امتحان میان‌ترم درس گسسته – ترم بهار ۱۳۹۳ ۱۰/۲/۱۳۹۳

لازم نیست اثبات‌ها را طولانی بنویسید، ولی اثبات‌هایتان کامل باشد.

1. (۱ نمره) به ازای هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد حقیقی مانند x ثابت کنید
2. (۳ نمره) فرض کنید G گراف ساده‌ای باشد که درجه همه راس‌هایش ۳ است. ثابت کنید تنها در صورتی می‌توان یال‌های G را به تعدادی K1,3 افراز کرد که G دوبخشی باشد. راهنمایی: وسط‌های K1,3ها را و بقیه راس‌ها را در گراف پوشانده شده در نظر بگیرید به عنوان دو بخش.
3. (۶ نمره) k رنگ در اختیار داریم و یک n ضلعی که طول همه ضلع‌هایش با یکدیگر متفاوتند. به چند طریق می‌توان ضلع‌های n ضلعی را با k رنگ رنگ کرد به طوری که دو ضلع مجاور هم‌رنگ نباشند. رابطه بازگشتی برای تعداد حالت‌ها به دست آورید. راهنمایی: ضلع‌ها را به ترتیب رنگ کنید. دو حالت در نظر بگیرید. حالت‌هایی که در آن‌ها ضلع ابتدایی و انتهایی رنگ متفاوت دارند و حالت‌هایی که در آن‌ها ضلع ابتدایی و انتهایی هم‌رنگند.
4. (۲ نمره) در یک مجموعه‌ای از انسان‌ها، هر فردی دقیقا یک دشمن و یک دوست دارد (دوستی و دشمنی دو طرفه است). ثابت کنید می‌توان افراد این گروه را به دو زیر مجموعه افراز کرد که در هر زیر مجموعه هیچ دو نفری با هم دوست یا دشمن نباشند. راهنمایی: یکی از روش‌های گراف که در کلاس مطرح شده را پی بگیرید.
5. (۲ نمره) اثبات کنید اگر p عدد اول باشد و t عددی حقیقی آنگاه باقیمانده (1+t)p بر p برابر است با باقیمانده (1+t) بر p. سپس با استقرا ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، باقیمانده np بر p برابر است با باقیمانده n بر p.
6. (۶ نمره) مقدار را به دست آورید. راهنمایی: متغیر k را تغییر دهید. راهنمای ۲: از بسط دو جمله‌ای (1+x)n استفاده کنید.
7. (۳ نمره) از نقطه (0, 0) شروع به حرکت می‌کنیم و در هر حرکت یا با بردار (1, 1) و یا با بردار (1, -1) حرکت می‌کنیم به صورتی که در نهایت در نقطه (n, 0) باشیم و هیچ وقت از خط y=0 پایین‌تر نرفته باشیم. برای مثال برای n=1 تنها به یک صورت و برای n=2 به دو صورت مختلف می‌توانیم حرکت کنیم. تعداد حالت‌های مختلف حرکت را به ازای دیگر n ها بیابید.

راهنمایی: جواب یکی از اعداد کاتالان است.



موفق باشید