دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی محاسبه

تمرین شماره‌ی ۴: توابع بازگشتی

سؤال ۱

الف) توابعی که در EL هستند به غیر از EXP در PR حضور دارند و عملیات‌ها نیز در PR وجود دارد، برای آن‌که نشان دهیم $EL \subseteq PR$ کافی‌است $EXP \in PR$

$$EXP(m,n) = \begin{cases} EXP(n,0) = 1 \\ EXP(n,m+1) = EXP(n,m) \times n \end{cases} \Longrightarrow EXP \in PR \tag{1}$$

برای اینکه نشان دهیم $EL \neq PR$ تابع $T \in PR$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود درنظر می‌گیریم

$$T(n,m) = \begin{cases} T(0,n) = m \\ T(n+1,m) = 2^{T(n,m)} \end{cases}$$

می‌خواهیم با استقرا روی نحوه‌ی ساخت توابع EL نشان دهیم برای هر $f \in EL$ عدد طبیعی n_0 وجود دارد که

$$\forall \vec{n} \in \mathcal{N} : f(\vec{n}) < T(n_0, \max\{\vec{n}\})$$

پایه‌ی استقرا.

$$Z(n) < T(1,n)$$
$$S(n) < T(2,n)$$
$$P_i^k(x_1,\dots,x_k) < T(1,\max\{x_1,\dots,x_k\})$$
$$EXP(n,m) < T(3,\max\{n,m\})$$

فرض می‌کنیم حکم برای همه‌ی توابعی که با حداکثر k بار استفاده از عملیات‌های comp و BRec ساخته شده‌اند درست باشد.

فرض کنیم تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ با عملیات comp از روی توابع $h(x_1,\dots,x_t), g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_t(x_1,\dots,x_n)$ با $k+1$ با عمل ساخته شده باشد. پس h و g_iها در فرض استقرا صدق می‌کنند.

$$f(\vec{x}) = \underbrace{h\big(g_1(\vec{x}),\dots,g_t(\vec{x})\big) < T\big(n_h,\max\{g_i(\vec{x})\}\big)}_{\text{طبق فرض}}$$
$$\forall i, g_i(\vec{x}) < T(n_{g_i},\max\{\vec{x}\})$$

تعریف می‌کنیم $n_g = max\{n_{g_i}\}$. بنابراین

$$\forall i \;\; g_i(\vec{x}) < T(n_g,\max\{\vec{x}\})$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f(\vec{x}) < T\big(n_h, T(n_g,\max\{\vec{x}\})\big) \\ T\big(a,T(b,c)\big) = T(a+b,c)\end{array}\right\} \Longrightarrow f(\vec{x}) < T(n_h+n_g,\max\{\vec{x}\}) \;\; \checkmark$$

اگر داشته باشیم

$$f(n,\vec{x}) = \begin{cases} f(0,\vec{x}) = g(\vec{x}) \\ f(n+1,\vec{x}) = h\big(f(n,\vec{x},n,\vec{x})\big)\end{cases}$$

$f(n,\vec{x}) \leq k(n,\vec{x}) \in EL$ و f با $k+1$ عملیات ساخته شده باشد پس k, h, g.

$$\Rightarrow f(n,\vec{x}) \leq k(n,\vec{x}) \underbrace{<}_{\text{طبق فرض}} T(n-k, \max\{\vec{x}\})$$

حال باید توجه داشت که برای تابع $T(n,n)$ هیچ n_0 ای وجود ندارد که داشته باشیم $T(n,n) < T(n_0,n)$. زیرا برای هر n_0 داریم $T(n_0+1, n_0+1) > T(n_0, n_0+1)$.

$$\Rightarrow T(n,n) \notin EL \tag{۲}$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که $EL \subsetneq PR$

$\blacksquare$

ب) $EL_1 \subseteq EL$:

$$E(n) = EXP\big(SSZ(n), n\big)$$
$$+(n,m) = \begin{cases} +(0,m) = m \\ +(n+1,m) = S(+(n,m)) \end{cases}$$
$$+(n,m) < SS(n)^{S(m)} \Longrightarrow +(n,m), E(n) \in EL$$

درنتیجه بوسیله‌ی استقرا می‌توان نشان داد که $EL_1 \subseteq EL$.

$EL \subseteq EL_1$:

$$X(n,m) = \begin{cases} X(0,m) = 0 \\ X(n+1,m) = +\big(X(n,m), m\big) \end{cases}$$

$$X(n,m) \leq 2^{n+m} \Longrightarrow X(n,m) \in EL_1$$

$$EXP = \begin{cases} EXP(n,0) = 1 \\ EXP(n,m+1) = X\big(n, EXP(n,m)\big) \end{cases}$$

$EXP(n,m) < 2^{2^{n+m}} \Longrightarrow$ پس با استقرا $EL \subseteq EL_1$

$$\Longrightarrow EL = EL_1$$

■

سؤال امتیازی

$EL_2 \subseteq EL$: با توجه به اینکه Bounded Min. را می‌توان با Bounded Rec. پیاده‌سازی کرد، پس با اسقرا روی پیچیدگی ساخت توابع می‌توان نشان داد

$$EL_2 \in EL \tag{۳}$$

$EL \subseteq EL_2$: برای نشان دادن این قسمت نیاز به تعدادی تابع داریم؛ توابع زیر در EL_2 می‌باشند:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = 0 \wedge g(\vec{x}) = 0 &:= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = 0 \\ f(\vec{x}) = 0 \vee g(\vec{x}) &:= f(\vec{x}) \times g(\vec{x}) = 0 \\ \neg f(\vec{x}) = 0 &:= \big(f(\vec{x}), 0\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n \dot{+} 1 = \min y < n\big[(n = 0 \wedge y = 0) \vee (S(y) = n)\big] \\ &\langle n, m\rangle = \big(2^n \times (2m + 1)\big) \dot{+} 1 \end{aligned}$$

$\langle n, m\rangle$ یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^2$ می‌باشد. اثبات این امر سخت نیست. درنتیجه توابع $\pi_1(n)$ و $\pi_2(n)$ وجود دارند که $\langle \pi_1(b), \pi_2(n)\rangle = n$.

$$\begin{aligned} &\pi_1(n) = \min y \leq n\big[2^{S(y)} \nmid n + 1\big] \\ &\pi_2(n) = \min y \leq n\big[\big(2^{\pi_1(n)} \times (2y + 1) \dot{+} 1 = n\big) \nmid n + 1\big] \end{aligned}$$

به توابع بالا برای کد و دیکد کردن دنباله‌های متناهی اعداد نیاز داریم تا بتوانیم Bounded Rec. را شبیه‌سازی کنیم. می‌خواهیم دنباله‌ی $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ را به طریقی در بسط مبنای ۲ یک عدد کد کنیم.

$$n \dot{-} m = \min y \leq n\big[y + m = n\big]$$

$$< (n,m) = \; = (n+1, n \dot{-} m) \;\; \big(\; < (n,m) = 1 \Leftrightarrow n < m \big)$$

$$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \min y \leq n\big[(y+1) \times m > n\big]$$

$$n \; mod \; m = n \dot{-} (m \times \lfloor \frac{n}{m} \rfloor)$$

$$bit(n,i) = \lfloor \frac{n}{2^i} \; mod \; 2 \rfloor$$ (بیت i ام دنباله)

تعریف کدینگ:

$$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \sum_{i=0}^{n} 2^{\langle i, a_i \rangle}$$

برای دیکد کردن:

$$\big(n\big)_i = \min y \leq n\big[bit(n, \langle i, y \rangle) = 1\big]$$

حال فرض کنیم توابع $g, h, k \in EL$ باشند و از طرفی در EL_2 باشند. می‌خواهیم نشان دهیم

$$f(n, \vec{x}) = \begin{cases} f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) \\ f(n+1, \vec{x}) = h\big(f(n, \vec{x}, n, \vec{x})\big) \end{cases}$$

$$f(n, \vec{x}) \leq k(n, \vec{x})$$

در EL_2 است.

تعریف می‌کنیم

$$X(n,x,\vec{m}) = \big(m\big)_0 = g(\vec{x}) \wedge \forall i < n\big[\big(m\big)_{i+1} = h\big((m)_i, i, \vec{x}\big)\big]$$

طبق سوال یک n_f وجود دارد که $f(n,\vec{x}) < T(n_f, \max\{n,\vec{x}\}) < T(n_f, n + x_1 + \cdots + x_r)$ تابع $T(n_f, n) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ در EL_2 است.

فرض کنیم داریم $X(n,\vec{x},m) = 0$

$$\Rightarrow m = \sum_{i=0}^{n} 2^{\langle i, f(i,\vec{x})\rangle} < (n+1) \times 2^{\langle n, T(n_f, n+x_1+\cdots+x_r)\rangle} \in EL_2$$

پس برای m یک کران بالا پیدا کردیم.

$$\Rightarrow f(n,\vec{x}) = \big(\min y \leq (n+1) \times 2^{\langle n, T(n+x_1+\ldots x_r)\rangle}\big[X(n,\vec{x},y) = 0\big]\big)_n$$

$$\Rightarrow f \in EL_2 \Rightarrow EL \subseteq EL \tag{۴}$$

$$۳, ۴ \Longrightarrow EL = EL_2$$

■