دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

تحقیق در عملیات ۱

محمدهادی فروغمنداعرابی
پاییز ۱۳۹۹

کوئیز سوم

جلسات ۱۱ و ۱۲

نگارنده: فاطمه ایراف

۱ ناتهی

شرط لازم و کافی برای اینکه چندوجهی زیر تهی نباشد را به دست آورید

$$Ax \le b$$

$$A'x = b'$$

$$x \in R^n$$

حل: چندوجهی را به صورت زیر که معادل فرض سوال است می نویسیم:

$$Ax \le b$$

$$A'x \le b'$$

$$-A'x \le -b'$$

یعنی چندوجهی معادل است با:

$$\left\{ x \middle| \begin{bmatrix} A \\ A' \\ -A' \end{bmatrix} \cdot x \le \begin{bmatrix} b \\ b' \\ -b' \end{bmatrix} \right\}$$

طبق لم فارکاش چندجمله ای بالا شدنی است(یعنی تهی نیست)اگر و فقط اگر این چند وجهی ناشدنی باشد.

$$y \geq 0$$

$$y^T \cdot \begin{bmatrix} A \\ A' \\ -A' \end{bmatrix} = 0$$

$$y^T \cdot \begin{bmatrix} b \\ b' \\ -b' \end{bmatrix} < 0$$

یعنی برای هر $y \geq 0$ که $y^T \cdot \begin{bmatrix} A \\ A' \\ -A' \end{bmatrix} = 0$ الزاما داشته باشیم:

$$y^T \cdot \begin{bmatrix} b \\ b' \\ -b' \end{bmatrix} \geq 0$$

معادلا برای هر $y \geq 0$ که $y^T A' = y^T A = 0$ داشته باشیم:

$$-y^T b' \geq 0, y^T b' \geq 0, y^T b \geq 0$$

یعنی

$$y^T b' = 0, y^T b \geq 0$$

پس شرط لازم و کافی برای ناتهی بودن، عبارت بالاست.

۲ بیشینه کردن چندجمله‌ای درجه۲

فرض کنید می خواهیم بیشینه چند جمله ای زیر را روی $x_i \in \{-1, +1\}$ به‌دست بیاوریم.

$$P(x) = \sum_{i,j \in [n]} \omega_{ij} x_i x_j$$

آ) اگر $\omega_{i,j}$ مثبت باشند ، جوابی بدیهی که $P(x)$ را بیشینه می کند ارائه دهید.

حل: به وضوح چون $\omega_{i,j}$ به ازای هر $i, j \in [n]$ مثبت است ، بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که به ازای هر $i \in [n]$ ، $x_i = 1$ باشد در این صورت

$$P(x) = \sum_{i,j \in [n]} \omega_{ij}$$

ب) می خواهیم تلاش کنیم این مساله را برای شرایطی که ω_{ij} ها لزوما مثبت نیستند ولی می دانیم:$\{x \in \{-1, 1\}^n : P(x) \geq 0\}$ ناتهی است، حل کنیم.

برای این منظور یک برنامه ریزی صحیح بنویسید که تابع هدف آن یک تابع درجه دو باشد و تنها قیدهای برنامه ریزی به صورت $x_i \in \{-1, 1\}$ باشد.

حل: برای اینکه تابع هدف را به صورت درجه ۲ بیان کنیم ، ماتریس A را تعریف می کنیم:

$$A_{ij} = \frac{\omega_{ij} + \omega_{ji}}{2}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$x^T A x = [x_1 ... x_n] \, A \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i,j\in[n]} x_i x_j A_{ij} = \frac{\sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij} + \omega_{j,i}}{۲} x_i x_j$$
$$= \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij} x_i x_j = P(x)$$

پس درواقع برنامه ریزی صحیح را می توان اینطوری در نظر گرفت:

$$x^T A x$$

$$x \in \{-۱, ۱\}^n$$

ج) یک آرام سازی به صورت برنامه ریزی نیمه معین برای برنامه ریزی ارائه کنید.
حل) برای ارائه آرام سازی $n^۲$ متغیر جدید در نظر می گیریم یعنی یک ماتریس B در نظر می گیریم به طوری که متناظر با xx^T باشد.

حال برنامه ریزی خطی را به شکل زیر می نویسیم:

$$\text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j} \omega_{ij} b_{ij}$$
$$\text{که} \quad B = xx^T, \quad \forall i \in [n] : B_{ii} = ۱$$

برنامه ریزی خطی که نوشتیم دقیقا همان برنامه ریزی خطی اصلی است زیرا:

$$B = xx^T \longrightarrow B_{ij} = b_{ij} = x_i x_j \Rightarrow \sum \omega_{ij} b_{ij} = \sum \omega_{ij} x_i x_j$$

$$x_i \in \{-۱, ۱\} \iff x_i = \pm ۱ \iff b_{ii} = ۱$$

حال مطابق مطالب جلسه ۱۲ مسئله را آرام سازی می کنیم.به این منظور به جای بردار x فرض کنید ماتریس $n \times n$ ، z وجود دارد که $B = zz^T$.اگر ماتریس z را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$z = \begin{bmatrix} x_۱, ۰, ..., ۰ \\ x_۲, ۰, ..., ۰ \\ . \\ . \\ . \\ x_n, ۰, ..., ۰ \end{bmatrix}_{n \times n}$$

آنگاه zz^T دقیقا برابر است با xx^T
حال برنامه ریزی خطی را به شکل زیر می نویسیم:

$$\text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij} b_{ij}$$
$$\text{که} \quad B = xx^T, \quad \forall i \in [n] : B_{ii} = ۱$$

وجود دارد ماتریس $z \in R^{n\times n}$ که $B = zz^T$ که اعداد روی قطر اصلی A همگی برابرند.
در واقع ماتریسی مانند z که $B = zz^T$ وجود دارد اگر و تنها اگر B مثبت نیمه معین باشد.یعنی برای هر بردار $Y \in R^n$ داشته باشیم $y^T By \geq ۰$.بنابر این حال می توان مساله را با استفاده از قیدها به این صورت نوشت:

$$\text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij} b_{ij}$$
$$\text{که} \quad y^T B y \geq ۰, \quad \forall y \in R^n$$
$$b_{ii} = (B)_{ii} = ۱, \quad \forall i \in [n]$$

دقت کنید مساله بالا یک برنامه ریزی خطی با متغیرهای b_{ij} است.
در واقع به ازای هر جواب مساله اصلی متناظرش یک جواب در مساله جدید داریم.پس آرام سازی شده است.

د) نشان دهید برنامه ریزی شما یک آرام سازی برای برنامه قبلی است.

حل) zz^T دقیقا برابر است با xx^T که ما وقتی به جای بردار ستونی x یک ماتریس $n \times n$ را در نظر میگیریم، فضای شدنی مساله احتمالا بزرگتر می شود.پس می توان گفت مساله آرام سازی است.

$$z = \begin{bmatrix} x_1, 0, \ldots, 0 \\ x_2, 0, \ldots, 0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n, 0, \ldots, 0 \end{bmatrix}$$

$$B = zz^T = \begin{bmatrix} x_1, 0, \ldots, 0 \\ x_2, 0, \ldots, 0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n, 0, \ldots, 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ 0, 0, \ldots, 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0, 0, \ldots, 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n \\ x_2x_1, x_2x_2, \ldots, x_2x_n \\ . \\ . \\ . \\ x_nx_1, x_nx_2, \ldots, x_nx_n \end{bmatrix} = xx^T$$

پس برای هر جواب شدنی x از مساله اصلی که $x \in \{-1, 1\}^n$ می توانیم z ای بیابیم که

$$B = zz^T = xx^T$$

و اکنون $\sum_{i,j \in [n]} \omega_{ij} b_{ij}$ دقیقا برابر است با تابع هدف $P(x)$.

گرد کردن

ه) یک روش گرد کردن(پیدا کردن جواب مساله بر اساس جواب بهینه برنامه ریزی آرام سازی شده)ارائه کنید.

راهنمایی:روش شما خوب است مانند روش گرد کردن در مساله برش بیشینه باشد.

حل) پس جون برنامه ریزی ارائه شده در قسمت(ج) آرام سازی برنامه اصلی است می توان یک جواب برای برنامه ریزی خطی اصلی در برنامه ریزی آرام سازی شده پیدا کرد.(با استفاده از روش بیضی گون جوابی برای برنامه ریزی خطی آرام سازی شده می یابیم که یک جواب تقریبی از جواب اصلی است)

پس ابتدا یک جواب بهینه برای برنامه ریزی آرام سازی شده می یابیم:

$$z_i \in R^n, Z = \begin{bmatrix} \underline{z_1} \\ \underline{z_2} \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix}$$

شرط ۱ $= (B)_{ij}$ می گوید ۱ $= |z_i|$ (یعنی اگرzجواب بهینه باشد ، $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix}$) z_i ها بر روی کره واحدند.

حال این بردارها که روی کره واحدند را در نظر می گیریم.

یک صفحه تصادفی از مرکز کرهn بعدی می گذرانیم و سپس z_i ها به سه دسته تقسیم می شوند(متغیرهایی که در یک سمت صفحه اند و متغیرهای دیگری که در سمت دیگر صفحه اند)

حال متناظر با اینکه z_i ها کدام طرف هستند x_i ها را ۱ــ و۱ قرار دهید.

یعنی از روی این صفحه تصادفی و جواب بهینه برای برنامه ریزی خطی آرام سازی شده ، یک x ای ارائه کردیم که در فضای شدنی برنامه ریزی اصلی قرار دارد.

و) نشان دهید اگر همه ω_{ij} ها نامنفی باشند، امید ریاضی جواب الگوریتم شما حداقل ۰٫۸ برابر جواب بهینه است.

حل) اگر صفحه ای که در R^n از مرکز کره گذر کرده یکنواخت انتخاب شود، آنگاه:

$$E(\sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}x_ix_j) = \sum_{i,j\in[n]} E(x_ix_j)\omega_{ij}$$

$$= \sum_{i,j\in[n]} (Pr[x_ix_j = 1](1) + Pr(x_ix_j = -1))\omega_{ij}$$

اینکه $x_ix_j = 1$ یا $x_ix_j = -1$ باشد دقیقا معادل است با اینکه z_i, zj که بردارهای روی کره بودند، در یک طرف صفحه بوده باشند ($x_ix_j = 1$) و یا یکی در یک طرف صفحه و دیگری در طرف دیگر صفحه ($x_ixj) = -1$ قرار داشته باشد.حال احتمال را به این صورت به دست می آوریم:
اگر صفحه یکنواخت برای z_i, z_j انتخاب کنیم معادل است با اینکه یک قطر یکنواخت در دایره ای که ار z_i, z_j می گذرد انتخاب کنیم.حال باتوجه به دایره خواهیم داشت:

$$Pr[x_ix_j = 1] = Pr[x_i = x_j] = Pr[z_i, z_j] = \frac{\pi - \alpha_{ij}}{\pi}$$
$$\forall i, j \in [n]$$
$$Pr[x_ix_j = -1] = Pr[x_i \neq x_j] = Pr[z_i, z_j] = \frac{\alpha_{ij}}{\pi}$$
$$\forall i, j \in [n]$$
$$\Rightarrow E[\sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}x_{ij}] = \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}(\frac{\pi - \alpha_{ij}}{\pi}.(1) + \frac{\alpha_{ij}}{\pi}.(-1)) = \sum \omega_{ij}(1 - \frac{2}{\pi}\alpha_{ij})$$

دقت کنید که زاویه بین z_i و z_j بین α_{ij} برابر است با

$$cos^{-1} < z_i.z_j >$$

که $< z_i.z_j >$ ضرب داخلی z_i و z_j است.
حال کافیست ثابت کنیم

$$1 - \frac{2}{\pi}cos^{-1} < z_i.z_j >= 1 - \frac{2}{\pi}cos^{-1}z_i^T z_j \geq X(z_i^T z_j)(1)$$

اگر عبارت بالا را ثابت کنیم آنگاه با ضرب طرفین در ω_{ij} و جمع روی i, j خواهیم داشت:

$$\sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}(1 - \frac{2}{\pi}\alpha_{ij}) \geq \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}0/8.z_i^T z_j = 0/8 \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}z_i^T z_j$$

تعریف کنید:

K :جواب بهینه مساله (ج)و H :جواب بهینه مساله اصلی

$$\sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}z_i^T z_j = 0/8K \geq 0/8H$$

توجه کنید که مساله (ج)آرام سازی شده برنامه ریزی خطی است و مساله ماکسیمم سازی است.
تعریف کنید T :جواب تقریبی و Q :جواب بهینه اصلی و

$$\Rightarrow E[T] \geq 0/8Q$$

اثبات(۱)

برای هر $0 < x < 1$ کافیست ثابت کنیم

$$1 - \frac{2}{\pi}cos^{-1}(x) \geq 0/8x$$

باتوجه به رسم خواهیم دید که:

$$\frac{1 - \frac{2}{\pi}cos^{-1}(x)}{x} \geq 0/8$$

درست نیست. اما:

$$\frac{۱ - \frac{۲}{\pi}cos^{-۱}(x)}{x} \geq ۰/۶$$

درست است.

ز) چرا در قسمت قبل فرض کردیم همه ω_{ij} ها نامنفی هستند.یعنی اگر ضرایب منفی بودند چه اشکالی برای اثبات شما پیش می آمد؟

حل) در واقع طرفین رابطه(۱)را وقتی در ω_{ij} ضرب کردیم اگر ω_{ij} منفی بود جهت نامساوی تغییر می کرد و رابطه خراب می شد.

ح) برنامه ریزی معین شما چندمتغیر حقیقی دارد؟

حل) $n^۲$متغیر

ط) نشان دهید همیشه جواب بهینه ای برای مساله وجود دارد که در گوی واحد به شعاع ۱ قرار دارد.

راهنمایی:از تجزیه ماتریس مثبت نیمه معین استفاده کنید.

حل) به این علت که همواره می توانیم تجزیه چولسکی را روی مساله اصلی پیاده کنیم.

ی) عدد ε پیدا کنید که اگر روش بیضی گون به جای جواب بهینه α جوابی با مقدار $\alpha + \varepsilon$ تولید کند نیز الگوریتم شما در نهایت $۰/۸-$ تقریب باقی بماند.

حل) مساله اولیه(P):

$$\text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}x_ix_j$$
$$\text{که} \quad x_i = \pm ۱$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}x_ix_j$$
$$\text{که} \quad x_i^۲ = ۱, \qquad i = ۱, ۲, ..., n$$

مساله آرام سازی شده(SDP):

$$\text{بیشینه کن} \quad P(x) = \sum_{i,j\in[n]} \omega_{ij}x_ix_j$$
$$\text{که} \quad y^TBy \geq ۰ \qquad \forall y \in R^n$$
$$b_{ii} = ۱ \qquad \forall ۱ \leq i \leq n$$

تجزیه چولسکی $B = zz^T, B = xx^T$

$$(B)_{ij} = x_ix_j = z_iz_j^T$$
$$(B)_{ij} = z_iz_i^T = ۱$$

(z_iسطر iم ماتریس Z)

جواب بهینه برنامه ریزی خطی آرام سازی شده=$opt(SDP)$

جواب بهینه برنامه ریزی خطی اولیه=$opt(P)$

می دانیم:

$$opt(P) \leq opt(SDP)$$

حال خواهیم داشت:

$$opt(P) \leq opt(SDP) - \varepsilon \leq opt(SDP)(۱)(\varepsilon > ۰)$$

از طرفی باتوجه به لم استفاده شده در جلسه دوازدهم خواهیم داشت:

$$\sum_{i,j\in[n]} \frac{\alpha_{ij}}{\pi} \geq ۰/۸۷۸۵(opt(SDP))(۲)$$

حال از(۱)و(۲)نتیجه می شود که:

$$\sum_{i,j\in[n]} \frac{\alpha_{ij}}{\pi} \geq ۰/۸۷۸۵(opt(P)-\varepsilon) \geq ۰/۸۷۸۵opt(P)$$

پس

$$\varepsilon = ۰/۵ \times ۱۰^{-۳}$$

(از الگوریتم $Goemans\ williamson$ استفاده شده است.)

ک) زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟ راهنمایی: الگوریتم شما شامل چند قسمت است: قسمتی برای پیدا کردن بیضی گون، قسمتی برای پیدا کردن جواب بهینه، قسمتی برای بررسی شدنی بودن جواب.

حل) پیدا کردن بیضی گون: در اینجا از الگوریتم چولسکی استفاده میکنیم. در هر مرحله یک ماتریس B (که به عنوان نقطه ای از فضای $R^{n\times n}$ در نظر می گیریم) را دریافت می کند .کارخود را در زمان چندجمله ای انجام می دهد.

پیدا کردن جواب بهینه: چندجمله ای

برای بررسی شدنی بودن جواب: چند جمله ای