دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

یادگیری برخط

جلسه بیست و سوم

نگارنده: مونا محمدی

۱ مروری بر مباحث گذشته

مسئله‌ای با صورت‌بندی زیر داریم.

برای واحد زمانی $t = 1, \dots, T$:

۱. N متخصص داریم که چیزی را پیشنهاد می‌کنند.

۲. ما توضیع $\vec{p}^{(t)} = (p_1^{(t)}, \dots, p_N^{(t)})$ را روی متخصص‌ها انتخاب می‌کنیم. به آن معنا که در زمان t به احتمال $p_i^{(t)}$ به پیشنهاد متخصص i ام عمل می‌کنیم.

۳. دشمن ما(!) با علم به نظر متخصصان و توضیع $\vec{p}^{(t)}$ یک بردار ضرر به صورت $\vec{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \dots, m_N^{(t)}) \in [-\rho, \rho]^N$ در زمان t ارائه می‌دهد. (که ρ عددی مثبت است.) به آن معنا که متخصص i ام $m_i^{(t)}$ در زمان t ضرر کرده است.

۴. ضرری که ما متحمل می‌شویم برابر با $\vec{p}^{(t)}.\vec{m}^{(t)}$ در زمان t است.

می‌خواستیم یک رفتار متعادل داشته باشیم به طوری که سود و زیان ما متناسب با سود و زیان متخصص با سود بیشتر و ضرر کمتر باشد. به این الگوریتم دست یافتیم: اگر الگوریتم بالا را اجرا کنیم طبق قضیه زیر ضرر ما از یک میزانی بیشتر نخواهد بود.

---

۱. در ابتداء روز قرار می‌دادیم $p_i^{(t)} = \frac{w_i^{(t)}}{\Phi^{(t)}}$ (نرمال کردن توضیع)

۲. بعد از مشخص شدن ضررها وزن‌ها را به صورت $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} \times exp(-\epsilon \times m_i^{(t)})$ درصوتی که $\rho \leq 1$ و در غیر این صورت به صورت $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)}.exp(\frac{\epsilon}{2\rho}.\frac{m_i^{(t)}}{\rho})$ بروز رسانی می‌کردیم.

قضیه ۱. *اگر $\epsilon \leq 1$ و $t \geq \frac{4\rho^2 ln(N)}{\epsilon^2}$ آنگاه خواهیم داشت:*

$$\frac{1}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)}.\vec{m}^{(t)} \leq \frac{1}{T}\sum_t \vec{m_i}^{(t)} + 2\epsilon$$

با این تعبیر که اگر به اندازه کافی صبر کنیم متوسط ضرر ما برابر خواهد بود با متوسط ضرر هر متخصص به علاوه یک خطای کوچک.

۲ حل برنامه‌ریزی خطی به کمک یادگیری برخط

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & c^\top x \\ \text{که} \quad & Ax \geqslant b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید این برنامه‌ریزی را نمی‌توانیم حل کنیم. در عوض تقریبی از برنامه‌ریزی بالا به شکل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} c^\top \widetilde{x} &= OPT \\ A\widetilde{x} &\geqslant b - \epsilon \\ \widetilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید عدد OPT را می‌دانیم (با یک جستجوی دودویی روی مقادیر مختلف مقدار آن را بدست می‌آوریم) و این مقدار برابر است با مینیمم تابع $c^\top x$ و قیود برنامه‌ریزی به طور تقریبی برقرار است. بنابراین بدنبال جوابی شدنی برای

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geqslant 0, c^\top x = OPT\} \tag{1}$$

$$Ax \geqslant b - \epsilon \tag{2}$$

بنظر می‌رسد اگر در خط (۲) به جای تعدادی از نامساوی‌ها یک نامساوی به صورت $\alpha^\top x$ داشته باشیم، پیدا کردن یک جواب شدنی آسان‌تر می‌شود.

$$\begin{aligned} K = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geqslant 0, c^\top x = OPT\} \\ \alpha x \geqslant \beta \\ (S) \end{aligned}$$

پیدا کردن جواب شدنی برای این مجموعه معادلات ساده است. برای مثال فرض کنید $c \geq 0$ آنگاه جواب $x = \frac{OPT}{c_i} e_i$ جواب شدنی خواهد بود و یا جواب شدنی نخواهیم داشت. اگر هم c منفی بود به ناچار مجبور به حل یک برنامه‌ریزی خطی هستیم. (درکل فرض کنید یک دانای کلی داریم که S را به اون می‌دهیم و جواب شدنی آن را به ما تحویل می‌دهد و یا می‌گویید مسئله جواب شدنی ندارد.)
ایده اصلی. بجای حل کردن برنامه‌ریزی خطی اولیه آن را به تعدادی معادله به فرم (S) تبدیل می‌کنیم و برای این معادلات آسان شده جواب شدنی پیدا می‌کنیم. چگونه؟ فرض کنید هر یک از نامعادله‌های $Ax \geq b$ یک مشاور هستند که به شما توصیه می‌کنند جوابی که می‌خواهید ارائه دهید نسبت به صفحه $Ax = b$ جواب شدنی نگه دارید. (نقطه‌ای که می‌خواهید ارائه دهید در همان سمت از صفحه باشد که معادله می‌گوید.) می‌خواهیم نقطه‌ای پیدا کنیم که در شرایط صدق کند. اینگونه عمل می‌کنیم:

---

۱. وزن‌دهی به مشاوران (در ابتدا وزن هر مشاور برابر ۱ است.)

۲. یک نامعادله از ترکیب وزنی معادلات به صورت

$$\vec{p}^{(t)}.Ax \geq \vec{p}^{(t)}.b \tag{۳}$$

که $p^{(t)} = \frac{w^{(t)}}{\|w\|_۱}$ و آن را حل می‌کنیم. (فرض کرده بودیم حل چنین معادلاتی ساده است.)

۳. خطای مشاور i ام را به صورت $m_i^{(t)} = a_i x^{(t)} - b$ درنظر می‌گیریم.

۴. وزن‌ها را به‌روزرسانی می‌کنیم.

حال تعبیر قضیه گفته شده در قسمت مرور درینجا به شکل زیر خواهد بود.

$$\frac{۱}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)}.\vec{m}^{(t)} \leq \frac{۱}{T}\sum_t \vec{m_i}^{(t)} + ۲\epsilon \tag{۴}$$

$$\frac{۱}{T}\sum_t \vec{m_i}^{(t)} = \frac{۱}{T}\sum_{t\leq T} a_i^\top x^{(t)} - b_i \tag{۵}$$

$$= a_i^\top(\frac{۱}{T}\sum_{t\leq T} x^{(t)}) - b_i \tag{۶}$$

$$= a_i^\top \widetilde{x} - b_i \tag{۷}$$

توجه داشته باشید در خط ۵ $a_i^\top$ مقداری ثابت است و می‌توان آن را از سیگما خارج کرد. همچنین در خط ۷ مقدار متوسط $x^{(t)}$ ها را $\widetilde{x}$ نامیده‌ایم. درواقع $\widetilde{x}$ متوسط تمام x هاییست که از معادلات به فرم خط ۳ بدست می‌آیند. برای طرف چپ نامساوی قضیه داریم:

$$\frac{۱}{T}\sum_t \vec{p}^{(t)}.\vec{m}^{(t)} \leq \frac{۱}{T}\sum_t \vec{m_i}^{(t)} + ۲\epsilon \tag{۸}$$

$$\vec{p}^{(t)}.\vec{m}^{(t)} = \vec{p}^{(t)}.(Ax^{(t)} - b) \tag{۹}$$

$$= \vec{p}^{(t)}.Ax^{(t)} - \vec{p}^{(t)}.b \tag{۱۰}$$

$$\geq ۰ \tag{۱۱}$$

در خط ۱۰ با توجه به خط ۳ می‌دانیم که $\vec{p}^{(t)}.Ax \geq \vec{p}^{(t)}.b$. با توجه به خطوط ۴ تا ۱۱ خواهیم داشت:

$$\forall i : a_i^\top \widetilde{x} - b_i + ۲\epsilon \geq ۰$$

$$a_i^\top \widetilde{x} \geq b_i - ۲\epsilon$$

پس $\widetilde{x}$ همان x مطلوب است که دنبالش بودیم.

سوال. ما برای استفاده از قضیه نیاز به دانستن مقدار ρ داریم. ρ چند است؟ نیازی نیست ما از ابتدا مقدار ρ را بدانیم کافیست در هر مرحله که ضررهای مشاوران را حساب می‌کنیم مقدار ρ را نیز بروزرسانی کنیم. به عبارتی دیگر:

$$\rho_t = \max\{۱, \max_{i,t'\leq t}\{|a_i^\top x^{(t')} - b_i|\}\} \tag{۱۲}$$

درواقع ما در صورت قضیه برای شرط $t \geq \frac{۴\rho^۲ ln(N)}{\epsilon^۲}$ به ρ نیاز داشتیم. بنابراین همینطور که t جلو می‌رود مقدار ρ را نیز بروزرسانی می‌کنیم تا جایی که شرط $t \geq \frac{۴\rho^۲ ln(N)}{\epsilon^۲}$ برقرار شود.

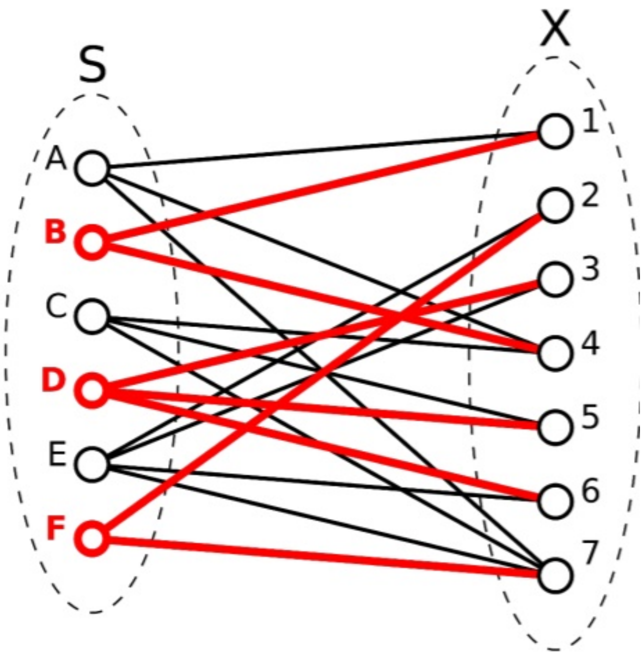
زمان اجرا برابر است با $O(\frac{log(m)}{\epsilon^۲}\rho^۲)$. به عبارتی این تعداد بار باید یک برنامه‌ریزی خطی حل کنیم. پس اگر بخواهیم دقیق‌تر بیان کنیم زمان اجرا برابر است با $O(\frac{log(m)}{\epsilon^۲}\rho^۲.n)$.

۱.۲ مثال: مسئله پوشش مجموعه‌ای

فرض کنید مجموعه S شامل m مجموعه باشد. $S=\{S_۱,\dots,S_m\}$ و n عضو داشته باشیم $X=\{۱,۲,\dots,n\}$ به طوری که هر مجموعه مانند S_i تعدادی ازین عضوها را شامل باشد. می‌خواهیم تعدادی از مجموعه‌های مجموعه S را انتخاب کنیم به طوری که هر عضو حداقل در یک مجموعه آمده باشد.

مسئله را با گراف مدل‌سازی می‌کنیم. یک گراف دو بخشی تشکیل می‌دهیم که یک بخش آن شامل مجموعه‌هاست و بخش دیگر شامل اعضاست. به ازای هر راس مجموعه آن را به تمام اعضایی که شامل می‌شود وصل می‌کنیم. حال می‌خواهیم تعدادی از رئوس S را طوری انتخاب کنیم که هر راس در X حداقل یک همسایه در S داشته باشد.

درینجا نمی‌خواهیم به صورت صفر و یکی به مسئله نگاه کنیم به این معنا که بعضی از رئوس را انتخاب کنیم و بقیه را انتخاب نکنیم. می‌خواهیم به



شکل ۱

هر راس در S یک عدد بین ۰ و ۱ نسبت دهیم و رئوسی از S انتخاب کنیم به طوری که مجموع اعداد همسایه‌های هر راس X در S برگتر مساوی ۱ شود. به این مسئلهء جدید **مسئله پوشش مجموعه ای کسری** می‌گویند.

برنامه‌ریزی خطی این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & \sum_S x_S \\ \text{که} \quad & \sum_{S\ni e} x_S \geq ۱ \quad \forall e \\ & x_S \geq ۰ \end{aligned}$$

می‌خواهیم به جای سیمپلکس از الگوریتمی که دادیم این برنامه‌ریزی خطی را حل کنیم. بنابراین باید جواب شدنی برای یک

$$K=\{\sum_S x_S = L, x_S \geq ۰\} \tag{۱۳}$$

$$\alpha^\top x \geq \beta \tag{۱۴}$$

پیدا کنیم. ضرایب در خط ۱۴ را با توجه به خط ۳ این صورت در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{e} \bar{p}_e \sum_{S \ni e} x_S \geq \sum_{e} \bar{p}_{e/}1 = 1$$
$$\iff \sum_{S} x_S \sum_{e \in S} \bar{p}_e \geq 1$$
$$\iff \sum_{S} x_S \times P(S) \geq 1$$

پس به دنبال جواب شدنی برای

$$K = \{ \sum_{S} x_S = L, x_S \geq 0 \} \tag{15}$$
$$\sum_{S} x_S \times P(S) \geq 1 \tag{16}$$

هستیم. یکی از x_S ها را برابر با L قرار می‌دهیم. (آن x_S ای که در p_i ماکسیمم قرار است ضرب شود.) اگر چنین جوابی، جواب شدنی نباشد معادلات خط ۱۵ و ۱۶ از ابتدا جواب نداشته‌اند. همچنین کرانی برای ρ با توجه به خط ۱۲ داریم که ازین قرار است:

$$\max_{e} \sum_{S \ni e} x_s - 1 \leq L - 1 \leq m - 1$$

بنابراین با توجه به الگوریتمی که در ابتدا ارائه شد پس از t واحد زمانی که $t \geq \frac{4\rho^2 ln(N)}{\epsilon^2}$ جوابی شدنی برای مسئاله زیر بدست خواهیم آورد:

$$\sum_{S} \widetilde{x}_S = L \tag{17}$$
$$\sum_{S \ni e} \widetilde{x}_S \geq 1 - \epsilon \tag{18}$$
$$\widetilde{x} \geq 0 \tag{19}$$

اما خط ۱۸ دقیقا آن شرطی را که ما می‌خواستیم($\sum_{S \ni e} x_S \geq 1$) برقرار نمی‌کند. بنابراین از روی $\widetilde{x}$ یک جواب دیگر می‌سازیم که به خواسته‌هایمان نزدیک‌تر باشد: $\bar{x} = \frac{\widetilde{x}}{1 - \epsilon}$

$$\sum_{S} \bar{x}_S = \frac{L}{1 - \epsilon} \approx L(1 + \epsilon)$$
$$\sum_{S \ni e} \bar{x}_S \geq 1$$
$$\bar{x} \geq 0$$

توجه داشته باشید که $1 - \epsilon$ عددی مثبت است. $\bar{x}$ یک جواب شدنی است که بسیار به جواب بهینه نزدیک است.(از ابتدا می‌توانیم ϵ را به هر اندازه که می‌خواهیم کوچک بگیریم. فقط توجه داشته باشید که هر اندازه ϵ را کوچک بگیریم t بزرگتر می‌شود.)

۳ منابع

https://jeremykun.com/2017/02/27/the-reasonable-effectiveness-of-the-multiplicative-weights-update-algorithm/

https://courses.cs.washington.edu/courses/cse521/10wi/kale-thesis-chap2.pdf

https://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/academic/class/15859-f11/www/notes/lecture16.pdf