



*Кафедра молекулярных процессов и экстремальных
состояний вещества*

Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

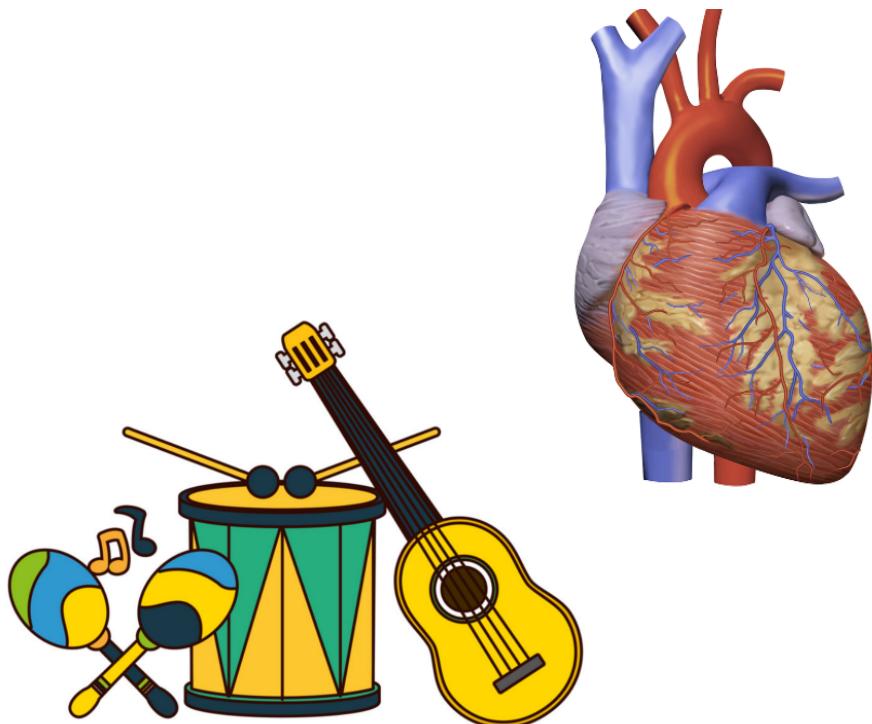
4. Основы спектрального анализа данных
эксперимента. Дискретное преобразование
Фурье.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст.преп.

Переход от временного пространства в частотное

Сигналы описывают изменение какого-либо физического процесса во времени.

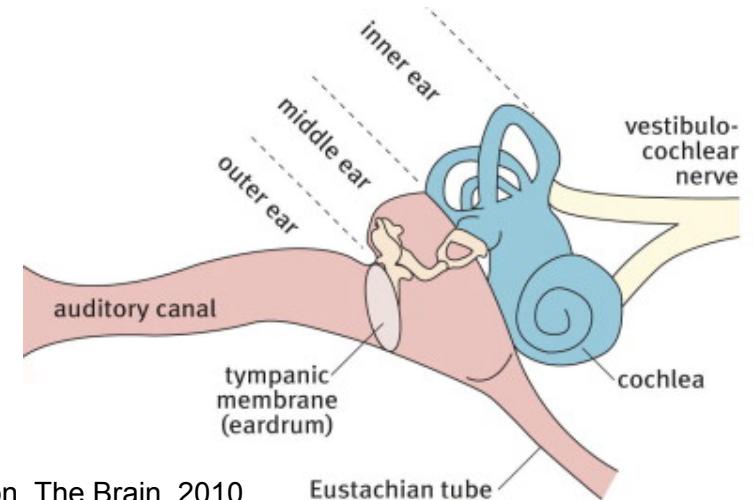
Основные физические процессы в природе имеют **периодический** (осцилляторный) характер.



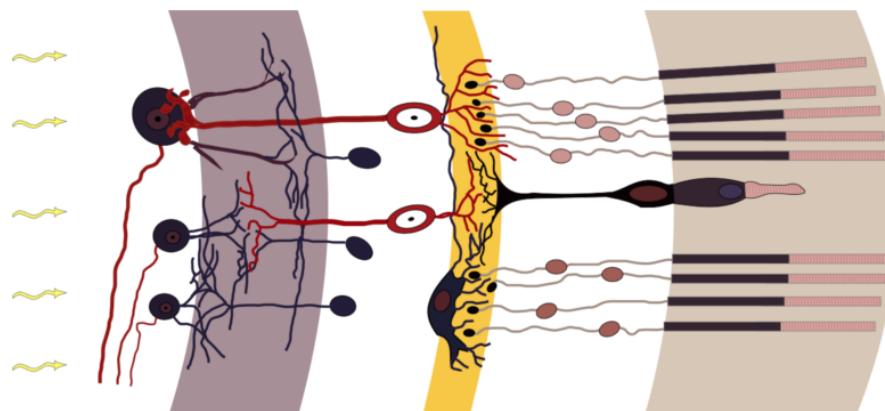
Переход от временного пространства в частотное

Приемники гармонических сигналов есть даже внутри человеческого тела

- Ушная улитка
Чувствительна к колебаниям давления с частотой 20 Гц-20кГц



C. Watson. The Brain. 2010



en.wikipedia.org/wiki/Rod_cell

- Сетчатка глаза
Чувствительна к э/м волнам частотой 430-790 ТГц (750-380 нм)

Переход от временного пространства в частотное

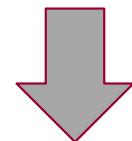
Фурье-преобразование позволяет представить *любой* сигнал как набор периодических элементов

Фурье-анализ



- переход от временного представления сигнала к частотному
- исследование распределения сигнала по частотам
- обнаружение «скрытых» свойств сигнала

Фурье-синтез



- переход от частотного представления сигнала к временному
- генерация сигналов заданной частоты
- помещение сигнала в нужный частотный диапазон

Необходимые математические формулы

- Формула Эйлера

$$\cos x = \operatorname{Re} (e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im} (e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$|e^{ix}| = 1$$

- Сумма конечной геометрической прогрессии ($q \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

- Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \text{при} \quad |q| < 1$$

Частота дискретного сигнала

Пусть имеется гармонический сигнал:

$$x_1(t) = Ae^{j\omega_1 k}$$

Изменим его частоту на величину, кратную 2π рад/отсчет:

$$x_2(t) = Ae^{j\omega_2 k} = Ae^{j(\omega_1 + 2\pi m)k} = Ae^{j\omega_1 k} \cdot e^{j2\pi mk}$$

$\overset{\text{II}}{\rightarrow}$

- в цифровой обработке сигналов понятие частоты неоднозначно
- основной рабочий диапазон частот дискретной системы (*рад/отсчет*): $-\pi < \omega < +\pi$

Преобразование Фурье. Терминология.

- **Дискретное преобразование Фурье (DFT)** переводит сигнал *длительности N* в набор из N дискретных частотных коэффициентов
- **Преобразование Фурье дискретного времени (DTFT)** переводит бесконечный сигнал в функцию действительного переменного (частоты) с периодом 2π
- **Дискретные ряды Фурье (DFS)** переводят *периодический* сигнал с периодом N в набор из N дискретных частотных коэффициентов
- Частотное представление сигнала (в виде коэффициентов DFT/DFS-разложения или распределения частот в DTFT-разложении) называют **спектром сигнала**

Базис Фурье

Рассмотрим конечный сигнал в пространстве \mathbf{C}^N (векторное пространство размерности N над полем комплексных чисел)

Фурье-анализ в пространстве \mathbf{C}^N представляет собой разложение сигнала по новому ортонормированному базису.

Этот базис должен содержать N векторов размера N .

Возьмем набор экспоненциальных векторов:

$$w_k[n] = e^{j\omega_k n}, n = 0, \dots, N - 1$$

Каждый из векторов должен подчиняться условию (содержать целое число периодов):

$$w_k[N] = w_k[0] = 1 \quad \rightarrow \quad (e^{j\omega_k})^N = 1$$

Базис Фурье

Набор векторов $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$ является ортогональным базисом в \mathbb{C}^N , поскольку:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(h)} \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\frac{2\pi}{N}nk})^* e^{j\frac{2\pi}{N}nh} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)n} \\ &= \begin{cases} N & h = k \\ \frac{1 - e^{j2\pi(h-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)}} & h \neq k \end{cases}\end{aligned}$$



Базис $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$ не является ортонормированным, т.к.:

$$\|\mathbf{w}^{(k)}\|^2 = N$$

Базис Фурье

Итак, **базис Фурье** в \mathbb{C}^N выглядит так:

$$w_k[n] = e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

k – номер вектора

n – номер элемента
вектора k

В векторной форме:

$$\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,N-1}$$

$$w_n^{(k)} = e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad \text{- частота экспоненциальной}\\ \text{последовательности}$$

Базис Фурье

Введем обозначение:

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad \text{- комплексное число}$$

Тогда:

$$w_k[n] = W_N^{-nk}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Т.о., N сигналов можно представить как набор векторов $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$ в \mathbf{C}^N :

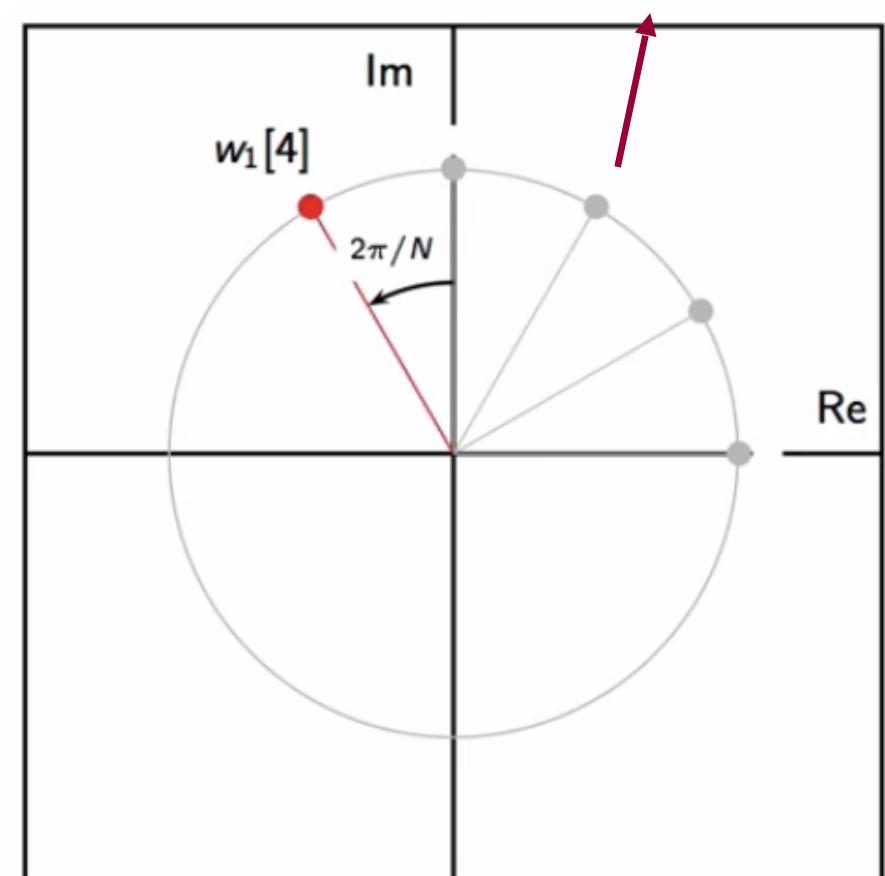
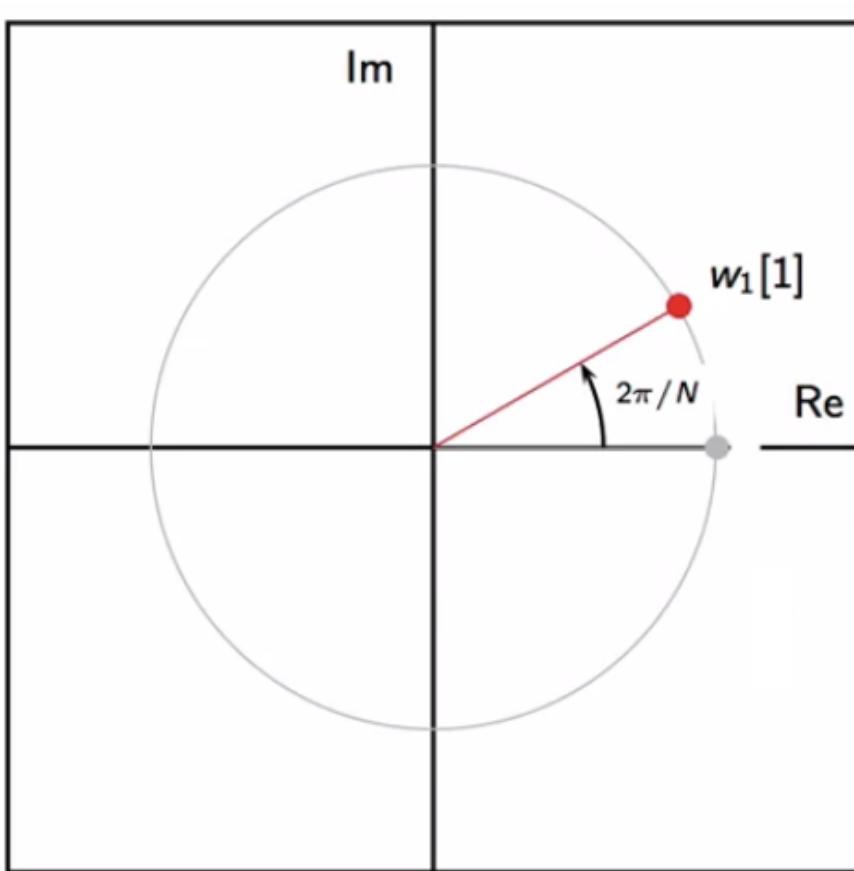
$$\mathbf{w}^{(k)} = [1 \quad W_N^{-k} \quad W_N^{-2k} \quad \dots \quad W_N^{-(N-1)k}]^T$$

Заметим, что:

$$(W_N^{-k})^* = W_N^k \quad \text{и} \quad W_N^{iN} = 1$$

Базис Фурье

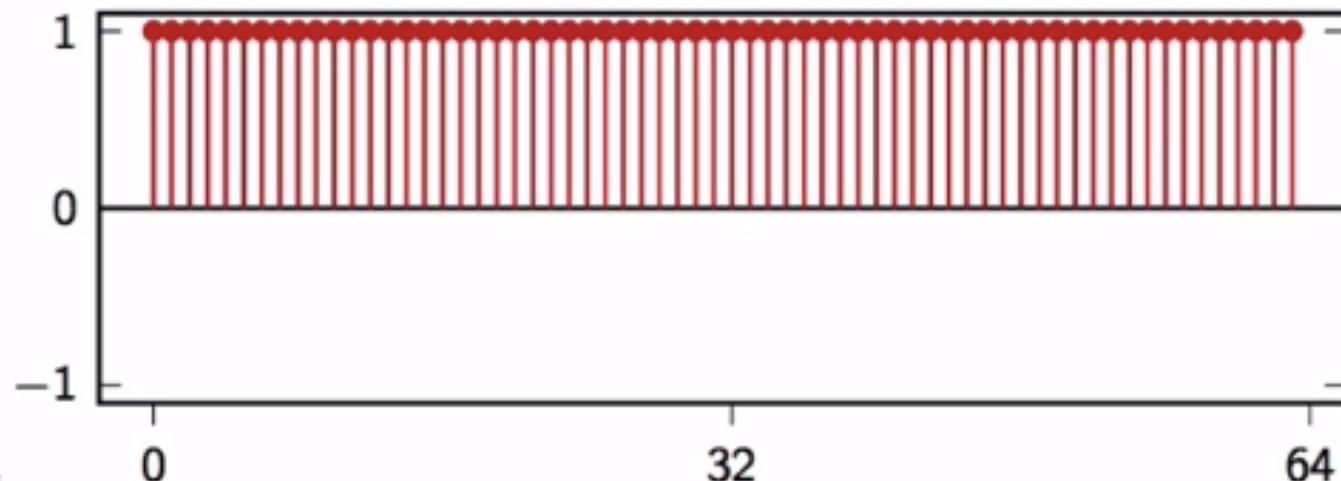
Пример вектора $w_1[n]$ на комплексной плоскости:



Базис Фурье при $N = 64$

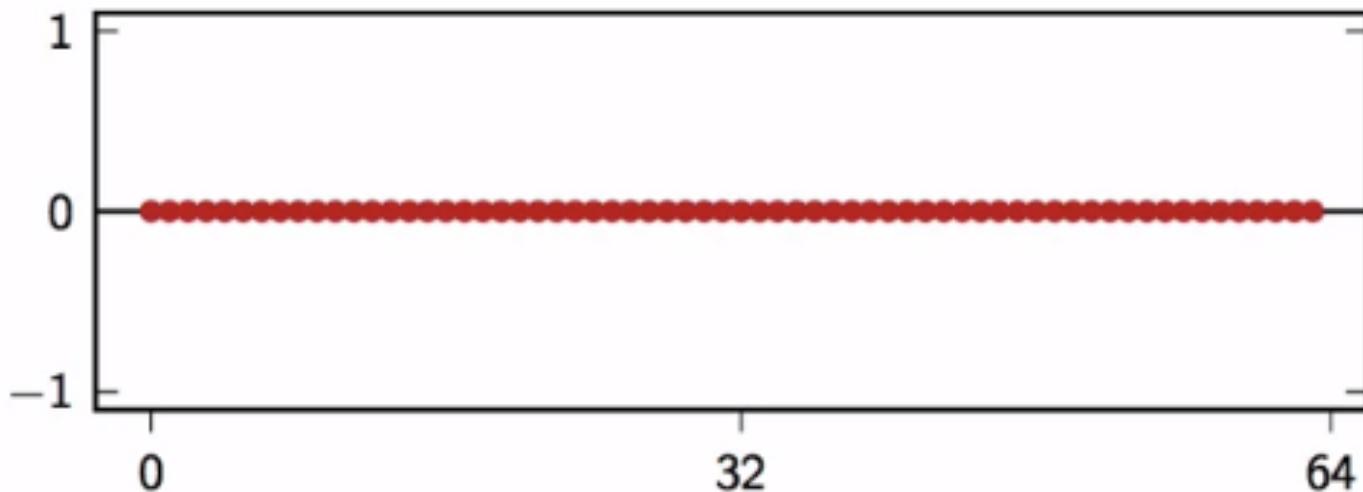
$$\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 0 = 1$$

Re



$w^{(0)} \in \mathbb{C}^{64}$

Im

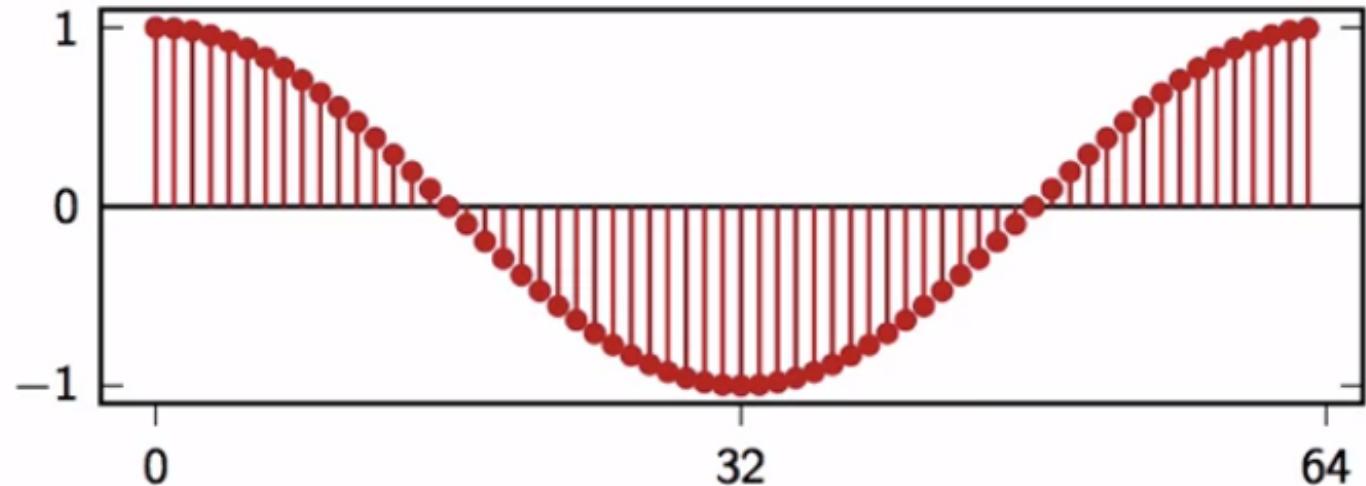


Базис Фурье при $N = 64$

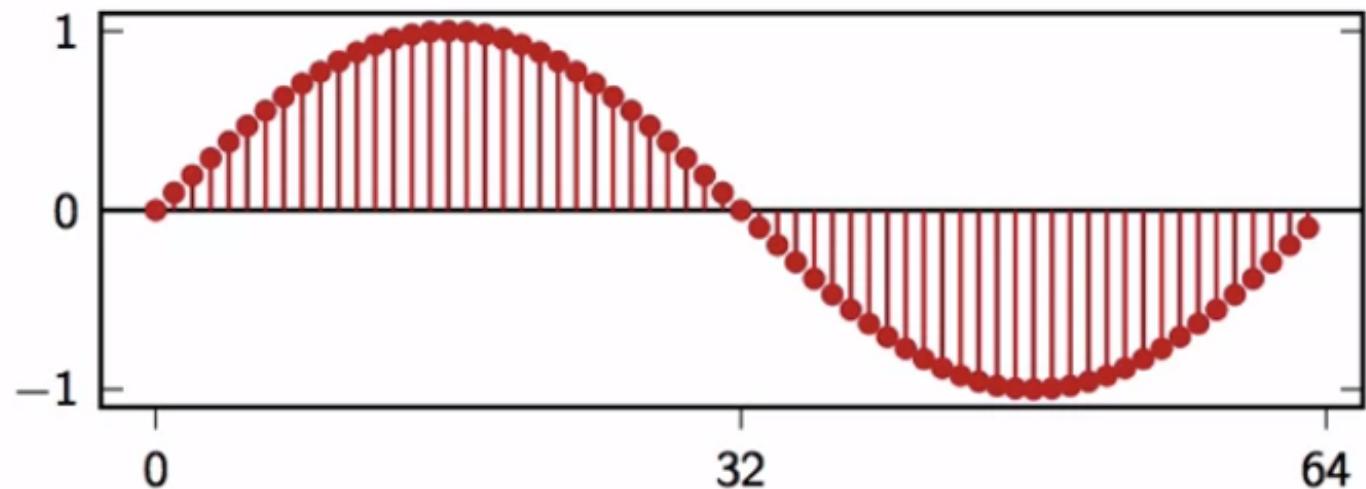
$$\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 1 = \frac{\pi}{32}$$

$\mathbf{w}^{(1)} \in \mathbb{C}^{64}$

Re



Im

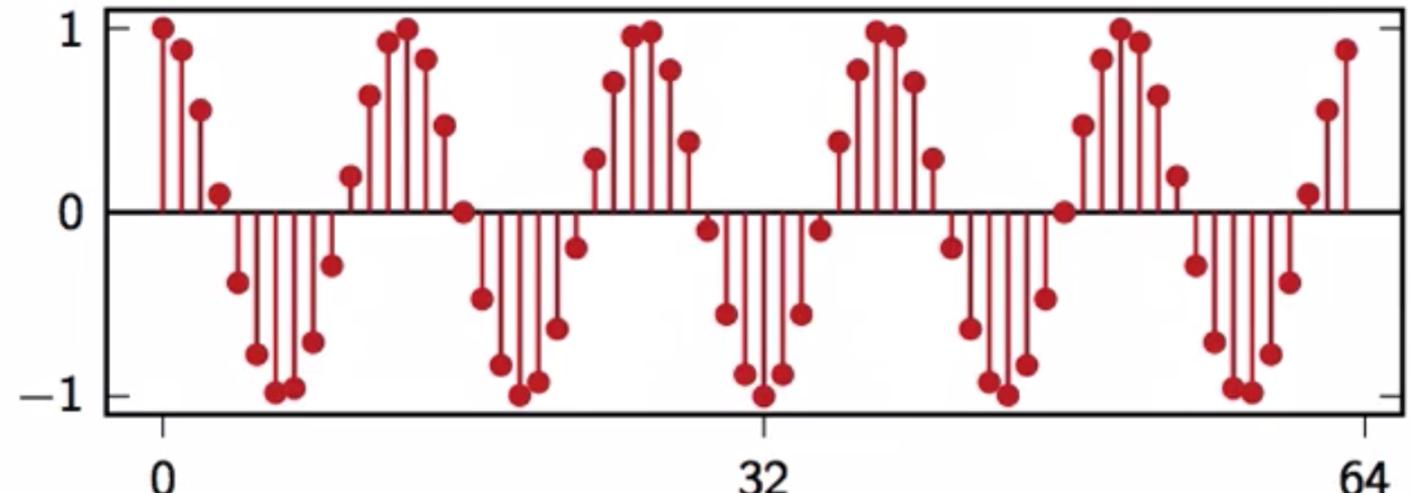


Базис Фурье при $N = 64$

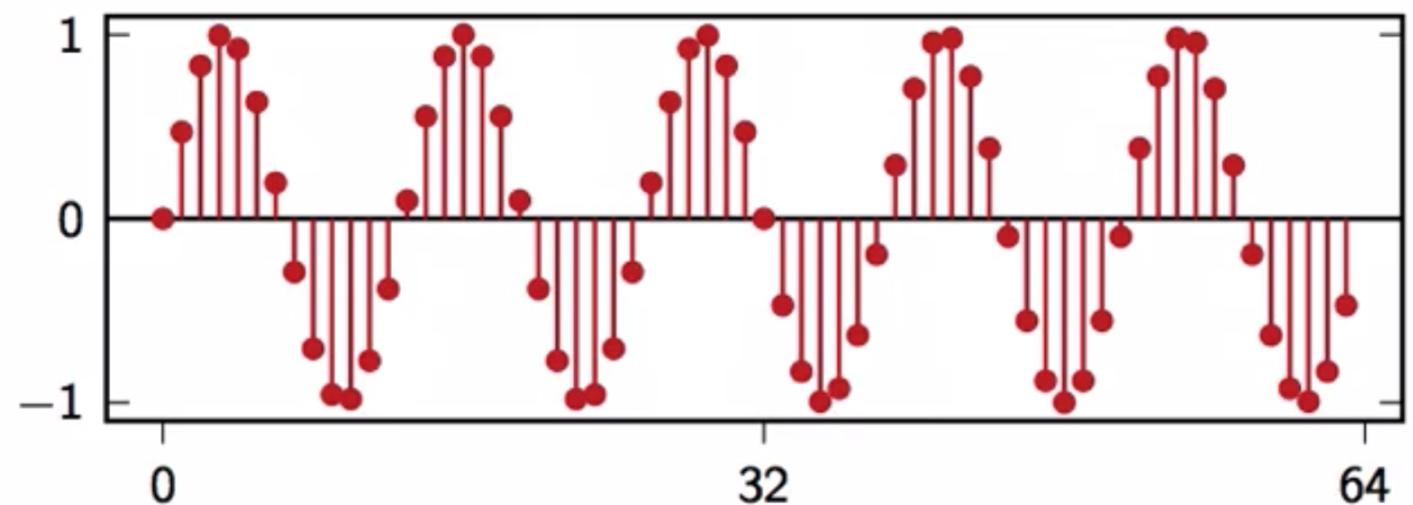
$$\omega = \frac{2\pi}{64} 5$$

Re

$$\mathbf{w}^{(5)} \in \mathbb{C}^{64}$$



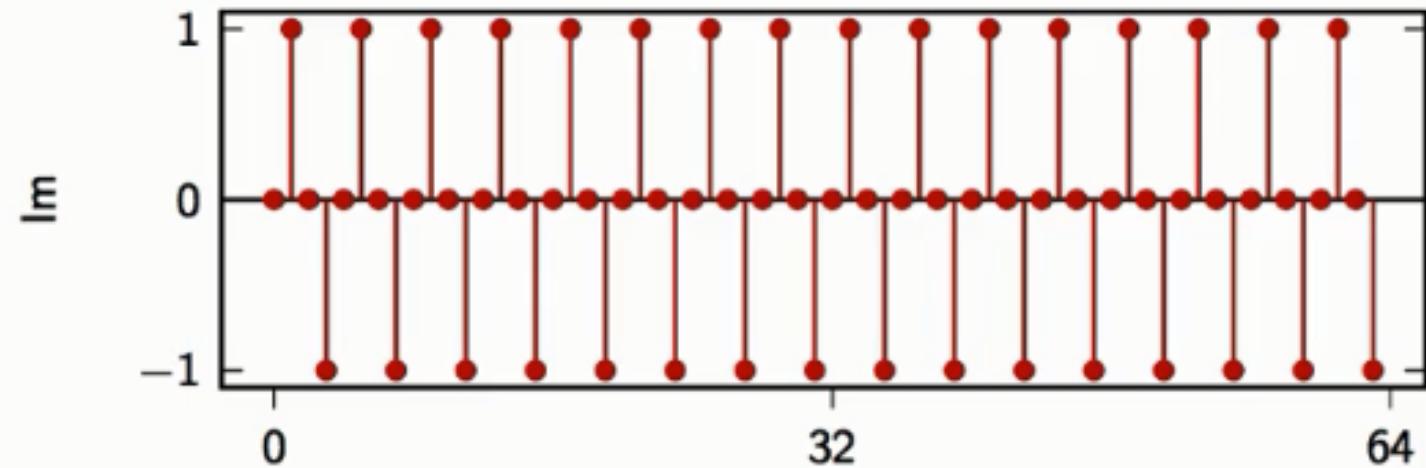
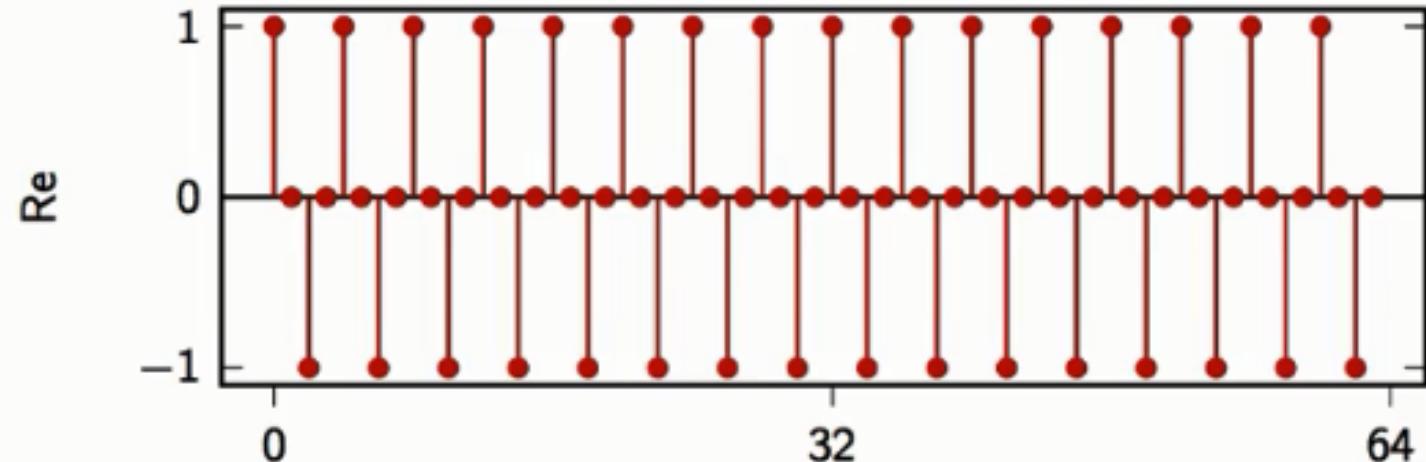
Im



Базис Фурье при $N = 64$

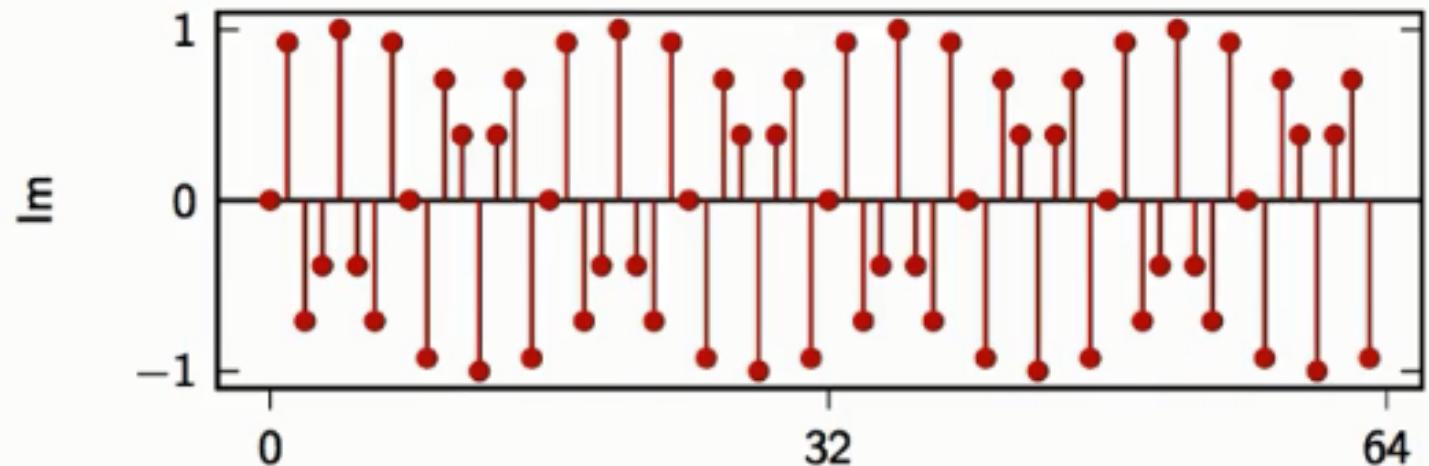
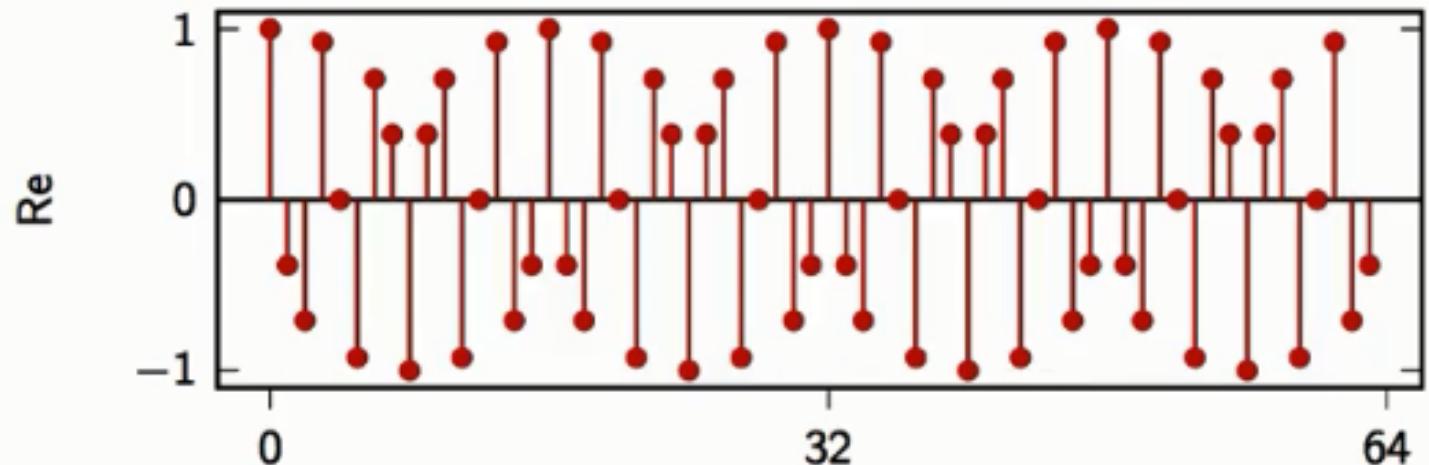
$$\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 16 = \frac{\pi}{2}$$

$\mathbf{w}^{(16)} \in \mathbb{C}^{64}$

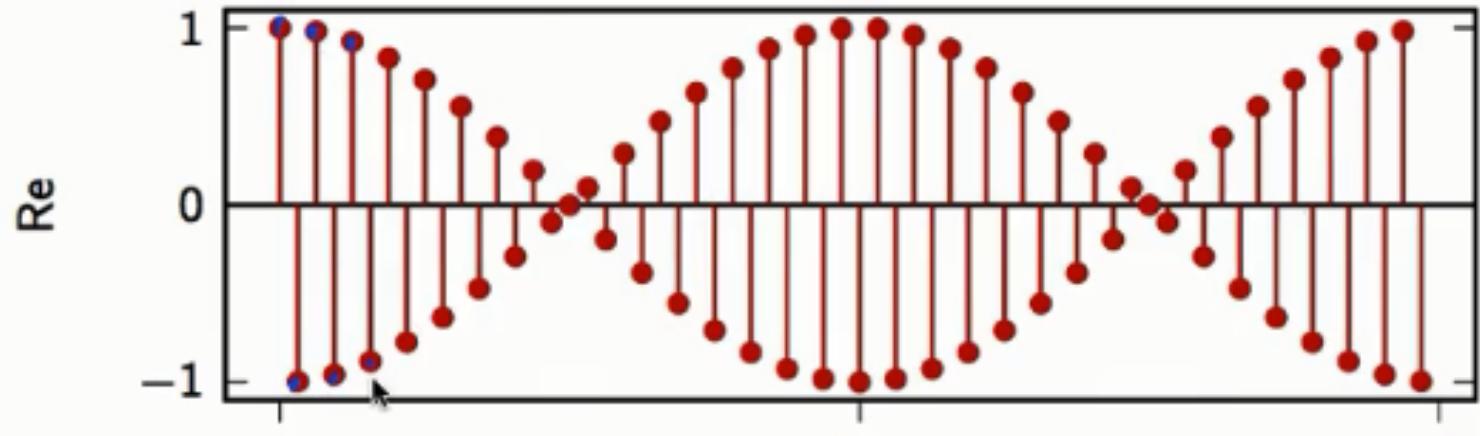


Базис Фурье при $N = 64$

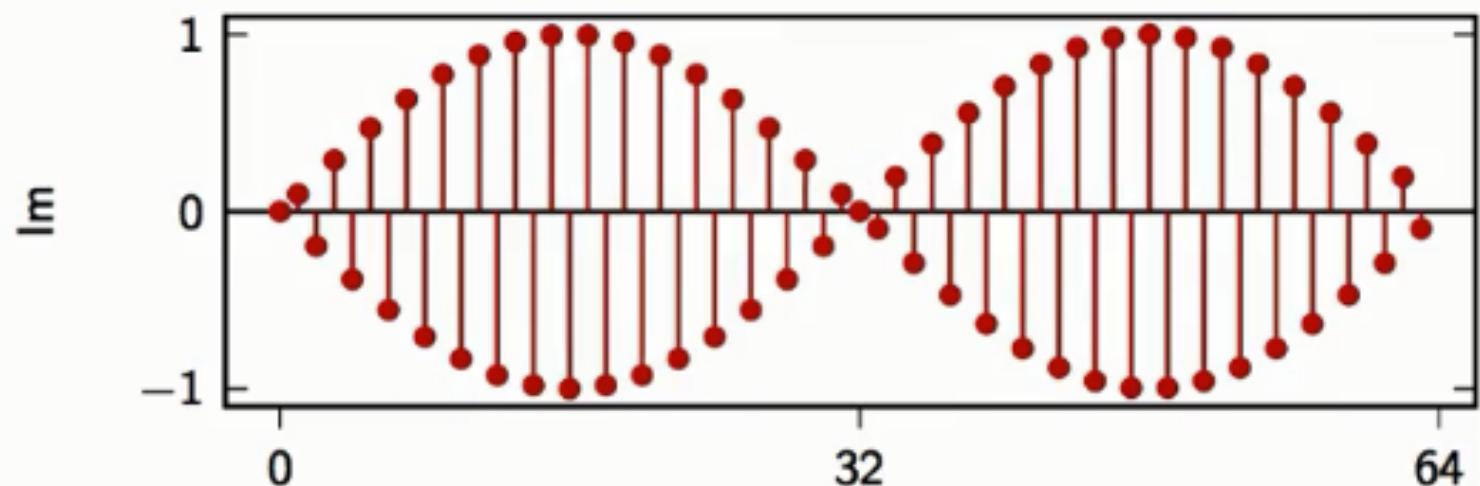
$\mathbf{w}^{(20)} \in \mathbb{C}^{64}$



Базис Фурье при $N = 64$



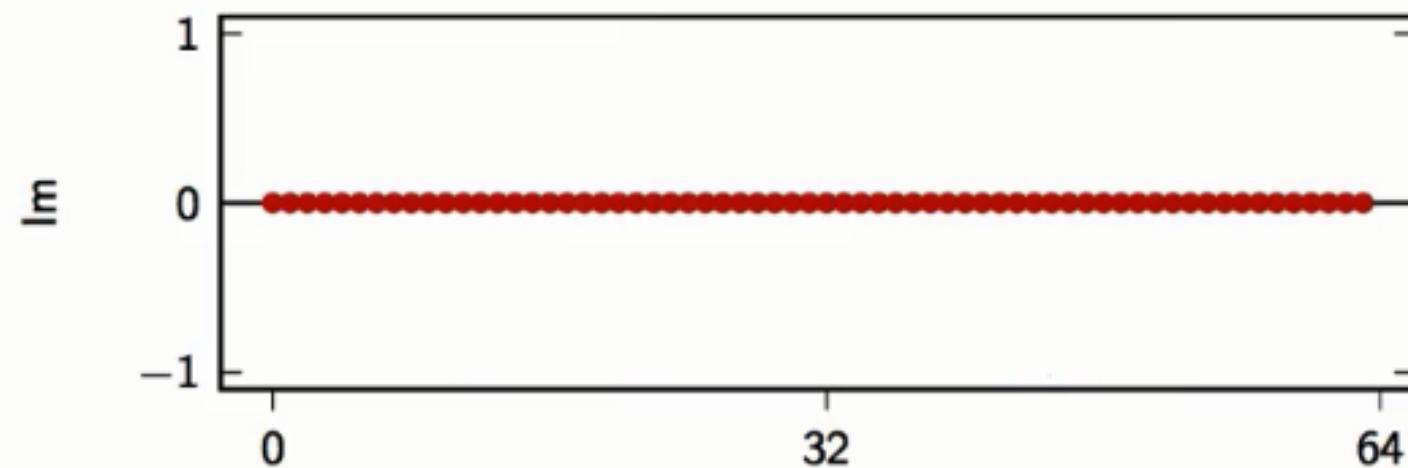
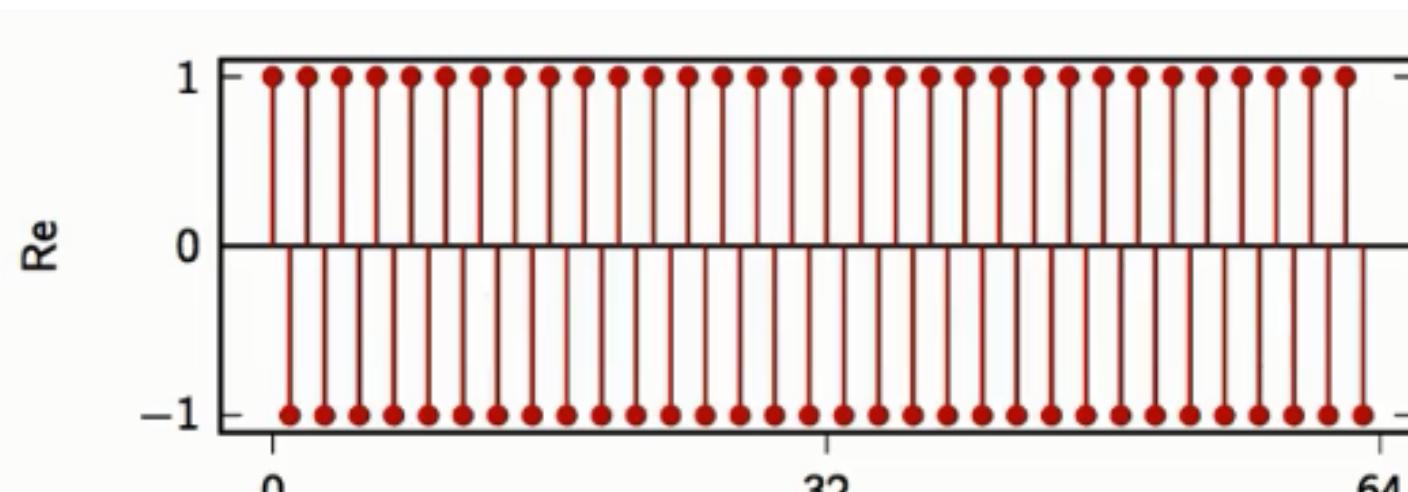
$w^{(31)} \in \mathbb{C}^{64}$



Базис Фурье при $N = 64$

$$\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 32 = \pi$$

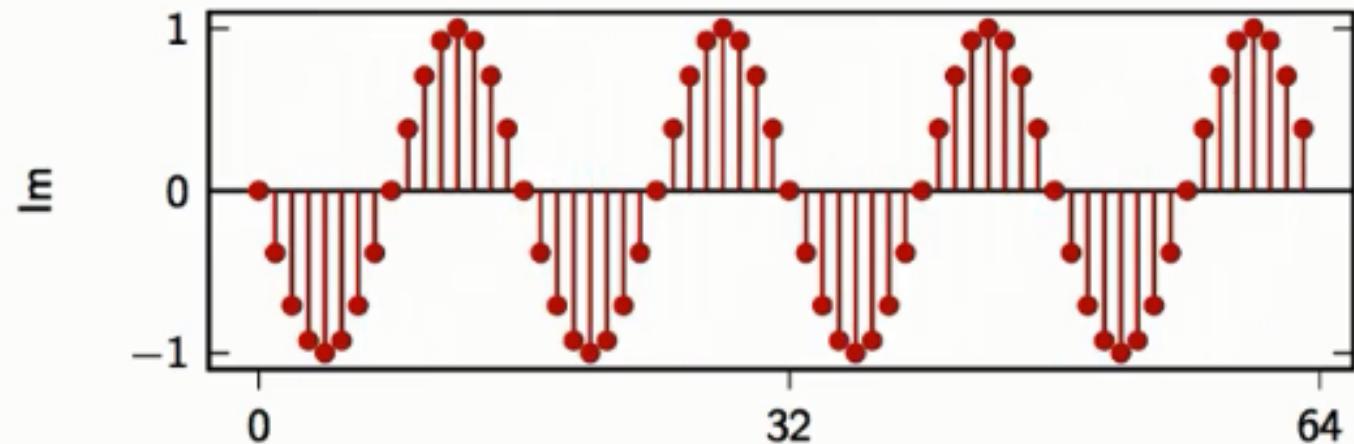
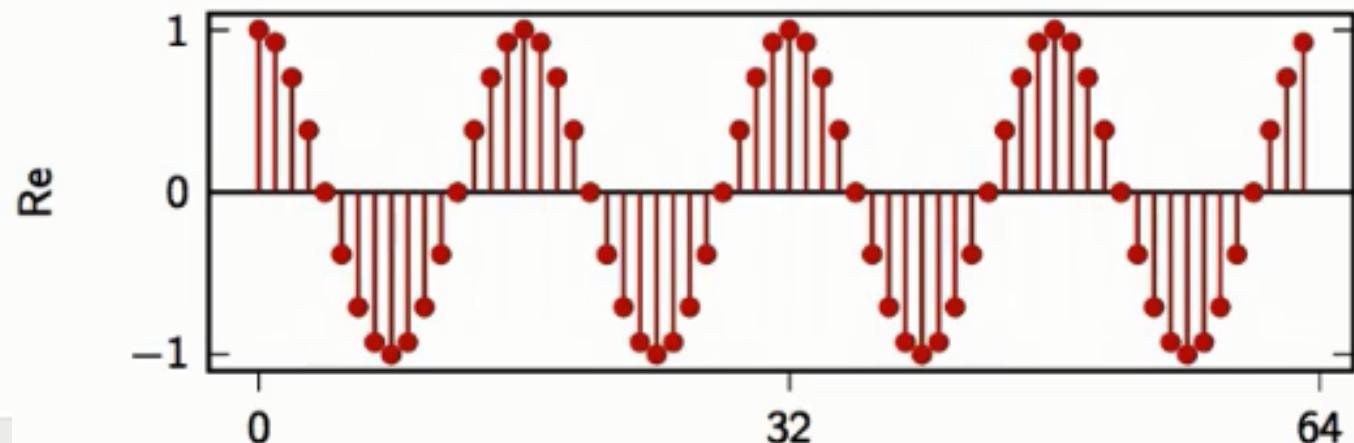
$\mathbf{w}^{(32)} \in \mathbb{C}^{64}$



Базис Фурье при $N = 64$

для $k > 32$ вращение против часовой стрелки на комплексной плоскости сменяется вращением по часовой. Частота синусоиды падает.

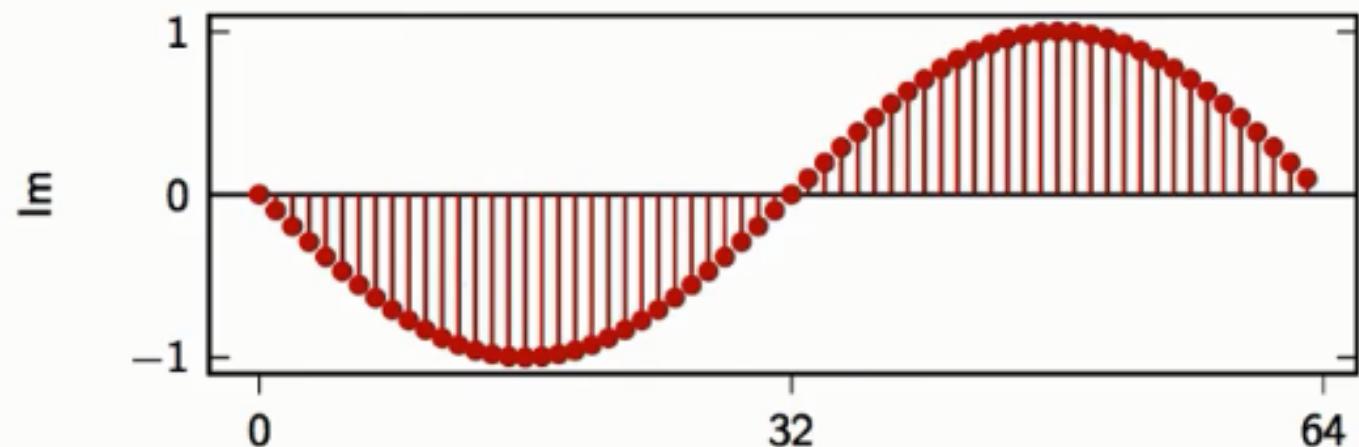
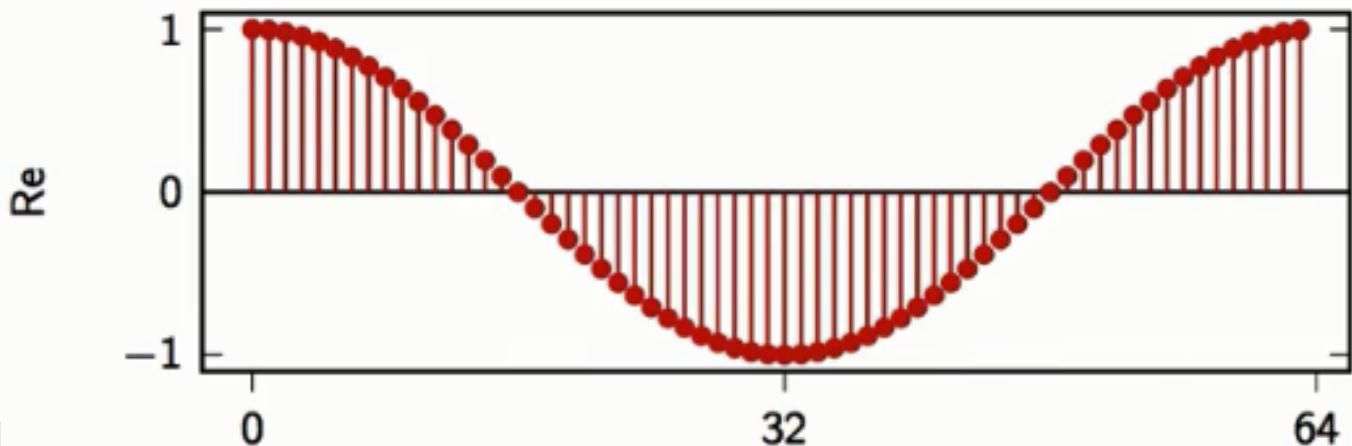
$$\mathbf{w}^{(60)} \in \mathbb{C}^{64}$$



Базис Фурье при $N = 64$

Действительные части для векторов k и $N-k$ ($\mathbf{w}^{(1)}$ и $\mathbf{w}^{(63)}$) совпадают, но мнимые части сдвинуты по фазе на π

$$\mathbf{w}^{(63)} \in \mathbb{C}^{64}$$



Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Итак, **базис Фурье** в \mathbb{C}^N выглядит как набор сигналов:

$$w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Или набор векторов $\{w^{(k)}\}$ (ортогональных, но не ортонормированных):

$$w_n^{(k)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- *k – порядковый номер вектора*
- *n – номер элемента вектора*
- *N – размерность пространства (число независимых базисных векторов)*

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ, Discrete Fourier Transform, DFT)* называют разложение сигнала $x[n]$ по базису Фурье (Фурье-анализ):

$$X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Или в векторном представлении

$$X_k = \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle$$

* Есть несколько способов задать это преобразование, различающихся нормировками

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Обратным дискретным преобразованием Фурье (ДПФ, Discrete Fourier Transform, DFT) называют восстановление сигнала $x[n]$ (Фурье-синтез):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Или в векторном представлении

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{w}^{(k)}$$



нормирующий коэффициент вынесен в формулу обратного преобразования

DFT в матричной форме

$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$ - комплексное число (**поворотный множитель**)

Можно определить **матрицу перехода** как

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ & & & \ddots & & \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

эрмитово сопряжение

Прямое ДПФ: $\mathbf{X} = \mathbf{Wx}$

Обратное ДПФ: $\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}$

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

$$X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- N – число отсчетов входного сигнала за период времени T
- n - номер отсчета дискретизированного сигнала
- k – номер выходного коэффициента ДПФ (номер гармоники выходного преобразования)

$$|X[k]| = \sqrt{Re(X)^2 + Im(X)^2} \longrightarrow \text{амплитуда}$$

$$\angle X[k] = \arctan \frac{Im(X)}{Re(X)} \longrightarrow \text{фаза}$$

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

$$X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$X[k]$ называют **спектральной плотностью** (**спектром**) дискретной последовательности $x[n]$.

ДПФ сигналу длиной N отсчетов ставит в соответствие N спектральных (частотных) коэффициентов.

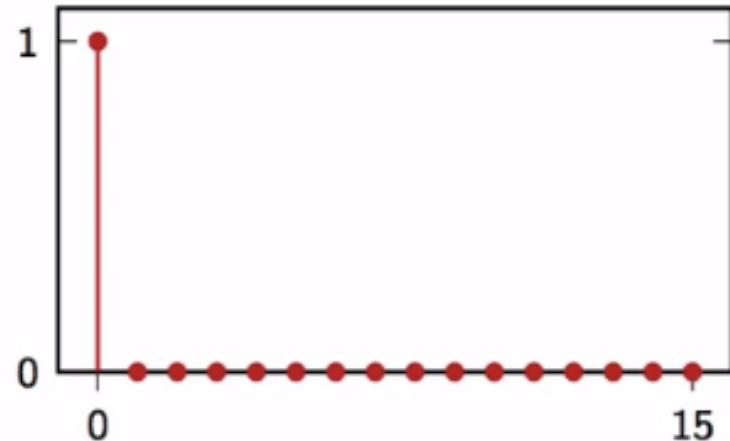
Для вычисления одного коэффициента требуется N операций комплексного умножения и сложения.

Т.к. таких операций N , то общая вычислительная сложность ДПФ равна N^2 .

DFT-преобразование простых сигналов

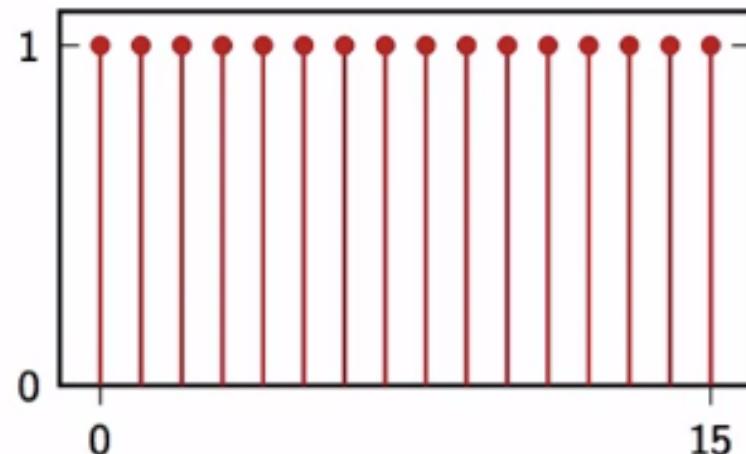
DFT-преобразование простых сигналов

$$x[n] = \delta[n], \quad x[n] \in \mathbb{C}^N$$



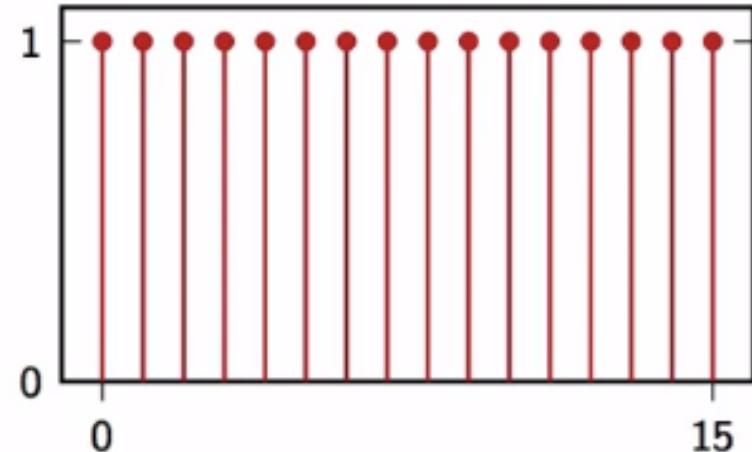
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

DFT-преобразование дельта-последовательности содержит все возможные частоты



DFT-преобразование простых сигналов

$$x[n] = 1, \quad x[n] \in \mathbb{C}^N$$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

аналогично, DFT-преобразование единичной ступеньки (функции Хевисайда) является дельта-последовательностью



DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$

формула Эйлера

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 4 n\right)$$

$$= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64}4n} + e^{j\frac{2\pi}{64}60n} \right] = \frac{3}{2}(w_4[n] + w_{60}[n])$$

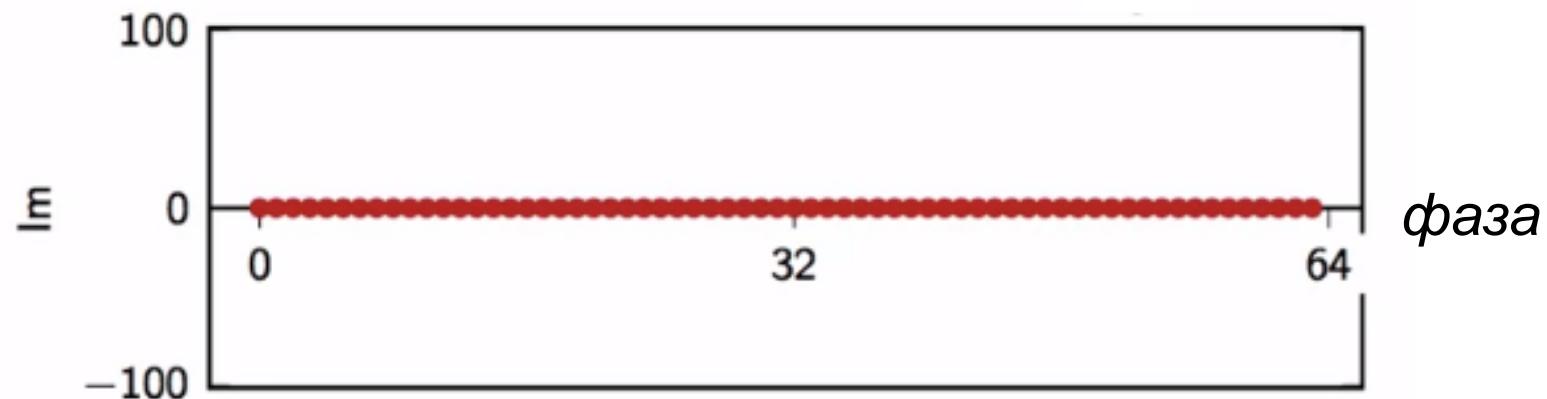
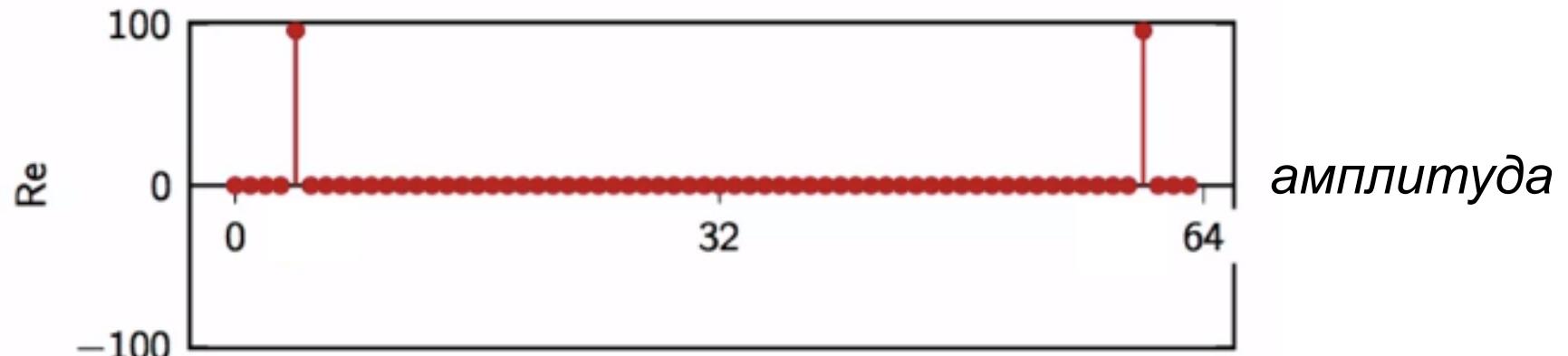
линейность векторного
произведения

$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle = \langle w_k[n], \frac{3}{2}(w_4[n] + w_{60}[n]) \rangle$$

DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$

Только
 $X[4] \neq 0$ и
 $X[64] \neq 0$



DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

Рассмотрим тот же сигнал, но сдвинутый по фазе

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n + \pi/3), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 4 n + \frac{\pi}{3}\right)$$

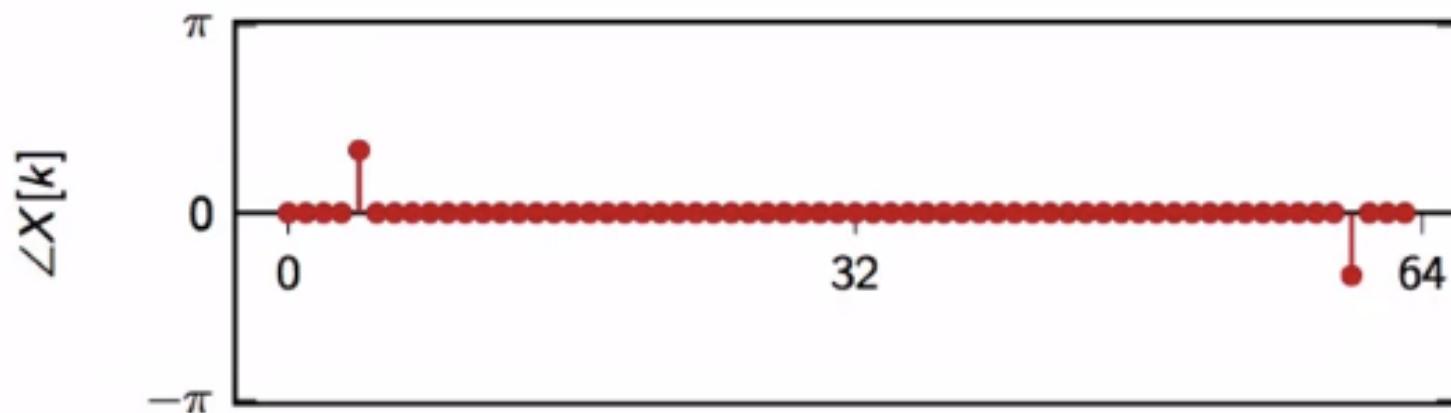
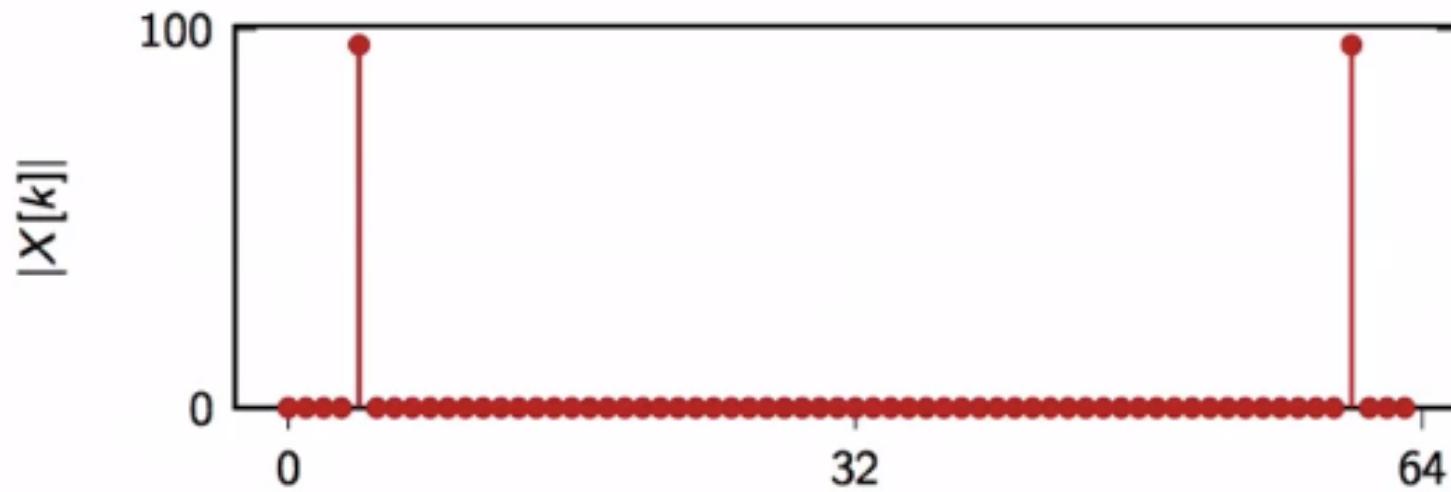
$$= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64}4n} e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}4n} e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] = \frac{3}{2} (e^{j\frac{\pi}{3}} w_4[n] + e^{-j\frac{\pi}{3}} w_{60}[n])$$

$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle$$

$$= \begin{cases} 96e^{j\frac{\pi}{3}} & \text{for } k = 4 \\ 96e^{-j\frac{\pi}{3}} & \text{for } k = 60 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n + \pi/3), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$



DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

Рассмотрим сигнал, не совпадающий ни с одной из базисных функций Фурье в \mathbb{C}^{64} :

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/10 n), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$

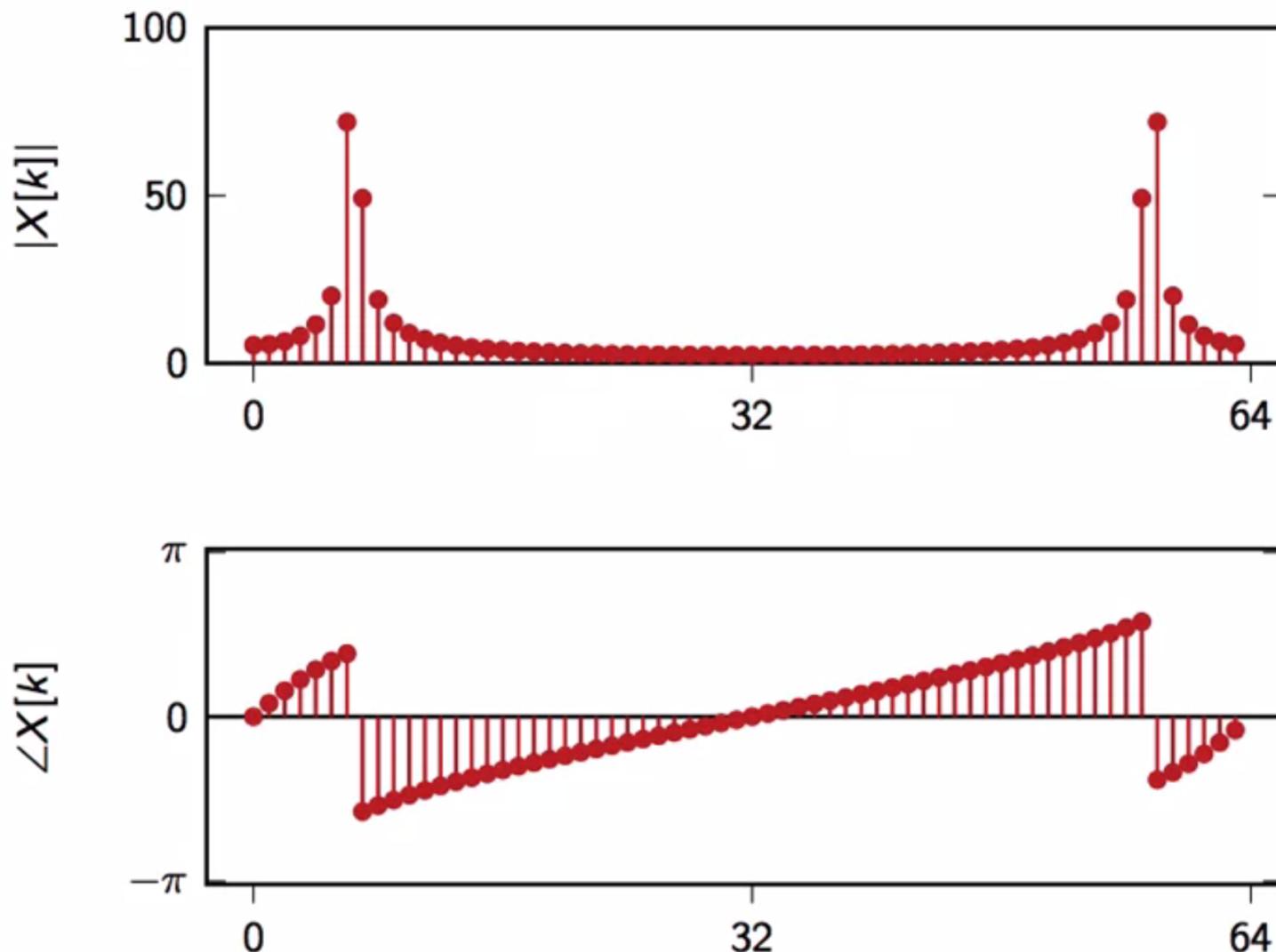
$$\frac{2\pi}{64} 6 < \frac{2\pi}{10} < \frac{2\pi}{64} 7$$

Для такого сигнала ни один из коэффициентов DFT-преобразования не будет нулевым

Для их нахождения нужно использовать численные методы

DFT-преобразование в \mathbb{C}^{64}

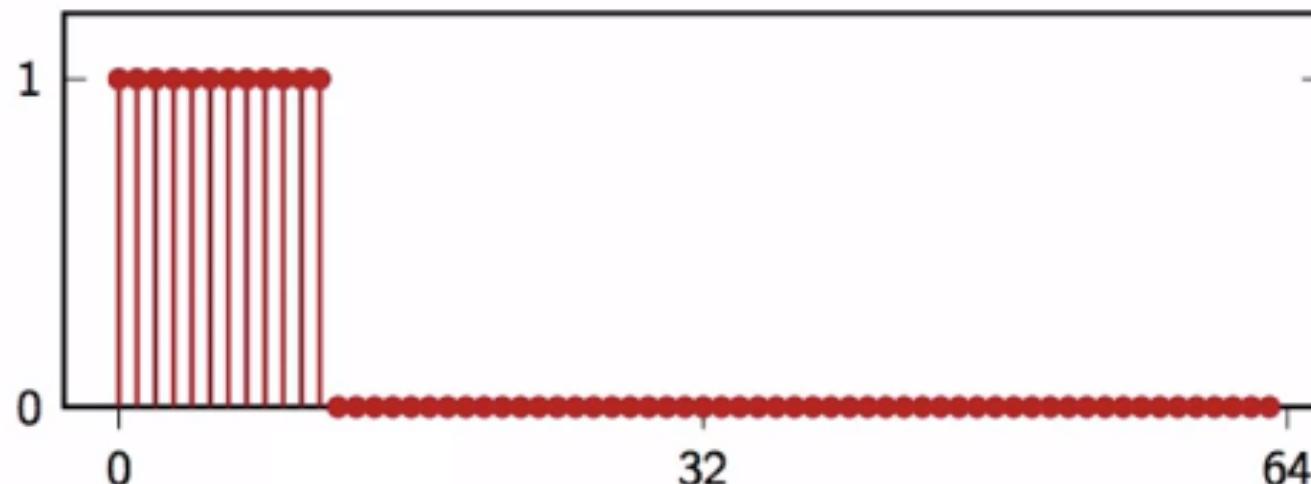
$$x[n] = 3 \cos(2\pi/10 n), \quad x[n] \in \mathbb{C}^{64}$$



DFT-преобразование в \mathbf{C}^N

Рассмотрим сигнал, представляющий собой единичную ступеньку длины M в \mathbf{C}^N :

$$x[n] = \sum_{h=0}^{M-1} \delta[n - h], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$



DFT-преобразование в \mathbb{C}^N

$$x[n] = \sum_{h=0}^{M-1} \delta[n - h], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

сумма геометрической прогрессии

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N} kM}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N} k}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{N} kM} \left[e^{j\frac{\pi}{N} kM} - e^{-j\frac{\pi}{N} kM} \right]}{e^{-j\frac{\pi}{N} k} \left[e^{j\frac{\pi}{N} k} - e^{-j\frac{\pi}{N} k} \right]}$$



формула Эйлера

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} Mk\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N} k\right)} e^{-j\frac{\pi}{N}(M-1)k}$$

DFT-преобразование в \mathbb{C}^N

$$x[n] = \sum_{h=0}^{M-1} \delta[n - h], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$X[k] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}Mk\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} e^{-j\frac{\pi}{N}(M-1)k}$$

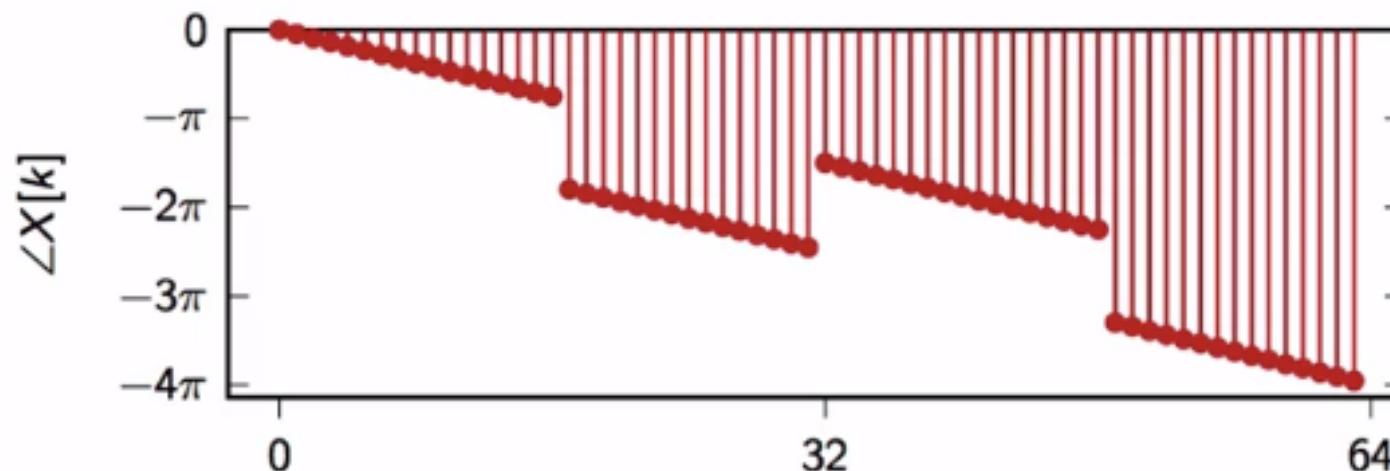
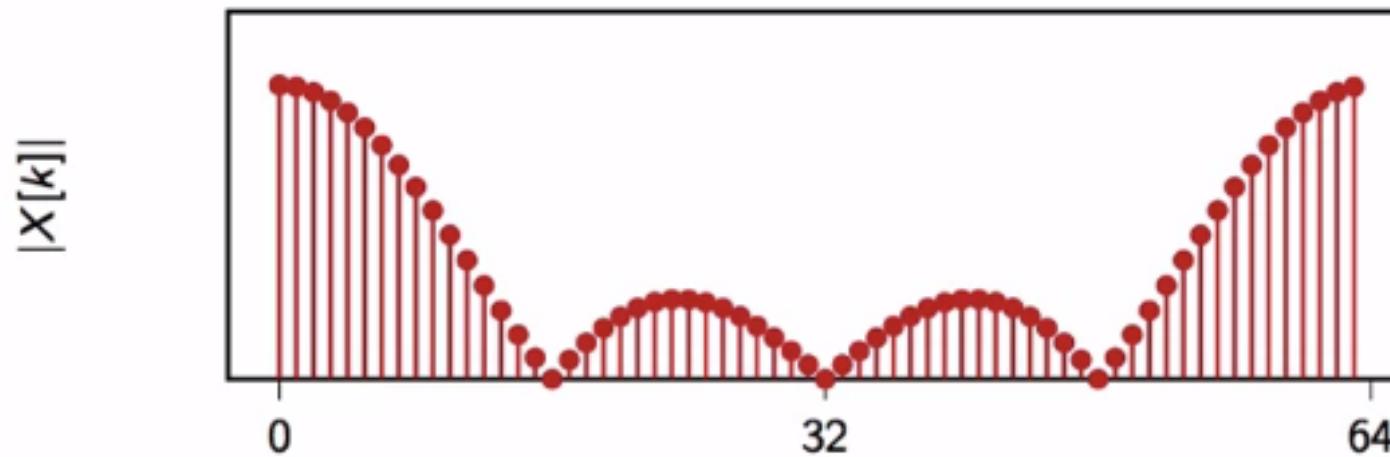
амплитуда

фаза

- ▶ $X[0] = M,$
- ▶ $X[k] = 0$ если Mk/N – целое число
- ▶ $\angle X[k]$ фаза линейна по k , кроме точек, в которых $X[k] = 0$

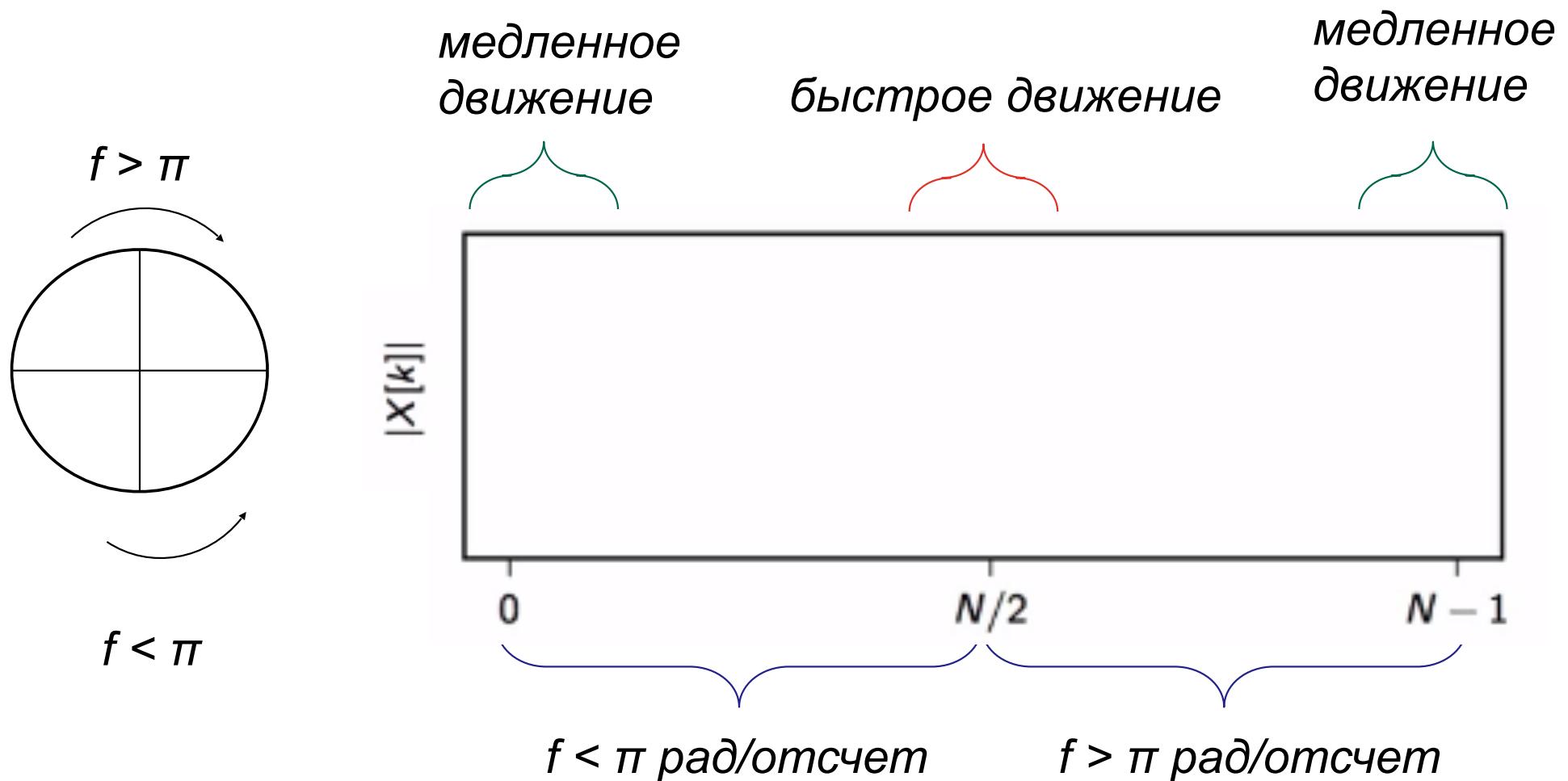
DFT-преобразование в \mathbb{C}^N

$$X[k] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}Mk\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} e^{-j\frac{\pi}{N}(M-1)k} \quad M = 4 \quad N = 64$$



DFT-преобразование. Интерпретация.

DFT-преобразование дает N коэффициентов разложения

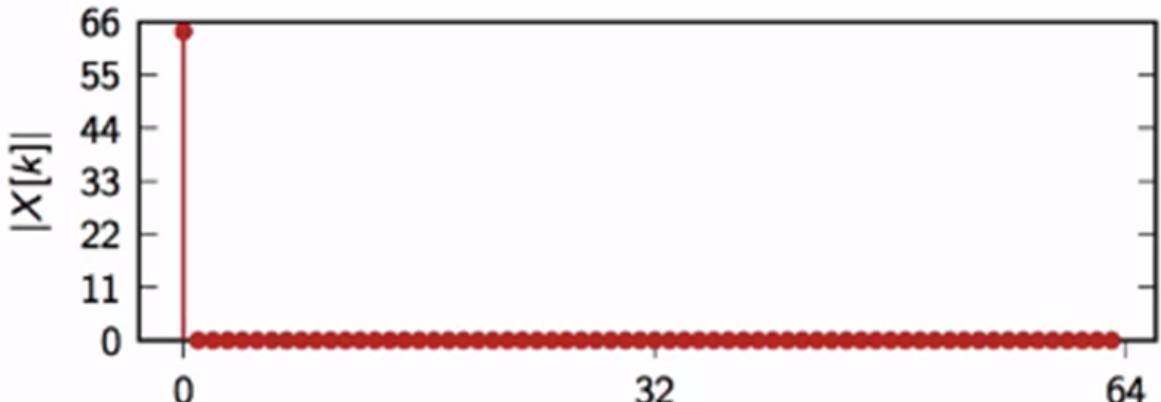


DFT-преобразование. Интерпретация.

$$x[n] = 1$$

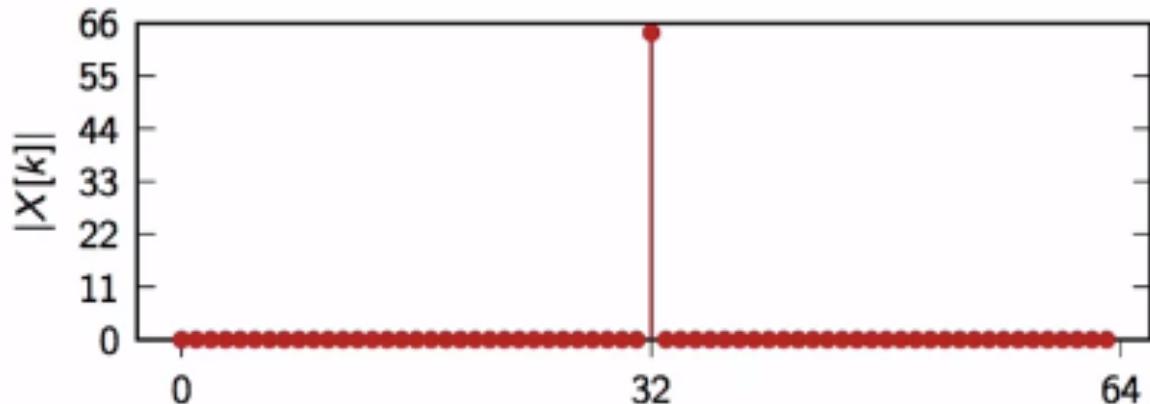
самый «медленный»
сигнал (не меняется)

ему соответствует самая
низкая частота
разложения



$$x[n] = \cos\pi n = (-1)^n$$

самый быстро
меняющийся из
возможных сигналов в
дискретном времени



Теорема Парсеваля

Теорема Парсеваля устанавливает равенство между энергией сигнала и энергией его спектра (закон сохранения энергии при смене базиса)

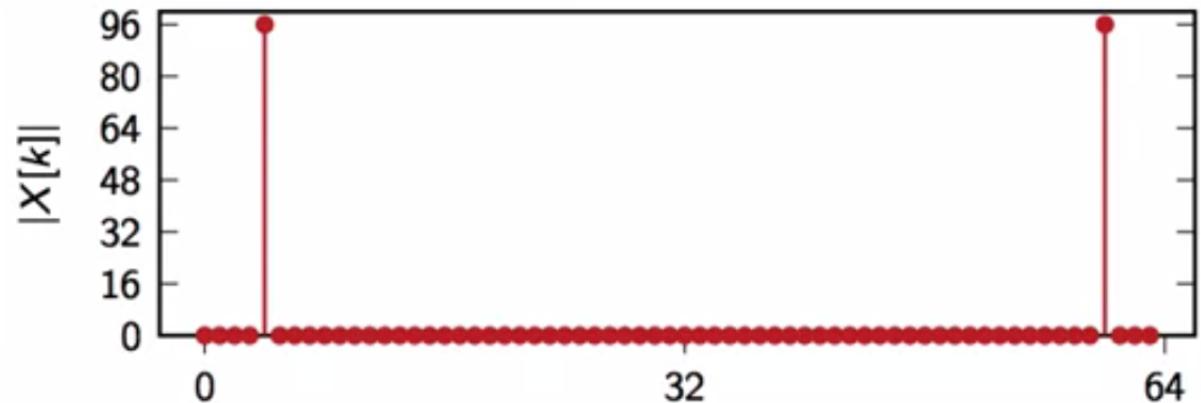
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} |X[k]|^2$$

квадрат k-го коэффициента ДПФ сигнала пропорционален квадрату энергии сигнала на частоте

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$

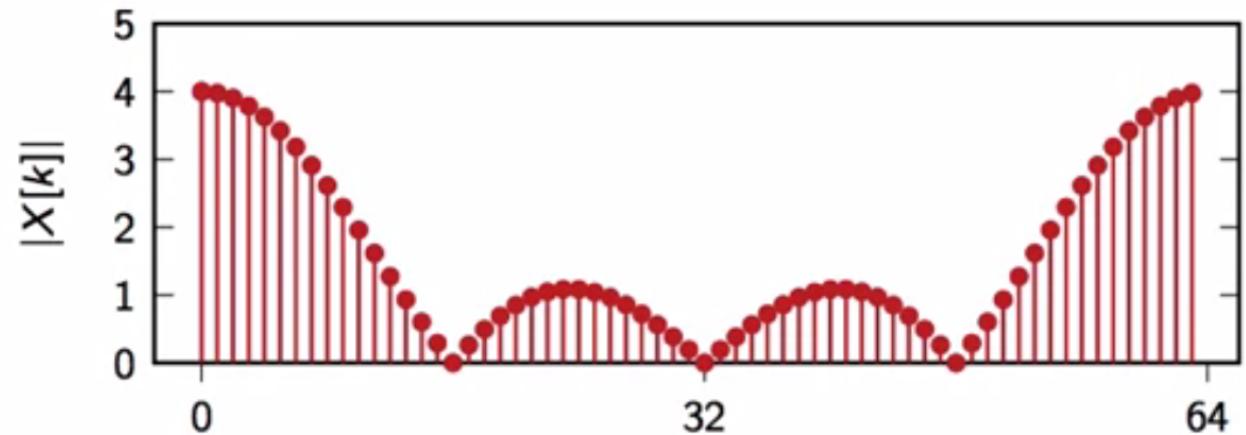
Теорема Парсеваля

$$x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n)$$



энергия сконцентрирована на одной частоте

$$x[n] = u[n] - u[n - 4]$$

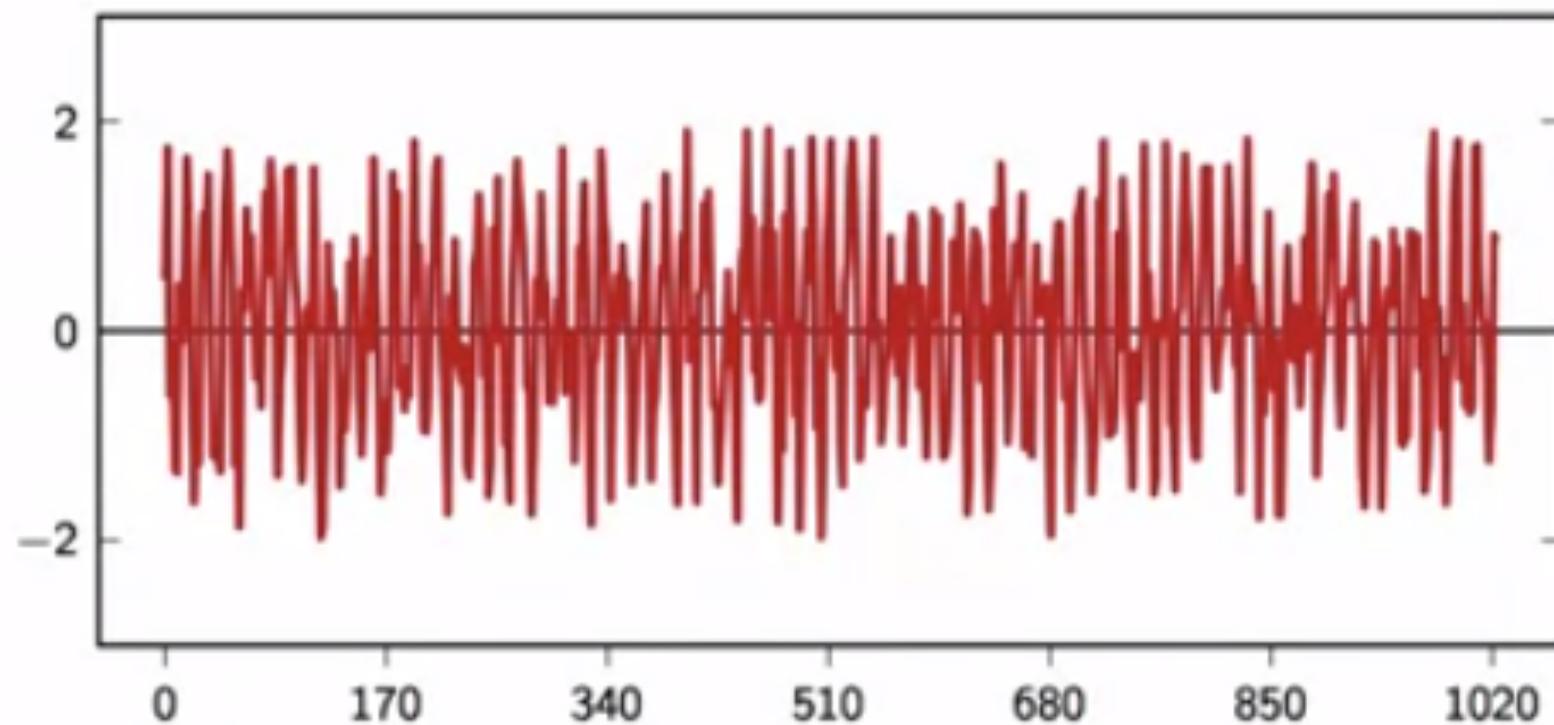


энергия сконцентрирована в основном на низких частотах

Восстановление сигнала по дискретным отсчетам

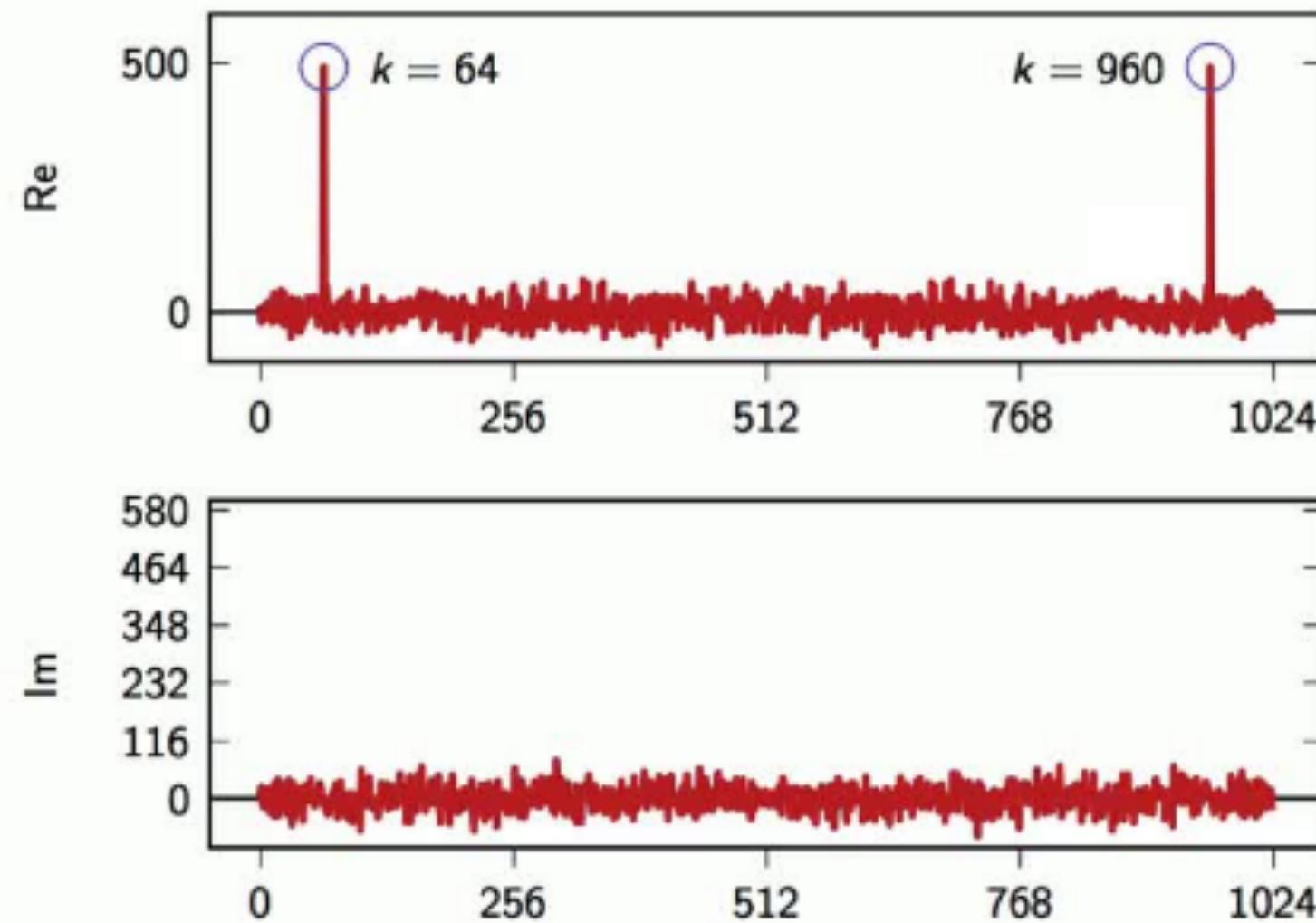
Восстановление сигнала

Рассмотрим некоторый произвольный сигнал длины $N = 1024$ отсчетов ...



Восстановление сигнала

... и его DFT-преобразование



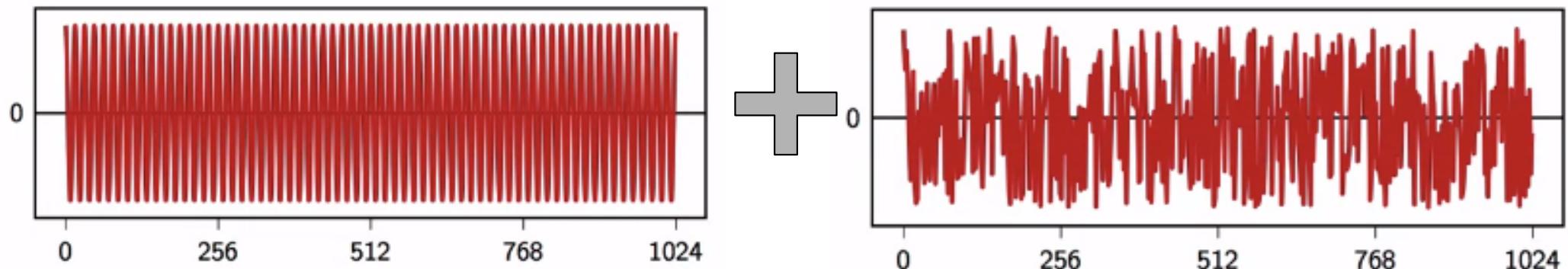
Восстановление сигнала

по DFT-преобразованию исходный неизвестный сигнал можно воссоздать

$$x[n] = \cos(\omega n + \phi) + \eta[n] \longrightarrow \text{шум}$$

$$\phi = 0 \longrightarrow \text{фаза}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1024} 64 \longrightarrow \text{круговая частота}$$



Восстановление сигнала

Условия, при которых непрерывный сигнал может быть точно восстановлен по соответствующим ему дискретным отсчетам, определяются *теоремой Котельникова.*



В.А. Котельников (1908-2005)

Теорема Котельникова является одной из основополагающих теорем в теории и технике цифровой связи.
Сформулирована в работе «О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи» (1933)

Восстановление сигнала

Теорема отсчетов или теорема **Котельникова** (**Найквиста-Шеннона**):

Любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго больше удвоенной верхней частоты спектра непрерывного сигнала (удвоенной ширины полосы частот, занимаемой спектром непрерывного сигнала).

$$f_S = \frac{1}{T_S} > 2f_{max}$$

f_s и T_s - частота и интервал дискретизации

$$\omega_S > 2\omega_{max}$$

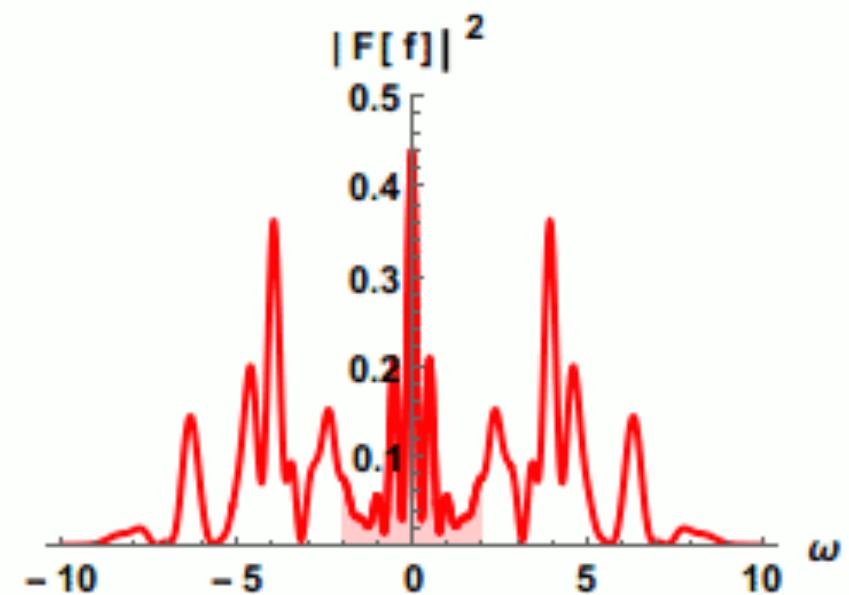
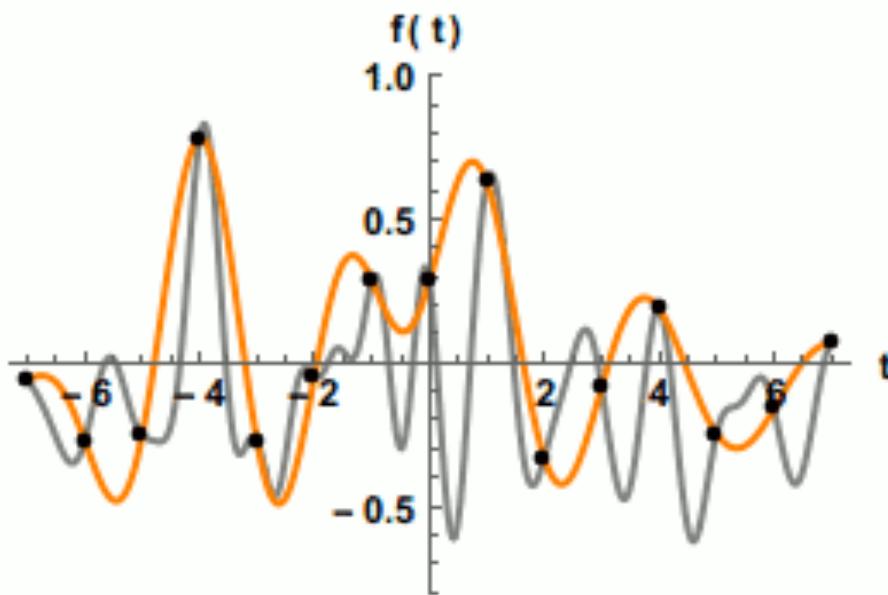
$$\omega = 2\pi f$$

Восстановление сигнала

интерполяционная формула

Уиттекера-Шеннона:

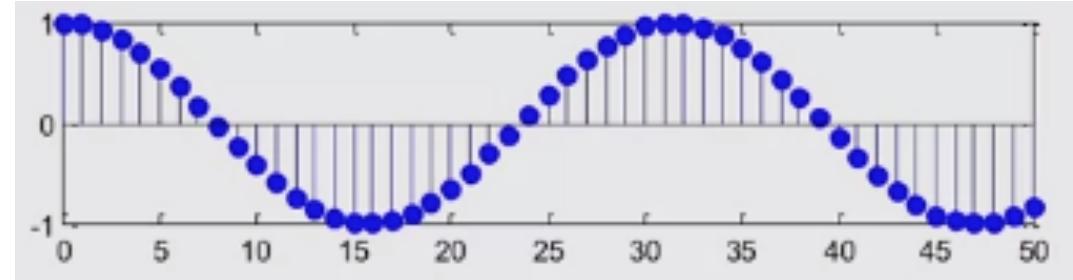
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$



Частота Найквиста

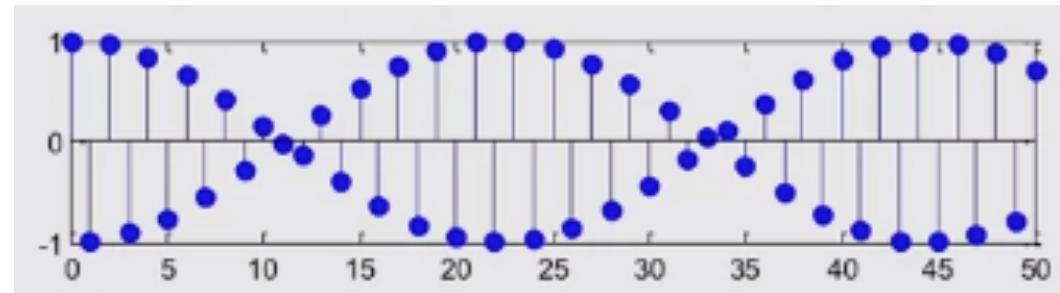
- сигнал низкой частоты

$\omega = 0.2$ рад/отсчет



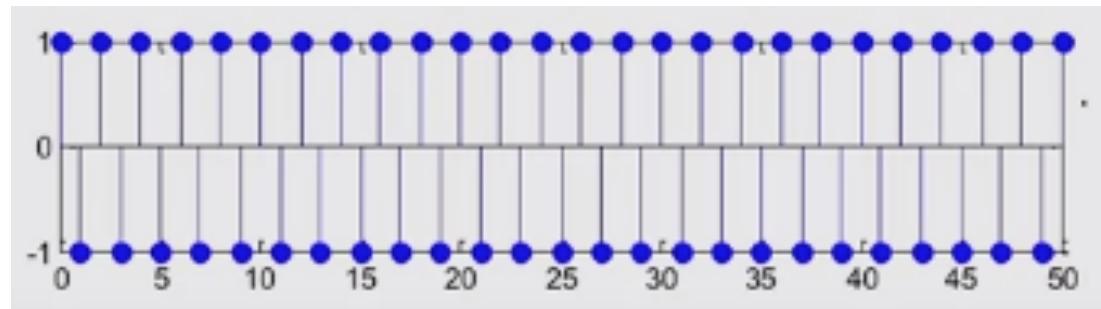
- сигнал высокой частоты

$\omega = 3$ рад/отсчет



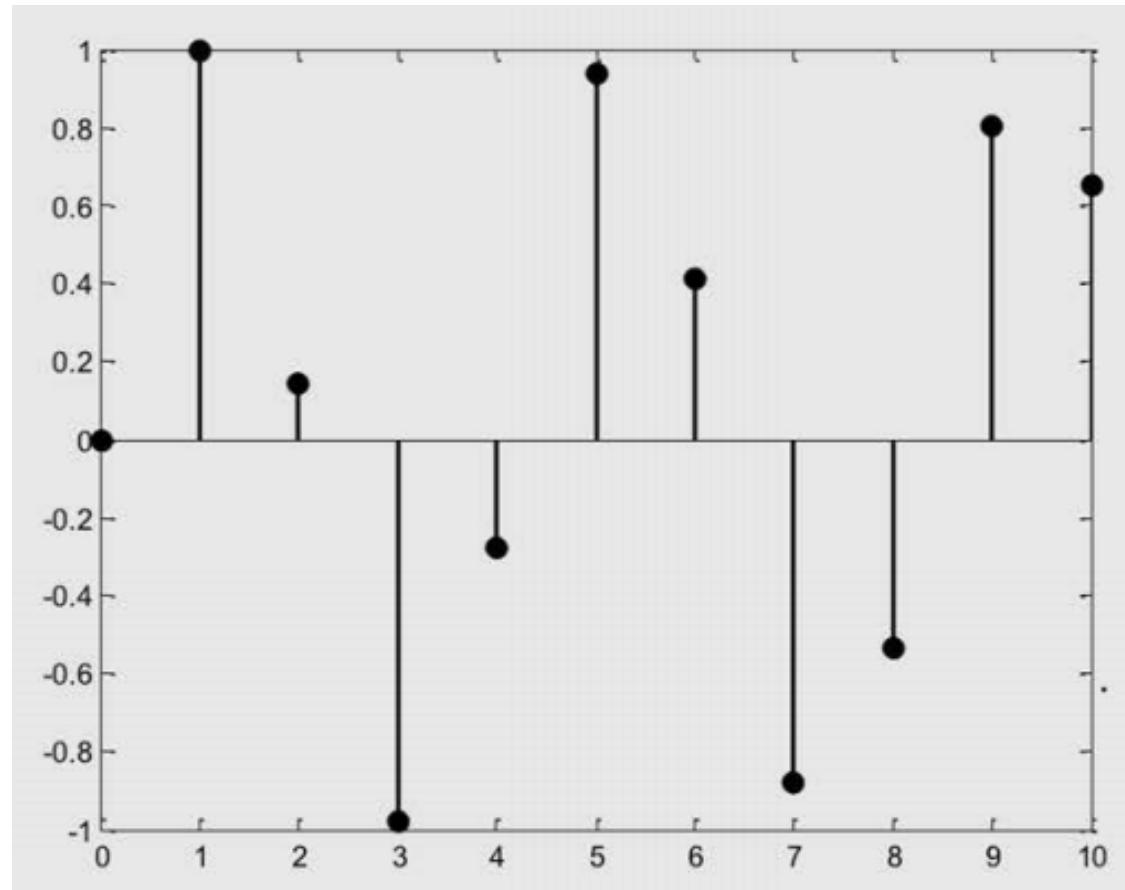
- сигнал на **частоте Найквиста**

$\omega = \pi$ рад/отсчет –
самая высокая частота в
основном рабочем
диапазоне частот



Понятие ложных частот (aliasing)

Пусть имеется некоторый дискретный гармонический сигнал:

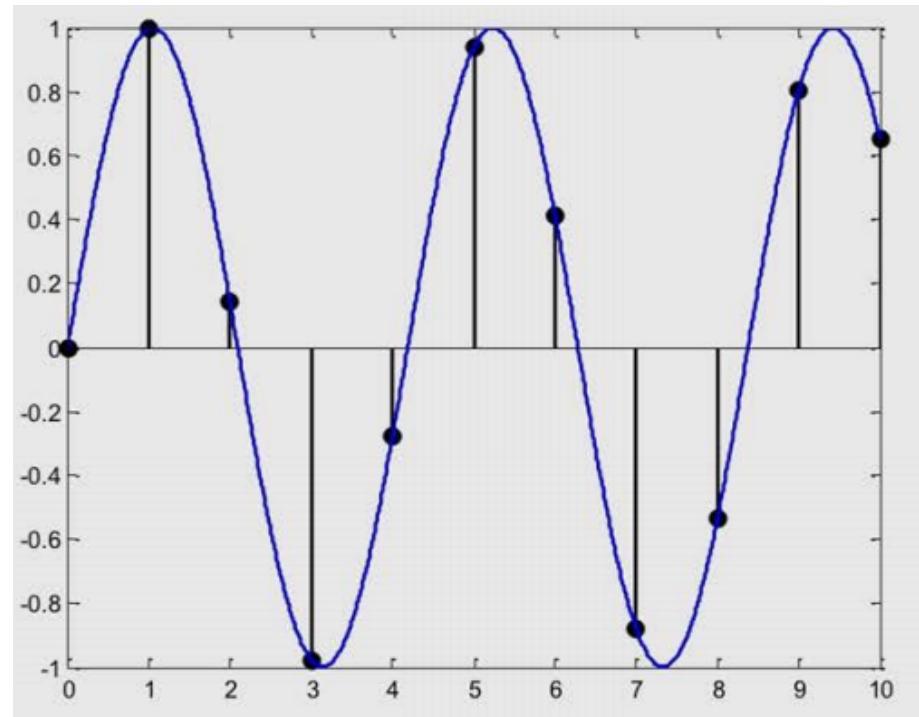
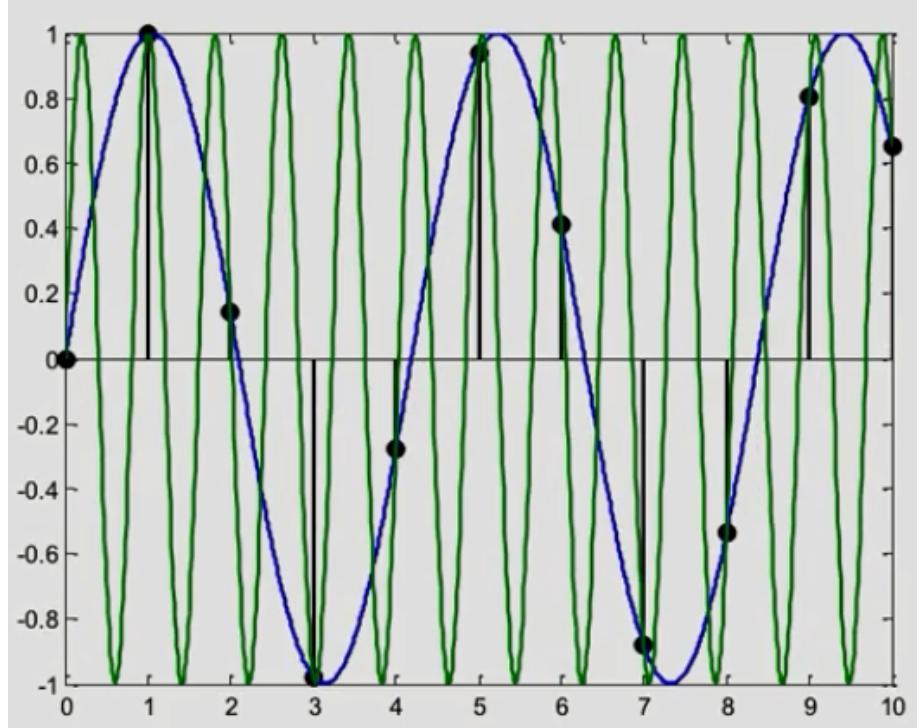


Чему равна его частота?

Понятие ложных частот (aliasing)

➤ Вариант 1

$$\omega = 1.5 \text{ рад/отсчет}$$

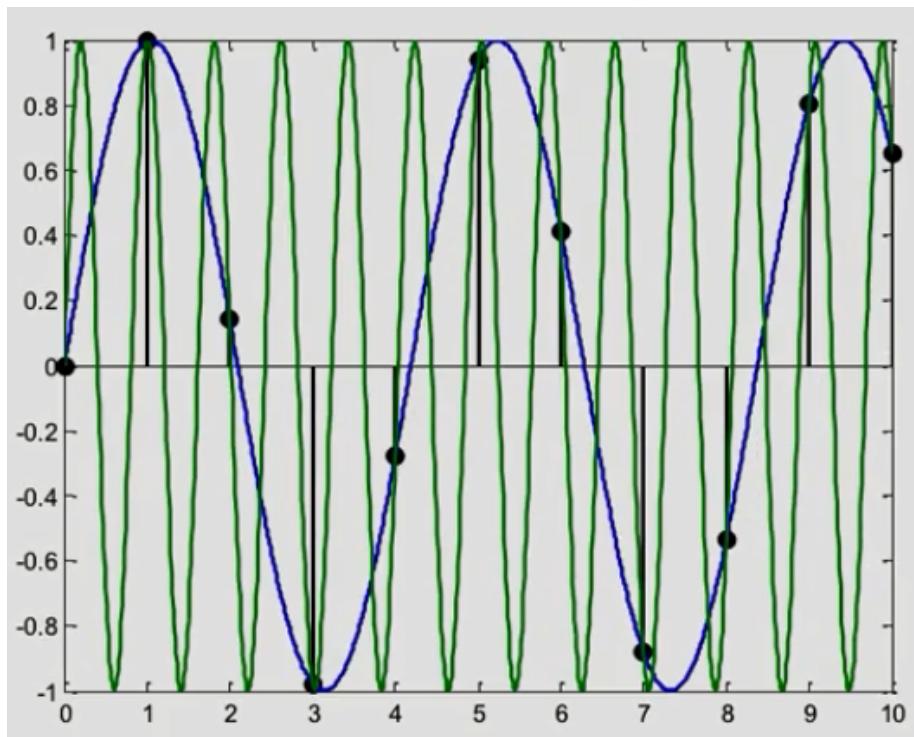


➤ Вариант 2

$$\omega = 1.5 + 2\pi \approx 7.78 \text{ (рад/отсчет)}$$

Понятие ложных частот (aliasing)

Через отсчеты дискретного гармонического сигнала можно провести сколько угодно непрерывных колебаний с разными частотами, отличающимися на величину, кратную 2π рад/отсчет



Ложные частоты (*aliasing*):

если дискретизировать
сигнал частоты 7.78 рад/
отсчет, в *рабочем диапазоне*
частот мы получим
частоту 1.5 рад/отсчет

Частота Найквиста

В теории обработки сигналов **частотой Найквиста** называют частоту, равную половине частоты дискретизации $0.5\omega_S$

Если спектр сигнала не содержит составляющих выше частоты Найквиста, теоретически такой сигнал может быть дискретизирован и затем восстановлен без искажений.

На практике достаточно, чтобы $\omega_S \geq 2\omega_{max}$

А если $\omega_S \equiv 2\omega_{max}$?



Проблемы возникают, только если в спектре сигнала содержится гармоническое колебание с частотой

$$\omega_{max}$$

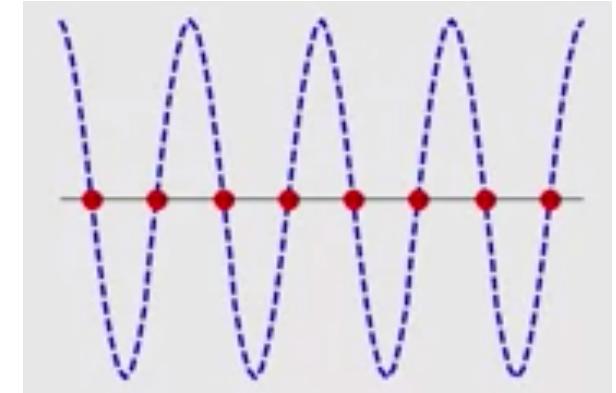
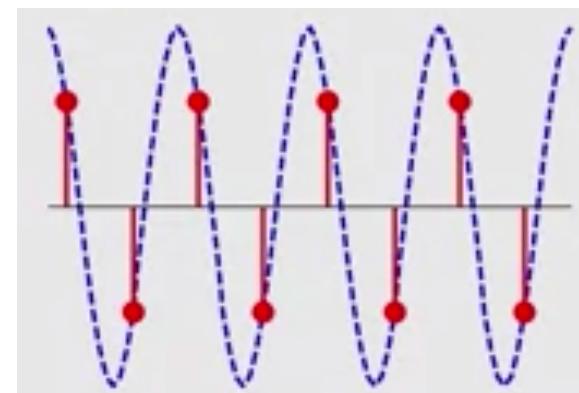
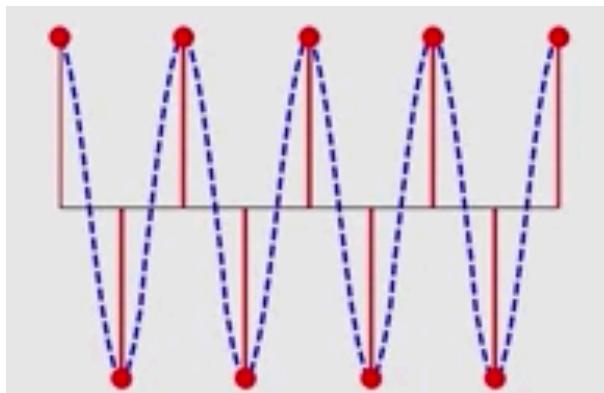
Частота Найквиста

А если $\omega_S \equiv 2\omega_{max}$?



Проблемы возникают, только если в спектре сигнала содержится гармоническое колебание с частотой

$$\omega_{max}$$

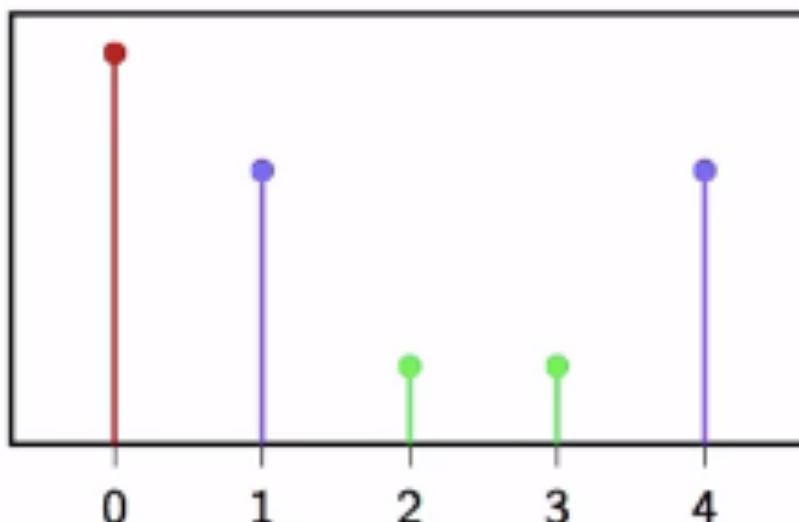


Основные свойства ДПФ

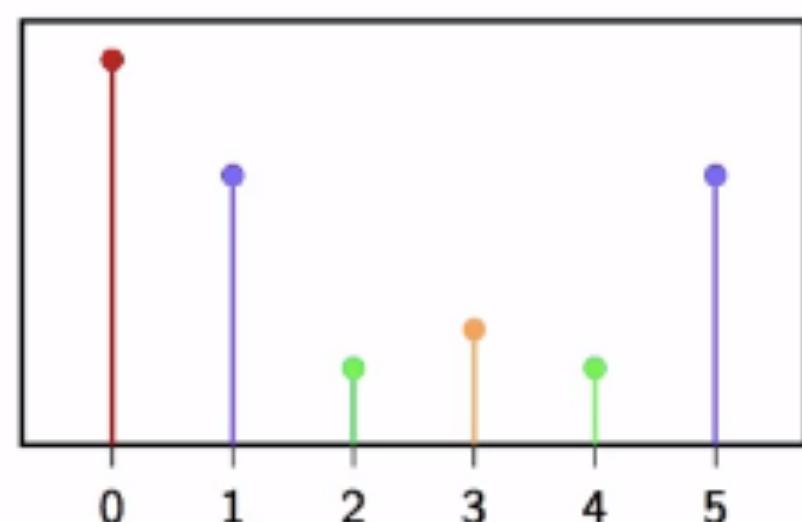
DFT-преобразование действительных сигналов

DFT-преобразование действительных сигналов
«симметрично» по амплитуде

$$|X[k]| = |X[N - k]|, k = 1, 2, \dots [N/2]$$



$N = 5$ (нечетно)



$N = 6$ (четно)

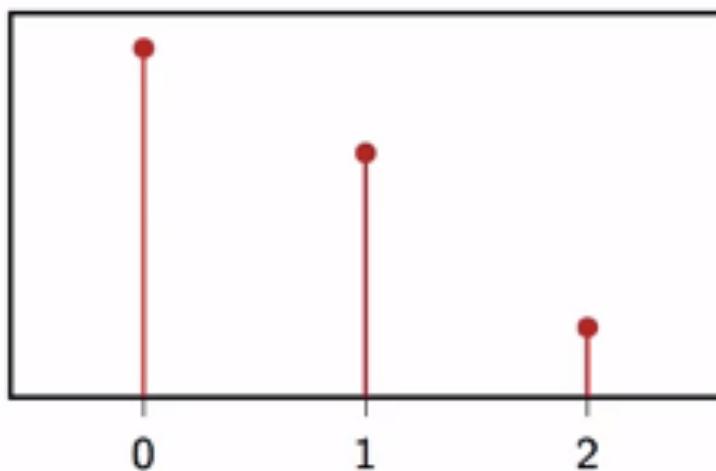
DFT-преобразование действительных сигналов

Число неповторяющихся коэффициентов DFT-преобразования действительных сигналов равно

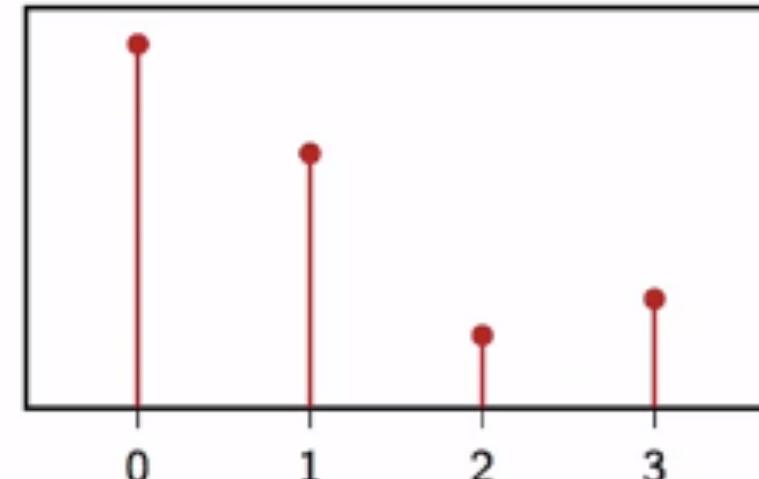
$$\lfloor N/2 \rfloor + 1$$



оператор “floor” - наибольшее целое, меньшее или равное $N/2$



$N = 5$ (нечетно)



$N = 6$ (четно)

Основные свойства ДПФ

- **Линейность:** сумма спектров сигналов равна спектру суммы сигналов.

$$\text{DFT} \{ \alpha x[n] + \beta y[n] \} = \alpha \text{DFT} \{ x[n] \} + \beta \text{DFT} \{ y[n] \}$$

- **Симметрия ДПФ** вещественного сигнала

$$X[N - m] = X^*[m], m = 0, 1, \dots, N - 1$$

↓

$$|X[N - m]| = |X[m]|$$

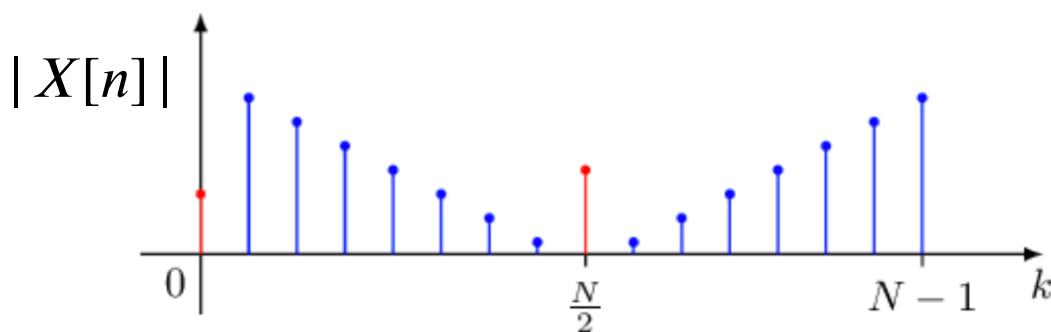
$$\angle X[N - m] = -\angle X[m]$$

Основные свойства ДПФ

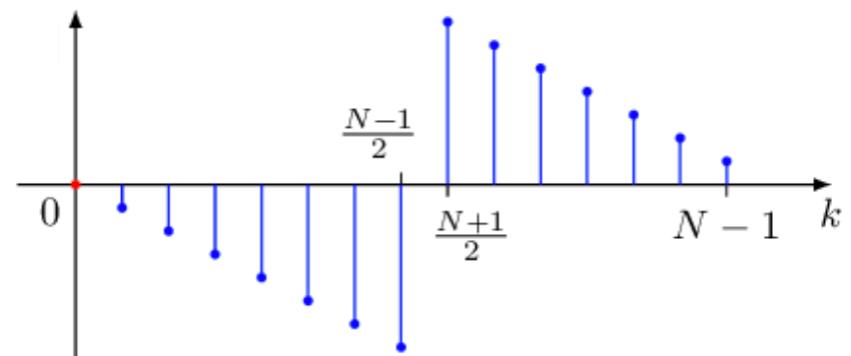
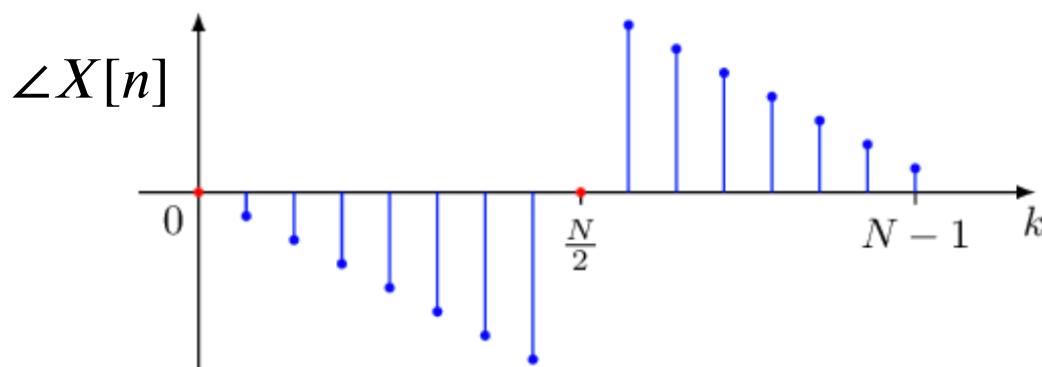
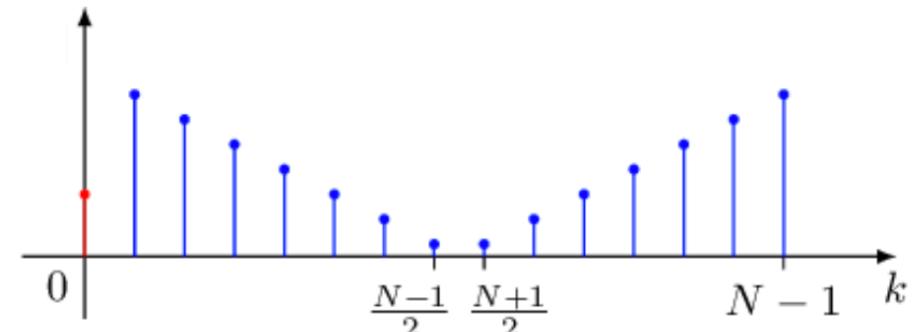
- Симметрия ДПФ вещественного сигнала

$$X[N-m] = X^*[m], m = 0, 1, \dots, N-1$$

N четно



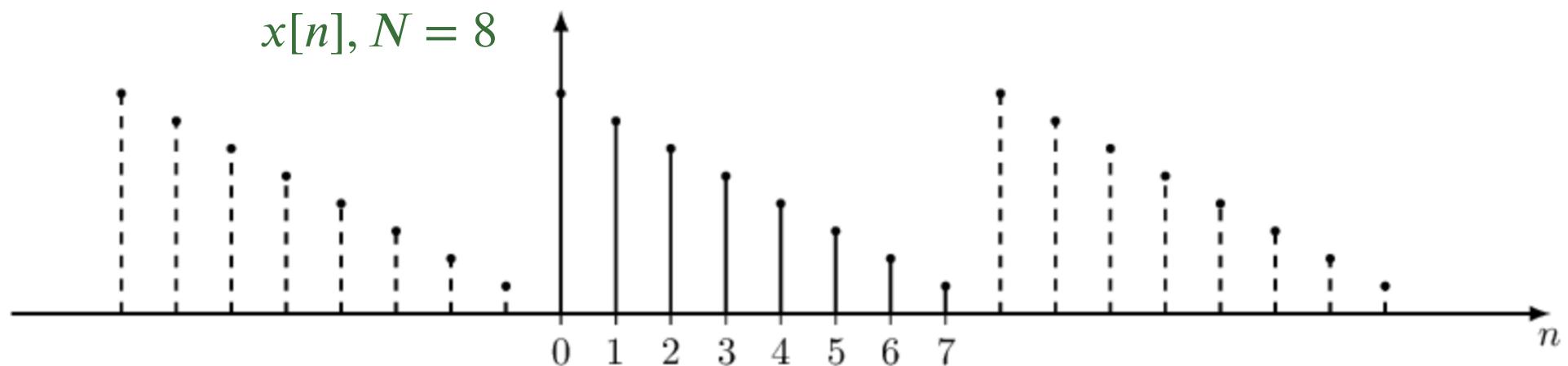
N нечетно



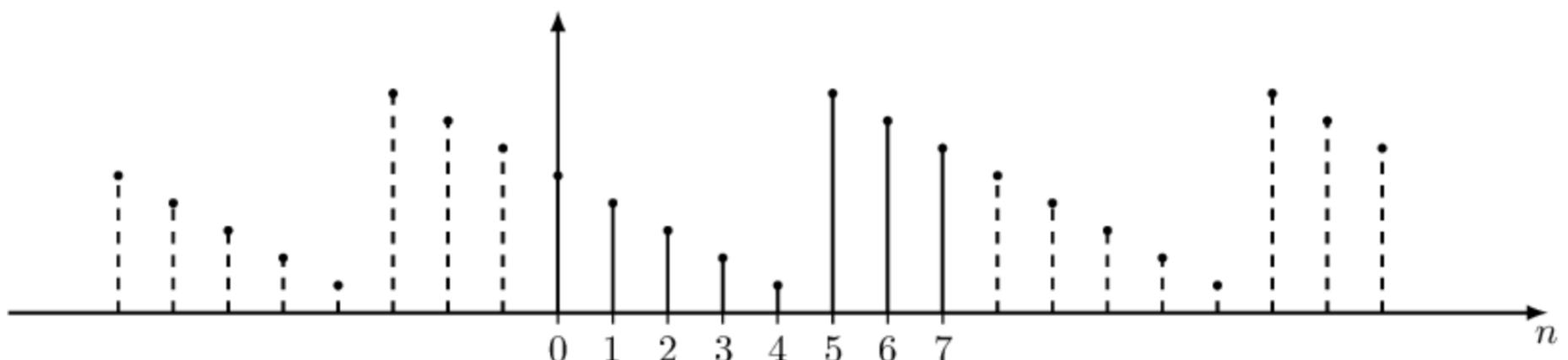
Основные свойства ДПФ

- **Сдвиг по отсчетам (по времени)**

$$y[n] = x[n - m]_{modN}$$



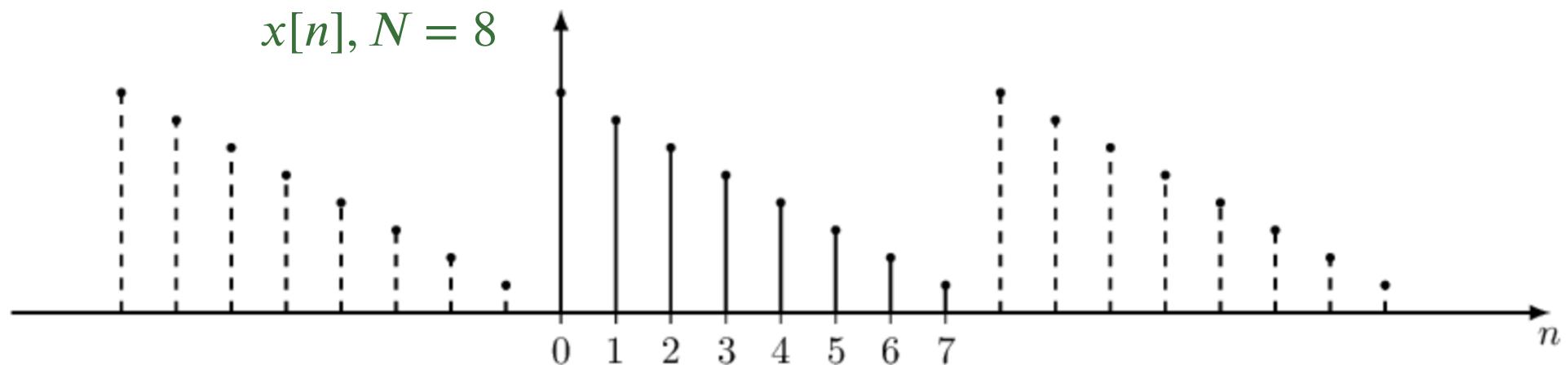
$$y[n], m = -3, N = 8$$



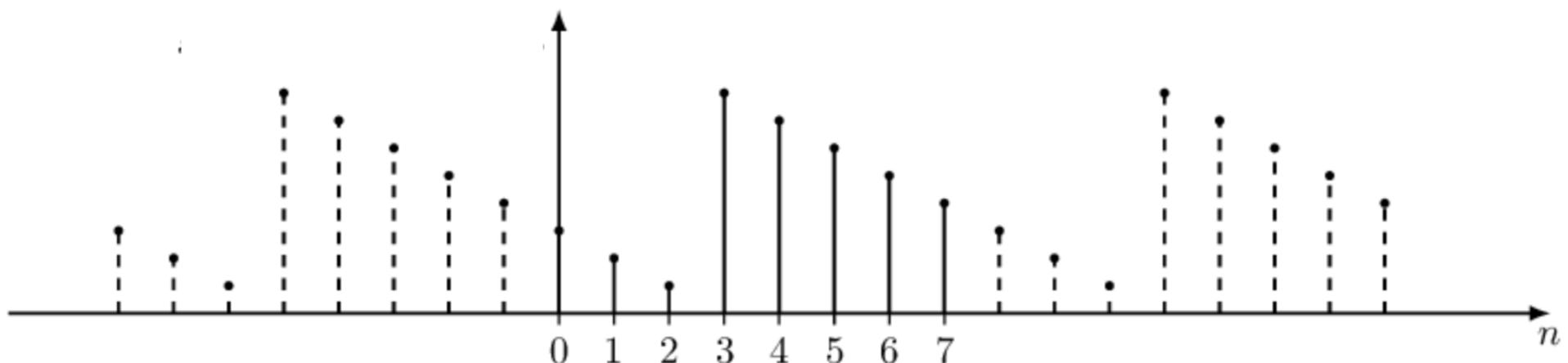
Основные свойства ДПФ

- **Сдвиг по отсчетам (по времени)**

$$y[n] = x[n - m]_{modN}$$



$$y[n], m = 3, N = 8$$



Основные свойства ДПФ

- **Сдвиг по отсчетам (по времени)**

$$y[n] = x[n - m]_{modN}$$

$$Y[n] = X[n]e^{-j\frac{2\pi nm}{N}}$$

Циклический сдвиг сигнала на m отсчётов приводит к повороту фазового спектра, а амплитудный спектр при этом не изменяется.

Основные свойства ДПФ

➤ **ДПФ циклической свертки сигналов**

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a[n]b[n - m]_{modN}$$

$$X[n] = A[n]B[n]$$

Спектр циклической свертки двух сигналов равен произведению спектров этих сигналов.

Это свойство позволяет использовать быстрые алгоритмы ДПФ для вычисления свертки.

Основные свойства ДПФ

- **ДПФ произведения двух сигналов**

$$x[n] = a[n]b[n]$$

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A[n]B[n - m]_{modN}$$

Спектр произведения двух сигналов представляет собой циклическую свертку спектров этих сигналов.

Основные свойства ДПФ

- ДПФ от *чётных и нечётных функций*.

ДПФ четной функции вырождается в косинусное преобразование Фурье

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), k = 0, 1, \dots, N-1$$

ДПФ нечетной функции вырождается в синусное преобразование Фурье

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), k = 0, 1, \dots, N-1$$

Пример ДПФ. Анализ музыкальных инструментов.

Звуковой сигнал

Звуковой сигнал - звуковая волна (механические колебания) с меняющейся амплитудой и частотой

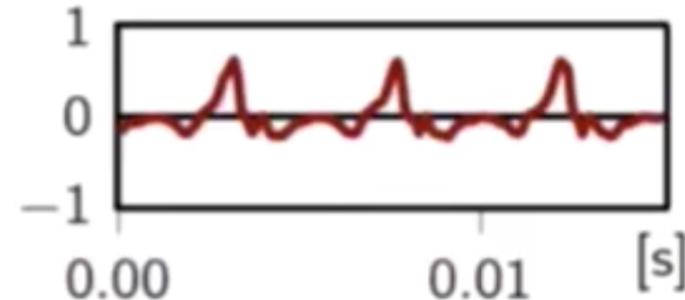
Обычный человек способен слышать звуковые колебания в диапазоне частот от 16—20 Гц до 15—20 кГц

Характеристики звукового сигнала:

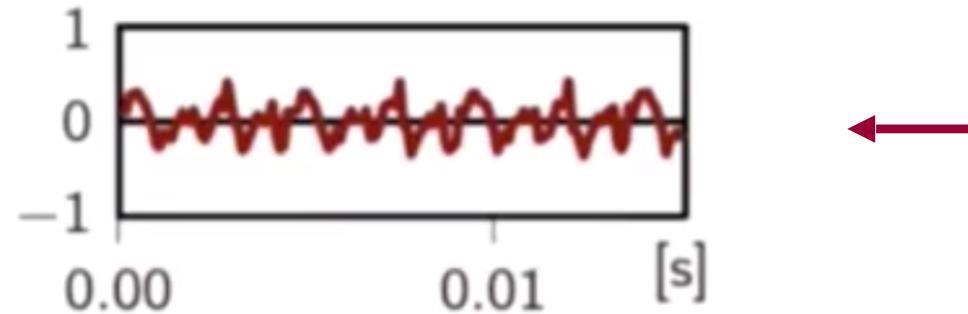
- громкость → *амплитуда сигнала*
- высота → *частота сигнала (основная)*
- тембр → *гармоника (спектральный состав)*
- длительность

Звуковой сигнал

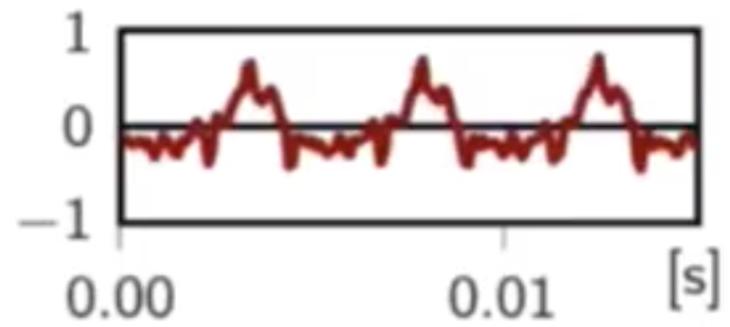
саксофон



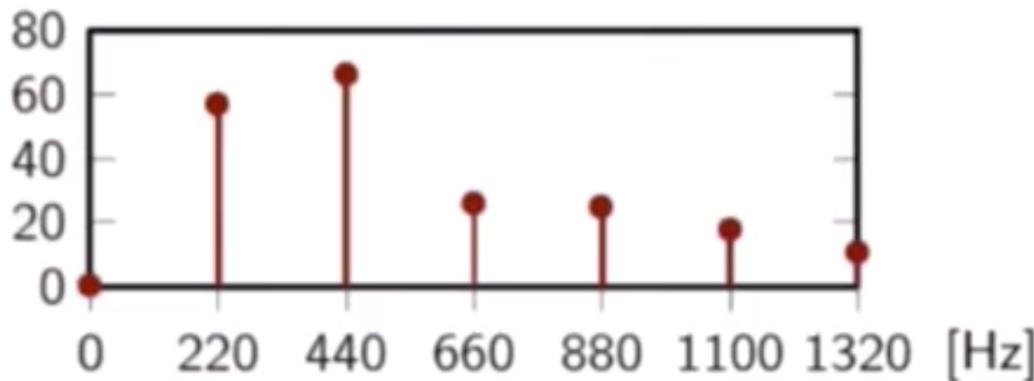
виолончель



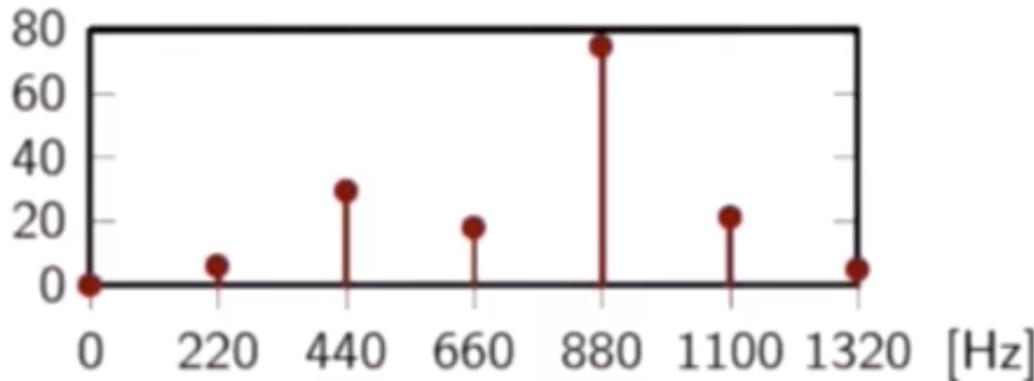
скрипка



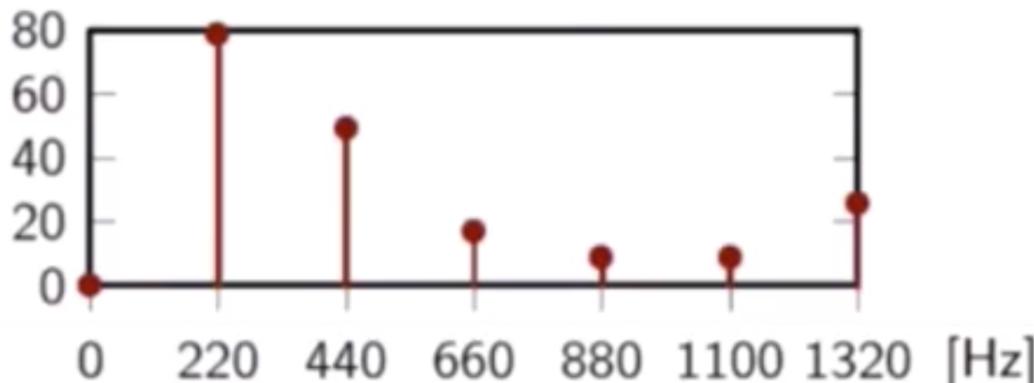
ДПФ музыкальных инструментов



➤ первый пик
(220 Гц)
соответствует
сыгранной
ноте (A)



➤ остальные
пики -
гармоники
(кратны 220
Гц)

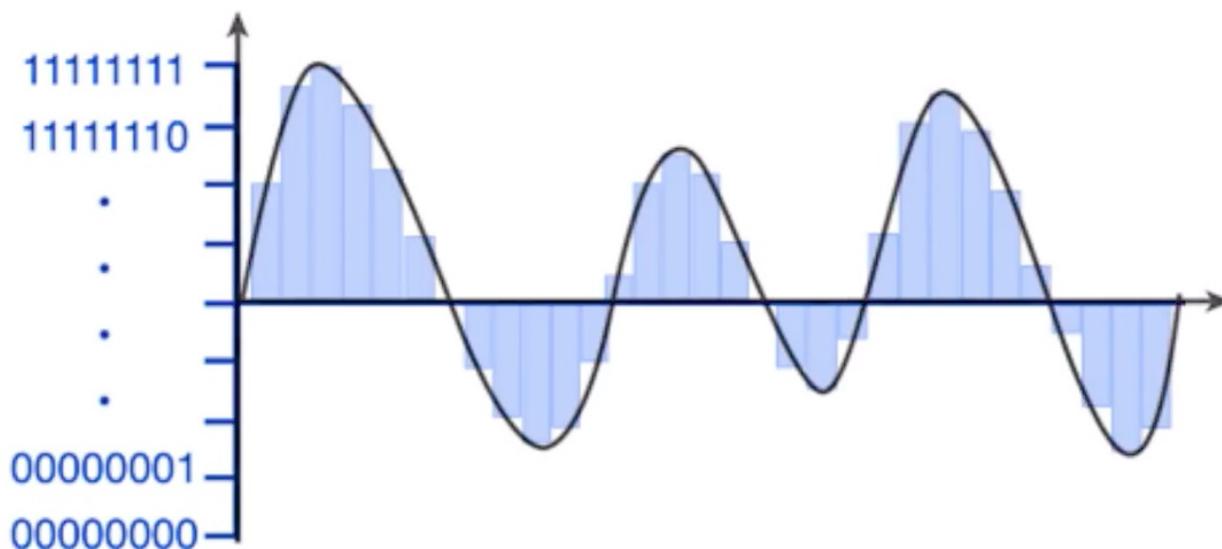


Применение Фурье-анализа

Применение Фурье-анализа. Формат MP3.

Процесс кодирования CD или WAV:

- плавный аналоговый сигнал заменяется цифровым в результате **импульсно-кодовой модуляции**: уровень аналогового сигнала записывается с частотой 44100 раз в секунду (CD) 16-битным числом (65536 градаций)



- 1 секунда стерео записи (2 канала параллельно) занимает 1411.2 килобит ($44100 * 16 * 2 = 1411200$)

Применение Фурье-анализа. Формат MP3.

MP3 - формат сжатия с потерями

- битрейт от 8 до 320 кбит/с - до 170 раз меньше (!), чем у CD
- кодируемый файл разбивается на фреймы (обычно по 1152 сэмпла/замера)
- над каждым фреймом производится преобразование Фурье - хранятся частотные составляющие сигнала

Та же идея в основе:

- переход от BMP к JPEG
- работа приложения Shazam
- и пр, и пр...

Применение Фурье-анализа. Формат MP3.

MP3 - формат сжатия с потерями

- для уменьшения размера получившегося файла используются особенности человеческого восприятия (психоакустика):

- обрезка частот выше 16000 Гц;
- частотная маскировка (громкий сигнал на одной частоте заглушает сигналы на близких и кратных частотах);
- временная маскировка (после очень громкого сигнала наступает “период глухоты” порядка 50 мкс);
- и пр...

Частота	Не слышно с...
12000 Гц	50-55 лет
15000 Гц	40-45 лет
16000 Гц	30-35 лет
17000 Гц	24-27 лет
19000 Гц	20-22 лет