



Кафедра молекулярных процессов и экстремальных
состояний вещества

Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

6. Фильтрация сигналов. Оконное
преобразование Фурье. Спектрограммы
сигналов. Вейвлет-анализ.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст. преп.

Фильтрация сигналов

Линейные инвариантные системы

В общем случае **дискретную систему** можно описать как устройство, получающее на входе одну дискретную последовательность сигналов $x[n]$ и выдающее на выходе другую последовательность $y[n]$



$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$$

operatopr обработки сигнала

Линейные инвариантные системы

- Оператор обработки сигнала H является **линейным**, если

$$\mathcal{H}\{ax_1[n] + \beta x_2[n]\} = a\mathcal{H}\{x_1[n]\} + \beta\mathcal{H}\{x_2[n]\} \quad a, \beta \in \mathbb{C}$$

- Оператор обработки сигнала H является **инвариантным**, если

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} \iff \mathcal{H}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

Фильтры дискретных сигналов являются частным случаем линейных инвариантных систем (ЛИС).

Импульсный отклик системы

Линейная инвариантная система (ЛИС) однозначно характеризуется своим откликом на дискретную дельта-последовательность $\delta[n]$

Последовательность $h[n] = \mathcal{H}\{\delta[n]\}$

называется **импульсным откликом (импульсной характеристикой)** фильтра H

Поскольку $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$

результатом обработки сигнала $x[n]$ будет последовательность

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Импульсный отклик системы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n]$$



свертка последовательностей (сигналов) $x[n]$ и $h[n]$

➤ линейность

$$x[n] * (\alpha \cdot y[n] + \beta \cdot w[n]) = \alpha \cdot x[n] * y[n] + \beta \cdot x[n] * w[n]$$

➤ инвариантность

$$w[n] = x[n] * y[n] \iff x[n] * y[n - k] = w[n - k]$$

➤ коммутативность $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$

➤ ассоциативность $(x[n] * h[n]) * w[n] = x[n] * (h[n] * w[n])$

Импульсный отклик системы

Свойства импульсного отклика фильтра $h[n] = \mathcal{H}\{\delta[n]\}$

- импульсный отклик имеет бесконечную размерность

IIR - фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ)
($h[n]$ имеет бесконечное число ненулевых элементов)

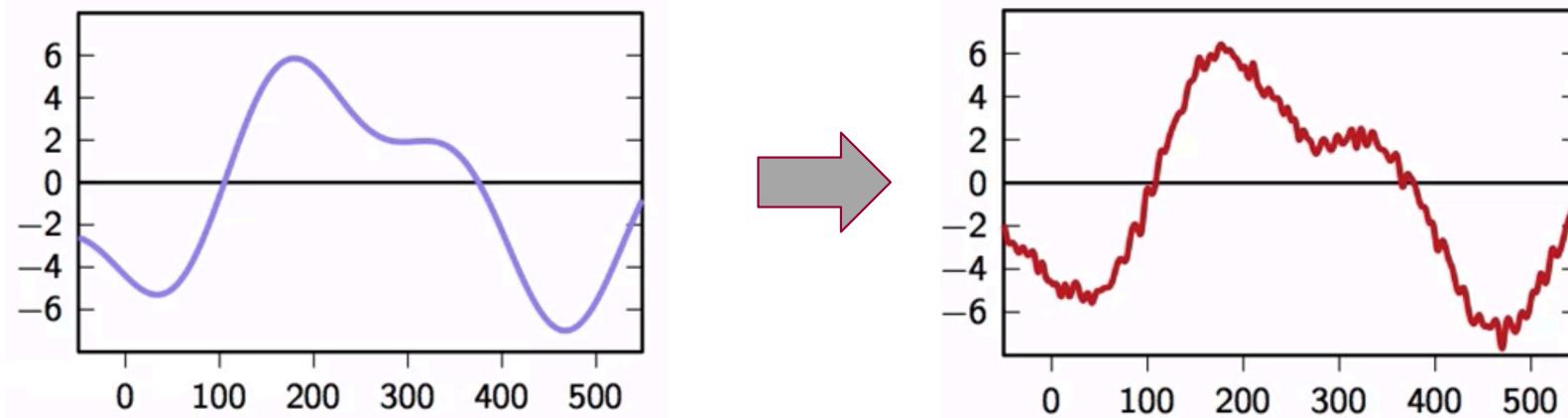
FIR - фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ)
($h[n]$ имеет конечное число ненулевых элементов)

FIR-фильтры всегда *устойчивы и нерекурсивны*. Могут быть только цифровыми

- если при $n < 0$ $h[n] = 0$, фильтр называется *каузальным*

Фильтры во временной области

1. FIR-фильтры: скользящее среднее



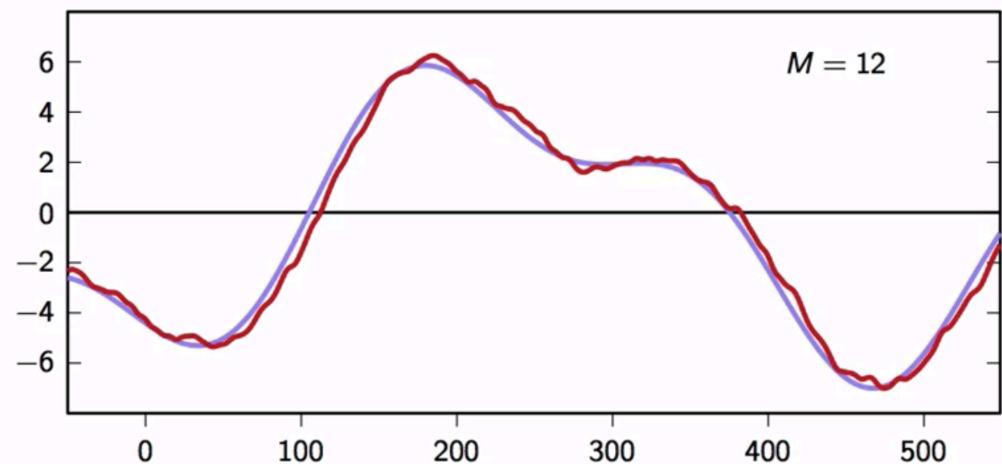
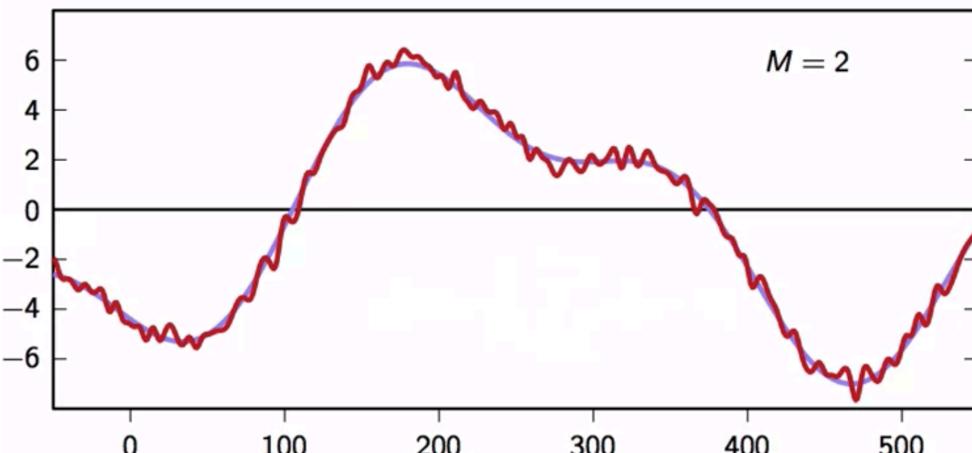
гладкий сигнал, искаженный шумом

метод: заменить значение каждого сэмпла локальным средним,
например

$$y[n] = (x[n] + x[n - 1])/2)$$

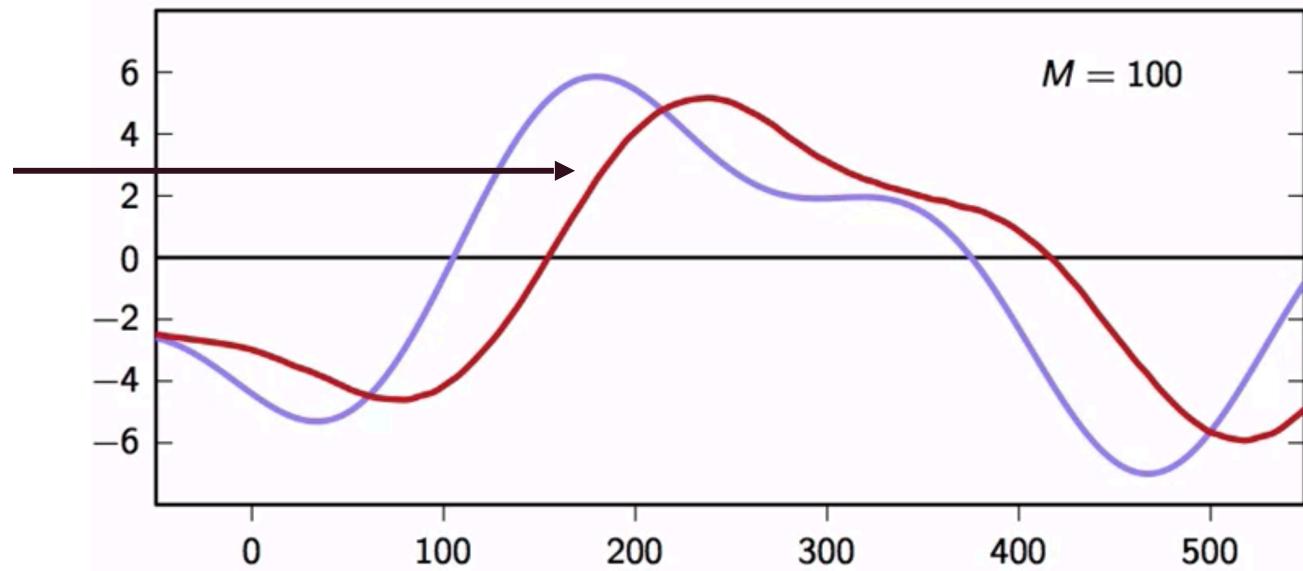
Фильтры во временной области

в общем случае: $y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n - k]$



Фильтры во временной области

задержка
выходного
сигнала



импульсный отклик такого фильтра:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n - k] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n < M \\ 0, & n < 0 \quad \& \quad n \geq M \end{cases}$$

Фильтры во временной области

скользящее среднее длины M :

$$y_M[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n - k]$$

- “сглаживающий” эффект пропорционален M
- число математических операций и необходимый объем памяти пропорциональны M

$$y_M[n - 1] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n - (k + 1)] = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x[n - k]$$

$$y_{M-1}[n] = \frac{1}{M-1} \sum_{k=0}^{M-2} x[n - k] \quad y_{M-1}[n - 1] = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M-1} x[n - k]$$

Фильтры во временной области

2. IIR-фильтры: квазиинтегратор (*leaky integrator*)

$$\sum_{k=0}^M x[n-k] = \sum_{k=1}^M x[n-k] + x[n]$$

$$y_M[n] = \frac{M-1}{M} y_{M-1}[n-1] + \frac{1}{M} x[n] = \lambda y_{M-1}[n-1] + (1-\lambda)x[n]$$



$$\lambda = (M-1)/M.$$

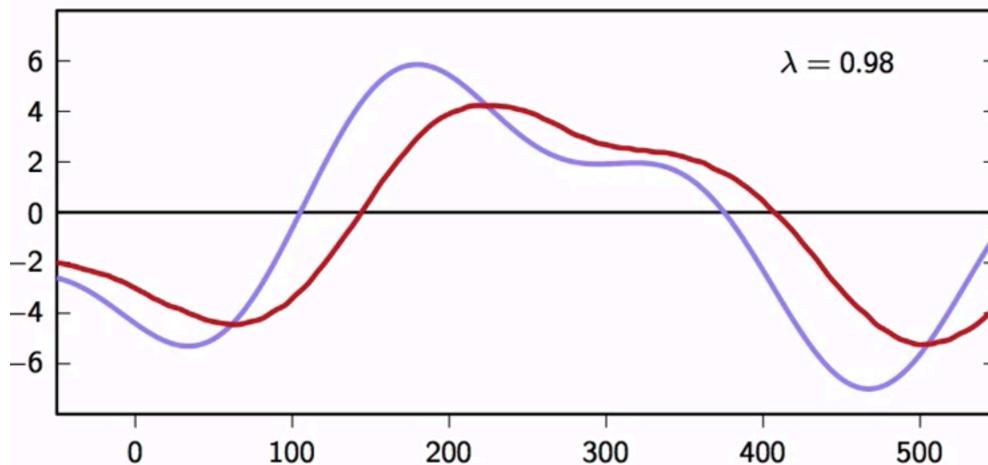
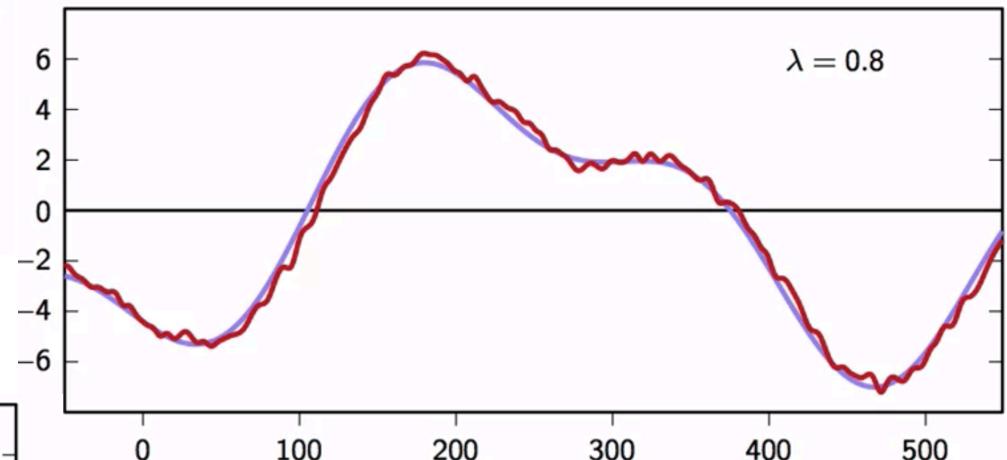
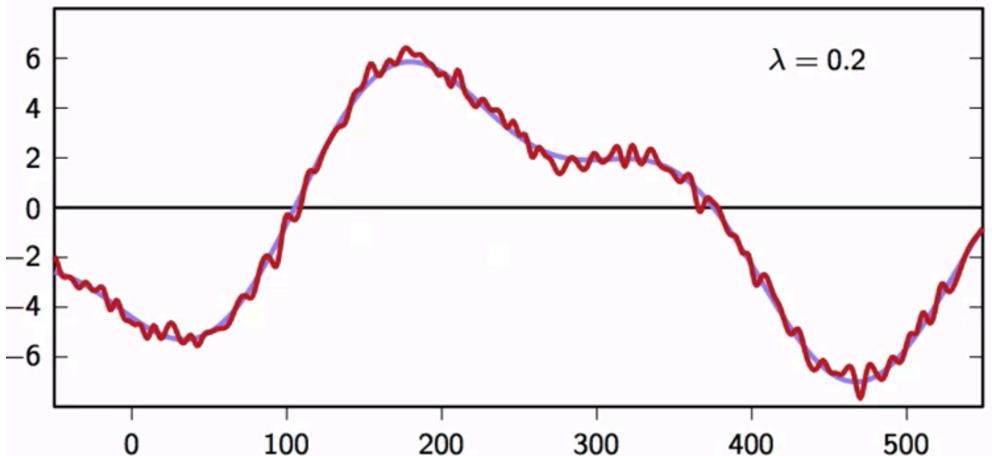
при $M \rightarrow \infty$: $y_{M-1}[n] \approx y_M[n]$

тогда процесс фильтрации можно выразить рекурсивной формулой

$$y[n] = \lambda y[n-1] + (1-\lambda)x[n]$$

Фильтры во временной области

2. IIR-фильтры: квазиинтегратор (*leaky integrator*)



! только 3 мат. операции

Фильтры во временной области

квазинтегратор: импульсный отклик

$$x[n] = \delta[n]$$

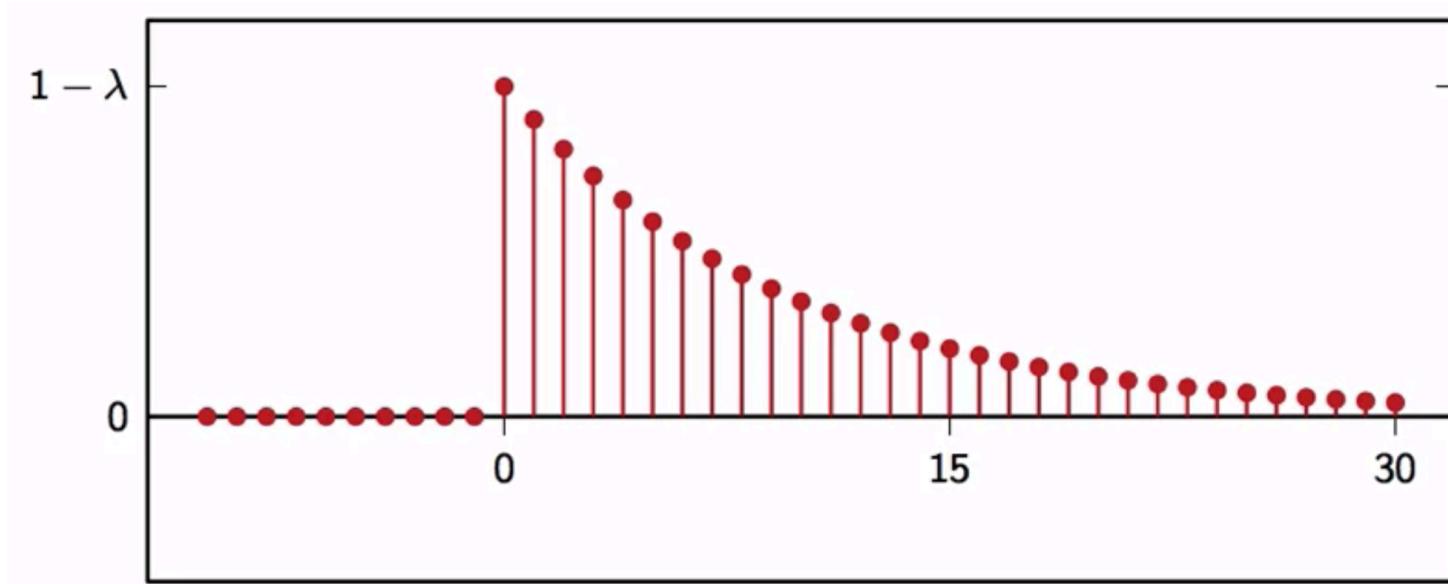
$$y[n] = \lambda y[n-1] + (1 - \lambda)\delta[n]$$

- ▶ $y[n] = 0$ при $n < 0$
- ▶ $y[0] = \lambda y[-1] + (1 - \lambda)\delta[0] = (1 - \lambda)$
- ▶ $y[1] = \lambda y[0] + (1 - \lambda)\delta[1] = \lambda(1 - \lambda)$
- ▶ $y[2] = \lambda y[1] + (1 - \lambda)\delta[2] = \lambda^2(1 - \lambda)$
- ▶ $y[3] = \lambda y[2] + (1 - \lambda)\delta[3] = \lambda^3(1 - \lambda)$
- ▶ ...

Фильтры во временной области

квазинтегратор: импульсный отклик

$$h[n] = (1 - \lambda) \lambda^n u[n]$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \lim_{n \rightarrow \infty} |1 - \lambda| \frac{1 - |\lambda|^{n+1}}{1 - |\lambda|}$$

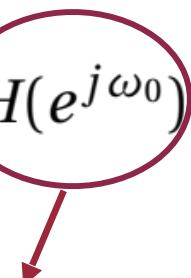
фильтр устойчив при $\lambda < 1$

Частотные фильтры

Пусть входящий сигнал - экспоненциальная последовательность частотой ω_0

Отклик ЛИС на такой сигнал будет:

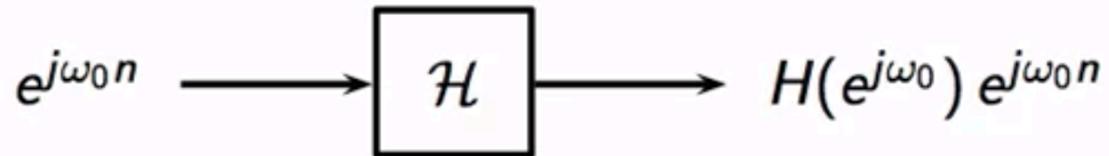
$$\begin{aligned}\mathcal{H}\{e^{j\omega_0 n}\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 k} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}\end{aligned}$$



частотный отклик фильтра на частоте ω_0
(DTFT- преобразование сигнала $h[n]$ при $\omega=\omega_0$) -

однозначная характеристика любой ЛИС (как и импульсный отклик)

Частотные фильтры



пусть $H(e^{j\omega_0}) = A_0 e^{j\theta_0}$

тогда

$$\mathcal{H}\{e^{j\omega_0 n}\} = A_0 e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}$$

амплитуда:
усиление ($A > 1$) или
ослабление сигнала ($A < 1$)



сдвиг фазы
 $-\pi \leq \theta_0 \leq \pi$



ЛИС не изменяют частоту гармонического сигнала

Частотные фильтры

Теоремы о свертке:

- DTFT-преобразование *свертки* двух (абсолютно суммируемых) последовательностей (сигналов):

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \longleftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

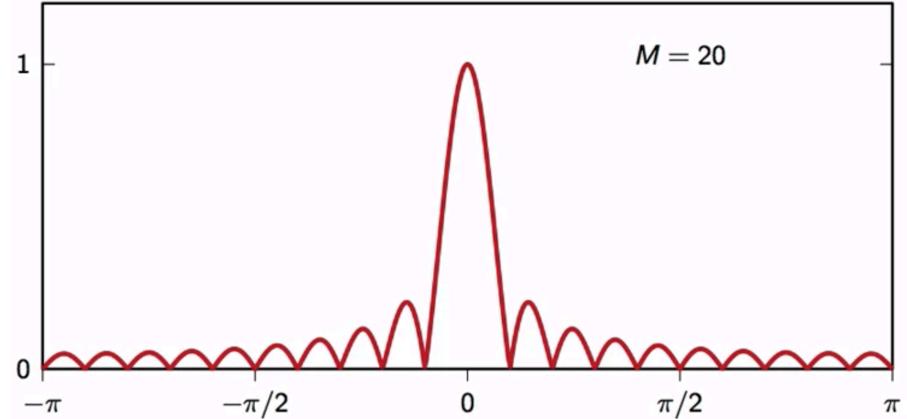
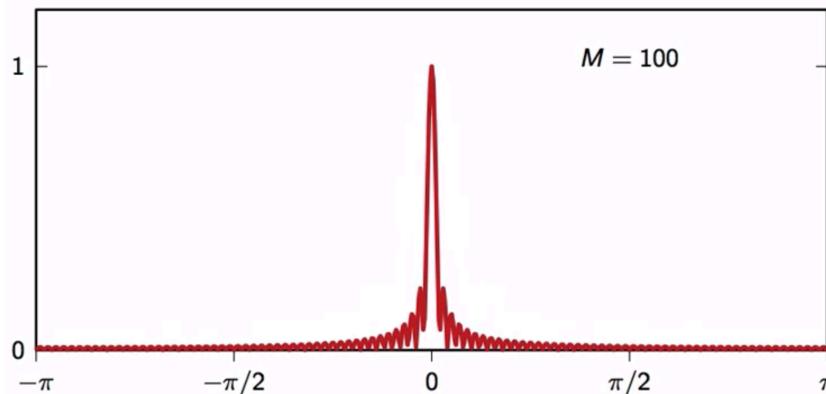
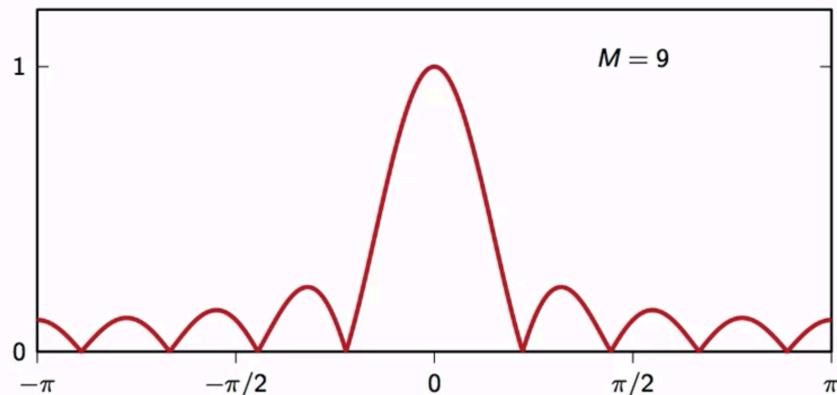
- DTFT-преобразование *произведения* двух (абсолютно суммируемых) последовательностей (сигналов):

$$y[n] = x[n]w[n] \quad \longleftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

Частотные фильтры

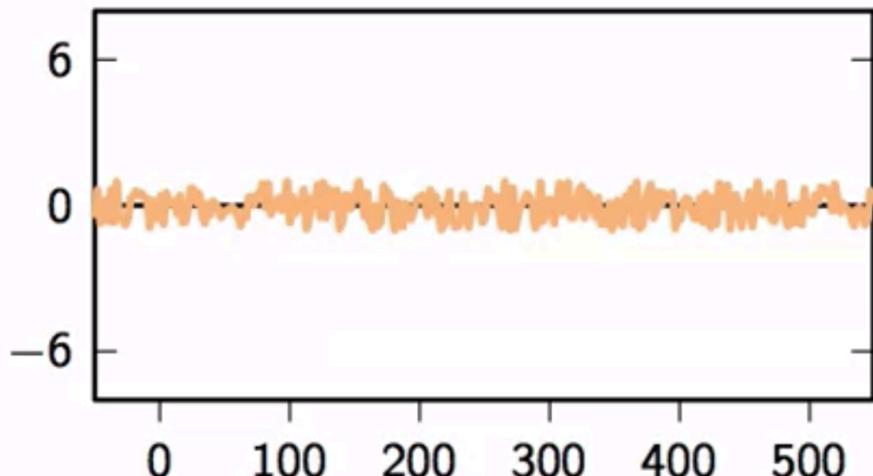
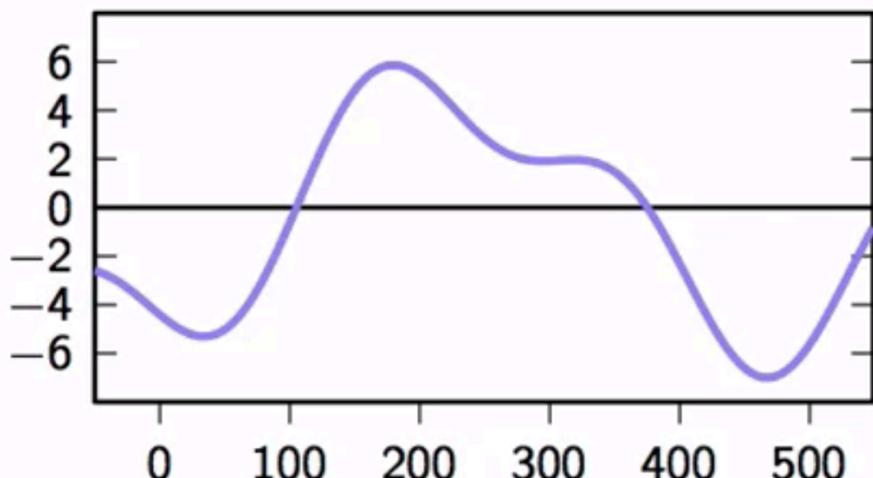
частотный отклик скользящего среднего

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}M\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

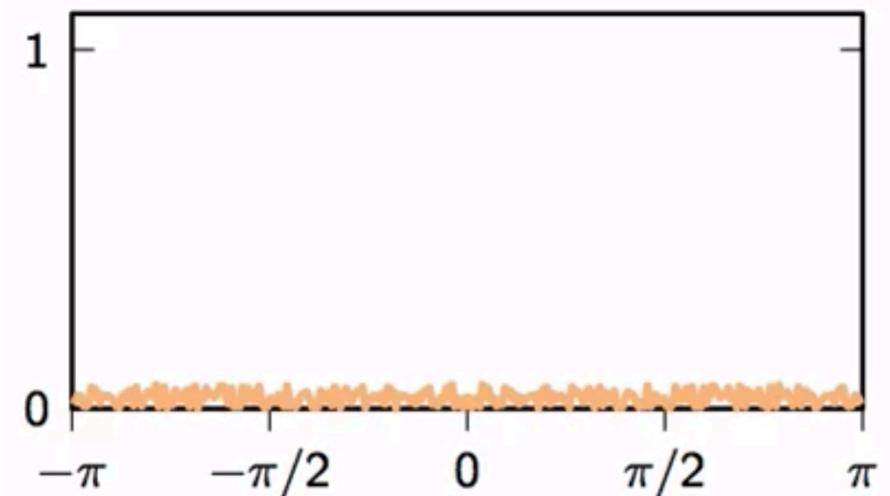
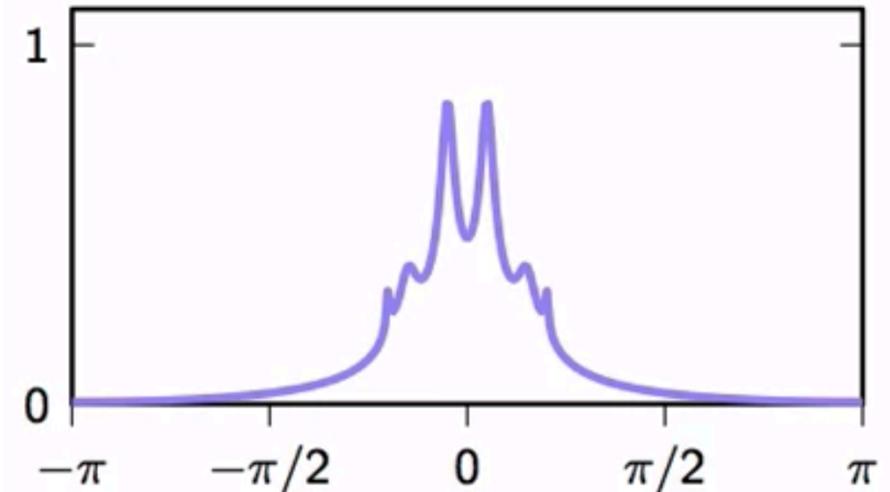
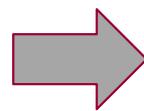


Частотные фильтры

полезный сигнал + шум и их спектры

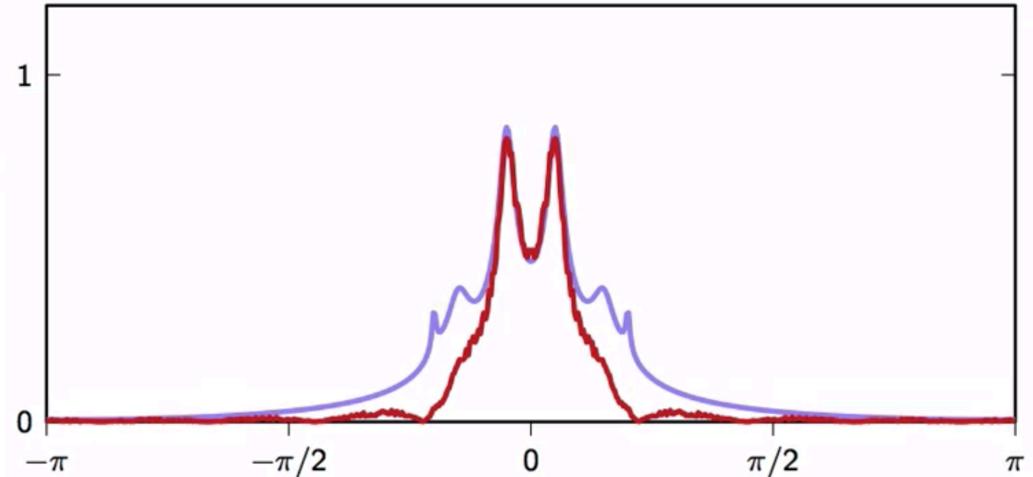
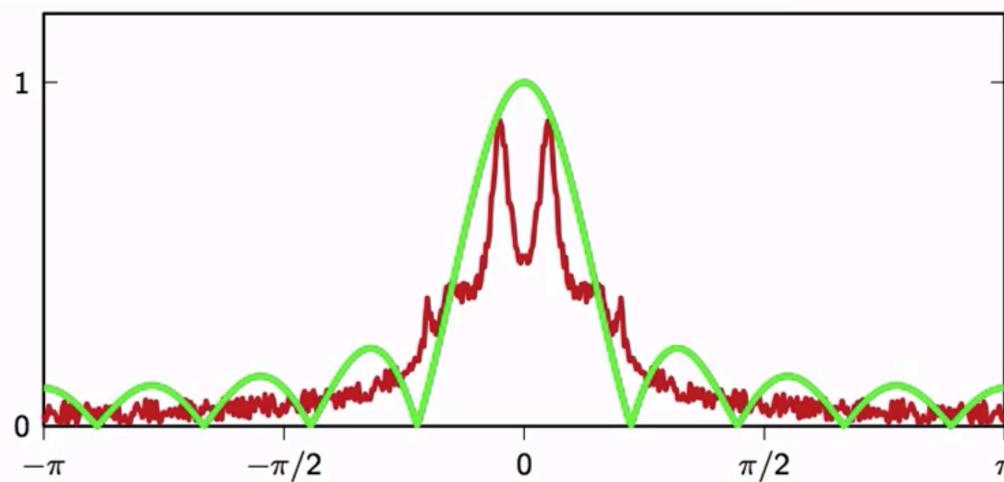
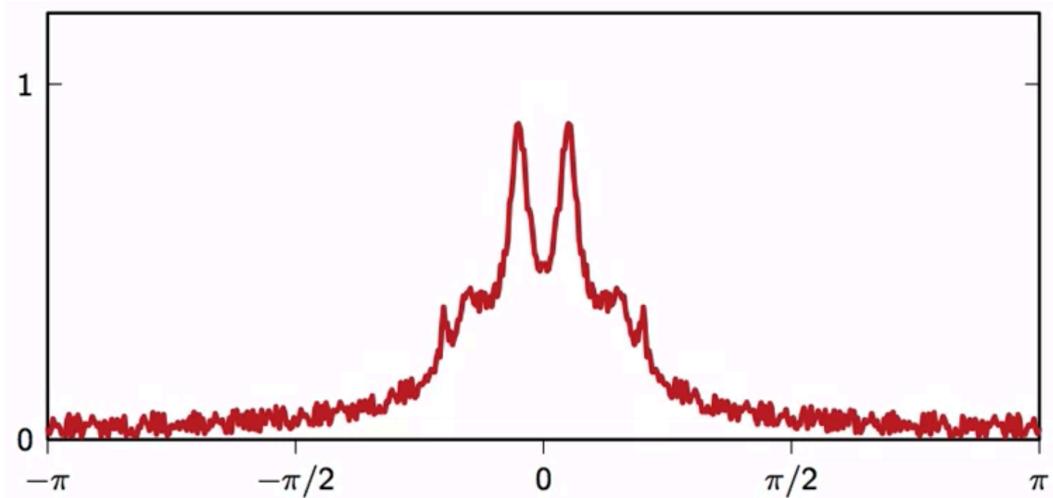


DTFT



Частотные фильтры

“зашумленный” спектр



Частотные фильтры

- фильтр низких частот (*lowpass*)

амплитуда выходного сигнала сконцентрирована около частоты $\omega=0$
(прим. скользящее среднее, квазинтегратор)

- фильтр высоких частот (*highpass*)

амплитуда выходного сигнала сконцентрирована около частоты $\omega=+\pi$

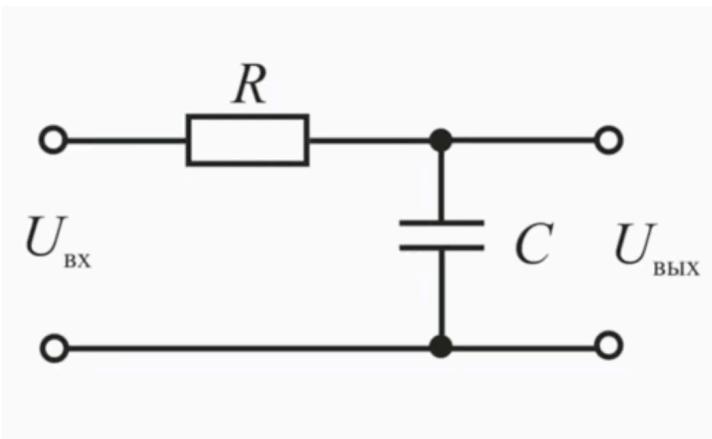
- полосовой фильтр (*bandpass*)

амплитуда выходного сигнала сконцентрирована около частоты $\omega=+\omega_p$

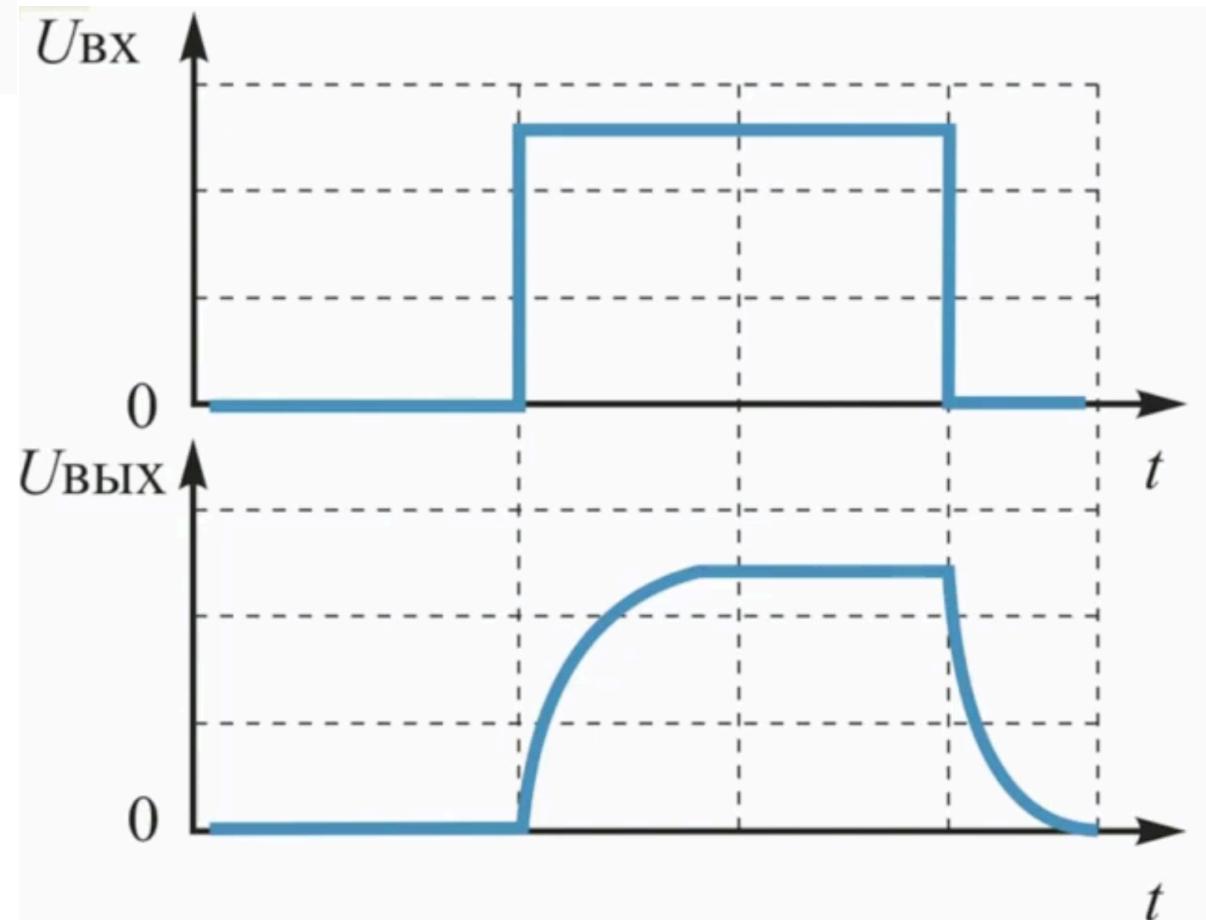
- фазовый фильтр (*allpass*)

пропускает все частоты сигнала с равным усилением, но изменяет фазу
сигнала (прим. phaser)

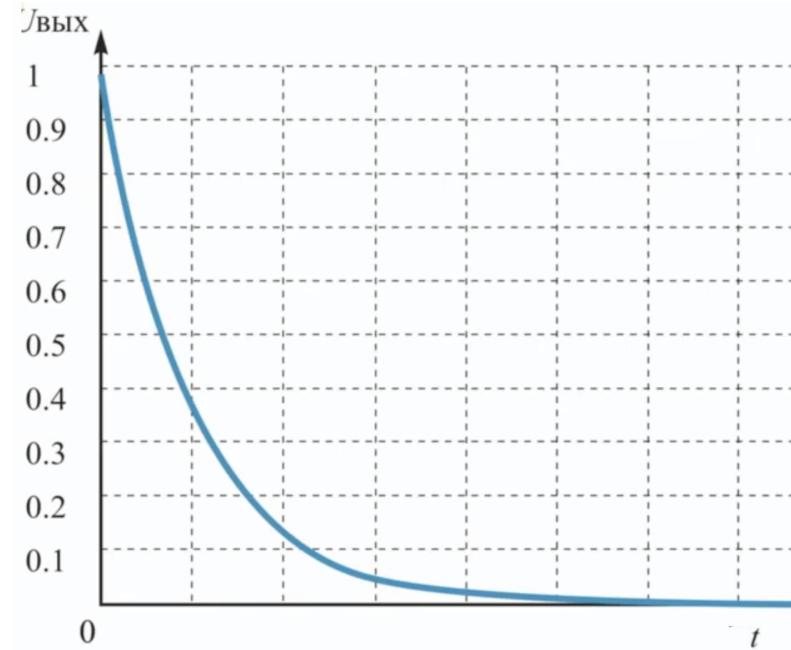
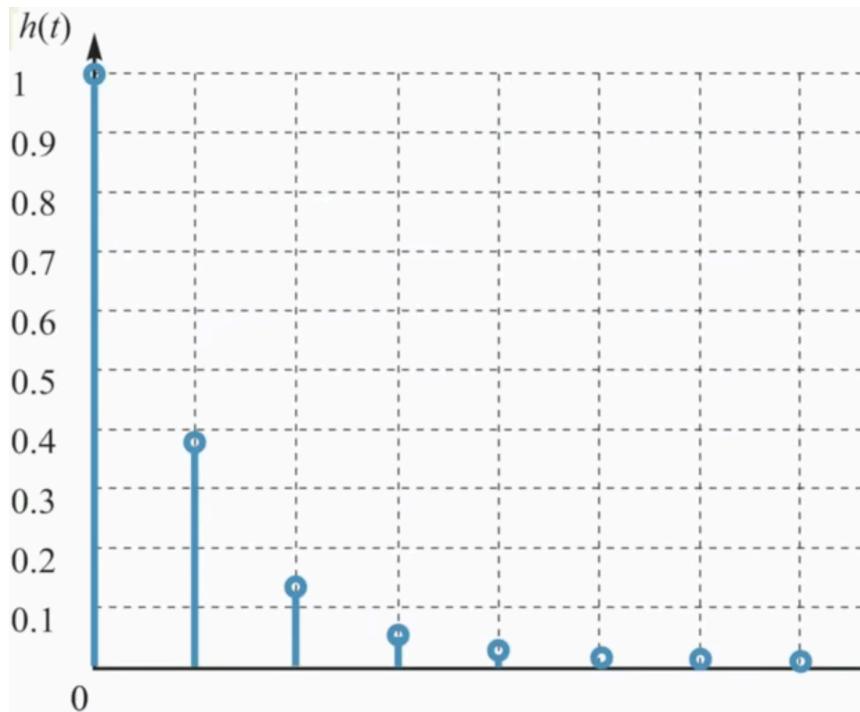
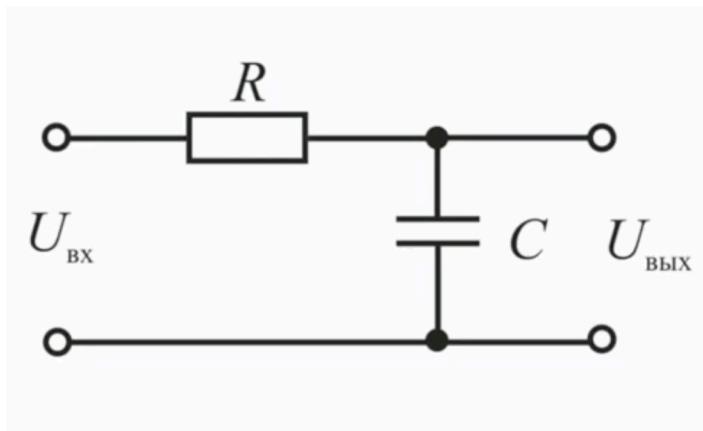
Связь аналогового и цифрового фильтра



RC-контур - пример
сглаживающего
фильтра

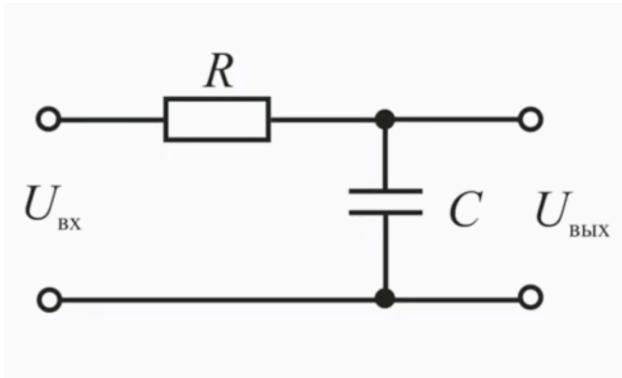


Связь аналогового и цифрового фильтра

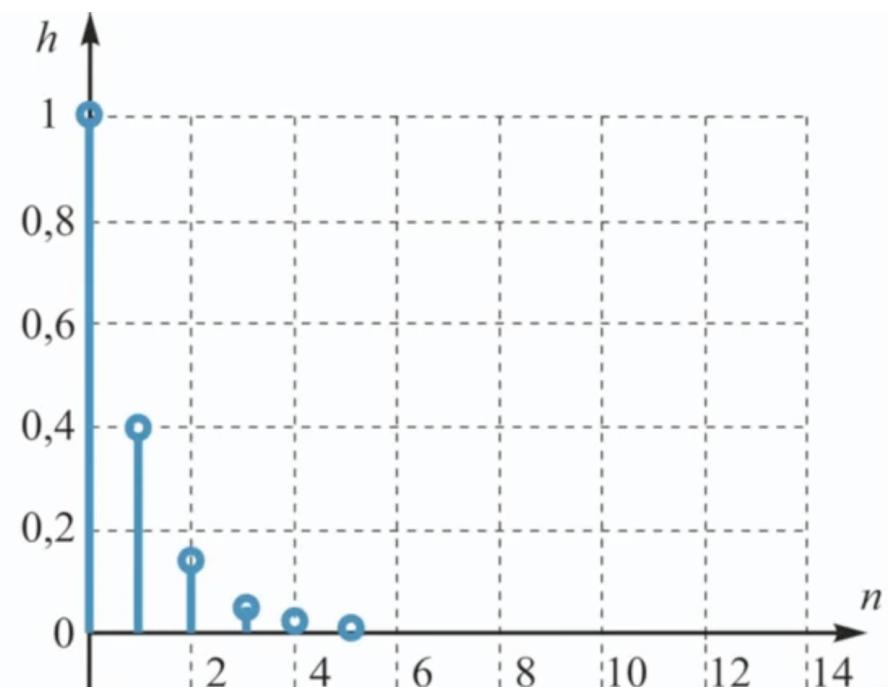
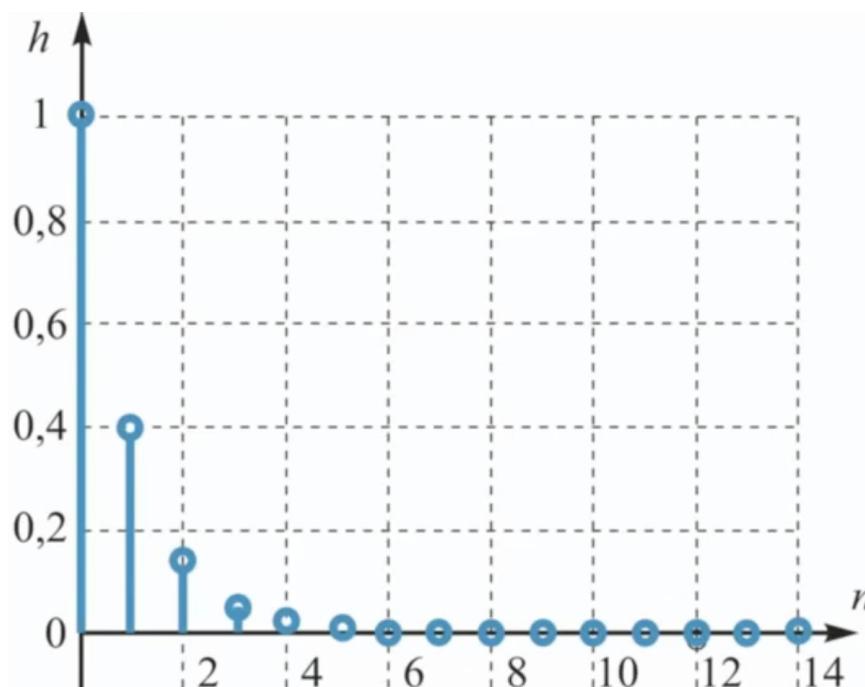


импульсная
характеристика

Связь аналогового и цифрового фильтра



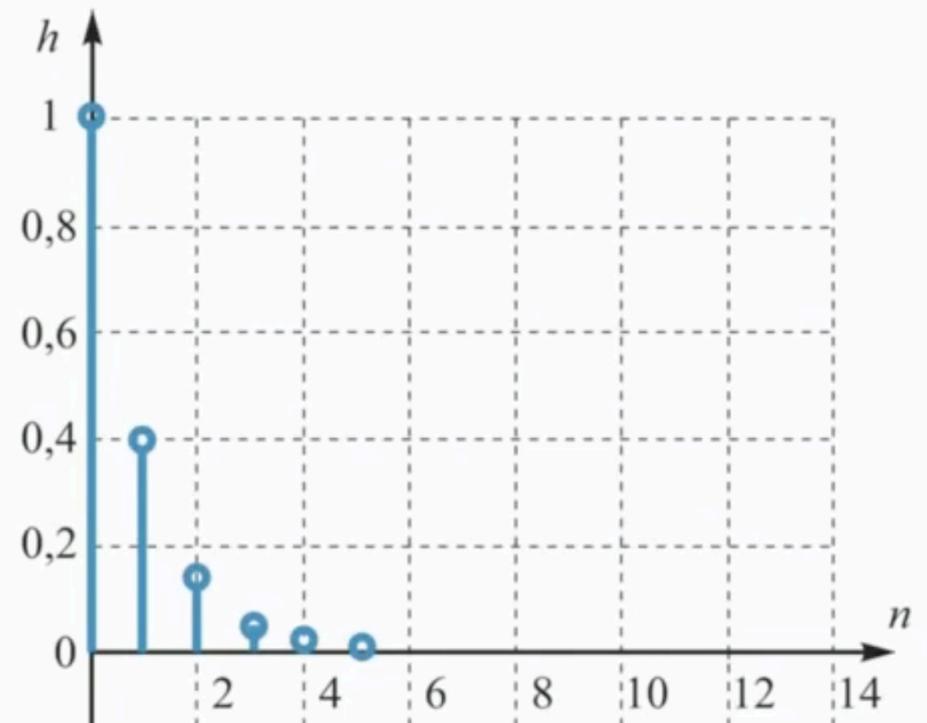
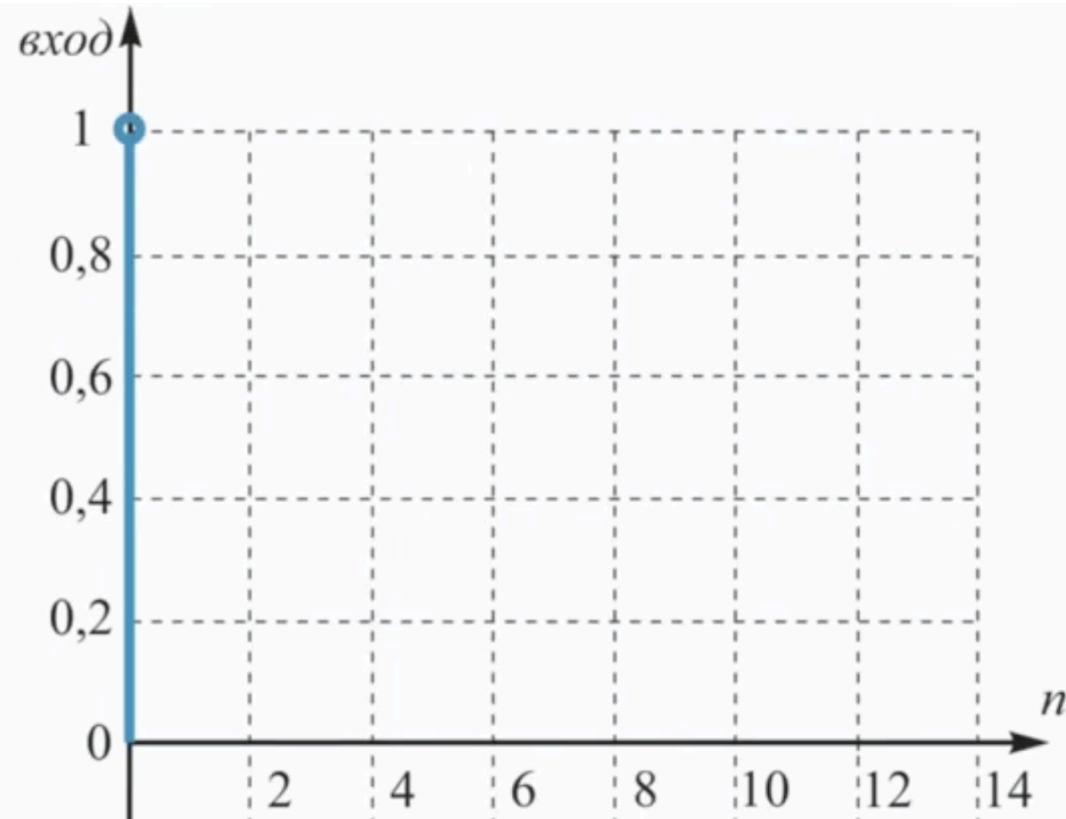
БИХ и КИХ фильтры



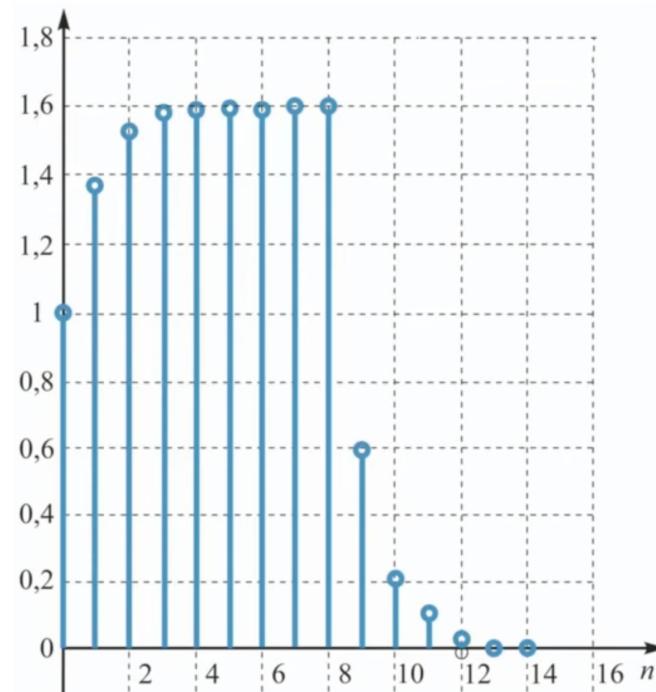
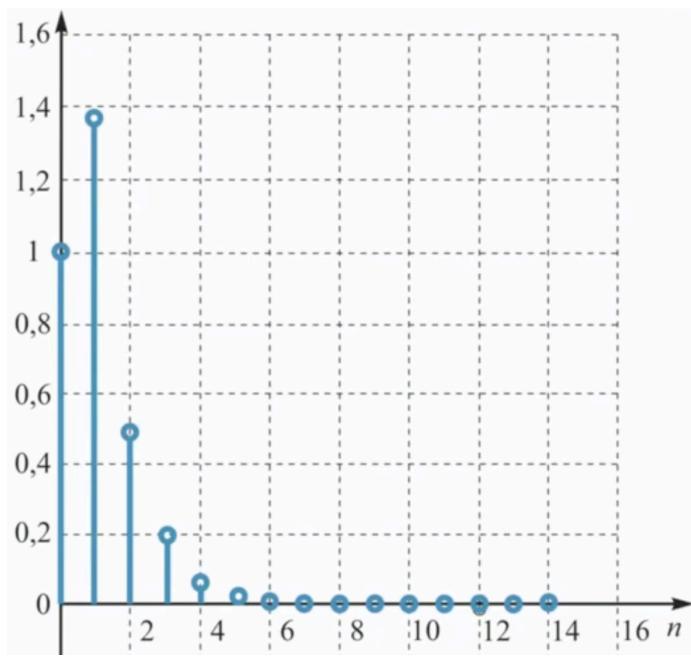
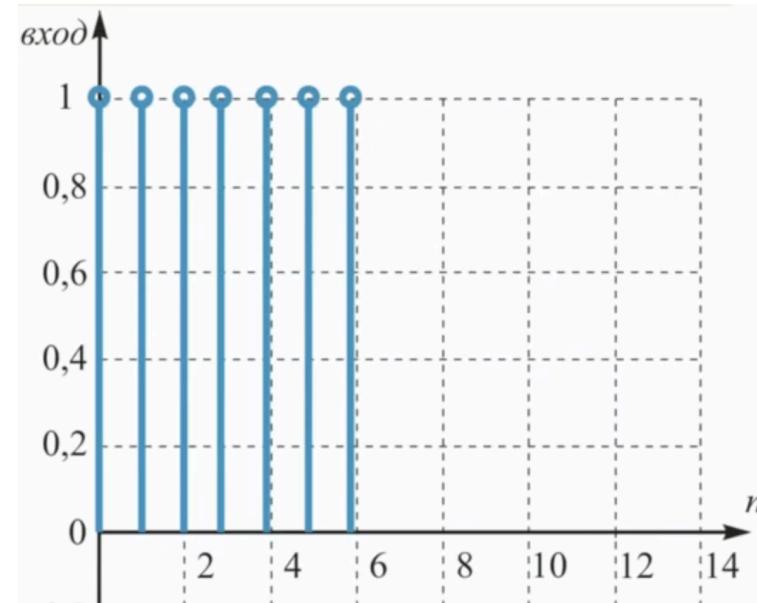
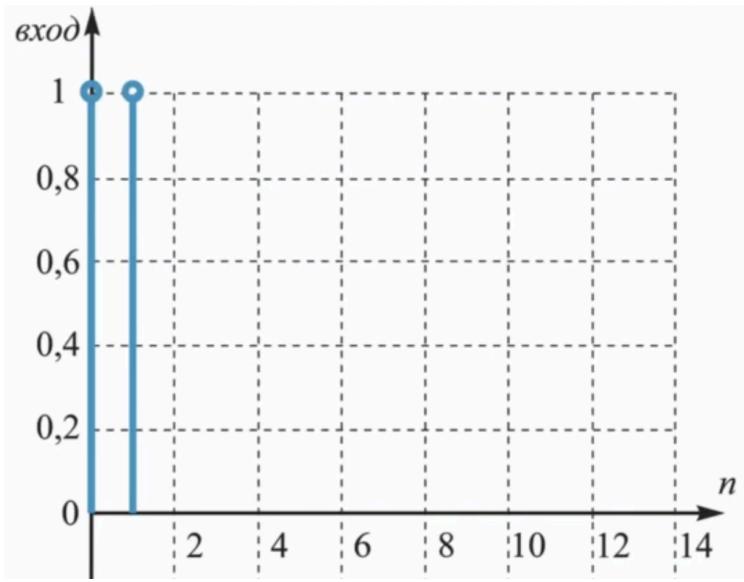
фильтр 5-го порядка

Связь аналогового и цифрового фильтра

фильтр 5-го порядка



Связь аналогового и цифрового фильтра

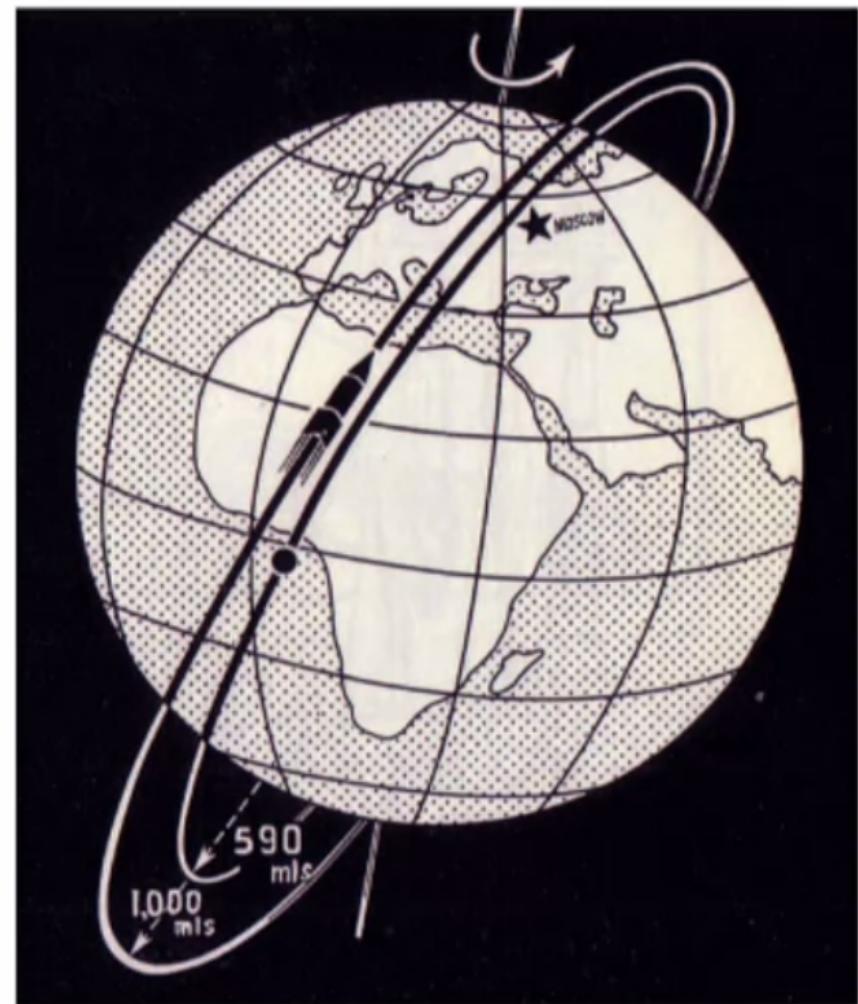


Пример. Сигнал первого искусственного спутника.

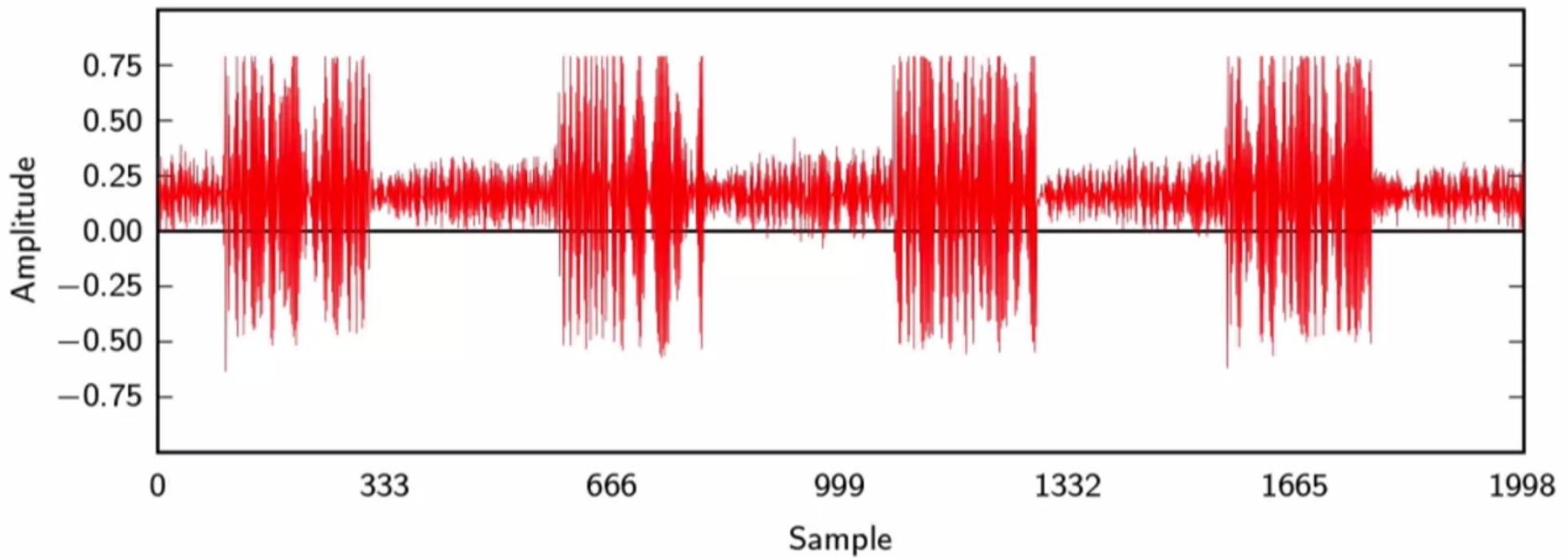
Сигнал первого искусственного спутника

4 октября 1957 г

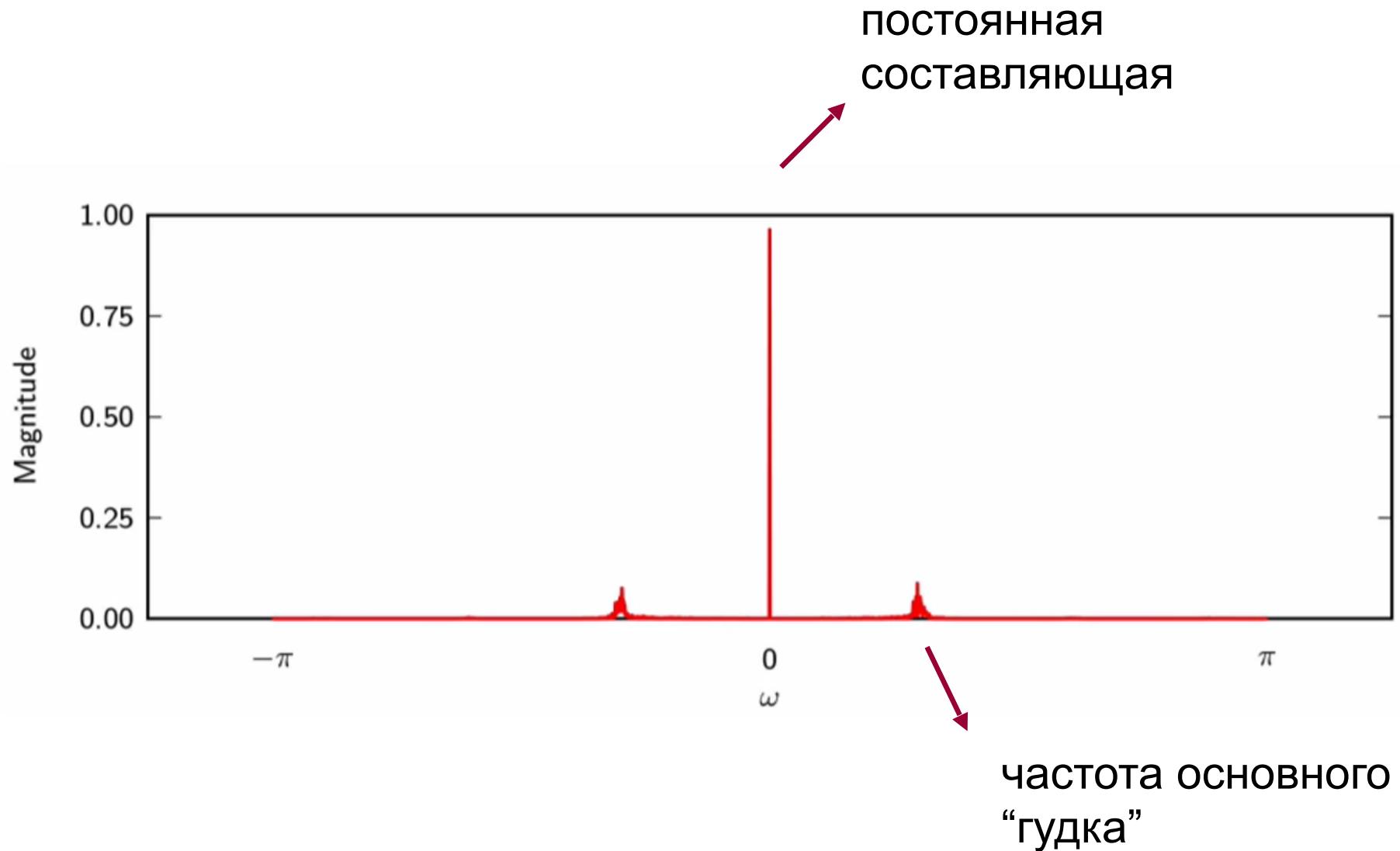
22 дня



Сигнал первого искусственного спутника

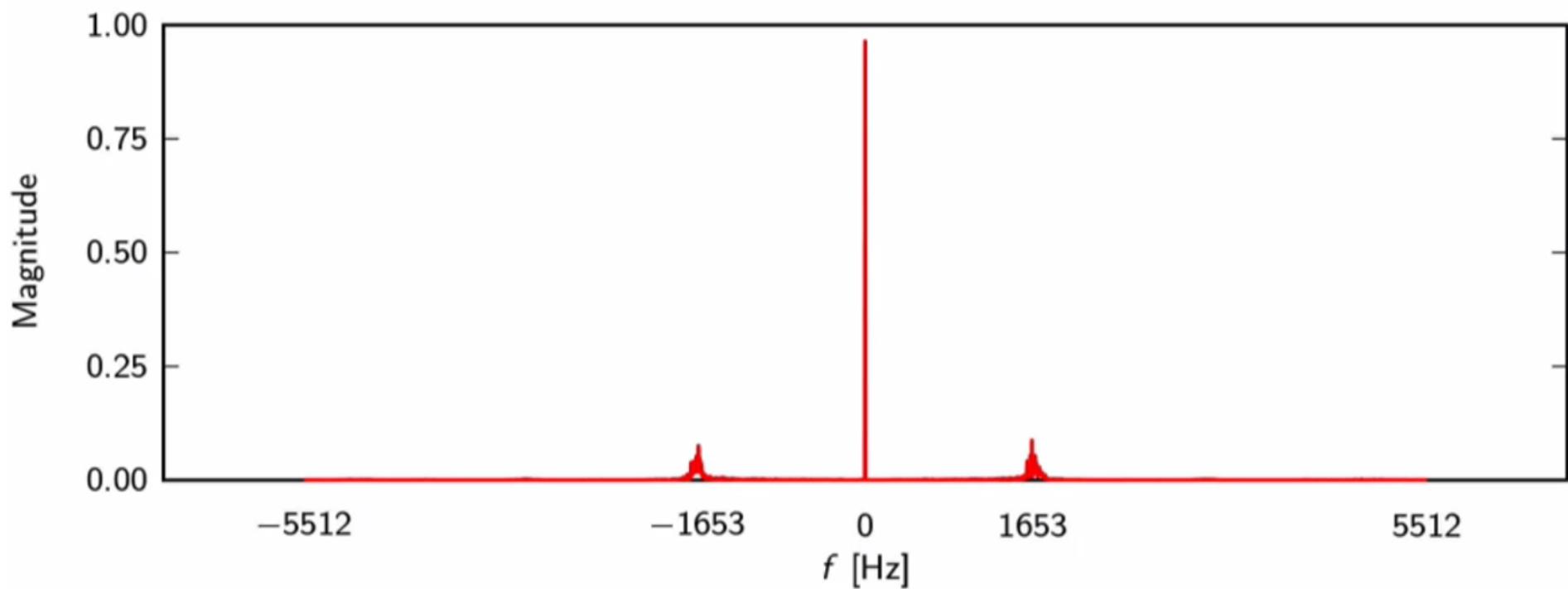


ДПФ сигнала первого искусственного спутника

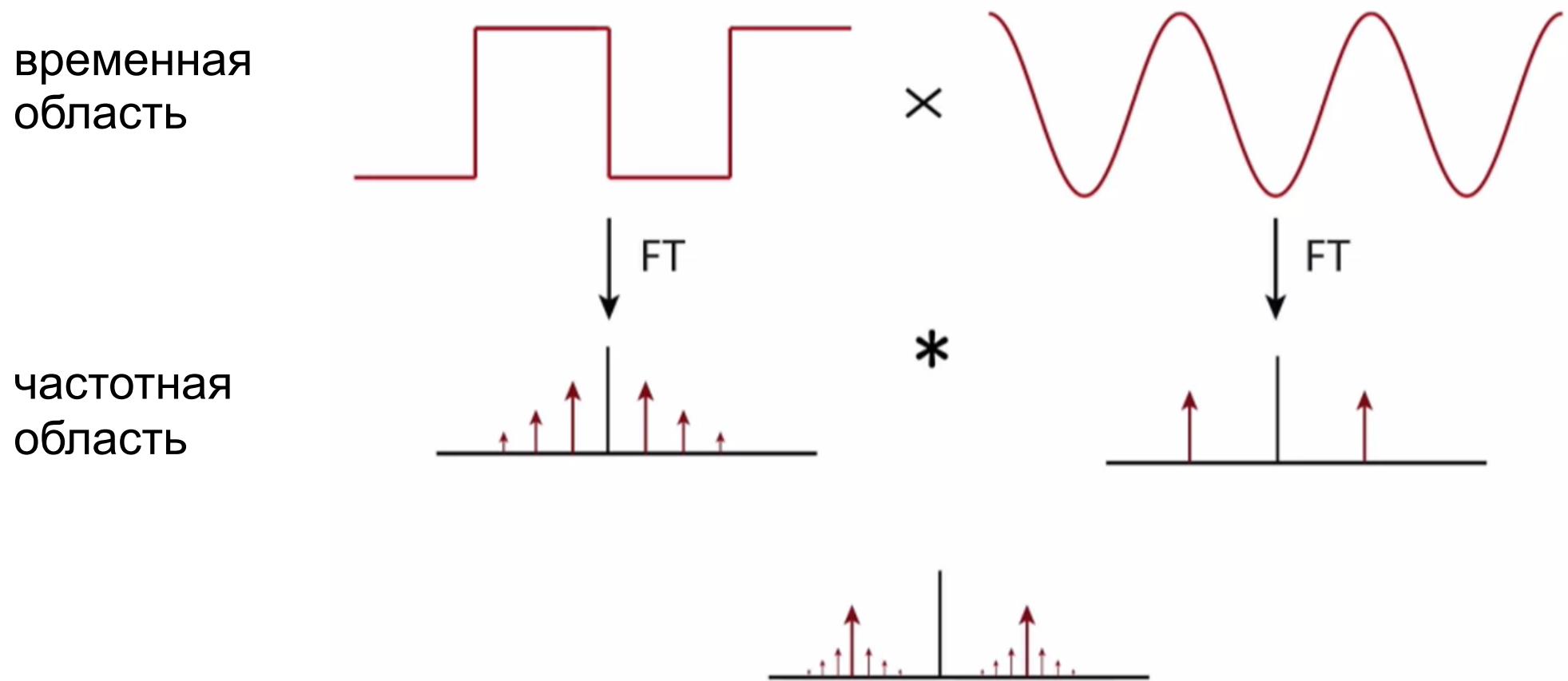


ДПФ сигнала первого искусственного спутника

$$f = \frac{\omega f_s}{2\pi}$$



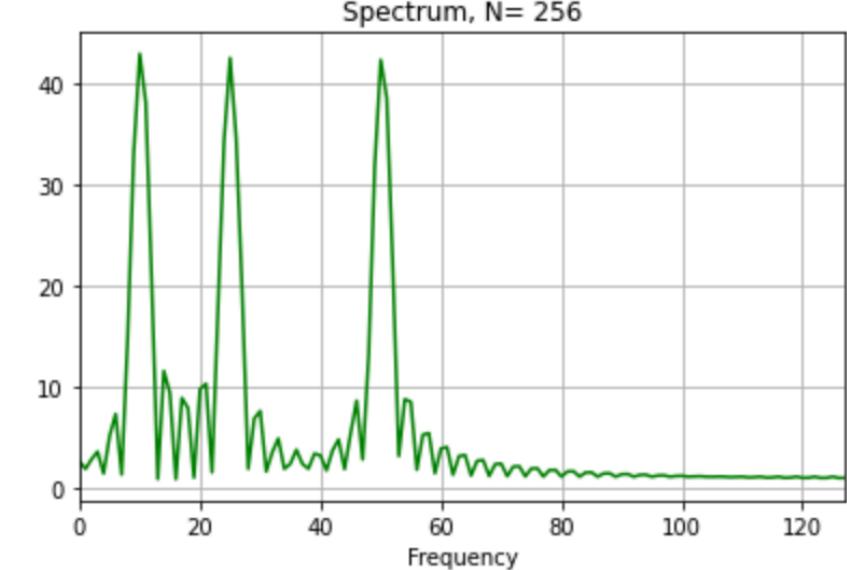
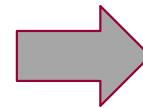
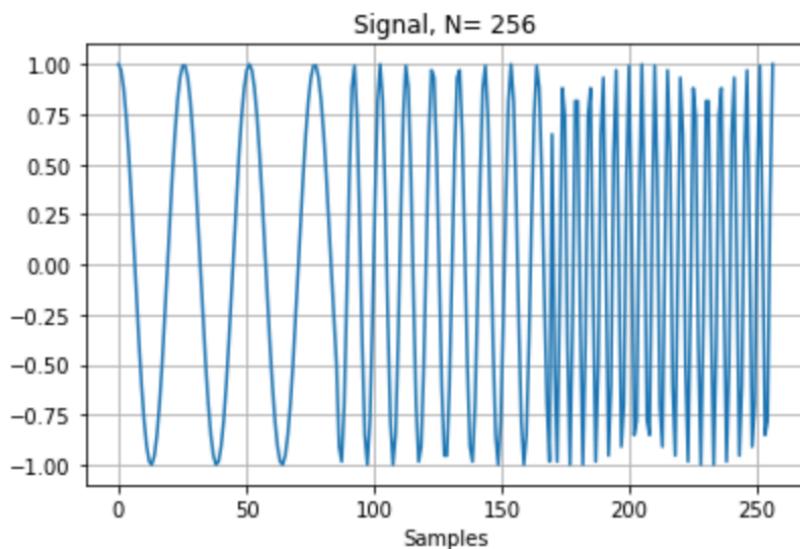
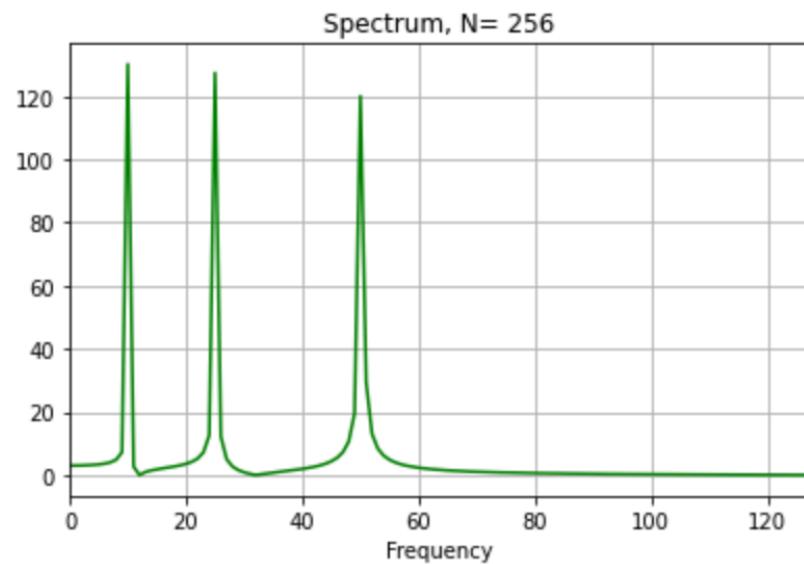
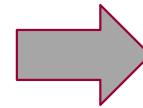
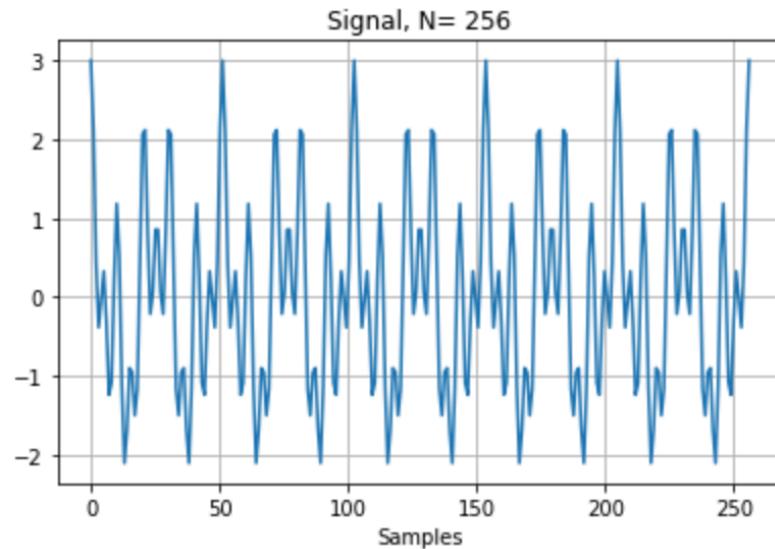
ДПФ сигнала первого искусственного спутника



Спектрограммы сигналов

Нестационарные сигналы

$$x[n] = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) + \cos(2\pi \cdot 50t)$$



Пример. Работа аналогового телефона.



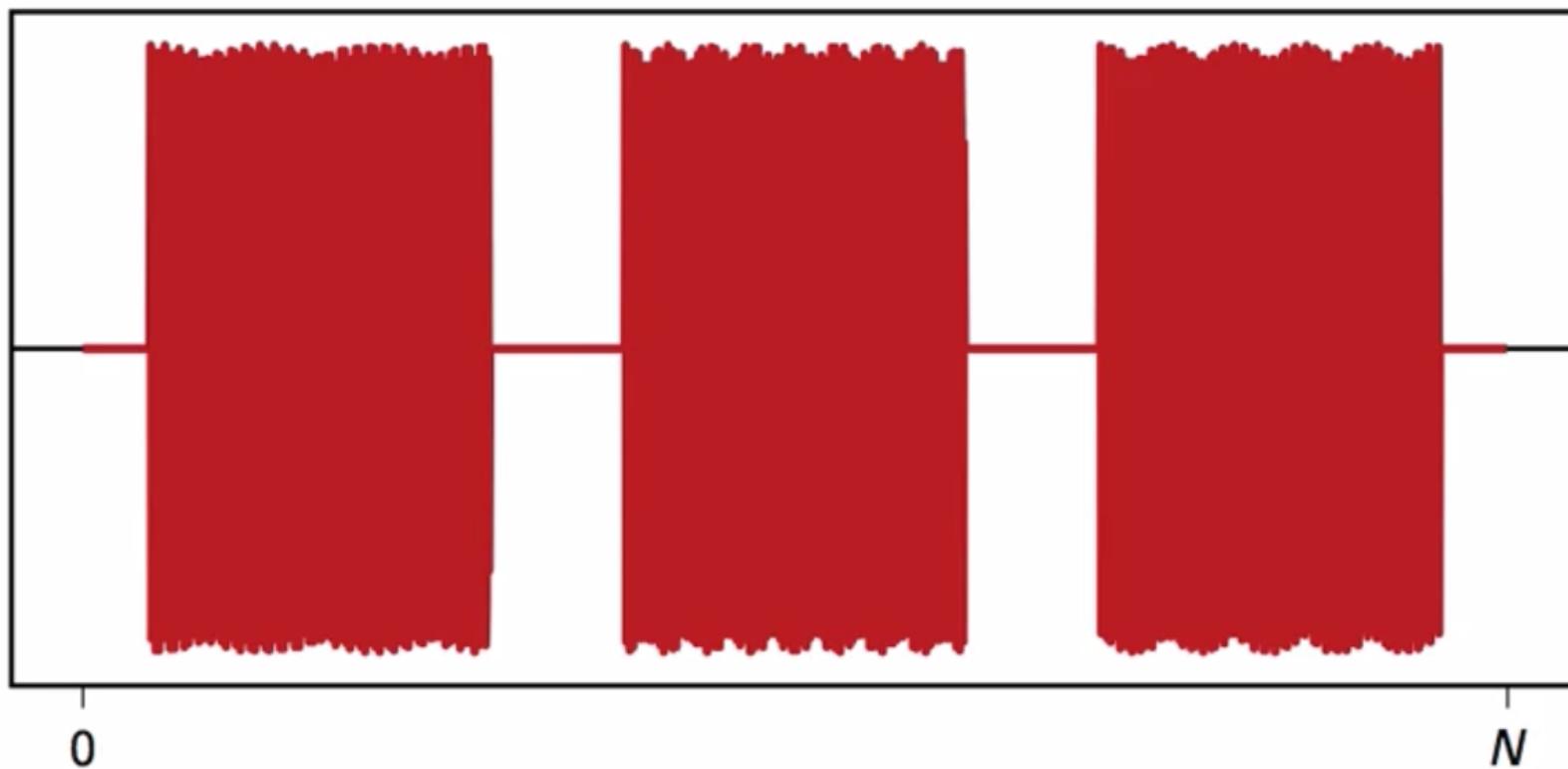
тональный набор

	1209Hz	1336Hz	1477Hz
697Hz	1	2	3
770Hz	4	5	6
852Hz	7	8	9
941Hz	*	0	#

взаимно простые частоты

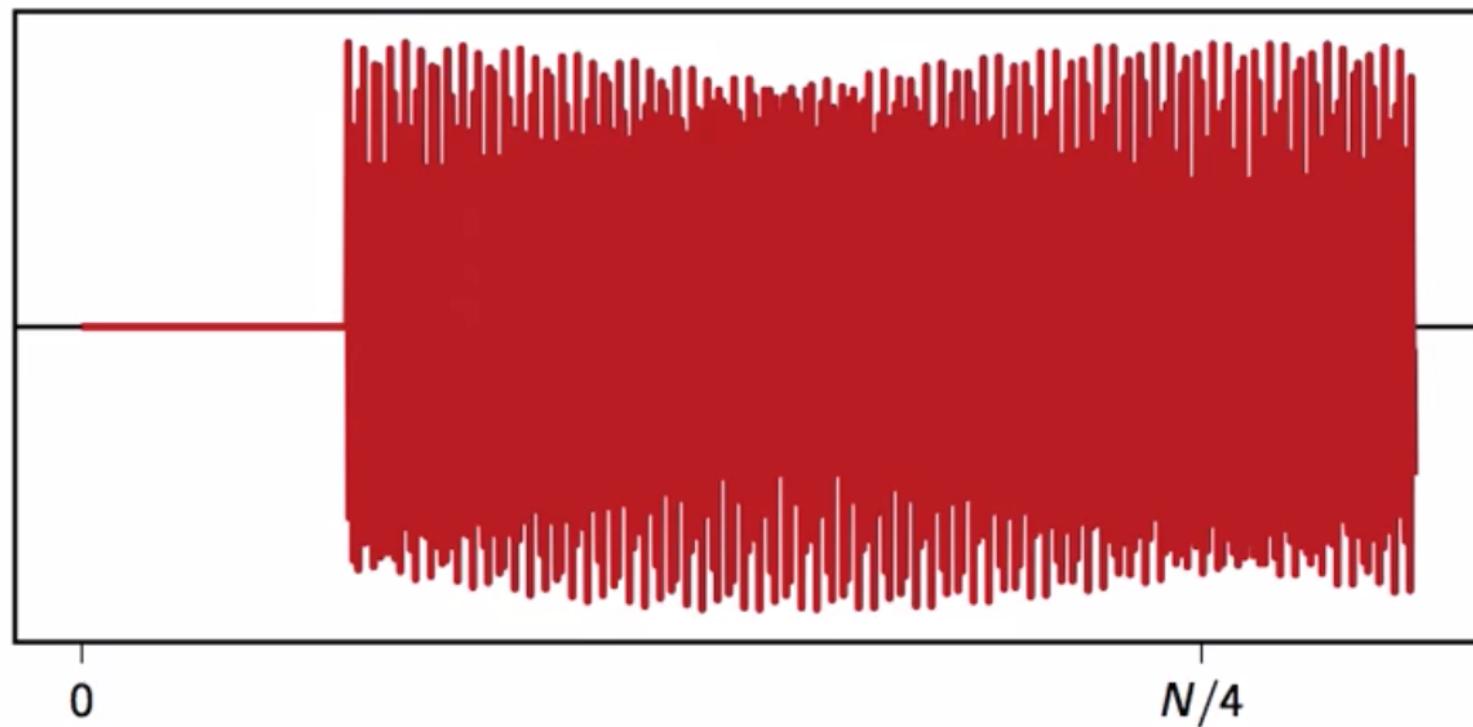
Пример. Работа аналогового телефона.

- сигнал 1-5-9



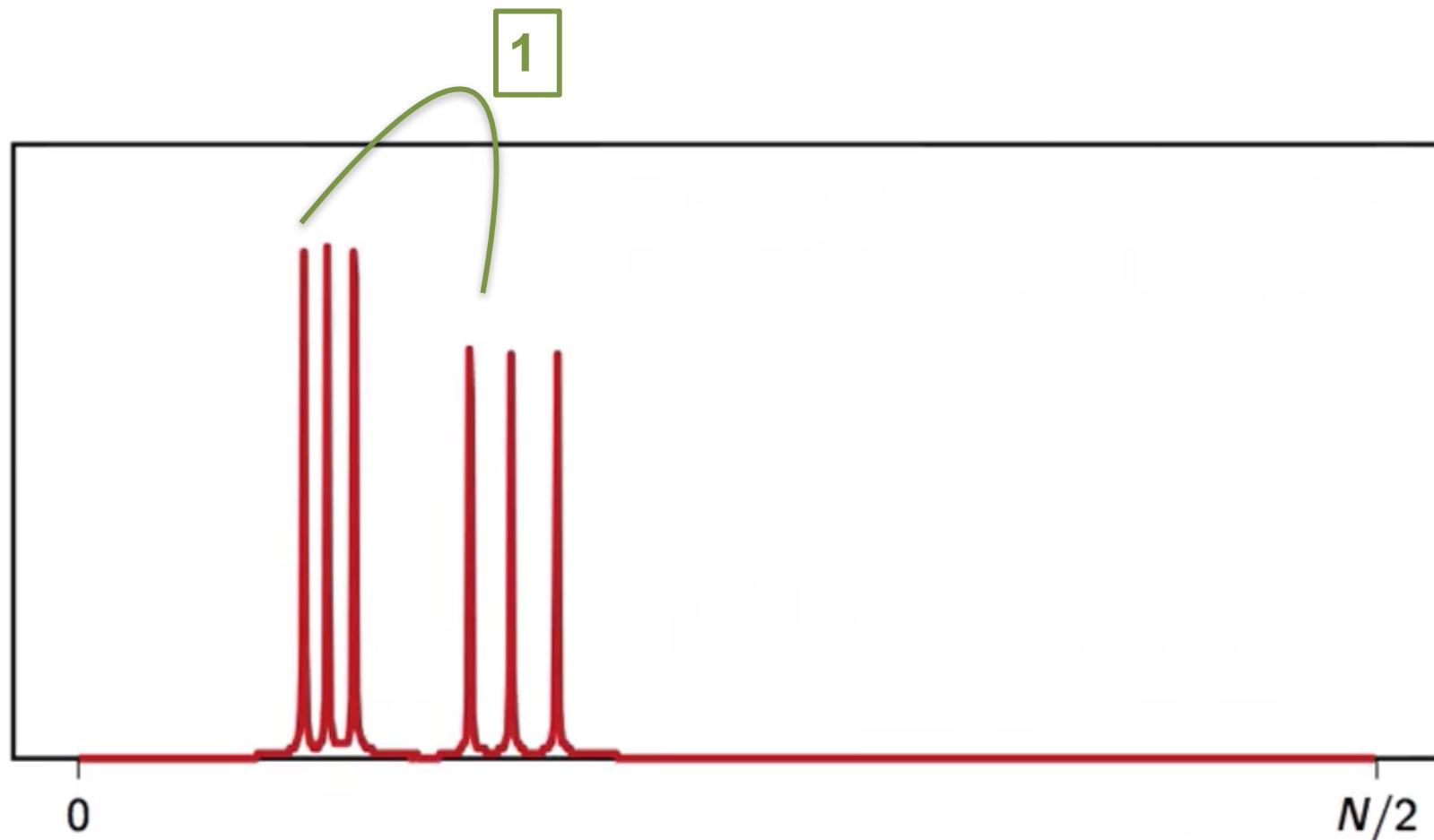
Пример. Работа аналогового телефона.

- сигнал 1-5-9 (детально)



Пример. Работа аналогового телефона.

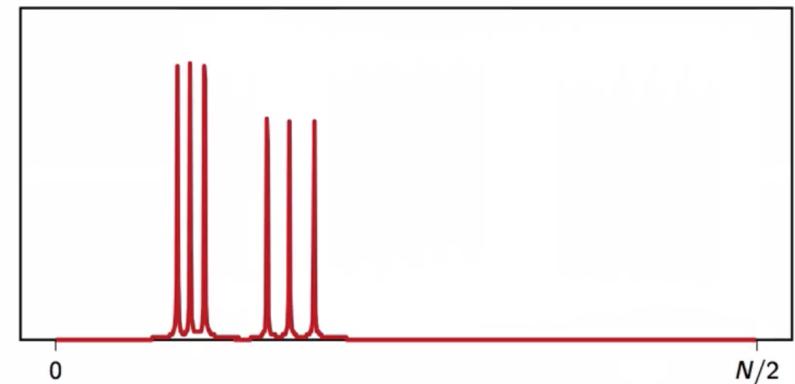
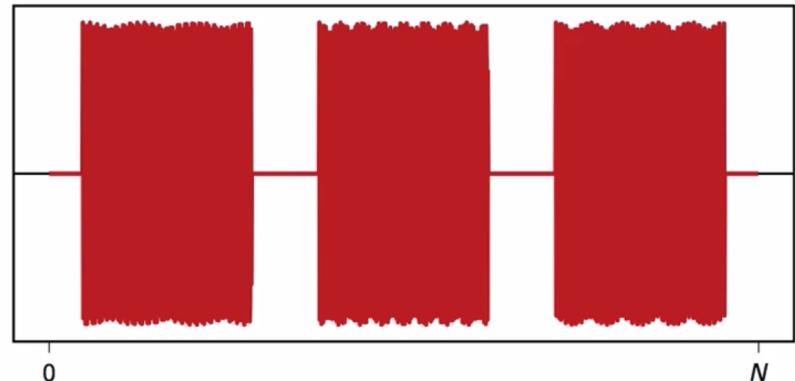
- сигнал 1-5-9: преобразование Фурье (DFT)



Пример. Работа аналогового телефона.

- временное представление не позволяет судить о частотах

- частотное представление не позволяет судить о последовательности, в которой частоты были набраны

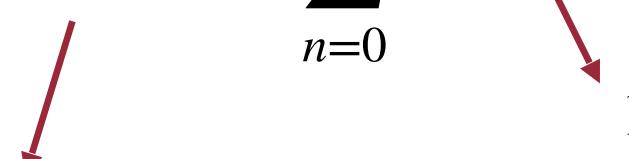


Кратковременное преобразование Фурье (STFT)

Кратковременное преобразование Фурье (STFT)

Основная идея в основе **STFT** - **Short-time Fourier Transform** (оконное преобразование Фурье, кратковременное преобразование Фурье):

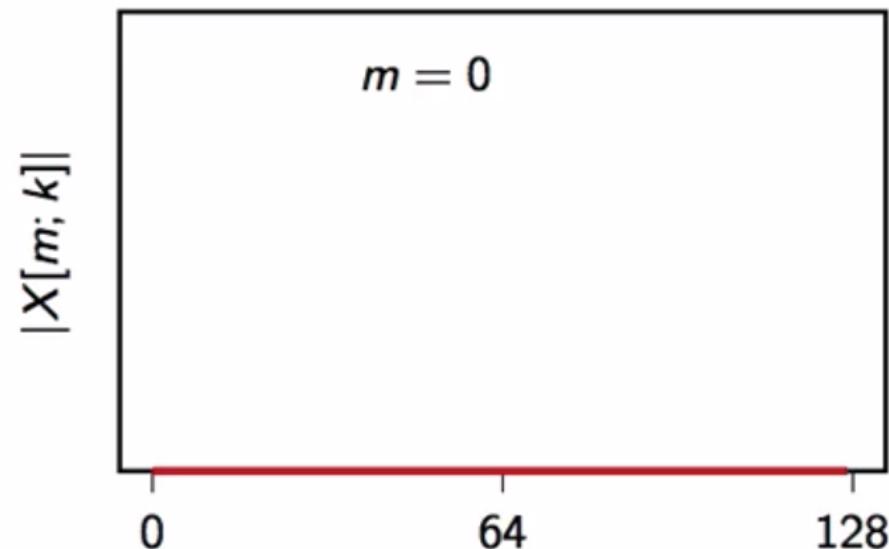
- сигнал длины N разбивается на малые интервалы длины L (интервалы могут перекрываться, показатель M)
- для каждого интервала рассчитывается ДПФ:

$$X[m; k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[mM + n] e^{-j \frac{2\pi}{L} nk}$$

$$1 \leq M \leq L$$

матрица размером $L \times m/N$

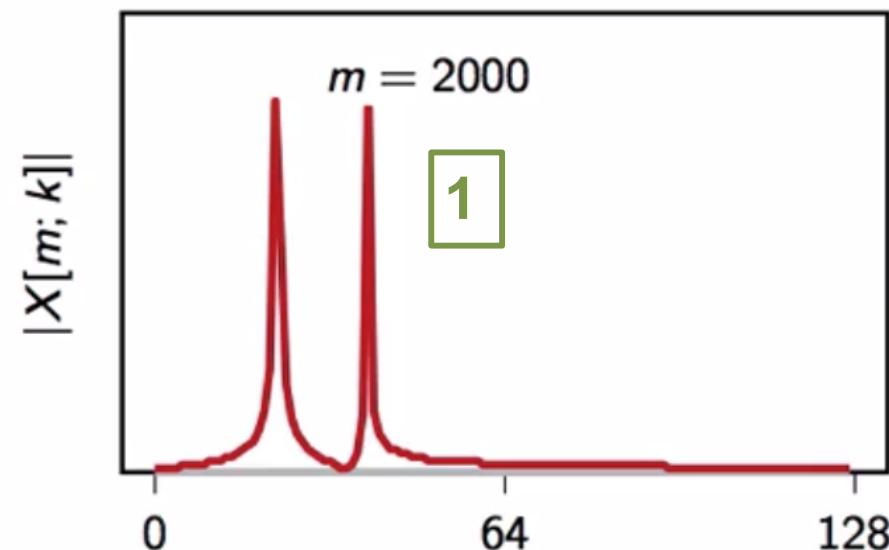
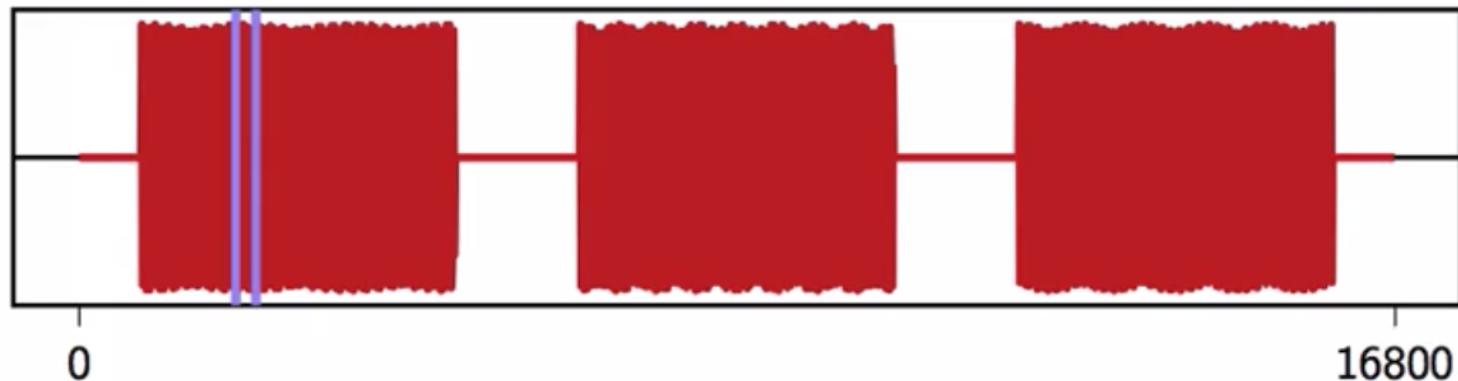
STFT исходного сигнала

- сигнал 1-5-9; STFT ($N=16800$, $L=256$, $M=1$)



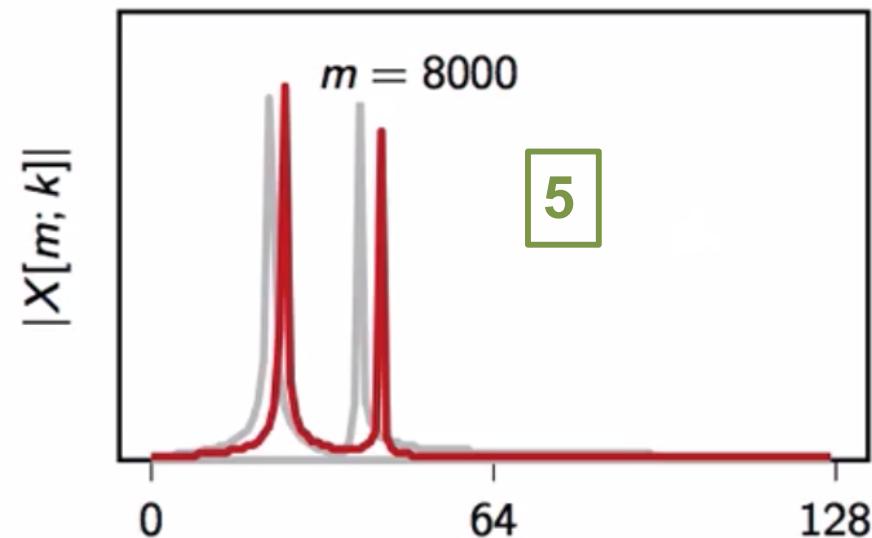
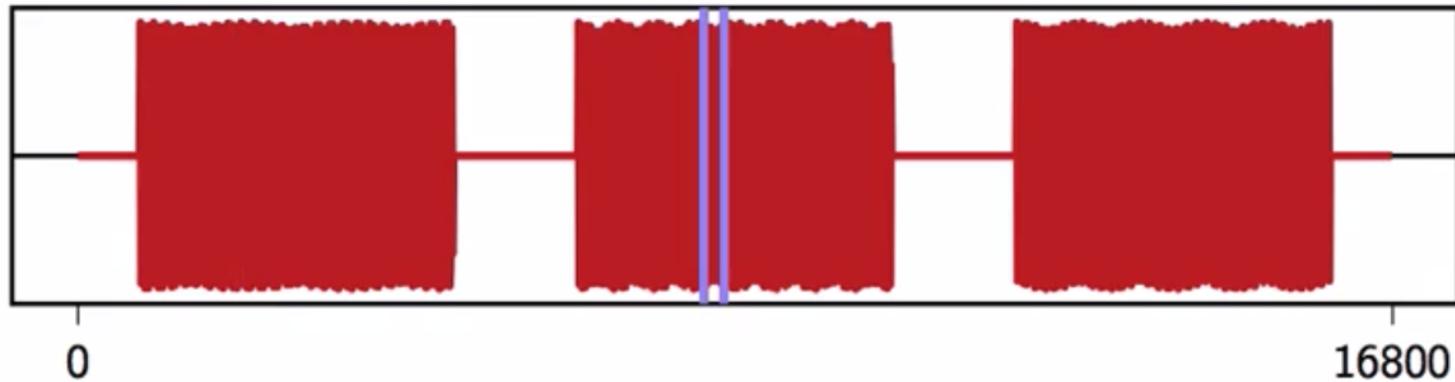
STFT исходного сигнала

- сигнал 1-5-9; STFT ($N=16800$, $L=256$, $M=1$)



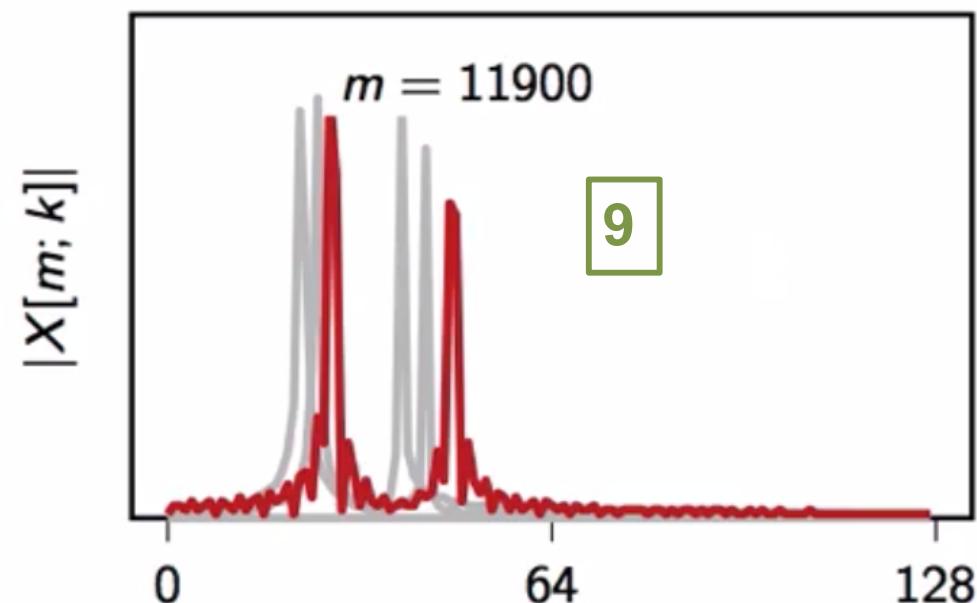
STFT исходного сигнала

- сигнал 1-5-9; STFT ($N=16800$, $L=256$, $M=1$)



STFT исходного сигнала

- сигнал 1-5-9; STFT ($N=16800$, $L=256$, $M=1$)



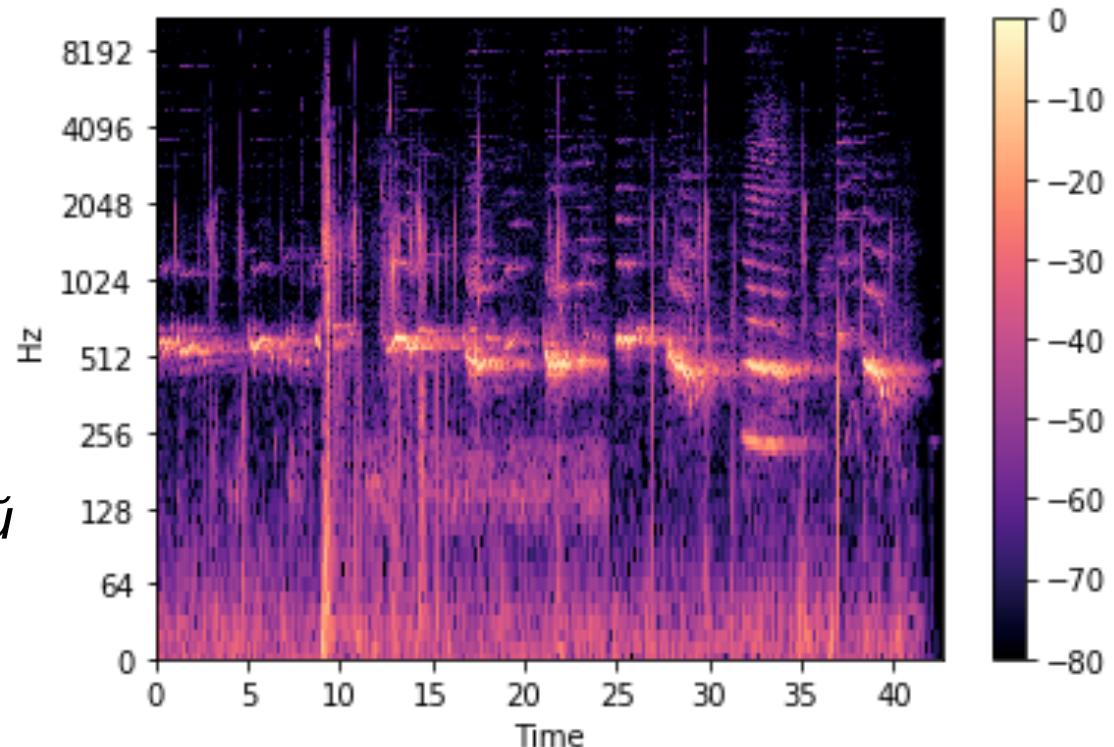
Спектrogramма

Спектrogramма

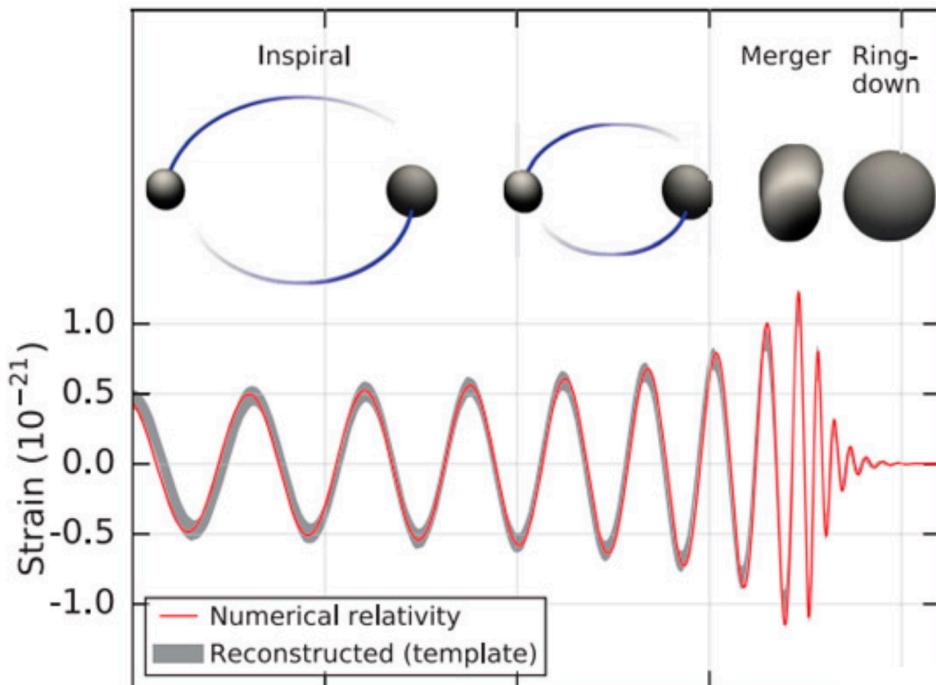
Спектрограмма — изображение, показывающее зависимость спектральной плотности мощности сигнала от времени.

Наиболее распространенное представление спектrogramмы - **двумерная диаграмма**:

- по горизонтальной оси: время
- по вертикальной оси: частота
- интенсивность/цвет каждой точки изображения: амплитуда на определенной частоте в конкретный момент времени



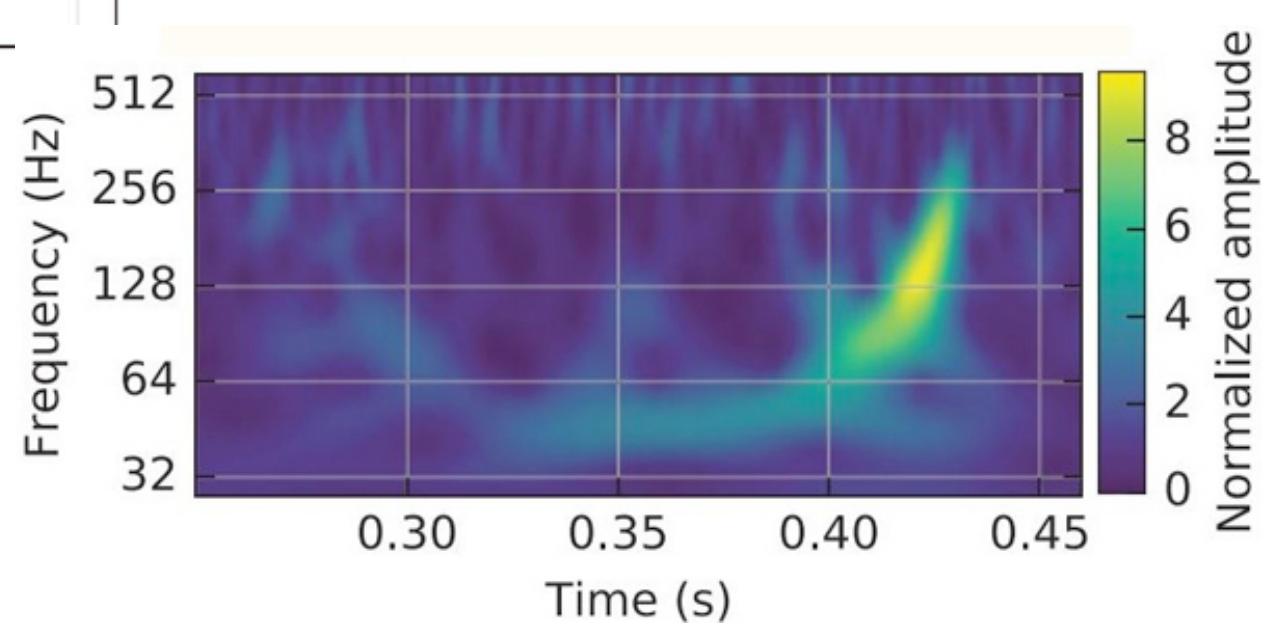
Спектрограмма



Интерпретация
зарегистрированного
сигнала (профиль г-в
излучения и стадии
слияния двух черных дыр)

LIGO Scientific Coll. and Virgo Coll.
Observation of Gravitational Waves
from a Binary Black Hole Merger //
Phys. Rev. Lett. 2016.

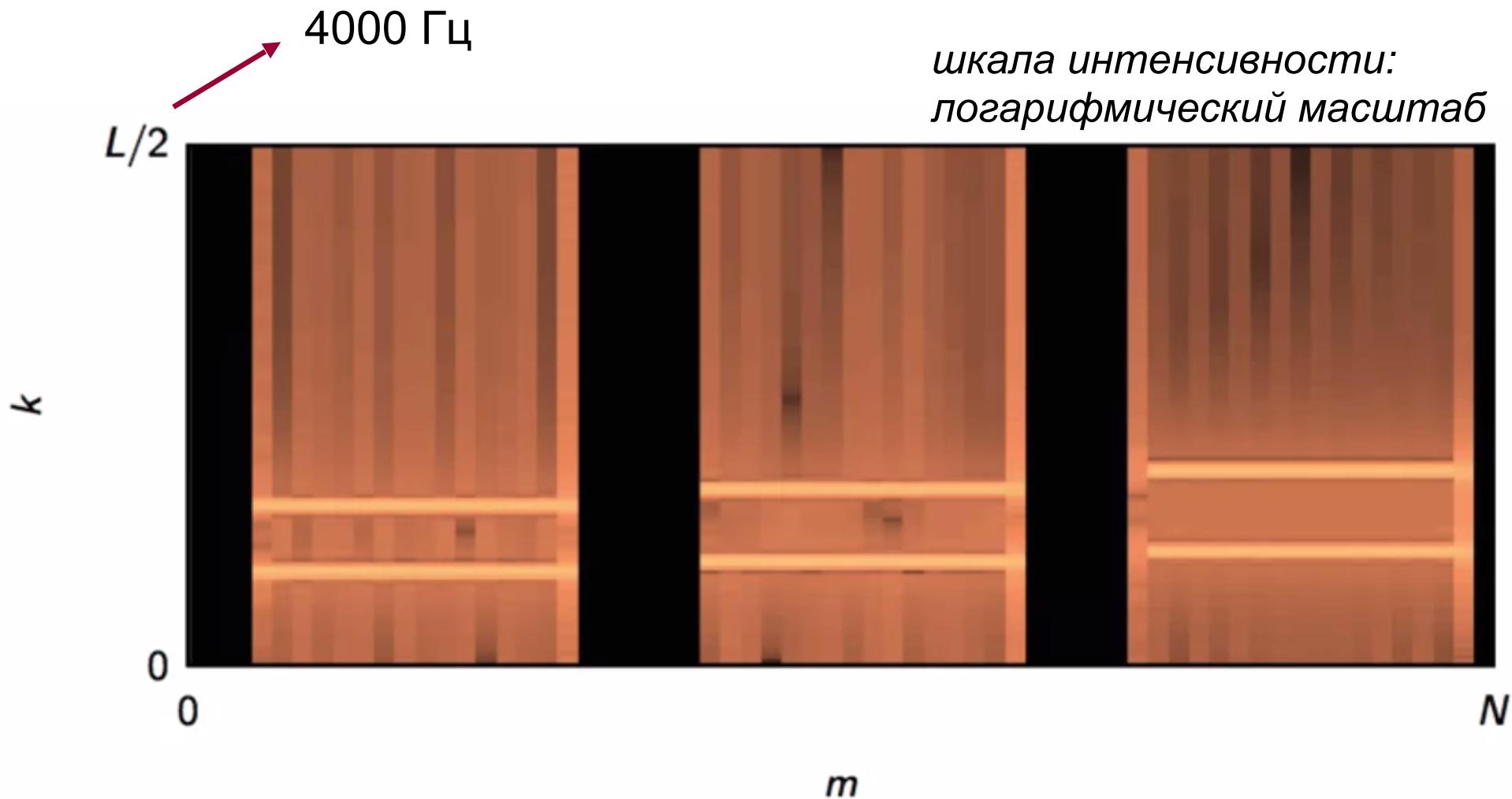
спектрограмма
гравитационной волны



Спектrogramма

➤ сигнал 1-5-9: $F_S = 8000$ Гц

➤ $L = 256$



Спектrogramма

- какой размер интервалов L ?
- должны ли интервалы (окна) перекрываться?
- оконные функции?

широкие окна

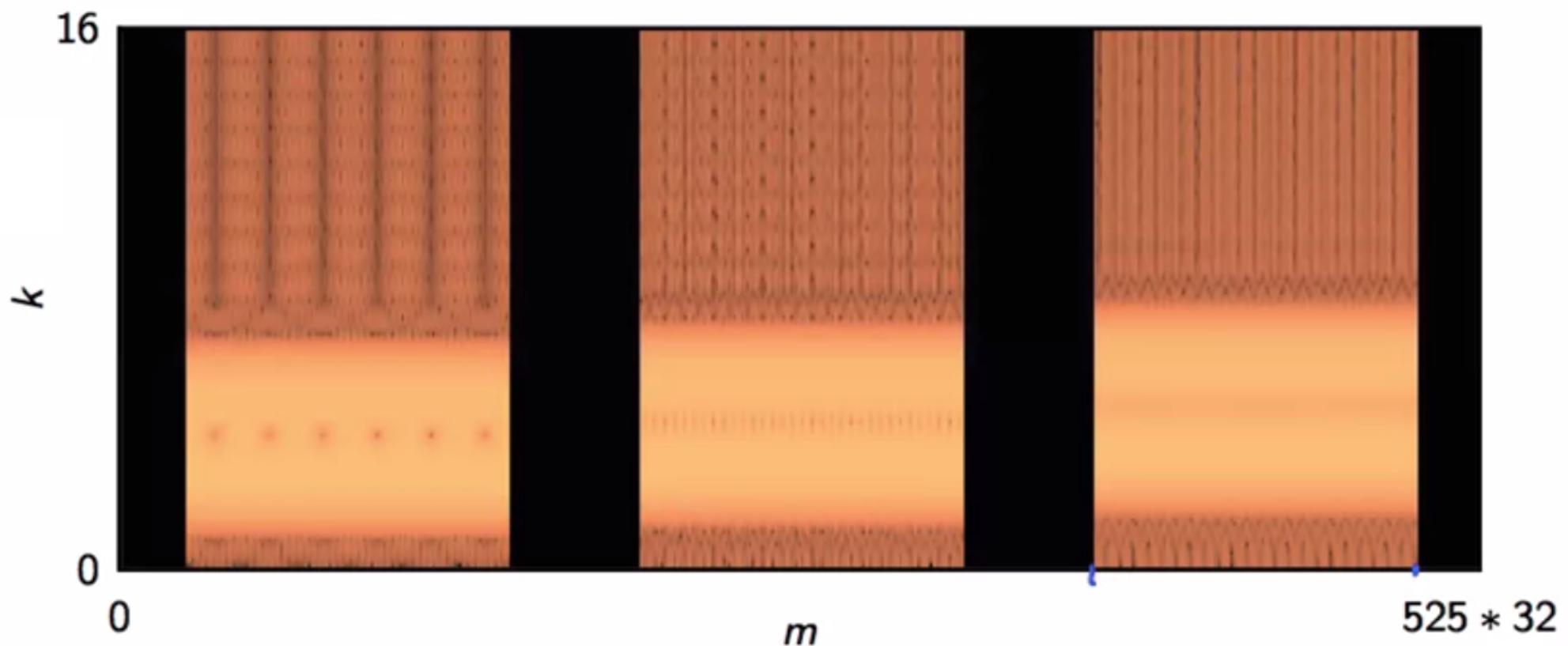
- больше точек ДПФ - лучше разрешение по частотам
- хуже разрешение по времени

узкие окна

- больше временных интервалов - точнее определяется положение перехода
- меньше точек ДПФ - хуже разрешение по частотам

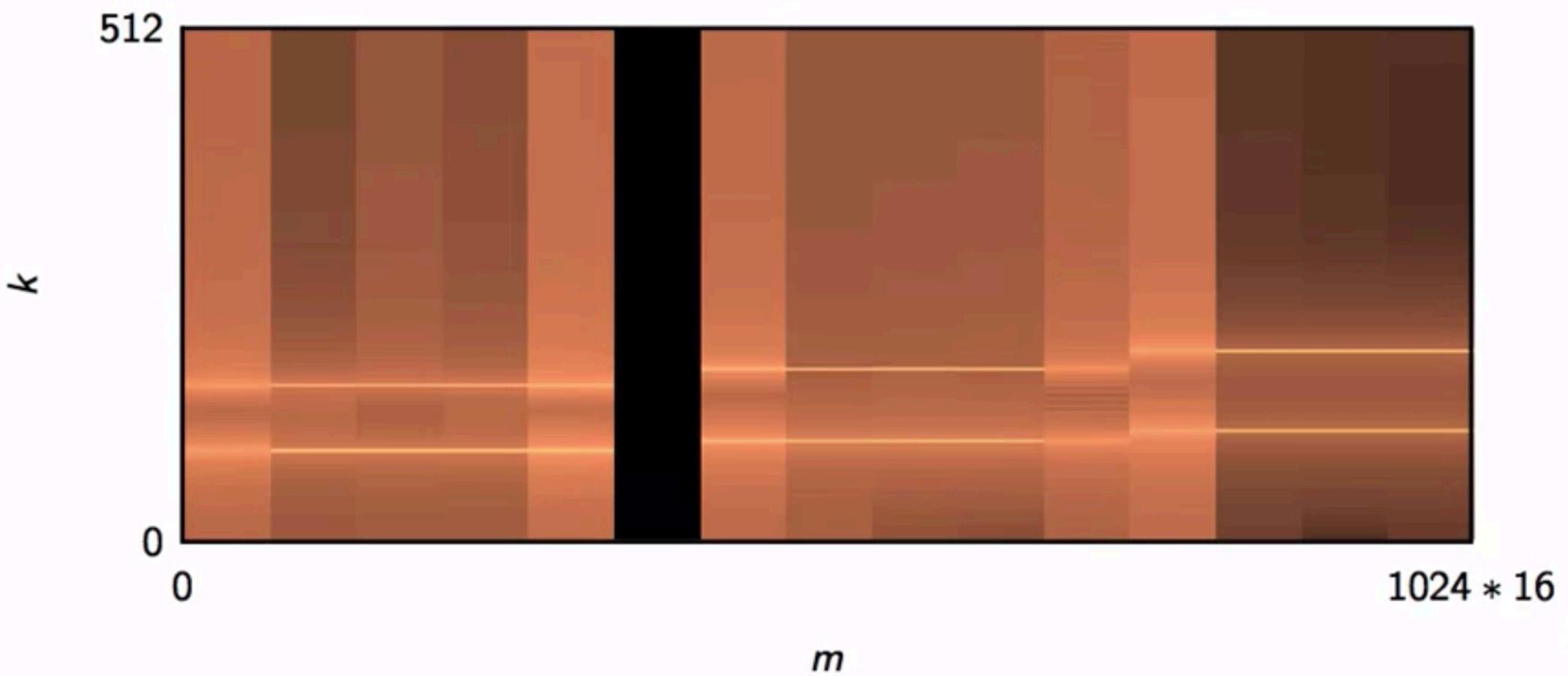
Спектrogramма

$N = 16800, L = 32$

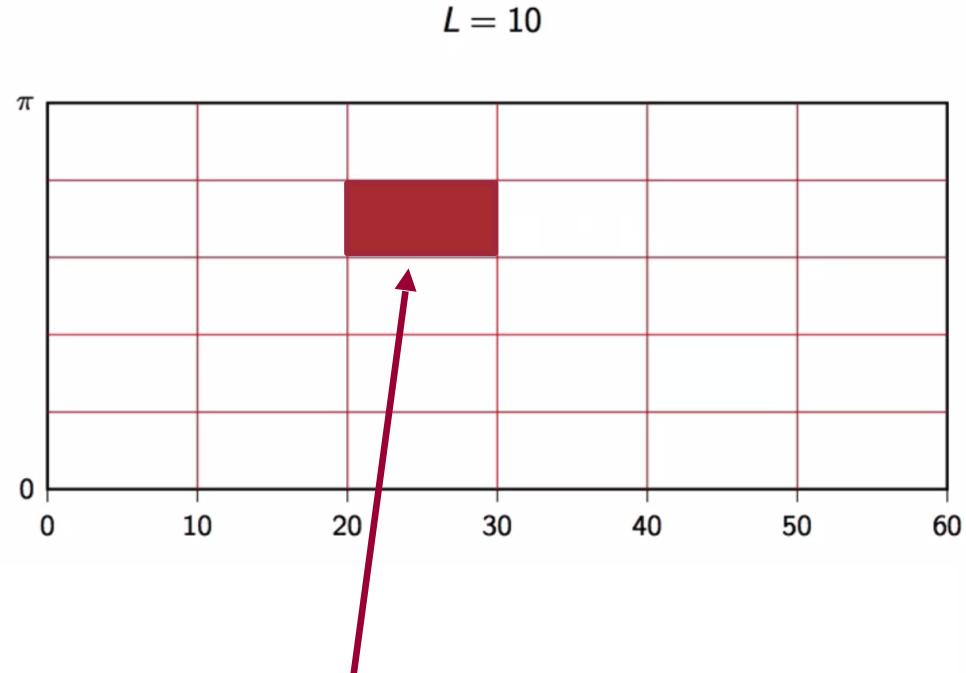


Спектrogramма

$N = 16800, L = 1024$



Принцип неопределенности

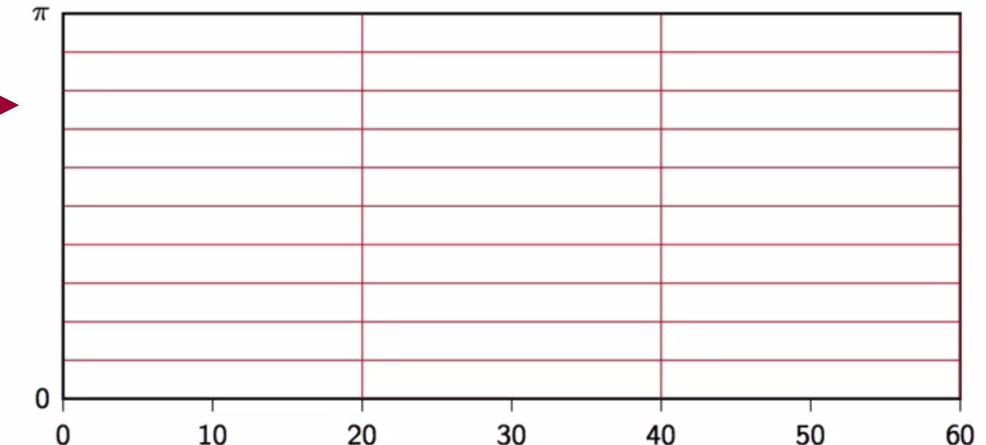


1 коэффициент
SFTF-преобразования

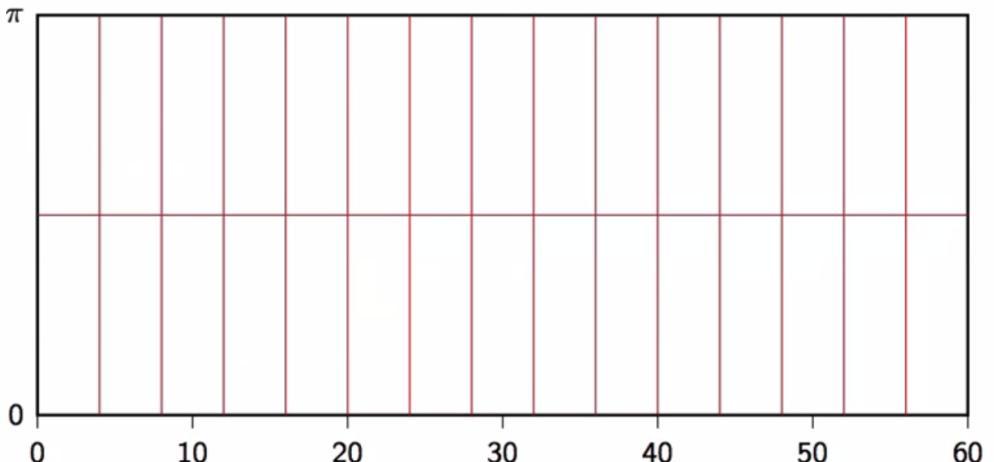
$$\frac{2\pi}{20}$$

$L = 10$

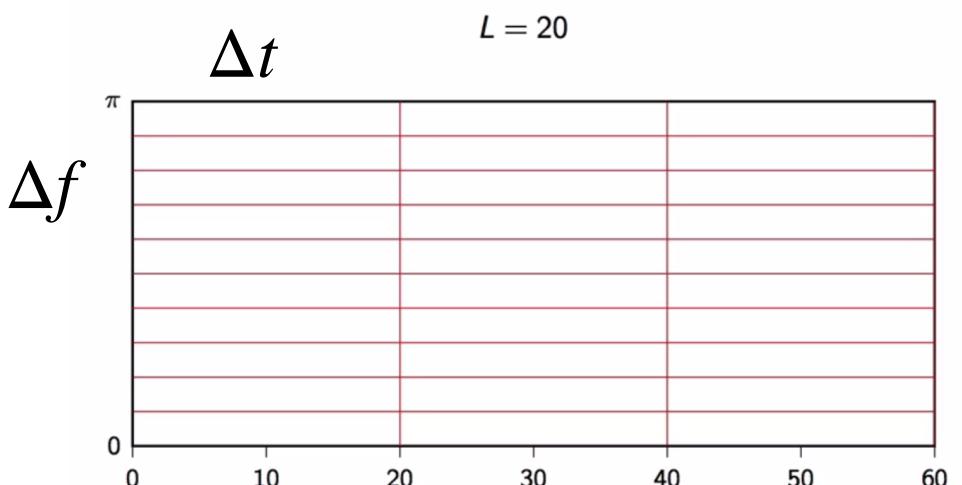
$$L = 20$$



$$L = 4$$



Принцип неопределенности



- “разрешение” по времени $\Delta t = L$
- “разрешение” по частоте $\Delta f = 2\pi/L$
- $\Delta t \Delta f = 2\pi$



принцип неопределенности в спектральном анализе сигналов

Вейвлет-преобразование

Проблема:

- базисные функции Фурье предельно локализованы в частотной области и не локализованы во временной (определенны во всем временном интервале)
- в оконном преобразовании Фурье в пределах каждого подинтервала сигнал “считается” стационарным (периодическим)

Вейвлет-преобразование:

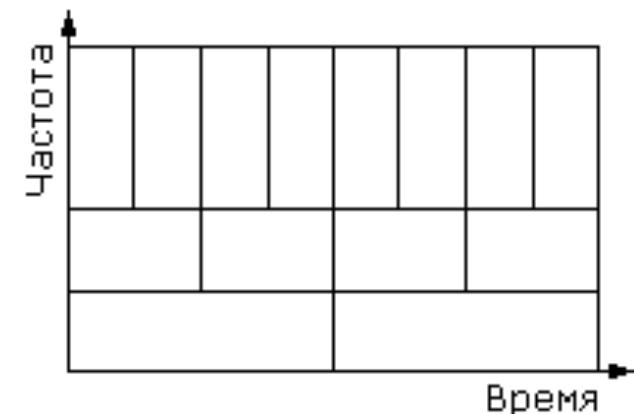
- разложение сигнала производится по базису, образованному сдвигами и разномасштабными копиями функции-прототипа
- такие базисные функции называются вейвлетами (*wavelet* - маленькая волна)

Вейвлет-преобразование

Вейвлеты:

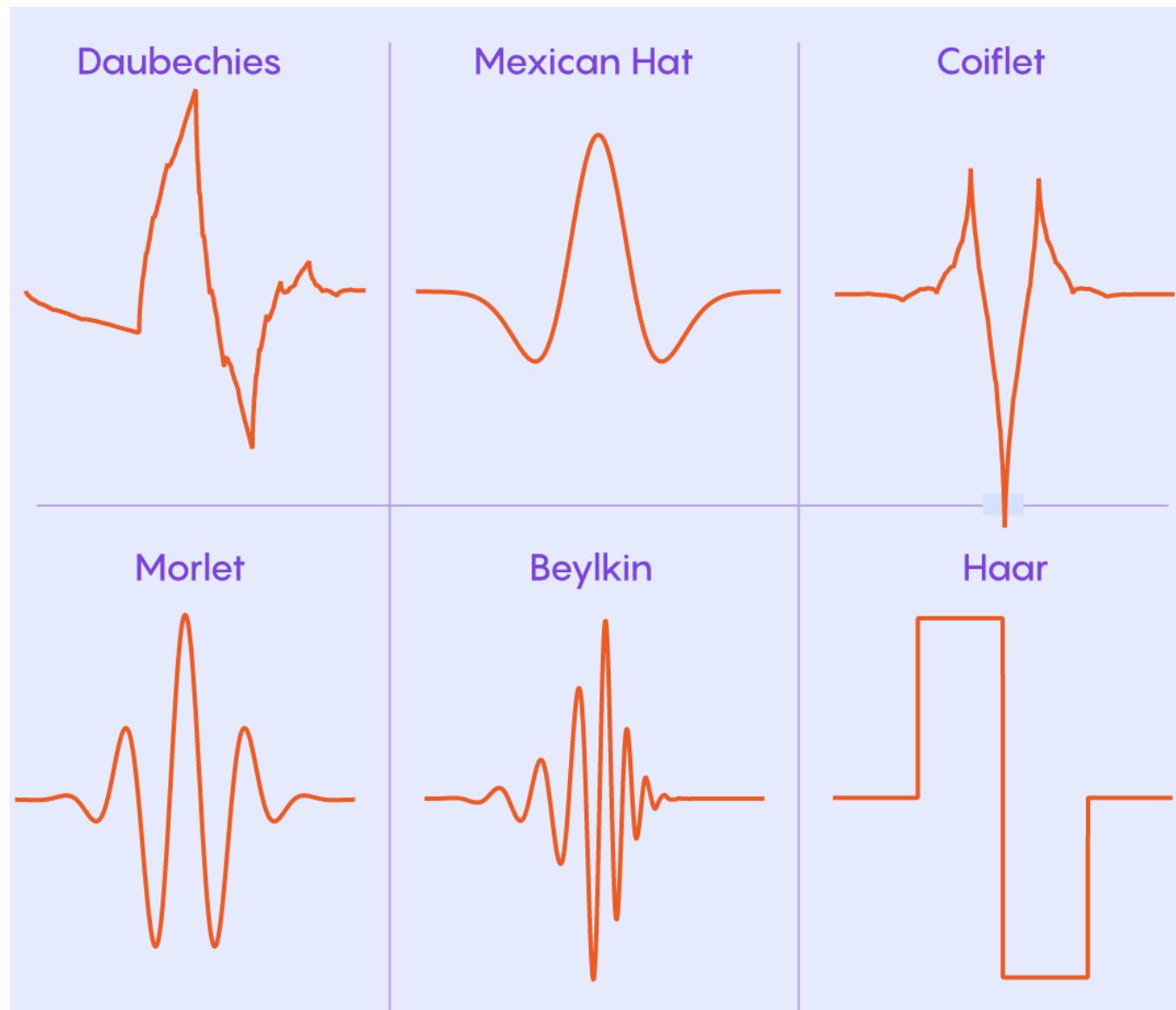
- определены на пространстве $L_2(\mathbb{C})$ (пространство комплекснозначных функций $f(t)$ на прямой с ограниченной энергией)
- колеблются вокруг оси абсцисс
- быстро сходятся к нулю по мере увеличения абсолютного значения аргумента

Вейвлет-преобразование представляет собой свертку вейвлет-функции с сигналом.

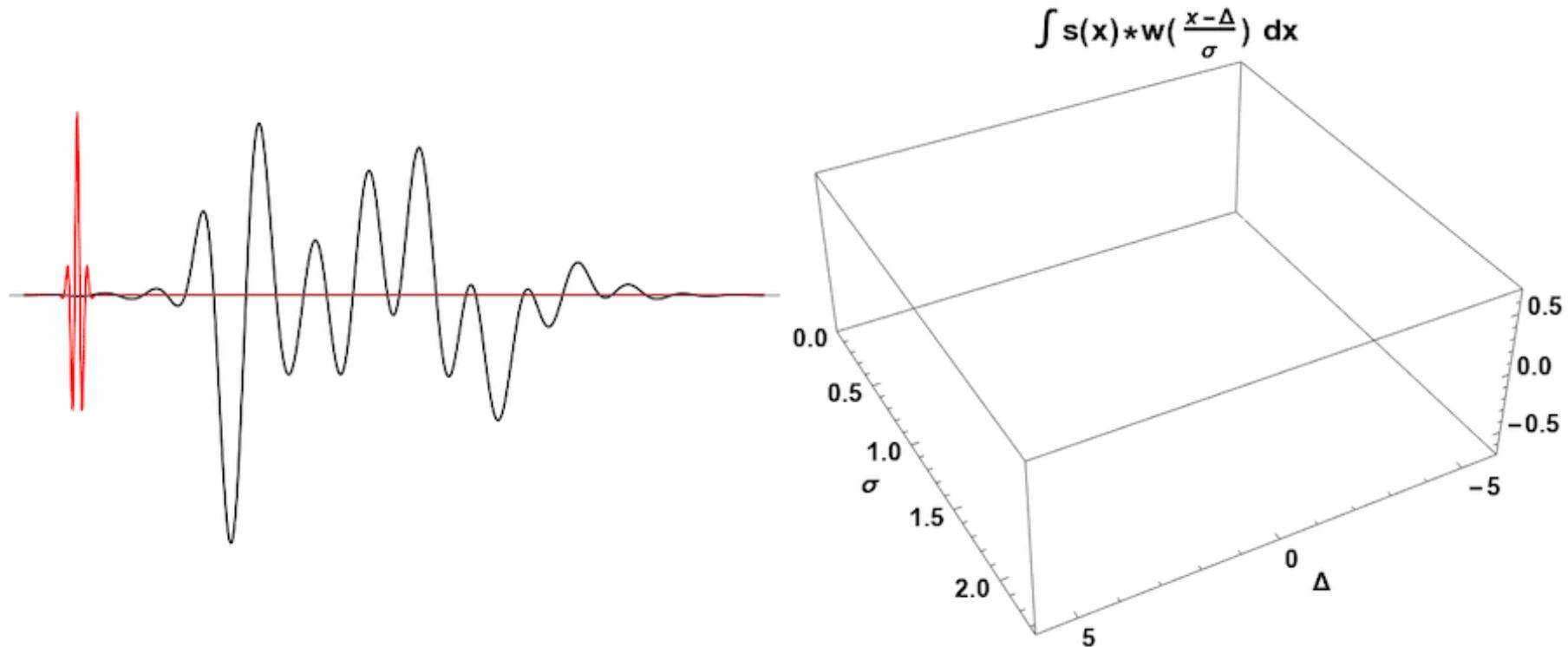


Фазовая плоскость вейвлет-преобразования

Вейвлеты



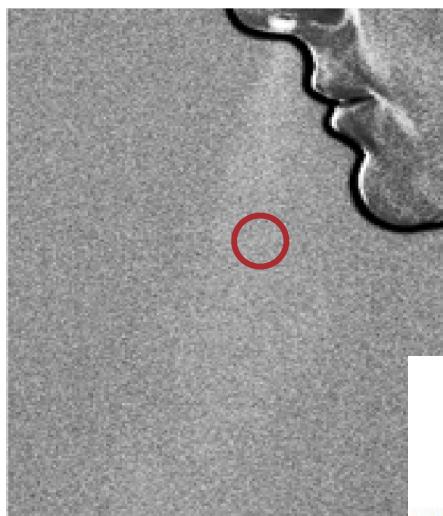
Вейвлет-преобразование



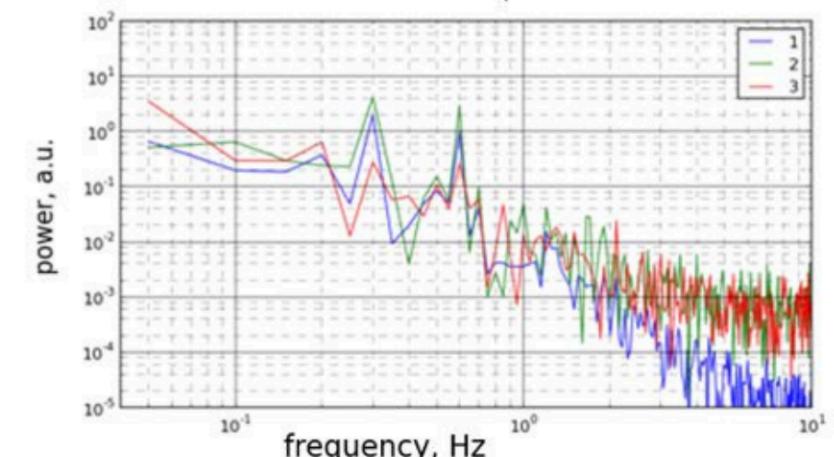
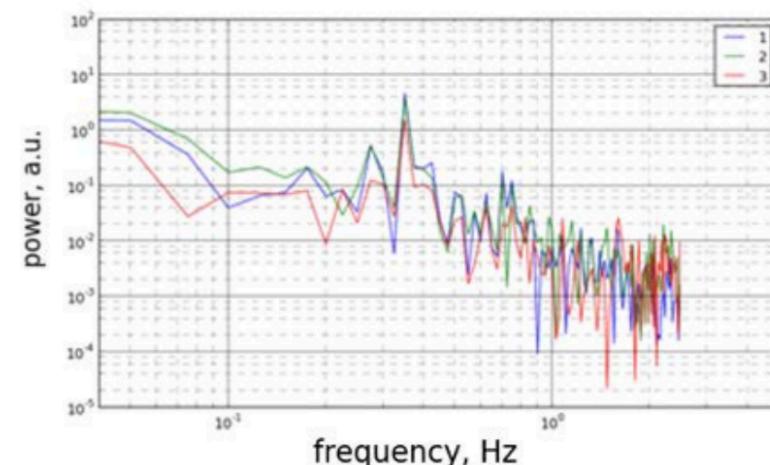
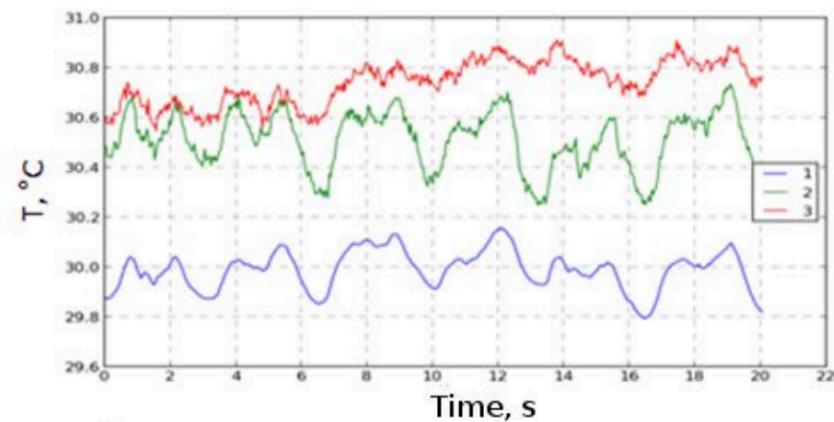
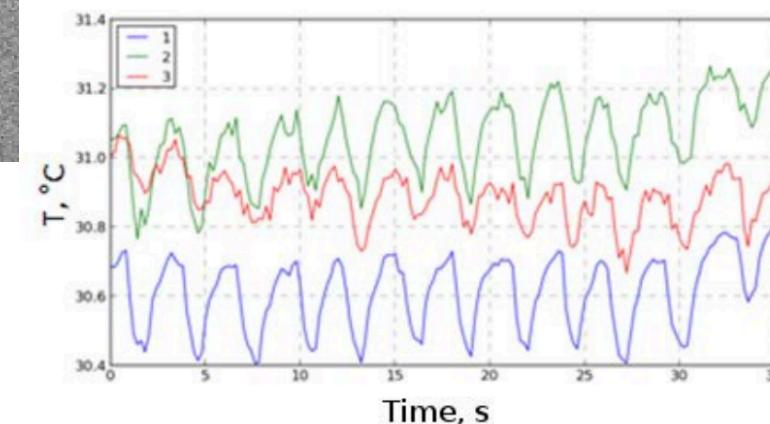
Анализ сигналов производится в плоскости вейвлет-коэффициентов
Масштаб — Время — Уровень (Scale-Time-Amplitude)

Пример 1. Психофизиология.

Пример 1. Психофизиология.

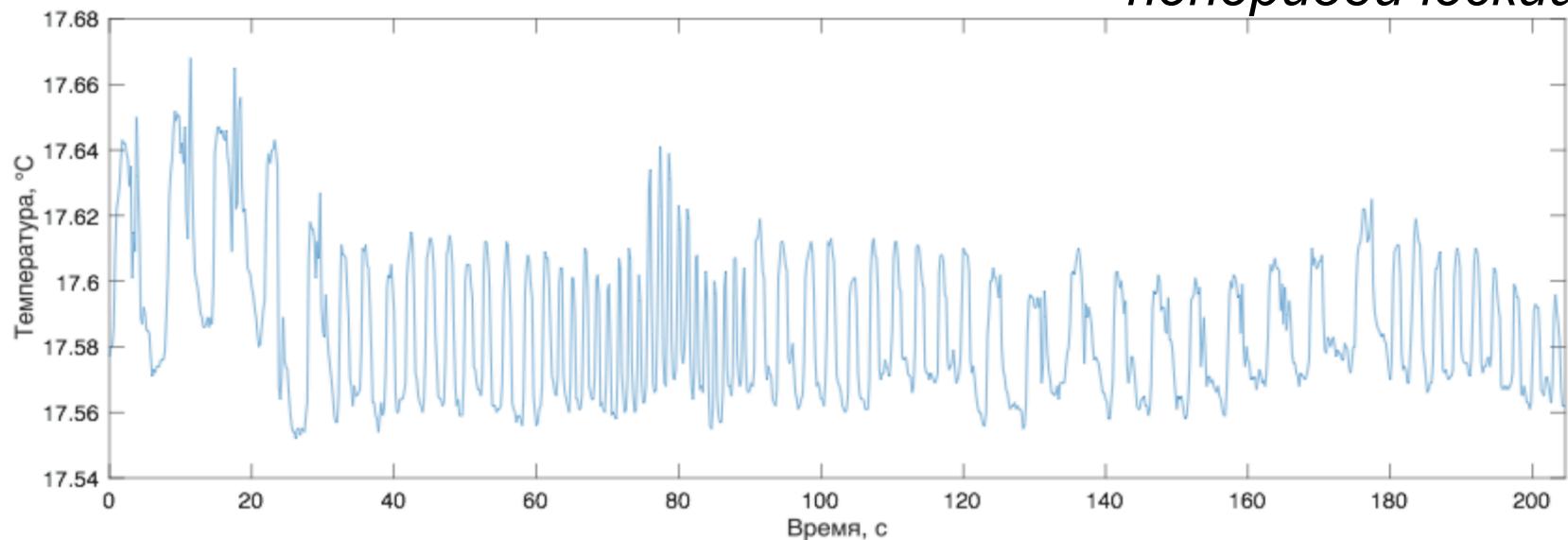


анализ изменения частоты дыхания в зависимости от внешних стимулов на основе тепловизионной съемки

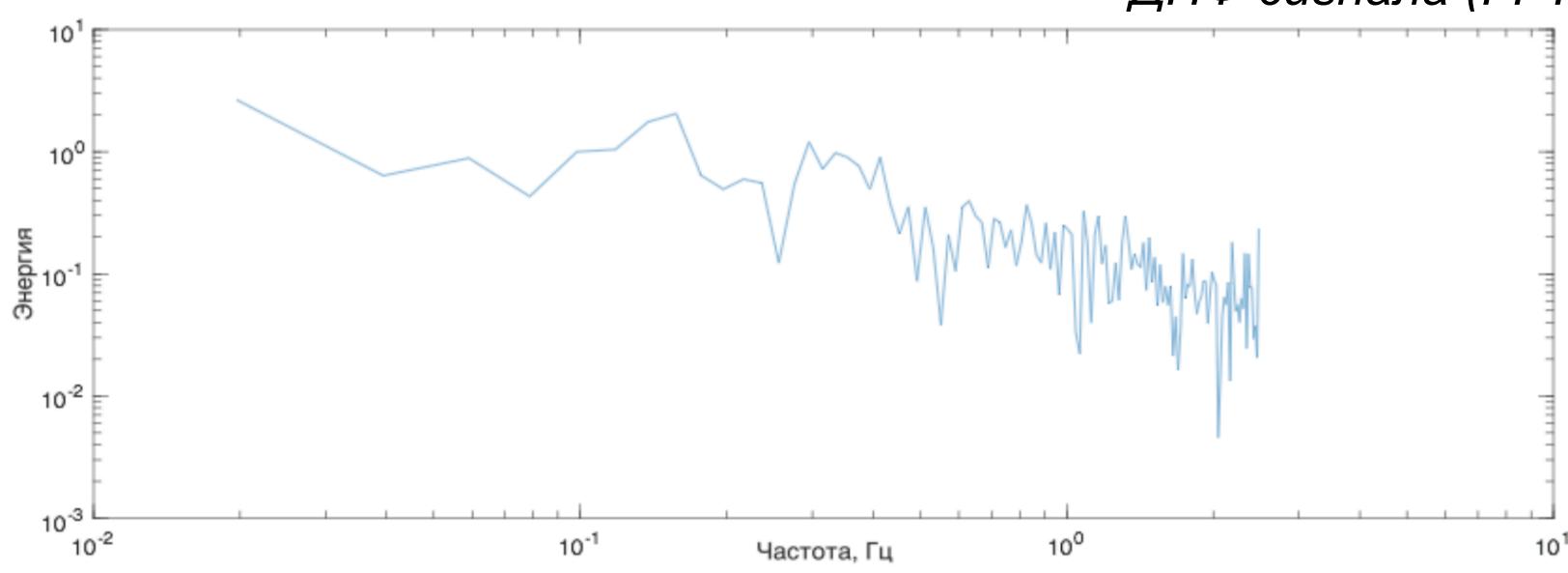


Пример 1. Психофизиология.

непериодический сигнал

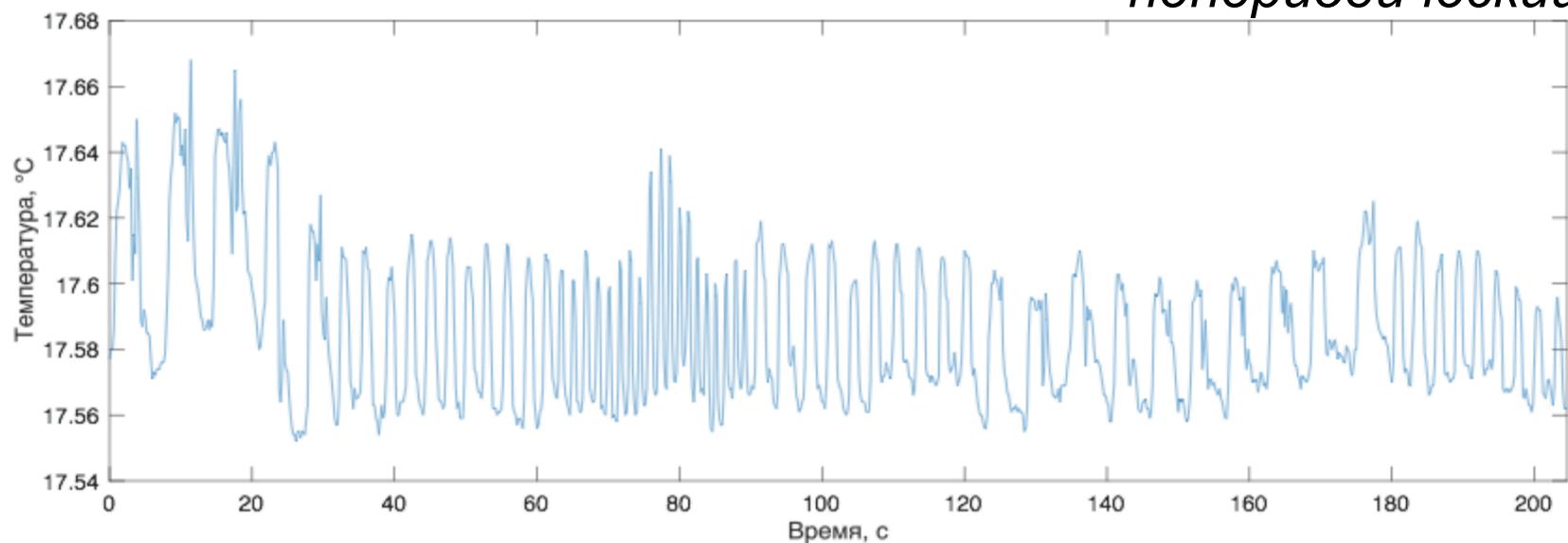


ДПФ сигнала (FFT алгоритм)

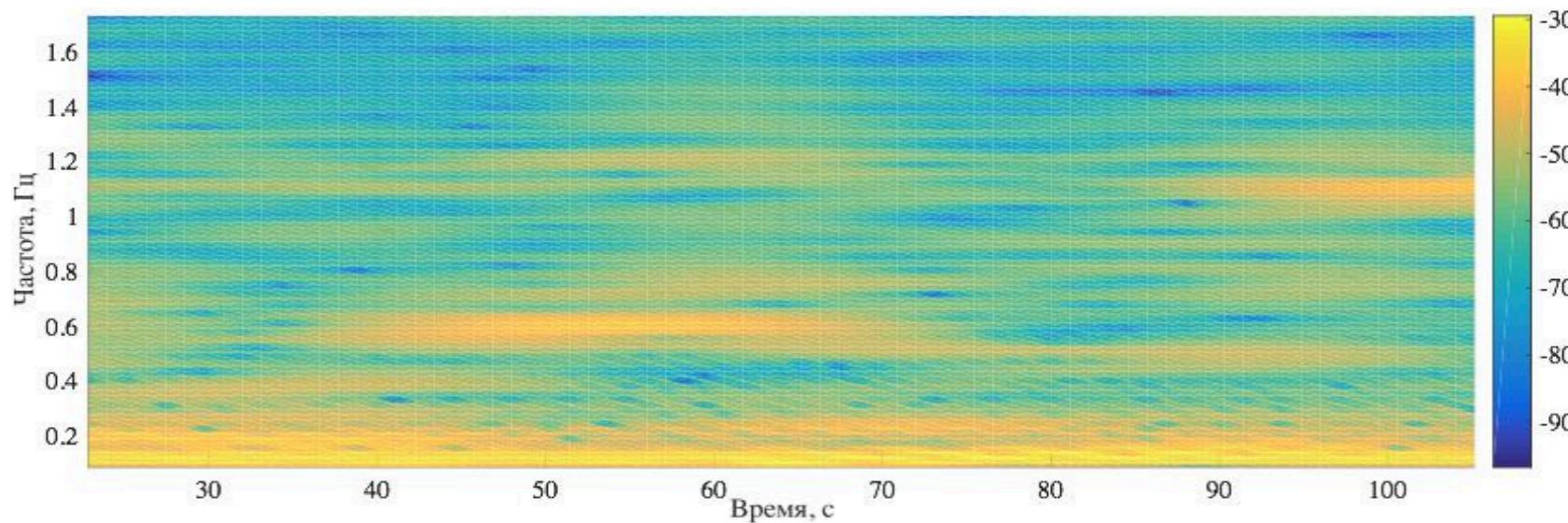


Пример 1. Психофизиология.

непериодический сигнал

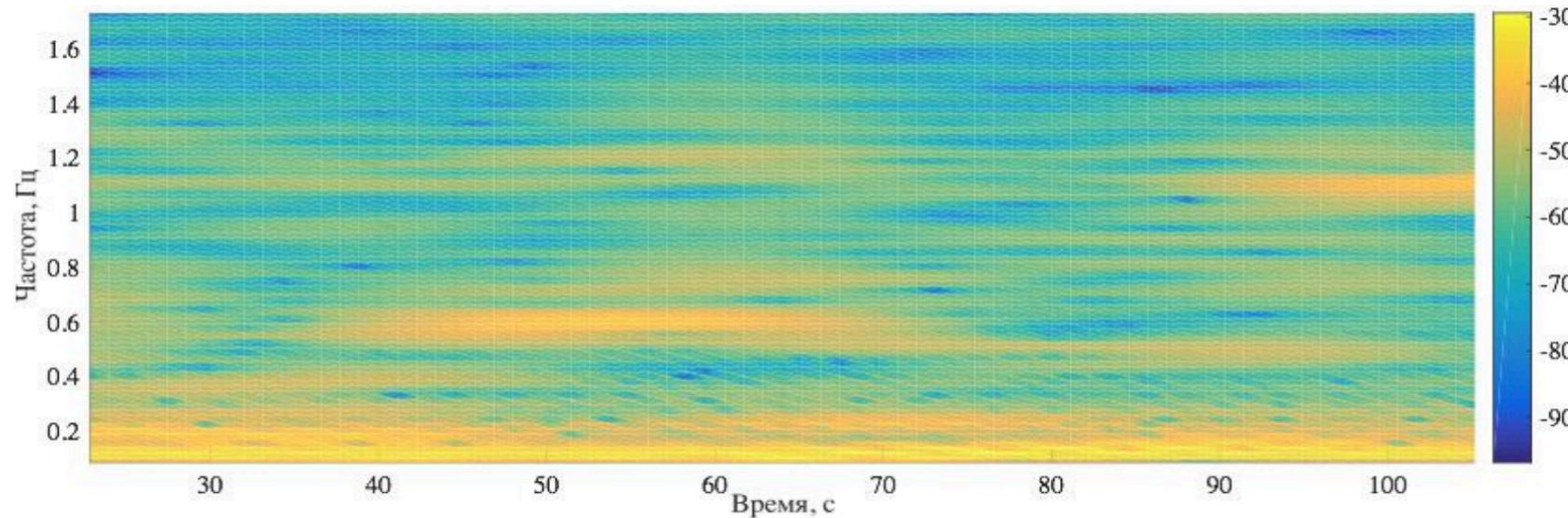


Окноное преобразование Фурье

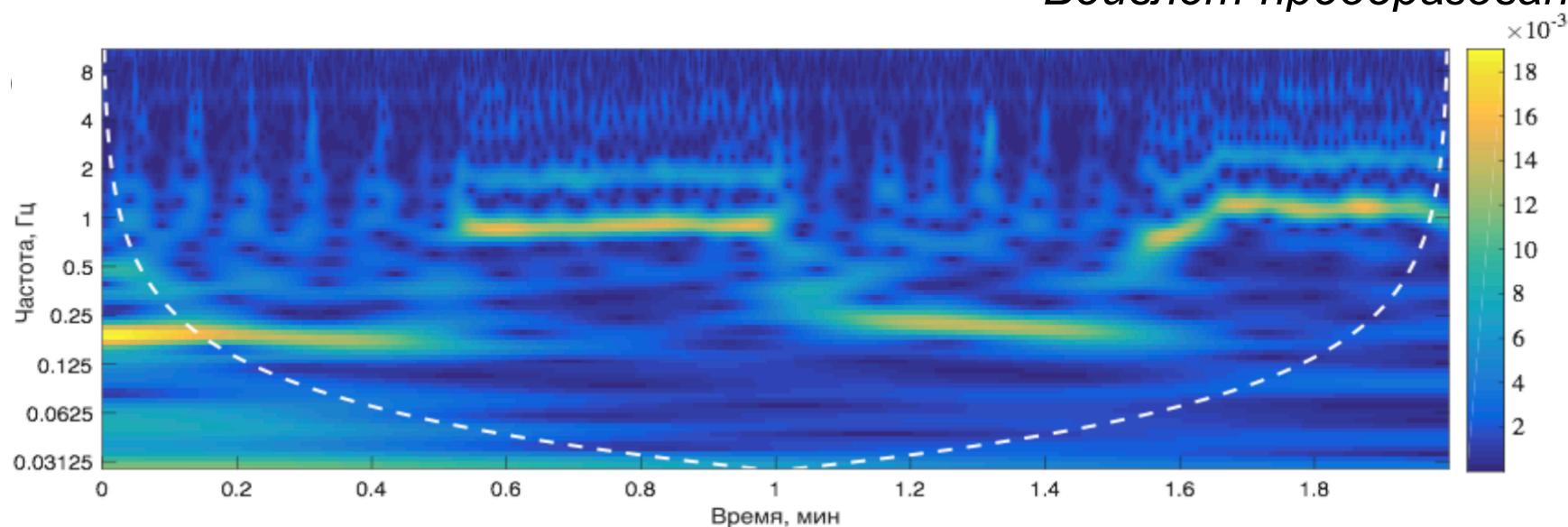


Пример 1. Психофизиология.

Оконное преобразование Фурье



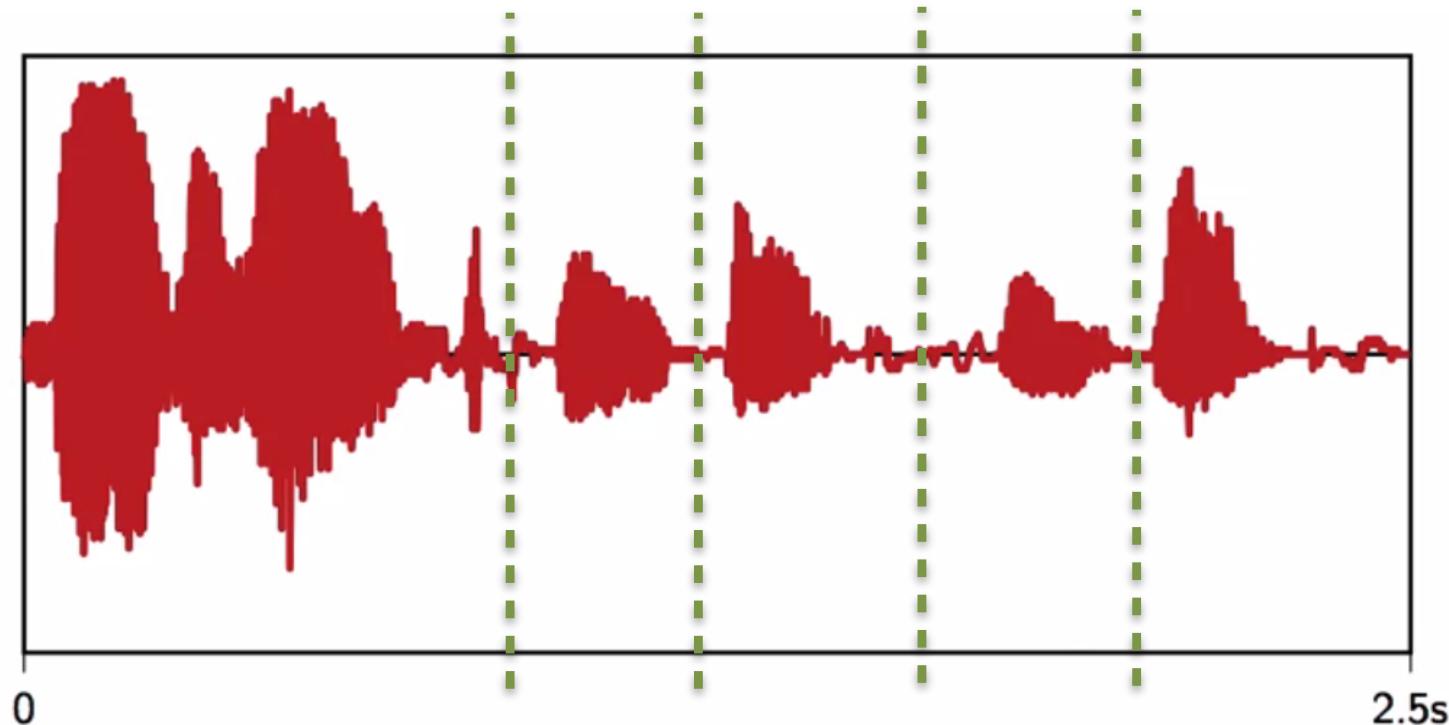
Вейвлет-преобразование



Пример 2. Анализ речи.

Пример 2. Анализ речи.

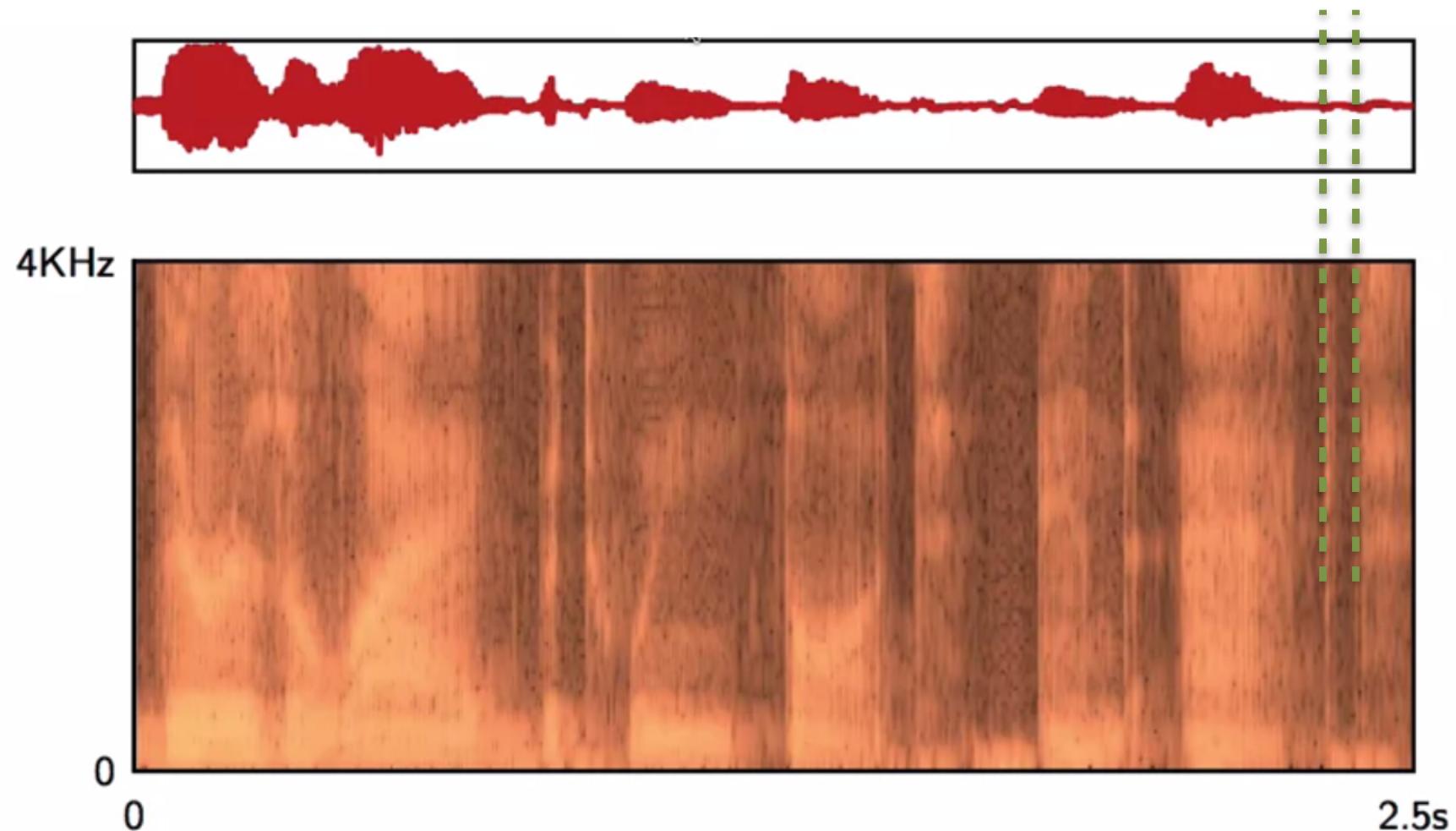
There is a lag between thought and act



$$F_s = 8 \text{ кГц}$$

Пример 2. Анализ речи.

$L = 8 \text{ мс}, \Delta f = 125 \text{ кГц}$



Пример 2. Анализ речи.

$L = 32 \text{ мс}, \Delta f = 31 \text{ кГц}$

