ حالت‌های ممکن تحت محدودیت‌هایی، بیشینه یا کمینه کنیم. به چنین مسائلی به طور کلی مسائل **برنامه‌ریزی ریاضی** یا به اختصار برنامه‌ریزی می‌گویند. این مثال شکل کلی آن‌ها را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned} \text{بیشینه کن} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{که} \quad & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leqslant 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leqslant 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leqslant 10. \end{aligned}$$

یعنی می‌خواهیم روی همهٔ $(x_1, x_2) \in R^2$، $x_1 + x_2$ بیشینه شود، زمانی که محدودیت‌های ذکرشده را هم برآورده کند. تابعی را که قرار است بهینه شود **تابع هدف** می‌گوییم، و محدودیت‌ها را که مجموعه‌ای از نامساوی‌ها و تساوی‌ها است، **قیود** می‌گوییم. اگر تابع هدف و قیود مسئله خطی باشند در این صورت **برنامه‌ریزی خطی** می‌گوییم. اگر تابع هدف و قیود نامساوی محدب و قیود تساوی خطی باشند به آن برنامه‌ریزی محدب می‌گوییم، که سطح پیشرفته‌تری از برنامه‌ریزی ریاضی است.

۲ نمایش جبری و هندسی

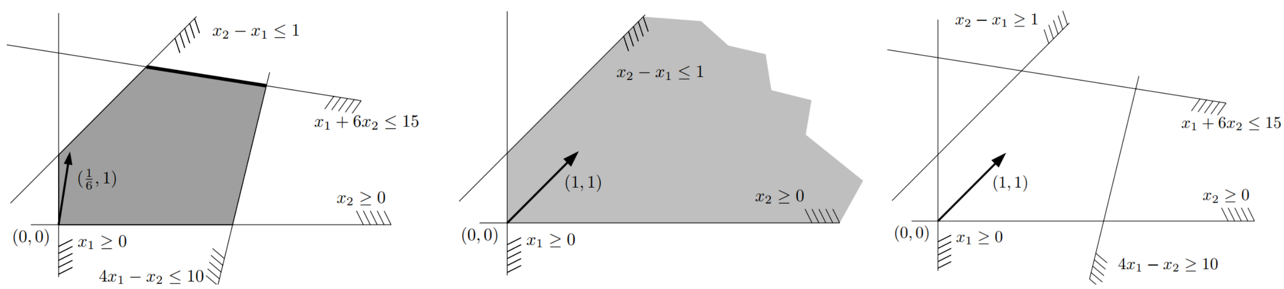
اگر سعی کنیم معادلات مثال بالا را در یک صفحهٔ دوبعدی نشان دهیم، موفق خواهیم شد شکل زیر را بکشیم. $x_1 \geq 0$ نیم‌صفحهٔ سمت راستِ بردار عمودی مختصات است و $x_2 - x_1 \leqslant 1$، نیم‌صفحه‌ای زیر خط مربوطه. اشتراک همهٔ این قیود فضای خاکستری‌رنگ در شکل زیر را به وجود میاورد که همان فضای برآورندهٔ قیودِ مسئله است؛ که به آن **فضای شدنی** می‌گوییم و فضای غیر از آن را **فضای نشدنی** می‌نامیم. به طور کلی مؤلفه‌های جبری مسائل برنامه‌ریزی، علاوه بر صورت جبری صورت هندسی هم دارند که استفاده از آن‌ها به حل مسائل کمک می‌کند.



شکل ۱: نمایش هندسی مسئله ـ سطح تراز

به طور خاص تابع هدف را می‌توان به شکل یک بردار نشان داد که می‌توان روی صفحه تکیه‌گاهش جابجا کرد. (در شکل زیر برداری که پررنگ نشان داده شده.) این کار چه کمکی می‌کند؟ اگر خط عمود بر این بردار را رسم کنیم خاصیت مهمی دارد، اینکه در تمام طول این خط مقدار تابع هدف یکسان است، به همین خاطر به آن یک **سطح تراز** می‌گوییم. حال اگر تکیه‌گاه بردار هدف را در جهت خود جلو ببریم و دوباره خط عمود بر آن را رسم کنیم، به سطح تراز دیگری می‌رسیم که مقدار تابع هدف در آن بیش از حالت قبل است. هرچه بردار را در این جهت جلوتر ببریم مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد (شکل ۱ سمت راست)؛ پس می‌توانیم این کار را تا جایی که قیود اجازه می‌دهند انجام دهیم، یعنی تا جایی که خط عمود با فضای خاکستری‌رنگ، فضای شدنی، اشتراک دارد (که در اینجا یک نقطه است). این اشتراک نشان‌دهندهٔ سطح تراز با بزرگترین مقدار است و به عبارتی جواب مسئله است.

این جواب لزومی ندارد یگانه باشد، به تعبیر هندسی، این اشتراک گاهی می‌تواند نقطه باشد، گاهی پاره‌خط ، گاهی تهی باشد و حالات دیگر. اما فضای شدنی در برنامه‌ریزی خطی، همواره فضایی محدب است. اگر تابع هدف مثال بالا را به $\frac{1}{6}x_1 + x_2$ تغییر دهیم، جواب ما یک پاره‌خط خواهد بود که تماما در یک سطح تراز است. اگر در قیود، علامت کوچکترمساوی را به بزرگترمساوی تغییر دهیم، فضای شدنی تهی خواهد شد چون اشتراکی با هم ندارند. اگر دو قید آخر را حذف کنیم، بردارِ تابع هدف را تا بینهایت می‌توان ادامه داد و فضای شدنی نامتناهی می‌شود.



شکل ۲: نمایش هندسی مسئله ـ انواع جواب

۳ برنامه‌ریزی خطی و جبر خطی

بنابراین حالت کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به این صورت تعریف کرد:

برنامه‌ریزی خطی، مسئلهٔ بیشینه‌کردن یک تابع خطی است، روی مجموعهٔ تمام بردارهایی که برآورندهٔ دستگاه داده‌شده‌ای از نامعادلات باشد. هر برنامه‌ریزی خطی به سادگی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\textbf{بیشینه کن } c^T x \textbf{ را به طوری که } Ax \leqslant b$$

که در آن x بردار متغیرها، c^T برداری از ثابت‌های مسئله که تابع هدف را می‌سازد، و A و b ماتریس و بردار تعیین‌کنندهٔ نامعادله‌هایی‌اند که قیود مسئله را می‌سازند.

	Basic problem	Algorithm	Solution set
Linear algebra	system of linear equations	Gaussian elimination	affine subspace
Linear programming	system of linear inequalities	simplex method	convex polyhedron

شکل ۳: مقایسهٔ برنامه‌نامه‌ریزی و جبر خطی

برنامه‌ریزی خطی شباهت‌های بسیاری با جبرخطی دارد. مسئلهٔ پایه به جای معادلات خطی، اینجا نامعادلات خطی است؛ روش پایه به جای حذف گاوسی، روش سیمپلکس است؛ و مجموعهٔ جواب به جای زیرفضای آفین، چندوجهی محدب است. اما علت اهمیت برنامه‌ریزی خطی چیست؟ سرعت حل مسائل آن! که این یعنی اگر بتوانیم چه مشکلات عملی و چه مسائل نظری مختلف را به مسائل برنامه‌ریزی خطی تبدیل کنیم، به قدرت بالایی برای رفع این مشکلات دست یافتیم. در ادامه دو مسئله را به مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کنیم.

۴ نوشتن دو مثال واقعی به زبان برنامه‌ریزی

۱.۴ مسئلهٔ رژیم غذایی

اولین مسئلهٔ واقعی برنامه‌ریزی خطی در سال ۱۹۴۷ حل شد. می‌خواستند یک برنامهٔ غذایی تدارک ببینند که باعث شد مسئله‌ای با ۷۷ متغیر و ۹ قید طرح کنند، که حل آن ۱۲۰ نفر/روز به طول انجامید. در اینجا یک مثال مشابه طرح می‌کنیم. می‌خواهیم یک رژیم غذایی برای بچه‌ها تدارک ببینیم که با صرف کمترین هزینهٔ ممکن، ویتامین‌های مورد نیازشان را تأمین کند. فرض می‌کنیم سه خوراکی و سه ویتامین داریم که در جدول آمده:

Food	Carrot, Raw	White Cabbage, Raw	Cucumber, Pickled	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

شکل ۴: اطلاعات مسئلهٔ رژیم غذایی

برای نوشتن مسئلهٔ برنامه‌ریزی، قدم اول تعریف متغیرهاست. آنچه باید تهیه کنیم، خوراکی‌ها هستند پس هویج را x_1 ، کلم را x_2 و خیارچنبر را x_3 می‌نامیم.

قدم بعدی نوشتن تابع هدف است. در این سوال می‌خواهیم هزینه کمینه شود، بنابراین تابع هدف برابر است با مجموع هزینهٔ هر خوراک:

$$\text{تابع هدف: } ۰/۷۵x_1 + ۰/۵x_2 + ۰/۱۵x_3$$

قدم سوم اعمال قیدها است: باید حداقل ویتامین‌های موردنیاز تأمین شود. بنابراین سه نامعادله برای هر یک از ویتامین‌ها خواهیم داشت:

$$۳۵x_1 + ۰/۵x_2 + ۰/۵x_3 \geq ۰/۵$$

$$۶۰x_1 + ۳۰۰x_2 + ۱۰x_3 \geq ۱۵$$

$$۳۰x_1 + ۲۰x_2 + ۱۰x_3 \geq ۴$$

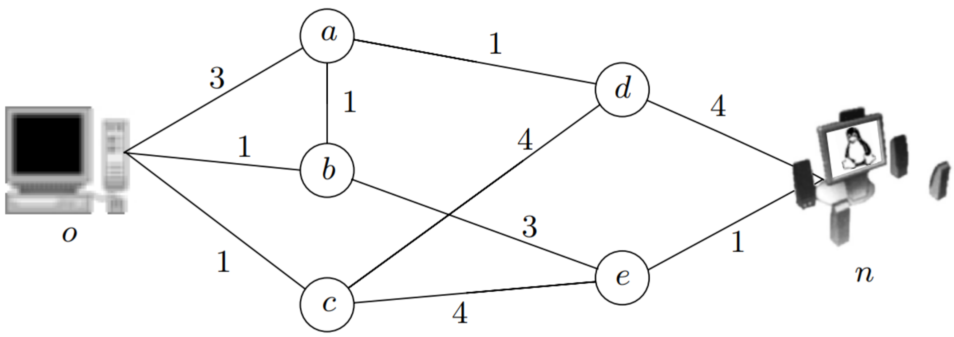
علاوه بر این نکته‌ای هم در سوال مستتر است، اینکه غذای منفی بی‌معناست! پس سه قید دیگر اضافه می‌کنیم:

$$x_۱ \geq ۰$$
$$x_۲ \geq ۰$$
$$x_۳ \geq ۰$$

حال مسئله کامل است و اگر آن را حل کنیم به جواب بهینهٔ ۰۷.۰ دلار خواهیم رسید و مقادیر ۵.۹، ۳۸ و ۲۹۰ گرم به ترتیب برای هویج، کلم و خیارچنبر.

۲.۴ مسئلهٔ شار شبکه

دومین مثالی که به آن می‌پردازیم، شار شبکه است. در واقع نخستین بار چنین مسئله‌ای را ارتش آمریکا طرح کرد برای تخریب شبکهٔ ریلی شوروی! در اینجا فرض می‌کنیم یک فرستنده و یک گیرنده داریم و می‌خواهیم بیشترین اطلاعات ممکن را منتقل کنیم از طریق مسیری در نقشه‌ای که همراه با محدودیت‌های ظرفیتی‌اش به صورت گرافی در زیر آمده. جهت حرکت جریان در هر یال تحت اختیار ماست، اما فعلا فرض می‌کنیم به طور همزمان ممکن نیست در دو جهت مخالف جریان حرکت کند. پس به دلخواه جهت هر یال را مشخص می‌کنیم و می‌دانیم اگر مقداری منفی به دست آوردیم، یعنی جریان خلاف آن جهت حرکت می‌کند.



شکل ۵: اطلاعات مسئلهٔ شار شبکه

گام اول: ابتدا باید متغیرها را تعریف کنیم. از آنجا که مجهول ما میزان جریانی است که هر یال منتقل می‌کند، متغیرها را به صورت x_{AB} تعریف می‌کنیم، یعنی جریانی که در سیمِ بین رأس A و B از اولی به دومی می‌رود.

گام دوم: سپس سراغ تعریف تابع هدف می‌رویم. هدف ما این است که مجموع شار خروجی از مبدأ o بیشینه شود. یعنی:

$$\text{تابع هدف:} \quad x_{oa} + x_{ob} + x_{oc}$$

گام سوم: قدم نهایی تعیین محدودیت‌ها است. اولا جریان هر یال باید کمترمساوی ظرفیتش باشد، و دقت کنید که هر دو جهت را باید چک کنیم. خواهیم داشت:

$$-۳ \leqslant x_{oa} \leqslant ۳, -۱ \leqslant x_{ob} \leqslant ۱, -۱ \leqslant x_{oc} \leqslant ۱, -۱ \leqslant x_{ab} \leqslant ۱, -۱ \leqslant x_{ad} \leqslant ۱$$
$$-۳ \leqslant x_{be} \leqslant ۳, -۴ \leqslant x_{cd} \leqslant ۴, -۴ \leqslant x_{ce} \leqslant ۴, -۴ \leqslant x_{dn} \leqslant ۴, -۱ \leqslant x_{en} \leqslant ۱$$

ثانیا باید ورودی و خروجی هر رأس یکسان باشد. پس به‌عنوان مثال برای رأس d می نویسیم:

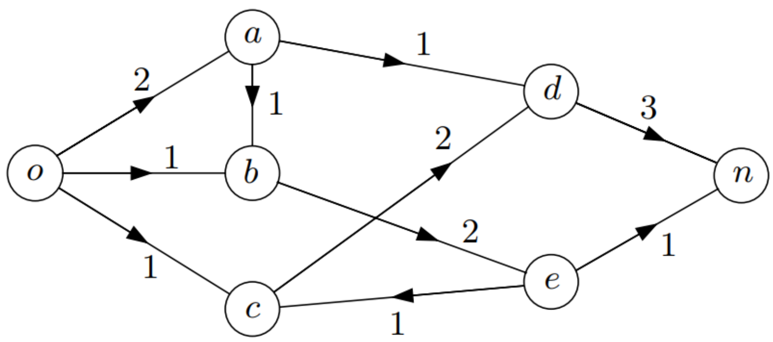
$$x_{oa} = x_{ab} + x_{od}$$
$$x_{ob} + x_{ab} = x_{be}$$
$$x_{oc} = x_{cd} + x_{ce}$$
$$x_{ad} + x_{cd} = x_{dn}$$
$$x_{be} + x_{ce} = x_{en}$$

در اینجا می‌بینیم که با معادله مواجهیم، در صورتی که گفته بودیم در برنامه‌ریزی خطی با نامعادله سروکار داریم. اگر بخواهیم این قانون را رعایت کنیم، می‌توانیم به سادگی هر تساوی را تبدیل به دو نامعادلهٔ بزرگترمساوی و کوچکترمساوی صفر تبدیل کنیم.

در این سوال یک قید دیگر هم خوب است اضافه کنیم، هرچند در جواب نهایی، یعنی بیشینهٔ اطلاعات یا شار انتقالی، تغییری ایجاد نمی‌کند، اما می‌تواند از بدشکل شدن مسیر و زیاده‌ازحد شدن شارِ ورودی جلوگیری کند. اینکه جهت جریان در سه یال خروجی از مبدأ را الزاما به سمت خروج از مبدأ بگیریم. یعنی باید داشته باشیم:

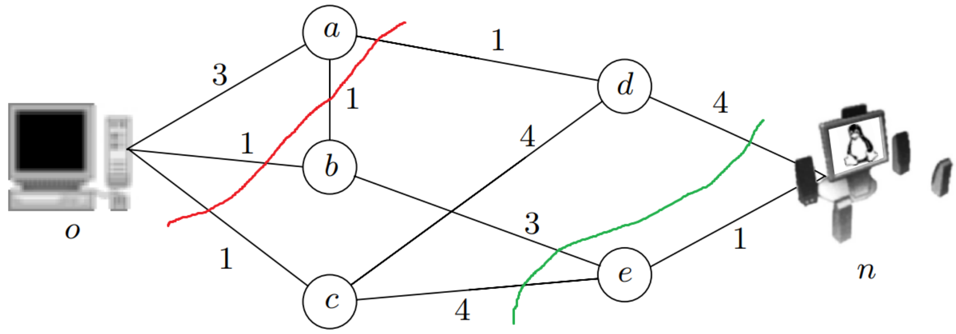
$$x_{oa} \geq 0$$
$$x_{ob} \geq 0$$
$$x_{oc} \geq 0$$

اکنون مسئله کامل شده و با حل آن به گراف زیر می‌رسیم که شار بیشینه در آن ۴ است:



شکل ۶: شار بیشینه

نکتهٔ آخری در مورد مسئلهٔ شار وجود دارد. اینکه اگر مشابه شکل زیر، یک منحنی از مسیرها رد کنیم، اصطلاحا برش دهیم، و حداکثر جریان‌ها را در یال‌های مقطوع جمع کنیم، به عددی می‌رسیم که جواب نهایی الزاما باید از آن کمتر باشد. چون برای رسیدن از مبدأ به مقصد نهایتا باید چنین مسیری طی شود و ممکن نیست بیش از این شار عبور داد. به عنوان مثال در این دو برش به محدودیت‌های ۱۱ و ۴ رسیدیم. واضح است که بعضی محدودیت‌ها قاطع‌تر است و می‌توان محدودکننده‌ترین برش را پیدا کرد که به آن **برش کمینه** می‌گویند. برش کمینه نمایانگر همان جواب بیشینه است.



شکل ۷: برش کمینه