بسم الله الرحمن الرحیم

درس تحقیق در عملیات

ترم پاییز ۱۳۹۹-۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحيم

جلسه چهاردهم

درس تحقیق در عملیات

نظریه بازی‌ها: بازی‌های جمع-صفر

نگاهی از دور

مثالی از یک بازی

تصمیم

بابک

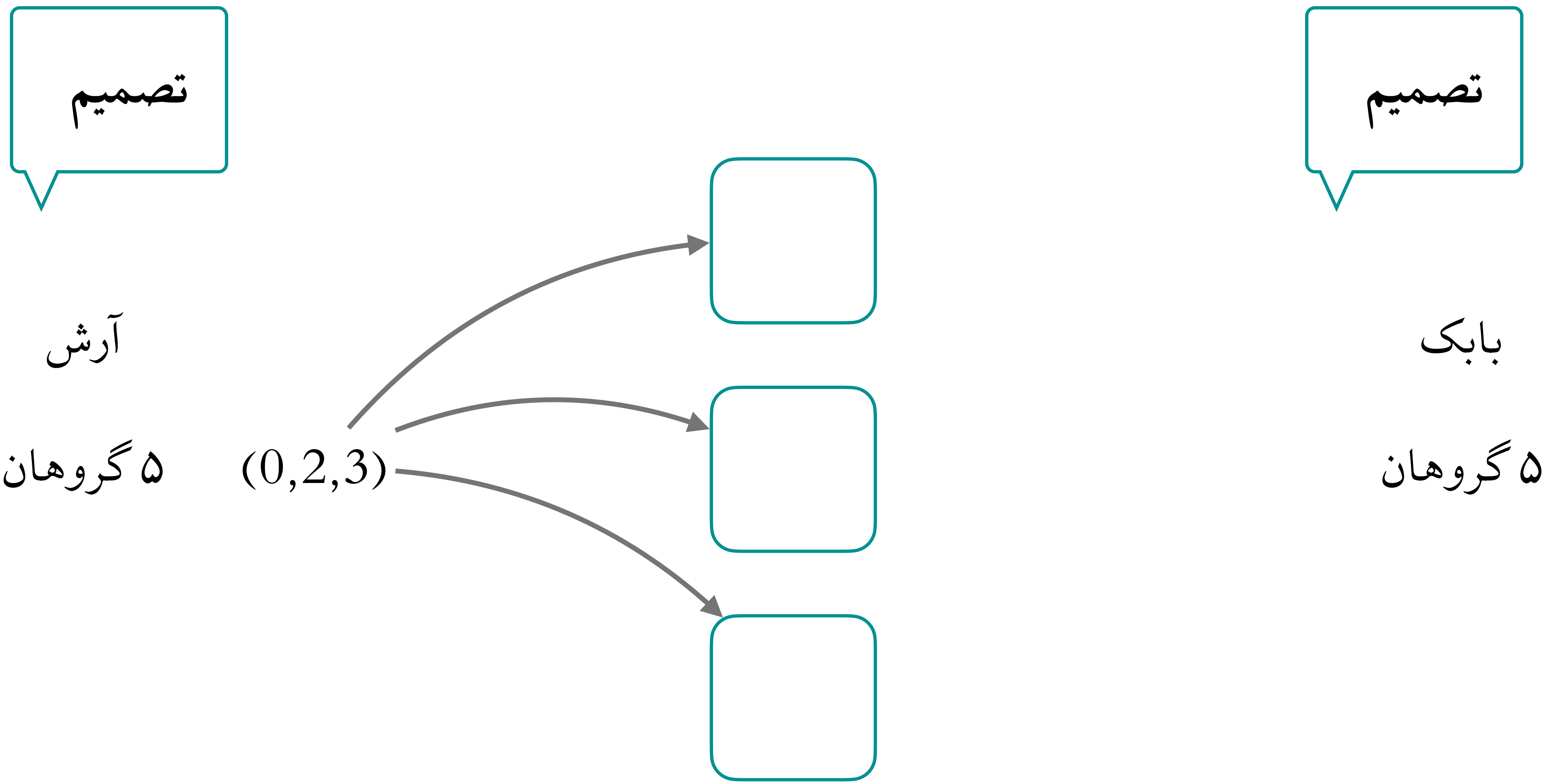
۵ گروهان

تصمیم

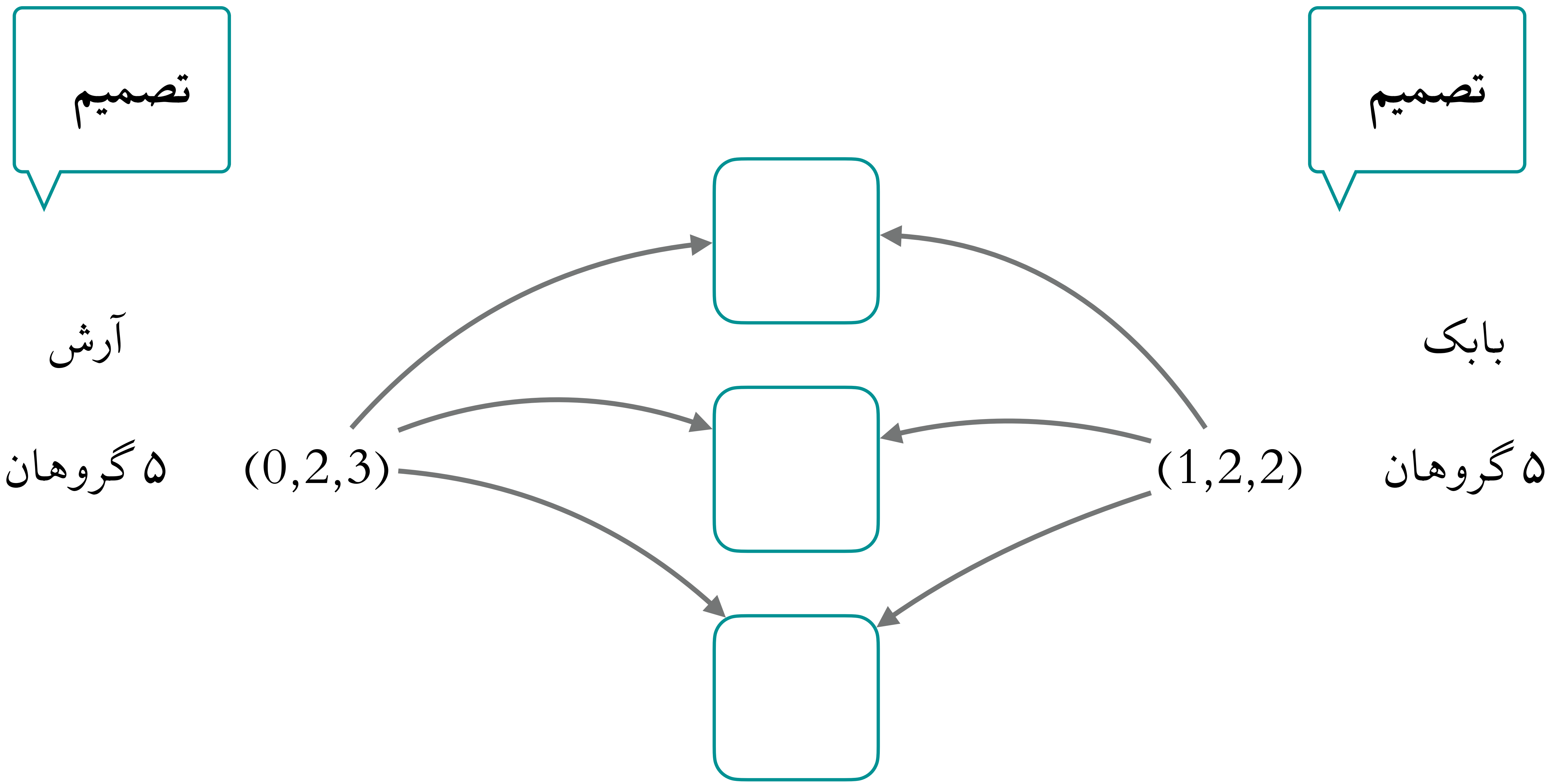
آرش

۵ گروهان

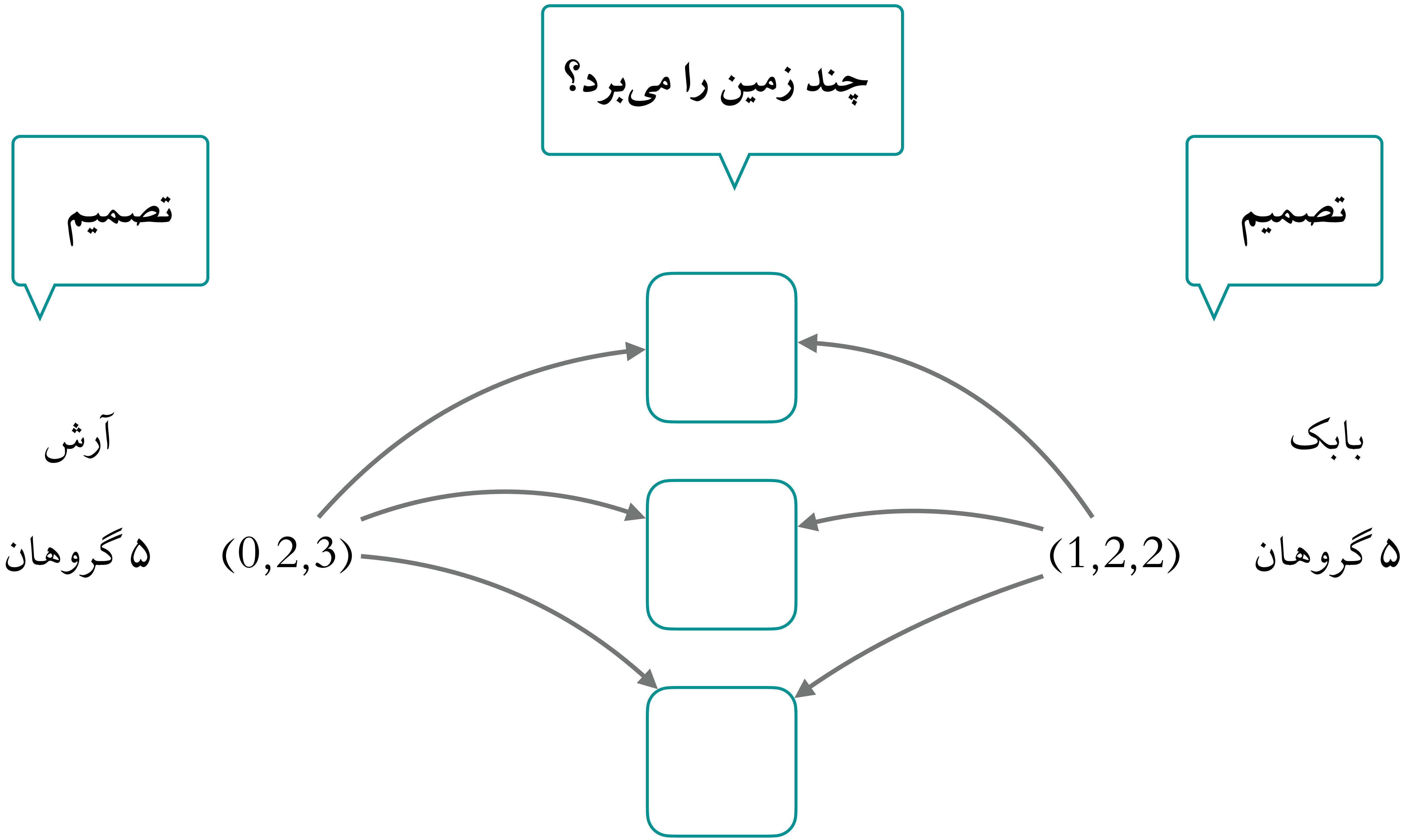
مثالی از یک بازی



مثالی از یک بازی



مثالی از یک بازی



مثالی از یک بازی

بابک

= منفی ماتریس سود بابک

آرش

ماتریس سود آرش	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{0}$	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

استراتژی آرش (؟)

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

استراتژی آرش (؟)

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

محتاطانه‌ترین

استراتژی آرش (؟)

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

استراتژی آرش (؟)

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

استراتژی آرش (؟)

محتاطانه‌ترین

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

استراتژی آرش (؟)

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

استراتژی آرش (؟)

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

بهترین، بدترین

محتاطانه‌ترین

تعادل نش

بابک

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

تعریف (تعادل نش):

به نفع هیچ کدام از طرفین نیست که بازی خود را تغییر دهد

تعادل نش

بابک

نقطه زینی

آرش

	$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{0}$	0	$\frac{1}{3}$
$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

تعریف (تعادل نش):

به نفع هیچ کدام از طرفین نیست که بازی خود را تغییر دهد

سنگ_ کاغذ_ قیچی

بابک

آرش

	rock	paper	scissors
rock	0	−1	1
paper	1	0	−1
scissors	−1	1	0

سنگ_کاغذ_قیچی

بابک

آرش

	rock	paper	scissors
rock	0	−1	1
paper	1	0	−1
scissors	−1	1	0

سنگ_کاغذ_قیچی

بابک

آرش

	rock	paper	scissors
rock	0	-1	1
paper	1	0	-1
scissors	-1	1	0

تعادل نش ندارد

تعادل نش مخلوط

بابک

آرش

	rock	paper	scissors
rock	0	-1	1
paper	1	0	-1
scissors	-1	1	0

تعادل نش مخلوط

بابک

			۱/۳	۱/۳	۱/۳
			rock	paper	scissors
	۱/۳	rock	0	-1	1
آرش	۱/۳	paper	1	0	-1
	۱/۳	scissors	-1	1	0

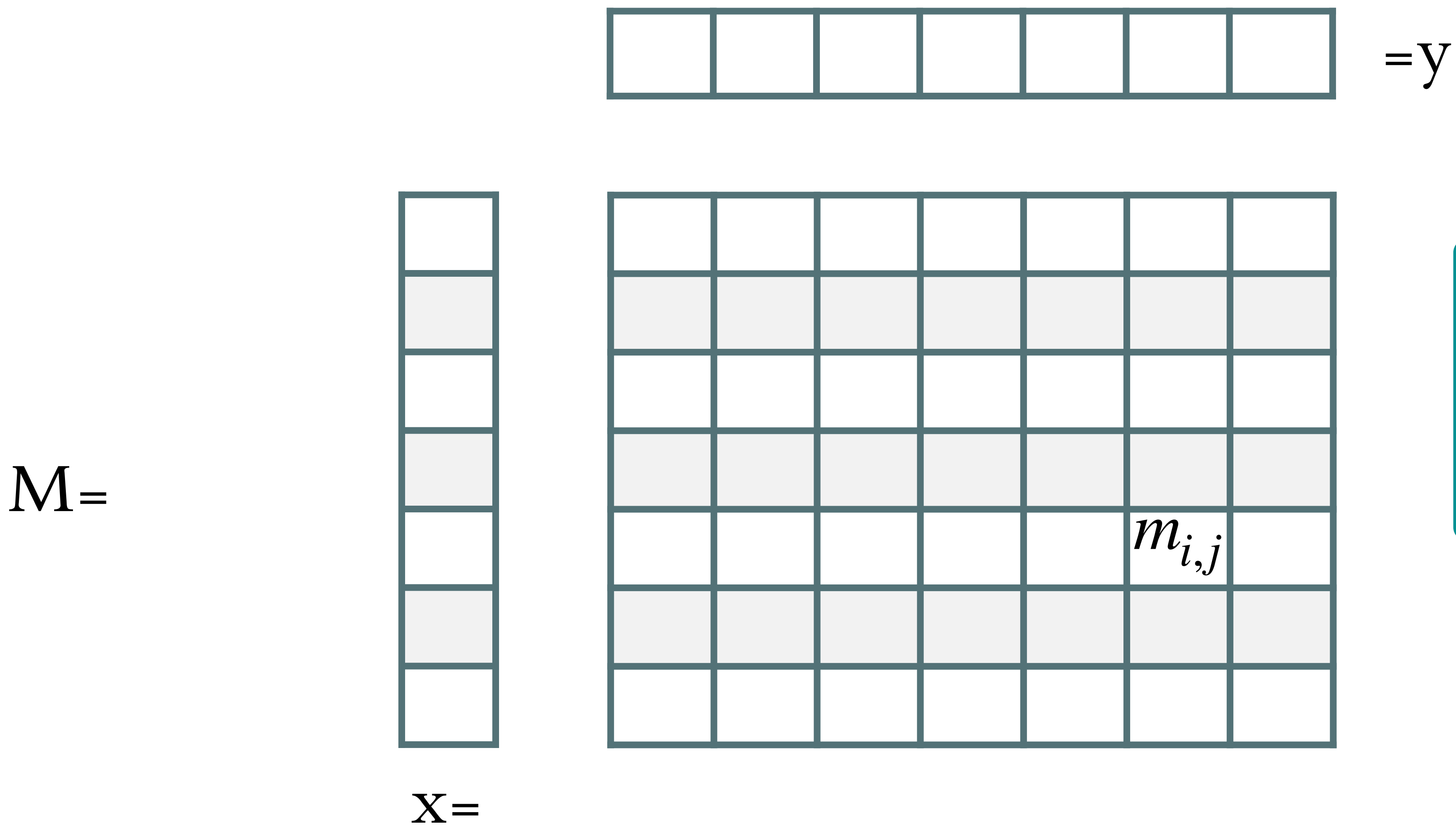
تعادل نش مخلوط

بابک

استراتژی مخلوط

			۱/۳	۱/۳	۱/۳
			rock	paper	scissors
	۱/۳	rock	0	−1	1
آرش	۱/۳	paper	1	0	−1
	۱/۳	scissors	−1	1	0

استراتژی مخلوط ـ بازی جمع‌ـصفر



استراتژی مخلوط

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

استراتژی مخلوط

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

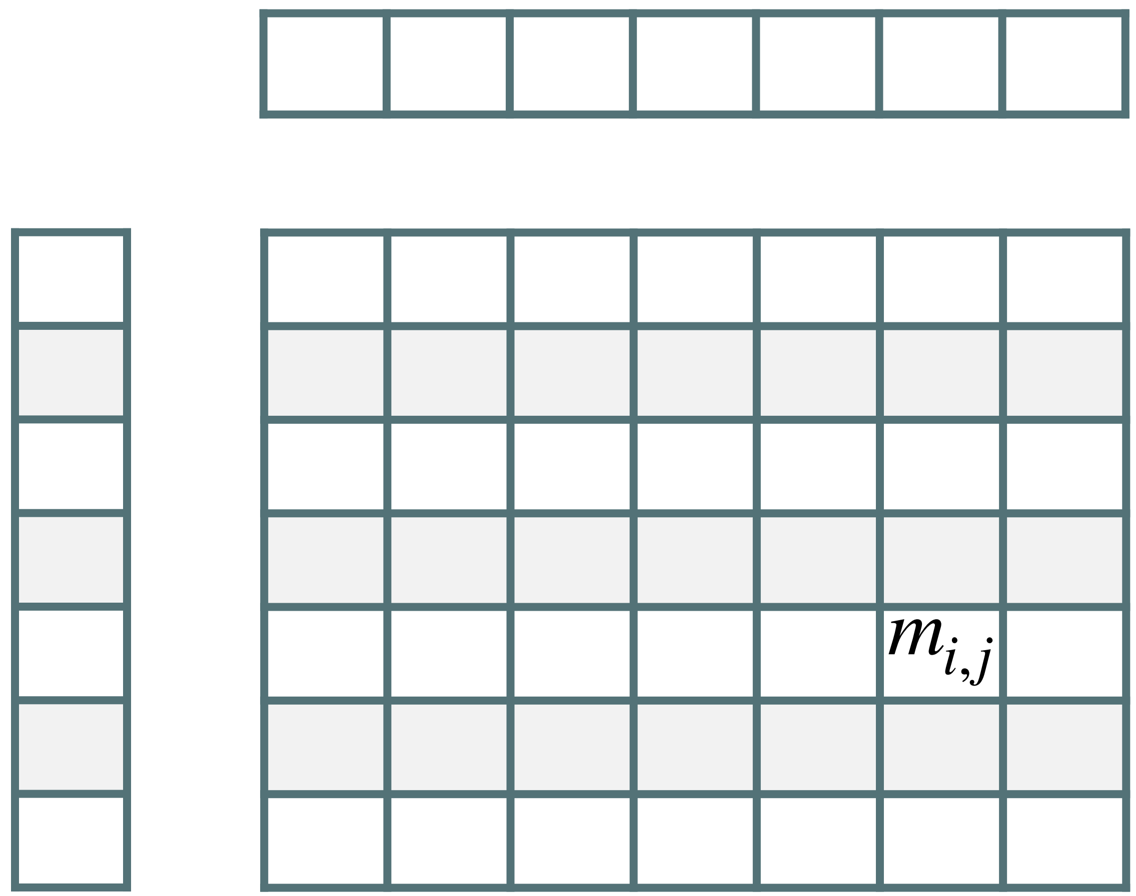
$$\mathbf{x}^T M \mathbf{y}$$

استراتژی مخلوط ـ بازی جمع‌ـصفر

$=y$ استراتژی مخلوط

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

M=



x= استراتژی مخلوط

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

سود آرش: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{y}$

$$= \ \sum_{i,j} m_{ij} x_i y_j$$

تصمیم بر اساس تصمیم

اگر آرش تصمیم x را بگیرد

بدترین برای آرش

$$\beta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T M \mathbf{y}$$

تصمیم بر اساس تصمیم

اگر آرش تصمیم x را بگیرد

بدترین برای آرش

$$\beta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T M \mathbf{y}$$

اگر بابک تصمیم y را بگیرد

بدترین برای بابک

$$\alpha(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T M \mathbf{y}$$

تعریف تعادل نش مخلوط

8.1.1 Definition. *A pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies is a* **mixed Nash equilibrium** *of the game if* $\tilde{\mathbf{x}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{y}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{x}}$ *(the adjective "mixed" is often omitted); in formulas, this can be expressed as*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

تعریف تعادل نش مخلوط

8.1.1 Definition. *A pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies is a* **mixed Nash equilibrium** *of the game if* $\tilde{\mathbf{x}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{y}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{x}}$ *(the adjective "mixed" is often omitted); in formulas, this can be expressed as*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

برای هر دو تغییر فایده ندارد

تعریف تعادل نش مخلوط

8.1.1 Definition. *A pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies is a* **mixed Nash equilibrium** *of the game if* $\tilde{\mathbf{x}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{y}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *is a best response against* $\tilde{\mathbf{x}}$ *(the adjective "mixed" is often omitted); in formulas, this can be expressed as*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

برای هر دو تغییر فایده ندارد

مثال: سنگ_کاغذ_قیچی:

	rock	paper	scissors
rock	0	−1	1
paper	1	0	−1
scissors	−1	1	0

$\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3) = \mathbf{y}$

$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y})$

=> تعادل نش مخلوط است.

8.1.2 Lemma.

(i) *We have* $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \le \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$. *Actually, for every two mixed strategies* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{y}$ *we have* $\beta(\mathbf{x}) \le \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \le \alpha(\mathbf{y})$.

(ii) *If the pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies forms a mixed Nash equilibrium, then both* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *are worst-case optimal.*

بهترین بدترین حالت

$\tilde{x}$: بیشترین β را دارد

(iii) *If mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *satisfy* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$, *then they form a mixed Nash equilibrium.*

8.1.2 Lemma.

(i) *We have* $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$. *Actually, for every two mixed strategies* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{y}$ *we have* $\beta(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T M\mathbf{y} \leq \alpha(\mathbf{y})$.

(ii) *If the pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies forms a mixed Nash equilibrium, then both* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *are worst-case optimal.*

بهترین بدترین حالت

$\tilde{x}$: بیشترین **β** را دارد

$$\forall x : \beta(\mathbf{x}) \leq \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

(i)

(iii) *If mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *satisfy* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$, *then they form a mixed Nash equilibrium.*

8.1.2 Lemma.

(i) *We have* $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$. *Actually, for every two mixed strategies* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{y}$ *we have* $\beta(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \leq \alpha(\mathbf{y})$.

(ii) *If the pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies forms a mixed Nash equilibrium, then both* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *are worst-case optimal.*

بهترین بدترین حالت

$\tilde{x}$: بیشترین β را دارد

$$\forall x : \beta(\mathbf{x}) \leq \alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \beta(\tilde{\mathbf{x}})$$

(i)

تعریف تعادل نش مخلوط

(iii) *If mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *satisfy* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$, *then they form a mixed Nash equilibrium.*

8.1.2 Lemma.

(i) *We have* $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \le \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$. *Actually, for every two mixed strategies* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{y}$ *we have* $\beta(\mathbf{x}) \le \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \le \alpha(\mathbf{y})$.

(ii) *If the pair* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *of mixed strategies forms a mixed Nash equilibrium, then both* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *are worst-case optimal.*

بهترین بدترین حالت

$\tilde{x}$: بیشترین β را دارد

$$\forall x : \beta(\mathbf{x}) \underbrace{\le}_{\text{(i)}} \alpha(\tilde{\mathbf{y}}) \underbrace{=}_{\text{تعریف تعادل نش مخلوط}} \beta(\tilde{\mathbf{x}})$$

(iii) *If mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *satisfy* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$, *then they form a mixed Nash equilibrium.*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

مشابه دوگانی قوی در دنیای بازی‌ها!

8.1.3 Theorem (Minimax theorem for zero-sum games). *For every zero-sum game, worst-case optimal mixed strategies for both players exist and can be efficiently computed by linear programming. If* $\tilde{\mathbf{x}}$ *is a worst-case optimal mixed strategy of Alice and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *is a worst-case optimal mixed strategy of Bob, then* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *is a mixed Nash equilibrium, and the number* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ *is the same for all possible worst-case optimal mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$*.*

مشابه دوگانی قوی در دنیای بازی‌ها!

8.1.3 Theorem (Minimax theorem for zero-sum games). *For every zero-sum game, worst-case optimal mixed strategies for both players exist and can be efficiently computed by linear programming. If $\tilde{\mathbf{x}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Alice and $\tilde{\mathbf{y}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Bob, then $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ is a mixed Nash equilibrium, and the number $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ is the same for all possible worst-case optimal mixed strategies $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{y}}$.*

تعبیر:

مشابه دوگانی قوی در دنیای بازی‌ها!

8.1.3 Theorem (Minimax theorem for zero-sum games). *For every zero-sum game, worst-case optimal mixed strategies for both players exist and can be efficiently computed by linear programming. If* $\tilde{\mathbf{x}}$ *is a worst-case optimal mixed strategy of Alice and* $\tilde{\mathbf{y}}$ *is a worst-case optimal mixed strategy of Bob, then* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *is a mixed Nash equilibrium, and the number* $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ *is the same for all possible worst-case optimal mixed strategies* $\tilde{\mathbf{x}}$ *and* $\tilde{\mathbf{y}}$*.*

$$\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$$

مشابه دوگانی ضعیف

تعبیر:

مشابه دوگانی قوی در دنیای بازی‌ها!

8.1.3 Theorem (Minimax theorem for zero-sum games). *For every zero-sum game, worst-case optimal mixed strategies for both players exist and can be efficiently computed by linear programming. If $\tilde{\mathbf{x}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Alice and $\tilde{\mathbf{y}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Bob, then $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ is a mixed Nash equilibrium, and the number $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ is the same for all possible worst-case optimal mixed strategies $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{y}}$.*

تعبیر:

$$\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$$

مشابه دوگانی ضعیف

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

قضیه بالا

مشابه دوگانی قوی در دنیای بازی‌ها!

8.1.3 Theorem (Minimax theorem for zero-sum games). *For every zero-sum game, worst-case optimal mixed strategies for both players exist and can be efficiently computed by linear programming. If $\tilde{\mathbf{x}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Alice and $\tilde{\mathbf{y}}$ is a worst-case optimal mixed strategy of Bob, then $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ is a mixed Nash equilibrium, and the number $\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ is the same for all possible worst-case optimal mixed strategies $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{y}}$.*

مشابه دوگانی ضعیف

$$\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$$

قضیه بالا

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

تعبیر:

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T M \mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T M \mathbf{y}.$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه β(x)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

محاسبه max β(x)

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\
\text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
 & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

محاسبه $\max \beta(x)$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

دوگان

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

محاسبه $\max \beta(x)$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll}\text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.\end{array}$$

محاسبه $\max \beta(x)$

دوگان

$$\begin{array}{ll}\text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0}\end{array}$$

متغیر پنداری!

$$\begin{array}{ll}\text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.\end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{x}^T M \mathbf{y} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

دوگان

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

متغیر پنداری!

محاسبه max $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه max $\beta(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\max \beta(x)$

محاسبه $\min \alpha(y)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & x_0 \\
\text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\
 & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه min α(y)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_0 \\ \text{subject to} & M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

محاسبه max β(x)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه max β(x)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

محاسبه min α(y)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_0 \\ \text{subject to} & M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه min $\alpha(y)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & y_0 \\
\text{subject to} & M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
& \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

محاسبه max $\beta(x)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & x_0 \\
\text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

دوگان همدیگر

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه max β(x)

Maximize x_0

subject to $M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0}$

$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

محاسبه min α(y)

minimize y_0

subject to $M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0}$

$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

دوگان همدیگر

هر دو شدنی

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه $\max \beta(x)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & x_0 \\
\text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

محاسبه $\min \alpha(y)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & y_0 \\
\text{subject to} & M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
& \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

دوگان همدیگر

هر دو شدنی

حکم:

اثبات قضیه mini-max:

محاسبه min α(y)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_0 \\ \text{subject to} & M\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

محاسبه max β(x)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_0 \\ \text{subject to} & M^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

دوگان همدیگر

هر دو شدنی

حکم:

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

جمع‌بندی

- استفاده از برنامه‌ریزی خطی
  - برای قضیه minimax
  - بازی‌های جمع‌ـصفر خوبند
    - بدون نیاز به روان‌شناسی!