بسم الله الرحمن الرحیم

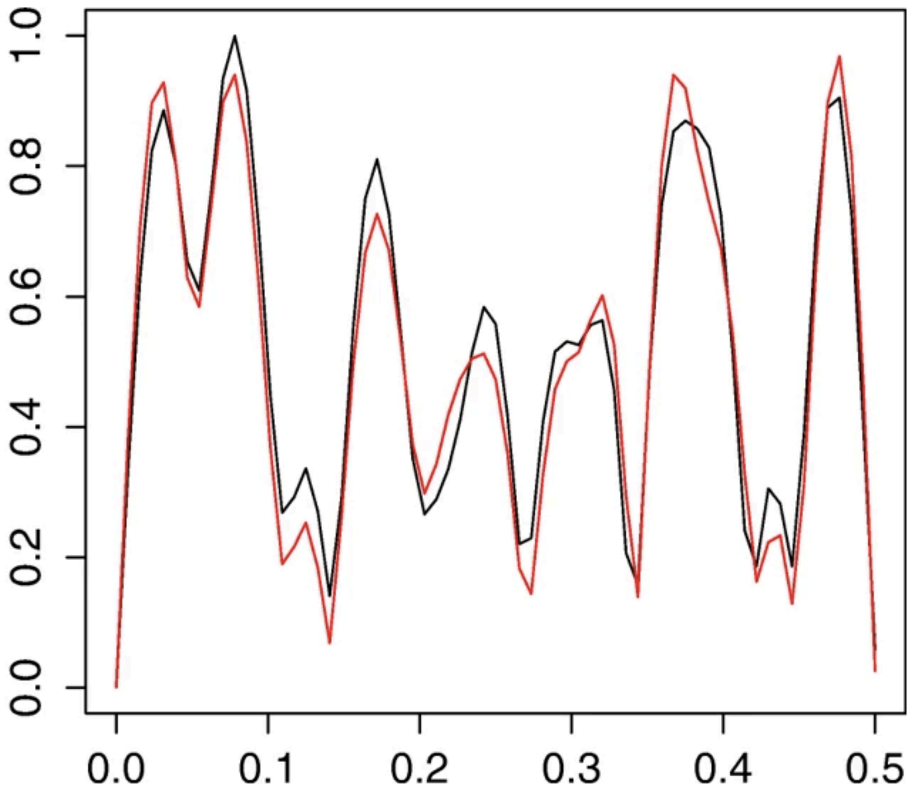
جلسه نوزدهم

درس تحقیق در عملیات

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه

- چه شکل‌هایی را می‌توان با فرکانس‌ها ساخت؟



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(nx)$$

نیاز به کسینوس + سینوس

Transform Sine and Cosine Graphs

$y = A \sin(B(x-k)) + c$

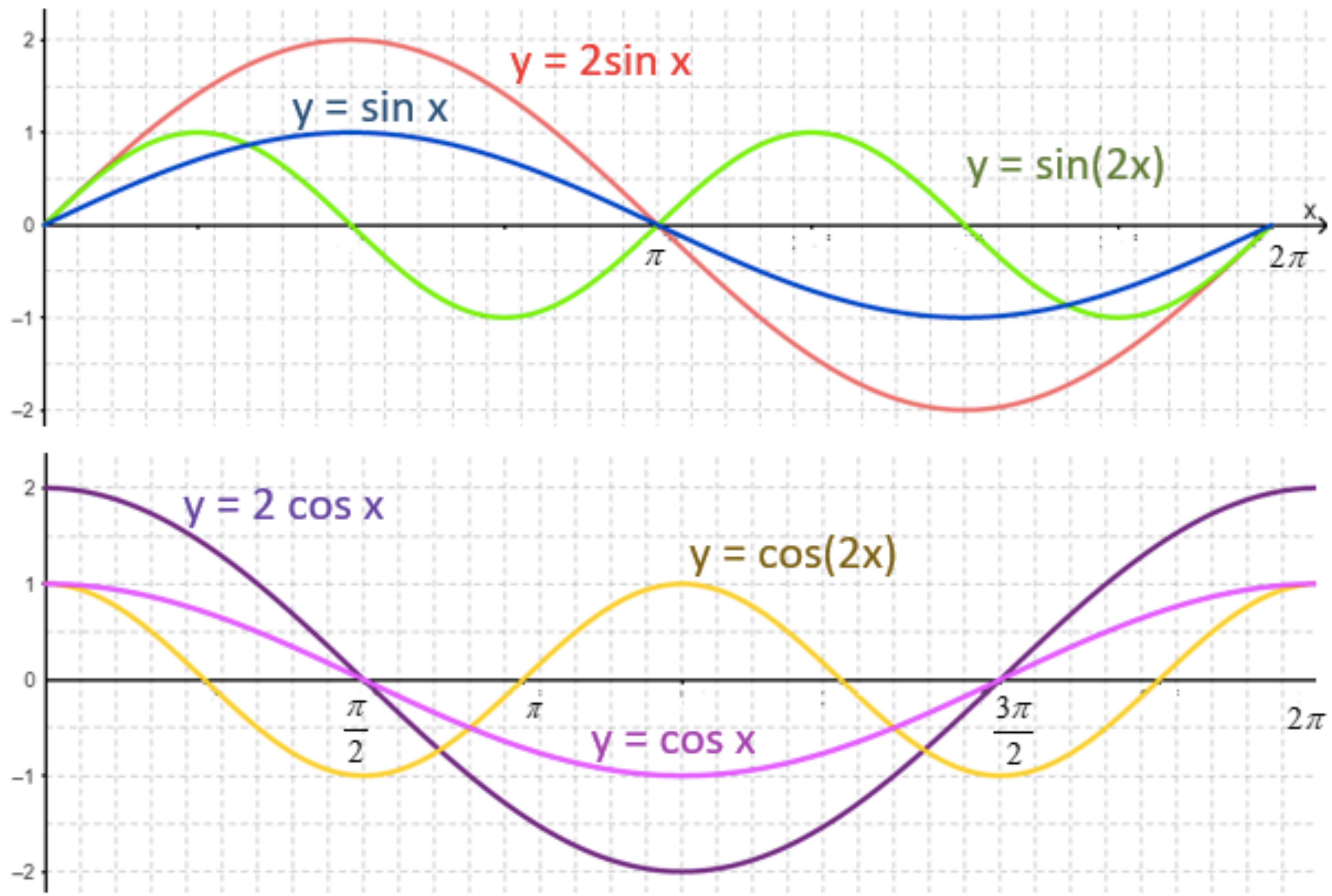
$y = A \cos(B(x-k)) + c$

The amplitude is $|A|$

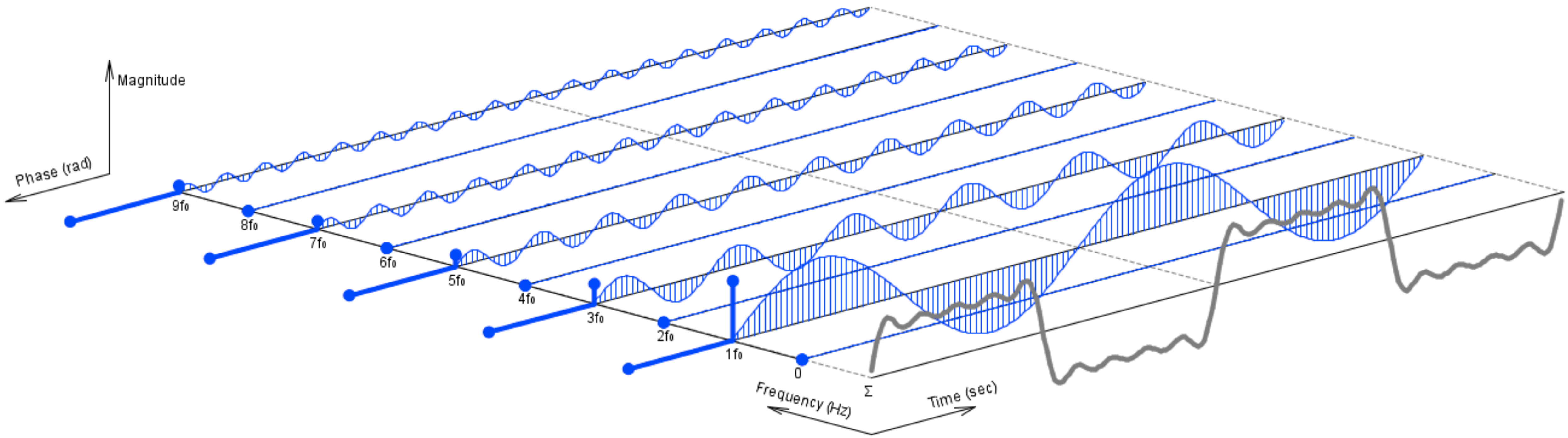
The period is $\dfrac{2\pi}{|B|}$

k is horizontal shift

c is vertical shift

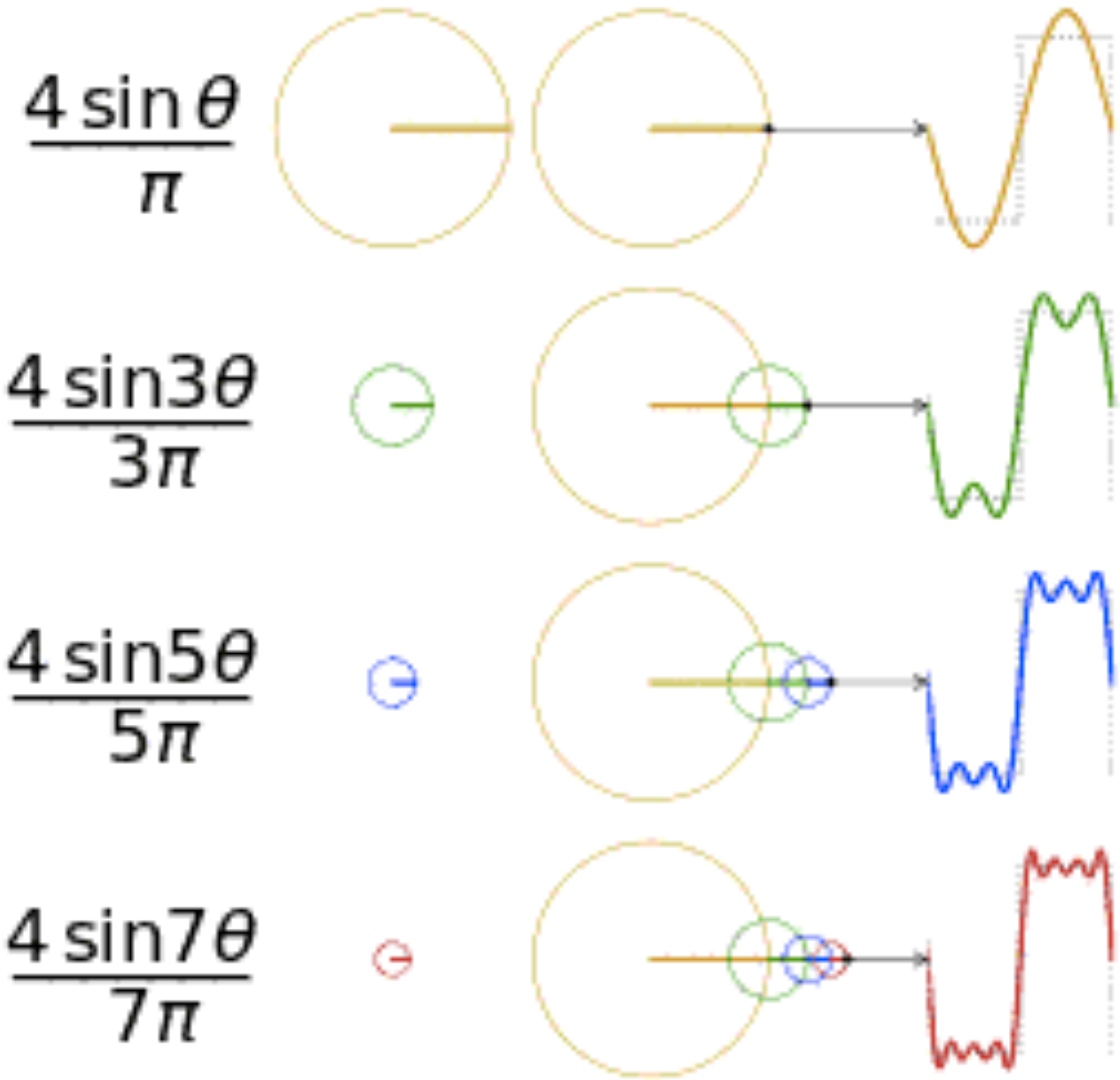


یک مثال



Magnitude
Phase (rad)
9f0
8f0
7f0
6f0
5f0
4f0
3f0
2f0
1f0
0
Σ
Frequency (Hz)
Time (sec)

مثال

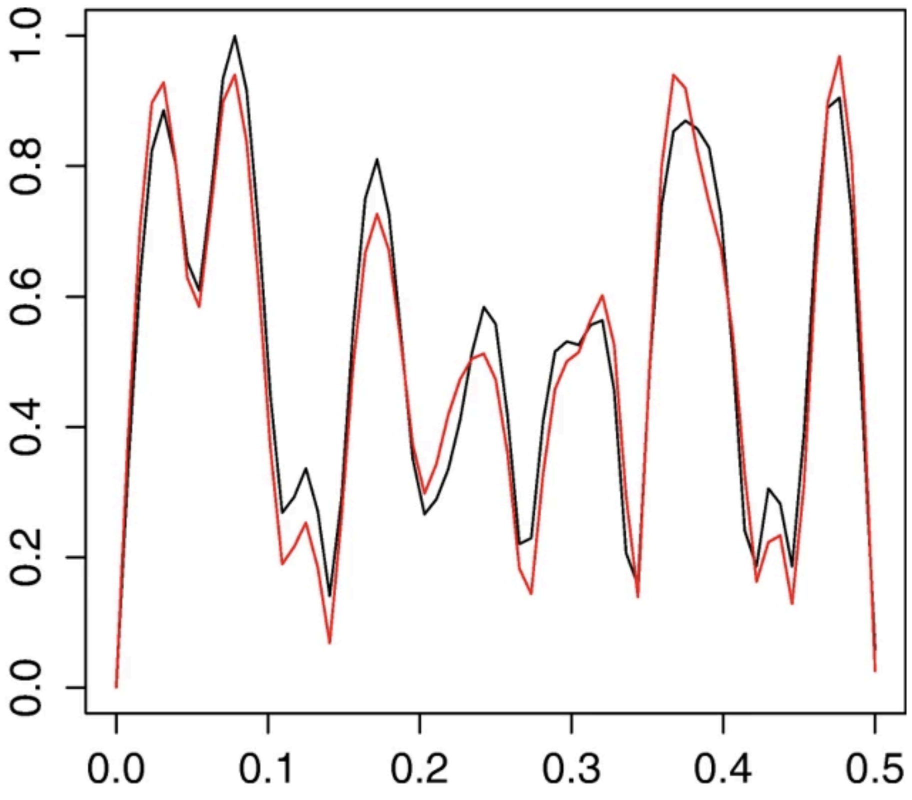


$\frac{4\sin\theta}{\pi}$
$\frac{4\sin 3\theta}{3\pi}$
$\frac{4\sin 5\theta}{5\pi}$
$\frac{4\sin 7\theta}{7\pi}$

پیوند

تبدیل فوریه

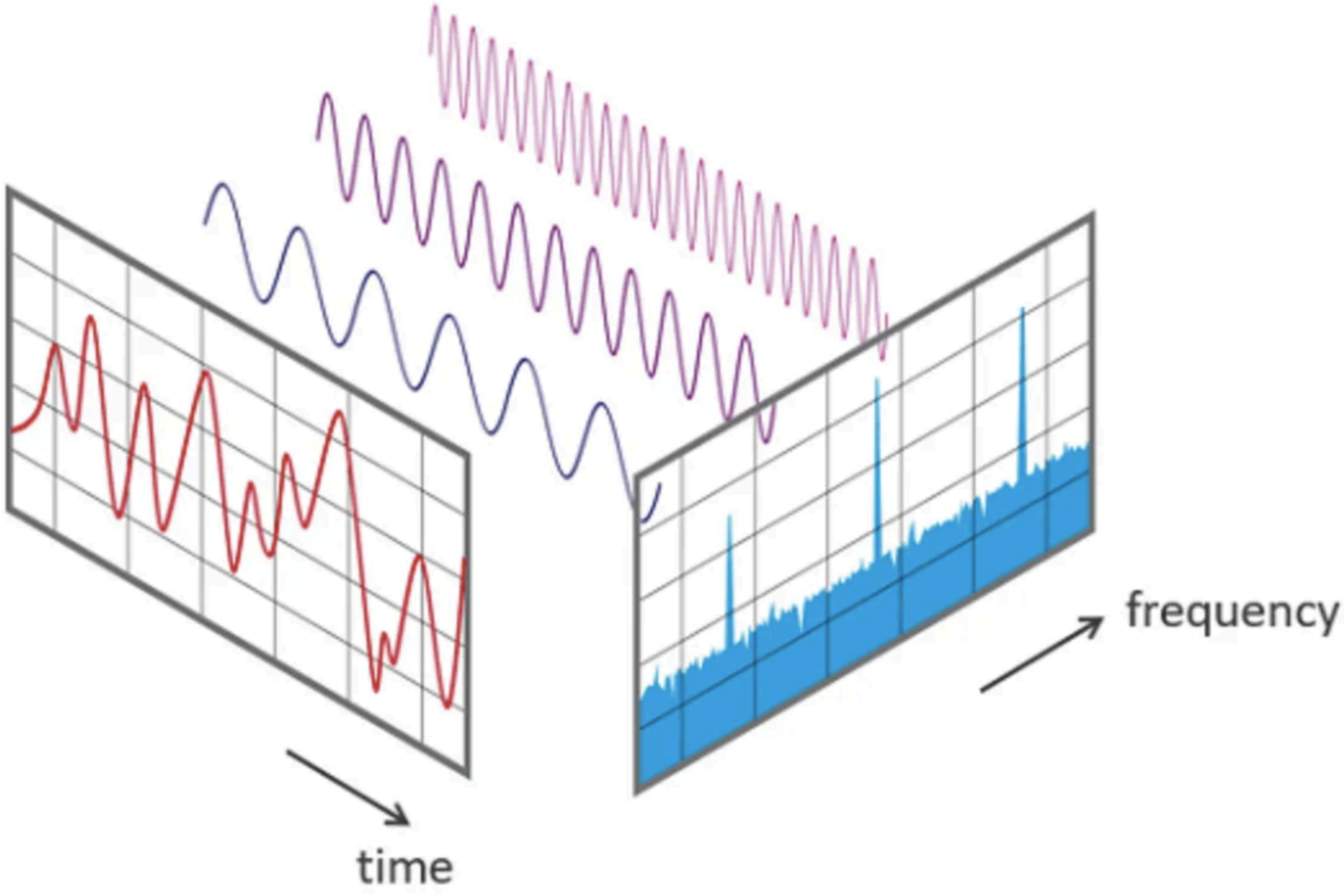
- چه شکل‌هایی را می‌توان با فرکانس‌ها ساخت؟



- تقریبا همه چیز!

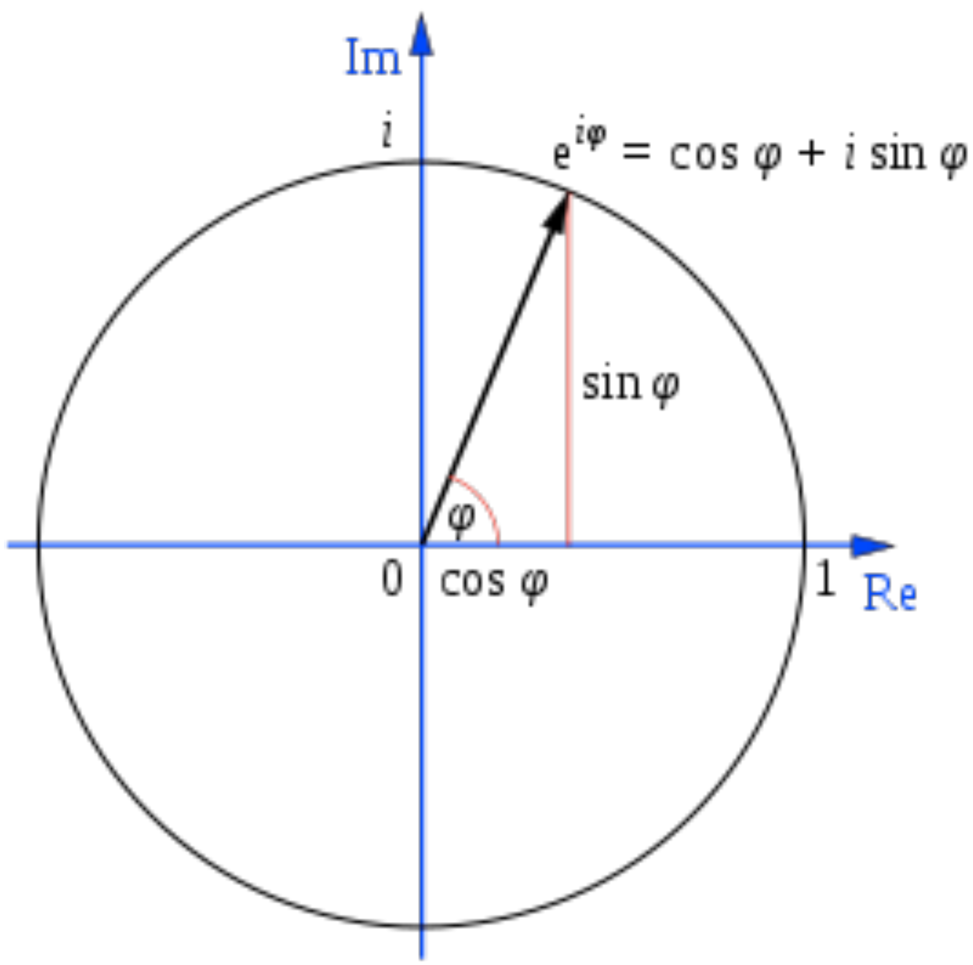
- فرکانس‌ها پایه‌ای هستند برای (تقریبا) همه توابع

حوزه فرکانس



سینوس + کسینوس ← اعداد مختلط

- نمایش دایره‌ای



فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

فضای زمان

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

تبدیل فوریه

فضای فرکانس

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n} \omega^{-uj}$$

تبدیل معکوس فوریه

فضای زمان

فضای فرکانس

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

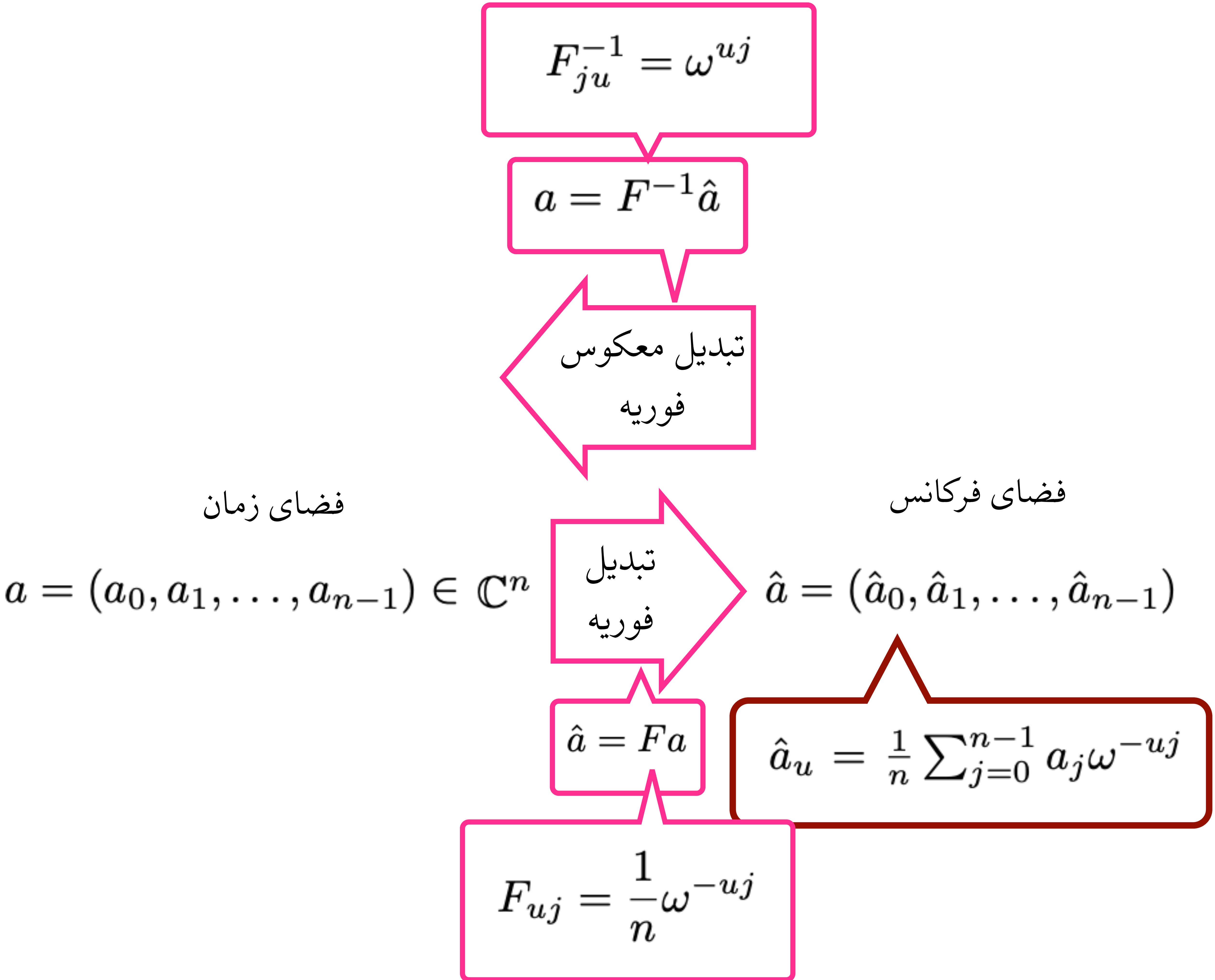
تبدیل فوریه

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$$

$$\hat{a} = Fa$$

$$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-uj}$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$



$F^{-1}_{ju} = \omega^{uj}$
$a = F^{-1}\hat{a}$
تبدیل معکوس فوریه
فضای زمان
فضای فرکانس
$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$
تبدیل فوریه
$\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1})$
$\hat{a} = Fa$
$\hat{a}_u = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega^{-uj}$
$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$

مثال: خروجی تنک

محاسبه سریع DFT؟

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

روش بدیهی: $O(n^2)$

محاسبه سریع DFT؟

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

روش بدیهی: $O(n^2)$

الگوریتم FFT: $O(n \log n)$

محاسبه سریع DFT؟

$$Fa$$

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

روش بدیهی: O(n²)

الگوریتم FFT: O(n log n)

سوال پژوهشی:

سریع‌تر اگر در فضای فرکانس ($\hat{a}$) تنک باشد؟

$$\log n < k \ll n$$

کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر

کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر

تصویر

$u \in R^n$

ورودی

u

کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر

ورودی

تصویر

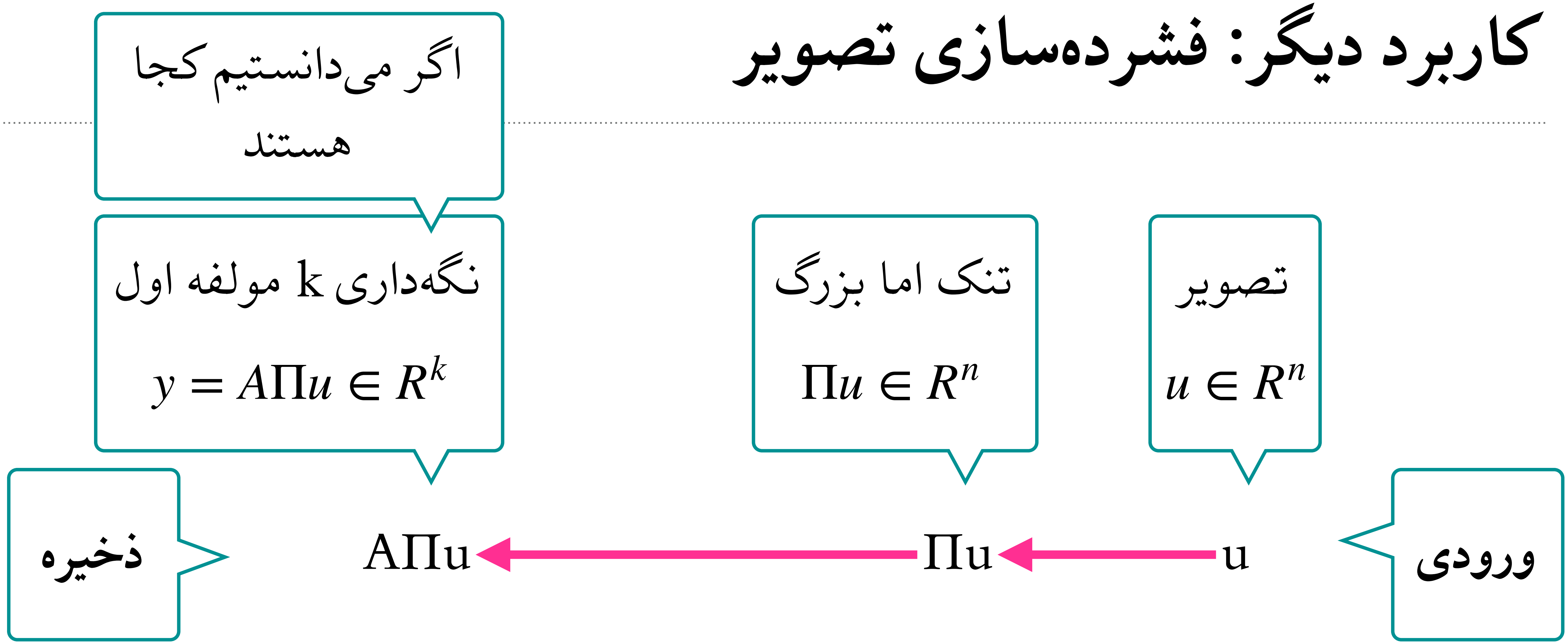
$u \in R^n$

تنک اما بزرگ

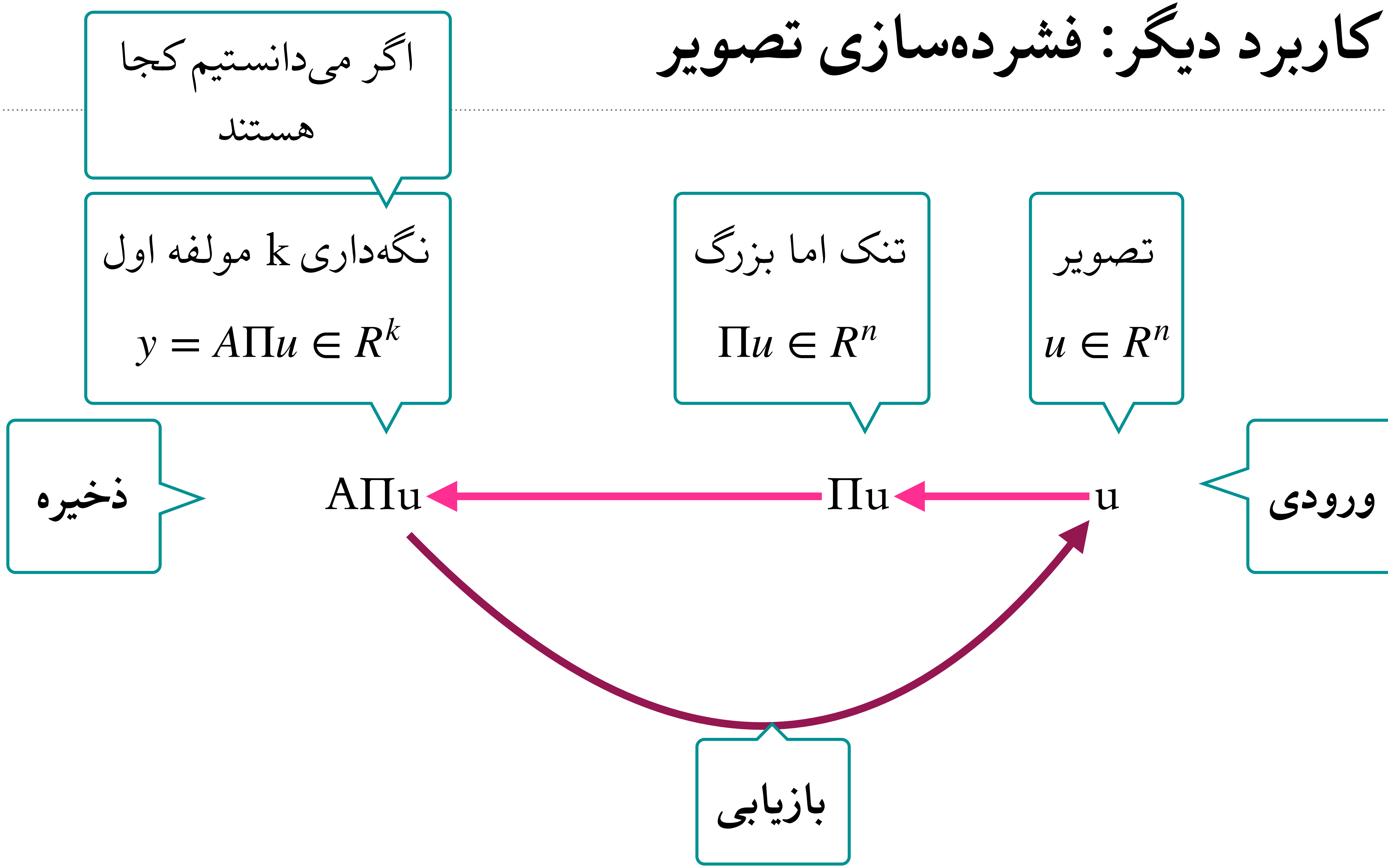
$\Pi u \in R^n$

$$\Pi \mathrm{u} \leftarrow \mathrm{u}$$

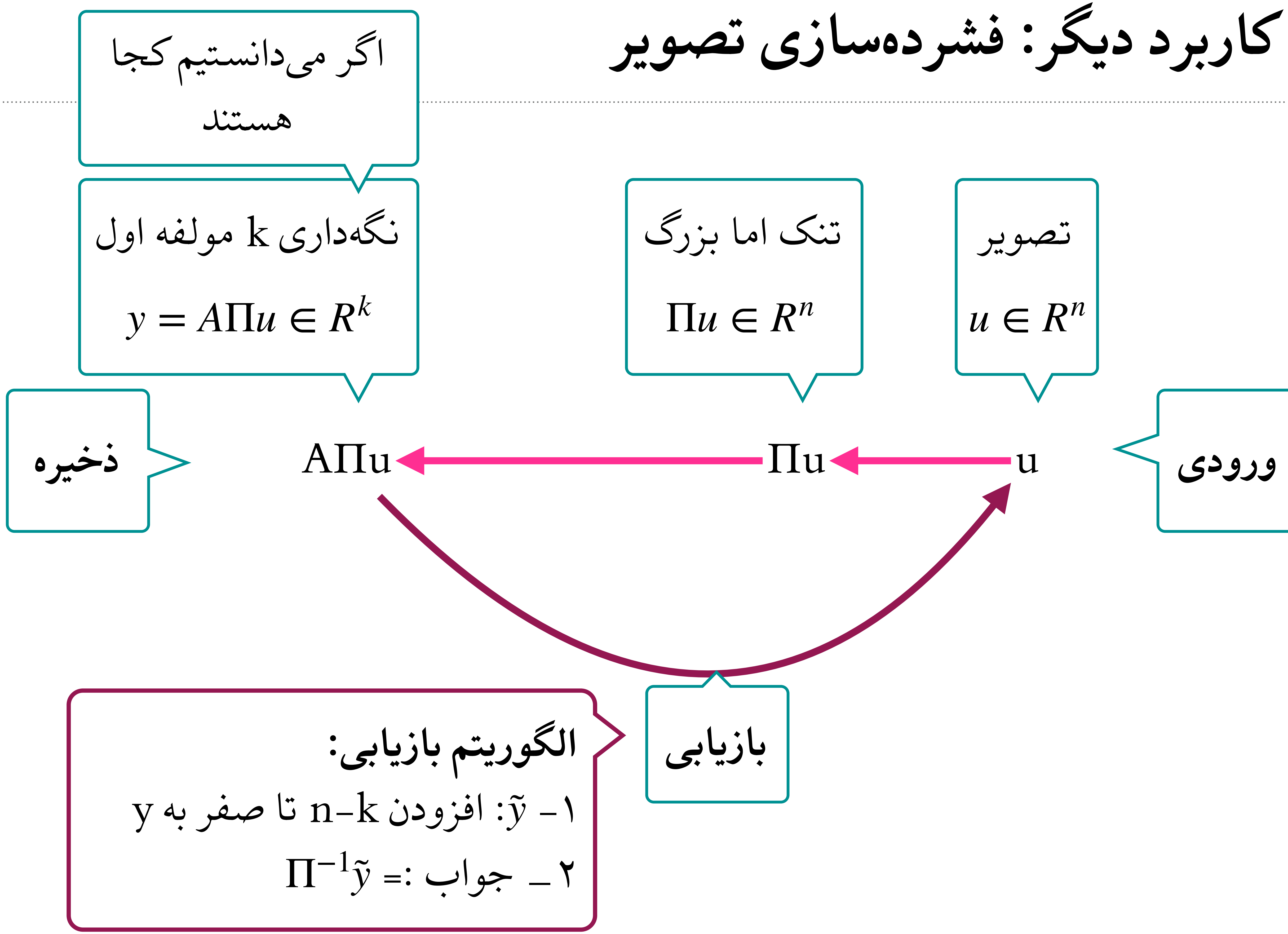
کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر

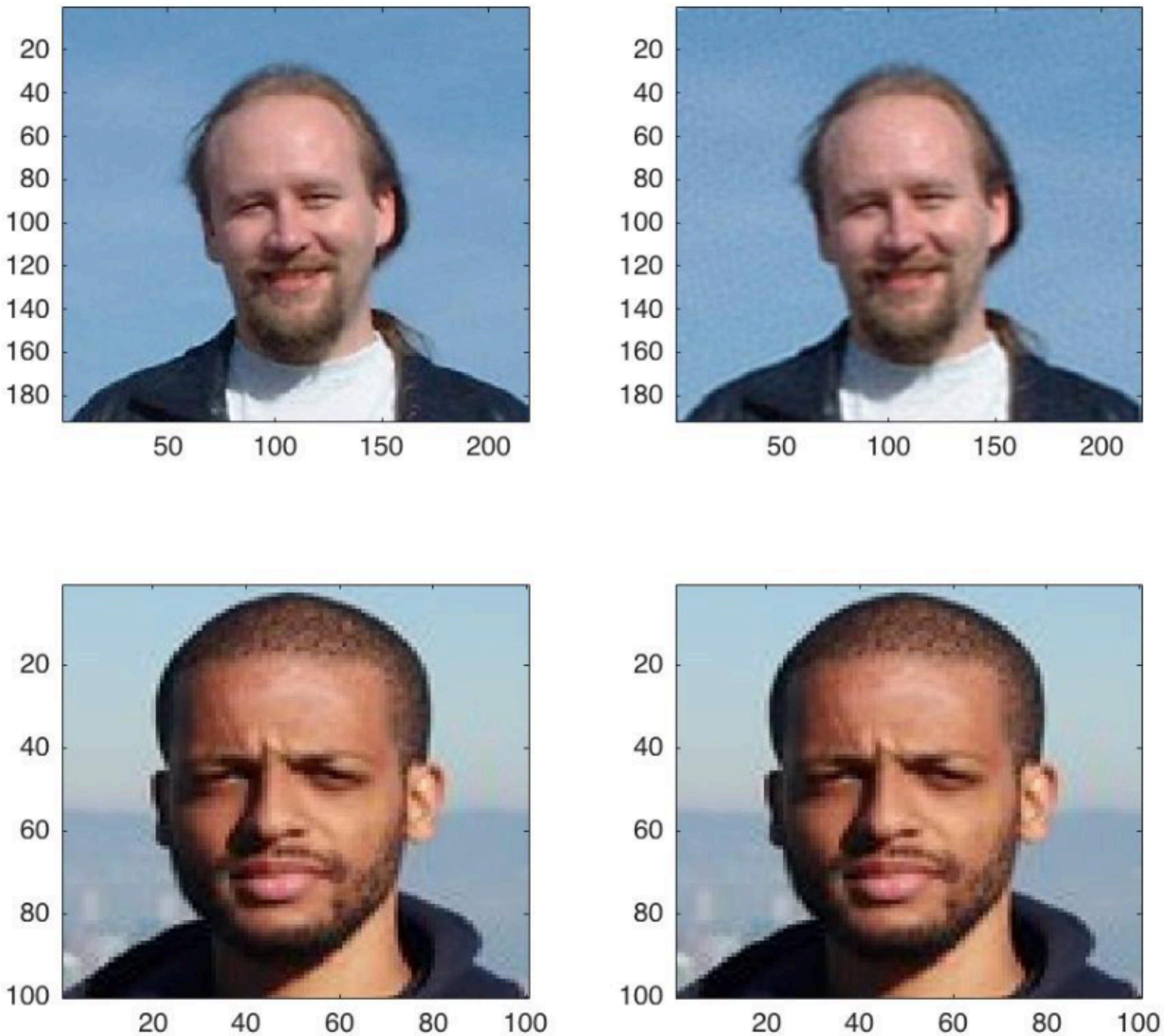


کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



مثال:

Π: تبدیل فوریه



خواص تبدیل فوریه

ریشه n_ام واحد

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

x -> y=Πx

خواص تبدیل فوریه

ریشه n_ام واحد

تعبیر: فرکانس

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

x -> y=Πx

خواص تبدیل فوریه

ریشه n_ام واحد

تعبیر: فرکانس

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

x -> y=Πx

یکتا

خواص تبدیل فوریه

ریشه n_ام واحد

تعبیر: فرکانس

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

x -> y=Πx

یکتا

مشکل:

کدام را نگه داریم؟

خواص تبدیل فوریه

ریشه n_ام واحد

تعبیر: فرکانس

$$F_{uj} = \frac{1}{n}\omega^{-uj}$$

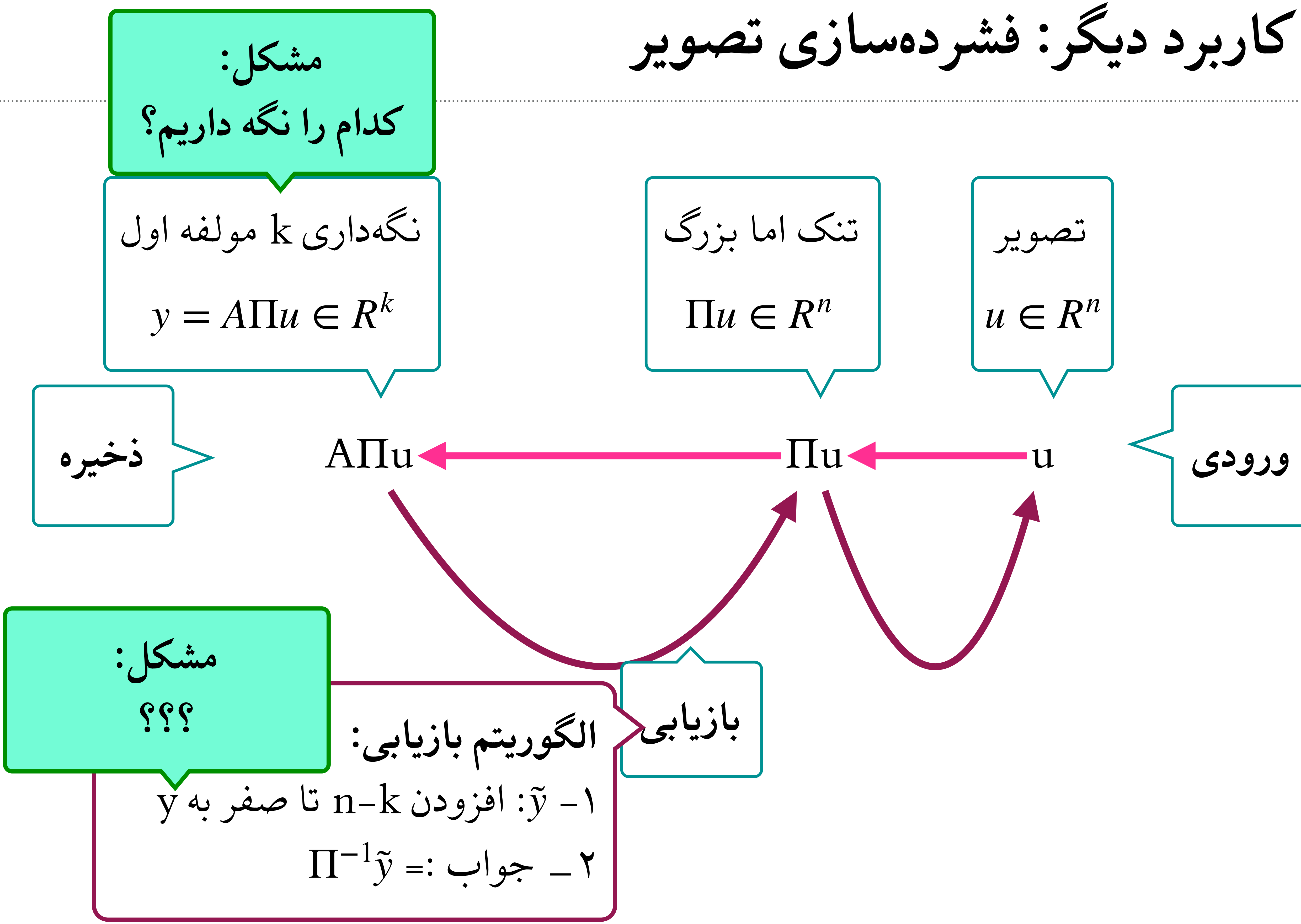
x -> y=Πx

یکتا

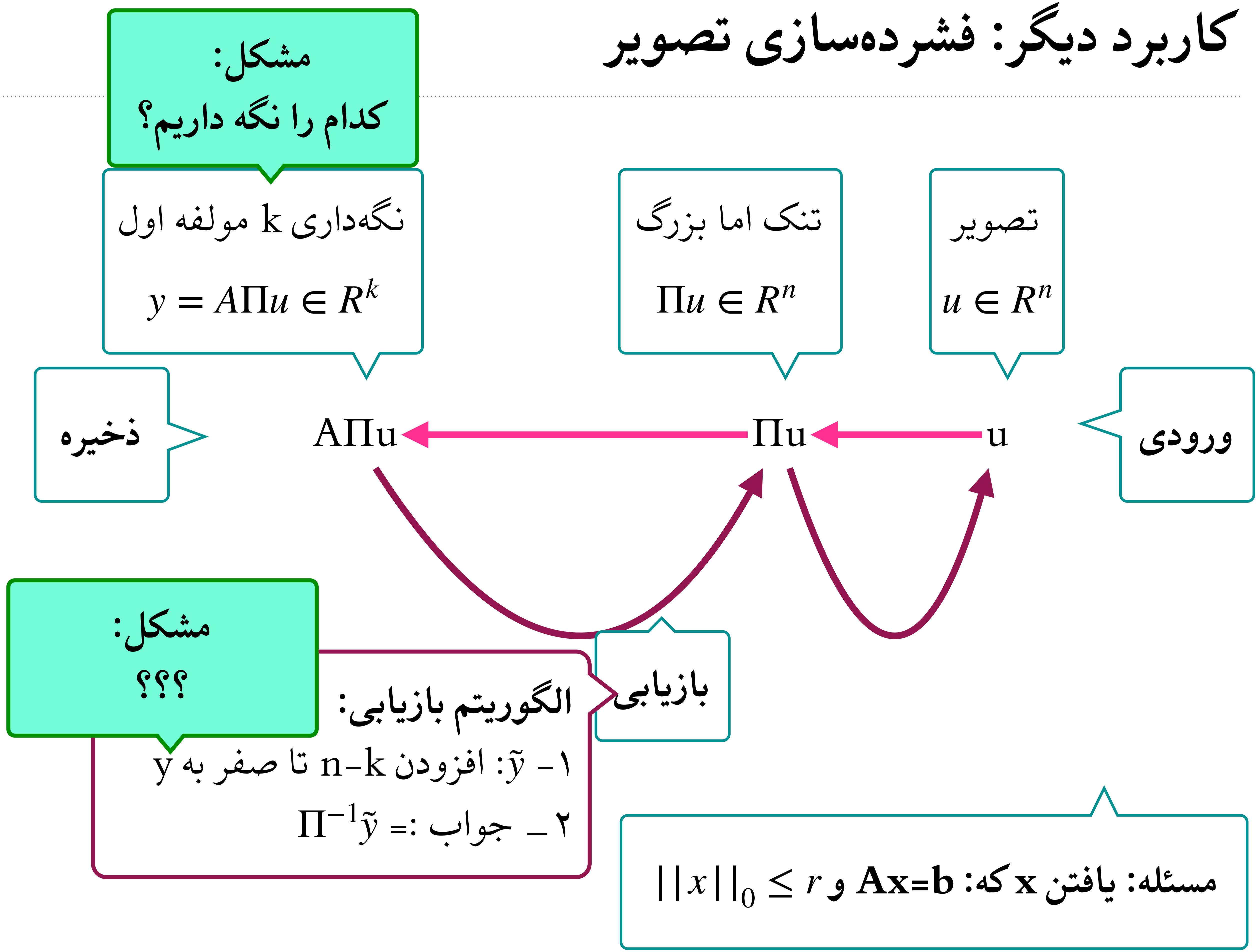
مشکل:
کدام را نگه داریم؟

ایده:
چرا به Π ستون اضافه نکنیم؟

کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



اگر x را ندانیم:

قبلا

x: r_تنک ← نگه‌داری: Ax=b

اگر x را ندانیم:

قبلا

x: r_تنک ← نگه‌داری: Ax=b

مسئله: یافتن x که: **Ax=b** و $r \le ||x||_0$

اگر x را ندانیم:

قبلا

x: r_تنک ← نگه‌داری: Ax=b

مسئله: یافتن x که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

تعریف گوی واحد:

گوی واحد: $\{u : \|u\| \leq 1\}$

کمی نُرم

تعریف نرم:

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

تعریف گوی واحد:

گوی واحد: $\{u : \|u\| \leq 1\}$

قضیه: گوی واحد محدب است:

$$\underbrace{\|tu+(1-t)v\|}_{\leq 1} \leq \|tu\| + \|(1-t)v\| = t\underbrace{\|u\|}_{\leq 1} + (1-t)\underbrace{\|v\|}_{\leq 1}$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, \infty]$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \in [1, \infty]$$

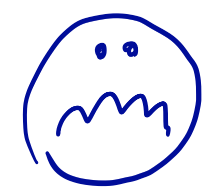
نرم ۱ : $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

نرم ۲ : $\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

نرم (ادامه)

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, \infty]$$

$\|x\|_0 :=$ تعداد درایه‌های غیر صفر 

نرم l۱ : $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

نرم l۲ : $\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \le r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \leq r$

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن x که: Ax=b و $||x||_0 \leq r$

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر ۲r ستون مستقل

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $r \leq ||x||_0$

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
هر **۲r** ستون مستقل

A خوب:
ماتریس تصادفی

مسئله: یافتن **x** که: **Ax=b** و $||x||_0 \le r$

A خوب:
حداکثر یک جواب تنک

8.5.1 Observation. *With n, m, r fixed, the following two conditions on an $m \times n$ matrix A are equivalent:*

(i) *The system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one sparse solution $\mathbf{x}$ for every $\mathbf{b}$.*
(ii) *Every $2r$ or fewer columns of A are linearly independent.*

A خوب:
ماتریس تصادفی

A خوب:
هر **۲r** ستون مستقل

A: 2r x 2r

حل دستگاه $Ax = b$ که $\mathbf{x}$ تنک

حل دستگاه $Ax = b$

که **x** تنک

$$\mathbf{Ax = b}$$

$$\|\mathbf{x}\|_0 \le \mathbf{r}$$

حل دستگاه $Ax = b$

که **x** تنک

Ax = b

$||\mathbf{x}||_0 \le \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

حل دستگاه $Ax = b$
که $\mathbf{x}$ تنک

$\mathbf{Ax = b}$

$\|\mathbf{x}\|_0 \leq \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

BP

$\mathbf{Min}\ \|\mathbf{x}\|_1$

$\mathbf{Ax = b}$

به جای قبلی

حل دستگاه $Ax = b$
که **x** تنک

Ax = b
$||\mathbf{x}||_0 <= \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

Min $||\mathbf{x}||_{۱}$
Ax = b

BP

به جای قبلی

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{u} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{u} \ge \mathbf{0}.
\end{array}
$$

حل دستگاه $Ax = b$

که x تنک

$\mathbf{Ax = b}$

$||\mathbf{x}||_0 <= \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

$\mathbf{Min}\ ||\mathbf{x}||_{۱}$

$\mathbf{Ax = b}$

BP

به جای قبلی

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

قابل حل

حل دستگاه $Ax = b$
که $\mathbf{x}$ تنک

$\mathbf{Ax = b}$

$\|\mathbf{x}\|_0 <= \mathbf{r}$

سخت محاسباتی!

ایده:

Min $\|\mathbf{x}\|_{۱}$

$\mathbf{Ax = b}$

BP

به جای قبلی

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

قابل حل

حل دستگاه $Ax = b$
که **x** تنک

سخت محاسباتی!

$$\mathbf{Ax = b}$$
$$\|\mathbf{x}\|_0 \mathbf{<= r}$$

؟

جواب این دو یکی است؟

ایده:

به جای قبلی

$$\mathbf{Min}\ \|\mathbf{x}\|_1$$
$$\mathbf{Ax = b}$$

BP

قابل حل

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & -\mathbf{u} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathbf{u} \ge \mathbf{0}. \end{array}$$

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

خاصیت BP-exact برای r

8.5.2 Theorem (Guaranteed success of basis pursuit). *Let*

$$m = \lfloor 0.75n \rfloor,$$

and let A be a random $m \times n$ matrix, where each entry is drawn from the standard normal distribution $N(0,1)$ and the entries are mutually independent.[5] *Then with probability at least $1 - e^{-cm}$, where $c > 0$ is a positive constant, the matrix A has the following property:*

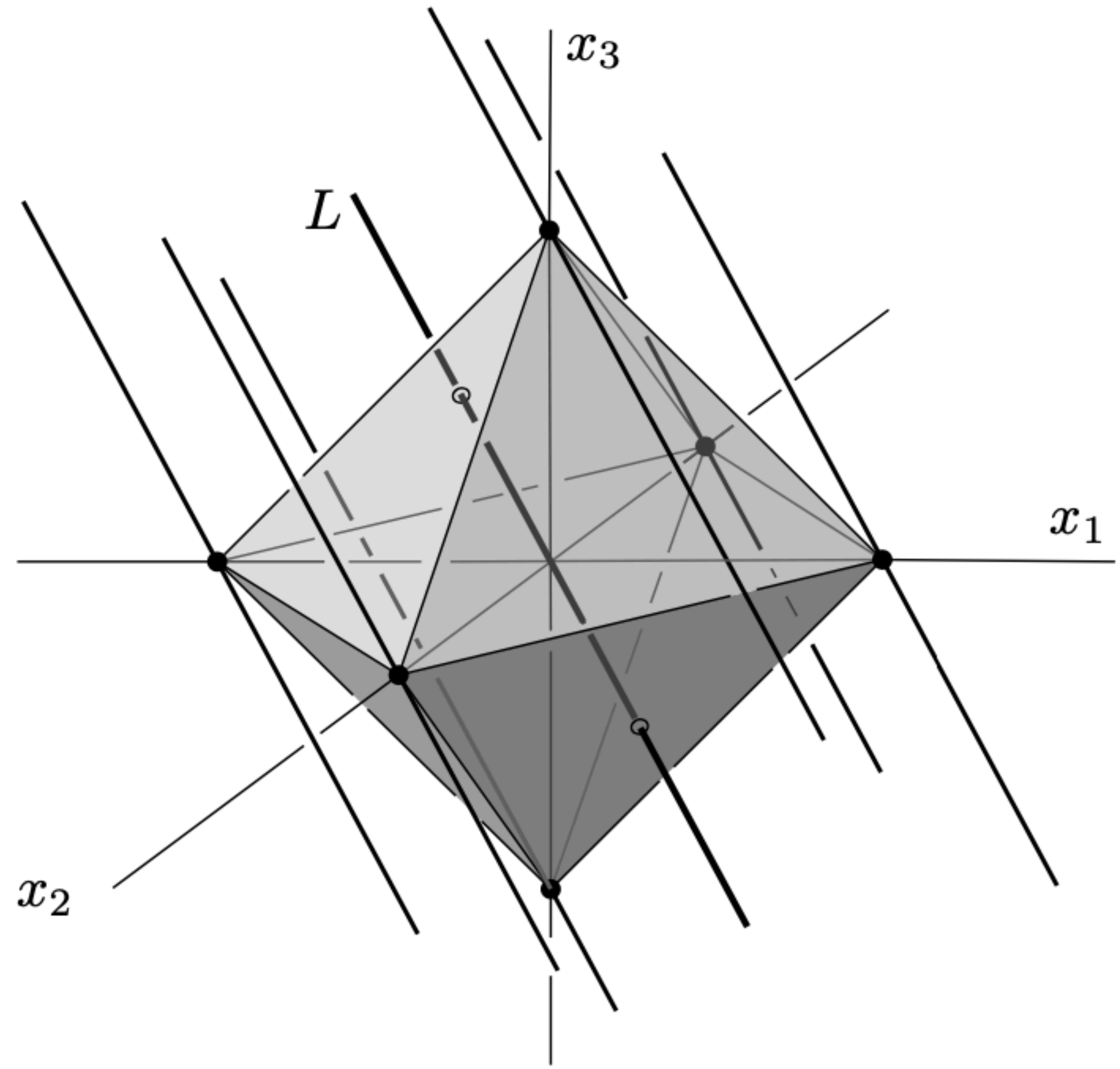
> *If $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is such that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution $\tilde{\mathbf{x}}$ with at most $r = \lfloor 0.08n \rfloor$ nonzero components, then $\tilde{\mathbf{x}}$ is a unique optimal solution of (BP).*

خاصیت BP-exact
برای r

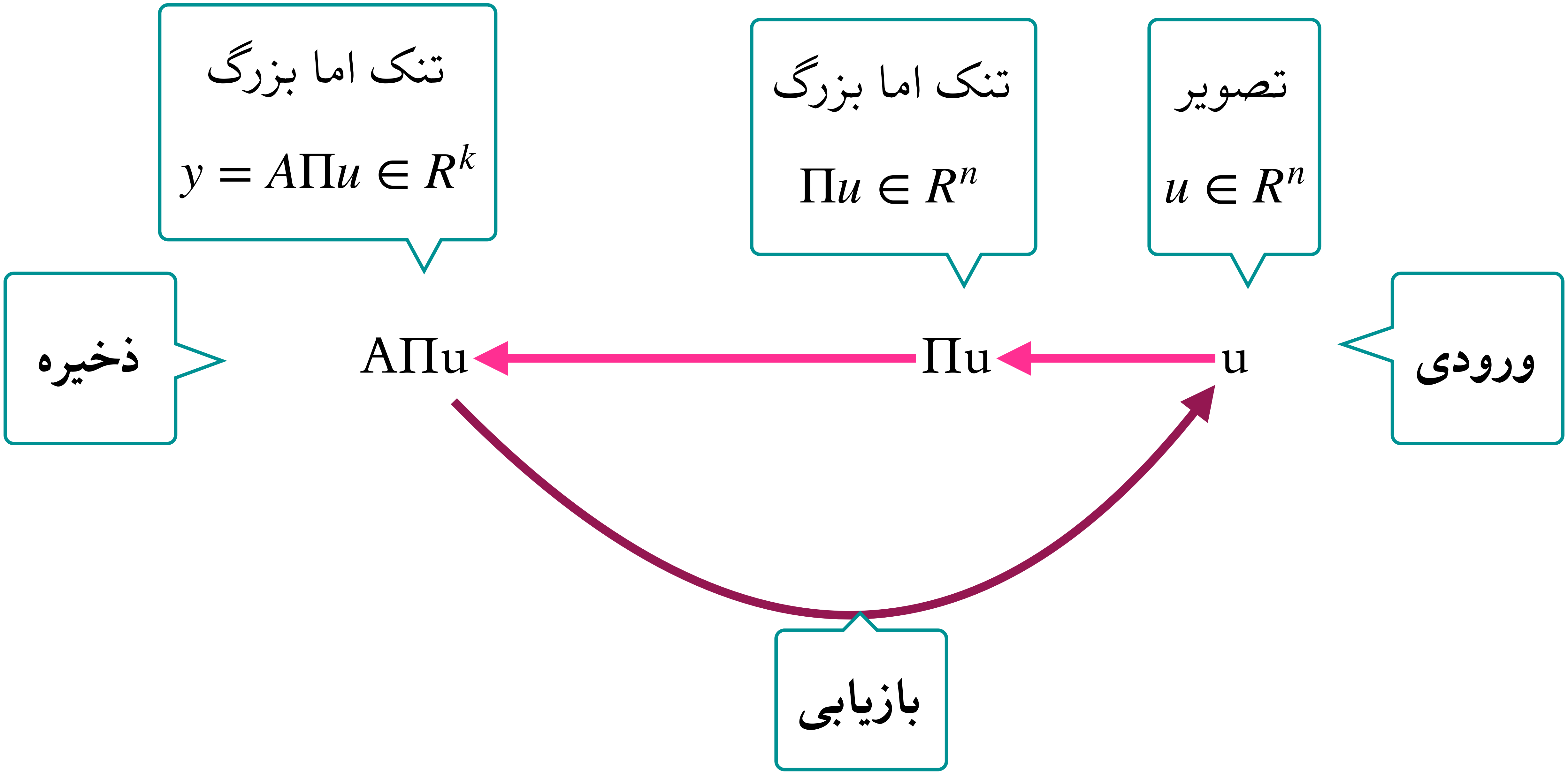
Min $\|x\|_1$
$Ax = b$

BP

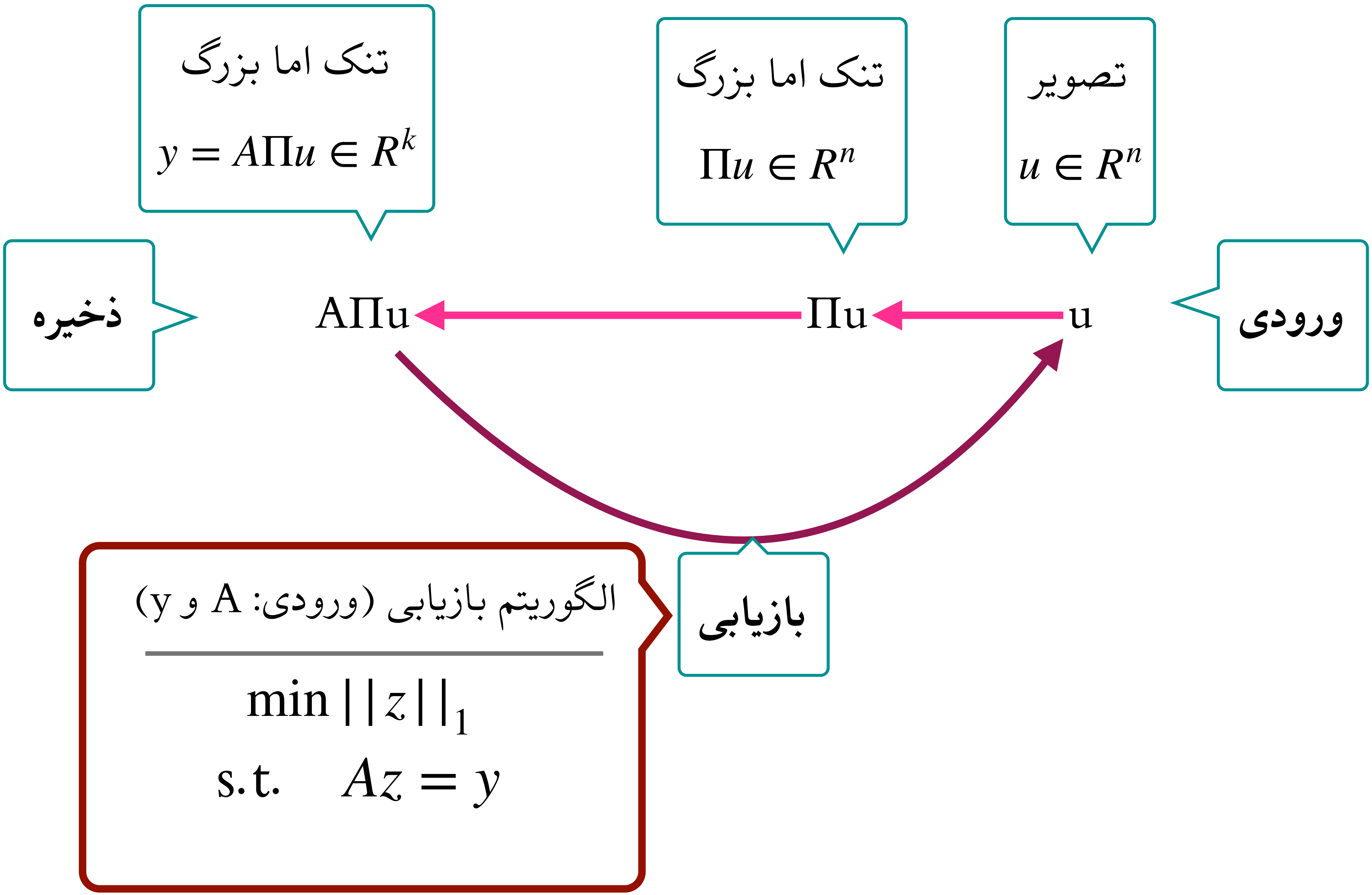
تعبیر هندسی



کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر



کاربرد دیگر: فشرده‌سازی تصویر