



Кафедра молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества

# Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

7. Математическая модель оптических изображений. Получение и классификация цифровых изображений.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст. преп.

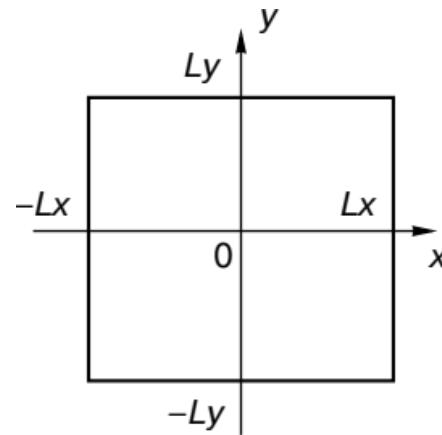
# Модели оптических изображений

# Модели оптических изображений

**Изображение** - ограниченная функция двух пространственных переменных, заданная на ограниченной прямоугольной области

$$0 < f(x, y) < \infty$$

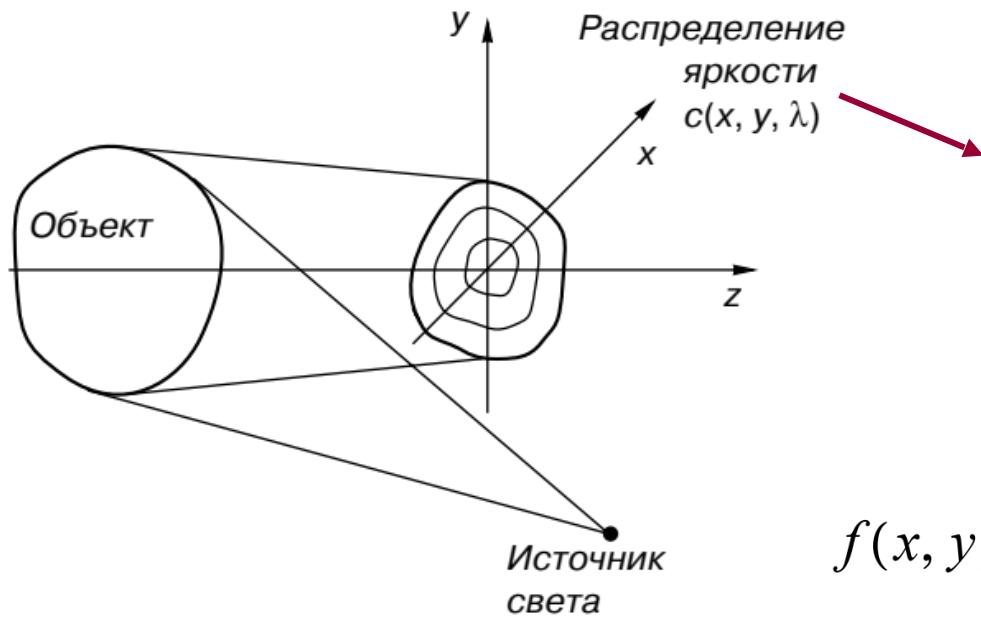
$$-L_x \leq x \leq L_x, \quad -L_y \leq y \leq L_y$$



*Физический смысл* функции  $f(x, y)$  определяется источником изображения (например, значение энергии электромагнитных колебаний)

# Модели оптических изображений

Получение изображений в оптической системе (глаз, фотокамера, ИК сенсор и т.д.)



распределение энергии  
источника излучения на  
расстоянии от объекта по  
пространству и длине волны

$$f(x, y) = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} c(x, y, \lambda) v(\lambda) d\lambda$$

**весовая функция**, описывающая спектральную  
чувствительность приемника излучения

# Модели оптических изображений

Пусть величина яркости монохромного изображения в произвольной точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\ell = f(x_0, y_0)$$

при этом  $L_{\min} \leq \ell \leq L_{\max}$

$[L_{\min}, L_{\max}]$  - диапазон яркостей

на практике диапазон яркостей (*динамический диапазон*) сдвигают по числовой оси, получая интервал

$$[0, L-1]$$



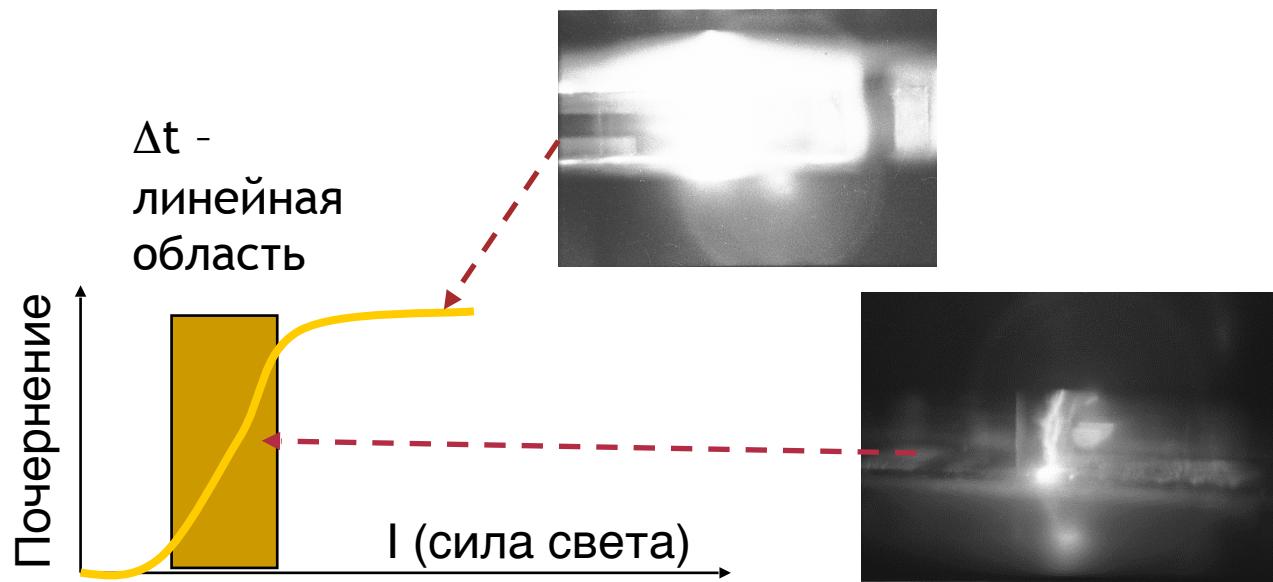
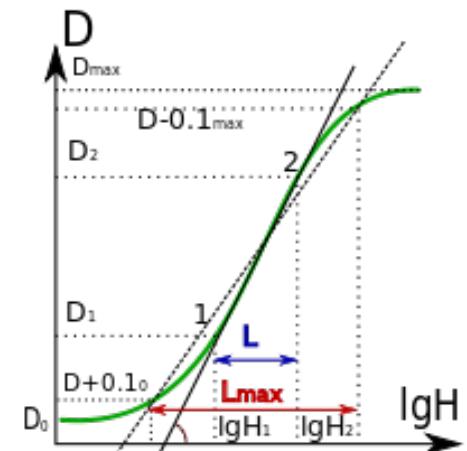
уровень черного

уровень белого

# Модели оптических изображений

## Характеристическая кривая

светочувствительного материала — график зависимости выходного сигнала фотографического процесса (плотность фотоплёнки, аналоговый электрический сигнал, значение пикселя в цифровом фотоаппарате) от экспозиции



# Модели оптических изображений

Оптические системы - двумерные системы, ставящие в соответствие входной функции  $f$  выходную функцию  $g$  в согласно некоторым правилу  $L$ :

$$g(x, y) = L[f(x, y)]$$

**Точечный источник** света описывается дельта-функцией Дирака:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = 0, y = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

- свойство нормировки:  $\iint_D \delta(x, y) dx dy = 1$
- фильтрующее свойство:  $\iint_D f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f(x, y)$

# Модели оптических изображений

**Импульсный отклик** оптической системы - реакция на дельта-функцию:

$$h(\xi, \eta) \equiv L[\delta(x, y)]$$

$$\text{где } \xi = x - u, \eta = y - v$$

Зная импульсный отклик, можно установить связь между изображениями во входной и выходной плоскостях линейной инвариантной оптической системы:

$$g(x, y) = \iint_D f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

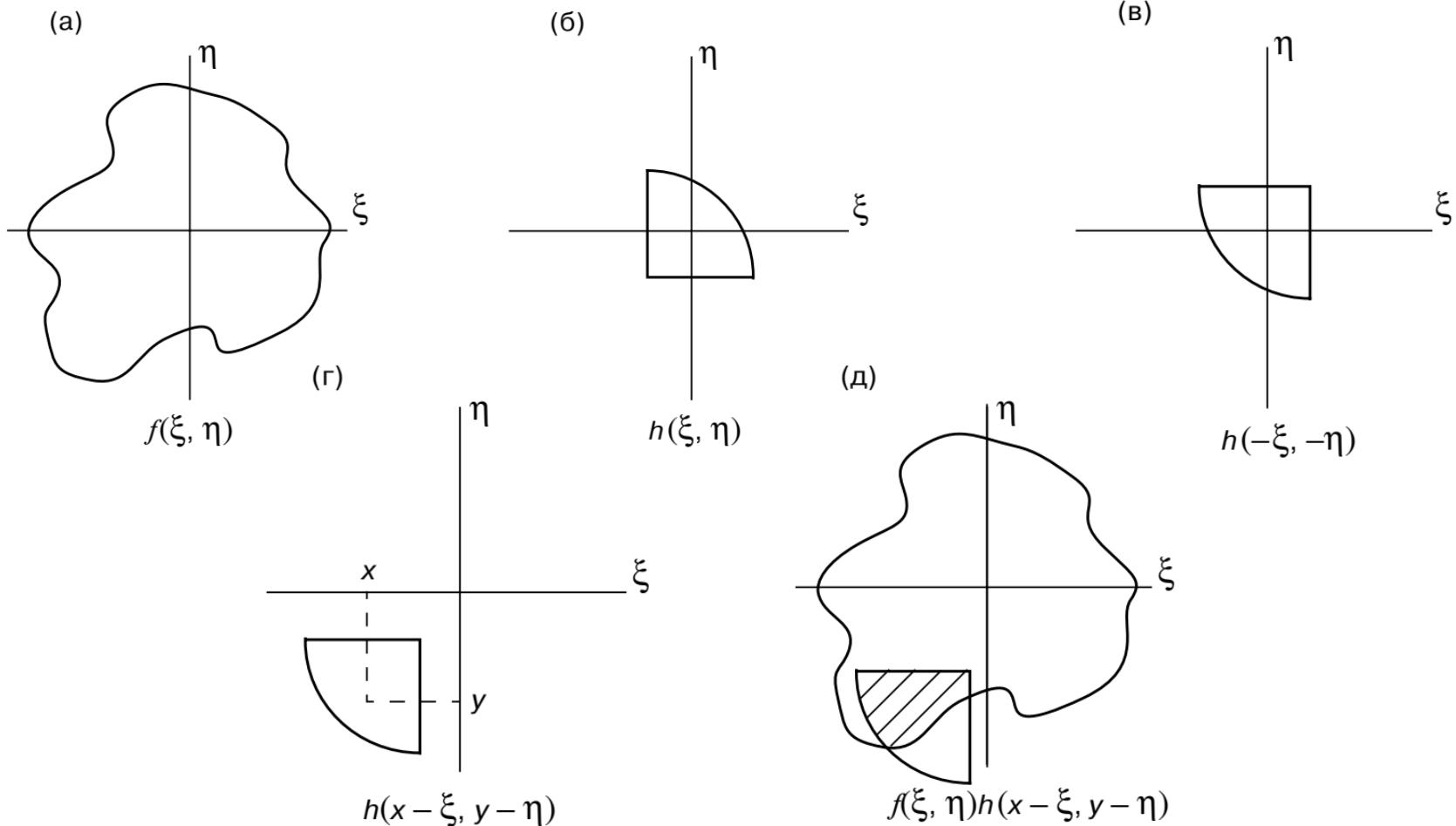


интеграл свертки

# Модели оптических изображений

пример процесса  
свертки:

$$g(x, y) = \iint_D f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$



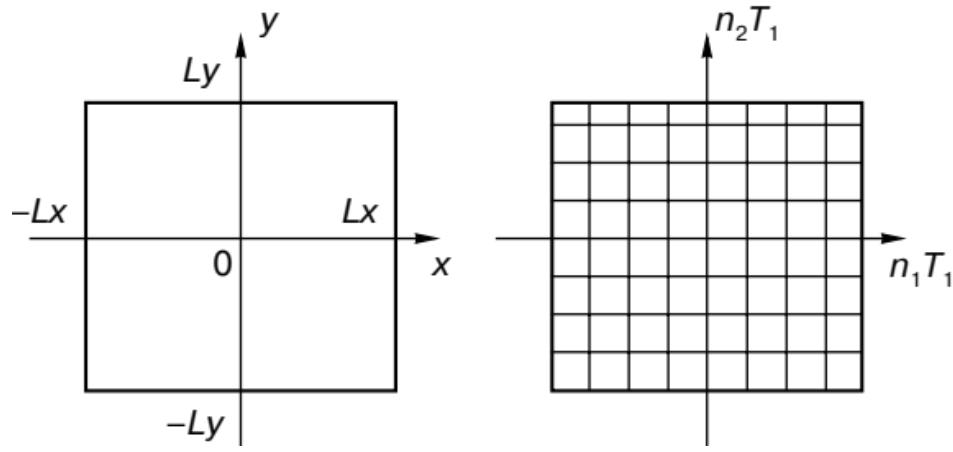
# Дискретизация и квантование изображений

# Дискретизация и квантование изображений

Переход от аналогового изображения к цифровому осуществляется путем:

- дискретизации по пространству
- квантования по уровню яркости

$$f(n_1 T_1, n_2 T_2) = f(x, y)|_{x=n_1 T_1, y=n_2 T_2} \equiv x[n_1, n_2]$$



дискретная последовательность  
размером  $N \times M$

$$N = \left\lceil \frac{2L_x}{T_1} \right\rceil$$

$$M = \left\lceil \frac{2L_y}{T_2} \right\rceil$$

# Дискретизация и квантование изображений

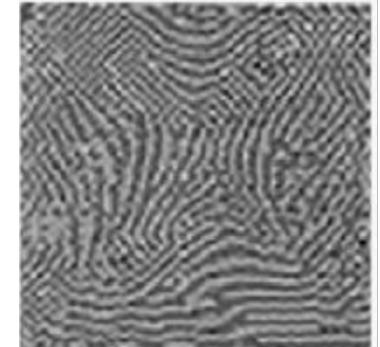
Переход от аналогового изображения к цифровому осуществляется путем:

- дискретизации по пространству
- квантования по уровню яркости

$$f(n_1 T_1, n_2 T_2) = f(x, y)|_{x=n_1 T_1, y=n_2 T_2} \equiv x[n_1, n_2]$$

Выбор оптимального шага дискретизации  $T$  диктуется пространственной шириной спектра изображения  $\Omega$

$$T \ll \frac{2\pi}{\Omega}$$



# Дискретизация и квантование изображений

Переход от аналогового изображения к цифровому осуществляется путем:

- дискретизации по пространству
- квантования по уровню яркости

Число дискретных уровней (градаций) яркости  $L$  обычно выбирают равным целочисленной степени двойки:

$$\text{динамический диапазон} \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} L = 2^k \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{разрядность}$$

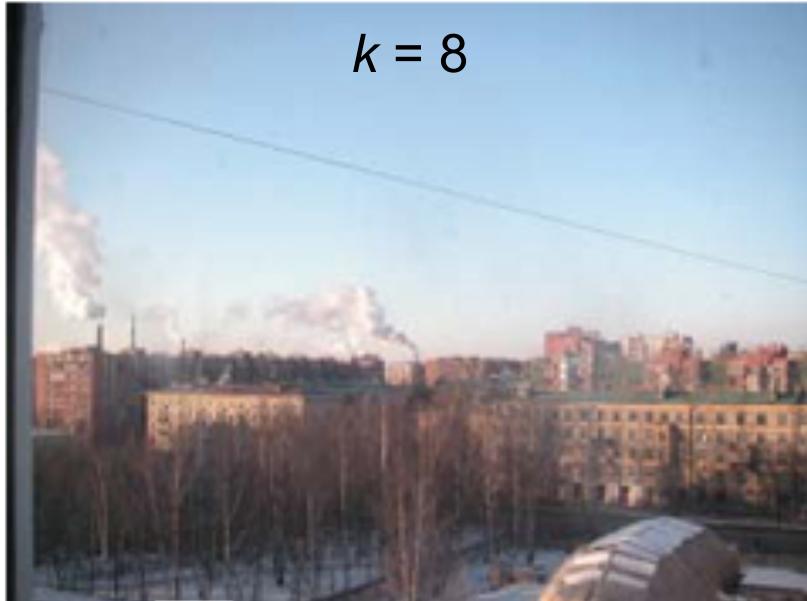
# Дискретизация и квантование изображений

динамический  
диапазон

$$L = 2^k$$

разрядность

$k = 8$



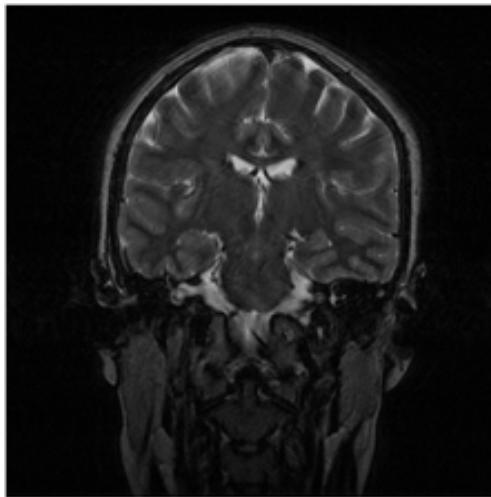
$k = 4$



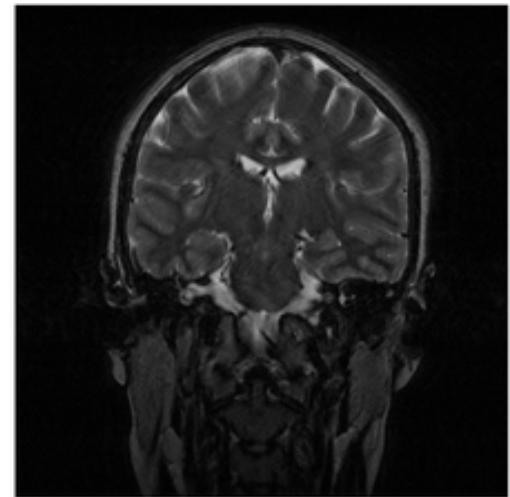
равномерное квантование

# Дискретизация и квантование изображений

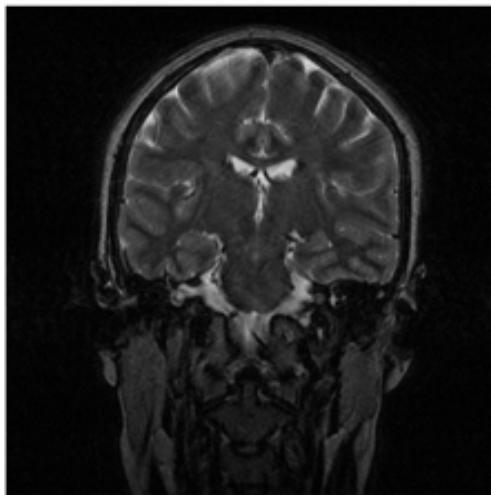
Недостаточность уровней квантования, приводит к снижению четкости изображения, появлению шумов и артефактов (*quantization error*)



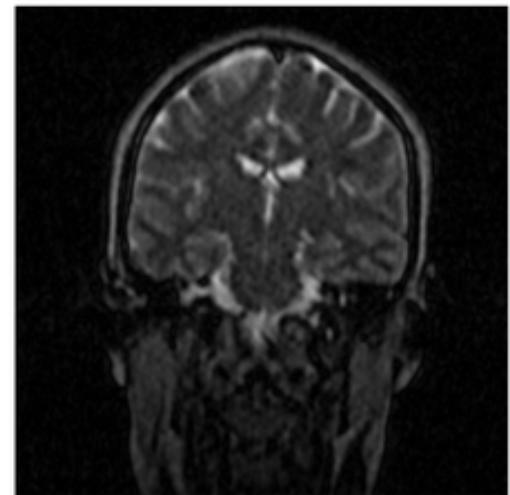
(a) Original image



(b) Quantized to 14 bits



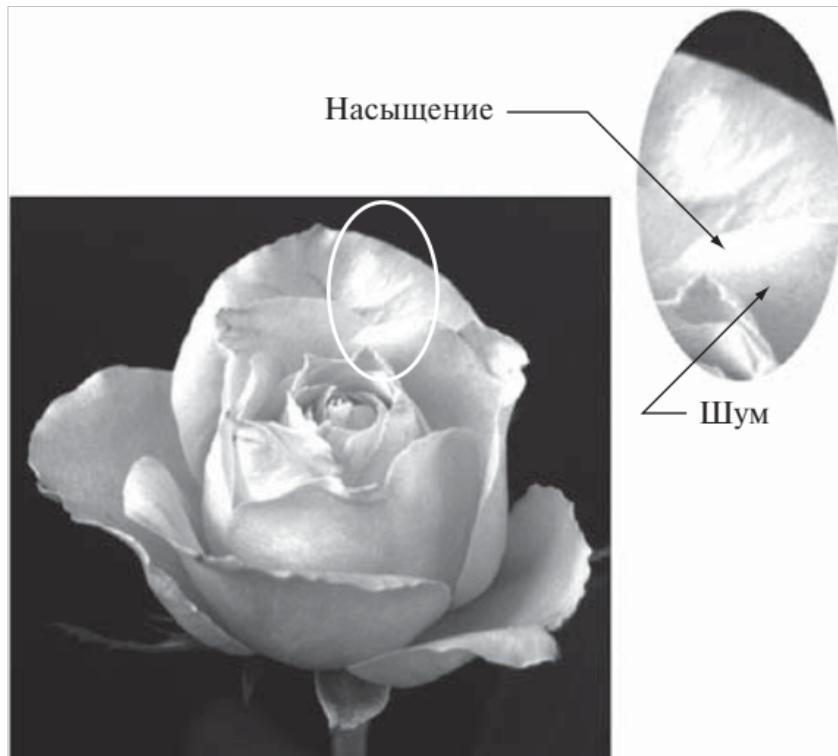
(c) Quantized to 12 bits



(d) Quantized to 10 bits

Rodrigo F. Cadiz et al  
*Quantization error in magnetic resonance imaging* 2014

# Дискретизация и квантование изображений



Как правило, верхний предел динамического диапазона  $L$  определяется *насыщением*, а нижний предел — *шумом*

Общее количество бит  $b$ , необходимое для хранения изображения размером  $M \times N$  определяется по формуле:

$$b = M \times N \times k$$

# Дискретизация и квантование изображений

Разрешение изображений:

- яркостное (полутоновое) разрешение определяется разрядностью  $k$
- пространственное разрешение определяется:

1) числом пар линий на единицу длины

2) числом точек (пикселей) на единицу длины

обычно, **dpi** - число точек на дюйм



1250 dpi, 3692×2812 пк



72 dpi, 213×162 пк

# Цифровые изображения

- цифровое (*\*растровое*) изображение можно представить как вид двумерного сигнала, несущего содержательную информацию

$$x[n_1, n_2], n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

- каждая комбинация индексов  $n_1$  и  $n_2$  соответствует точке на сетке (PICTure Elements = pixels)
- обычно рассматриваются регулярные сетки
- каждому значению  $x$  соответствует определенный *атрибут* пикселя



# Цифровые изображения

**Атрибутом** пикселя может служить:

- в черно-белом изображении - скалярная величина, соответствующая интенсивности от минимальной (черный) до максимальной (белый)
- в цветном изображении - вектор в *пространстве цветов* (RGB, HSV - тон/насыщенность/яркость, YUV и пр.).  
При этом каждый из компонентов независим и может рассматриваться отдельно как скалярный атрибут:



=



+



+



# Цифровые изображения

воспринимаемая глазом яркость не является простой функцией истинной яркости



[ [	66	156	43	106	195	209	136	155	193	97]
[229	192	146	239	231	118	103	66	142	149]	
[112	187	229	177	143	114	117	237	22	103]	
[197	226	62	125	173	99	118	47	41	43]	
[ 64	156	236	54	12	231	144	242	246	105]	
[ 25	152	164	130	184	155	178	230	87	210]	
[152	226	5	56	135	96	205	154	96	11]	
[ 19	209	138	12	153	147	162	124	198	59]	
[134	184	133	0	80	128	18	72	131	58]	
[ 65	137	212	87	35	146	135	97	33	89]]	

# Цифровые изображения

Воспринимаемая глазом яркость не является простой функцией истинной яркости:

- *эффект одновременного контраста*

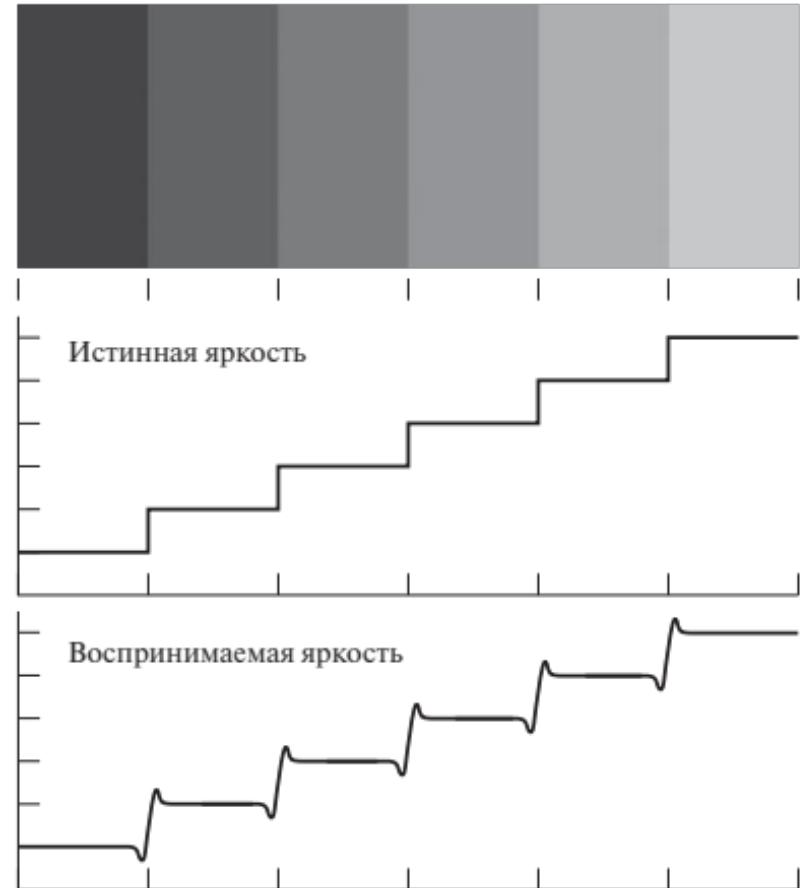


*все центральные квадраты имеют одинаковую яркость, однако зрительно воспринимаются тем более темными, чем светлее фон*

# Цифровые изображения

Воспринимаемая глазом яркость не является простой функцией истинной яркости:

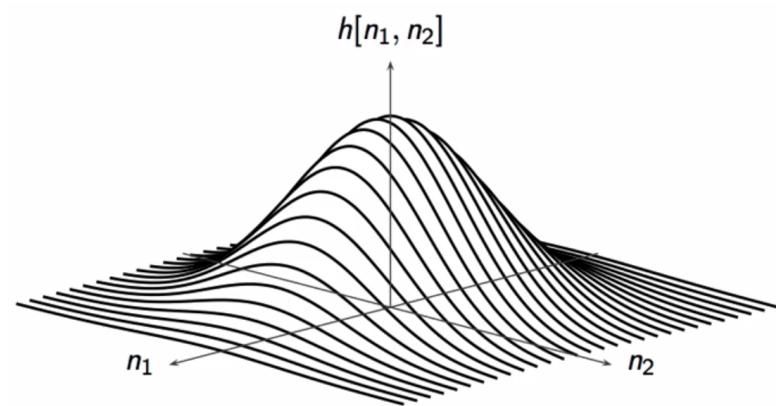
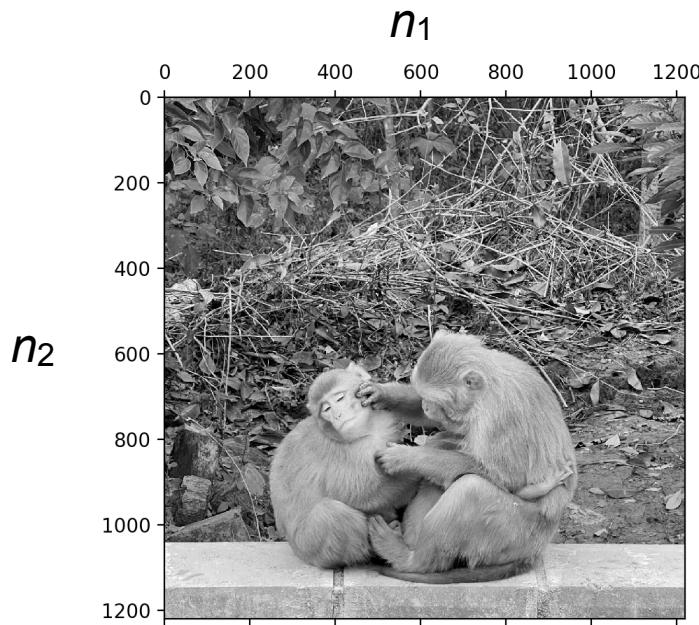
- вблизи границ соседних областей с отличающимися, но постоянными яркостями зрение человека склонно «подчеркивать» яркостные перепады (“полосы Маха”)



# Двумерный сигнал в дискретном пространстве

$x[n_1, n_2], x \in R, n_1, n_2 \in Z$

- представление в декартовых координатах



- представление в виде изображения

при достаточной плотности пикселей  
человеческий глаз производит  
пространственную интерполяцию  
сигнала

# Двумерный сигнал в дискретном пространстве

- дискретный аналог точечного источника - цифровой единичный импульс:

$$U_0(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{при других } n_1 \text{ и } n_2 \end{cases}$$

- $h(n_1, n_2)$  - импульсный отклик оптической системы (линейной инвариантной) на функцию  $u_0(n_1, n_2)$
- импульсный отклик позволяет записать связь между входной и выходной двумерными последовательностями

$$g(n_1, n_2) = \sum_{m_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{m_2 = -\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

# Получение цифровых изображений

# Получение цифровых изображений

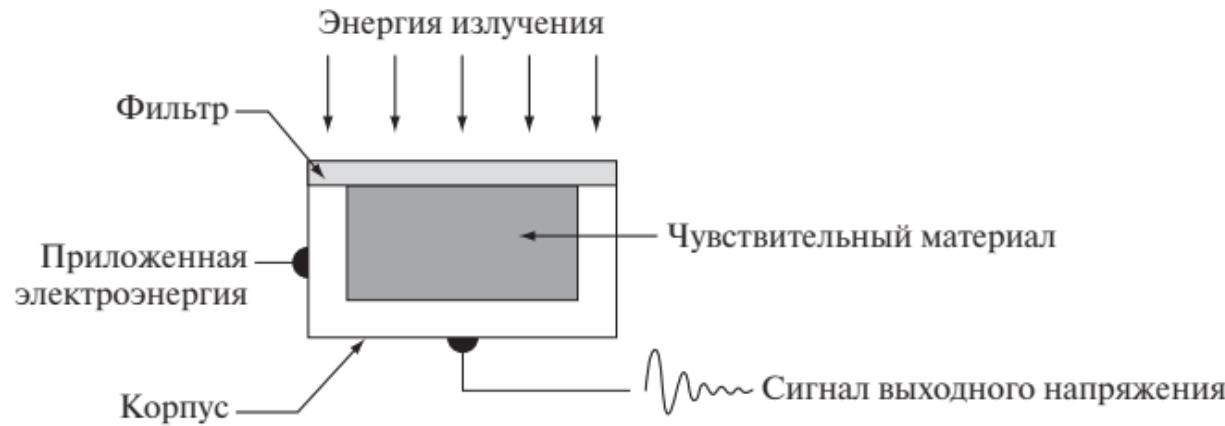


**1921 г** - первое цифровое изображение, переданное по трансокеанскому подводному кабелю между Лондоном и Нью-Йорком посредством системы “Барплейн”

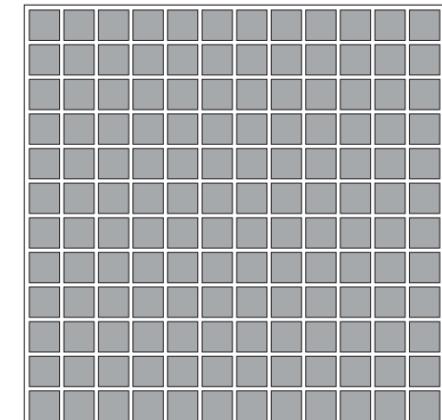
**начало 1960-х гг** - появление первых компьютеров с мощностью, достаточной для выполнения задач цифровой обработки изображений (исследования космоса, медицина)

# Получение цифровых изображений

## Сенсор оптического излучения



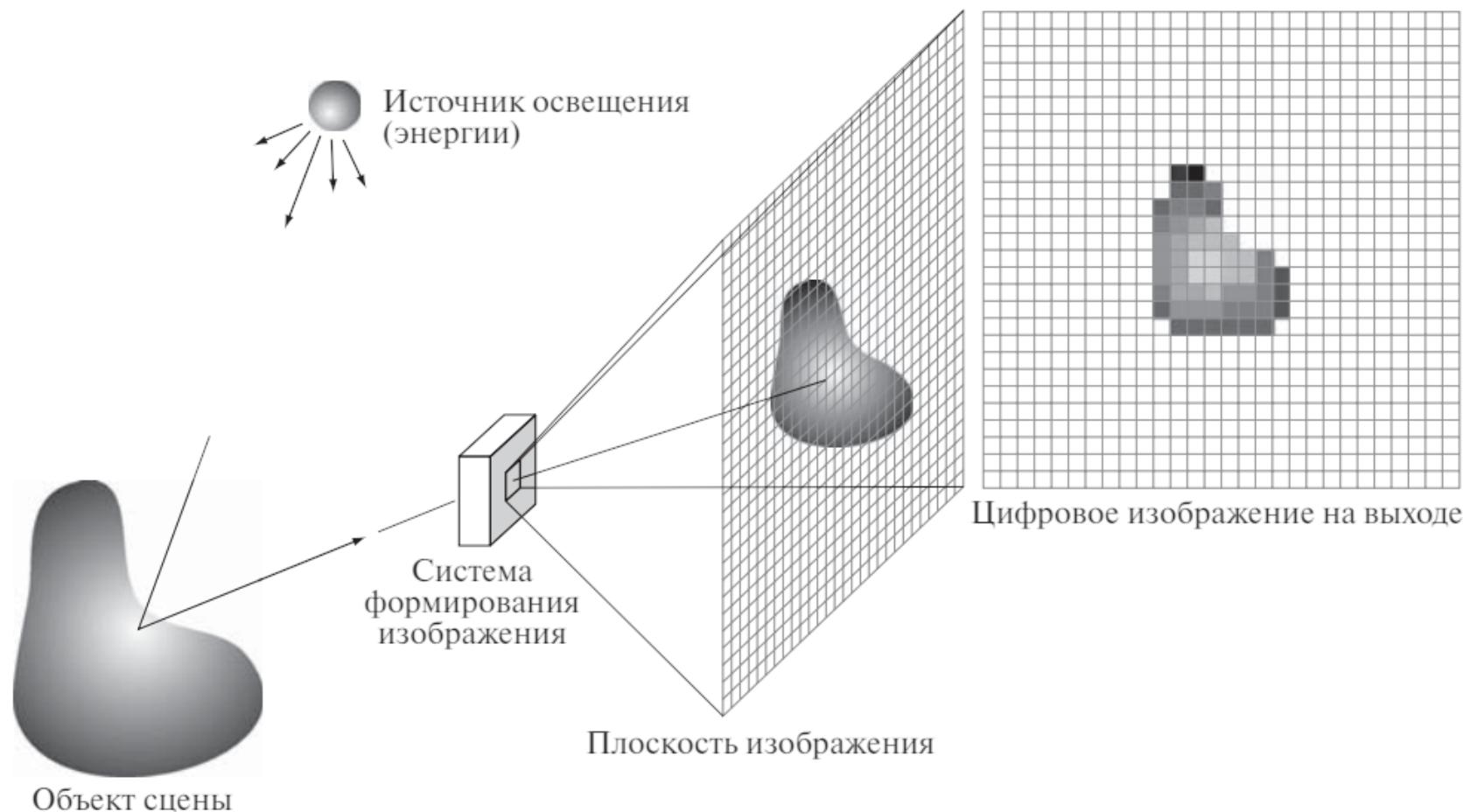
**линейка сенсоров**



**матрица сенсоров**

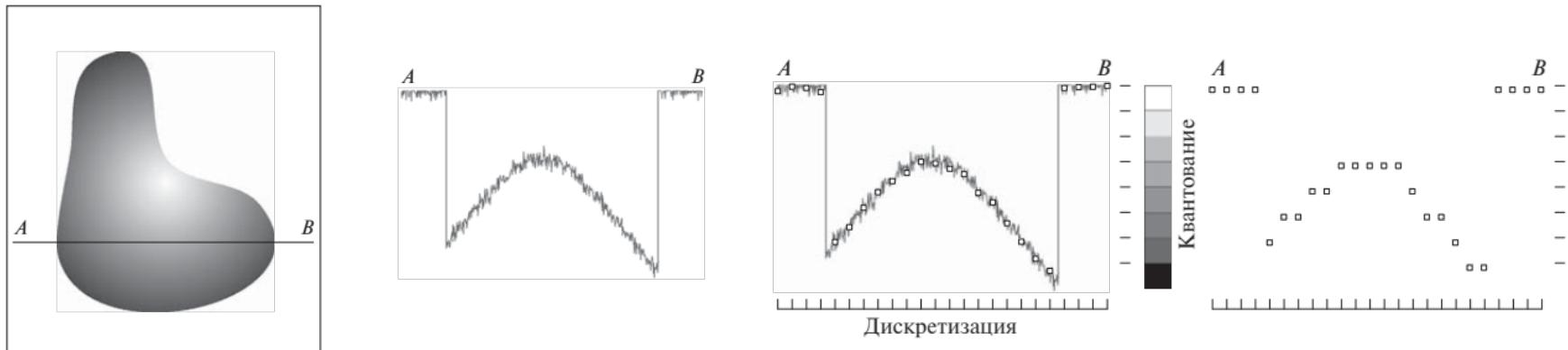
# Получение цифровых изображений

## Процесс регистрации цифрового изображения

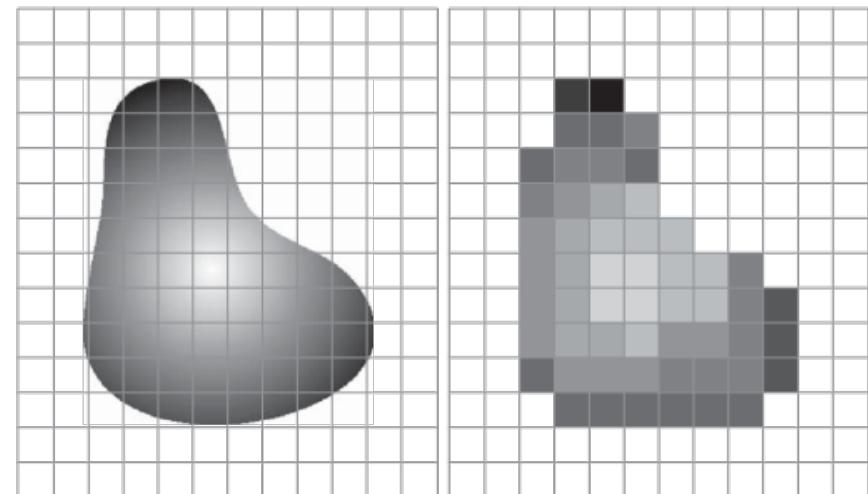


# Получение цифровых изображений

*цифровое представление строки изображения*



*дискретизация и квантование  
проекции изображения на матрицу  
чувствительных элементов*



# Получение цифровых изображений

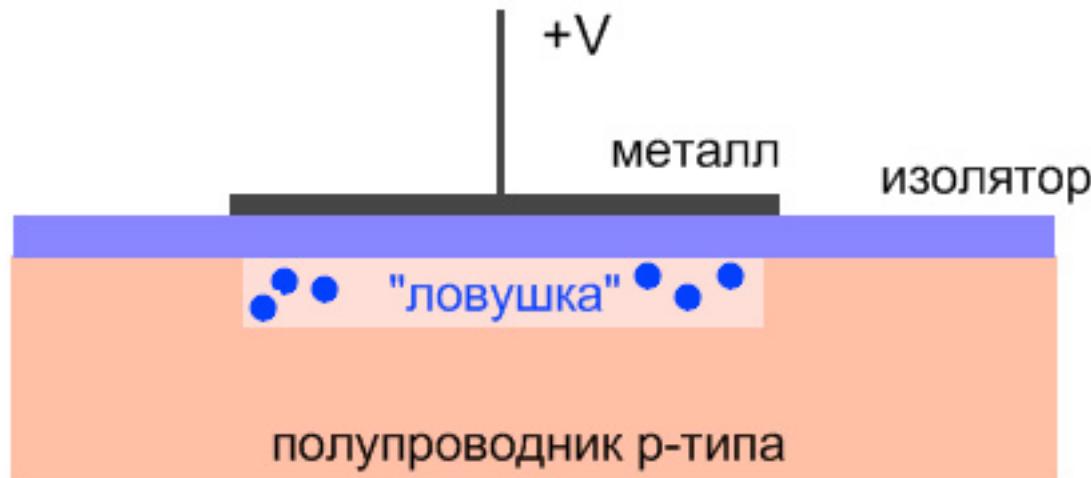
Системы формирования цифрового изображения:

- **Прибор с зарядовой связью (ПЗС, CCD – charge-coupled device)** — устройство, накапливающее электронный заряд при попадании на него светового потока.  
Уровень заряда зависит от интенсивности и продолжительности освещения.
- Первый ПЗС изобретен в 1969 году Уиллардом Бойлом (Willard Boyle) и Джорджем Смитом (George E. Smith) в Лабораториях Белла (AT&T Bell Labs)
- В 2009 г создатели получили Нобелевскую премию по физике\*



# Получение цифровых изображений

В основе ПЗС – МОП-структура (металл-оксид-полупроводник) транзисторов с изолированным затвором

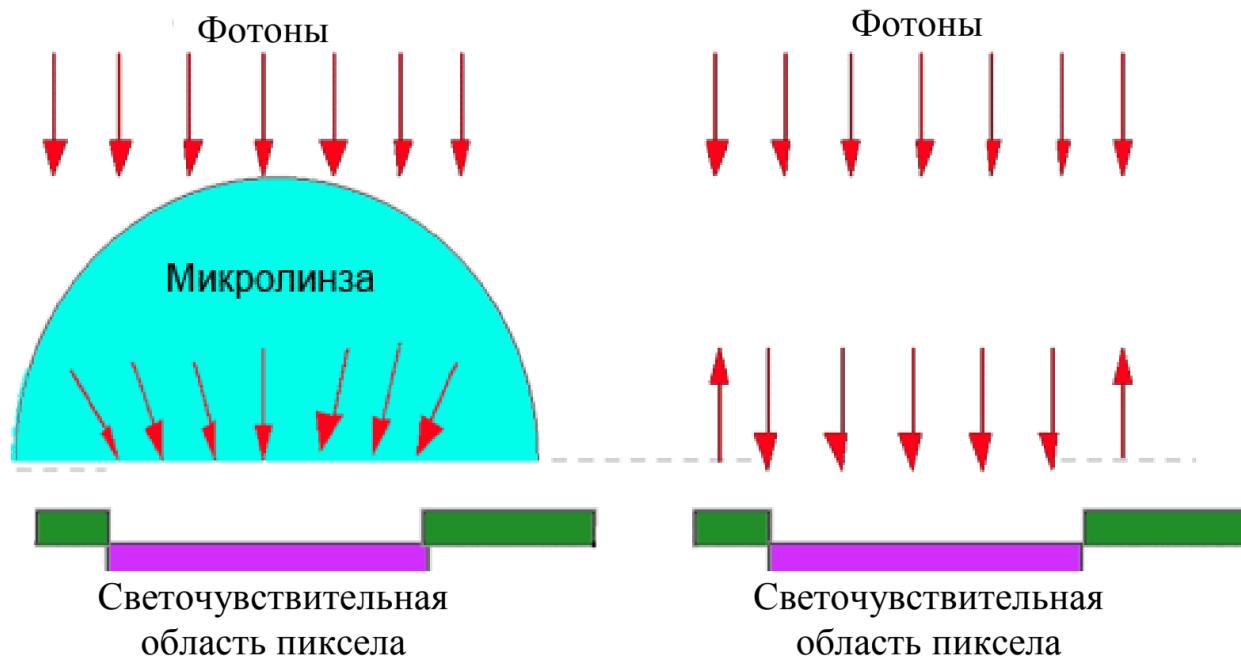


*Схема устройства простейшей МОП-структуры*

*elementy.ru*

# Получение цифровых изображений

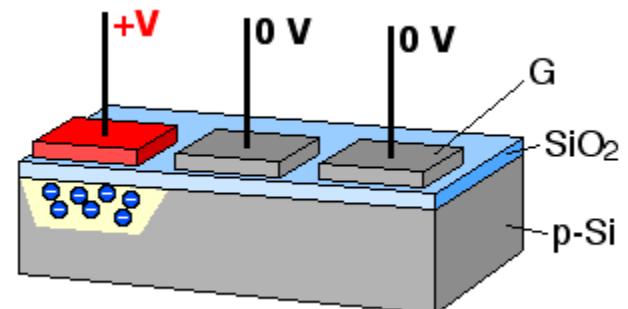
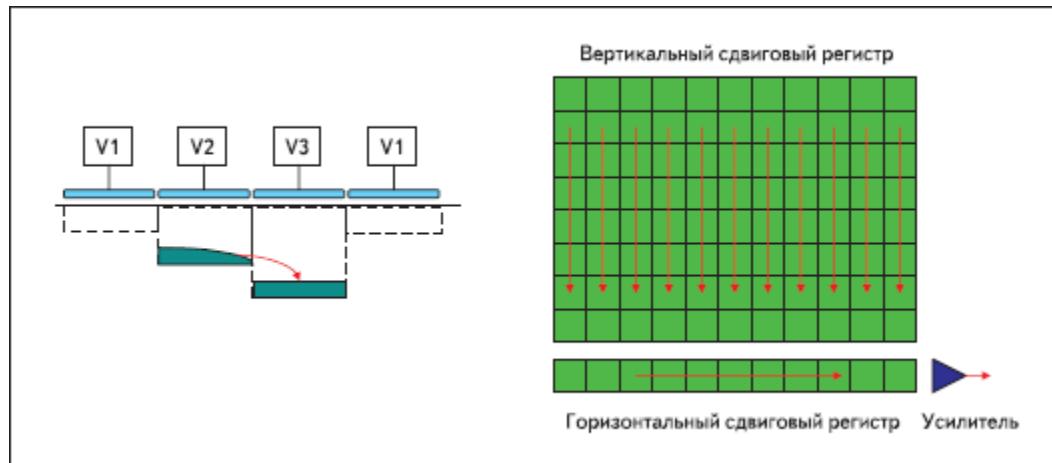
Не вся поверхность пикселя является светочувствительной, поэтому над ним часто устанавливается микролинза для увеличения количества накапливаемых фотонов



Размер 1 пикселя составляет 3-8 мкм

# Получение цифровых изображений

Отдельные элементы в ПЗС расположены на единой полупроводниковой подложке столь близко друг от друга, что потенциальные ямы, образуемые под соседними электродами, сливаются, и между ними возможна зарядовая связь.



Особенность ПЗС-матриц — наличие электронного затвора, с помощью которого можно влиять на время экспозиции.

# Получение цифровых изображений



0,01 Мпикс\*



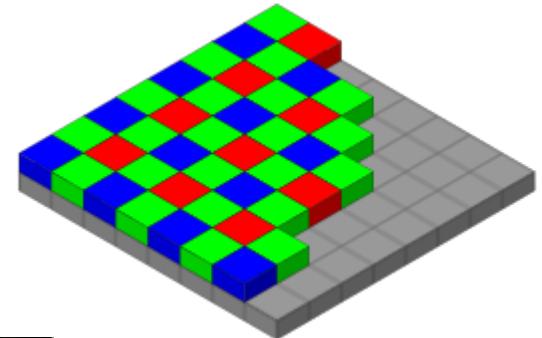
Первая в мире цифровая камера и её создатель — инженер Kodak Стив Сассон (1975)

\*Термин “мегапиксель” введен в 1986 г

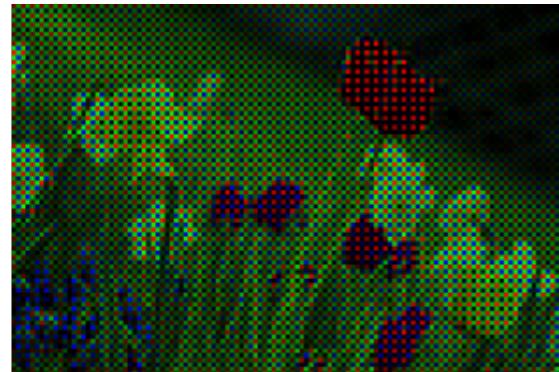
# Получение цифровых изображений

**Фильтр Байера** — наиболее распространенный тип расположения двумерного массива цветных фильтров, которыми накрыты фотодиоды фотоматриц.

Состоит из 25 % красных элементов, 25 % синих и 50 % зелёных элементов (Bryce Bayer, Eastman Kodak 1976 г.).



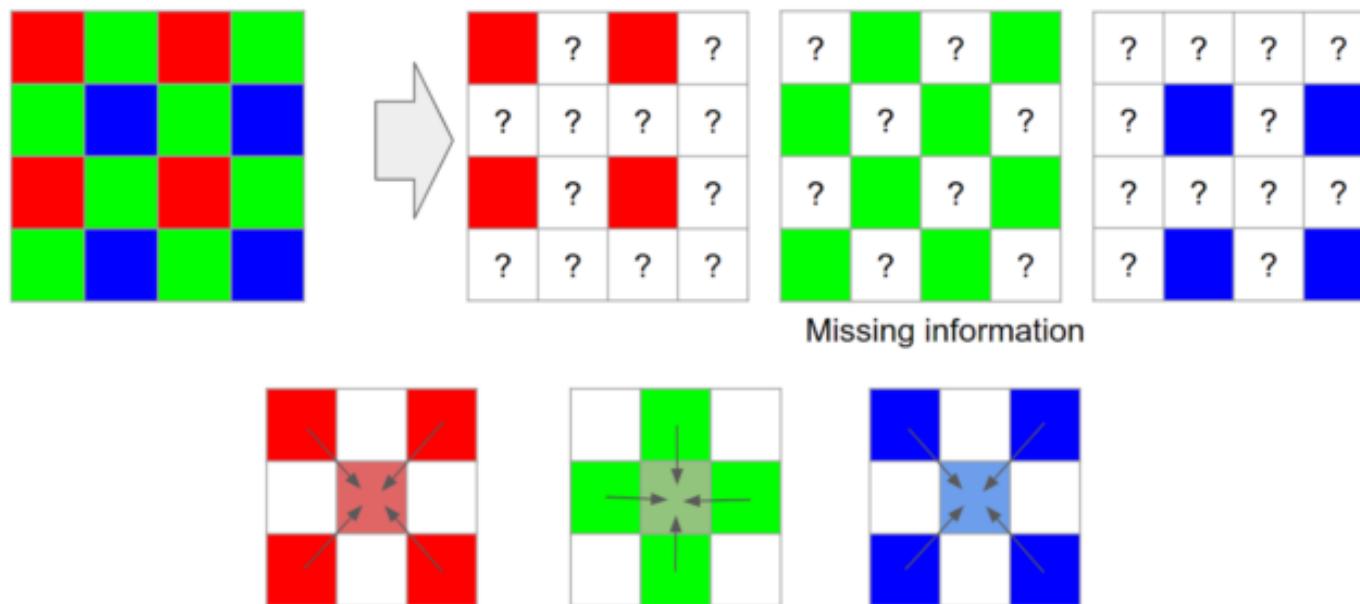
исходное изображение



вид через фильтр Байера

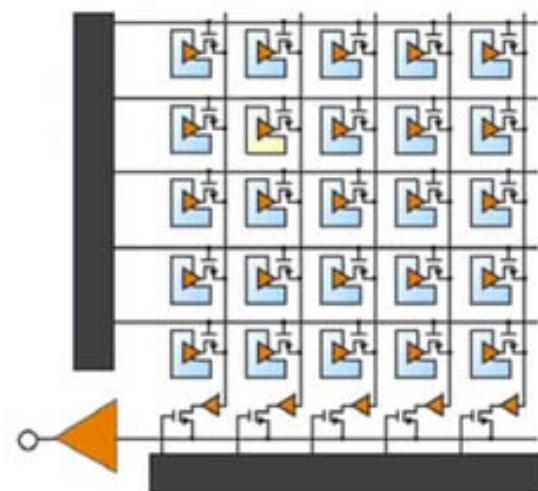
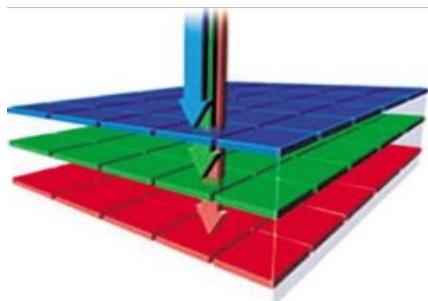
# Получение цифровых изображений

**Дебайеризация** — восстановление полноценного цветного изображения путем восстановления отсутствующих цветов из мозаичного шаблона



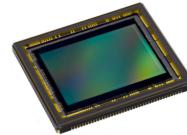
# Получение цифровых изображений

- **КМОП-матрицы** (комплементарная структура металлоксид-полупроводник; англ. **CMOS**, complementary metal-oxide-semiconductor) — светочувствительные матрицы, построенные на основе КМОП технологии, в которых преобразование заряда выполняется непосредственно в каждом пикселе.



# Получение цифровых изображений

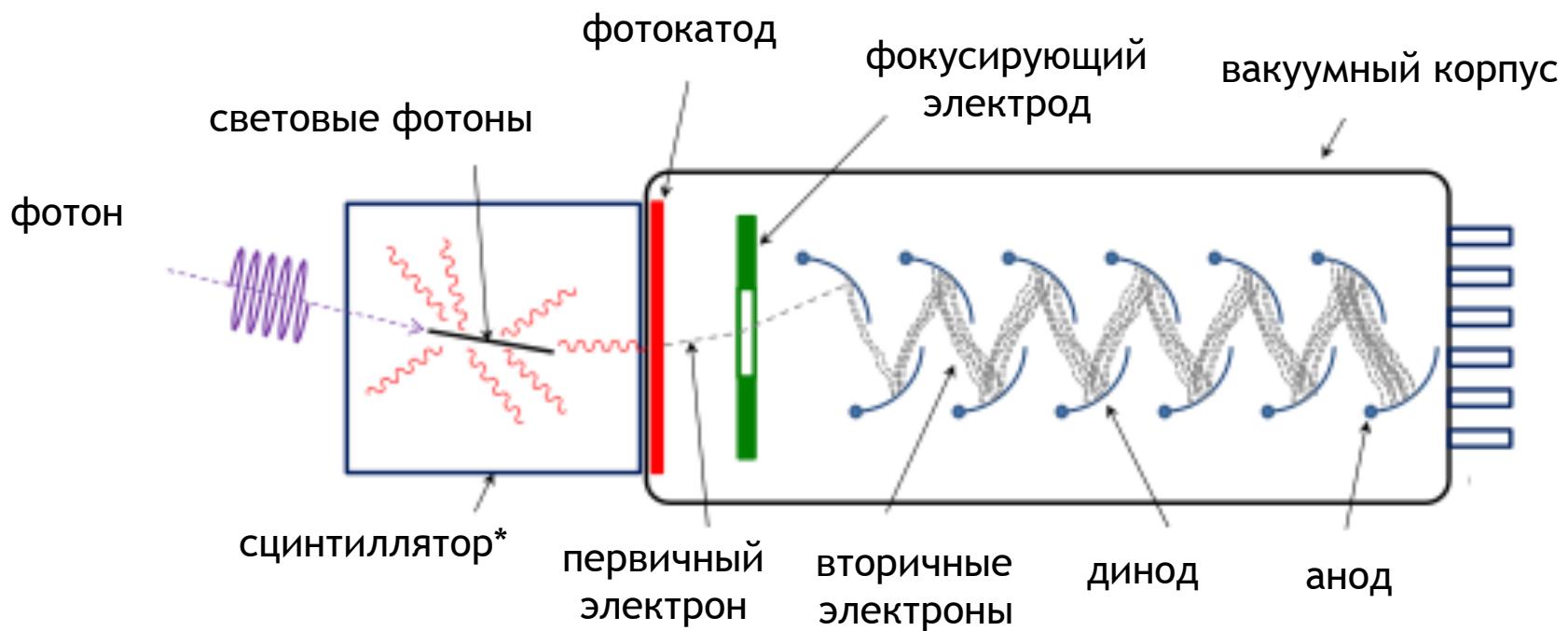
## КМОП-технология



- + ▪ низкое энергопотребление
- + ▪ цветовые данные по каждому пикслю
- + ▪ возможность объединения на одном кристалле аналоговой, цифровой и обрабатывающей части
- + ▪ можно выполнять считывание выбранных групп пикселей (windowing readout)
- + ▪ дешевизна производства в сравнении с ПЗС-матрицами
  
- ▪ фотодиод ячейки матрицы имеет сравнительно малый размер
- ▪ наличие большого объёма электронных элементов приводит к дополнительному нагреву устройства в процессе считывания и возрастанию теплового шума
- ▪ своя характеристическая кривая у каждого пикселя матрицы
- ▪ меньший, по сравнению с ПЗС, динамический диапазон

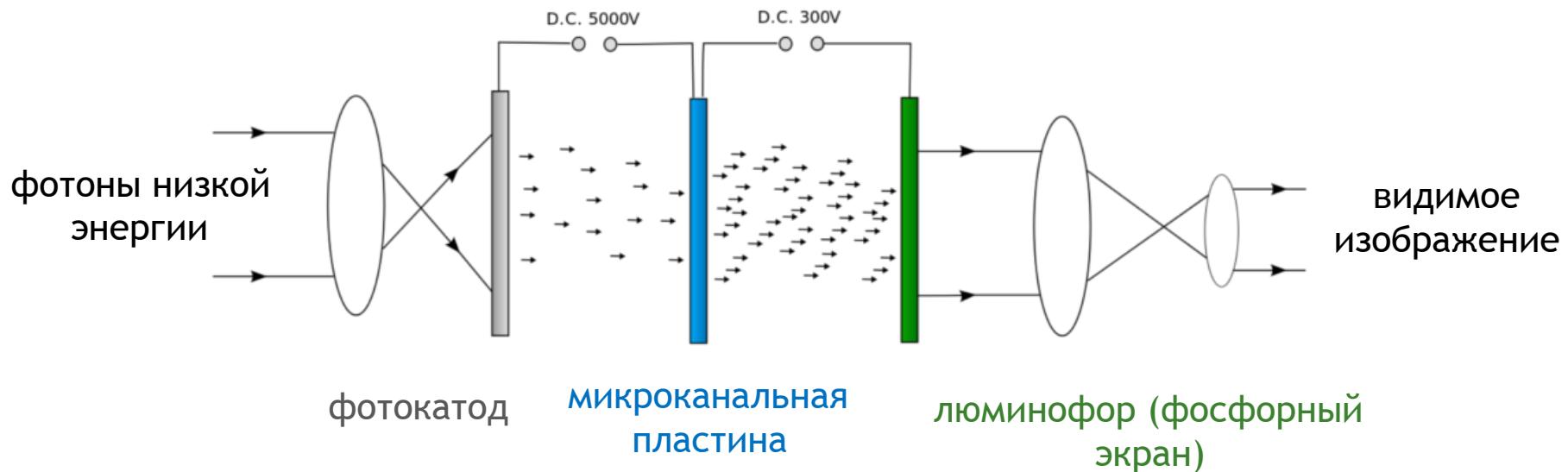
# Получение цифровых изображений

- **Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ)** — электровакуумный прибор, в котором поток электронов, излучаемый фотокатодом под действием оптического излучения, усиливается в умножительной системе в результате *вторичной электронной эмиссии*



# Получение цифровых изображений

- **Электронно-оптический преобразователь (ЭОП) —** вакуумный фотоэлектронный прибор, применяемый
  - для преобразования ИК, УФ, рентгеновского излучения в видимое изображение
  - для усиления яркости видимого изображения



# Получение цифровых изображений

**ICCD камера** (Intensified Charge-Coupled Device) позволяет достичь сверхкороткого времени экспозиции.

Фотокатод ЭОП захватывает падающие光子 и генерирует усиленные электронные заряды. При переключении напряжения на отрицательную полярность электроны из фотокатода ускоряются через зазор к микроканальной пластинке, где они усиливаются и регистрируются.

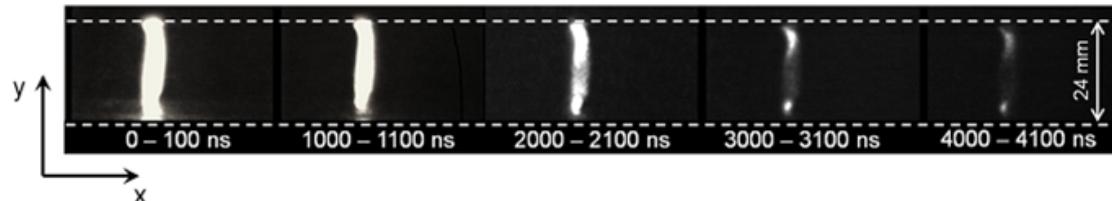
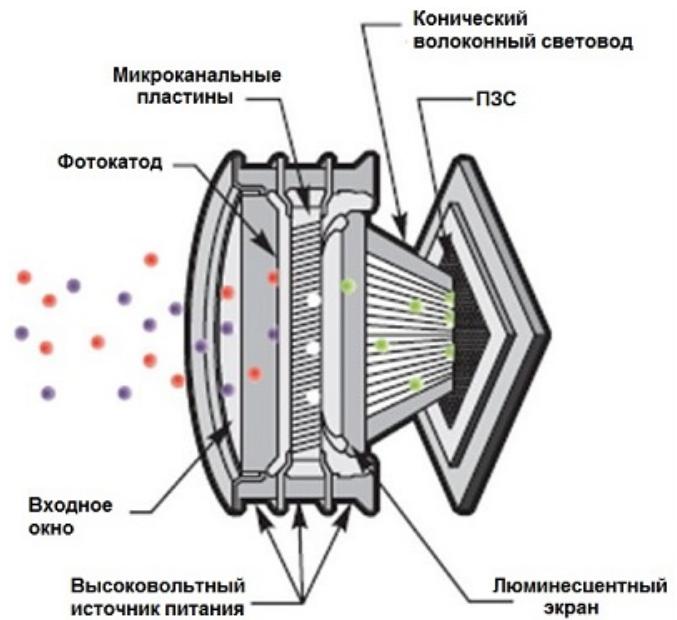


FIG. 2. Five-frame ICCD image of the plasma column up to 4  $\mu$ s after discharge initiation,  $p = 16.5$  kPa.

# Преобразование изображений

# Аффинное преобразование

**Аффинное преобразование** представляет собой отображение пространства  $R^N$  в  $R^N$ , при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся — в пересекающиеся, скрещивающиеся — в скрещивающиеся.

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} - \mathbf{d} \quad \xrightarrow{\text{вектор смещения}}$$



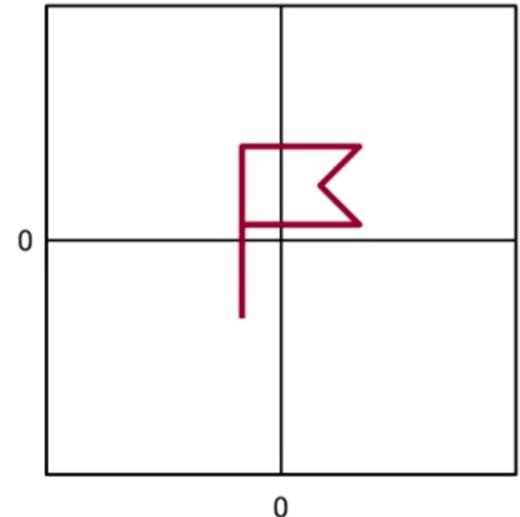
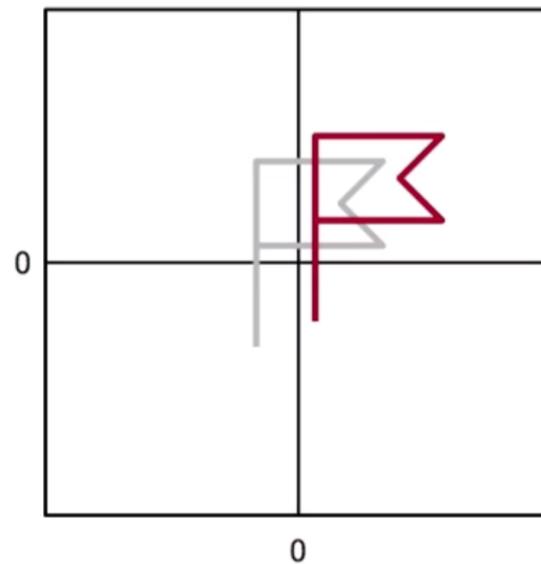
матрица преобразования

# Аффинное преобразование

## ➤ Смещение

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

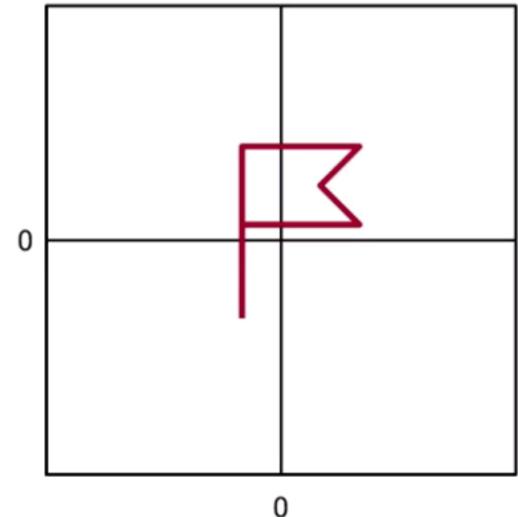


# Аффинное преобразование

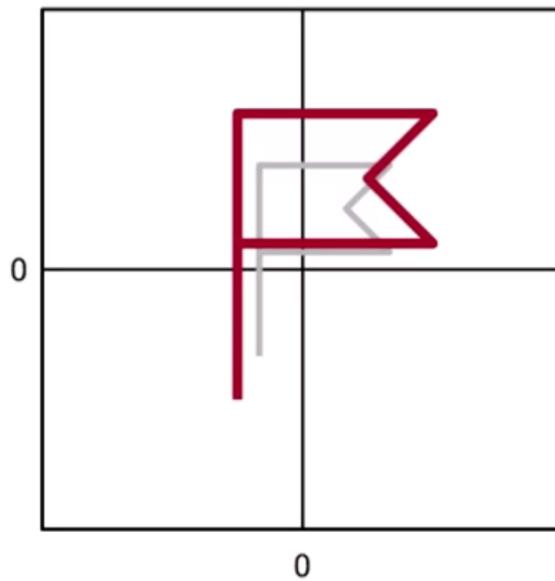
## ➤ Изменение масштаба

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 0$$



при  $a_1=a_2$  сохраняются пропорции изображения

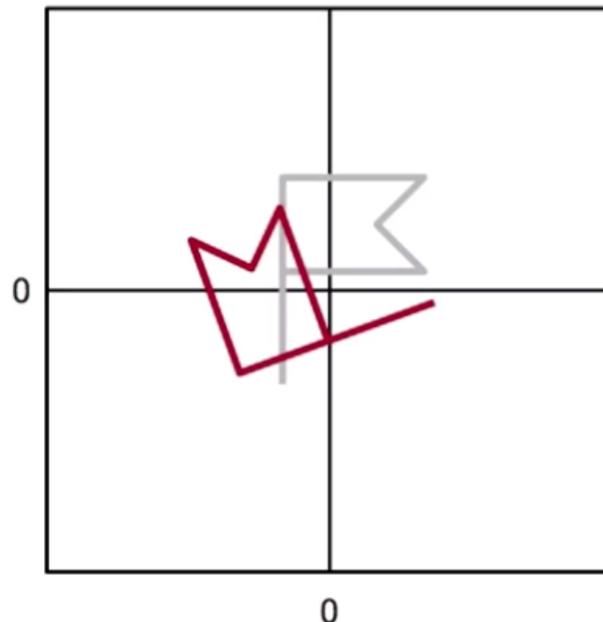


# Аффинное преобразование

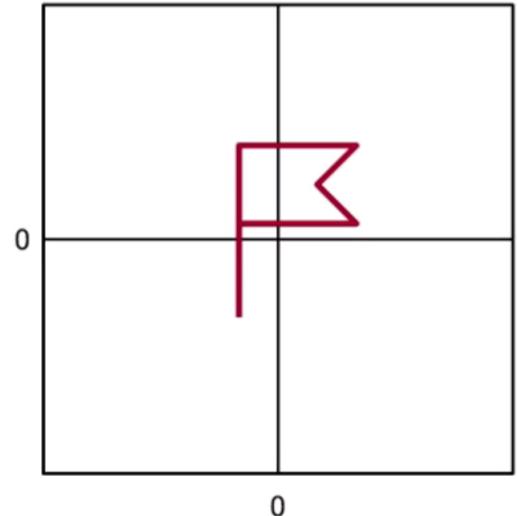
## ➤ Вращение

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 0$$



$$\theta > \pi/2$$



# Аффинное преобразование

## ➤ Транспонирование

- горизонтальное

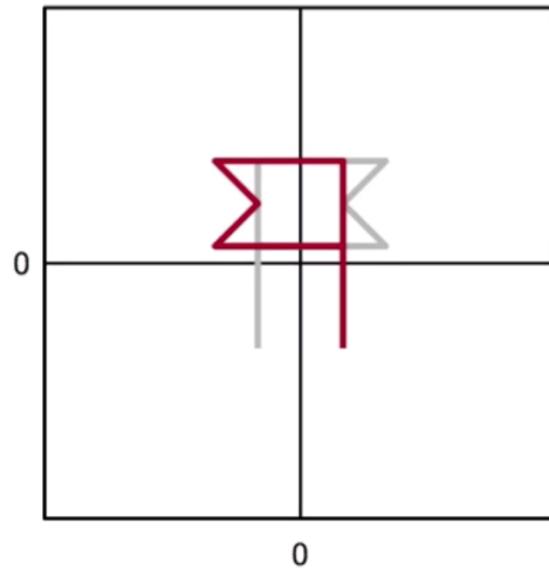
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 0$$

- вертикальное

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 0$$



# Аффинное преобразование

## ➤ Сдвиг

- горизонтальный

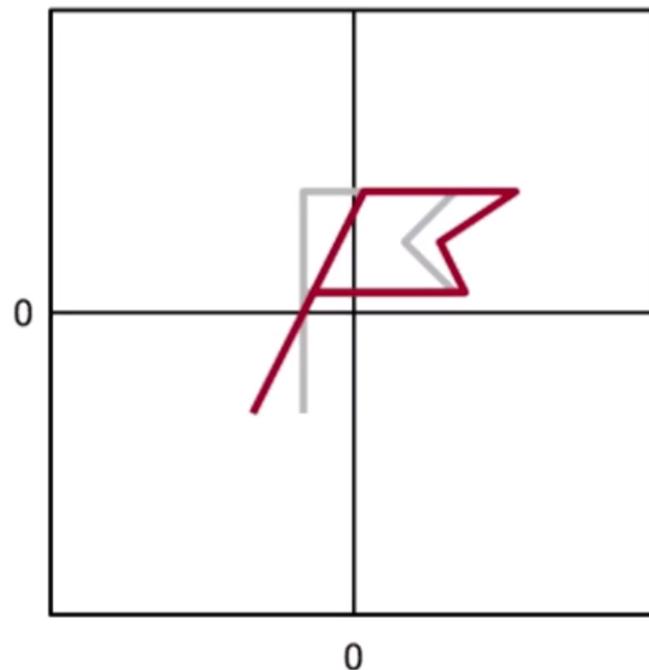
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 0$$

- вертикальный

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

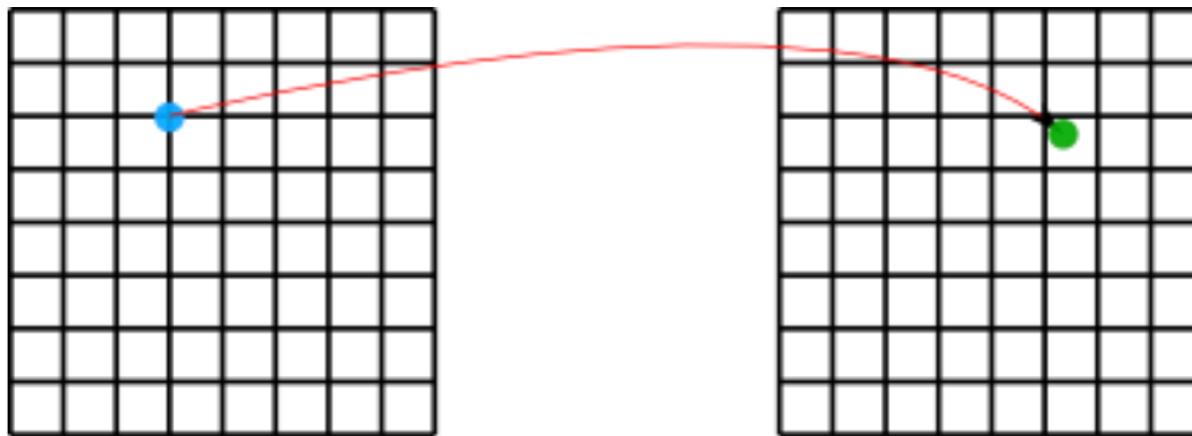
$$\mathbf{d} = 0$$



# Аффинное преобразование

В дискретном пространстве

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} - \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{Z}^2$$



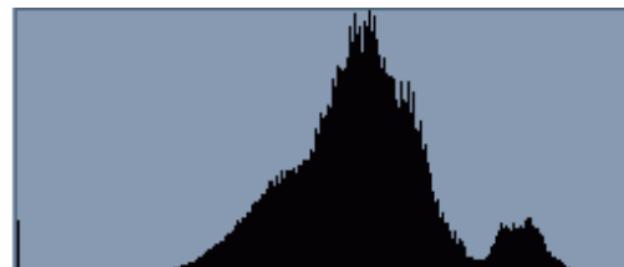
# Преобразование гистограмм

**Гистограмма изображения** - график статистического распределения элементов цифрового изображения с различной яркостью, в котором по горизонтальной оси представлена яркость, а по вертикали — относительное число пикселей с конкретным значением яркости.



0

255

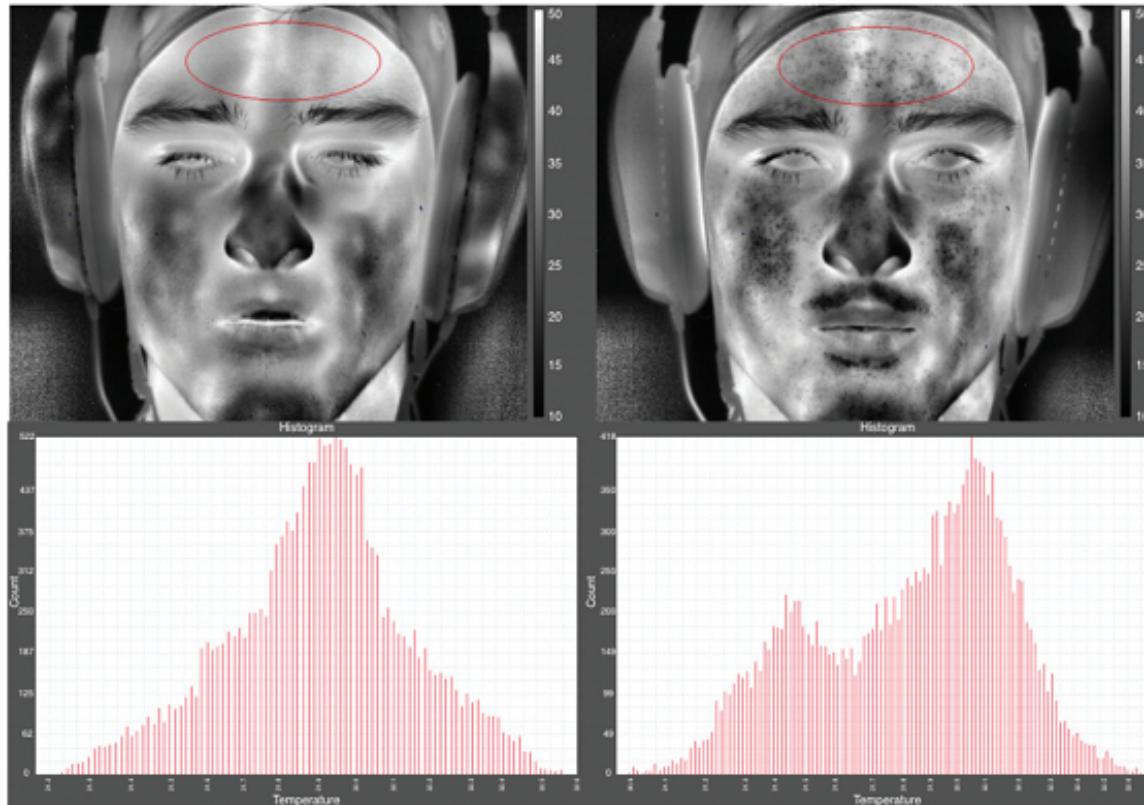


0

255

# Преобразование гистограмм

Гистограмма научного изображения может также подвергаться анализу.



*Koroteeva and Bashkatov. Quantitative Infrared Thermography Journal. 2021*

# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

1. линейное растяжение гистограммы (stretch):

уровням исходного изображения, лежащим в интервале  $[f_{\min}, f_{\max}]$ , присваиваются новые значения с тем, чтобы охватить весь возможный интервал изменения яркости (например,  $[0, 255]$ ).

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

Формула преобразования:

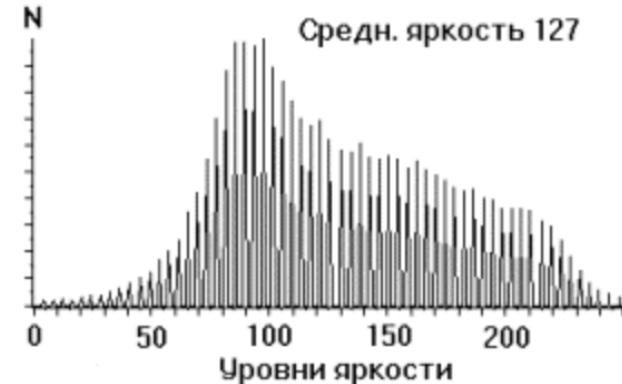
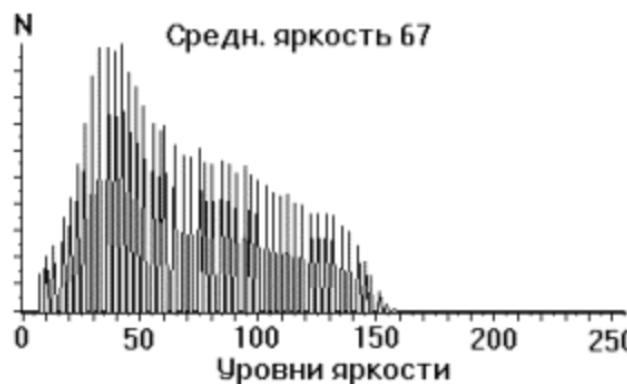
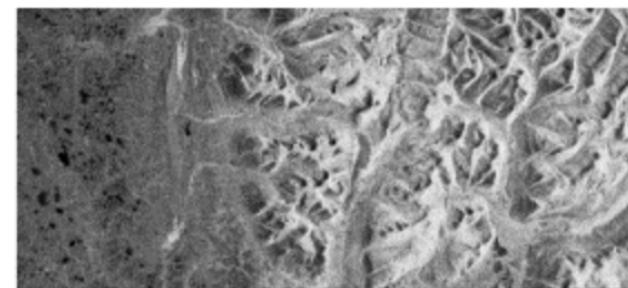
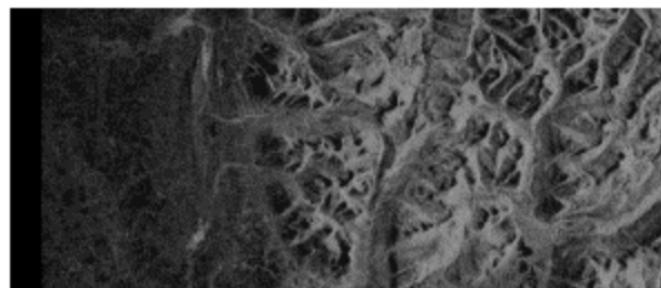
$$g_i = a + b f_i,$$

где  $f_i$  - старое значение яркости  $i$ -го пикселя,  
 $g_i$  - новое значение,  $a$ ,  $b$  - коэффициенты.

# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

1. линейное растяжение гистограммы (stretch):



$$f_{\min} = 6, f_{\max} = 158$$

$$g_{\min} = 0, g_{\max} = 255$$

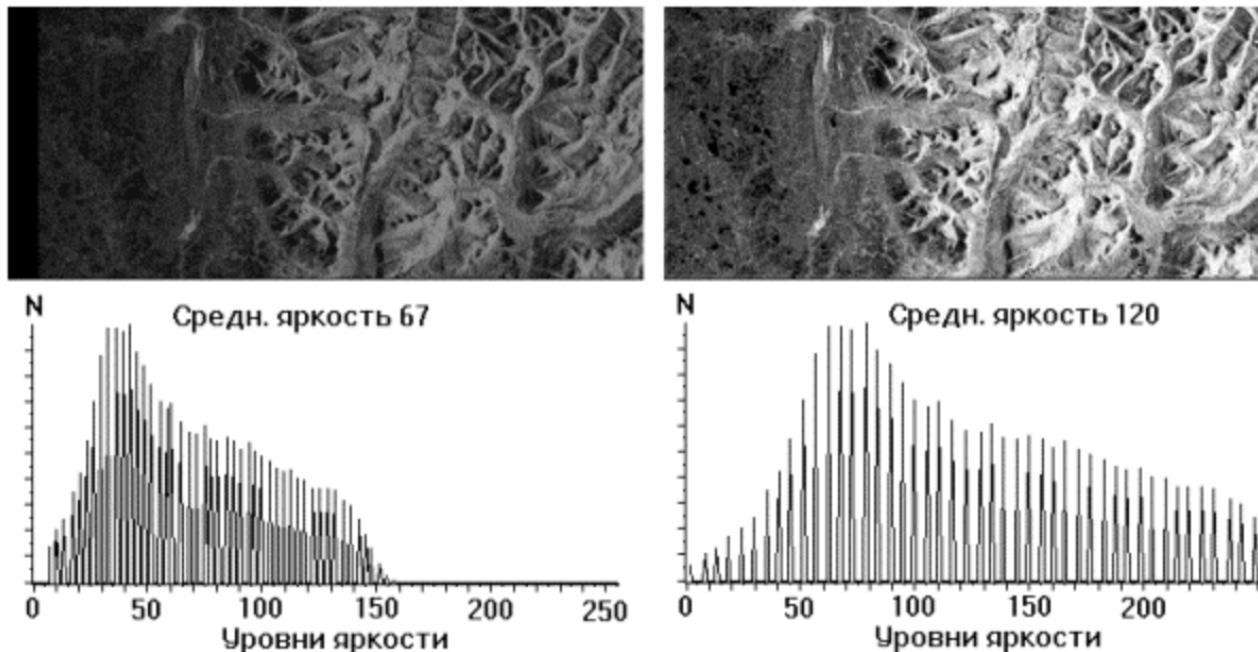
$$a = -10.01, b = 1.67$$

# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

## 2. нормализация гистограммы:

на весь максимальный интервал уровней яркости [0, 255] растягивается не вся гистограмма, лежащая в пределах от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$ , а её наиболее интенсивный участок ( $f'_{\min}, f'_{\max}$ ).

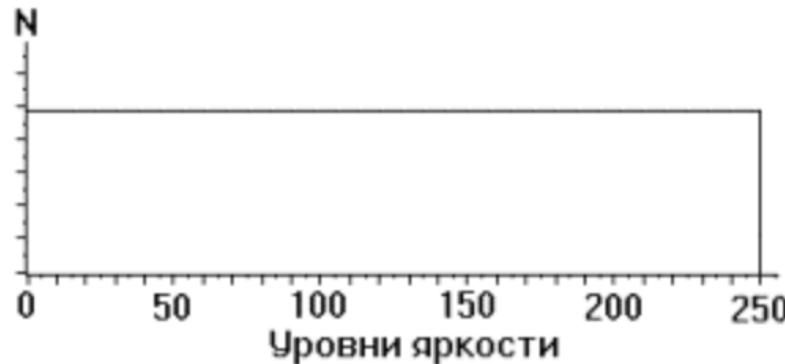


# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

3. эквализация гистограммы (equalization):

выравнивание интегральных площадей участков с различными яркостями



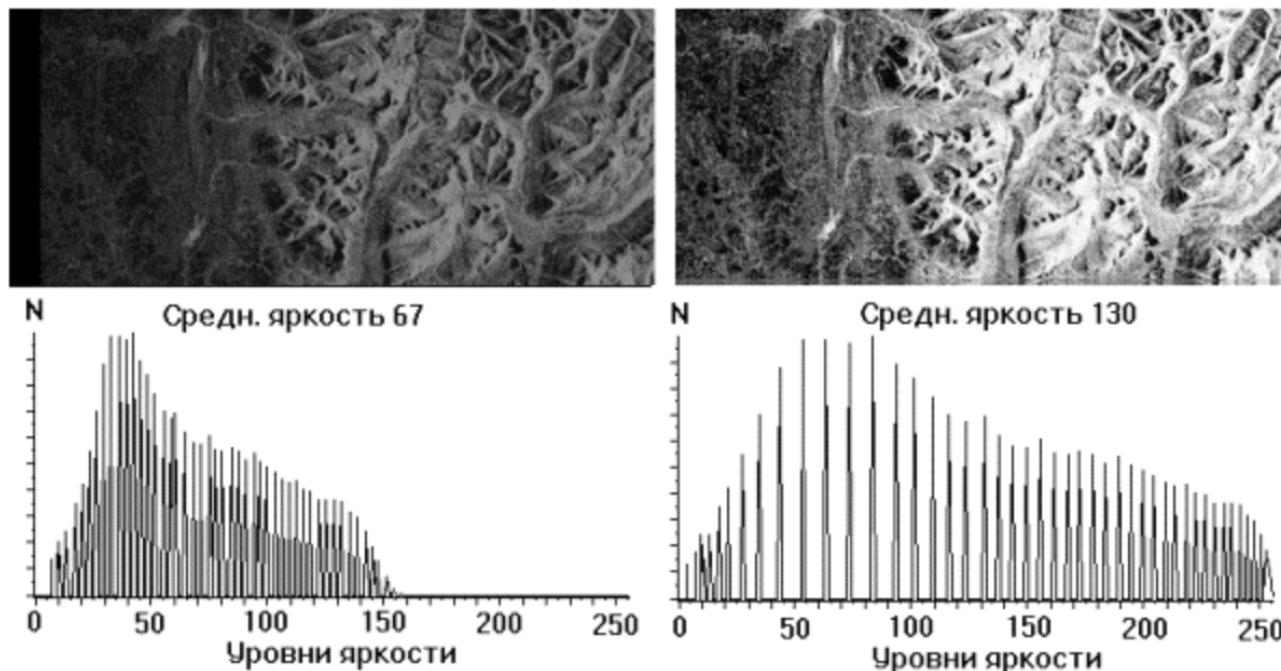
В идеале, гистограмма яркостей должна отвечать равномерному закону распределения

# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

3. эквализация гистограммы (equalization):

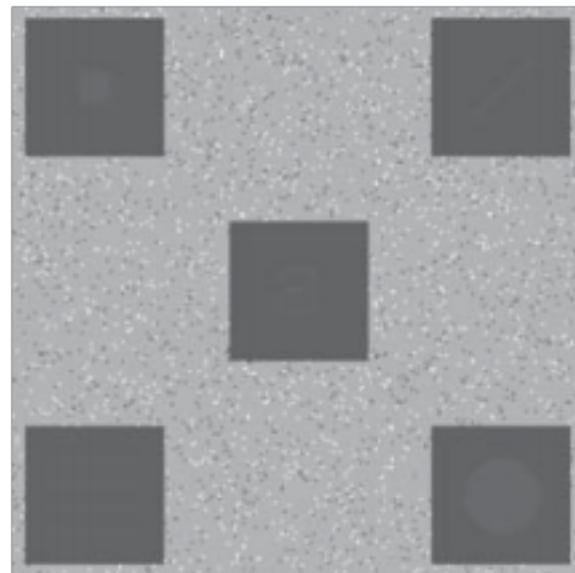
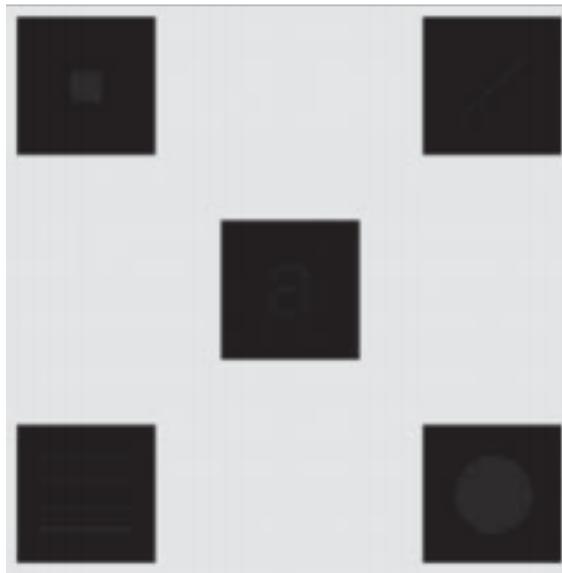
выравнивание интегральных площадей участков с различными яркостями



# Преобразование гистограмм

**Улучшение контраста:**

**4. локальная эквализация гистограммы:**



- Signal Processing for Communications, by P.Prandoni and M. Vetterli,  
© 2008, EPFL Press
- Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 2012
- В.А. Сойфер. Компьютерная обработка изображений. Часть 1.  
1996