

بسم الله الرحمن الرحيم

# برنامه‌ریزی نیمه معین برای طراحی الگوریتم‌های تقریبی

جلسه اول: معرفی درس



# جایگاه درس

# سلسله مراتب برنامه ریزی های ریاضی

| محدودیت      | مثال/کاربرد                              |
|--------------|--|
| خطی          | کوتاه ترین مسیر در گراف، شار بیشینه، ... |
| ؟؟؟          |  |
| محدب         |  |
| بدون محدودیت |  |

- داستان برنامه ریزی ریاضی ...

- مدل سازی

|                      |          |
|----------------------|----------|
| $f(x)$               | بهینه کن |
| برخی قيود روی $x$    | با شرط   |
| $x \in \mathbb{R}^m$ |          |

# سلسله مراتب برنامه ریزی های ریاضی

الگوریتم های عمومی

| محدودیت         | مثال/کاربرد                                 |
|-----------------|---|
| خطی             | کوتاه ترین مسیر در گراف، شار<br>بیشینه، ... |
| ؟؟؟             |   |
| محدب            |   |
| بدون<br>محدودیت |   |

- داستان برنامه ریزی ریاضی ...

- مدل سازی

|                   |          |
|-------------------|----------|
| $f(x)$            | بهینه کن |
| برخی قيود روی $x$ | با شرط   |
| $x \in R^m$       |          |

# سلسله مراتب برنامه ریزی های ریاضی

الگوریتم های عمومی

| محدودیت         | مثال/کاربرد                                 |
|-----------------|---|
| خطی             | کوتاه ترین مسیر در گراف، شار<br>بیشینه، ... |
| ؟؟؟             | برنامه ریزی نیمه معین                       |
| محدب            |   |
| بدون<br>محدودیت |   |

- داستان برنامه ریزی ریاضی ...

- مدل سازی

|                      |          |
|----------------------|----------|
| $f(x)$               | بهینه کن |
| برخی قيود روی $x$    | با شرط   |
| $x \in \mathbb{R}^m$ |          |

# الگوریتم‌های تقریبی (یکی از روش‌ها)

|          |                   |
|----------|-------------------|
| بهینه کن | $f(x)$            |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$ |
|          | $x \in \{0,1\}^m$ |

# الگوریتم‌های تقریبی (یکی از روش‌ها)

|          |                   |
|----------|-------------------|
| بهینه کن | $f(x)$            |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$ |
|          | $x \in \{0,1\}^m$ |



# الگوریتم‌های تقریبی (یکی از روش‌ها)

| محدودیت         | مثال/کاربرد                                 |
|-----------------|---|
| خطی             | کوتاه‌ترین مسیر در گراف، شار<br>بیشینه، ... |
| ؟؟؟             | برنامه‌ریزی نیمه‌معین                       |
| محدب            |   |
| بدون<br>محدودیت |   |

|          |                   |
|----------|-------------------|
| بهینه کن | $f(x)$            |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$ |
|          | $x \in \{0,1\}^m$ |



|          |                      |
|----------|----------------------|
| بهینه کن | $f(x)$               |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$    |
|          | $x \in \mathbb{R}^m$ |



# الگوریتم‌های تقریبی (یکی از روش‌ها)

| محدودیت         | مثال/کاربرد                                 |
|-----------------|---|
| خطی             | کوتاه‌ترین مسیر در گراف، شار<br>بیشینه، ... |
| ؟؟؟             | برنامه‌ریزی نیمه‌معین                       |
| محدب            |   |
| بدون<br>محدودیت |   |

|          |                   |
|----------|-------------------|
| بهینه کن | $f(x)$            |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$ |
|          | $x \in \{0,1\}^m$ |




باید خوب  
باشد

|          |                      |
|----------|----------------------|
| بهینه کن | $f(x)$               |
| با شرط   | برخی قیود روی $x$    |
|          | $x \in \mathbb{R}^m$ |

Bernd Gärtner · Jiří Matoušek

# Approximation Algorithms and Semidefinite Programming

 Springer

منبع



مباحث

## Part I (by Bernd Gärtner)

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction: MAXCUT Via Semidefinite Programming ...</b> | <b>3</b>  |
| 1.1      | The MAXCUT Problem .....                                     | 3         |
| 1.2      | Approximation Algorithms .....                               | 4         |
| 1.3      | A Randomized 0.5-Approximation Algorithm for MAXCUT ..       | 6         |
| 1.4      | The Goemans–Williamson Algorithm .....                       | 7         |
| <b>2</b> | <b>Semidefinite Programming.....</b>                         | <b>15</b> |
| 2.1      | From Linear to Semidefinite Programming.....                 | 15        |
| 2.2      | Positive Semidefinite Matrices.....                          | 16        |
| 2.3      | Cholesky Factorization .....                                 | 17        |
| 2.4      | Semidefinite Programs .....                                  | 18        |
| 2.5      | Non-standard Form .....                                      | 20        |
| 2.6      | The Complexity of Solving Semidefinite Programs .....        | 20        |
| <b>3</b> | <b>Shannon Capacity and Lovász Theta.....</b>                | <b>27</b> |
| 3.1      | The Similarity-Free Dictionary Problem .....                 | 27        |
| 3.2      | The Shannon Capacity .....                                   | 29        |
| 3.3      | The Theta Function .....                                     | 31        |
| 3.4      | The Lovász Bound.....  | 32        |
| 3.5      | The 5-Cycle .....  | 35        |
| 3.6      | Two Semidefinite Programs for the Theta Function .....       | 36        |
| 3.7      | The Sandwich Theorem and Perfect Graphs .....                | 39        |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| <b>4</b> | <b>Duality and Cone Programming</b>                             | 45  |
| 4.1      | Introduction  | 45  |
| 4.2      | Closed Convex Cones   | 47  |
| 4.3      | Dual Cones  | 49  |
| 4.4      | A Separation Theorem for Closed Convex Cones                    | 51  |
| 4.5      | The Farkas Lemma. Cone Version                                  | 52  |
| 4.6      | Cone Programs   | 57  |
| 4.7      | Duality of Cone Programming                                     | 62  |
| 4.8      | The Largest Eigenvalue  | 68  |
| <b>5</b> | <b>Approximately Solving Semidefinite Programs</b>              | 75  |
| 5.1      | Optimizing Over the Spectahedron                                | 76  |
| 5.2      | The Case of Bounded Trace                                       | 78  |
| 5.3      | The Semidefinite Feasibility Problem                            | 80  |
| 5.4      | Convex Optimization Over the Spectahedron                       | 82  |
| 5.5      | The Frank–Wolfe Algorithm                                       | 84  |
| 5.6      | Back to the Semidefinite Feasibility Problem                    | 89  |
| 5.7      | From the Linearized Problem to the Largest Eigenvalue           | 90  |
| 5.8      | The Power Method  | 92  |
| <b>6</b> | <b>An Interior-Point Algorithm for Semidefinite Programming</b> | 99  |
| 6.1      | The Idea of the Central Path                                    | 100 |
| 6.2      | Uniqueness of Solution  | 101 |
| 6.3      | Necessary Conditions for Optimality                             | 102 |
| 6.4      | Sufficient Conditions for Optimality                            | 106 |
| 6.5      | Following the Central Path                                      | 109 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| <b>7</b> | <b>Copositive Programming</b> .....                                  | 119 |
| 7.1      | The Copositive Cone and Its Dual .....                               | 119 |
| 7.2      | A Copositive Program for the Independence Number<br>of a Graph ..... | 122 |
| 7.3      | Local Minimality Is coNP-hard .....                                  | 127 |

## Part II (by Jiří Matoušek)

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| <b>8</b> | <b>Lower Bounds for the Goemans–Williamson MAXCUT</b>         |     |
|          | <b>Algorithm</b> .....  | 133 |
| 8.1      | Can One Get a Better Approximation Ratio? .....               | 133 |
| 8.2      | Approximation Ratio and Integrality Gap .....                 | 135 |
| 8.3      | The Integrality Gap Matches the Goemans–Williamson Ratio      | 136 |
| 8.4      | The Approximation Ratio Is At Most $\alpha_{\text{GW}}$ ..... | 149 |
| 8.5      | The Unique Games Conjecture for Us Laymen, Part I .....       | 152 |
| <b>9</b> | <b>Coloring 3-Chromatic Graphs</b> .....                      | 157 |
| 9.1      | The 3-Coloring Challenge .....                                | 157 |
| 9.2      | From a Vector Coloring to a Proper Coloring .....             | 158 |
| 9.3      | Properties of the Normal Distribution .....                   | 159 |
| 9.4      | The KMS Rounding Algorithm .....                              | 161 |
| 9.5      | Difficult Graphs .....  | 163 |

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| <b>10</b> | <b>Maximizing a Quadratic Form on a Graph</b> .....        | 167 |
| 10.1      | Four Problems .....  | 167 |
| 10.2      | Quadratic Forms on Graphs .....                            | 169 |
| 10.3      | The Rounding Algorithm .....                               | 172 |
| 10.4      | Estimating the Error .....                                 | 173 |
| 10.5      | The Relation to $\vartheta(\overline{G})$ .....            | 176 |
| <b>11</b> | <b>Colorings with Low Discrepancy</b> .....                | 179 |
| 11.1      | Discrepancy of Set Systems .....                           | 179 |
| 11.2      | Vector Discrepancy and Bansal's Random Walk Algorithm ..   | 182 |
| 11.3      | Coordinate Walks .....                                     | 185 |
| 11.4      | Set Walks .....  | 187 |
| <b>12</b> | <b>Constraint Satisfaction Problems, and Relaxing Them</b> |     |
|           | <b>Semidefinitely</b> .....                                | 193 |
| 12.1      | Introduction .....   | 193 |
| 12.2      | Constraint Satisfaction Problems .....                     | 194 |
| 12.3      | Semidefinite Relaxations of 2-CSP's .....                  | 198 |
| 12.4      | Beyond Binary Boolean: MAX-3-SAT & Co. ....                | 205 |



|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| <b>13</b> | <b>Rounding Via Miniatures</b> .....  | 211 |
| 13.1      | An Ultimate Rounding Method? .....  | 211 |
| 13.2      | Miniatures for MAXCUT .....   | 212 |
| 13.3      | Rounding the Canonical Relaxation of MAX-3-SAT<br>and Other Boolean CSP ..... | 219 |

# ارزش‌یابی

- پایان‌ترم: ۶ نمره
- آزمونک: ۴ نمره، ۵ آزمونک
- تمرین: ۵ نمره
- تمرین خانه‌بر: ۵ نمره
- ؟ نمودار

# پیش نیاز

- لازم:
- تحقیق در عملیات ۱
- جبر خطی
- برنامه ریزی خطی و تعبیرهای هندسی و دوگانی در برنامه ریزی خطی
- الگوریتم
- خوب:
- بهینه سازی ترکیبیاتی، بهینه سازی محدب، الگوریتم های تقریبی، پیچیدگی محاسباتی

# اخلاق علمی

- تمرین‌ها
  - خودتان حل کنید،
  - مشورت: مجاز، اما کلیات، حتما ذکر شود
- تقلب
  - ممنوع! اما چه کنیم؟
-



سوال؟