دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

حل دستگاه تنک (۲)

جلسهٔ نوزدهم

نگارنده: سبحان ابراهیمی آذر

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسهٔ گذشته، مسئلهٔ ارسال تعدادی عدد همراه با بیشینه خطای مشخص را بررسی کردیم. برای آنکه دریافت‌کنندهٔ اعداد قادر به بازیابی مقدار درست آن‌ها باشد، ایدهٔ ارسال یک ترکیب خطی از اعداد را مطرح کردیم. همچنین دیدیم دستگاه معادلات خطی‌ای که جوابی برابر با مقدار خطای اعداد ارسالی دارد، دستگاهی تنک است و در ادامه نشان دادیم بنا بر قضیه‌ای، دستگاه خطی ما حداکثر یک جواب دارد. در ادامه می‌خواهیم با انگیزه‌ای دیگر برای حل دستگاه معادلات خطی تنک، مطالب جلسهٔ گذشته را به نحوی دیگر بیان کنیم و در ادامه چند مثال از کاربرد آن ببینیم.

۲ تبدیل فوریه

۱.۲ ایدهٔ اولیه

شخصی به نام فوریه، تلاش کرد مجموعه توابعی را پیدا کند که بتوان با مجموع ضرایبی از تابع تناوبی sin(nx) آن‌ها را ساخت. به عبارت دیگر او می‌خواست مجموع توابعی مانند f را پیدا کند که به شکل زیر باشند. سوال این است که چه توابعی در این مجموعه قرار می‌گیرند؟ آیا تمامی توابع عضو این مجموعه هستند یا فقط بعض توابع در این مجموعه قرار می‌گیرند؟ فوریه در این زمینه کارهای مفصلی انجام داده است.

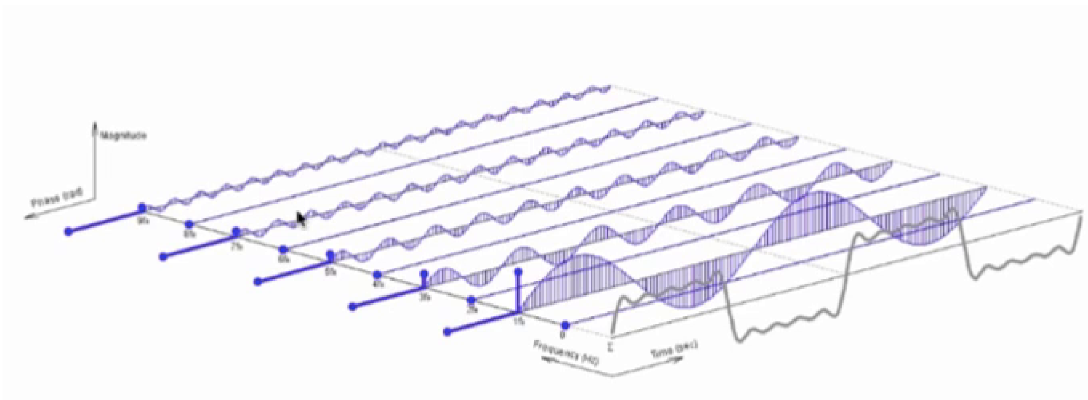
$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n sin(nx)$$

۲.۲ نیاز به کسینوس + سینوس

از آنجایی که sin(nx) در تمامی نقاط به شکل $x = k\pi$ برابر با صفر است، نمی‌توان با آن تمامی توابع را تولید کرد. لذا ایدهٔ اولیه اضافه کردن cos(nx) است تا ببینیم با این دو سری عبارت چه توابعی را می‌توان ساخت. هدف ما پاسخ دادن به این سوال نیست و ما تنها می‌خواهیم کمی با این مسأله سر و کلّه بزنیم.

۳.۲ مثال

به عنوان مثال تابع خاکستری در تصویر زیر، از جمع ضرایبی از توابع پیش از آن ساخته شده است. دقت می‌کنیم که هر دو محور به نوعی توصیف‌گر یک تابع هستند؛ محور سمت راست، تابعی پیوسته است که صریحاً مقدار را مشخص می‌کند و محور سمت چپ، تابعی گسسته است که ضرایب توابع سینوسی برای ساخت تابع خاکستری را مشخص می‌کند. اصطلاحاً به توصیف محور راستی، تابع **حوزهٔ زمان** و به توصیف محور چپی، تابع **حوزهٔ فرکانس** می‌گویند.



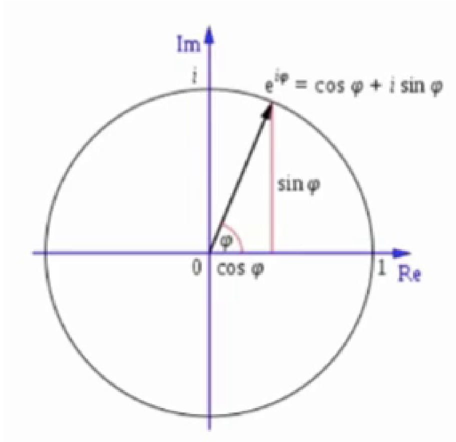
برای مثال‌های بیشتر اینجا و اینجا را ببینید.

۳ تبدیل فوریه

جواب ارائه شدهٔ فوریه این بود که تقریباً همهٔ توابع خوب را می‌توان با این توابع سینوسی و کسینوسی ساخت. به عبارت دیگر توابع فرکانسی (سینوسی و کسینوسی)، پایه‌ای برای تمامی این توابع خوب هستند. یعنی هر تابعی با ضریبی از پایه‌ها ساخته می‌شود. به عوض کردن پایهٔ یک تابع و بردن به پایهٔ فرکانس‌ها، تبدیل فوریه می‌گویند.

۴ نمایش مختلط (دایره‌ای)

از آنجایی که جمع یک سری سینوس و کسینوس، خیلی توصیف دلنشینی نیست، توصیف بهتر تجزیهٔ تابع بصورت جمع یک سری توابع مختلط است. چرا که توابع مختلط به صورت ضمنی دارای سینوس و کسینوس هستند. در حقیقت توصیف واقعی این گونه است که هر یک از توابع خوب را بصورت یک ترکیب خطی از توابع مختلط نوشت. به عبارت دیگر هر تابع خوب f(x) را می‌توان بصورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(-\frac{inx}{2\pi})}$ نوشت که در آن $i^2 = -1$ و در حقیقت $e^{(-\frac{inx}{2\pi})}$ اعدادی مختلط روی دایره هستند که مطابق شکل می‌توان آن را به صورت جمع سینوس و کسینوس نوشت. با مختلط درنظرگرفتن ضرایب a_n، هر تابع مختلط خوبی را می‌توان به صورت مذکور نوشت.



۵ تبدیل فوریه روی بردار

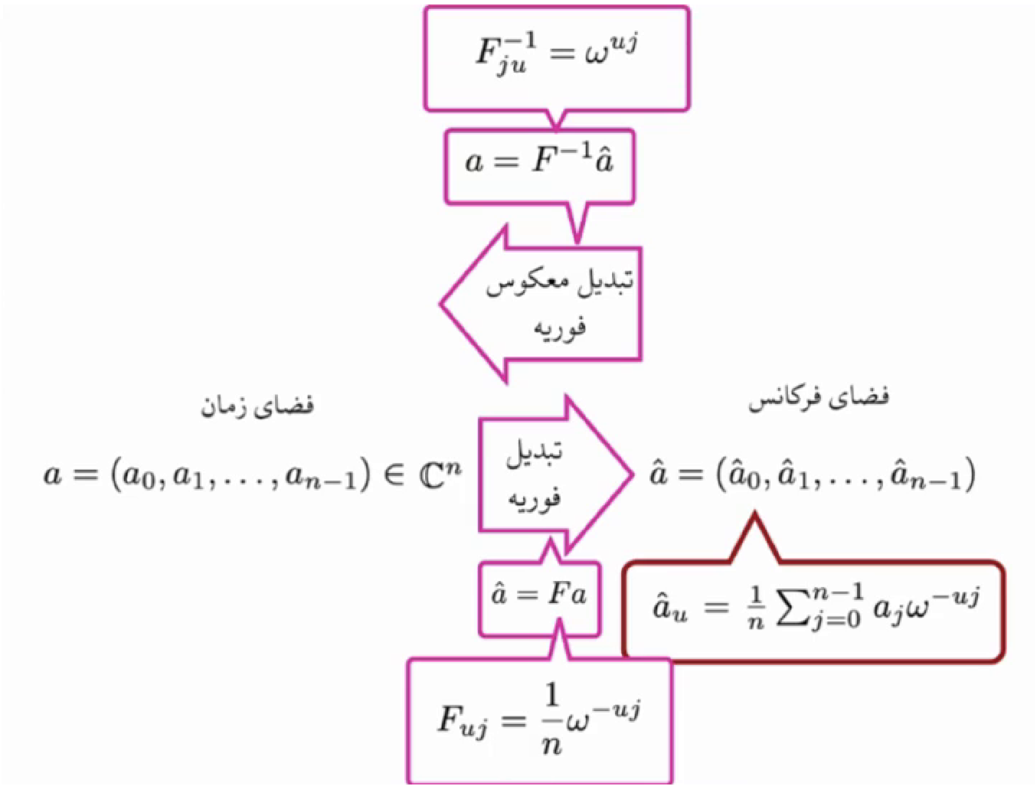
ما می‌خواهیم حاصل تبدیل فوریه روی برداری nتایی در حوزهٔ زمان را بدست بیاوریم که برداری nتایی در حوزهٔ فرکانس خواهد بود. در حقیقت این کار مشابه با درنظرگرفتن تابعی گسسته است که تنها روی دامنهٔ $\{۰, ۱, \cdots, n-۱\}$ مقدار می‌پذیرد. در واقع، توصیف بردار در حوزهٔ فرکانس، با گسسته سازی تابع حاصل از تبدیل فوریه به دامنهٔ $\{۰, ۱, \cdots, n-۱\}$ بدست می‌آید. در چنین حالتی، هر یک از توابع سینوسی و کسینوسی (در دامنهٔ جدید) یک بردار nتایی هستند؛ لذا چنین کاری در دنیای جبرخطی، مانند نوشتن یک بردار در پایه‌ای جدید است. برای عوض کردن پایهٔ بردارها، آن‌ها را در یک ماتریس ضرب می‌کنند. ماتریس F را چنین ماتریسی در نظر بگیرید که به شکل زیر خواهد بود:

$$F_{uj} = \frac{۱}{n}\omega^{-uj}$$

فرض کنید ω ریشهٔ n ام واحد باشد. در فضای اعداد مختلط، $(\omega^j)^x$ جای $sin(jx)$ کار می‌کند.

تبدیل معکوس فوریه نیز در واقع معادل با برگرداندن بردار به پایه‌های اولیه هست که ماتریس آن برابر با وارون ماتریس F خواهد بود که وارون F به شکل زیر خواهد بود:

$$F^{-۱}_{ju} = \omega^{uj}$$



۶ مثال: خروجی تنک

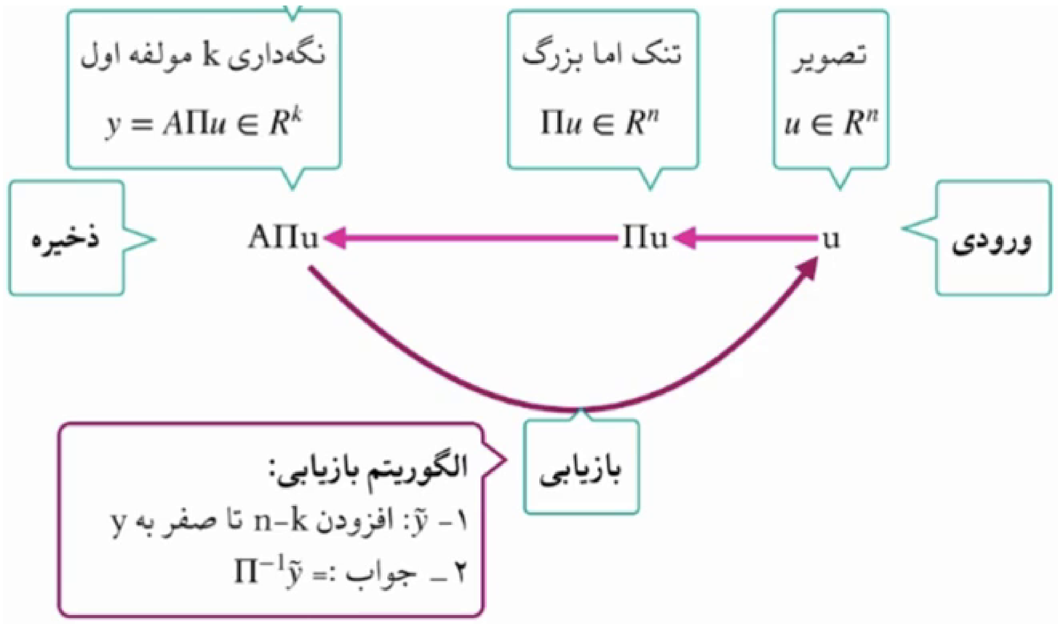
در یک مثال عملی، با تبدیل فوریه روی یک فایل صوتی، و نگه‌داشتن درایه‌های بزرگ و اعمال تبدیل معکوس فوریه شنیدیم که کلیات صوت حفظ شده است و تنها جزئیات آن تفاوت کرده و به عبارت دیگر کیفیت آن کمی کاهش پیدا کرده است در حالی که تعداد درایه‌های بزرگی که نگه می‌داریم بسیار کم‌تر از تعداد کل درایه‌های اولیه است.

۷ زمان اجرای تبدیل فوریه

می‌دانیم ضرب یک ماتریس $n \times n$ در یک بردار $n \times ۱$، $O(n^۲)$ زمان می‌برد. اما الگوریتم خوبی به اسم FFT وجود دارد که در زمان $O(nlogn)$ حاصل این ضرب را محاسبه می‌کند. طبیعتاً چنین زمان اجرایی برای ضرب هر ماتریس و بردار دلخواه برقرار نیست و ماتریس تبدیل فوریه خواص و نظمی داراست که با استفاده از آن الگوریتم با چنین زمان اجرایی یافت شده است.

۸ کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر

مشابه کاری که با فایل صوتی انجام دادیم، می‌توانیم با عکس‌ها نیز این کار را انجام دهیم. یعنی با اعمال تبدیل فوریه به برداری می‌رسیم که اغلب درایه‌های آن ناچیز هستند. اگر بدانیم درایه‌های مهم (بزرگ) از حوزهٔ فرکانس در کدام قسمت از آن بردار قرار دارند، می‌توانیم با ذخیرهٔ آن قسمت، عصاره و کلیات عکس‌ها را ذخیره کنیم و بقیه درایه‌ها را صفر در نظر بگیریم. به این ترتیب با اعمال تبدیل معکوس فوریه، تقریبی از عکس اولیه بدست می‌آید در حالی که مقدار زیادی فضا ذخیره شده است (در مثال فایل صوتی $\frac{۱}{۸۰}$ اعداد را نگه داشتیم).



صداها و تصویرهای مورد استفادهٔ ما غالباً از الگوهایی تناوبی پیروی می‌کنند به همین دلیل چنین فشرده‌سازی‌ای برای آن‌ها کارساز است و در حالت کلی، هر داده‌ای از چنین الگویی تبعیت نمی‌کند. در مورد صداها و تصاویر، اگر ما افزون بر الگوهای تناوبی، الگوهای دیگری هم اضافه کنیم، توصیف یک نمونه داده یکتا نخواهد بود و باید دید که کدام توصیف برای داده، توصیف بهتری برای ذخیره است. چه بسا با اضافه‌کردن چنین الگوهایی، یک سری توابع خیلی راحت‌تر توصیف‌پذیر شوند و این عمل باعث فشرده‌تر شدن داده‌ها می‌شود. به چنین کاری، **تبدیل موجک** می‌گویند.

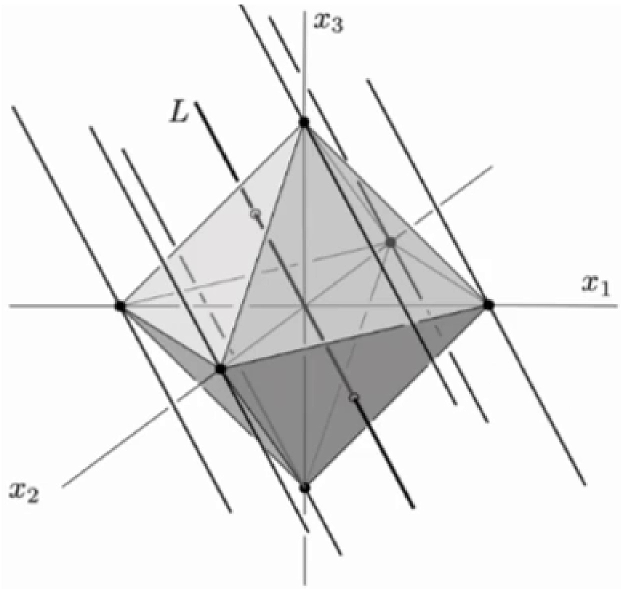
مشکل اساسی در چنین روشی آن است که وقتی نمی‌دانیم درایه‌های بزرگ کدام قسمت آن هستند چه چیزی را ذخیره کنیم؟ فرض کنید ضرب ماتریس A در بردار موجب شود که k درایهٔ بزرگ‌تر را نگه‌دارد؛ به عبارت دیگر، بردار را از فضای R^n به فضای R^k ببرد. در این صورت بازیابی آن به مسئله‌ای به شکل یافتن $x \in R^n$ بطوریکه $Ax = y$ و $\| x \|_۰ \leq k$ باشد تبدیل خواهد شد. در حقیقت x معادل با Πu در صورت‌بندی بالاست و با بدست آوردن آن و در ادامه اعمال تبدیل معکوس فوریه، می‌توان u اولیه را استخراج کرد. در ادامه مطابق استدلال‌های جلسهٔ گذشته، می‌دانیم اگر هر $۲k$ ستون یا کمتر، از A از هم مستقل خطی باشند، آنگاه دستگاه مسئلهٔ بالا حداکثر یک جواب دارد. بنابراین اگر یک جواب داشته باشد، آن جواب، تنها جواب مسئله است. بنابراین اگر در ابتدا دادهٔ ورودی را فشرده کرده باشیم تنها یک x یکتا پیدا خواهد شد که جواب مسئله باشد. پس کافیست هنگام فشرده‌سازی، ماتریس A طوری انتخاب شود که خاصیت استقلال خطی مدنظر را داشته باشد. اگر یک ماتریس تصادفی به‌اندازهٔ

کافی بزرگ ($۲k \times n$) در نظر بگیریم، دارای این خاصیت است. سپس دستگاه معادلات خطی بالا را تبدیل به برنامه‌ریزی خطی BP می‌کردیم و نشان می‌دادیم تحت شرایطی که در مسئلهٔ ما برقرار است، جواب دستگاه و برنامه‌ریزی با احتمال خوبی یکسان خواهد بود.

$$BP : min \parallel x \parallel_۱$$
$$Ax = b$$

۹ تعبیر هندسی یکسانی جواب دستگاه و برنامه‌ریزی

قید $Ax = b$ در برنامه‌ریزی BP یک صفحه است. کمینه کردن نُرمِ یک x شبیه به آن است که در بین تمامی نقاط روی صفحه، نقطه با کمترین نرم یک را در نظر بگیریم. پس می‌توان $l = \parallel x \parallel_۱$ را کشید که در ابتدا $l = ۰$ است و l تا جایی زیاد می‌شود که با صفحه تقاطع پیدا کند. بوضوح در چنین نقطه‌ای، x کم‌ترین نرم یک را داراست. همچنین این نقطه جواب مسئلهٔ قبلی (کمتر بودن نرم صفر x از k) است. یعنی اولین نقطهٔ برخورد سادک با صفحه، کمترین نرم صفر را داراست و تعداد عناصر ناصفر آن کم است. و این یعنی اولین نقطهٔ تقاطع، یا روی محورهاست یا بین محورهای کمی است.



۱۰ ارجاع و منابع

[ویدئو و برگه‌های جلسهٔ نوزدهم]