

آنالیز الگوریتمها

سری سوم تمرینات

نیمسال دوم ۹۴-۹۳

مدرس: دکتر هادی فروغمند - دکتر امید میرصادقی
دستیارهای استاد: پرهام افتخار - حسین بومری - لعلیا قدرتی

۱. فرض کنید n بازه‌ی $[a_i, b_i]$ با وزنهای w_i داده شده است. می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای از بازه‌ها را پیدا کنیم که با یکدیگر اشتراک نداشته باشند و مجموع وزنشان بیشینه باشد. الگوریتمی برای این مساله ارائه کنید.
۲. یک عقرب یک گراف بدون جهت با سه رأس خاص است: نیش، دم، و بدن. رأس نیش فقط به دم وصل است، رأس دم فقط به بدن وصل است، و رأس بدن به همه‌ی رأسهای دیگر وصل است. بقیه‌ی رأس‌ها به هر طریقی می‌توانند به هم وصل باشند. روشی ارائه کنید که با نگاه کردن به $O(n)$ درایه از ماتریس مجاورت یک گراف، تشخیص دهد که آیا گراف عقرب هست یا نه.
۳. فرض کنید گراف جهت‌دار D داده شده باشد. بستار متعددی D ، یک گراف جهت‌دار مثل D' است به طوری که u به v در D' یال دارد اگر و فقط اگر از u به v در D مسیر وجود داشته باشد. الگوریتمی برای پیدا کردن بستار متعددی یک گراف ارائه کنید.
۴. (امتیازی) ثابت کنید در هر پیمایش DFS از یک گراف حتما تمام رأسهای یک خوشه بر روی یک مسیر قرار خواهد گرفت. (به یک زیر گراف کامل از یک گراف خوشه گفته می‌شود). آیا ممکن است در یک پیمایش DFS از یک گراف رأسهای یک دور بر روی یک مسیر قرار نگیرند؟
۵. الگوریتمی برای پیدا کردن بلندترین مسیر در یک گراف جهت‌دار بدون دور ارائه کنید. مرتبه زمانی این الگوریتم از $O(V^2)$ باشد.
- (امتیازی) با توجه به نتیجه قسمت قبل الگوریتمی برای افراز راس‌های یک گراف جهت‌دار بدون دور به $k+1$ زیر مجموعه ارائه کنید که راس‌هایی که در زیر مجموعه هستند یالی به یکدیگر نداشته باشند. منظور از k طول بلندترین مسیر در این گراف است
۶. فرض کنید هزینه یک مسیر در یک گراف بدون جهت برابر مجموع درجه‌ی راس‌های آن مسیر باشد. ثابت کنید برای هر $n > 2$ گرافی n راسی وجود دارد که در آن دو راس وجود داشته باشد که کم‌هزینه‌ترین مسیر بین این دو راس حداقل $5 - 3n$ باشد. به علاوه ثابت کم‌هزینه‌ترین مسیر بین دو راس در هر گراف دلخواه با بیش از دو راس حداکثر $5 - 3n$ است.