بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین‌های استقرا - درس ریاضیات گسسته نیمسال دوم ۹۲-۹۳ – دانشگاه شریف

تاریخ تحویل : ۹۲/۱۱/۲۹

مسائلی که به صورت رنگی مشخص شده‌اند به عنوان تکلیف اجباری شما، از میان تمرین‌های کتاب‌های مختلف در نظر گرفته شده است. تعداد این تمرین‌های اجباری ۶ عدد است. در صورت حل تعداد بیشتری از این تمرین‌ها برای شما نمره‌ی امتیازی محاسبه خواهد شد. تمام تمرین‌های حل شده خود را در ابتدای کلاس درس روز سه‌شنبه ۲۹ بهمن ماه به استاد درس تحویل دهید. پس از این موعد به هیچ وجه تمرینی از کسی دریافت نخواهد شد. در صورت عدم امکان حضور در کلاس، تمرین‌ها را در زمان معین شده، در CW آپلود فرمایید.

تمرینات از نظر کپی برداری احتمالی بررسی می‌شوند و در صورت مواجهه با هر مورد تخلف در تمرین-ها، نمره‌ی کل تمارین برای آن شخص نصف می‌شود. (قابل توجه آن که در این مورد سخت گیرانه عمل می‌شود و ممکن است به مدرکی که از نظر شما محکمه پسند نباشد، ترتیب اثر داده شود) تعداد تمرینات متناسب با زمان تحویل آنها تعیین می‌شود، اما در صورتی که نتوانستید در مدت محدود آنها را انجام دهید، از کپی کردن جدا خودداری کنید، چرا که سازوکارهای مختلفی برای دریافت نمره‌ی امتیازی تعبیه شده است و با کمی تلاش بیشتر می‌توانید نمره‌ی از دست رفته را جبران کنید.

اگر سوال یا ابهامی داشتید از طریق vasei.hamed@gmail.com تماس حاصل فرمایید.

موفق باشید

تمرین‌های اجباری

مسئلهٔ ۸.۱.۶ ثابت کنید با رقمهای ۱ و ۲ می‌توان 2^{n+1} عدد ساخت به نحوی که هر کدام از آنها 2^n رقم داشته باشد و در ضمن هر دو عدد دست‌کم در 2^{n-1} مرتبه با یکدیگر اختلاف داشته باشند.

مسئلهٔ ۶.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید می‌توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد، به‌طوری‌که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

۹.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ج) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

د) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

2. There are n identical cars on a circular track. Among all of them, they have just enough gas for one car to complete a lap. Show that there is a car which can complete a lap by collecting gas from the other cars on its way around.

9 Sometimes it's possible to use induction backwards, proving things from n to $n-1$ instead of vice versa! For example, consider the statement

$$P(n): \quad x_1 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \quad \text{if } x_1, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

This is true when $n = 2$, since $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$.

- a By setting $x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-1})/(n-1)$, prove that $P(n)$ implies $P(n-1)$ whenever $n > 1$.
- b Show that $P(n)$ and $P(2)$ imply $P(2n)$.
- c Explain why this implies the truth of $P(n)$ for all n.

2.36 Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Prove, without using the arithmetic versus geometric inequality, that

$$(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n) \geq 2^n.$$

(Hint: Try a reduction by introducing another variable that replaces two specially chosen numbers from the sequence.)

تمرین‌های امتیازی

۱۱.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۰$ ثابت کنید $۲^{۵n+۳} + ۵^{n} \times ۳^{n+۲}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۰.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۰$ ثابت کنید $۲^{n+۵} \times ۳^{۴n} + ۵^{۳n+۱}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

15. Let α be any real number such that $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Prove that

$$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \quad \text{for any } n \in \mathbb{N}.$$

۱۳.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} > \frac{۳n}{۲n+۱}$$

۱۴.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۳n+۱} > ۱$

ب) $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^n - ۱} > \frac{n}{۲}$

ج) $\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} \leq ۲ - \frac{۱}{n}$

۱۵.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید

الف) $\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n} > \frac{۱۳}{۲۴}$

ب) $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^n - ۱} < n$

۱۶.۱.۶* فرض کنید $a_i > ۰$ و $b_i > ۰$، $i = ۱, ۲, \dots, n$، $A = \sum_{i=۱}^{n} a_i$ و $B = \sum_{i=۱}^{n} b_i$. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{AB}{A+B}$$

۲۸.۱.۶* یک کارخانهٔ تولید اسباب‌بازی، جغجغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که در هر یک n جغجغه جا می‌گیرد. ثابت کنید این کارخانه می‌تواند nk جغجغه (با تعداد دلخواهی جغجغه از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جا دهد که در هر جعبه، جغجغه‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱).

۲۹.۱.۶ تعداد زیادی کارت در اختیار داریم که روی هر یک یکی از دو عدد ۳ و ۵ نوشته شده است. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۸$، ثابت کنید تعدادی کارت می‌توان انتخاب کرد که مجموع اعداد روی آنها برابر n شود.

2.6 Prove that

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \cdots + (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{k-1} k(k+1)/2.$$

The sum of the series

$$8 + 13 + 18 + 23 + \cdots + (3 + 5n)$$

is $2.5n^2 + 5.5n$.