بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه بیست و یکم

خلاصه‌سازی برای مه‌داده

آزمونک ۴

- صورت مسئله احساس فشردگی را بنویسید
- الگوریتمی برای مسئله احساس فشردگی ارائه کنید و بگویید چه تضمینی برای آن داریم

- صورت مسئله احساس فشردگی تنک را بنویسید
- الگوریتمی برای مسئله احساس فشردگی تنک ارائه کنید و بگویید چه تضمینی برای آن داریم

جویبار برای مسئله‌های هندسی

توصیف دنیای مسئله

- ورودی: جویباری از نقاط در صفحه
  - حذف و اضافه

- خروجی: تقریب یک خاصیت
  - ۱) قطر نقاط
  - ۲) زیردرخت فراگیر کمینه
  - ۳) تطابق کمینه
  - ۴) تطابق دو_رنگ

قطر نقاط

مسئله ۱: قطر نقاط

مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
  - $P \in [\Delta]^2$
  - فاصله: فاصله l1

مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
   - $P \in [\Delta]^2$
   - فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$

مسئله ۱: قطر نقاط

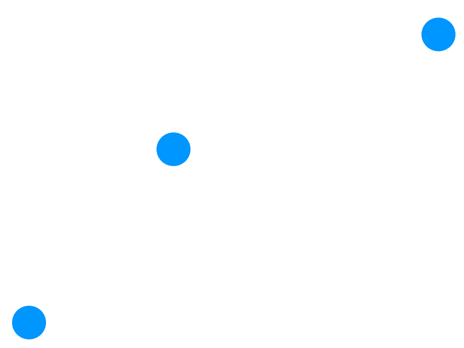
- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$

مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
  - $P \in [\Delta]^2$
  - فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$

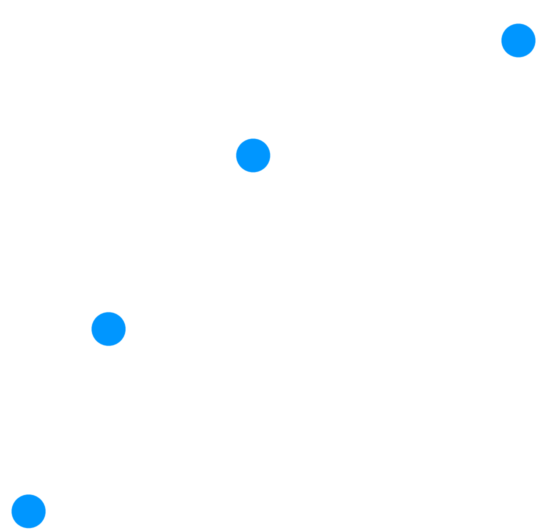
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



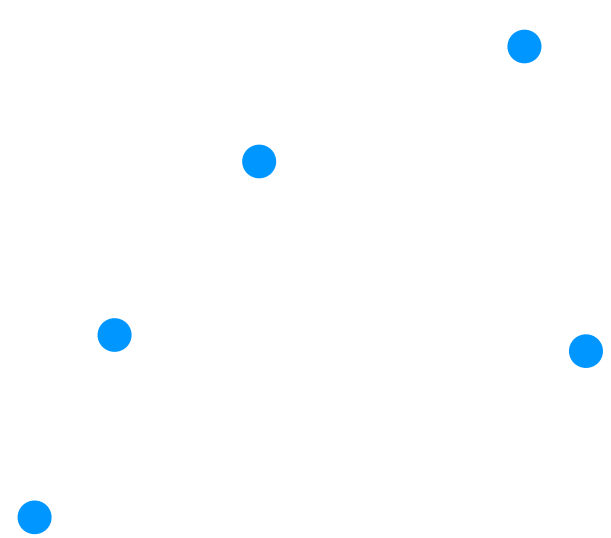
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



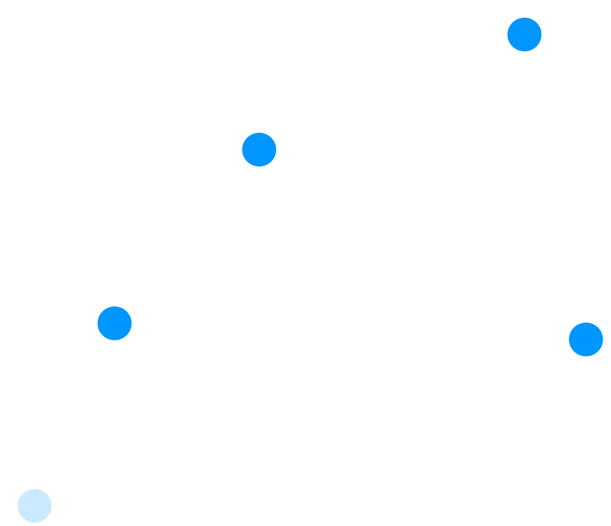
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l_1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



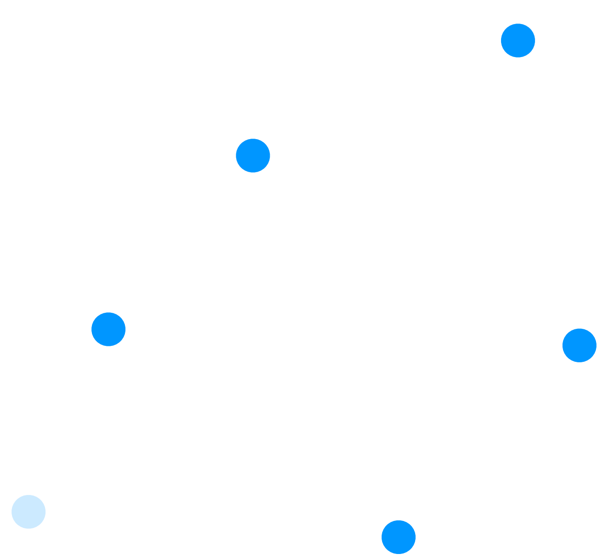
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



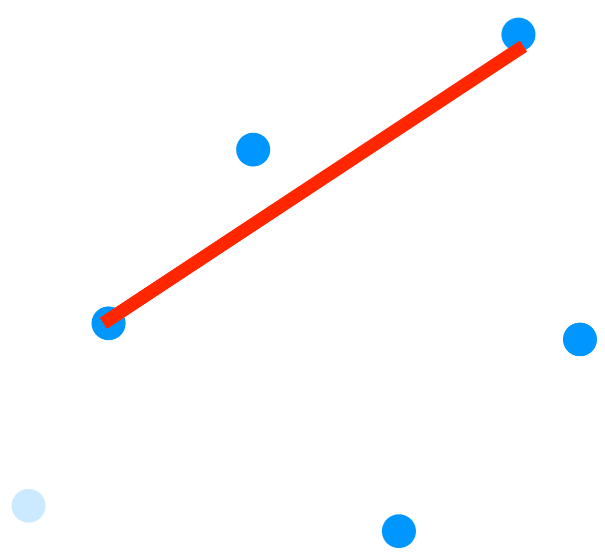
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
  - $P \in [\Delta]^2$
  - فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



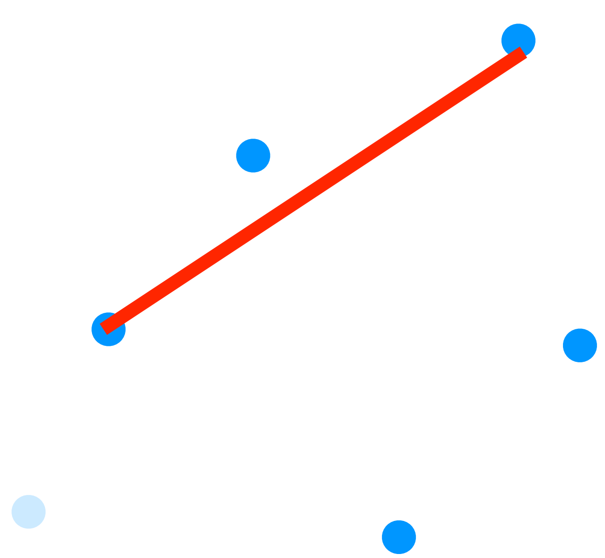
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
- $P \in [\Delta]^2$
- فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



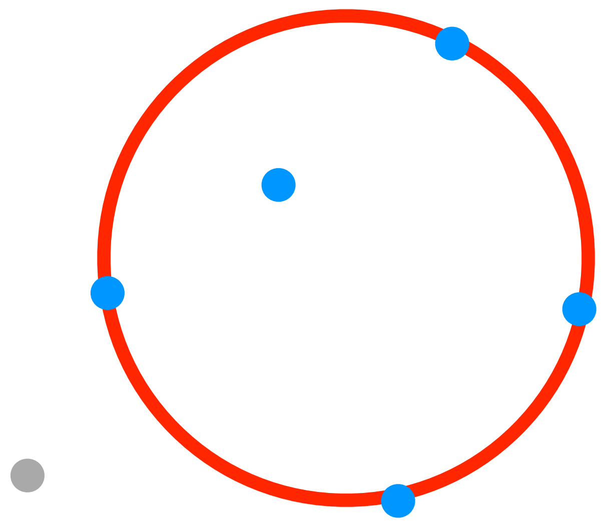
مسئله ۱: قطر نقاط

- نقطه‌ها می‌آیند و می‌روند
  - $P \in [\Delta]^2$
  - فاصله: فاصله l1
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$
- هدف: یافتن تخمین‌گر $\hat{D}$ که $(1+\Theta(\epsilon))$ـ تقریب باشد
  - $D \leq \hat{D} \leq (1+\Theta(\epsilon)) \cdot D$



قطر نقاط: دست‌گرمی

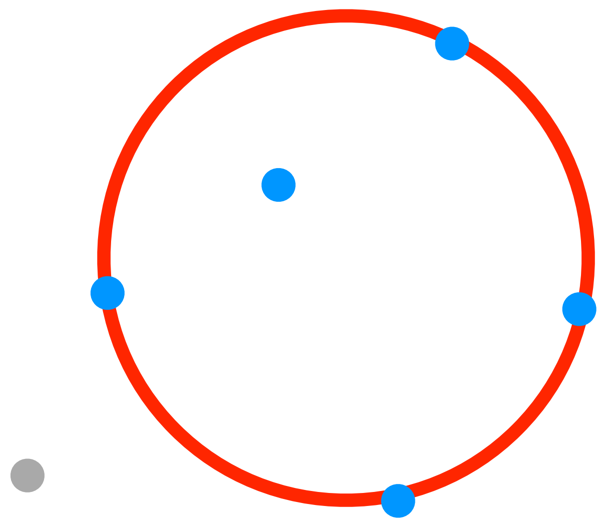
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$



قطر نقاط: دست‌گرمی

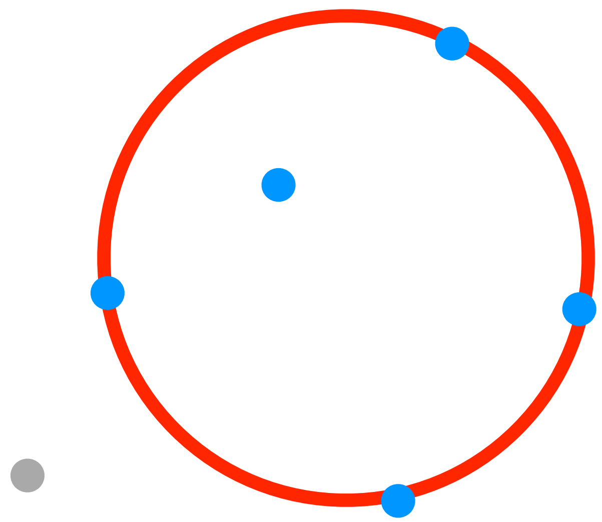
- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p, p')$

- فقط افزودن نقطه



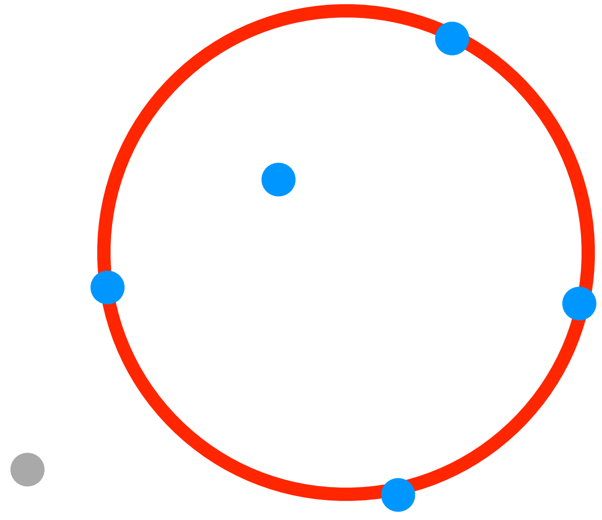
قطر نقاط: دست‌گرمی

- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p, p')$
- فقط افزودن نقطه
- ایده: نگه‌داری دورترین نقطه تا p1
  - به‌روزرسانی: $\hat{D} \leftarrow \max\{\hat{D}, D(p_1, p_i)\}$



قطر نقاط: دست‌گرمی

- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$
- فقط افزودن نقطه
- ایده: نگه‌داری دورترین نقطه تا p1
  - به‌روزرسانی: $\hat{D} \leftarrow \max\{\hat{D}, D(p_1, p_i)\}$
- قضیه (۲ـ تقریب): $\hat{D} \leq D \leq 2\hat{D}$



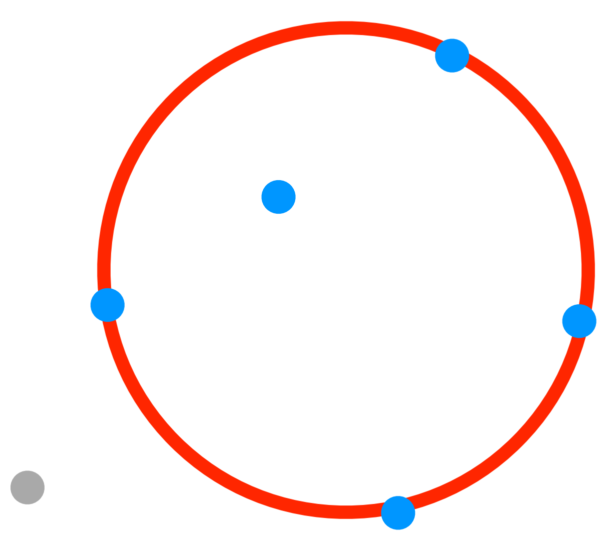
قطر نقاط: دست‌گرمی

- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$

- فقط افزودن نقطه

- ایده: نگه‌داری دورترین نقطه تا p1
  - به‌روزرسانی: $\hat{D} \leftarrow \max\{\hat{D}, D(p_1, p_i)\}$

- قضیه (۲_تقریب): $\hat{D} \leq D \leq 2\hat{D}$

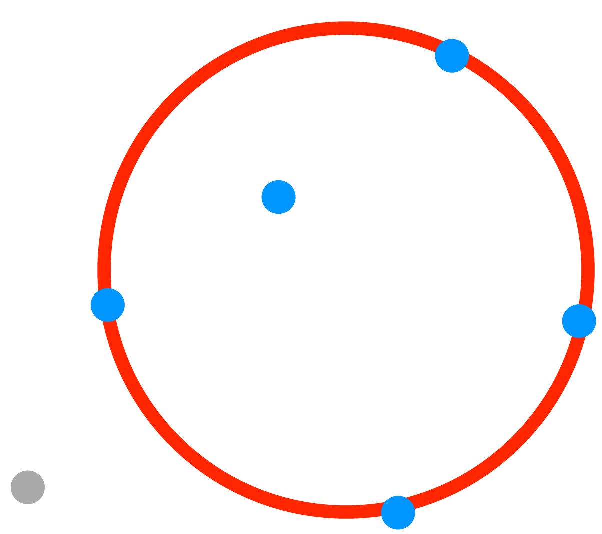


$$\hat{D} = max_i D(p_1, p_i).$$

$$D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$$

قطر نقاط: دست‌گرمی

- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$
- فقط افزودن نقطه
- ایده: نگه‌داری دورترین نقطه تا p1
  - به‌روزرسانی: $\hat{D} \leftarrow \max\{\hat{D}, D(p_1, p_i)\}$
- قضیه (۲ــ تقریب): $\hat{D} \leq D \leq 2\hat{D}$



$\hat{D} = max_i D(p_1, p_i)$.

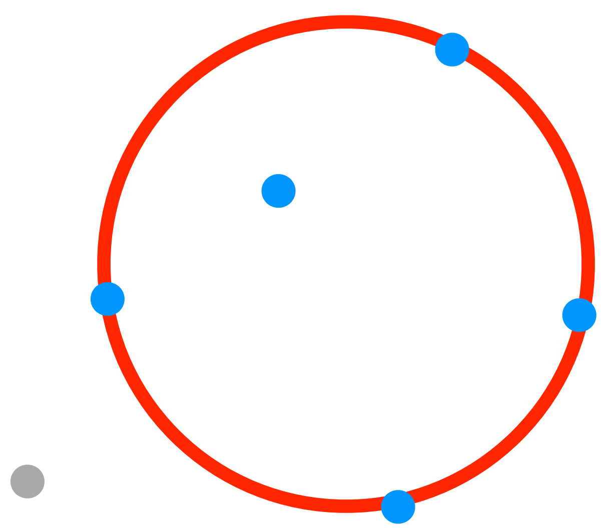
$$D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$$

$D = D(p_i, p_j)$

$D <= D(p_i, p_1) + D(p_j, p_1)$

قطر نقاط: دست‌گرمی

- مورد تخمین: $D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$
- فقط افزودن نقطه
- ایده: نگه‌داری دورترین نقطه تا p1
- به‌روزرسانی: $\hat{D} \leftarrow \max\{\hat{D}, D(p_1, p_i)\}$
- قضیه (۲ـ تقریب): $\hat{D} \leq D \leq 2\hat{D}$



$\hat{D} = max_i D(p_1, p_i).$

$D = \max_{p,p' \in P} D(p,p')$

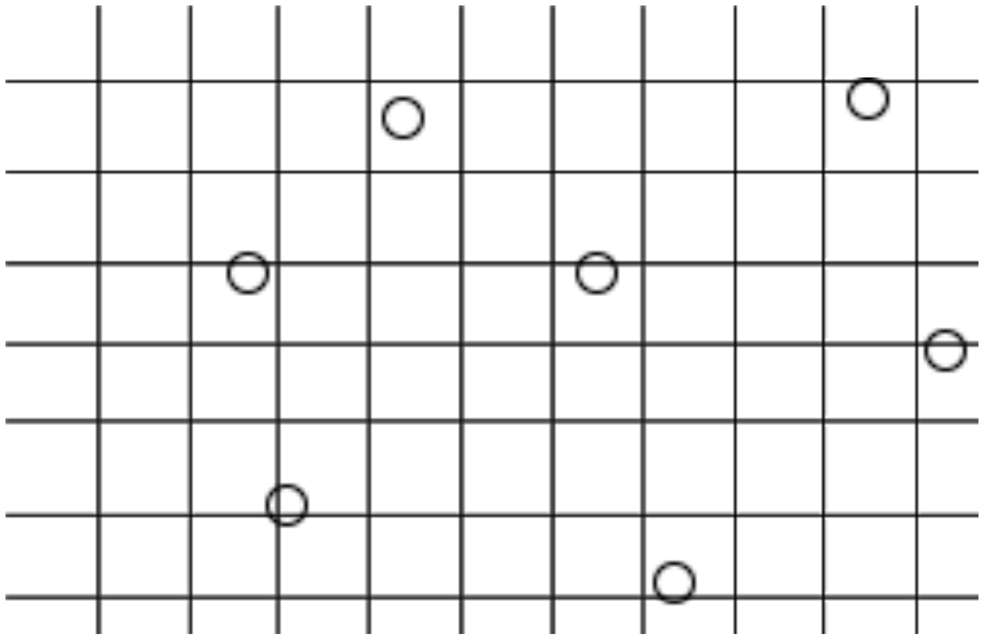
$D = D(p_i, p_j)$

$D <= D(p_i, p_1) + D(p_j, p_1)$

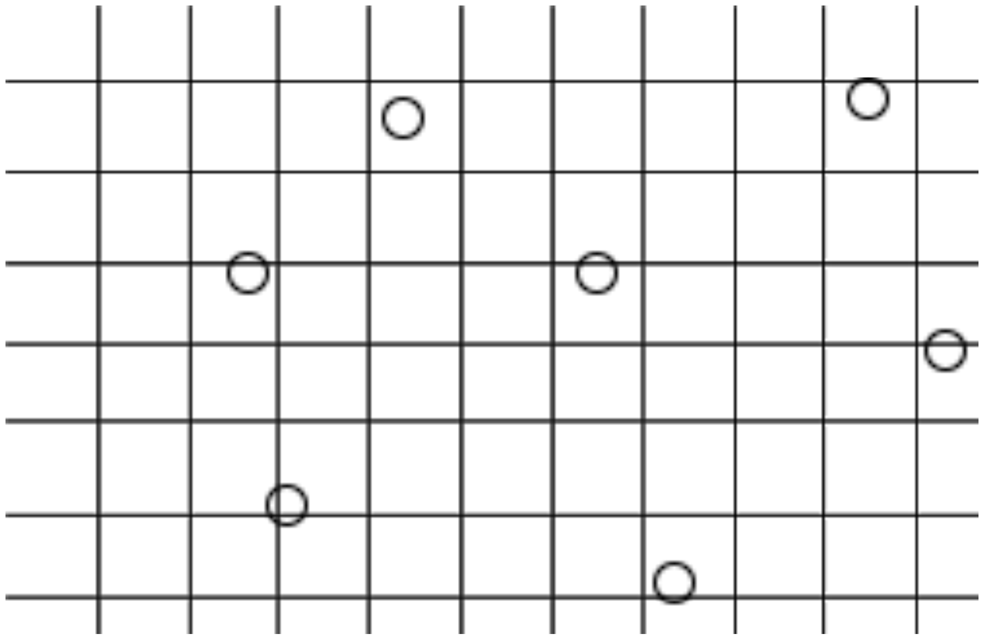
$\hat{D} = max_i D(p_1, p_i)$

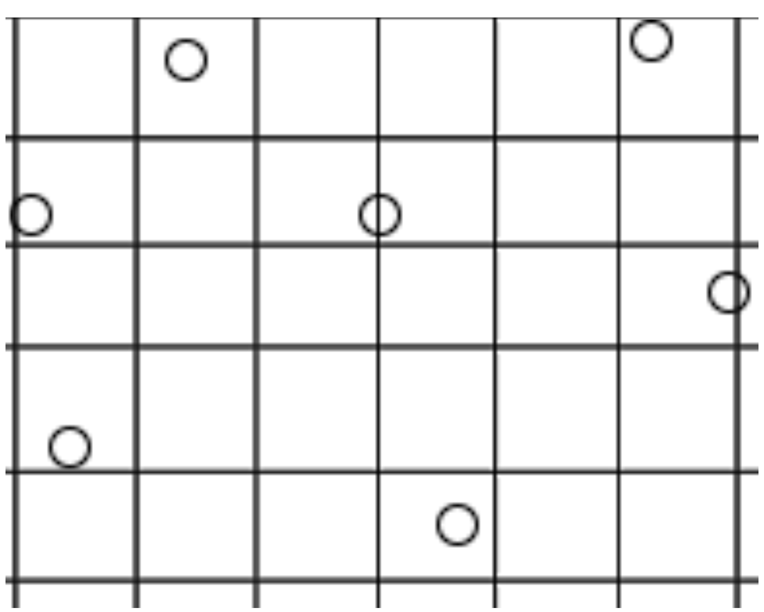
قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

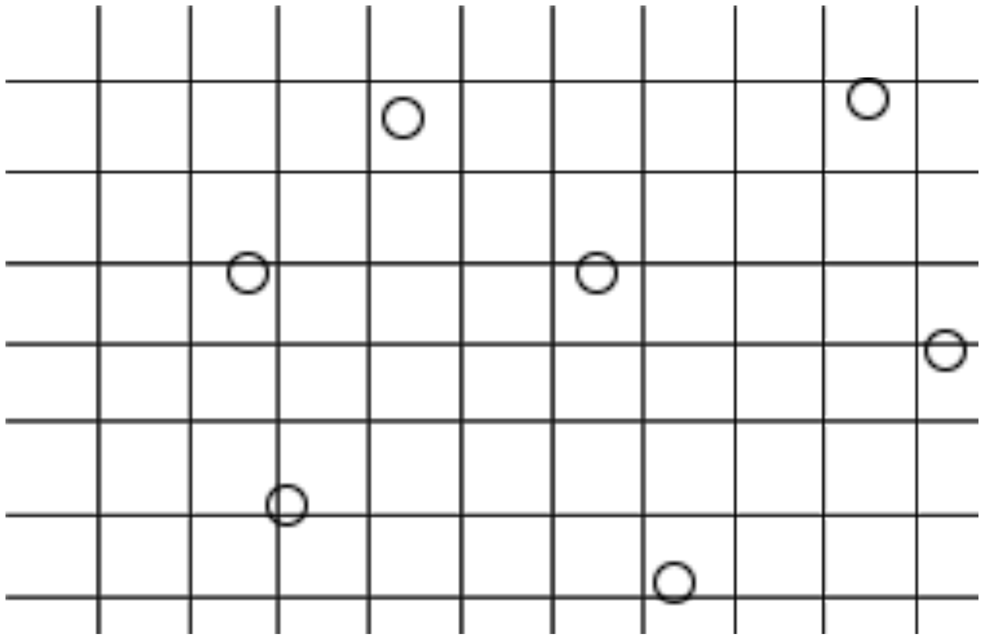


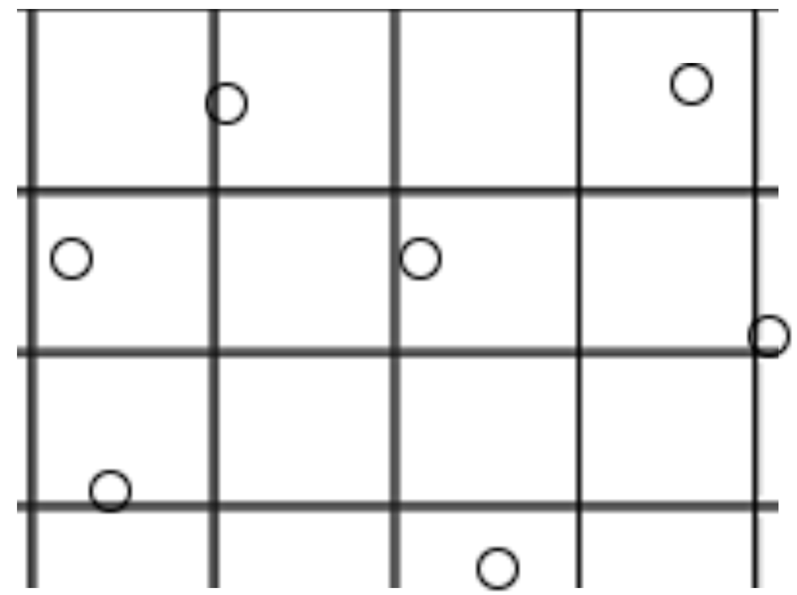
قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

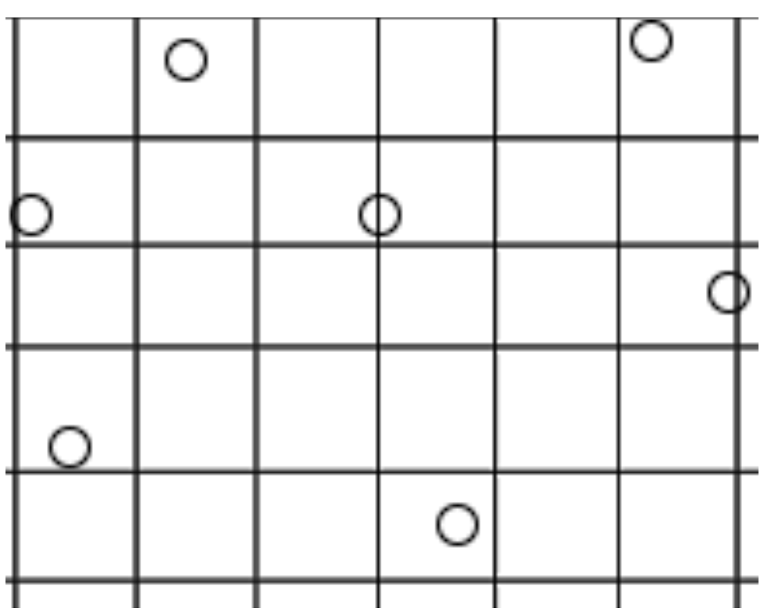




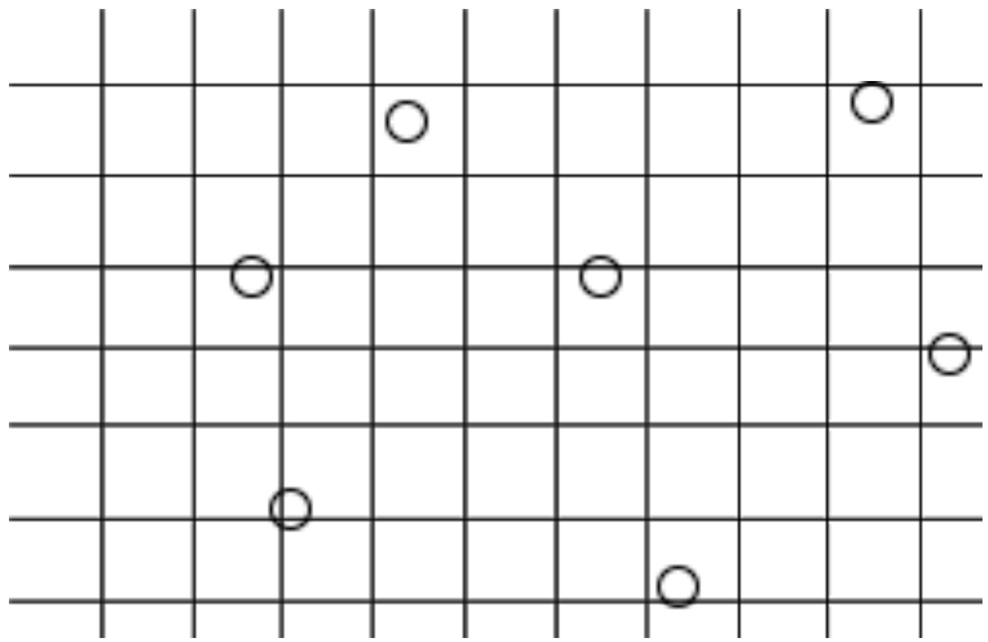
قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

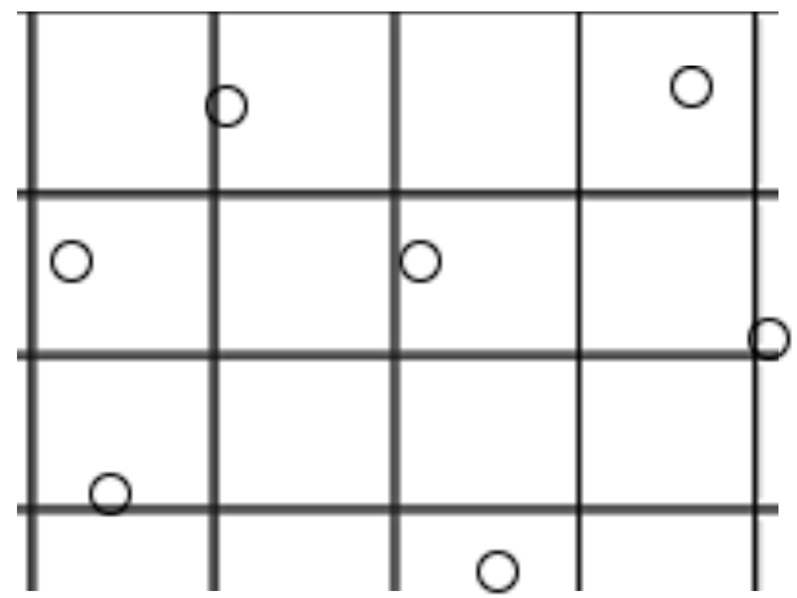


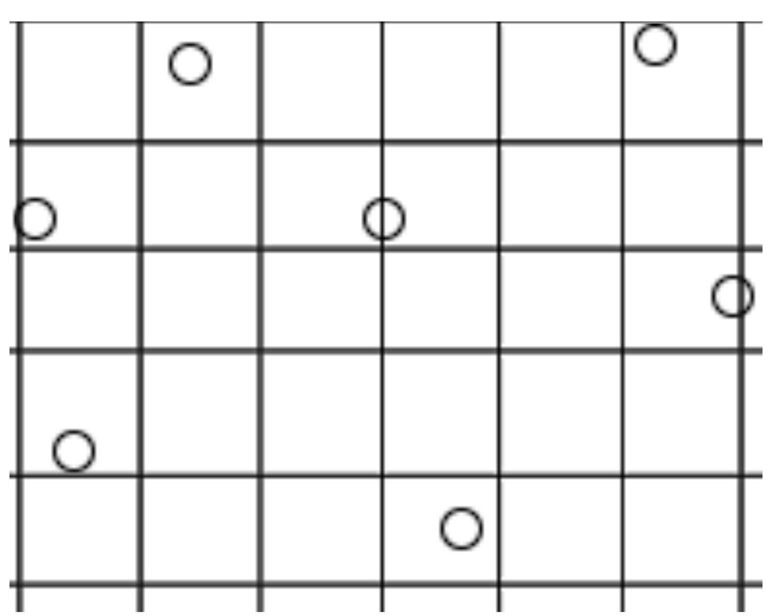


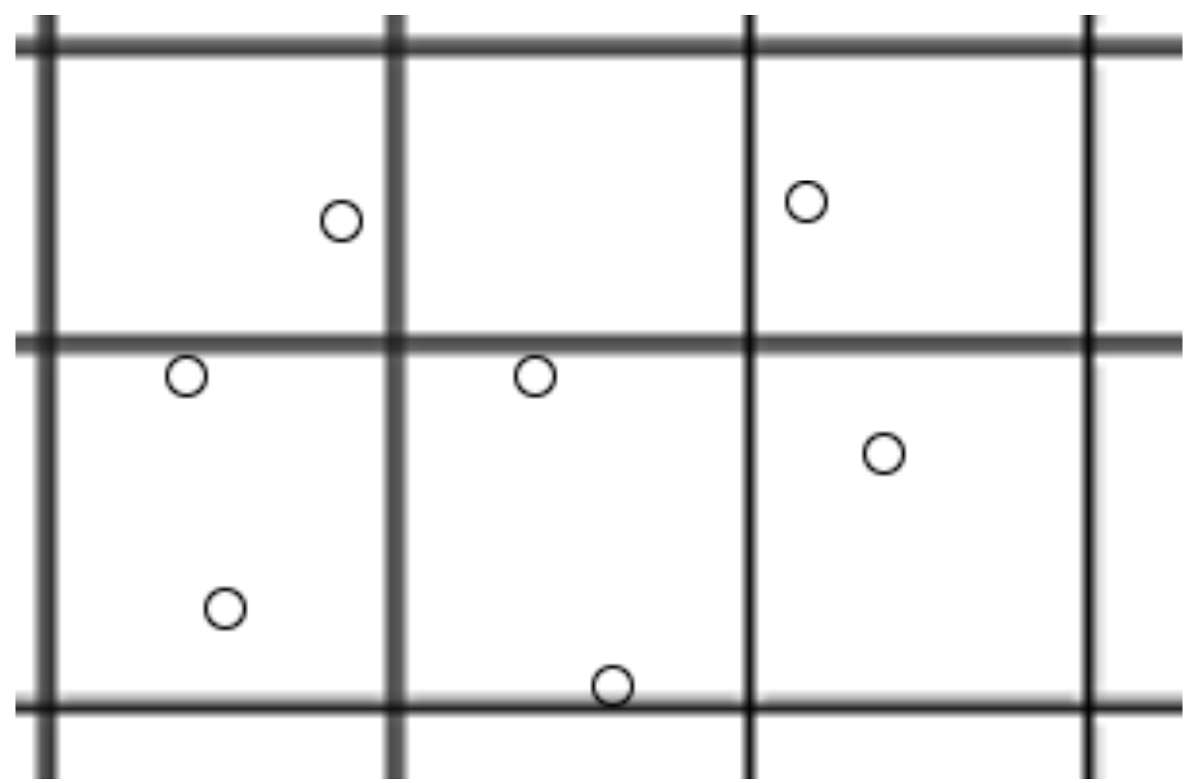


قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

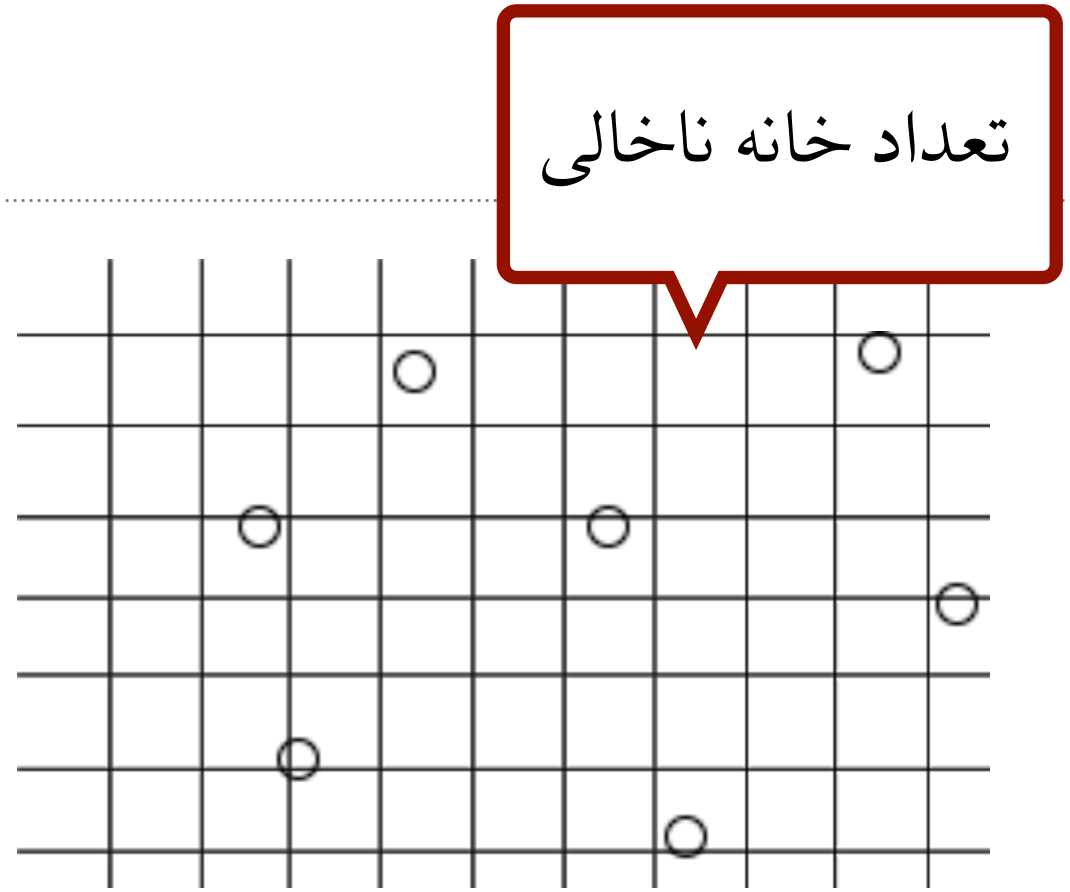


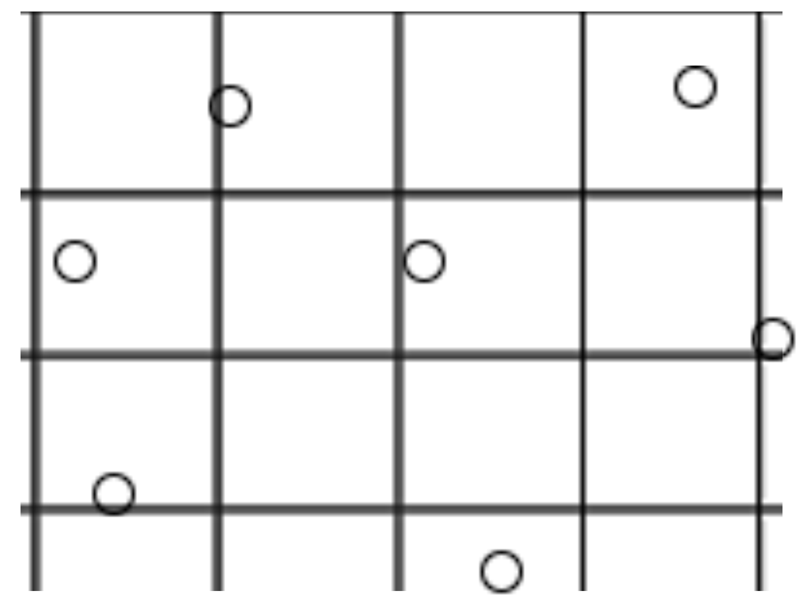


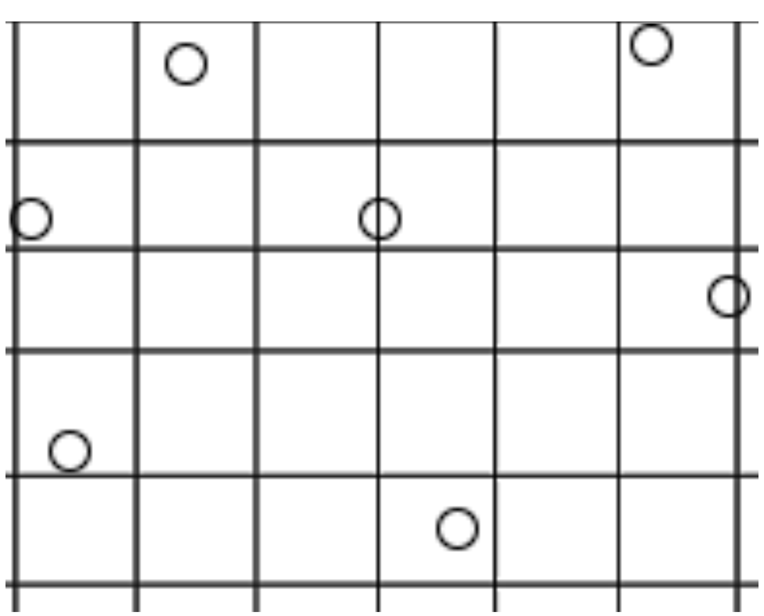


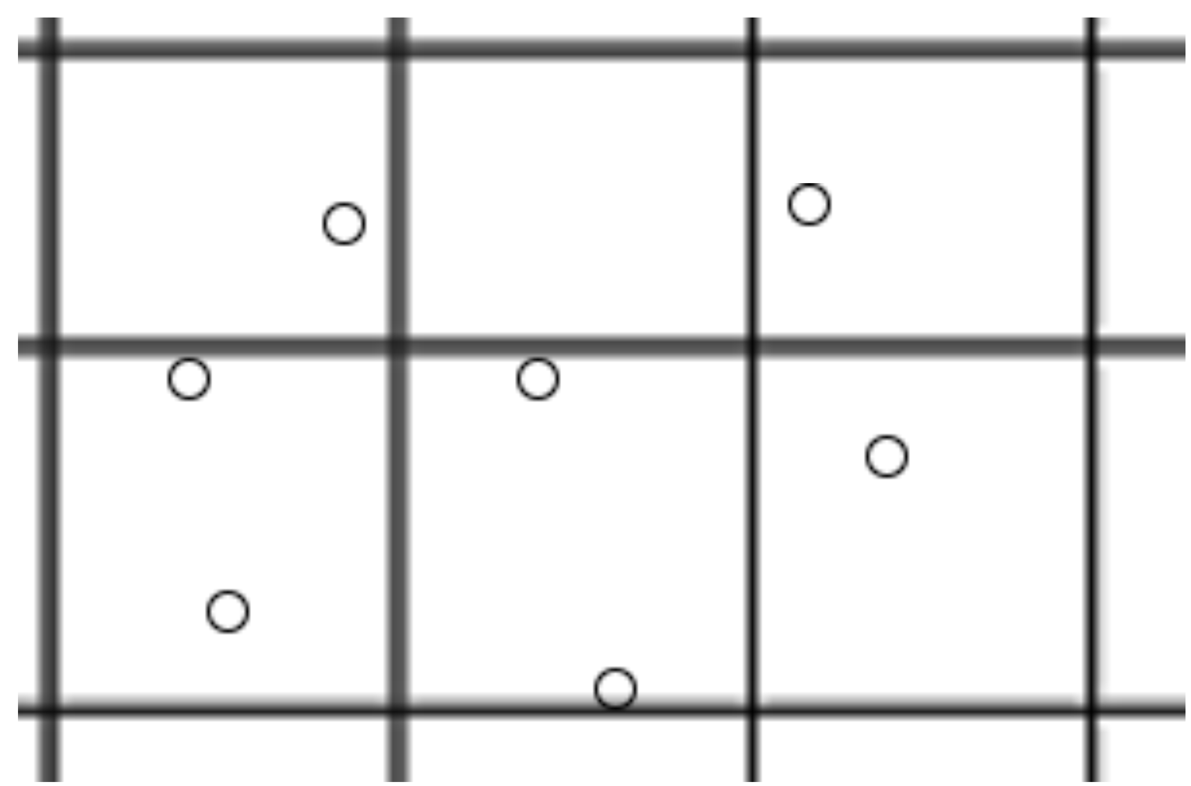


قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

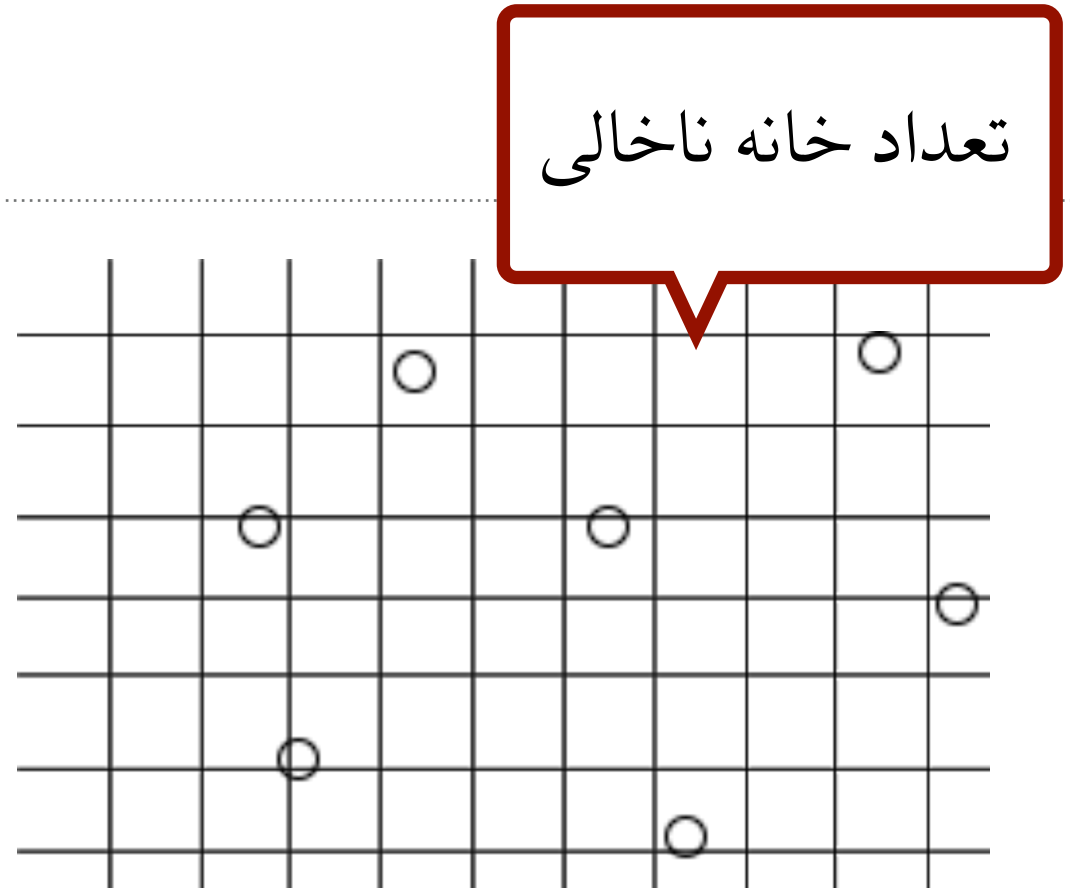


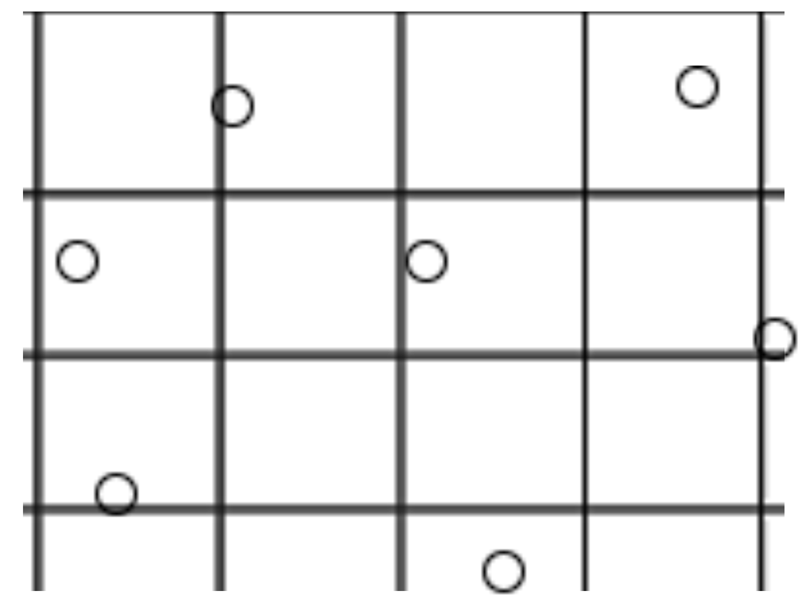


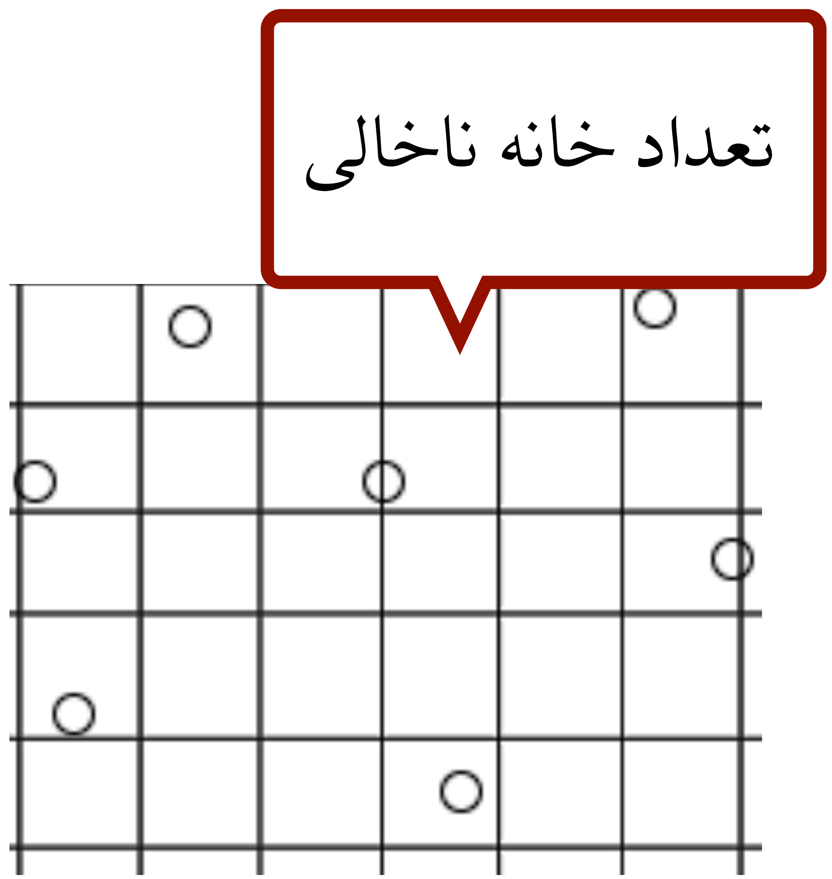


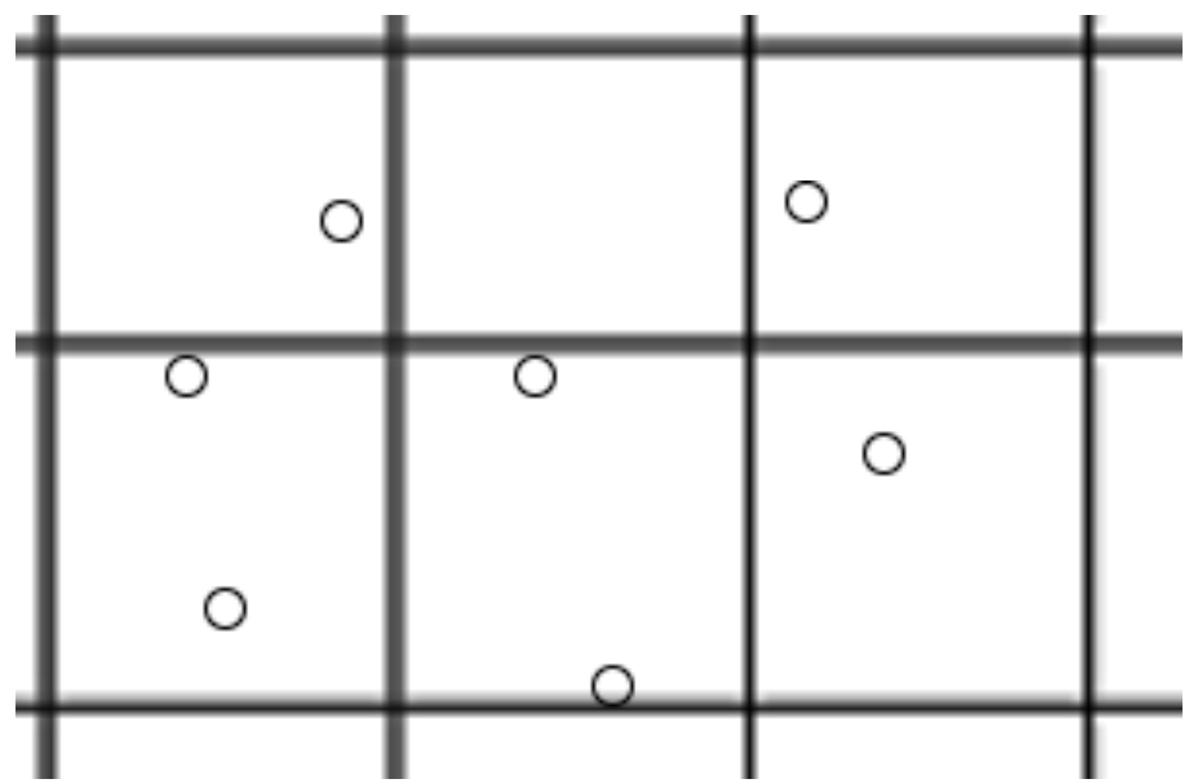


قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

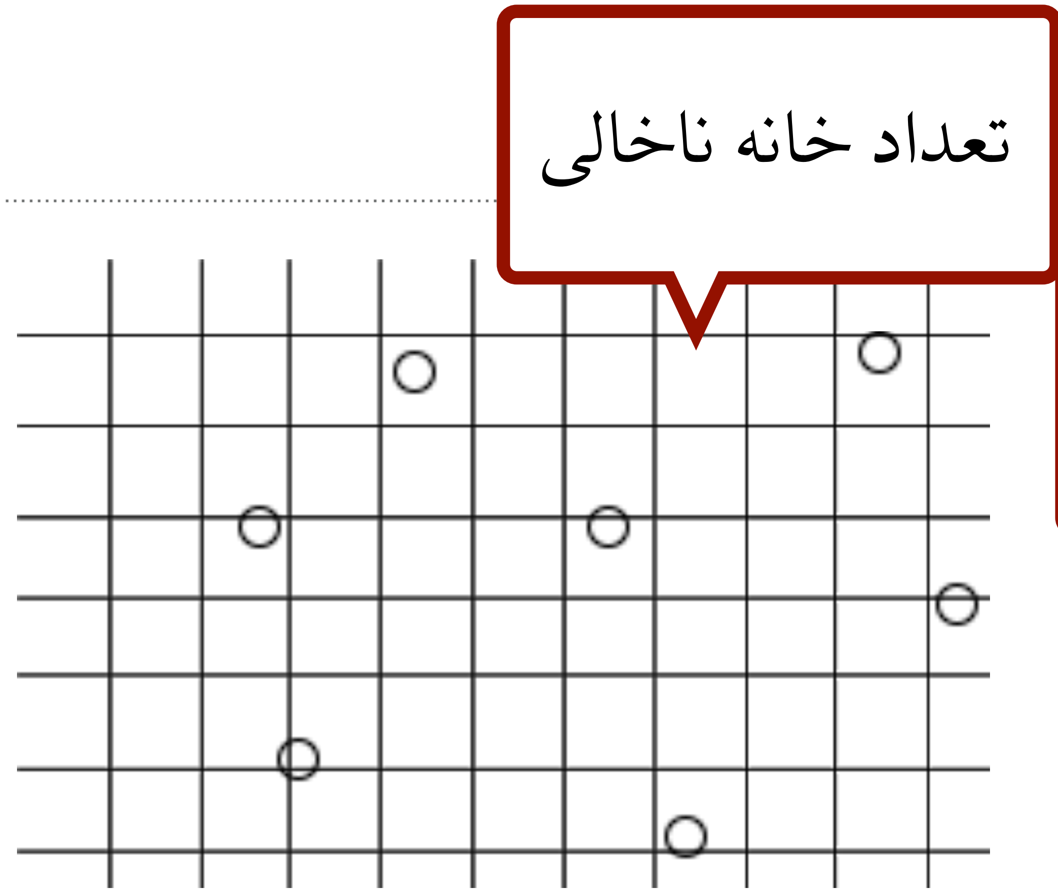


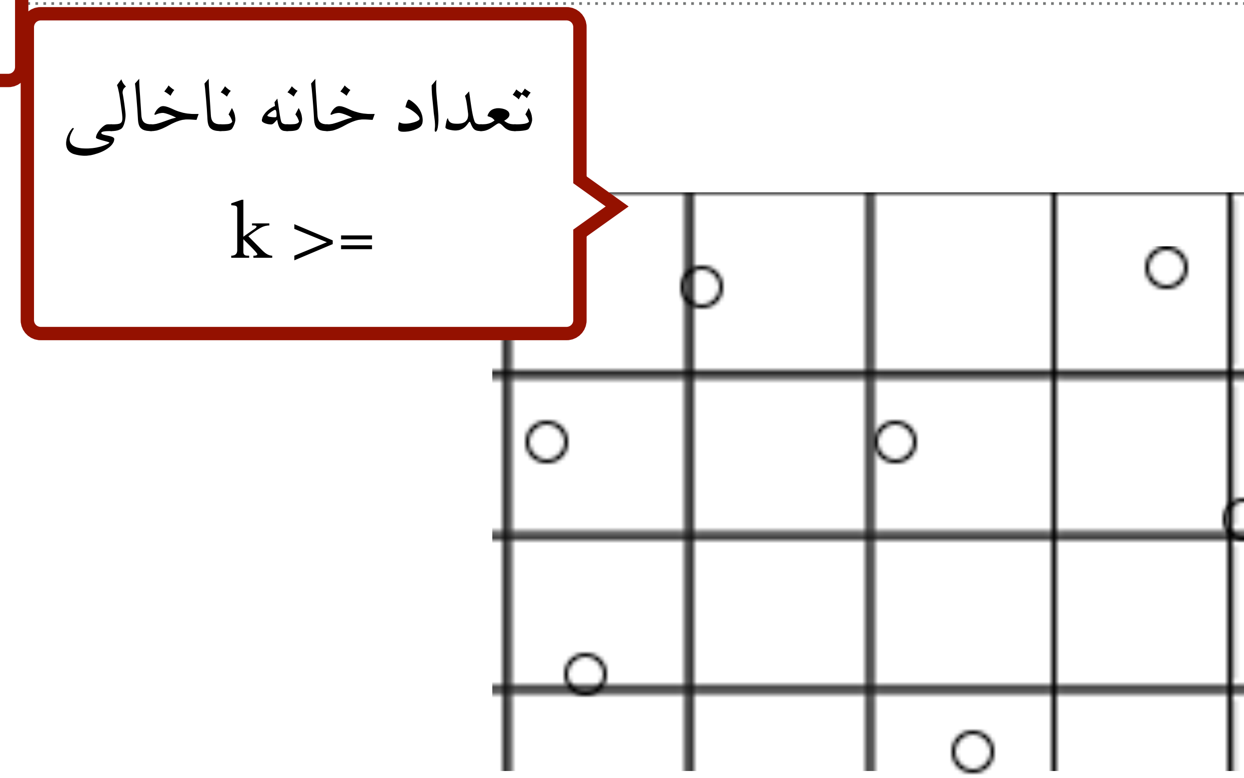


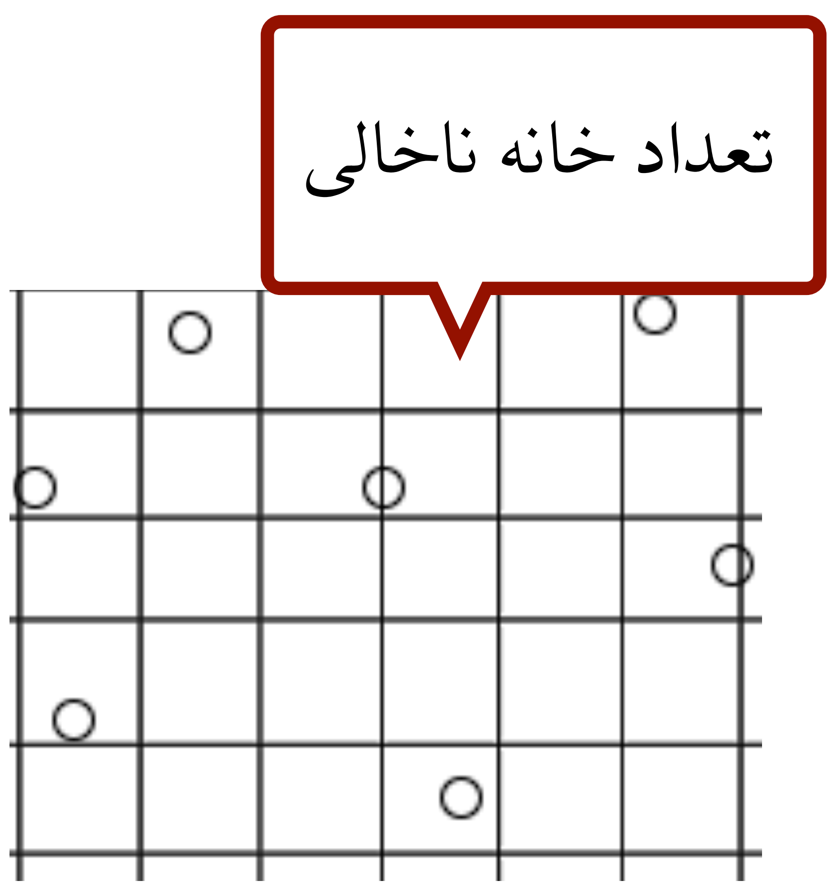


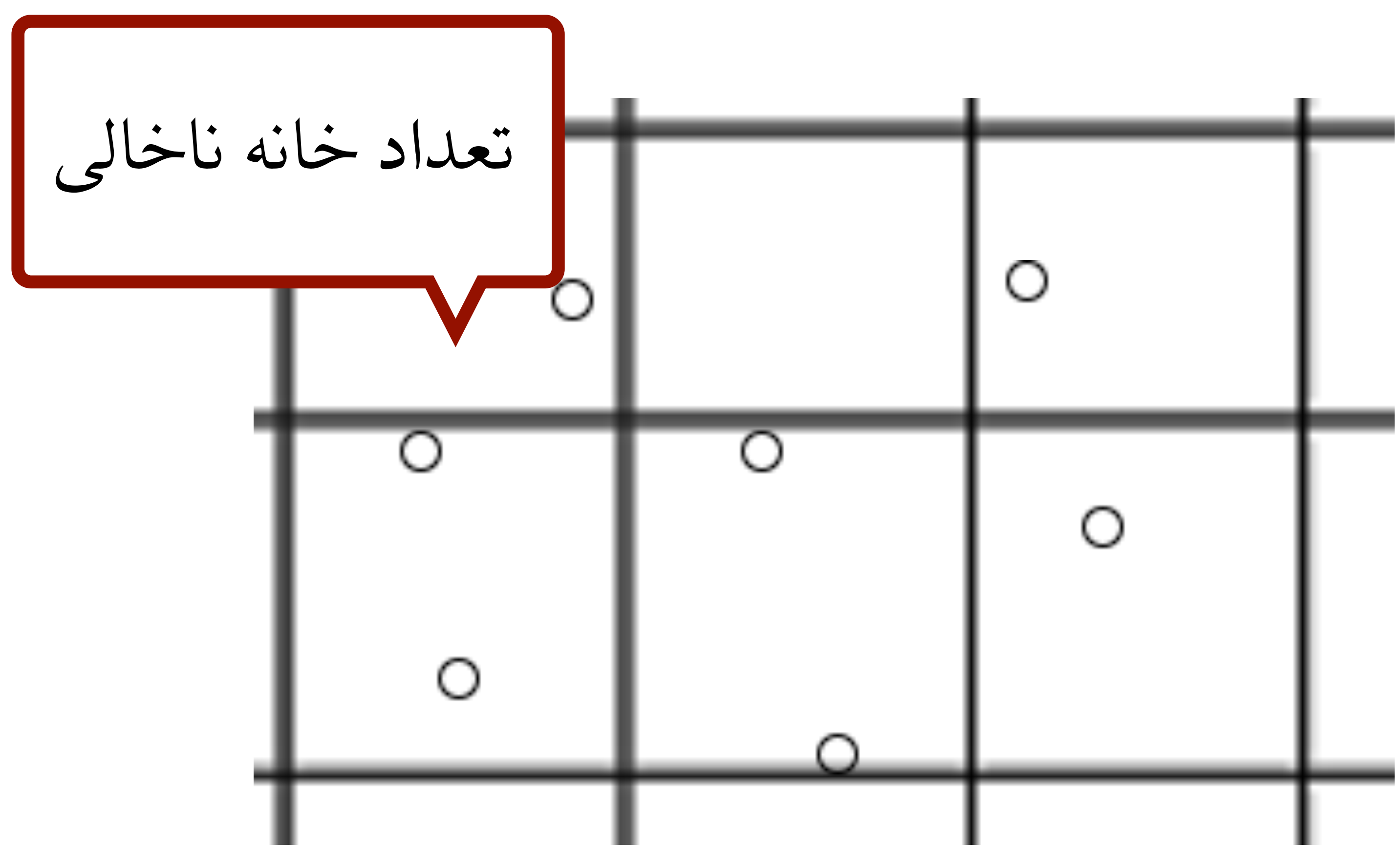


قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده

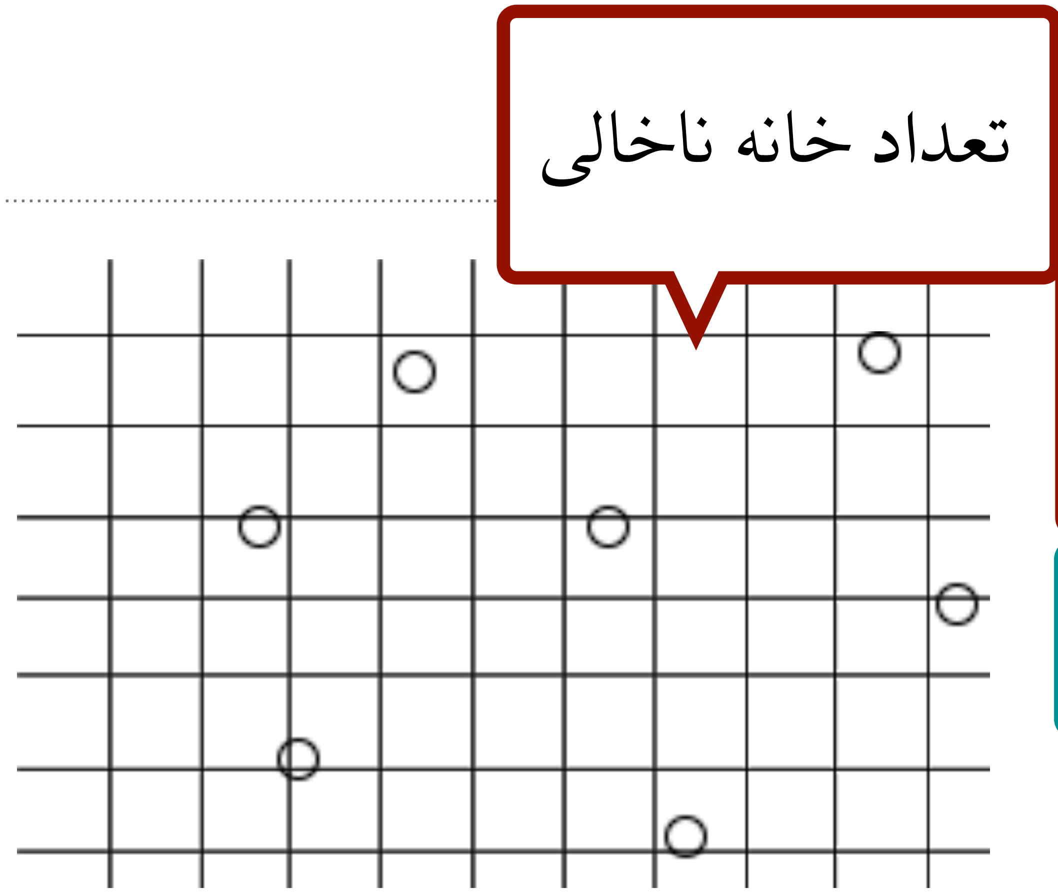


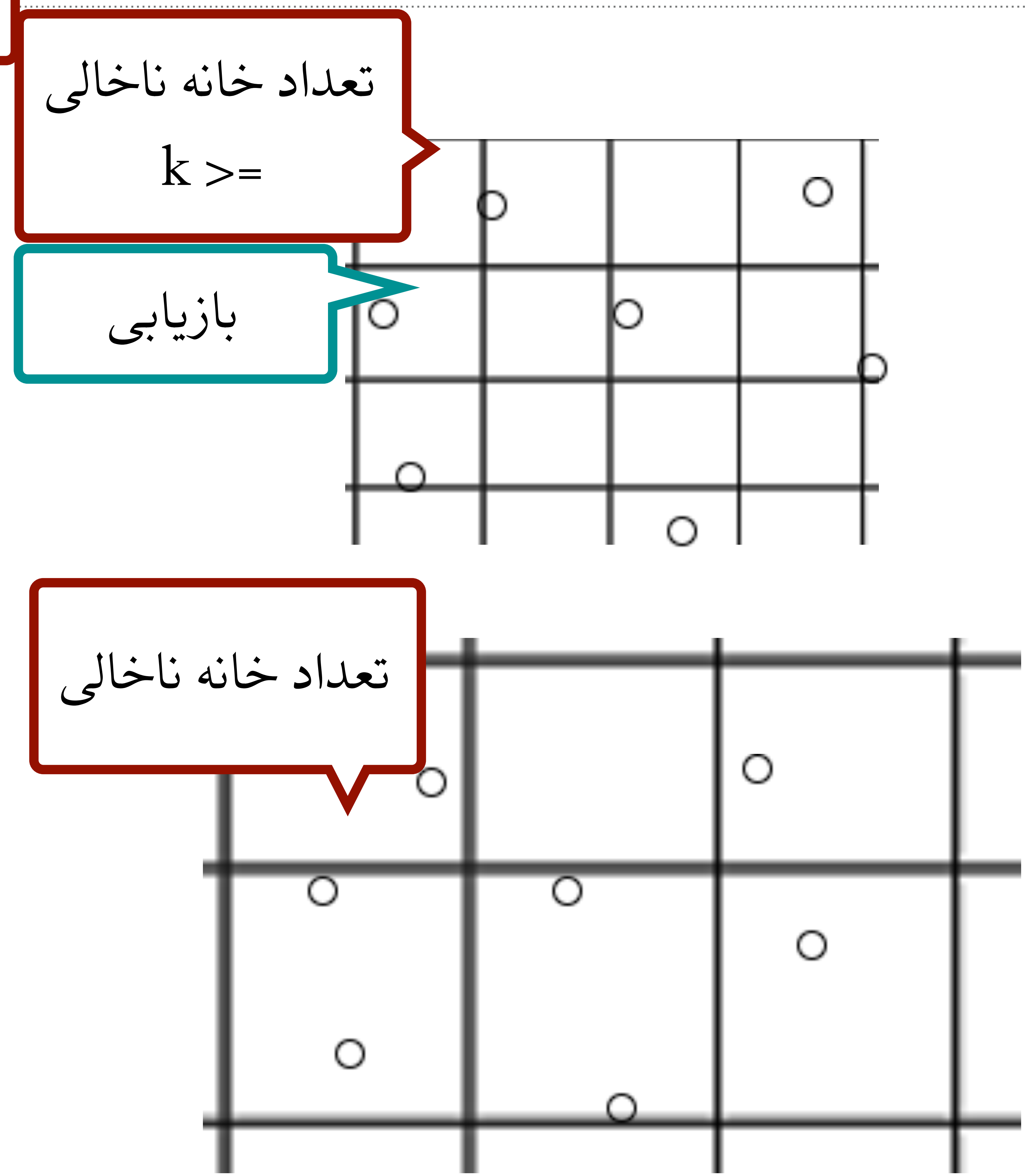


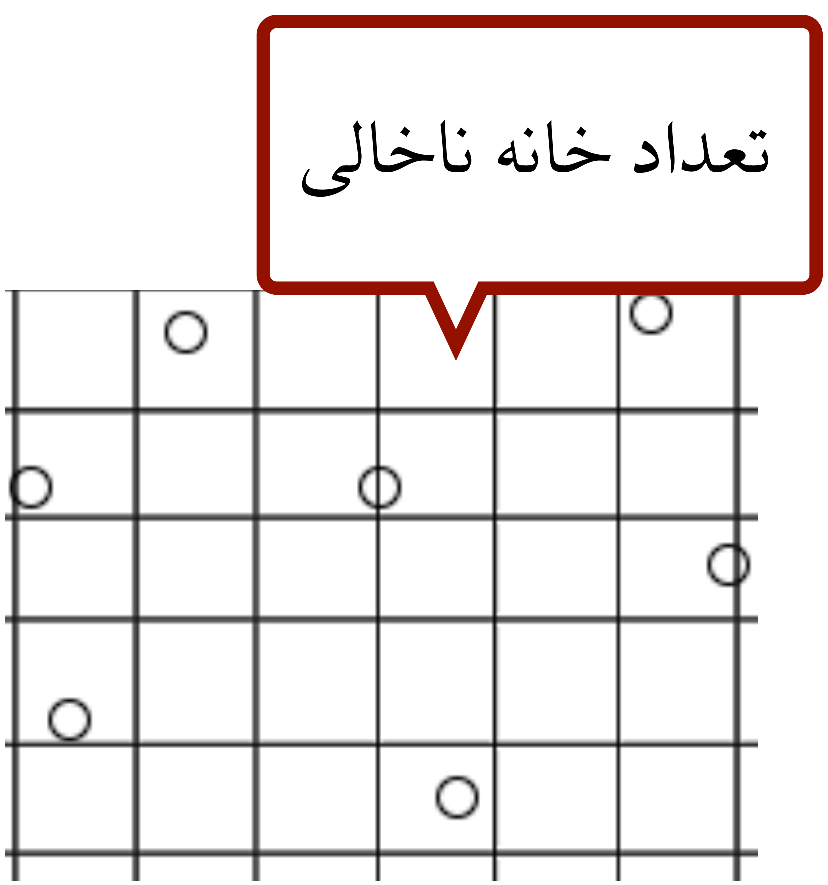




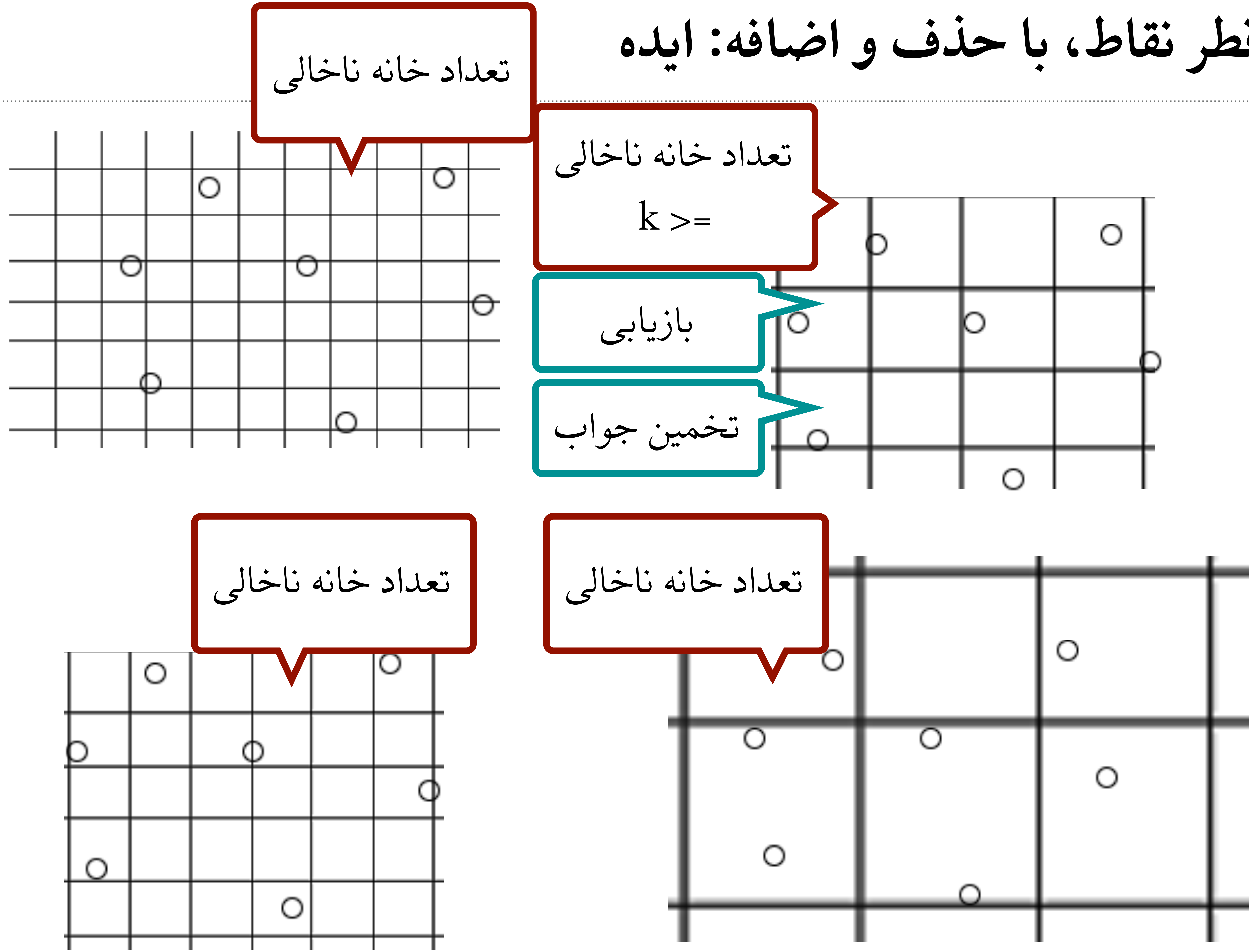
قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده







قطر نقاط، با حذف و اضافه: ایده



Algorithm 5 Diameter approximation

$n_p^i(c) := |\{p \,|\, p \in c \wedge p \in P\}|\,, \forall c \in G_i, \forall i \in [m]$

function APPROXIMATED(P)

  $G_0, \ldots, G_m \leftarrow$ square grids with diameter =1, $(1+\varepsilon)^1, (1+\varepsilon)^2, \ldots, 2\Delta$

  for $p \in P$ **do**

    Maintain linear sketch of n_P^i, $\forall i \in [m]$

  end for

  $i^* \leftarrow \min_{i \in [m]}\{i\}$ such that $\|n_P^i\|_0 \leq k = \emptyset(\frac{1}{\varepsilon^2})$ ▷ $\|n_P^i\|_0$ from linear sketch

  Recover the set S of non-zero cells in $n_p^{i^*}$ ▷ using k-sparse recovery of a vector

  return $(1+\varepsilon)^{i^*} D(S)$ ▷ $D(S)$ is the diameter of the set S (grid coordinates)

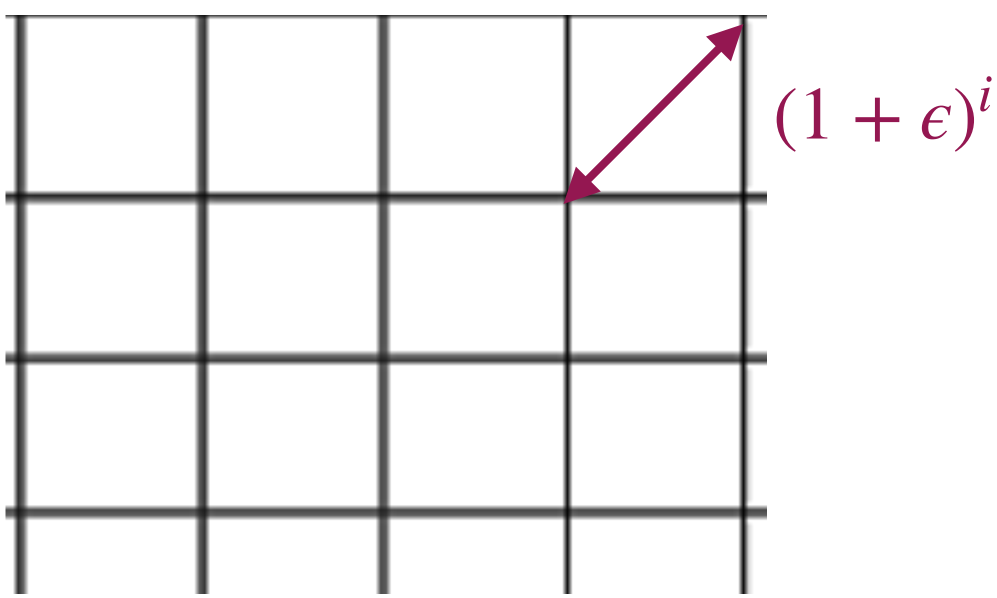
end function

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \le \varepsilon D \le (1+\varepsilon)^{i+1}.$$

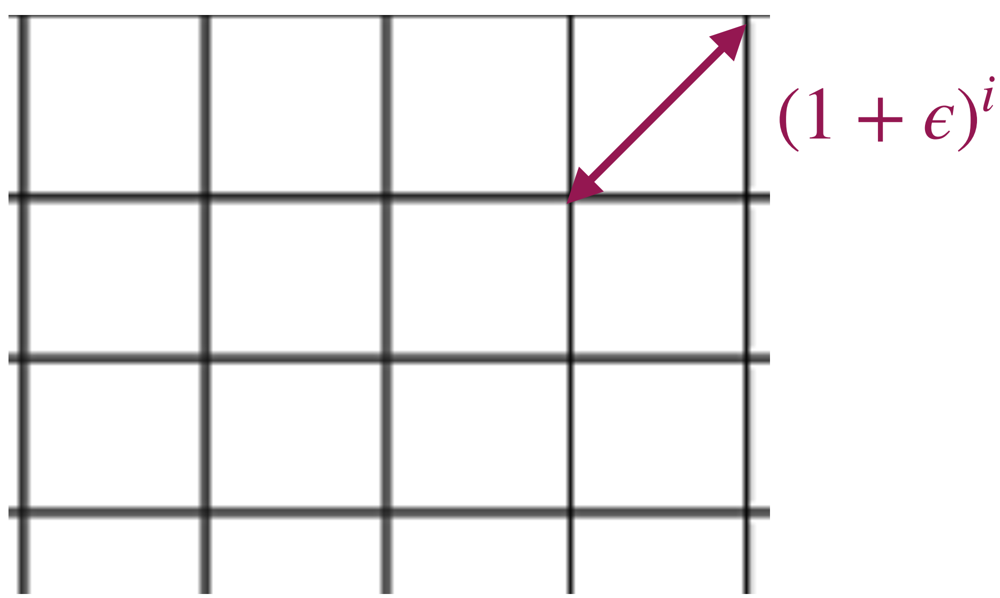
Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$



Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

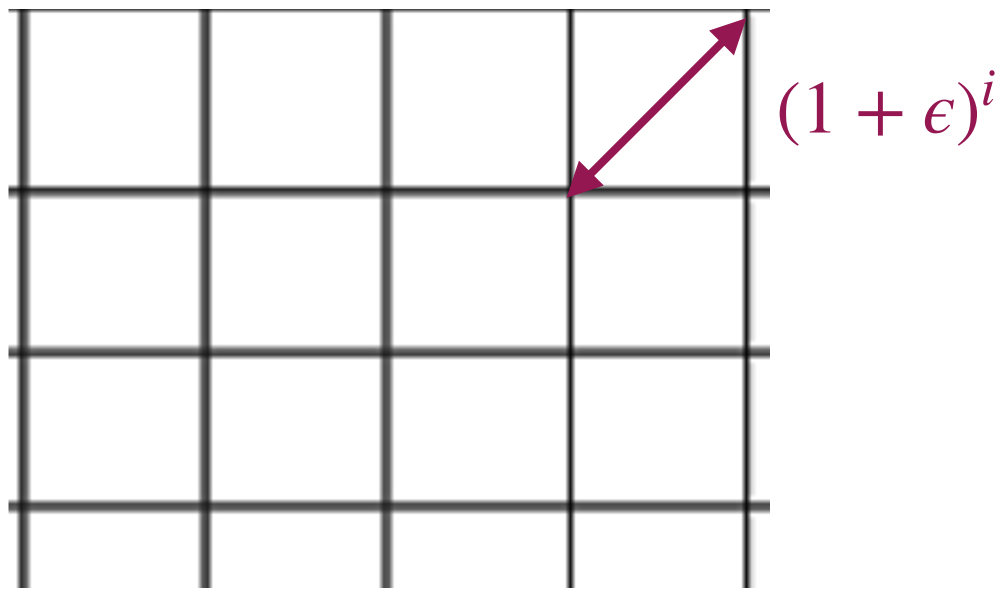
$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$



برای این i:

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$

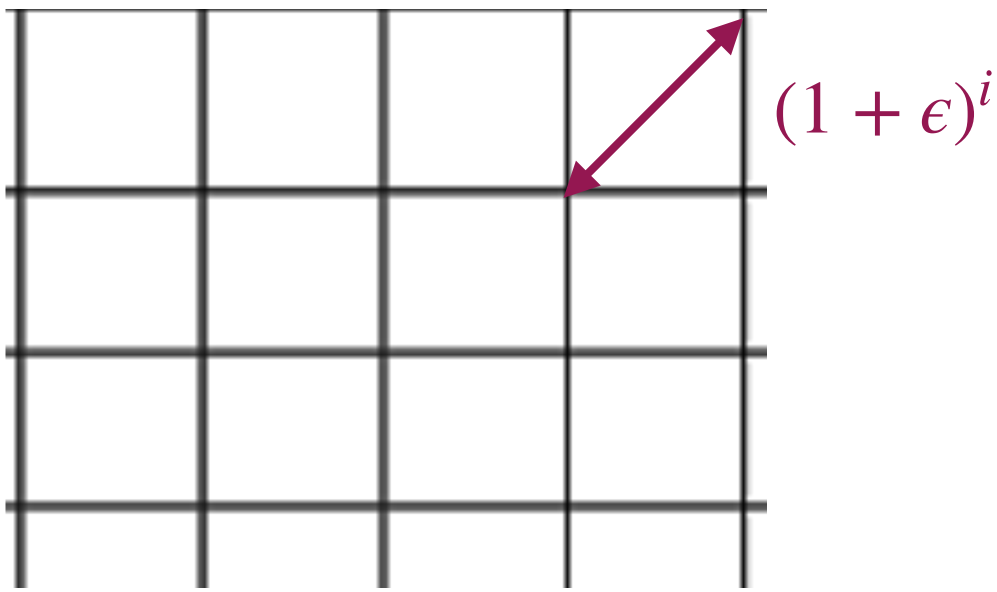


برای این i:

$$D \leq \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{i+1}$$

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$



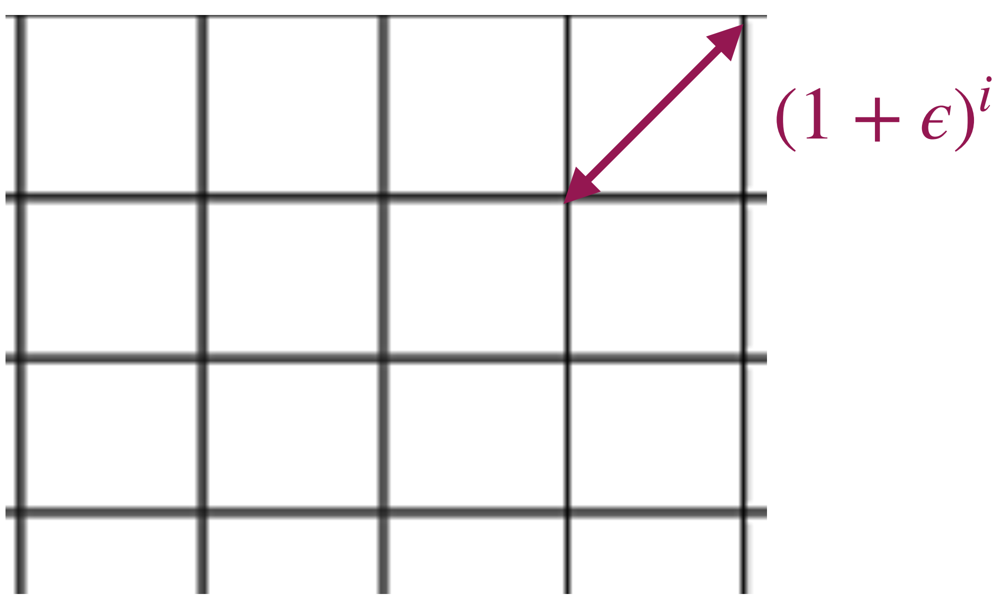
برای این i:

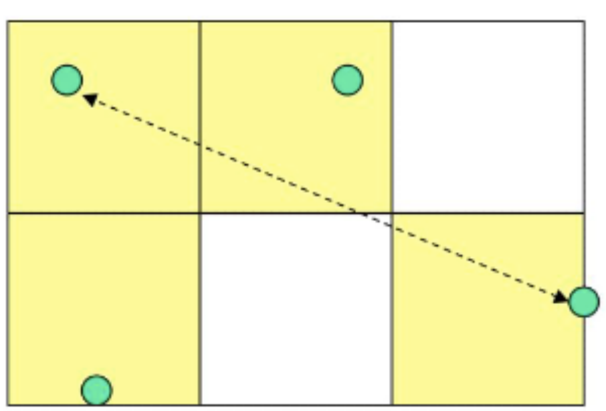
$$D \leq \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{i+1}$$

تعداد خانه‌های غیرخالی <= $\Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$





برای این i:

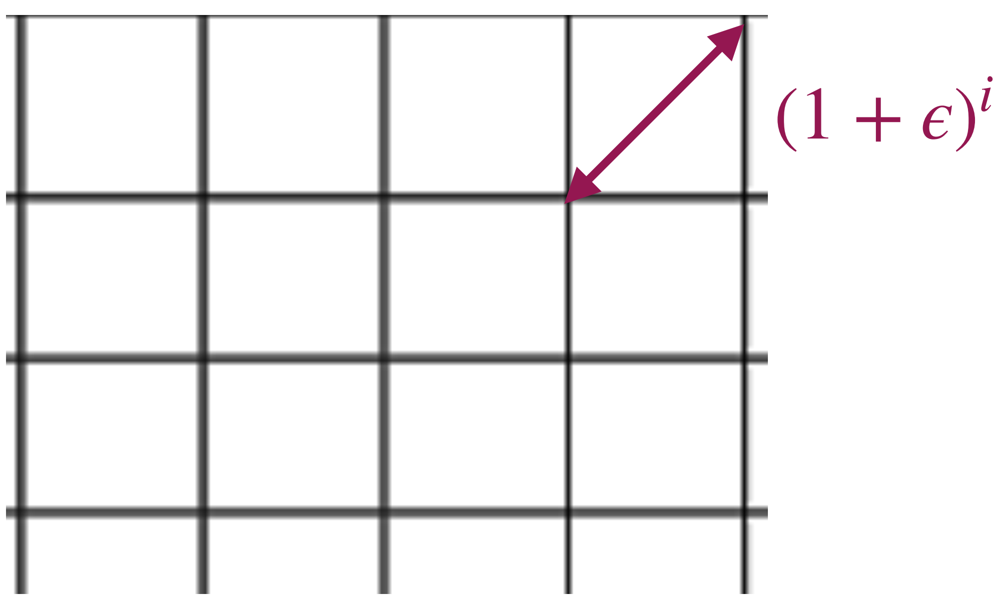
$$D \leq \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{i+1}$$

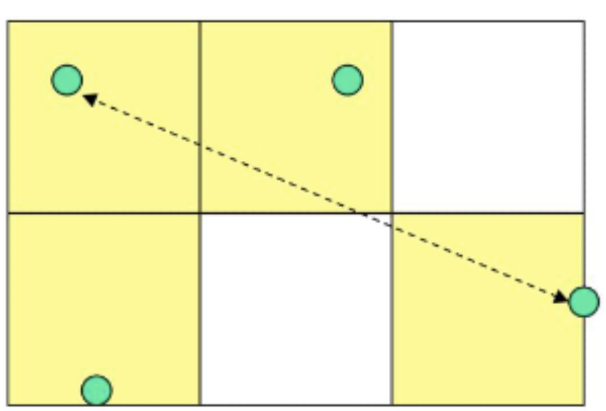
تعداد خانه‌های غیرخالی => $\Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$

خطا => $2\,(1+\epsilon)^i$ => $2\,\epsilon\mathrm{D}$

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$





برای این i:

$$D \leq \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{i+1}$$

تعداد خانه‌های غیرخالی <= $\Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$

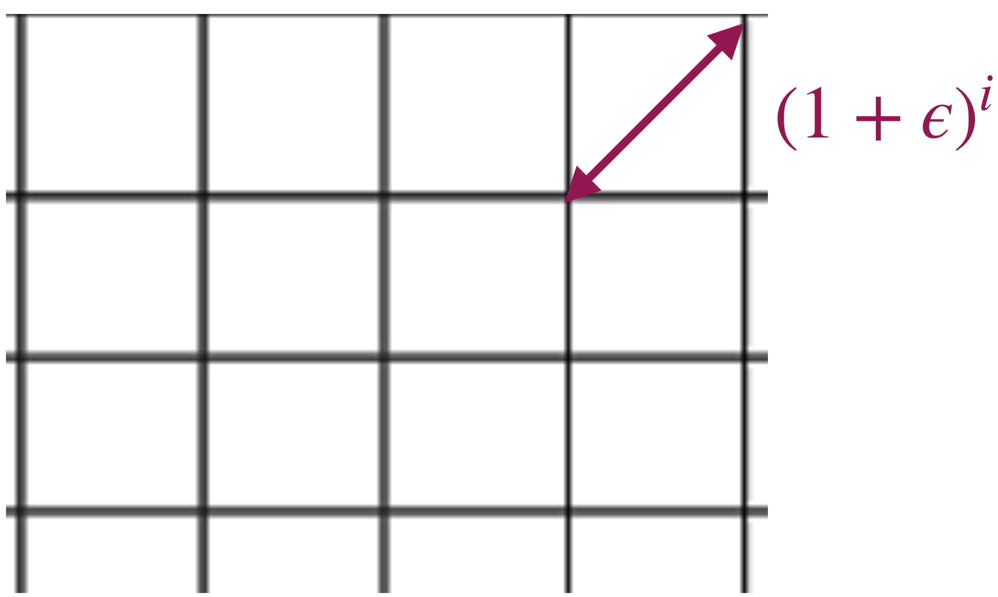
خطا <= $2\,(1+\epsilon)^i$ <= $2\,\epsilon D$

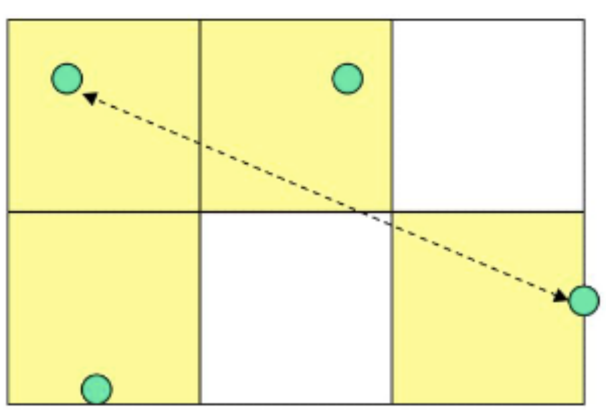
الگوریتم ما:

اندازه خانه کوچکتر هم هست

Fact 78. *Let D be the diameter of a set of points P. Then there is always a grid level i such that*

$$(1+\epsilon)^i \leq \varepsilon D \leq (1+\varepsilon)^{i+1}.$$





برای این i:

$$D \leq \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{i+1}$$

تعداد خانه‌های غیرخالی <= $\Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$

خطا <= $2\,(1+\epsilon)^i$ <= $2\,\epsilon D$

الگوریتم ما:

اندازه خانه کوچکتر هم هست

حافظه

Algorithm 5 Diameter approximation

تعداد $1/\epsilon \cdot \log(\Delta)$

$n_p^i(c) := |\{p \,|\, p \in c \wedge p \in P\}|, \forall c \in G_i, \forall i \in [m]$
function ApproximateD(P)
  $G_0, \ldots, G_m \leftarrow$ square grids with diameter $(1+\varepsilon)^{-log(1/\varepsilon)}, (1+\varepsilon)^1, (1+\varepsilon)^2, \ldots, 2\Delta$
  for $p \in P$ **do**

هر کدام $\mathrm{polylog}(n + \Delta)$

    Maintain linear sketch of $n_P^i, \ \forall i \in [m]$
  end for
  $i^* \leftarrow \min_{i \in [m]}\{i\}$ such that $\|n_P^i\|_0 \leq k = \text{Ø}(\frac{1}{\varepsilon^2})$ ▷ $\|n_P^i\|_0$ from linear sketch
  Recover the set S of non-zero cells in $n_p^{i^*}$ ▷ using k-sparse recovery of a vector
  return $(1+\varepsilon)^{i^*} D(S)$ ▷ $D(S)$ is the diameter of the set S (grid coordinates)
end function

حافظه $\varnothing((1/\varepsilon^{\varnothing(1)})\ \mathrm{polylog}(n+\Delta))$

Algorithm 5 Diameter approximation

تعداد $1/\epsilon \cdot \log(\Delta)$

$n_p^i(c) := |\{p \,|\, p \in c \wedge p \in P\}|, \forall c \in G_i, \forall i \in [m]$
function ApproximateD(P)
    $G_0, \ldots, G_m \leftarrow$ square grids with diameter $(1+\varepsilon)^{-log(1/\varepsilon)}, (1+\varepsilon)^1, (1+\varepsilon)^2, \ldots, 2\Delta$
    for $p \in P$ **do**
        Maintain linear sketch of $n_P^i,\ \forall i \in [m]$
    end for
    $i^* \leftarrow \min_{i \in [m]}\{i\}$ such that $\left\|n_P^i\right\|_0 \leq k = \varnothing(\frac{1}{\varepsilon^2})$ ▷ $\left\|n_P^i\right\|_0$ from linear sketch
    Recover the set S of non-zero cells in $n_p^{i^*}$ ▷ using k-sparse recovery of a vector
    return $(1+\varepsilon)^{i^*} D(S)$ ▷ $D(S)$ is the diameter of the set S (grid coordinates)
end function

هر کدام $\mathrm{polylog}(n+\Delta)$