



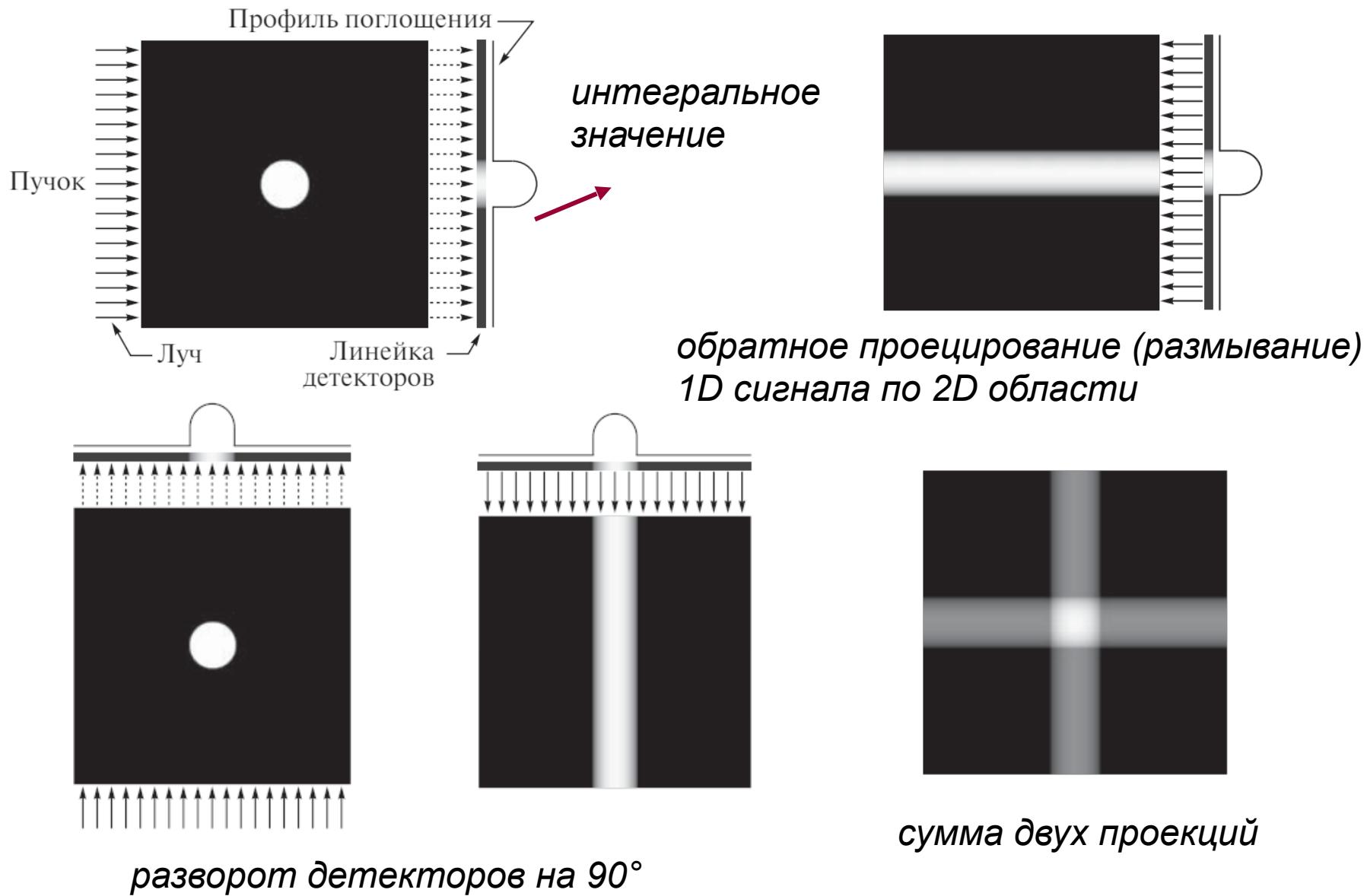
Кафедра молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества

# Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

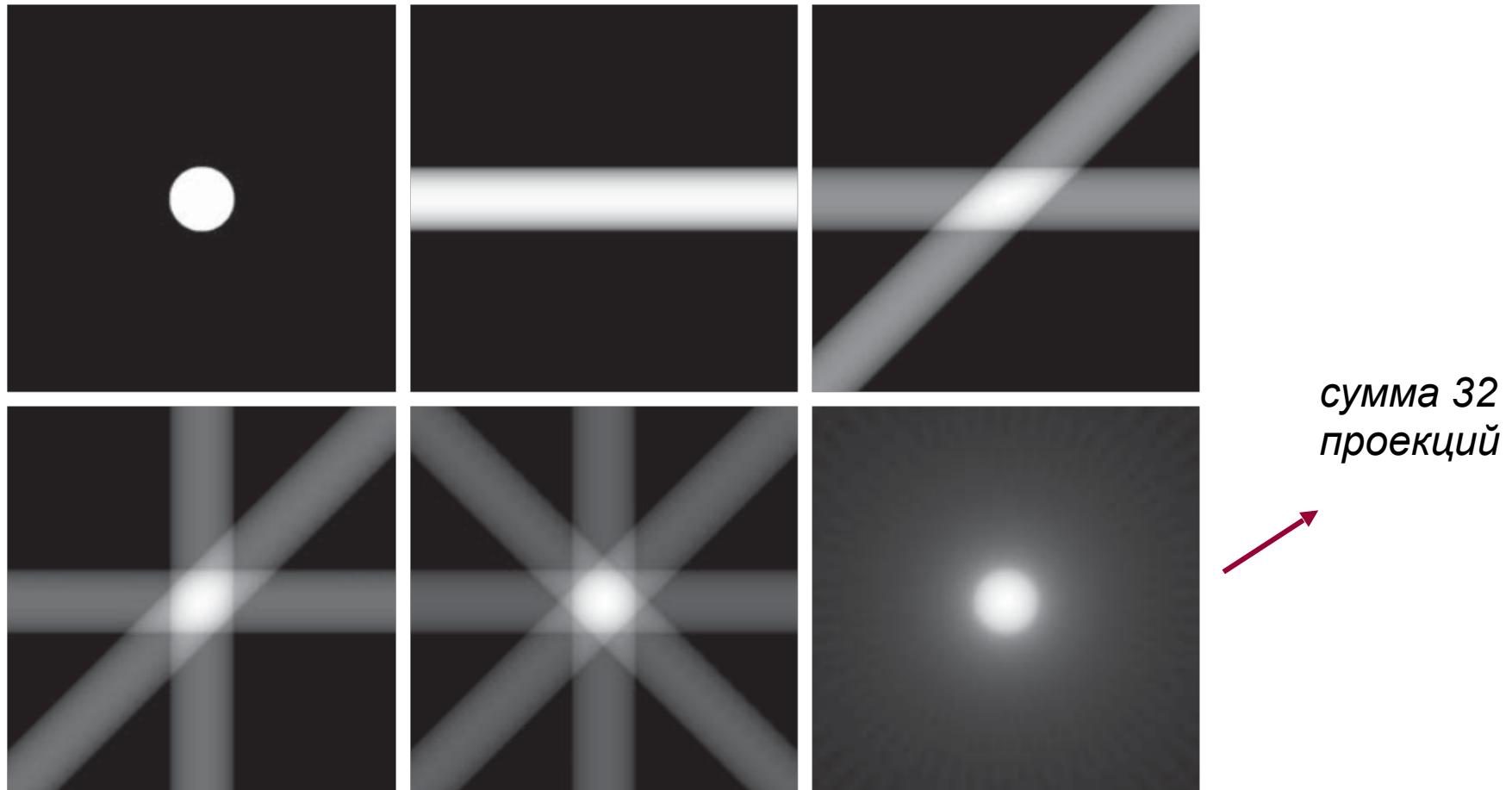
## 9. Многоракурсная регистрация пространственных объектов. Томографические алгоритмы.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст. преп.

# Реконструкция изображений

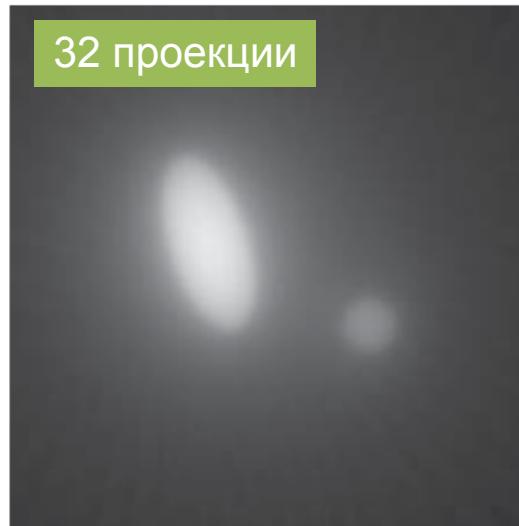
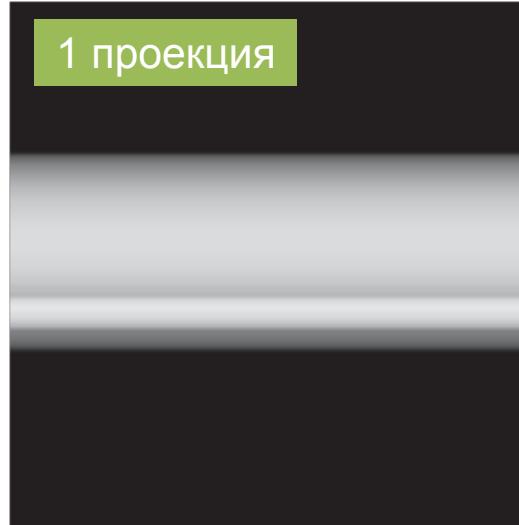


# Реконструкция изображений



Для получения всех необходимых для реконструкции проекций достаточно сформировать лишь проекции в диапазоне  $[0^\circ, 180^\circ]$

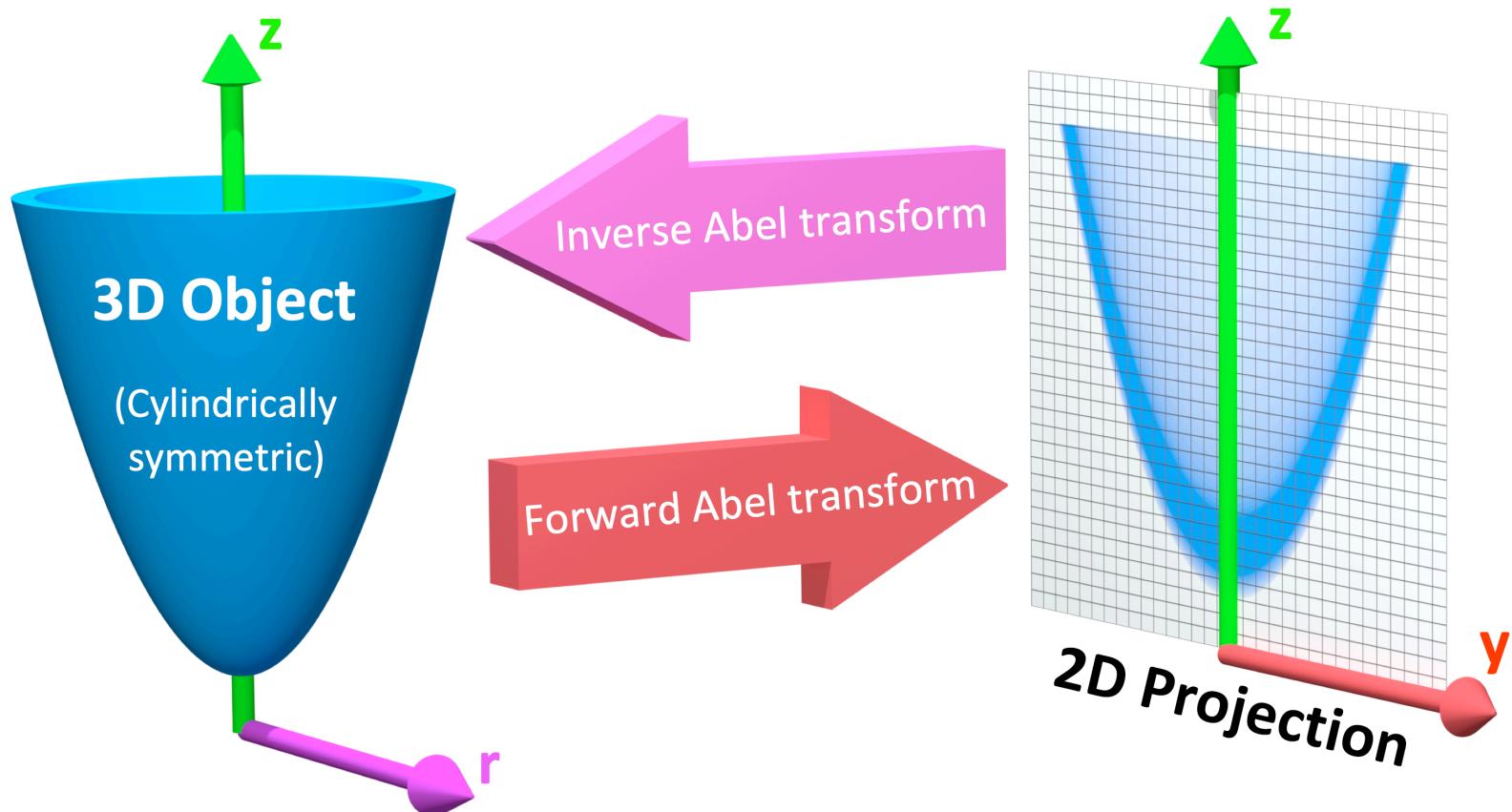
# Реконструкция изображений



общая проблема - размытие границ

# Преобразование Абеля

Прямое **преобразование Абеля** описывает проекцию цилиндрически или сферически симметричной пространственной функции на плоскость



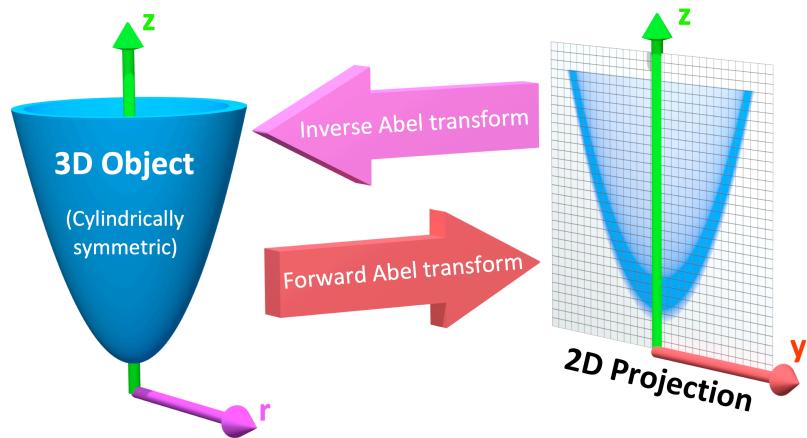
# Преобразование Абеля

- Прямое преобразование Абеля функции  $f(r, z)$ :

$$F(y, z) = 2 \int_y^{\infty} \frac{f(r, z) r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr$$

- Обратное преобразование Абеля\*:

$$f(r, z) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dF(y, z)}{dy} \frac{1}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy$$



\*существует, если  $f(r, z)$  спадает с  $r$  быстрее, чем  $1/r$

# Преобразование Абеля

Численная реализация обратного преобразования Абеля  
(реконструкция функции по проекции-изображению):

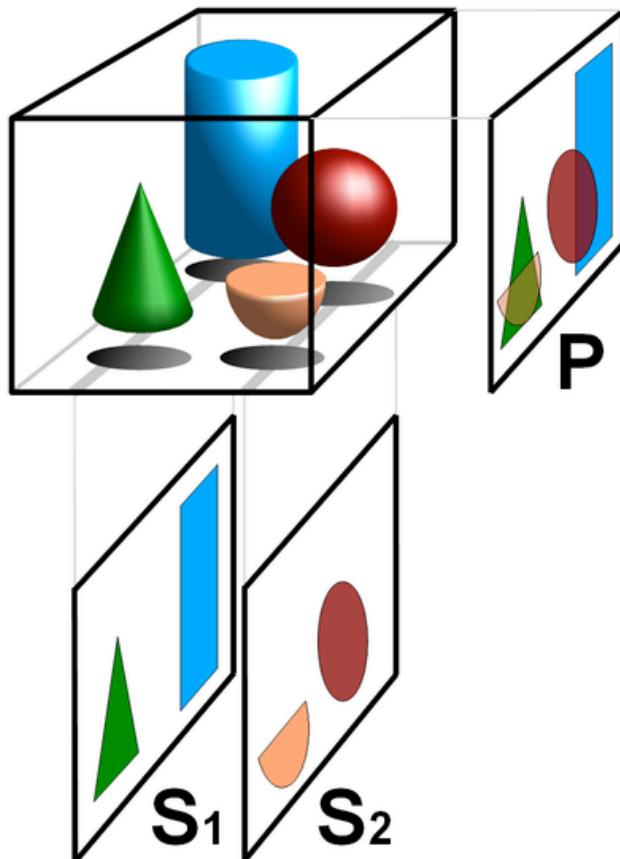
$$f(r, z) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dF(y, z)}{dy} \frac{1}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy$$

- невозможность интегрирования до  $\infty$
- данные обычно дискретные и содержат шум
- данные редко бывают идеально симметричными
- ошибки расчета дифференциала
- особая точка при  $y = r$

Непрямые численные алгоритмы: Fourier-Hankel, Nestor-Olsen, алгоритмы в PyAbel и пр.

# Томография

**Томография** - получение послойного изображения внутренней структуры объекта



$S_1, S_2$  - томограммы группы трехмерных объектов,  
 $P$  - их проекция

# Томография

Виды томографии:

- *Анатомическая (разрушающая):*  
основана на физическом выполнении срезов исследуемого организма с их последующей фиксацией с помощью химических веществ
- *Реконструктивная (неразрушающая):*  
получение тем или иным способом информации о распределении интересующего параметра в объекте большей размерности по его проекциям меньшей размерности без разрушения объекта
  - аналоговая реконструктивная томография
  - вычислительная (компьютерная) томография  
(в т.ч. рентгеновская КТ)

# Томографические методы

С точки зрения взаиморасположения источника зондирующего излучения, объекта и детектора:

- *трансмиссионные*:  
регистрируется внешнее излучение, прошедшее через неизлучающий объект, частично ослабленное
- *эмиссионные*:  
регистрируется излучение, выходящее из активного (излучающего) объекта с некоторым пространственным распределением источников излучения
- *комбинированные трансмиссионно-эмиссионные (люминесцентные, акустооптические и др.)*:  
регистрируется вторичное излучение от источников, распределённых по объёму объекта и возбуждённых внешним излучением
- *эхозондирование*:  
регистрируется излучение, отражённое от внутренних структур пассивного объекта

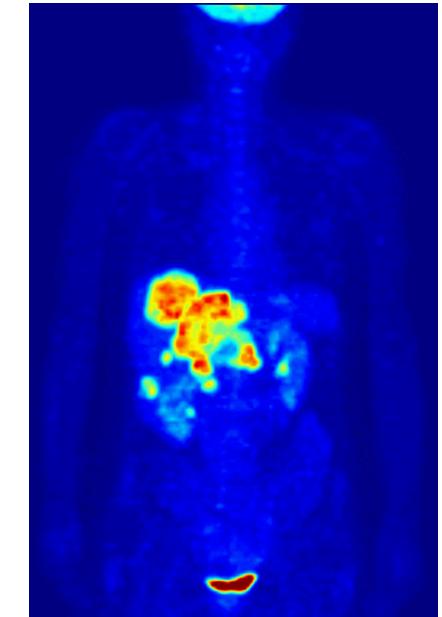
# Томографические методы

Зондирующее излучение:

ПЭТ с контрастированием

➤ *звуковые волны:*

- ультразвуковая томография (УЗТ)
- сейсмическая томография



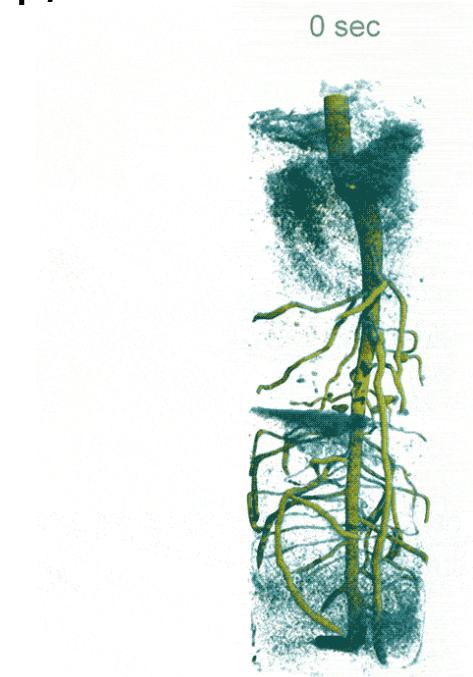
➤ *электромагнитное излучение:*

- радионуклидная эмиссионная томография (гамма-излучение) - однофотонная эмиссионная, позитронийно-эмиссионная (ПЭТ)
- рентгеновская томография (в т.ч. РКТ)
- оптическая (лазерная) томография (ОТ)
- томография в радиодиапазоне

# Томографические методы

Зондирующее излучение:

- *электромагнитные поля:*
  - магнитно-резонансная томография (МРТ)
  - электро-импедансная томография
- *использование элементарных частиц:*
  - нейtronная томография
  - электронная и позитронная томография
  - протонная томография
  - нейтринная томография



нейтронная томография движения воды к корням растения  
*Christian Tötzke et al. / Optics Express, 2019*

# Принципы компьютерной томографии (КТ)

# Принципы компьютерной томографии (КТ)

Цель *компьютерной (рентгеновской) томографии* — получить трехмерное представление внутренней структуры объекта при помощи просвечивания его рентгеновскими лучами под многими различными направлениями.

В отличие от процесса обратного проецированная, 3D представление получается путем формирования двумерных сечений по всему объему тела.



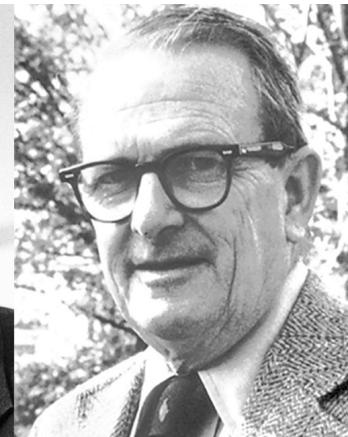
# История компьютерной томографии (КТ)

- 1917 г - И. Радон (Johann Radon): метод проецирования двумерного объекта вдоль параллельных лучей
- 1963 г - А. Кормак (Allan M. Cormack): использование преобразования Радона для КТ-реконструкции; прототип КТ

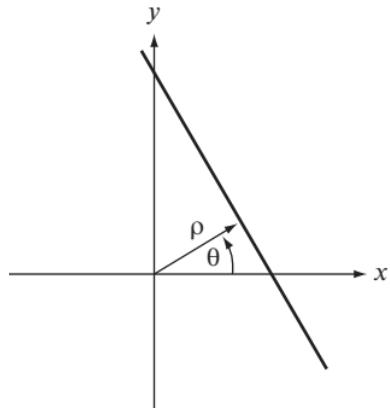


D. J. Radon

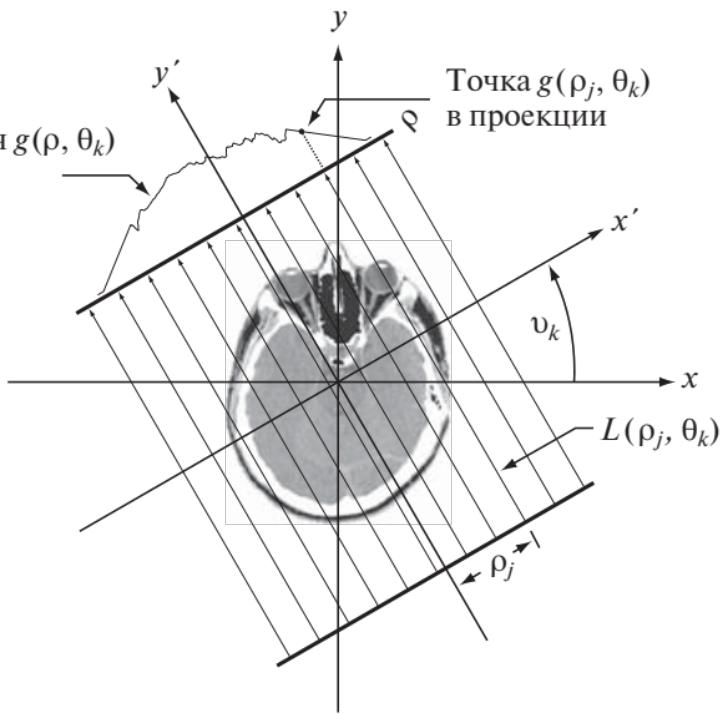
- 1971 г - Г. Хаунсфилд (Godfrey N. Hounsfield): создание первого медицинского томографа
- 1979 г - Хаунсфилд и Кормак разделили Нобелевскую премию по физиологии или медицине «за разработку компьютерной томографии»



# Преобразование Радона



Полная проекция  $g(\rho, \theta_k)$   
для угла  $\theta_k$



представление прямой  $y = ax + b$   
нормалью на плоскости

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$$

**Преобразование Радона** функции двух переменных  $f(x,y)$  задает ее проекцию (линейный интеграл) вдоль произвольной прямой на плоскости  $xy$

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho)$$

# Преобразование Радона

**Преобразование Радона** функции двух переменных  $f(x,y)$  задает ее проекцию (линейный интеграл) вдоль произвольной прямой на плоскости  $xy$

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho)$$

Для радиально-симметричной функции в полярной системе координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

преобразование Радона превращается в частный случай преобразования Абеля

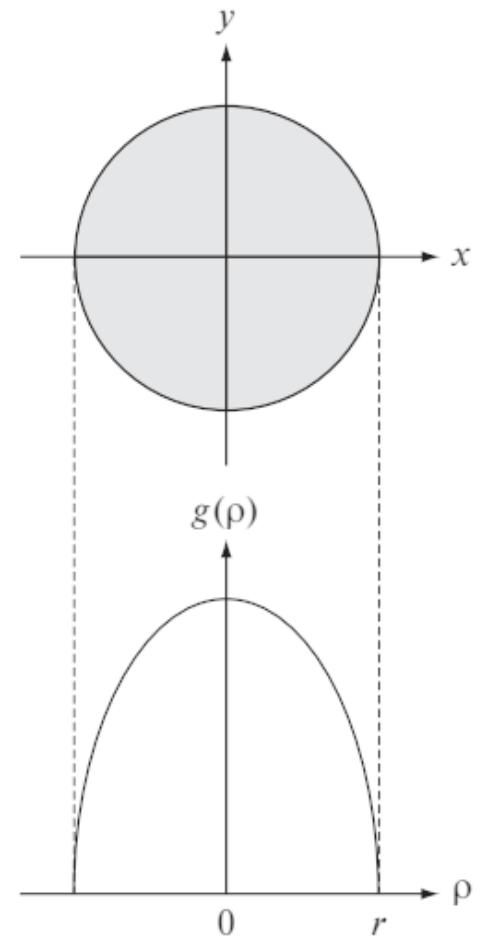
# Преобразование Радона

**Синограмма** - преобразование Радона, представленное в прямоугольных координатах  $\rho$  и  $\theta$

- преобразование Радона для проекции круглой области рассчитывается аналитически

$$f(x, y) = \begin{cases} A & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$g(\rho, \theta) = g(\rho) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2} & |\rho| \leq r, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$



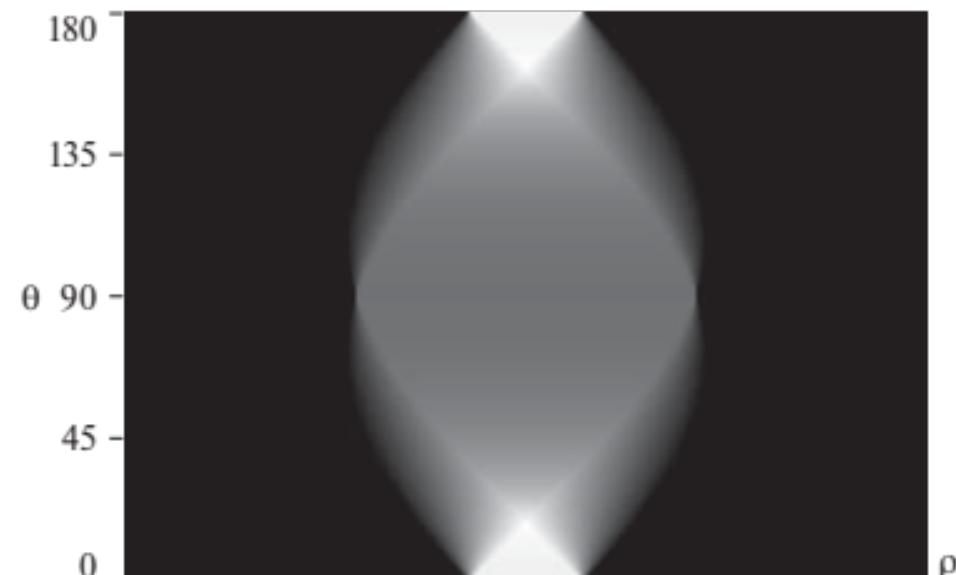
# Преобразование Радона

- синограмма градкая: объект однороден по яркости
- ненулевая часть нижней строки меньше, чем ненулевая часть средней строки: объект вытянут в вертикальном направлении
- синограмма симметрична в вертикальном и горизонтальном направлениях: объект симметричен и параллелен осям x и y

*изображение*



*синограмма*

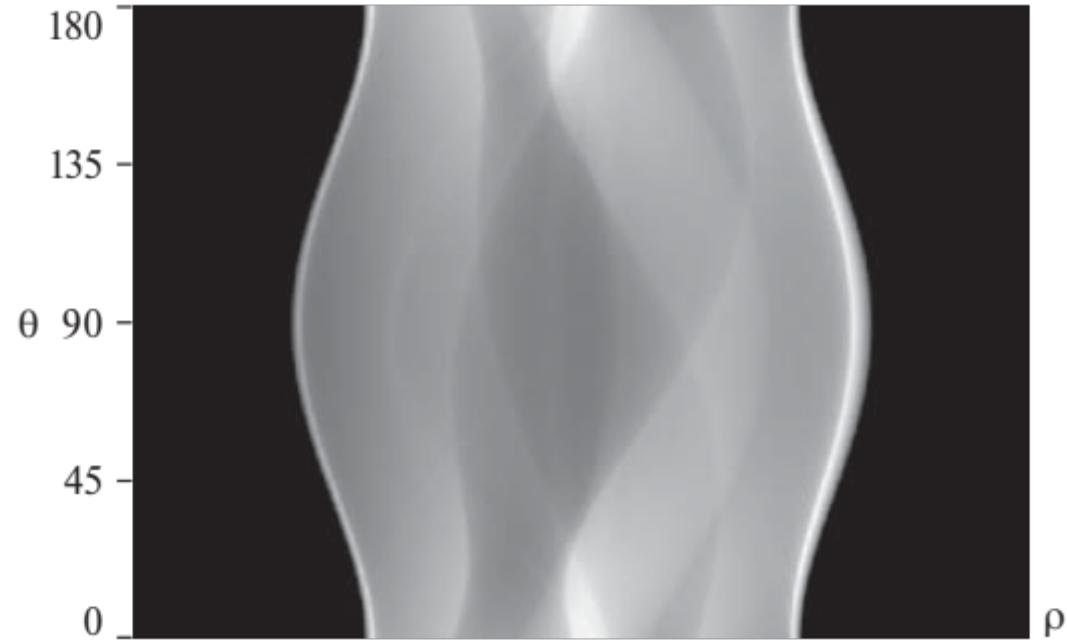


# Преобразование Радона

изображение

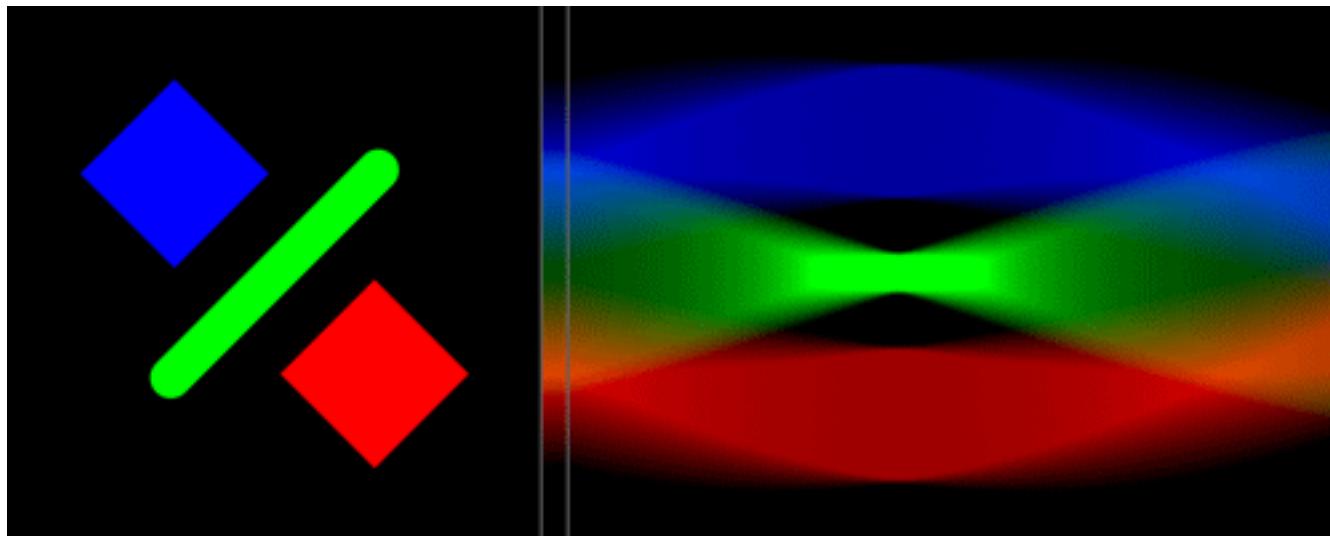


синограмма



**Фантом Шеппа-Логана** (*Shepp–Logan phantom*) - тестовое изображение с малым контрастом, имитирующее поглощение рентгеновского излучения основными областями мозга, в т.ч. небольшими опухолями

# Преобразование Радона



*изображение*

*синоGRAMМА*

*преобразование Радона*

# Преобразование Радона

прямоугольник



Фантом Шеппа-Логана



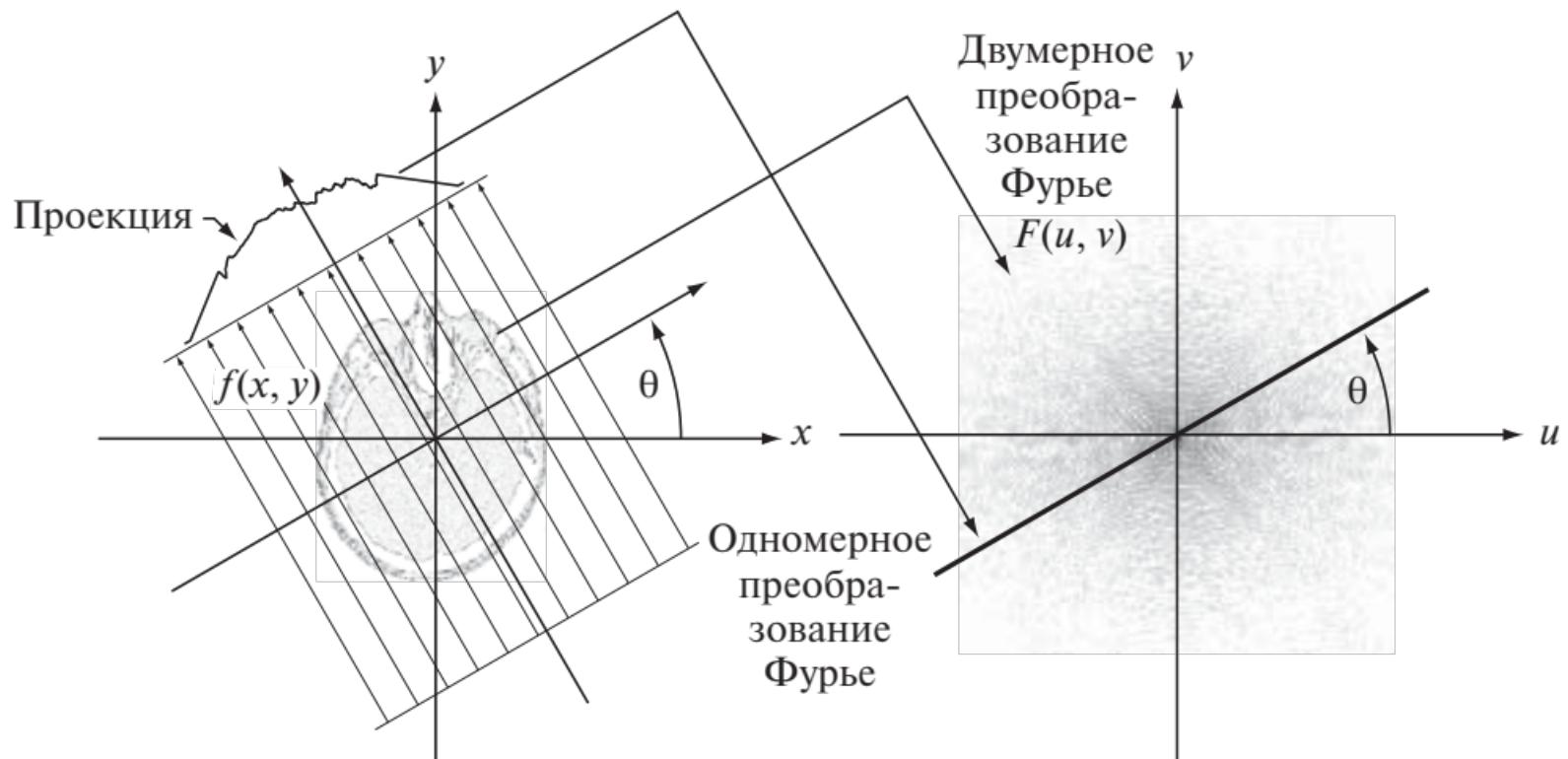
**Ламинограмма** - изображение, полученное из обратных проекций по синограммам

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} f_{\theta}(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$$

# Преобразование Радона

**Теорема о центральном сечении (теорема о проекциях):**

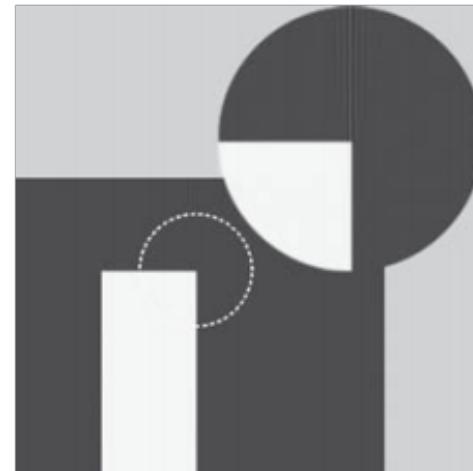
Фурье-преобразование проекции есть сечение (сделанное под тем же углом) двумерного преобразования Фурье изображения той области, проекция которой была получена.



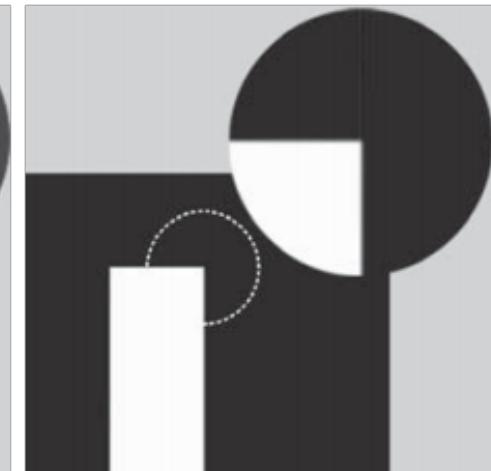
# Преобразование Радона

Решение проблемы размытия -  
**метод фильтрации и обратного проецирования:**

1. вычислить одномерное преобразование Фурье каждой проекции
2. умножить каждое Фурье-преобразование на фильтр-функцию  $|\omega|$ , которая должна быть предварительно умножена на подходящее окно (например, Хэмминга).
3. выполнить обратное преобразование Фурье каждой полученной фильтрованной функции
4. просуммировать все одномерные преобразования



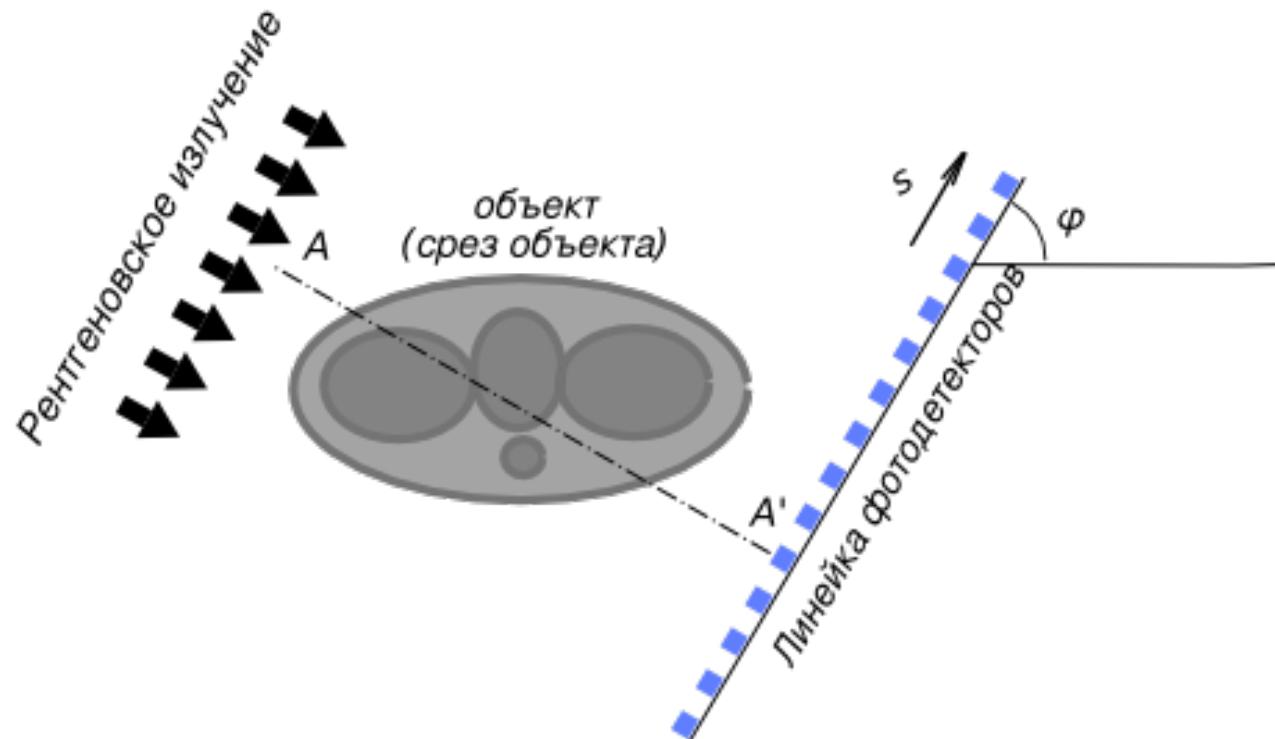
пилообразный  
фильтр



пилообразный фильтр  
+ окно Хэмминга

# Компьютерная томография

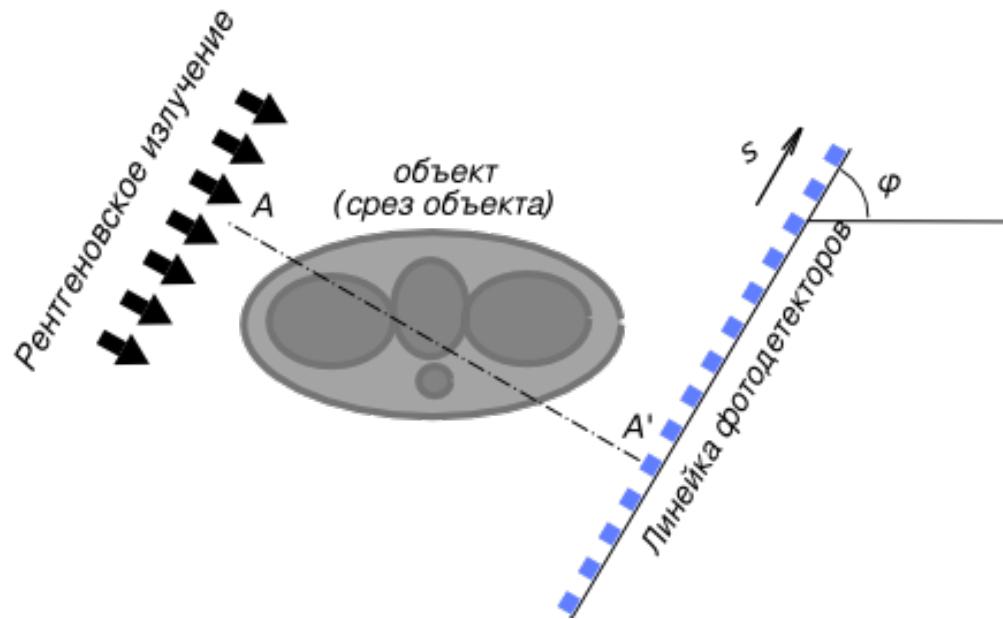
В **компьютерной томографии** линейка детекторов измеряет поглощение исследуемым объектом параллельного пучка излучения (напр., рентгеновских лучей в медицинской томографии, сейсмических волн в геофизической томографии).



# Компьютерная томография

Приближения лучевой томографии:

- отсутствие преломления излучения в объекте
- для каждого луча существует лежащий на нем точечный источник, излучающий в одном направлении (вдоль луча в сторону детектора)
- отсутствие рассеянного излучения от других источников (проблема засветки)

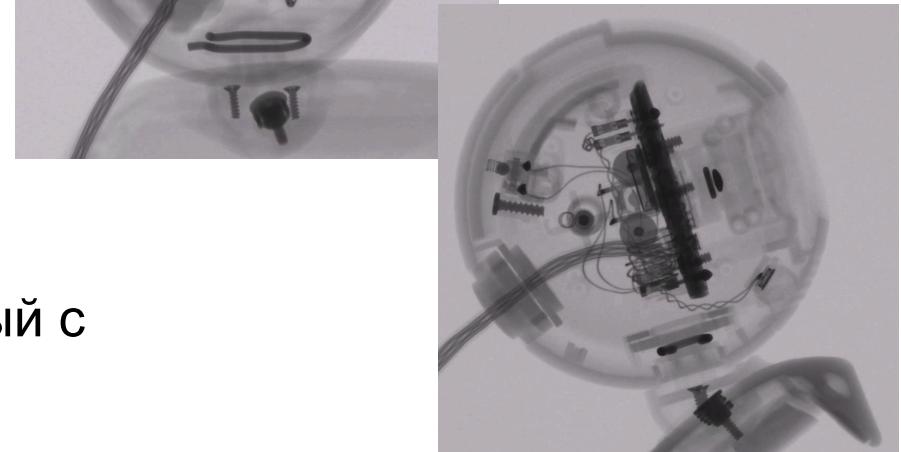
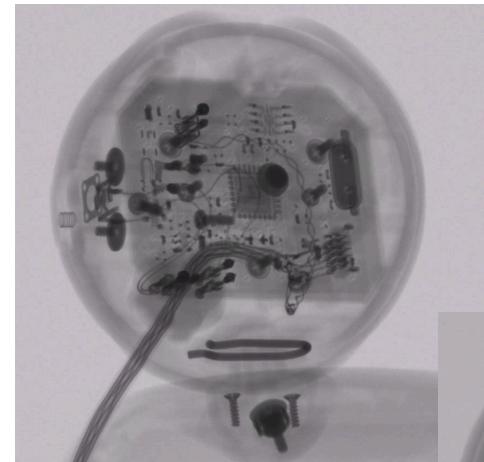


# Компьютерная томография

Согласно закону Бугера-Ламберта-Бера интенсивность излучения, измеряемая детектором в точке  $s$  линейки пропорциональна

$$\exp \left\{ - \int_{AA'} \rho(x, y) dz \right\}$$

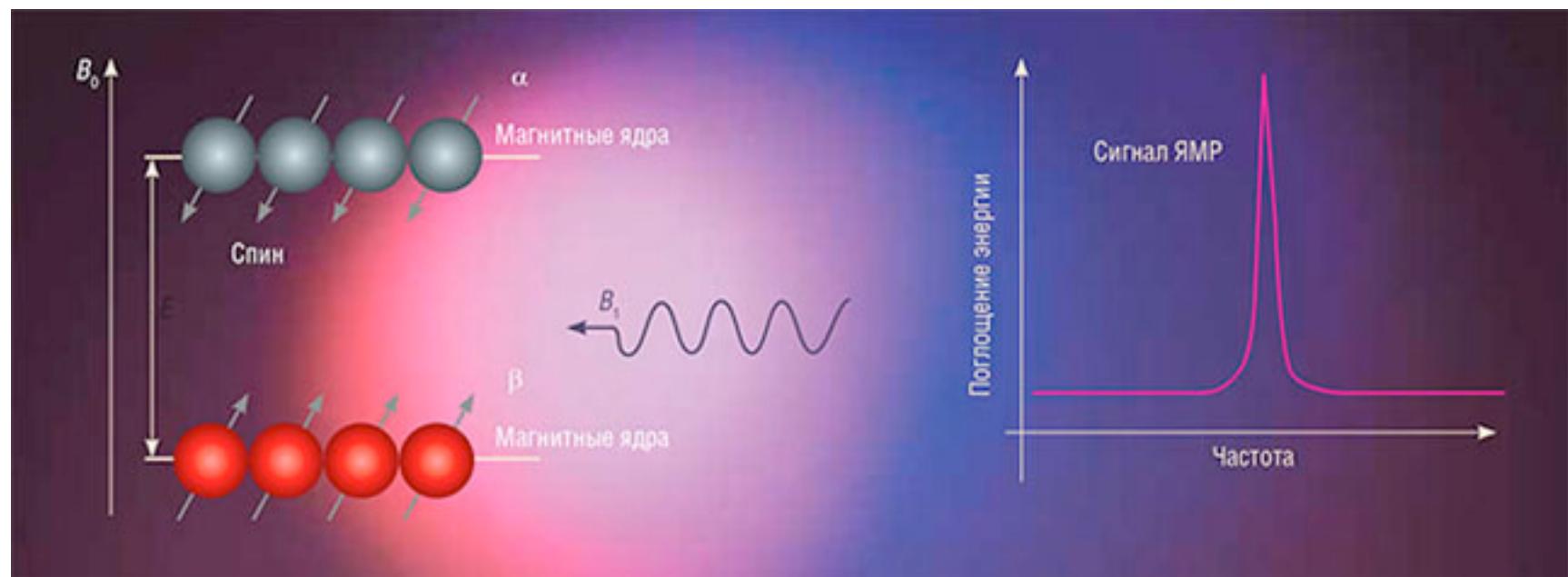
показатель поглощения  
вещества объекта



Логарифм от интенсивности, взятый с обратным знаком, даёт преобразование Радона от показателя поглощения.

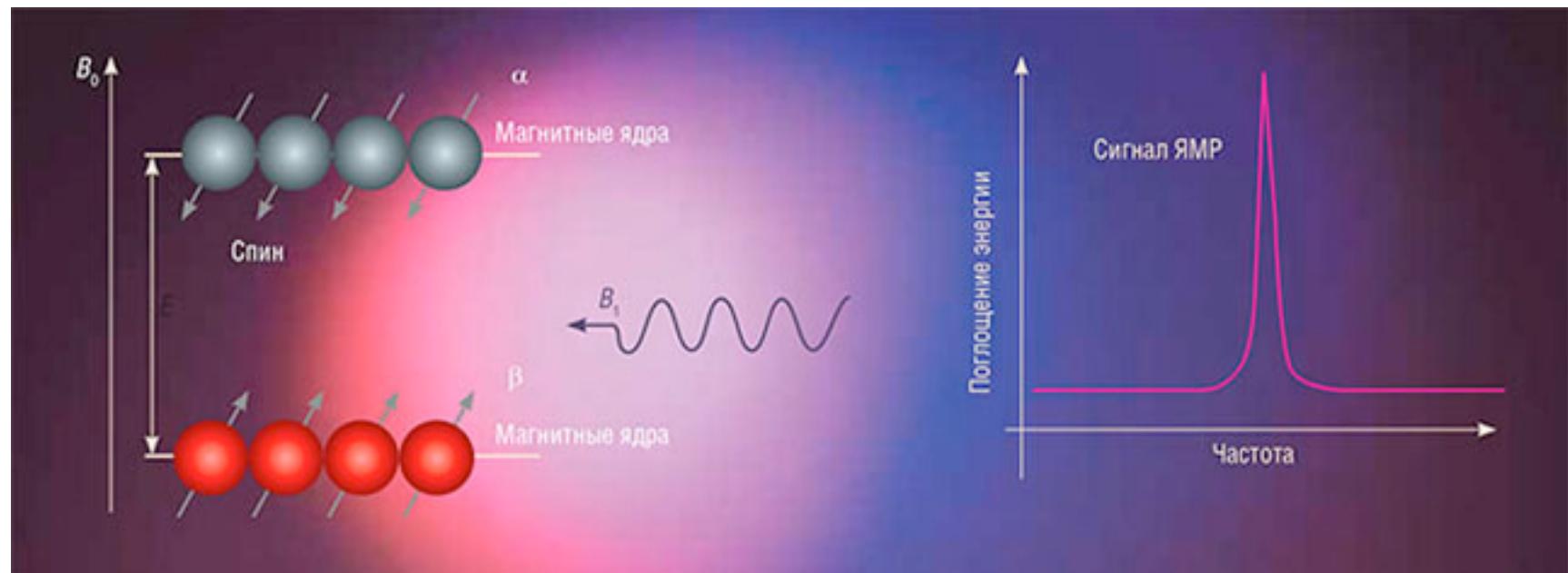
# Магнитно-резонансная томография

**Магнитно-резонансная томография (МРТ)** — способ получения томографических изображений с использованием явления ядерного магнитного резонанса.

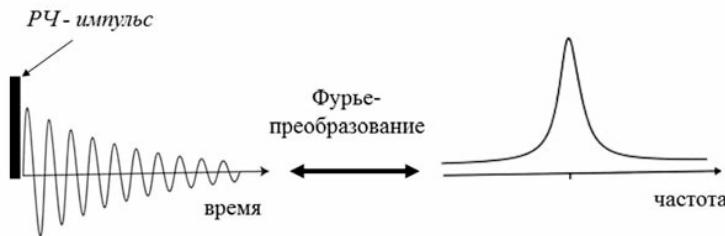


# Магнитно-резонансная томография

МРТ основана на измерении электромагнитного отклика атомных ядер, находящихся в сильном постоянном магнитном поле, в ответ на возбуждение их определённым сочетанием электромагнитных волн (радиочастотного диапазона).

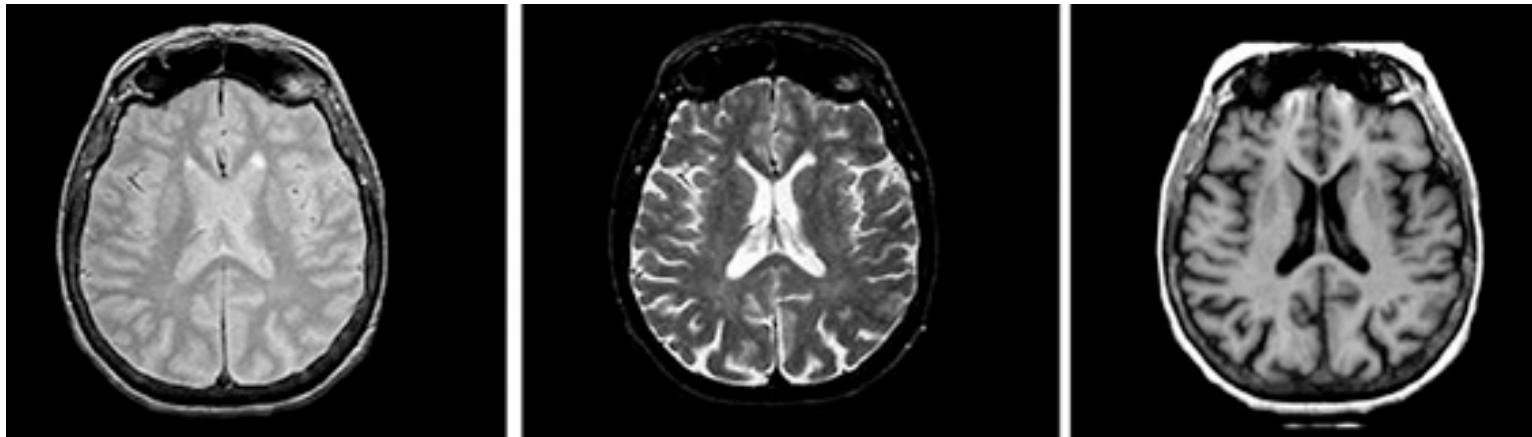


# Магнитно-резонансная томография



Неоднородность поля создается так называемыми градиентными катушками, которые работают в паре с основным магнитом.

Меняя величину магнитного поля (по сути, частоту наблюдения сигнала), можно менять слой, который будет давать сигнал.



- Signal Processing for Communications, by P.Prandoni and M. Vetterli,  
© 2008, EPFL Press
- Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 2012
- В.А. Сойфер. Компьютерная обработка изображений. Часть 1.  
1996