بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه دهم: آیا برنامه‌ریزی هم‌مثبت الگوریتم سریع دارد؟

Project: People

Cone Programming

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

?

الگوریتم سریع

SDP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& X \succeq 0.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

ماتریس هم‌مثبت و کاملا مثبت

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

مشاهده:

$$\mathrm{PSD}_n \subsetneq \mathrm{COP}_n$$

ماتریس هم‌مثبت

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

مشاهده:

$$\mathrm{PSD}_n \subsetneq \mathrm{COP}_n$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.3 Lemma. *The set* COP_n *is a closed convex cone in* SYM_n.

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.3 Lemma. *The set COP_n is a closed convex cone in SYM_n.*

- بسته
- کنج
- محدب

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

7.1.1 Definition. *A matrix* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

- ترکیب محدب این ماتریس‌ها
    - جمع این ماتریس‌ها

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

دوگان COP_n؟

- ماتریس‌های $xx^\top$ که $x \geq 0$:

$$x^\top M x = M \bullet xx^\top$$

- ترکیب محدب این ماتریس‌ها
- جمع این ماتریس‌ها

ماتریس M **کاملا مثبت**: اگر بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

که $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}_+^n$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k]$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} \text{i} & \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{pmatrix} & \text{j} \end{array}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad\qquad \sum_i A[j,i]B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{pmatrix} & j \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_t \end{pmatrix}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \left(\begin{array}{c} \cdots \\ x_i[j] \\ \cdots \end{array}\right) & j \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} k & \\ \left(\begin{array}{c} \cdots \\ x_i[k] \\ \cdots \end{array}\right) & i \end{array}$$

$$A = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_t)$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AB$$

$$M[j,k] = \sum_i x_i[j] x_i[k] \qquad \sum_i A[j,i] B[i,k] = (AB)[j,k]$$

$$A = \begin{array}{cc} i & \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & x_i[j] & \\ & \cdots & \end{pmatrix} & j \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} k & \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & x_i[k] & \\ & \cdots & \end{pmatrix} & i \end{array}$$

$$A = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_t) \qquad B = A^\top$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{COP}_n^*$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \qquad (7.2)$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

برای کاملا مثبت بودن، تعداد ثابتی جمله کافی است.

7.1.5 Lemma. *M is completely positive if and only if there are $\binom{n+1}{2}$ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\binom{n+1}{2}} \in \mathbb{R}^n$ such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T.$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

POS_n کنج محدب بسته است.

- کنج $\lambda M = \sum_{i=1}^{\ell} (\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)(\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)^T$
- محدب
- بسته ؟؟؟

کنج محدب بسته بودن ماتریس‌های کاملا مثبت

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

کنج محدب <u>بسته</u> بودن لا مثبت

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k \to \infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کراندارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

کنج محدب بسته بودن لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$$\mathbf{a}_i^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai

کنج محدب <u>بسته</u> بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$$\mathbf{a}_i^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai

کنج محدب <u>بسته</u> بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai
- حد قطر $AA^\top$ = قطر M (حد تابع پیوسته = تابع پیوسته حد)

کنج محدب بسته بودن ... لا مثبت

ستون i از $A^{(k)}$:

$\mathbf{a}_i^{(k)}$

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \mathbf{x}_i^{(k)} {\mathbf{x}_i^{(k)}}^T = A^{(k)} {A^{(k)}}^T \in \mathrm{POS}_n$$

$$\lim_{k\to\infty} M^{(k)} = M \in \mathrm{SYM}_n$$

حکم: $M \in \mathrm{POS}_n$

حکم: $M = (\lim A)(\lim A)^\top$

- بردارهای ai کران‌دارند

$$m_{ii} = \lim_{k\to\infty} M_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{a}_i^{(k)}\|^2$$

- زیر رشته با حد ai دارند
- ماتریس A: با ستون‌های ai
- حد قطر $AA^\top$ = قطر M (حد تابع پیوسته = تابع پیوسته حد)
- حد بقیه درایه‌ها

$$m_{ij} = \lim_{k\to\infty} {\mathbf{a}_i^{(k)}}^T \mathbf{a}_j^{(k)} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

POS_n کنج محدب بسته است.

- کنج $\qquad \lambda M = \sum_{i=1}^{\ell} (\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)(\sqrt{\lambda}\mathbf{x}_i)^T$
- محدب
- بسته ؟؟؟

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$

- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$

- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  -
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلاً: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n}$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0}$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
- معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
- $$\underbrace{M}_{\in \mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}_{\in \mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$
- بردار نامنفی x هست که $x^{\mathsf{T}} M x < 0$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

- الف) $M \in \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \in \mathrm{POS}_n^*$
  - معادلا: $M \bullet X \geq 0$ برای هر $X \in \mathrm{POS}_n$
  - $$\underbrace{M}_{\in\mathrm{COP}_n} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}_{\in\mathrm{POS}_n} = \sum_{i=1}^{\ell} M \bullet \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i^T M \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\geq 0} \geq 0$$
- ب) $M \notin \mathrm{COP}_n$ آنگاه $M \notin \mathrm{POS}_n^*$
  - بردار نامنفی x هست که $x^\top M x < 0$
  - بردار نامنفی x هست که $M \bullet x x^\top < 0$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه یازدهم: آیا برنامه‌ریزی هم‌مثبت الگوریتم سریع دارد؟

Project: People

Cone Programming

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
 & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
 & & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

SDP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
 & X \succeq 0.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

برنامه‌ریزی هم‌مثبت برای یک مسئله سخت!

Cone Programming

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی هم‌مثبت

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A(X) = b \\
& X \in \mathrm{COP}_n
\end{array}
$$

SDP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& X \succeq 0.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی کاملا مثبت

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A(X) = b \\
& X \in \mathrm{POS}_n
\end{array}
$$

LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

بیشترین نرخ ارسال با گراف G:

$$\sigma(G) = \sup\left\{\frac{1}{k}\log\alpha(G^k) \,:\, k \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\Theta(G) = 2^{\sigma(G)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$$

$$\vartheta(G) := \min_{\mathcal{U}} \min_{\|\mathbf{c}\|=1} \max_{i=1}^{n} \frac{1}{(\mathbf{c}^T\mathbf{u}_i)^2}$$

قضیه:

$$\Theta(G) \leq \vartheta(G)$$

قضیه: برنامه‌ریزی زیر $\vartheta(G)$ را محاسبه می‌کند

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimize} & t & \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1 & \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1 & \textit{for all } i = 1,\ldots,n \\ & Y \succeq 0. & \end{array}$$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \;\; \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \;\; \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\leq \alpha(G)$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if} \ \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all} \ i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \text{ for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\min \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\min \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\min \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$ij \in \bar{E}$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \dots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, *the size of a maximum independent set in* G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\min \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$ij \in \bar{E}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, *the size of a maximum independent set in* G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$

$$\min \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\
& \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\
& & \mathbf{y} \in L^*.
\end{array}
$$

$$
\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1
$$

$$
\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}
$$

$$
Y \in \mathrm{COP}_n
$$

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\in \mathrm{POS}_n$$

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_i -x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad ij \in \bar{E}$$

$$Y \in \mathrm{COP}_n$$

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_i -x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
 & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
 & & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\
 & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\
 & & \mathbf{y} \in L^*.
\end{array}
$$

$$
\min \sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_{i} -x_{ii}
$$

$$
\sum_{i} x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} +
$$

$$
\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n
$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

قید آخر:

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_i -x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

قید آخر:

$$\sum_i - x_{ii} + 1 \geq 0$$

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} - x_{ij} + \sum_i - x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

قید آخر:

$$\sum_i -x_{ii} + 1 \geq 0$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_i -x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{POS}_n$$

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(D) & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\
& \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\
& & \mathbf{y} \in L^*.
\end{array}
$$

قید آخر:

$$\sum_i -x_{ii} + 1 \geq 0$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} -x_{ij} + \sum_i -x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 \end{pmatrix} \quad +$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix} \quad - \quad (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} - x_{ij} + \sum_i - x_{ii}$$

$$\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i) : 1 \end{pmatrix} \quad +$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j) : 1 \end{pmatrix} \quad - \quad (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \quad J_n \bullet X$$

$$X \in \mathrm{POS}_n$$

$$\mathrm{Tr}(X) \leq 1$$

$$\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 \end{pmatrix} \quad + $$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix} \quad - \quad (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \quad J_n \bullet X$$

$$X \in \mathrm{POS}_n$$

$$\mathrm{Tr}(X) \le 1$$

$$\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i) : 1 \end{pmatrix} \quad +$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j) : 1 \end{pmatrix} \quad - \quad (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \le 1$$

$$x_{ij} = 0 \qquad ij \in E$$

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \quad J_n \bullet X$$

$$X \in \mathrm{POS}_n$$

$$\mathrm{Tr}(X) \leq 1$$

$$\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii} + \sum_{ij \in E} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 \end{pmatrix} \quad +$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix} \quad - \quad (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \leq 1$$

$$x_{ij} = 0 \qquad ij \in E$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \quad J_n \bullet X$$

$$X \in \mathrm{POS}_n$$

$$\mathrm{Tr}(X) \le 1$$

$$\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii} + \sum_{ij \in E} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in E} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix} - (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n$$

$$\sum_i x_{ii} \le 1$$

$$x_{ij} = 0 \qquad ij \in E$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\
& \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\
& & \mathbf{y} \in L^*.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & J_n \bullet X \\
& X \in \mathrm{POS}_n \\
& \mathrm{Tr}(X) \leq 1 \\
& x_{ij} = 0 \qquad ij \in E
\end{array}
$$

$$
\max \sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} + \sum_i x_{ii} + \sum_{ij \in E} x_{ij}
$$

$$
\sum_i x_{ii} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,i):1 \end{pmatrix} + \sum_{ij \in E} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sum_{ij \in \bar{E}} x_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (i,j):1 \end{pmatrix} - (0) \qquad \in \mathrm{POS}_n
$$

$$
\sum_i x_{ii} \leq 1
$$

$$
x_{ij} = 0 \qquad ij \in E
$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\ & & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\ & & \mathbf{y} \in L^*. \end{array}$$

$$\max \quad J_n \bullet X$$

$$X \in \mathrm{POS}_n$$

$$\mathrm{Tr}(X) \leq 1 \qquad \mathrm{Tr}(X) = 1$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
 & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
 & & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Minimize} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\
 & \text{subject to} & A^T(\mathbf{y}) - \mathbf{c} \in K^* \\
 & & \mathbf{y} \in L^*.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & J_n \bullet X & \\
 & X \in \mathrm{POS}_n & \\
 & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\
 & x_{ij} = 0 & ij \in E
\end{array}
$$

$\mathrm{Tr}(X) \leq 1$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \text{ for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \text{ for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$$

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i\in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \bar{x}_i^2$$

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$J_n \bullet \tilde{X}$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij}$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$\begin{array}{ll} \max & J_n \bullet X \\ & X \in \mathrm{POS}_n \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 \\ & x_{ij} = 0 \qquad ij \in E \end{array}$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j} \, i = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j \in I} 1$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j} \vdots = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j \in I} 1 = \frac{\alpha(G)^2}{\alpha(G)}$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & t \\
\text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\
& y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\
& Y \in \mathrm{COP}_n
\end{array}
$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^{\top}) = \sum \tilde{x}_i^2$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j \in I} 1 = \frac{\alpha(G)^2}{\alpha(G)}$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & J_n \bullet X & \\
& X \in \mathrm{POS}_n & \\
& \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\
& x_{ij} = 0 & ij \in E
\end{array}
$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, *the size of a maximum independent set in* G.

$\leq \alpha(G)$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \;\; \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \;\; \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{minimize} & t \\
\textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\
 & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\
 & Y \in \mathrm{COP}_n
\end{array}
$$

has value $\alpha(G)$, the siz … *ndent set in G.*

صفر روی درایه‌های
بدون یال

$$Y = tI_n + Z - J_n$$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the siz … *ndent set in G.*

صفر روی درایه‌های بدون یال

$$Y = tI_n + Z - J_n$$

$$z = \max_{i,j}(Z_{i,j})$$

$$Y' = tI_n + zA_G - J_n$$

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\leq \alpha(G)$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$$:= m(G)$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- ...

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
  - ...
- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
  - ...

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- $\tilde{x}$: بردار مشخصه مجموعه مستقل

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \underbrace{\min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}}_{:= m(G)}.$$

$f(x) :=$ $\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- $\tilde{x}$: بردار مشخصه مجموعه مستقل

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i,j} (A_G + I)_{i,j} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- $\tilde{x}$: بردار مشخصه مجموعه مستقل

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i,j} (A_G + I)_{i,j} \tilde{x}_i \tilde{x}_j = |I|$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- $\tilde{x}$: بردار مشخصه مجموعه مستقل

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i,j} (A_G + I)_{i,j} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \;\; = |I|$$

- $\dfrac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- $\tilde{x}$: بردار مشخصه مجموعه مستقل

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i,j} (A_G + I)_{i,j}\tilde{x}_i\tilde{x}_j \ = |I|$$

- $\dfrac{1}{\alpha(G)}\tilde{x}$
- نرم ۱ = ۱، کنج مثبت، $f(\dfrac{1}{\alpha(G)}\tilde{x}) = \dfrac{1}{\alpha(G)}$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
    - x^*: جواب بهینه
        - با بیشترین صفر
    - یال i و j که دو سرشان مثبت است

قضیه Motzkin–Straus:

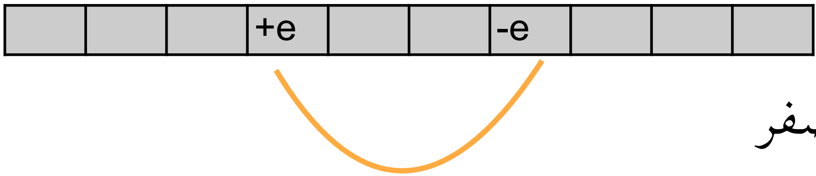
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر
- یال i و j که دو سرشان مثبت است



قضیه Motzkin–Straus:

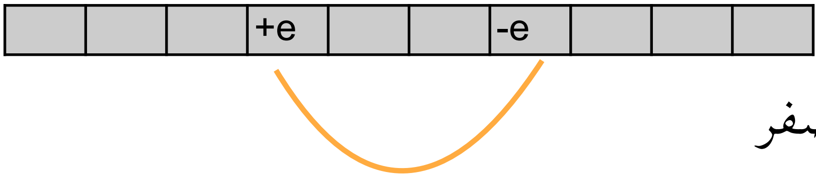
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر
- یال i و j که دو سرشان مثبت است



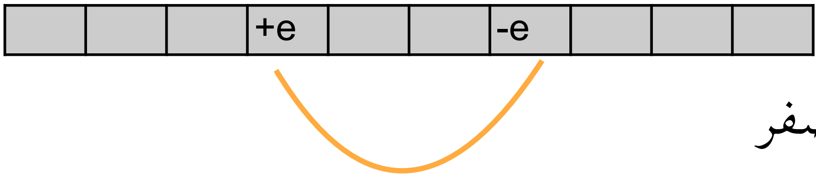
$$z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G+I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
    - x^*: جواب بهینه
        - با بیشترین صفر
    - یال i و j که دو سرشان مثبت است



$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

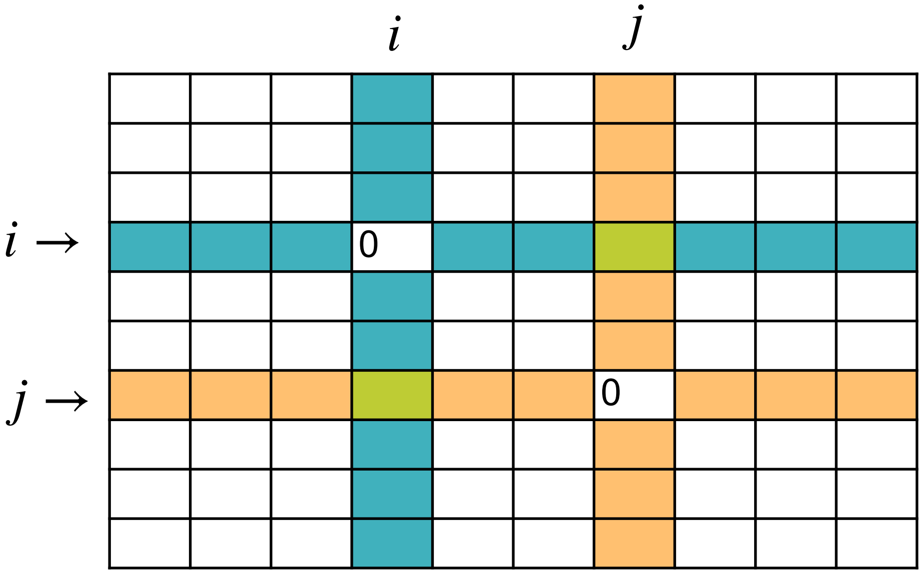
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$



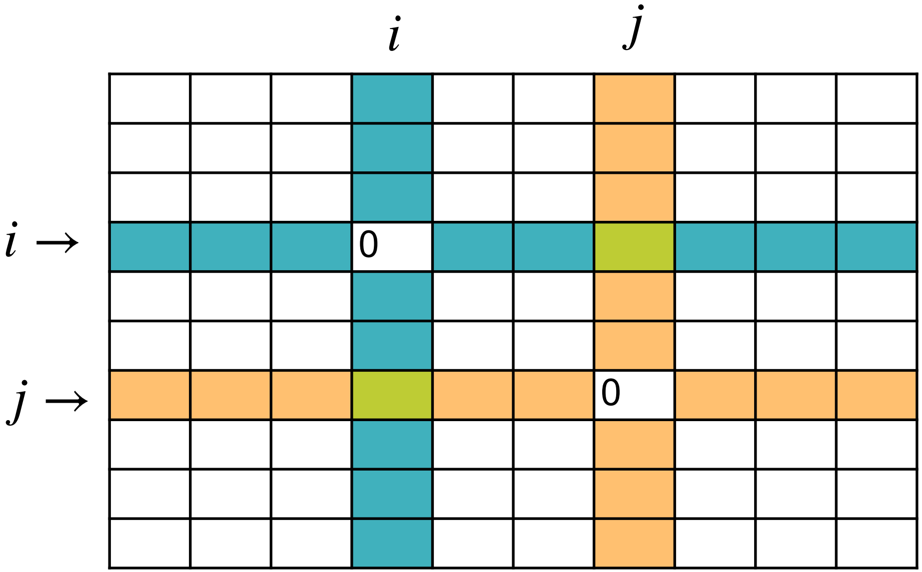
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$



$$f(z) = \epsilon \mathrm{B} - \epsilon \mathrm{O} + 2(x_i + \epsilon)(x_j - \epsilon) +$$

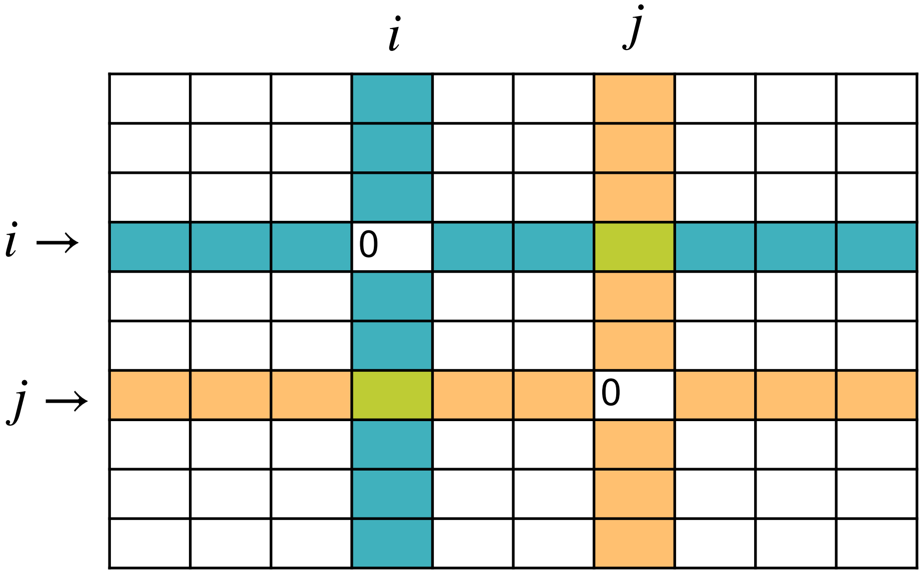
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$



$$f(z) = \epsilon \mathrm{B} - \epsilon \mathrm{O} + 2(x_i + \epsilon)(x_j - \epsilon) +$$

$$(x_i + \epsilon)^2 + (x_j - \epsilon) + \ldots$$

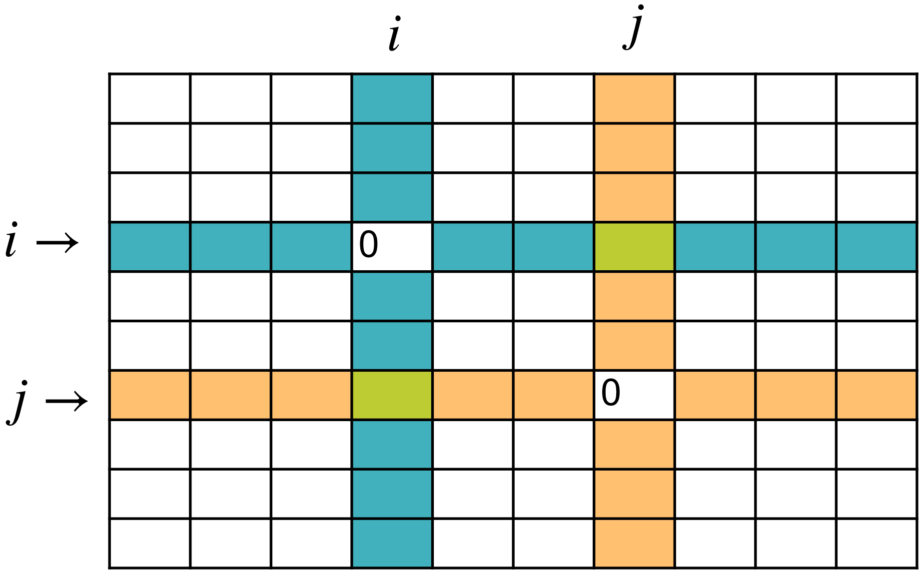
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$



$$f(z) = \epsilon \mathrm{B} - \epsilon \mathrm{O} + 2(x_i + \epsilon)(x_j - \epsilon) +$$
$$(x_i + \epsilon)^2 + (x_j - \epsilon) + \ldots$$

$l(\epsilon)$ نسبت به

ϵ خطی است

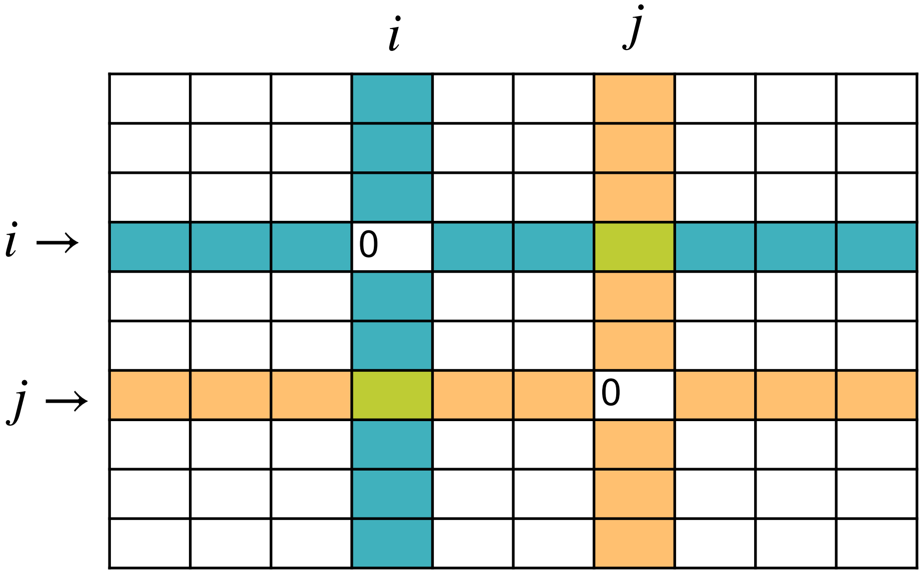
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$



$$f(z) = \epsilon \mathrm{B} - \epsilon \mathrm{O} + 2(x_i + \epsilon)(x_j - \epsilon) +$$
$$(x_i + \epsilon)^2 + (x_j - \epsilon) + \ldots$$

$f(z)$ نسبت به ϵ خطی است

$l(\epsilon)$ نسبت به ϵ خطی است

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$f(z)$ نسبت به ϵ خطی است

$l(\epsilon)$ نسبت به ϵ خطی است

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$l(\epsilon)$ نسبت به ϵ خطی است

$f(z)$ نسبت به ϵ خطی است

$l(\epsilon)$ متحد صفر است

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$l(\epsilon)$ نسبت به ϵ خطی است

$f(z)$ نسبت به ϵ خطی است

$l(\epsilon)$ متحد صفر است

می‌توان یکی از درایه‌های x^* را صفر کرد

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$l(\epsilon)$ نسبت به ϵ خطی است

$f(z)$ نسبت به ϵ خطی است

$l(\epsilon)$ متحد صفر است

می‌توان یکی از درایه‌های x^* را صفر کرد

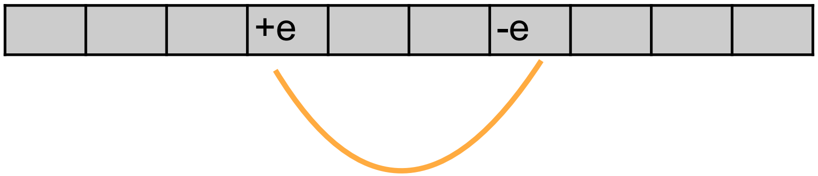
تناقض !

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر
- یال i و j که دو سرشان مثبت است



$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \underbrace{\min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}}_{:= m(G)}.$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- x^*: جواب بهینه

			+e			-e			

- با بیشترین صفر
- یال i و j که دو سرشان مثبت است

نداریم

$$f(z) = f(x^*) + l(\epsilon) \qquad z_k = \begin{cases} x_k^* + \varepsilon & \text{if } k = i \\ x_k^* - \varepsilon & \text{if } k = j \\ x_k^* & \text{otherwise,} \end{cases}$$

قضیه Motzkin–Straus:

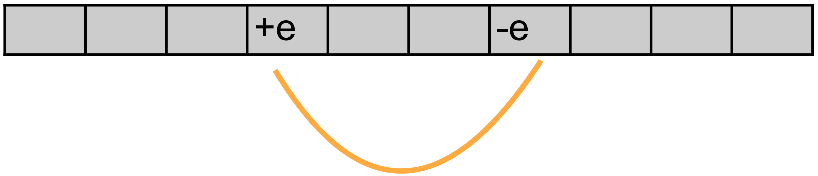
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \frac{1}{\alpha(G)}$



- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر
- یال i و j که دو سرشان مثبت است
- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

نداریم

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$f(x) = 2 \sum_{i,j \in E(G)} x_i x_j + \sum_{i \in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$f(x) = 2 \underbrace{\sum_{i,j \in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i \in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$f(x) :=$

$:= m(G)$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$f(x) = 2\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j + \sum_{i\in J} x_i^2$$

0

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$(\sum_{i\in J} x_i^2)(\sum_{i\in J}(\frac{1}{\sqrt{|J|}})^2)$$

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$(\sum_{i\in J} x_i^2)(\sum_{i\in J}(\frac{1}{\sqrt{|J|}})^2) \geq (\sum_{i\in J} x_i \frac{1}{\sqrt{|J|}})^2$$

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$\left(\sum_{i\in J} x_i^2\right)\left(\sum_{i\in J}\left(\frac{1}{\sqrt{|J|}}\right)^2\right) \geq \left(\sum_{i\in J} x_i \frac{1}{\sqrt{|J|}}\right)^2 \geq \frac{1}{|J|}\left(\sum_{i\in J} x_i\right)^2$$

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\underbrace{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x}}_{f(x) :=} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \quad := m(G)$$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$(\sum_{i\in J} x_i^2)(\sum_{i\in J}(\frac{1}{\sqrt{|J|}})^2) \geq (\sum_{i\in J} x_i \frac{1}{\sqrt{|J|}})^2 \geq \frac{1}{|J|}(\sum_{i\in J} x_i)^2 = \frac{1}{|J|}$$

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$

- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$(\sum_{i\in J} x_i^2)(\sum_{i\in J}(\frac{1}{\sqrt{|J|}})^2) \geq (\sum_{i\in J} x_i \frac{1}{\sqrt{|J|}})^2 \geq \frac{1}{|J|}(\sum_{i\in J} x_i)^2 = \frac{1}{|J|}$$

$$f(x) = 2\underbrace{\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j}_{0} + \sum_{i\in J} x_i^2 \geq \frac{1}{|J|}$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$$

$$\Big(\sum_{i\in J} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i\in J}\Big(\frac{1}{\sqrt{|J|}}\Big)^2\Big) \geq \Big(\sum_{i\in J} x_i\frac{1}{\sqrt{|J|}}\Big)^2 \geq \frac{1}{|J|}\Big(\sum_{i\in J} x_i\Big)^2 = \frac{1}{|J|}$$

$$f(x) = 2\sum_{i,j\in E(G)} x_i x_j + \sum_{i\in J} x_i^2 \geq \frac{1}{|J|} \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

0

قضیه Motzkin–Straus:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- الف) $m(G) \leq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
  - ...
- ب) $m(G) \geq \dfrac{1}{\alpha(G)}$
  - ...

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α $\leq \alpha(G)$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α … $\le \alpha(G)$

7.2.6 Theorem. *For every graph* G,

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1$$

α

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\leq \alpha(G)$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

7.2.6 Theorem. *For every graph* G,

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α … $\le \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α ... $\le \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x روی سادک:

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α $\leq \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

برای هر x روی سادک: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

برای هر x نامنفی: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α

$\leq \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

برای هر x روی سادک: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

برای هر x نامنفی: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

هم‌مثبت: $\tilde{Y} := \alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α $\leq \alpha(G)$

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G) I_n + \alpha(G) A_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\leq \alpha(G)$

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G) I_n + \alpha(G) A_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

$\alpha(G) \leq$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \text{ if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \text{ for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$\leq \alpha(G)$

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G) I_n + \alpha(G) A_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & t \\ \text{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

برنامه‌ریزی هم‌مثبت سخت است!

برنامه‌ریزی هم‌مثبت سخت است!

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

برنامه‌ریزی هم‌مثبت سخت است!

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

برنامه‌ریزی کاملا مثبت سخت است!

برنامه‌ریزی هم‌مثبت سخت است!

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

برنامه‌ریزی کاملا مثبت سخت است!

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

تقریب‌ناپذیری مسئله مجموعه مستقل

- تحت فرض‌های خوبی ($\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{ZPP}$)
- هیچ الگوریتم تقریبی برای مسئله بزرگ‌تری مجموعه مستقل
- با ضریب تقریب $n^{1-\epsilon}$ برای هیچ $\epsilon > 0$ وجود ندارد.

Cone Programming

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}) & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
 & \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
 & & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

?

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی هم‌مثبت

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A(X) = b \\
 & X \in \mathrm{COP}_n
\end{array}
$$

SDP

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & C \bullet X & \\
\text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & X \succeq 0. &
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

برنامه‌ریزی کاملا مثبت

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A(X) = b \\
 & X \in \mathrm{POS}_n
\end{array}
$$

LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^{\top} x \\
\text{subject to} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

بسم الله الرحمن الرحیم

برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه دوازدهم: آیا برنامه‌ریزی هم‌مثبت الگوریتم سریع دارد؟

Project: People

Cone Programming

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\
& \text{subject to} & \mathbf{b} - A(\mathbf{x}) \in L \\
& & \mathbf{x} \in K.
\end{array}
$$

?

الگوریتم سریع

SDP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & C \bullet X \\
\text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& X \succeq 0.
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

الگوریتم سریع

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathrm{POS}_n \subseteq \mathrm{PSD}_n \subseteq \mathrm{COP}_n$$

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \text{ is completely positive}\}$$

7.1.1 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called copositive if*

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0.$$

$$\mathrm{COP}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0 \textit{ for all } \mathbf{x} \geq 0\}$$

7.1.7 Theorem. $\mathrm{POS}_n^* = \mathrm{COP}_n$.

7.1.4 Definition. *A matrix $M \in \mathrm{SYM}_n$ is called completely positive if for some ℓ, there are ℓ nonnegative vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^n_+$, such that*

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = AA^T, \tag{7.2}$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ is the (nonnegative) matrix with columns $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell$.

$$\mathrm{POS}_n := \{M \in \mathrm{SYM}_n : M \textit{ is completely positive}\}$$

قضیه: برنامه‌ریزی زیر $\vartheta(G)$ را محاسبه می‌کند

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimize} & t & \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1 & \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1 & \textit{for all } i = 1,\ldots,n \\ & Y \succeq 0. & \end{array}$$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \textit{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

$$\alpha(G) \le$$

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

- روش: یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار $\alpha(G)$
- I: یکی از بزرگ‌ترین مجموعه‌های مستقل

$$\tilde{x}_i = 1_{[i \in I]}$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \quad \mathrm{Tr}(\tilde{x}\tilde{x}^\top) = \sum \bar{x}_i^2$$

$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

$$J_n \bullet \tilde{X} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j} = \frac{1}{\alpha(G)} \sum_{i,j \in I} 1 = \frac{\alpha(G)^2}{\alpha(G)}$$

قضیه Motzkin–Straus:

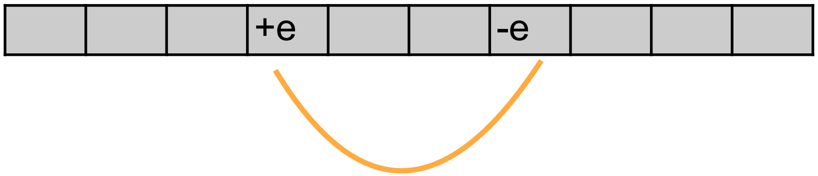
7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G+I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x}\ge \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

$:= m(G)$

$f(x) :=$

- ب) $m(G) \ge \dfrac{1}{\alpha(G)}$



- x^*: جواب بهینه
- با بیشترین صفر

نداریم

- یال i و j که دو سرشان مثبت است
- J: مجموعه راس‌های با x^* مثبت، مستقل است

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α ... $\leq \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

برای هر x روی سادک: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

برای هر x نامنفی: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

هم‌مثبت: $\tilde{Y} := \alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

$\leq \alpha(G)$

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G) I_n + \alpha(G) A_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \\ \textit{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimize} & t \\ \textit{subject to} & y_{ij} = -1, \ \textit{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t - 1, \ \textit{for all } i = 1, 2, \ldots, n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the siz … *ndent set in G.*

صفر روی درایه‌های بدون یال

$$Y = tI_n + Z - J_n$$

$$z = \max_{i,j}(Z_{i,j})$$

$$Y' = tI_n + zA_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & t \\ \text{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

α $\leq \alpha(G)$

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G) I_n + \alpha(G) A_G - J_n$$

7.2.5 Lemma. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & t \\ \text{subject to} & tI_n + zA_G - J_n \in \mathrm{COP}_n \\ & t, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

جوابش برابر با جواب برنامه‌ریزی بالاست.

برنامه‌ریزی هم‌مثبت سخت است!

7.2.1 Theorem. *The copositive program*

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & y_{ij} = -1, \ \text{if } \{i,j\} \in \overline{E} \\ & y_{ii} = t-1, \ \text{for all } i = 1,2,\ldots,n \\ & Y \in \mathrm{COP}_n \end{array}$$

has value $\alpha(G)$, the size of a maximum independent set in G.

برنامه‌ریزی کاملا مثبت سخت است!

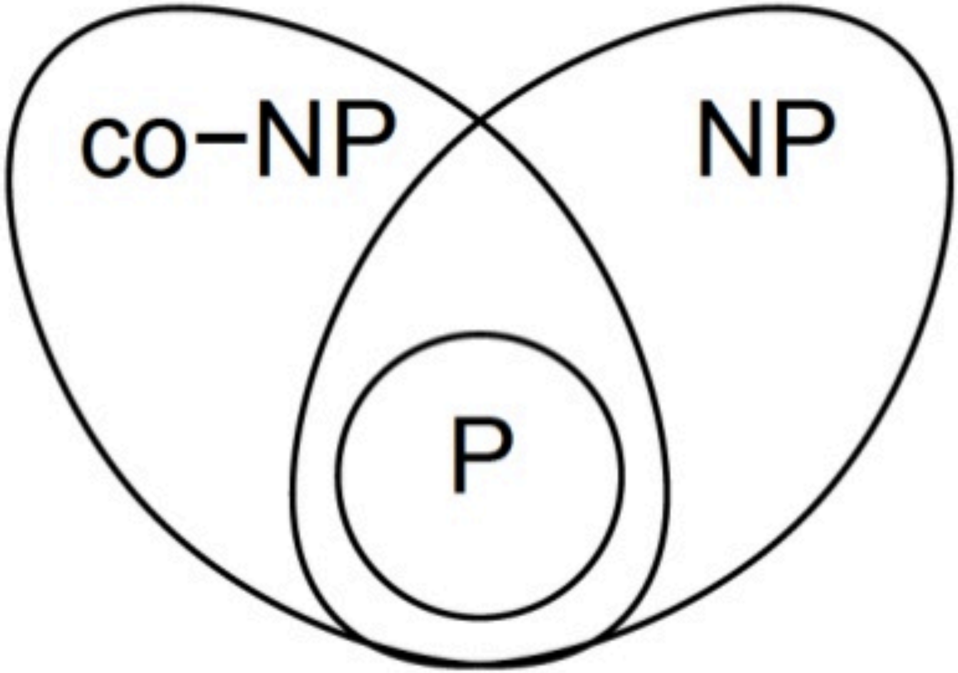
$$\begin{array}{lll} \max & J_n \bullet X & \\ & X \in \mathrm{POS}_n & \\ & \mathrm{Tr}(X) = 1 & \\ & x_{ij} = 0 & ij \in E \end{array}$$

تقریب‌ناپذیری مسئله مجموعه مستقل

- تحت فرض‌های خوبی ($\mathrm{NP} \nsubseteq \mathrm{ZPP}$)
- هیچ الگوریتم تقریبی برای مسئله بزرگ‌تری مجموعه مستقل
- با ضریب تقریب $n^{1-\epsilon}$ برای هیچ $\epsilon > 0$ وجود ندارد.

یافتن نقطه کمینه موضعی

coNP و coNP ـ تمام



مسئله اول سخت:

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP ـ تمام است

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:
- تمام بودن:

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:
- تمام بودن:
  - کاهش مسئله تصمیم بزرگ‌ترین مجموعه مستقل

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:
- تمام بودن:
  - کاهش مسئله تصمیم بزرگ‌ترین مجموعه مستقل
    - G و k: آیا $k \geq \alpha(G)$؟

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^\top (A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^\top (A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^\top(A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^\top (A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x روی سادک:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^\top (A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x نامنفی:

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

برای هر x روی سادک:

$$x^{\top}(A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x نامنفی:

هم‌مثبت:

$$\tilde{Y} := \alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n$$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

اگر $k \geq \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$x^{\top}(A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)} \geq \frac{1}{k}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\alpha(G)(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

برای هر x روی سادک: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

برای هر x نامنفی: $\mathbf{x}^T(\alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

هم‌مثبت: $\tilde{Y} := \alpha(G)I_n + \alpha(G)A_G - J_n$

7.2.6 Theorem. *For every graph G,*

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min\{\mathbf{x}^T(A_G + I_n)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

اگر $k \geq \alpha(G)$

برای هر x روی سادک:

$$x^{\top}(A_G + I)x \geq \frac{1}{\alpha(G)} \geq \frac{1}{k}$$

برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\boxed{k}(A_G + I_n))\mathbf{x} \geq 1 = \mathbf{x}^T J_n \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^T(\boxed{k} I_n + \boxed{k} A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x روی سادک:

$$\mathbf{x}^T(\boxed{k} I_n + \boxed{k} A_G - J_n)\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$ برای هر x نامنفی:

$$\tilde{Y} := \boxed{k} I_n + \boxed{k} A_G - J_n$$ هم‌مثبت:

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:
- تمام بودن:
  - کاهش مسئله تصمیم بزرگ‌ترین مجموعه مستقل
    - G و k: آیا $\alpha(G) \geq k$؟

$$\alpha(G) \geq k$$

اگر و فقط اگر

k

k

مسئله بررسی هم‌مثبت بودن یک ماتریس، coNP_تمام است

- در coNP بودن:
- تمام بودن:
  - کاهش مسئله تصمیم بزرگ‌ترین مجموعه مستقل
    - G و k: آیا $\alpha(G) \geq k$؟

$$\alpha(G) \geq k$$

اگر و فقط اگر

هم‌مثبت: $\tilde{Y} := \boxed{k} I_n + \boxed{k} A_G - J_n$

مسئله دوم سخت:

7.3.3 Corollary. *Let* $M \in \mathrm{SYM}_n$ *be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether* $\mathbf{0}$ *is a local minimum of the quadratic form* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ *subject to* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether* $\mathbf{0}$ *is a local minimum of the quadratic form* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ *subject to* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP ـ تمام است.

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether* $\mathbf{0}$ *is a local minimum of the quadratic form* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ *subject to* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP ـ تمام است.
- هم‌مثبت بودن === به ازای هر x>=0 مقدار $x^T M x$ نامنفی باشد

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether $\mathbf{0}$ is a local minimum of the quadratic form $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.*

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP_تمام است.
- هم‌مثبت بودن === به ازای هر x>=0 مقدار $x^T M x$ نامنفی باشد
- حکم: به ازای هر x>=0 مقدار $x^T M x$ نامنفی است === ۰ کمینه موضعی $x^T M x$ است

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether* $\mathbf{0}$ *is a local minimum of the quadratic form* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ *subject to* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP ـ تمام است.
- هم‌مثبت بودن === به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی باشد
- حکم: به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی است === ۰ کمینه موضعی x^TMx است
  - <= کمینه سرتاسری است

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether $\mathbf{0}$ is a local minimum of the quadratic form $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.*

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP ـ تمام است.
- هم‌مثبت بودن === به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی باشد
- حکم: به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی است === ۰ کمینه موضعی x^TMx است
  - => کمینه سرتاسری است
  - => ادعا: کمینه سرتاسری است.

7.3.3 Corollary. *Let $M \in \mathrm{SYM}_n$ be an integer matrix. It is coNP-complete to decide whether $\mathbf{0}$ is a local minimum of the quadratic form $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.*

- بررسی هم‌مثبت بودن coNP ـ تمام است.
- هم‌مثبت بودن === به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی باشد
- حکم: به ازای هر x>=0 مقدار x^TMx نامنفی است === ∘ کمینه موضعی x^TMx است
  - <= کمینه سرتاسری است
  - => ادعا: کمینه سرتاسری است.
    - فرض خلف: y که y^TMy کم‌تر از صفر.

مسئله سوم سخت:

تعریف مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$

(که F مجموعه‌ای از توابع هموار است)

ورودی: $\phi \in \mathcal{F}$

خروجی: آیا بردار ۰ یک کمینه موضعی برای ϕ است؟

نقطه‌ای که در یک همسایگی کوچک کمینه است.

کمینه موضعی واقعی، کمینه موضعی غیر واقعی

کمینه موضعی واقعی، کمینه موضعی غیر واقعی

- مشتق صفر و هسیان مثبت نیمه‌معین

کمینه موضعی واقعی، کمینه موضعی غیر واقعی

- مشتق صفر و هسیان مثبت نیمه‌معین

کافی است؟

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

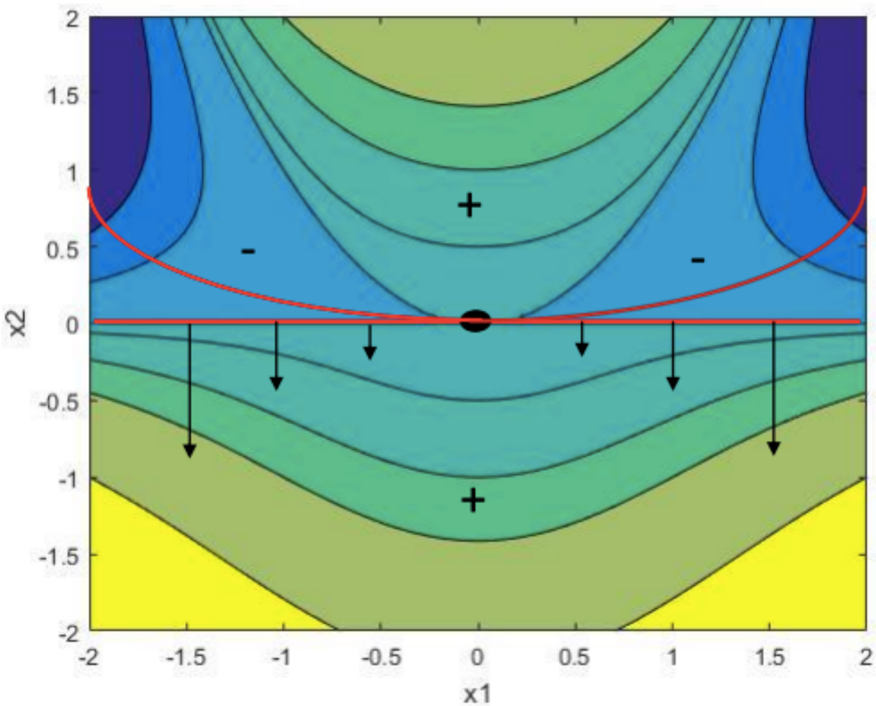
$$\nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

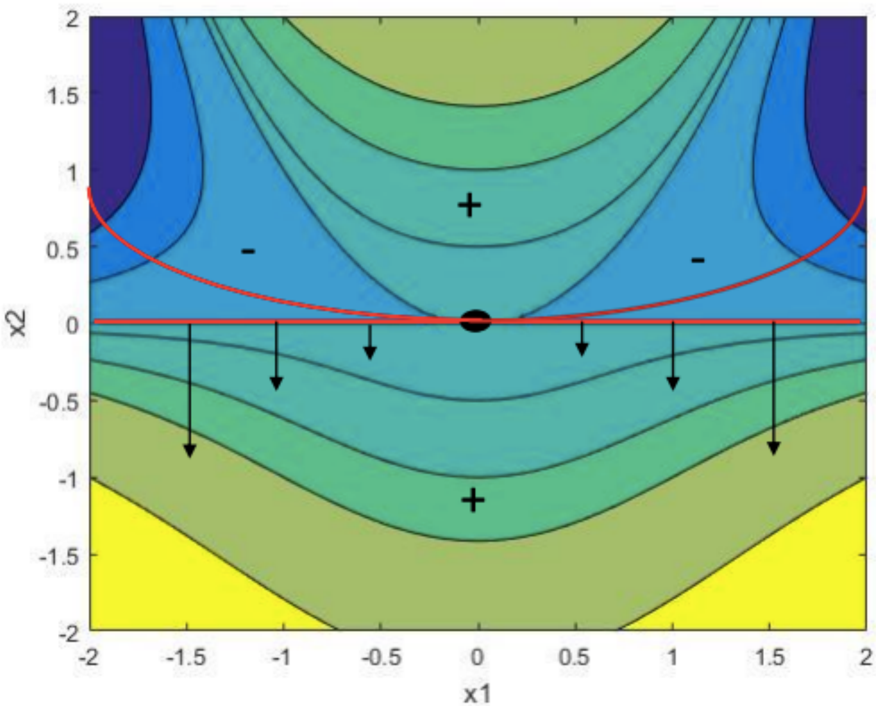
$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$



نقطه (0,0) کمینه موضعی است؟

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

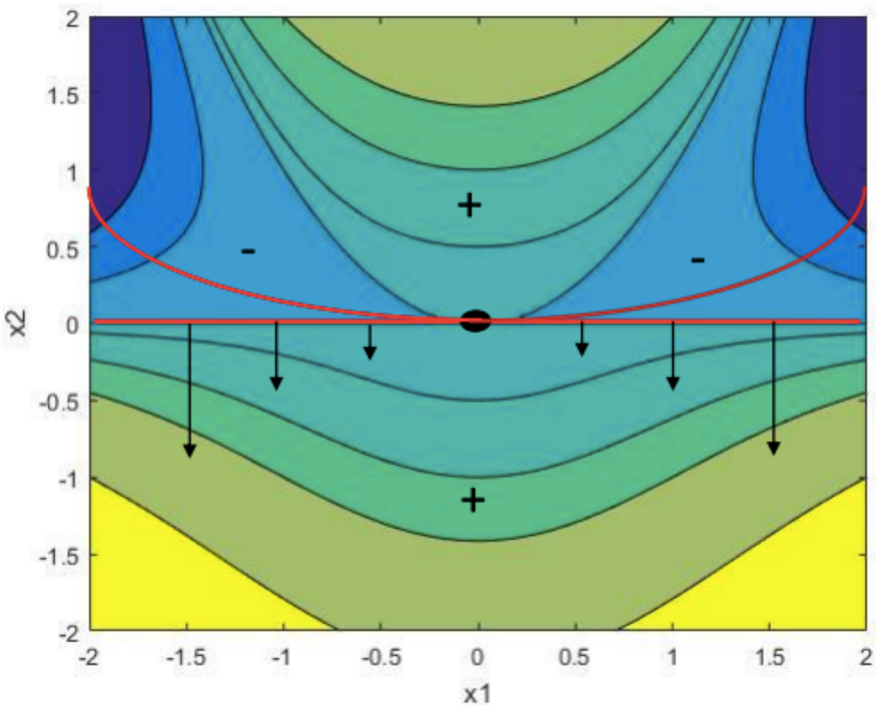
$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$



نقطه (0,0) کمینه موضعی است؟

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$

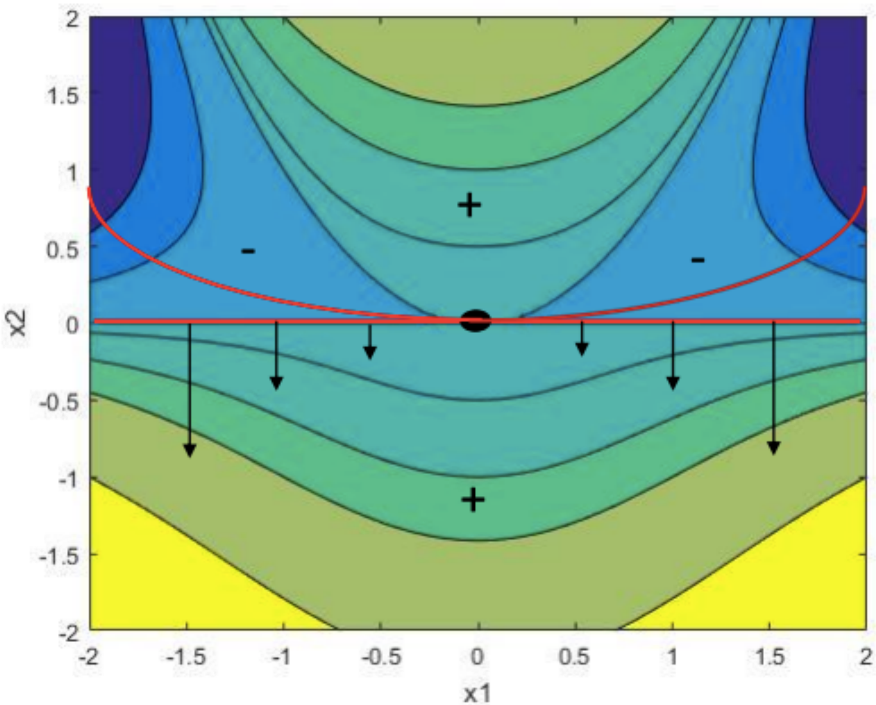


$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

نقطه (0,0) کمینه موضعی است؟

$$p(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 x_2$$

$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 p(x) = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$p(\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}) = \alpha^4 - \alpha^3$$

تعریف مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$

(که F مجموعه‌ای از توابع هموار است)

ورودی: $\phi \in \mathcal{F}$

خروجی: آیا بردار ۰ یک کمینه موضعی برای ϕ است؟

قضیه:

مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$ برای

$$\mathcal{F} := \{\, \phi_M(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) M (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T : M \in \mathrm{SYM}_n \}$$

در رده coNP ـ تمام است.

قضیه:

مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$ برای

$$\mathcal{F} := \{\, \phi_M(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) M (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T : M \in \mathrm{SYM}_n\}$$

در رده coNP ـ تمام است.

قضیه:

مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$ برای

$$\mathcal{F} := \{\, \phi_M(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) M (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T : M \in \mathrm{SYM}_n \}$$

در رده coNP ـ تمام است.

- بررسی کمینه موضعی بودن $x^T M x$ روی $x \geq 0$ در رده coNP ـ تمام است.

قضیه:

مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$ برای

$$\mathcal{F} := \{\, \phi_M(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) M (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T : M \in \mathrm{SYM}_n \}$$

در رده coNP ـ تمام است.

- بررسی کمینه موضعی بودن $x^T M x$ روی $x>=0$ در رده coNP ـ تمام است.
- کاهش:

قضیه:

مسئله $\textsc{LocMin}(\mathcal{F})$ برای

$$\mathcal{F} := \{\, \phi_M(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) M (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T : M \in \mathrm{SYM}_n\}$$

در رده coNP_تمام است.

- بررسی کمینه موضعی بودن x^TMx روی x>=0 در رده coNP_تمام است.
- کاهش:
  - اگر و فقط اگر M برای x>=0 کمینه موضعی باشد

پس توابع محدب چی شدند؟!

- هر تابع محدب
- با فضای شدنی محدب
- را می‌توان سریع کمینه کرد؟

کمینه‌سازی توابع محدب

- الگوریتم با سرعت تضمینی: بیضی‌گون
- الگوریتم خوب: کاهش گرادیان

الگوریتم کاهش گرادیان تصویر شده

مسئله:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}} f(\mathbf{x}),$$

الگوریتم:

$$\mathbf{x}_{k+1} = P_{\mathcal{Q}}\Big(\mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k)\Big).$$

الگوریتم کاهش گرادیان تصویرشده، کار می‌کند:

- **Theorem 1**. If f is convex, PGD with constant stepsize α satisfies

$$f\left(\frac{1}{K+1}\sum_{k=0}^{K}\mathbf{x}_k\right) - f^* \leq \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2}{2\alpha(K+1)} + \frac{\alpha}{2(K+1)}\sum_{k=0}^{K}\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2^2,$$

where $f^* = f(\mathbf{x}^*)$ is the optimal cost value, $\mathbf{x}^*$ is the (global) minimizer, α is the constant stepsize, K is the total of number of iteration performed.

چرا این دو الگوریتم کار نکردند؟

پایان