



Кафедра молекулярных процессов и экстремальных
состояний вещества

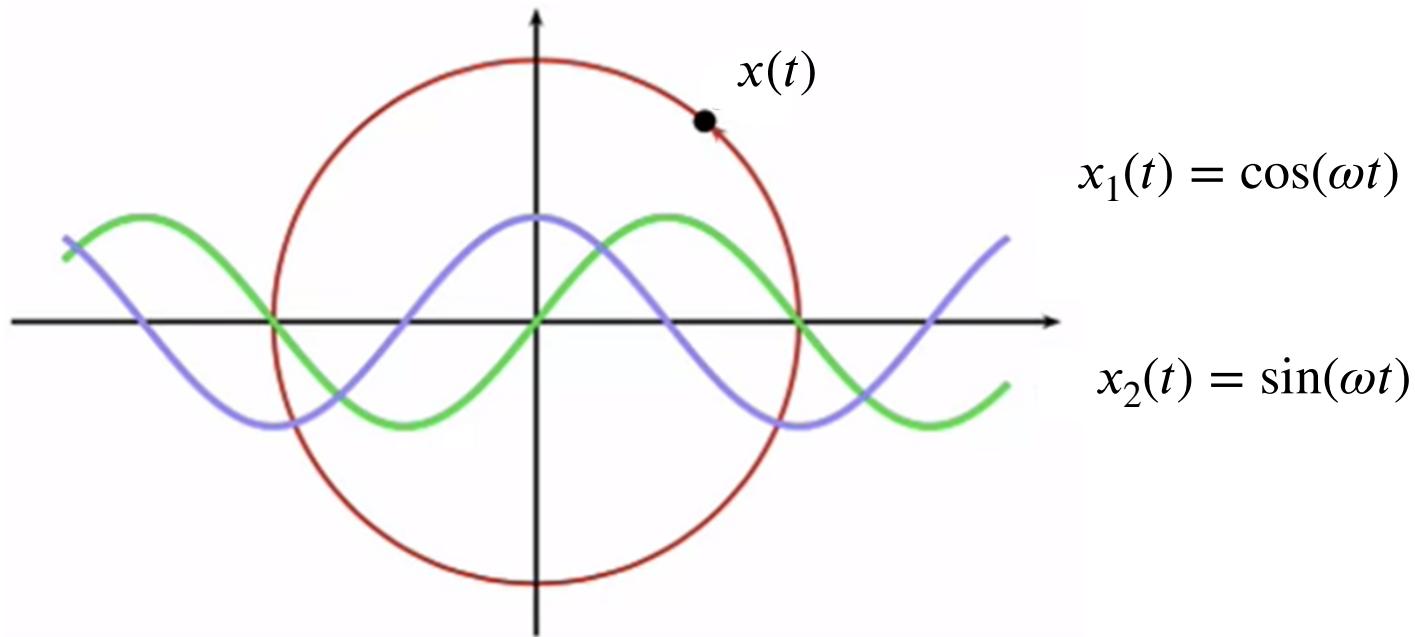
Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

3. Пространство сигналов. Базисные функции. Разложение сигналов по базису Фурье.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст.преп.

Комплексная экспонента

Любое периодическое движение можно представить вращением на плоскости



Положение точки в любой момент времени удобно описывать комплексной экспонентой

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

Дискретные периодические сигналы

Составляющие сигнала:

- частота ω (радиан) !! не рад/с !!
- начальная фаза φ (радиан)
- амплитуда A

Разложение по **формуле Эйлера**:

$$x[n] = Ae^{j(\omega n + \varphi)} \quad]$$

Дискретные периодические сигналы

Комплексное представление облегчает математические операции с сигналами – вместо формул тригонометрии ...

.... можно использовать алгебраические:

$$\cos(\omega n + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega n + \varphi)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega n} \cdot e^{j\varphi} \right\}$$



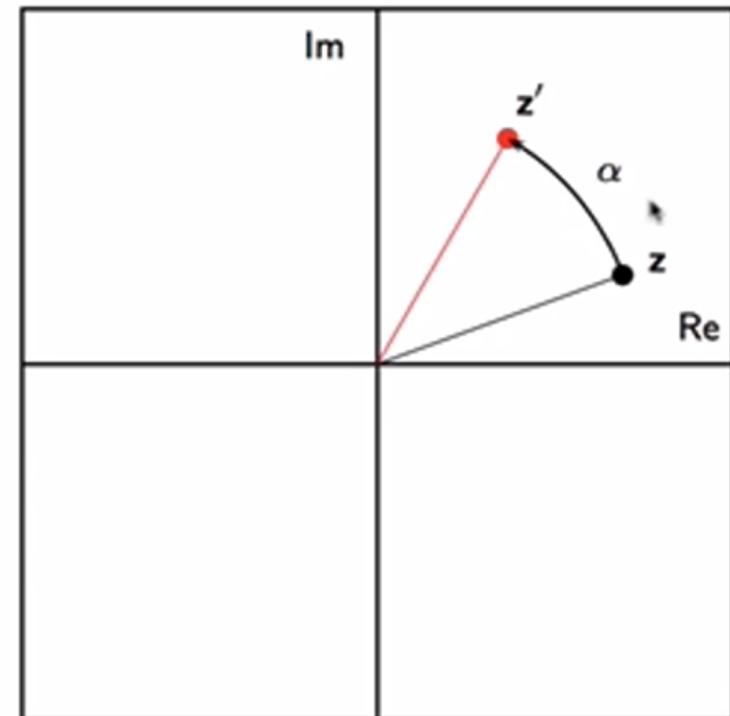
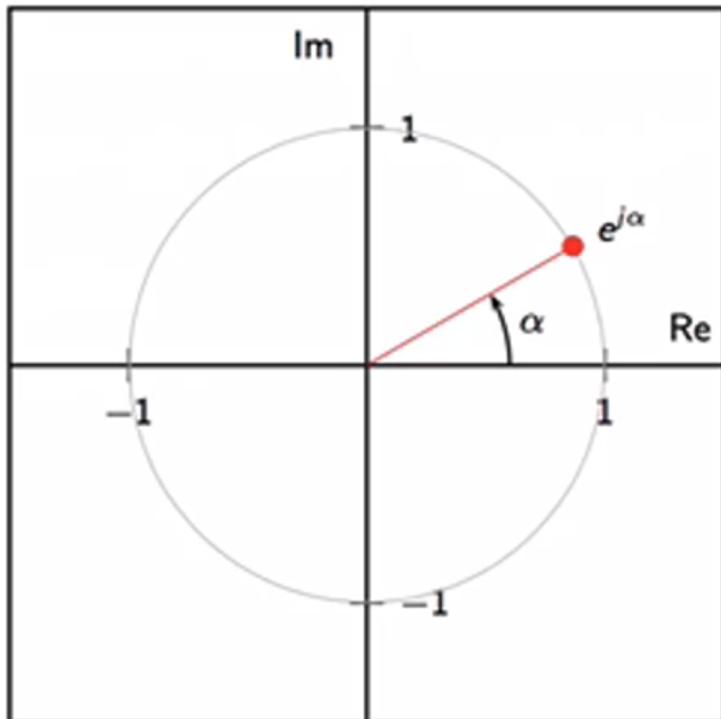
изменение фазы косинуса

Комплексная экспонента

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

поворот точки на плоскости

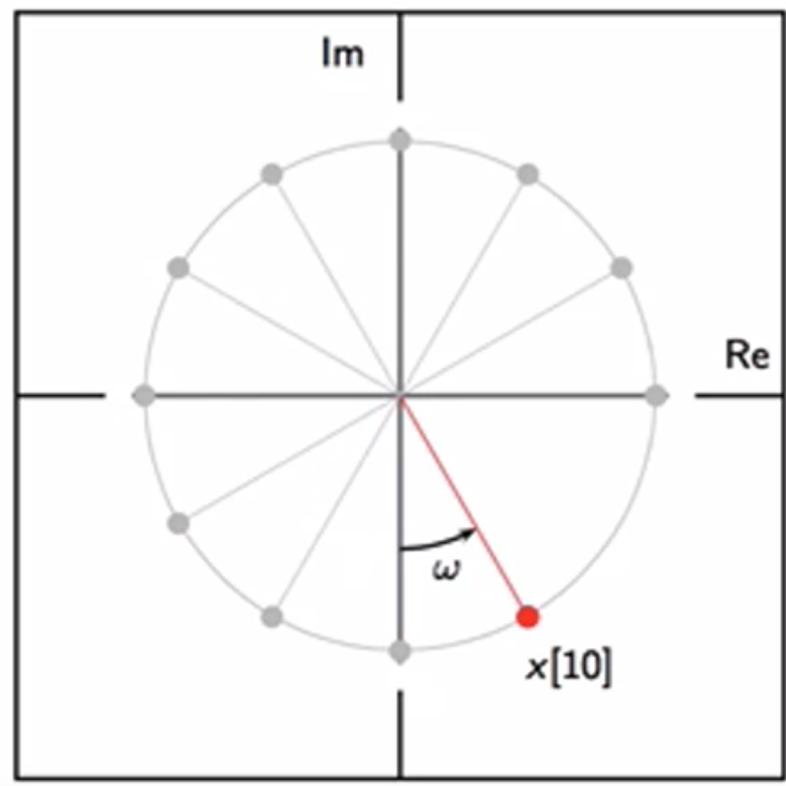
$$z' = ze^{j\alpha}$$



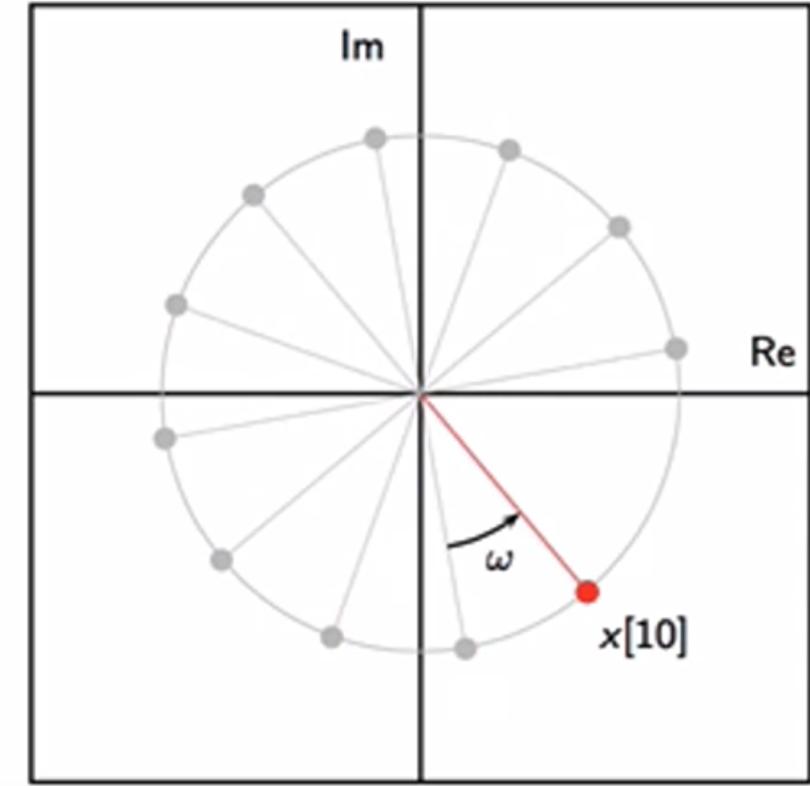
$$|e^{j\alpha}| = 1$$

Экспоненциальная последовательность

$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow x[n+1] = x[n]e^{j\omega}$$



$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi/12 \\ x[0] &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi/12 \\ x[0] &= e^{j\phi}\end{aligned}$$

Экспоненциальная последовательность

Комплексная экспоненциальная последовательность $e^{j\omega n}$ является периодической, только если

$$\omega = \frac{M}{N}2\pi, \quad M, N \in \mathbb{N}$$

Доказательство:

$$x[n] = x[n + N] \quad e^{j\omega N} = 1$$

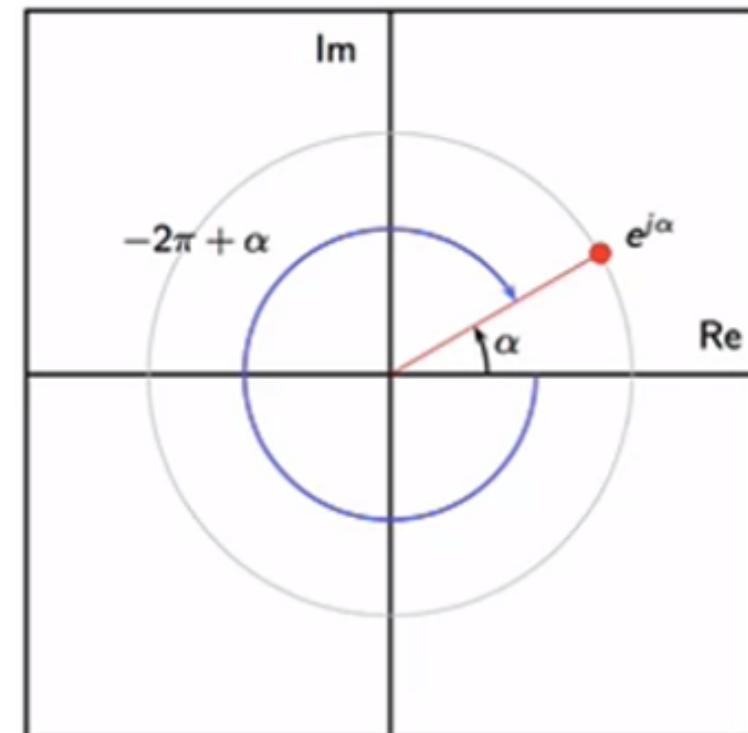
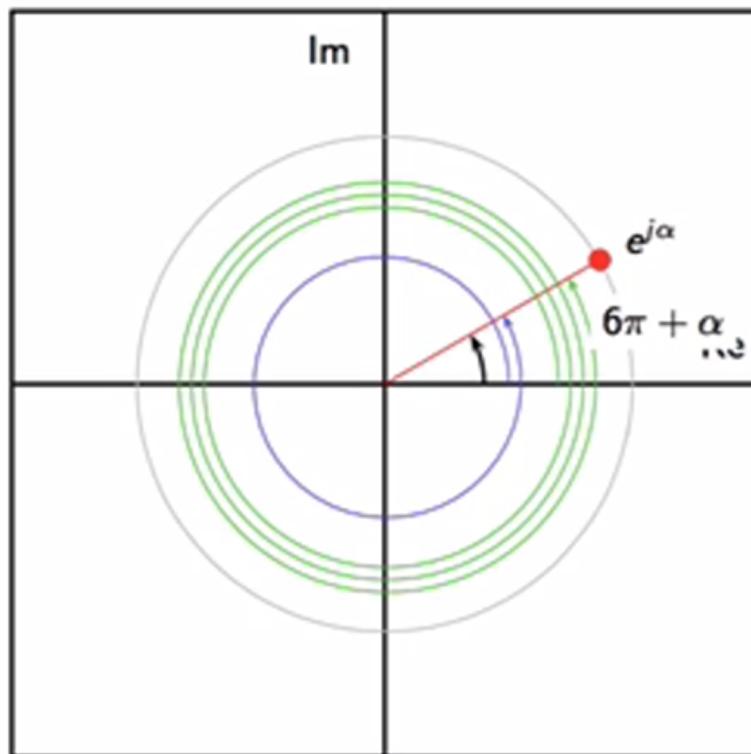
$$e^{j(\omega n + \phi)} = e^{j(\omega(n+N) + \phi)} \quad \omega N = 2M\pi, \quad M \in \mathbb{Z}$$

$$e^{j\omega n} e^{j\phi} = e^{j\omega n} e^{j\omega N} e^{j\phi} \quad \omega = \frac{M}{N}2\pi$$

Алиасинг (наложение)

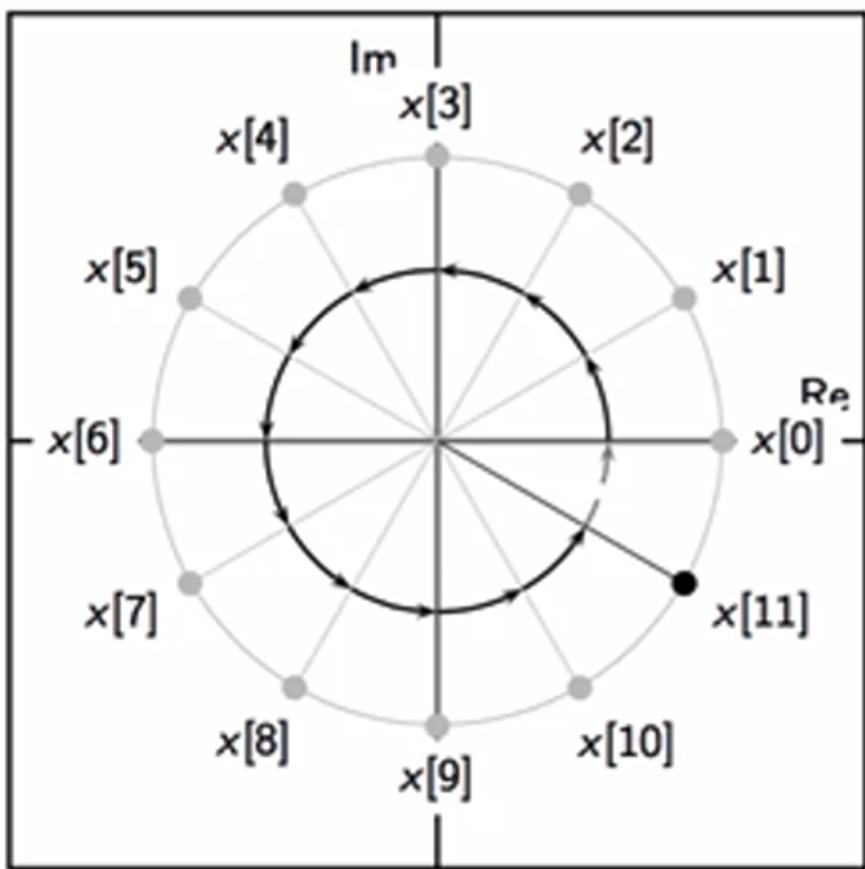
Одна и та же точка на плоскости может иметь различное представление

$$e^{j\alpha} = e^{j(\alpha+2k\pi)}, \forall k \in \mathbf{Z}$$

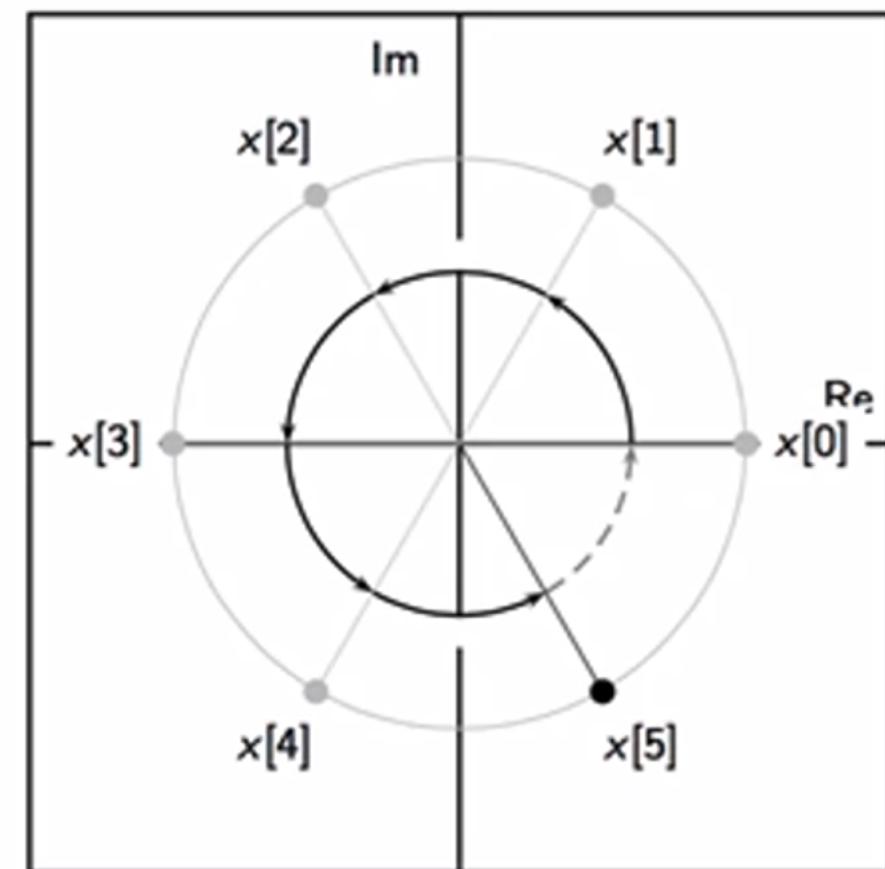


Алиасинг (наложение)

$$\omega = 2\pi/12$$

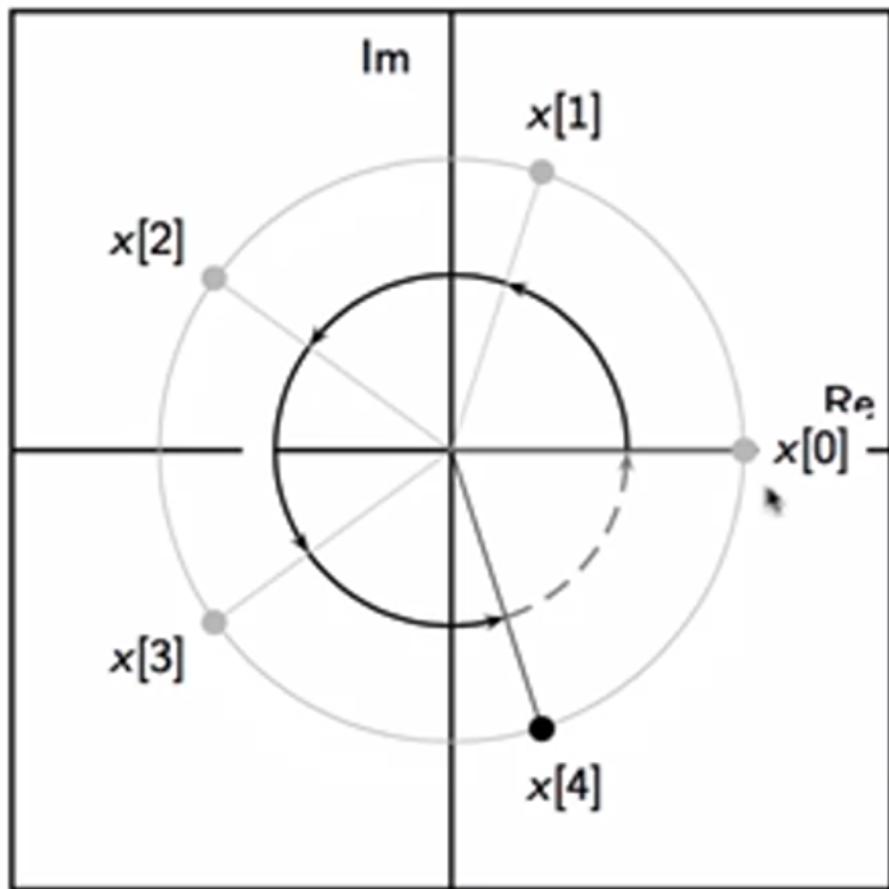


$$\omega = 2\pi/6$$

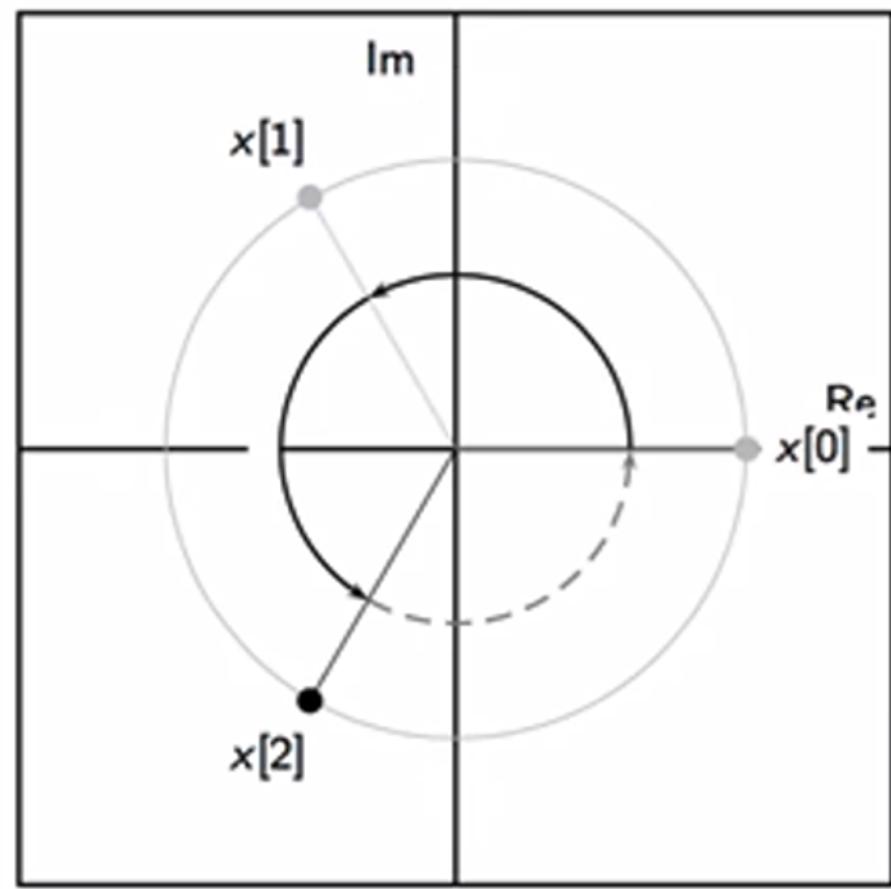


Алиасинг (наложение)

$$\omega = 2\pi/5$$

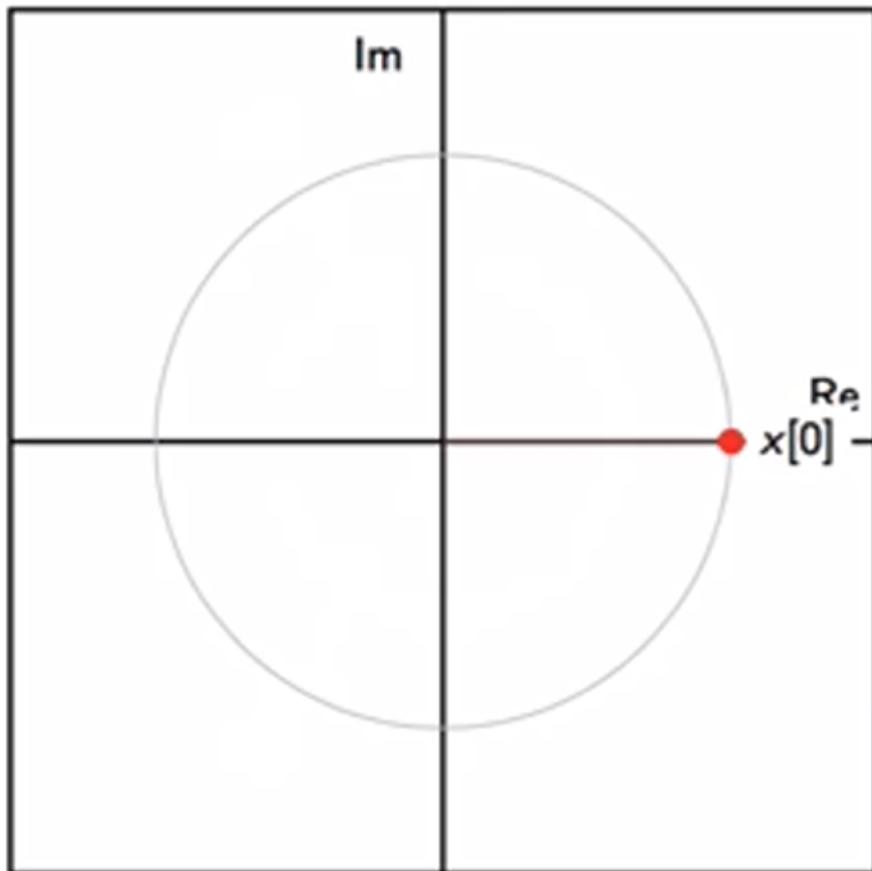


$$\omega = 2\pi/3$$

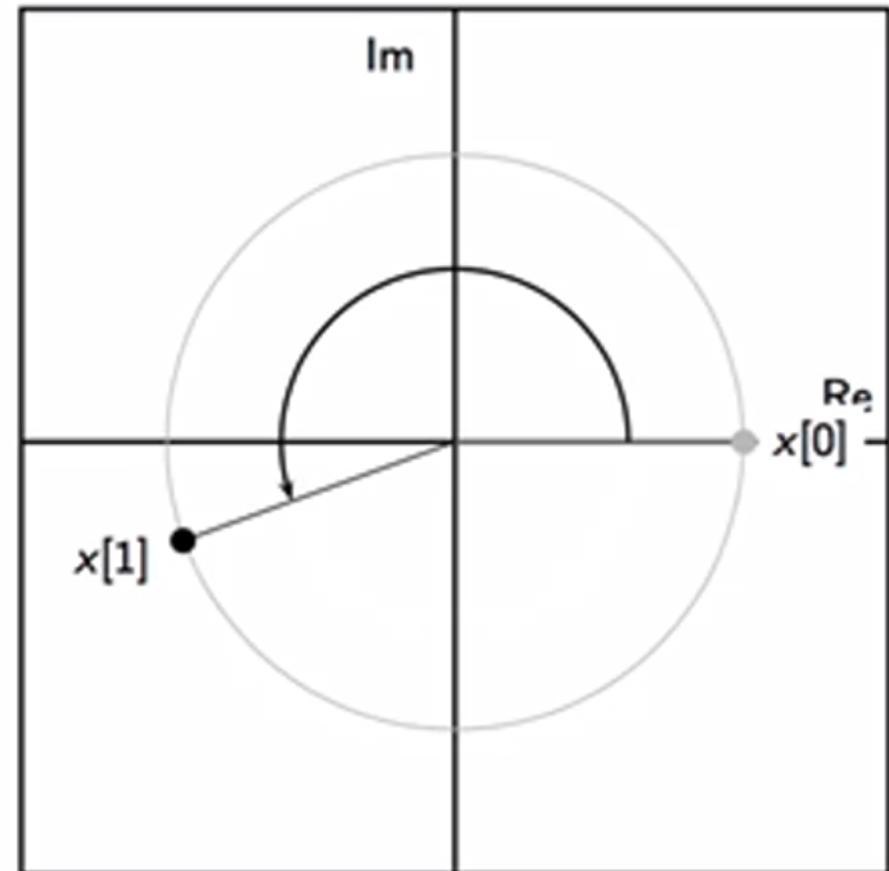


Алиасинг (наложение)

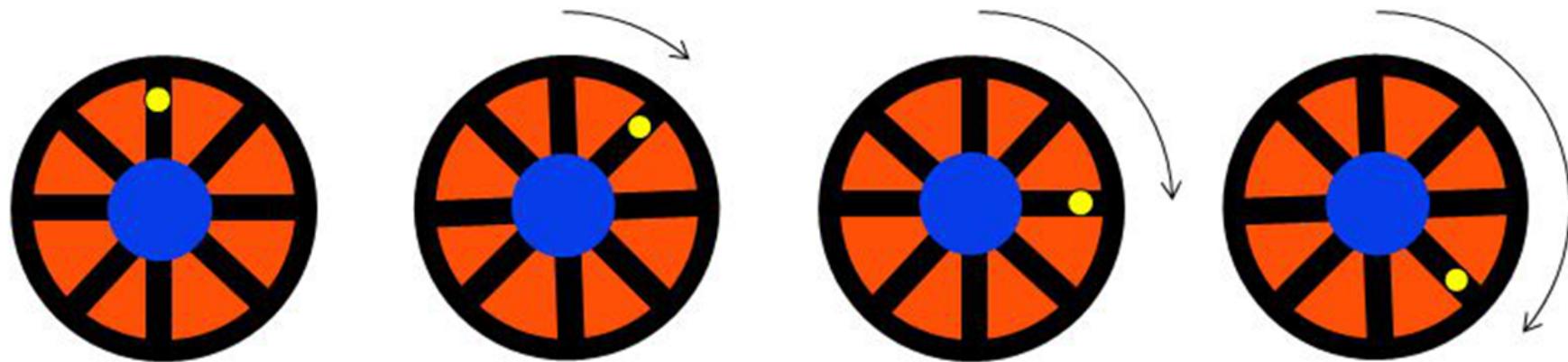
$$\omega = 2\pi/2 = \pi$$



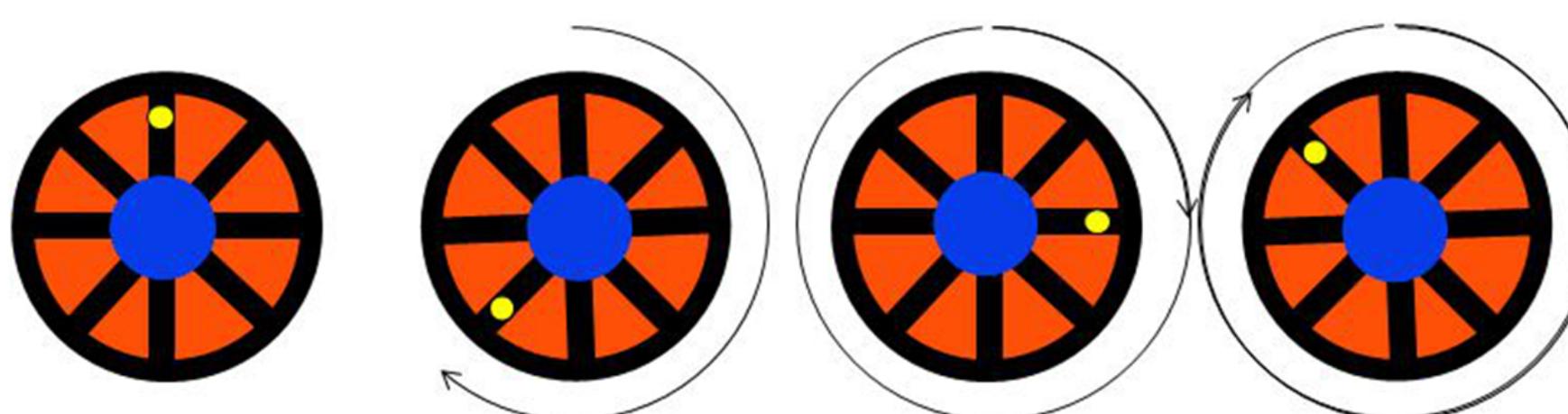
$$\pi < \omega < 2\pi$$



Алиасинг (наложение)

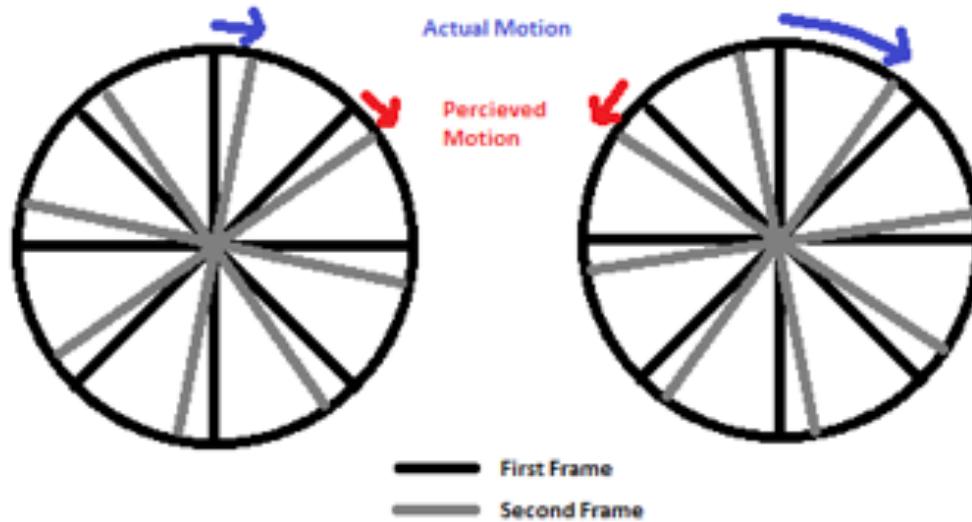


правильная дискретизация



алиасинг

Алиасинг (наложение)



Задача.

Идет съемка колеса легкового автомобиля диаметром 80 см на частоте 24 кадра/сек.

- 1) При какой скорости движения колеса его изображение при съемке будет казаться неподвижным?
- 2) Как изменится ответ, если на ободе колеса имеется $N=4, 5$ или 6 радиальных элементов (с учетом радиальной симметрии)?

Операции над матрицами и векторами

Пространство векторов

Сигналы как элементы векторного пространства:

- один математический аппарат для обработки любых типов сигналов: конечно-размерных, бесконечных
- облегчается преобразование Фурье, сжатие, аппроксимация, интерполяция сигналов и пр
- каждое векторное пространство определяется своими свойствами, а не размерами векторов
- если свойства удовлетворены, над элементами пространства можно проводить любые операции, определенные в пространстве

Действия над векторами. Свойства векторов.

$$x, y, z \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- $x + y = y + x$ - ассоциативность сложения
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ - коммутативность
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- существует **0**-вектор: $0 + x = x + 0 = x$
- для любого x существует **-x**: $x - x = 0$

Векторные пространства

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ - Эвклидова плоскость, Эвклидово трехмерное пространство
- $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$ - N -мерное пространство действительных и комплексных чисел
- $l_2(\mathbb{Z})$ - пространство квадратично-суммируемых последовательностей
- $L_2([a,b])$ - пространство функций с интегрируемым квадратом на отрезке

! вектора могут быть функциями !

Векторы в пространстве \mathbb{R}^N

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{N-1}]^T \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, N-1$$

Скалярное (внутреннее) **произведение** – степень «сходства» векторов

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

при равенстве нулю вектора **ортогональны** $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

через скалярное произведение определяется **длина** (норма) **вектора**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$$

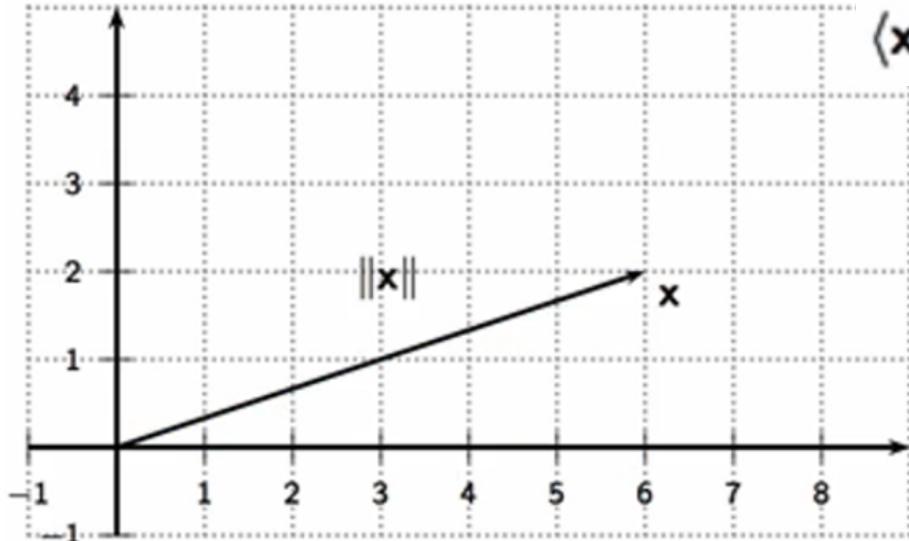
Свойства скалярного произведения векторов

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

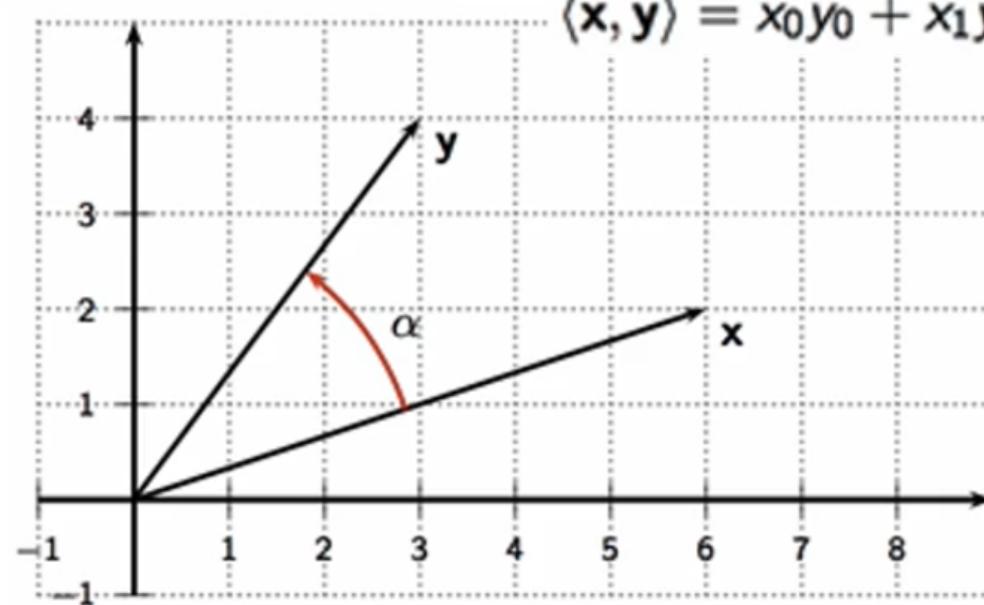
- дистрибутивность $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
- коммутативность $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$
- масштабирование $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
 $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- для любого $\mathbf{x} \in V$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- неравенство Коши-Буняковского-Шварца $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$

* - комплексное сопряжение

Векторы в пространстве \mathbb{R}^2



$$\langle x, x \rangle = x_0^2 + x_1^2 = \|x\|^2$$



$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 + x_1 y_1 = \|x\| \|y\| \cos \alpha$$

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2} \quad \text{- расстояние между векторами}$$

Векторы в пространстве $L_2[-1;1]$

Пространство $L_2[-1,1]$ – пространство функций вида $x(t)$,
определенных в интервале $t \in [-1,1]$

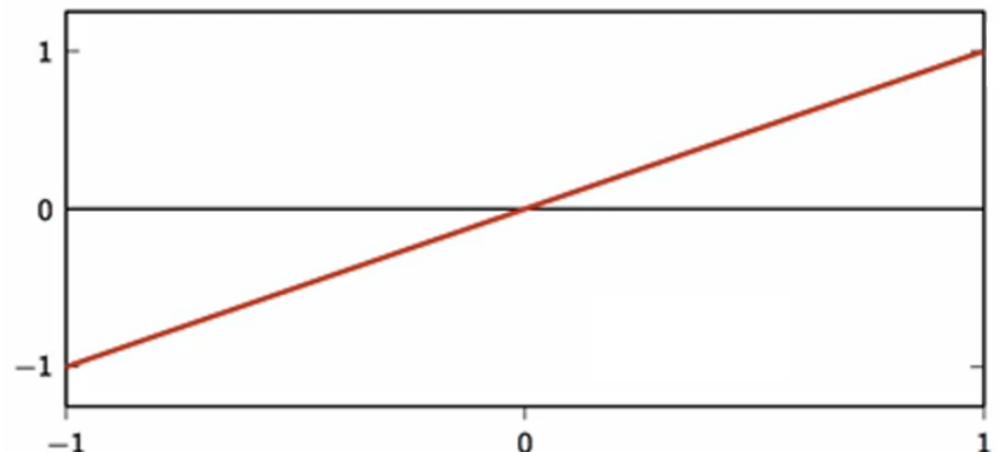
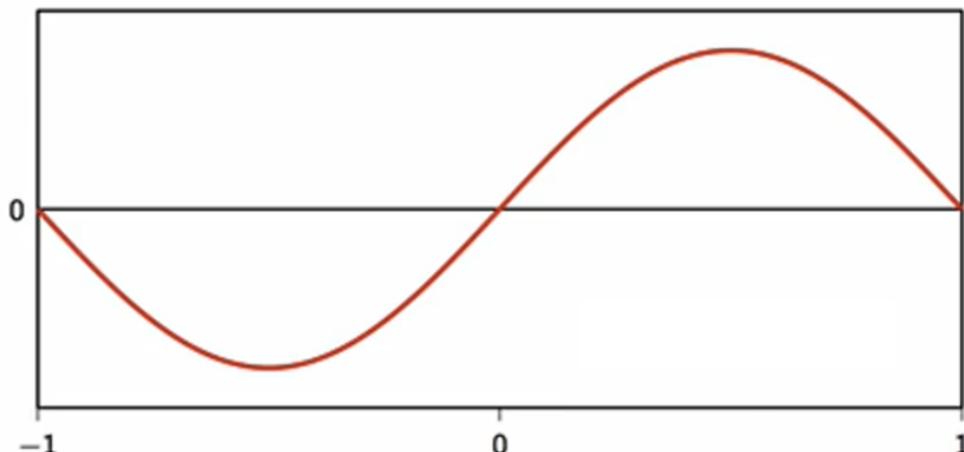
Скалярное произведение определяется как интеграл

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$$

Пример:

$$x(t) = \sin(\pi t)$$

у



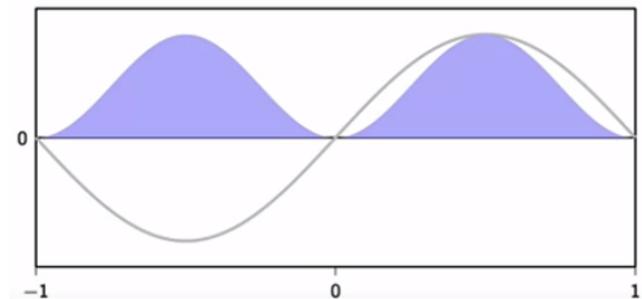
Векторы в пространстве $L_2[-1;1]$

$$\|x(t)\|_2 = ?$$

$$x(t) = \sin(\pi t)$$

$$\|y(t)\|_2 = ?$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2} dt = \dots = 1$$



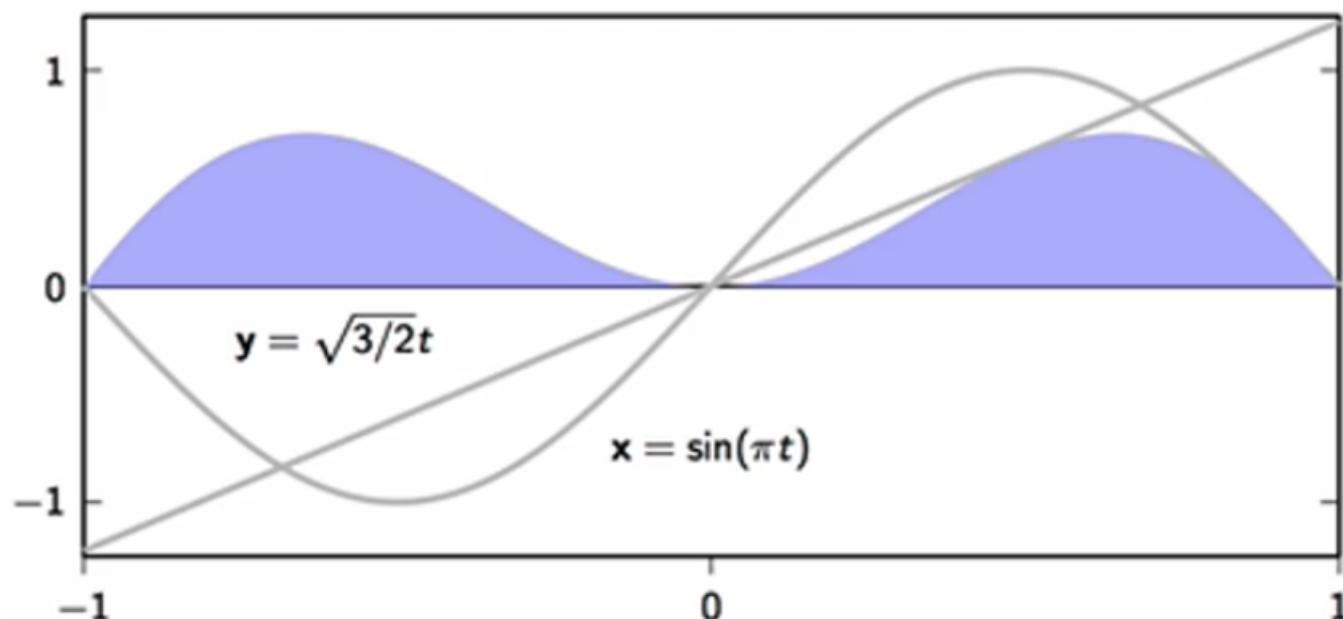
у

$$\left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

нормализованная функция $y(t) = t / \sqrt{2/3}$

Векторы в пространстве $L_2[-1;1]$

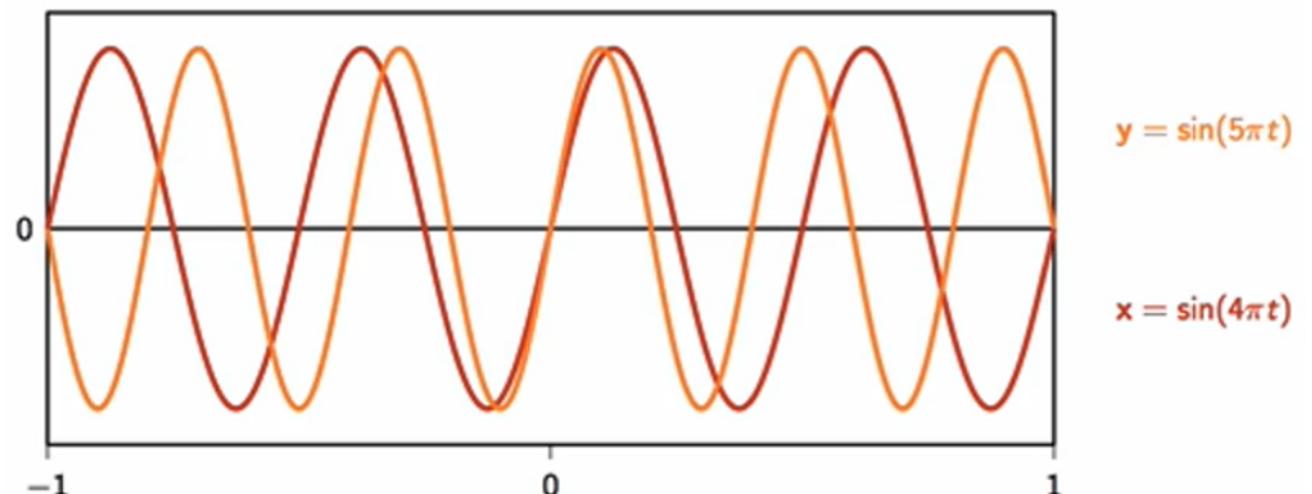
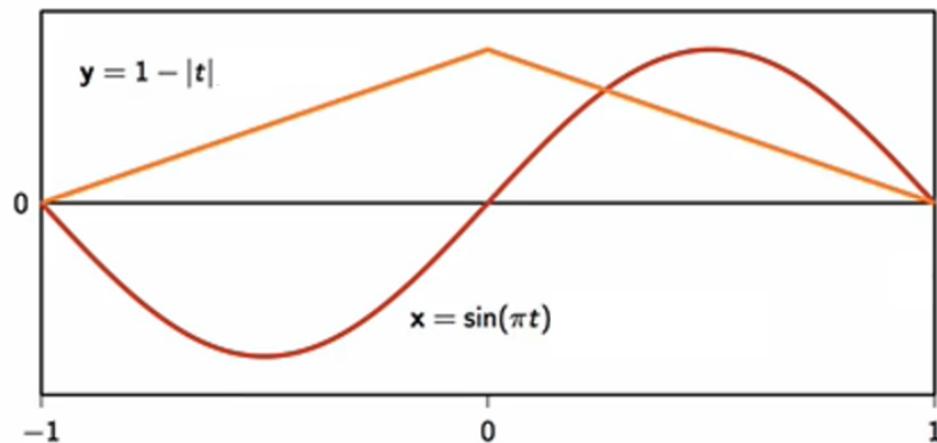
$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$$
$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}}t \sin(\pi t) dt =)$$



Векторы в пространстве $L_2[-1;1]$

скалярное произведение симметричной и антисимметричной функций

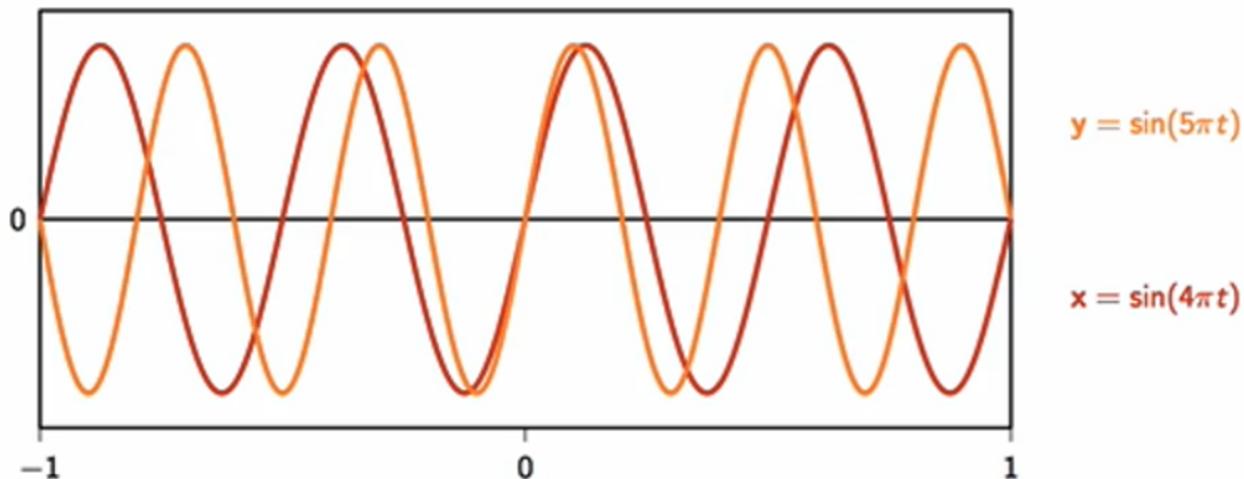
$$\langle x, y \rangle = 0$$



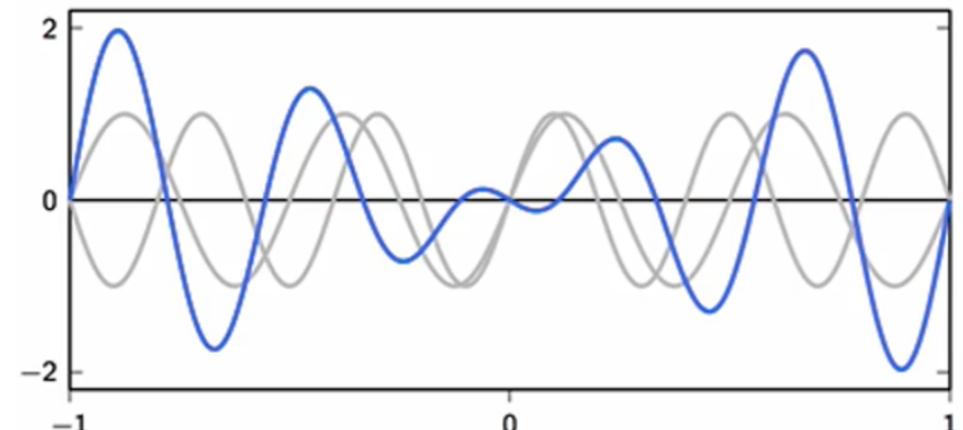
Векторы в пространстве $L_2[-1;1]$

Расстояние в пространстве $L_2[-1,1]$ – среднеквадратичное отклонение

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt}$$



$$\|x - y\|_2 = 2$$



Пространство сигналов

Пространство сигналов

Конечные сигналы размерности N и периодические сигналы с периодом N принадлежат пространству \mathbf{C}^N (векторному пространству над полем комплексных чисел)

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \dots \ x_{N-1}]^T$$

Скалярное произведение в пространстве \mathbf{C}^N определяется как

$$\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]y[n]$$

Для сигналов бесконечной протяженности

$$\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n]$$

→ не всегда сумма сходящаяся!

Пространство сигналов

Чтобы сумма сигнала не являлась бесконечной, векторное пространство бесконечных сигналов должно принадлежать пространству $l_2(\mathbb{Z})$ -

пространству **последовательностей с суммируемым квадратом**

$$\sum |x[n]|^2 < \infty$$

Для таких сигналов можно использовать обозначение

$$\mathbf{x} = [\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots]^T$$

Вопрос: принадлежат ли $l_2(\mathbb{Z})$ последовательности $x[n]=1$ и $x[n]=\cos(\omega n)$?

Пространство сигналов

Векторное пространство является **полным**, если в нем каждая последовательность сходится к элементу этого пространства

Пример *неполного* пространства – последовательность всех рациональных чисел, поскольку последовательность

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

не сходится к рациональному числу. (Какому?)

Пространство, в котором определено скалярное произведение двух элементов, и которое является полным, называется **гильбертовым пространством**

Базисы в пространстве и подпространстве сигналов

Базисы в пространстве сигналов

Полная система элементов $\{e^{(k)}\}$ является **базисом**, если каждый элемент пространства можно представить как линейную комбинацию элементов этой системы и притом однозначно.

Канонический базис в \mathbb{R}^2

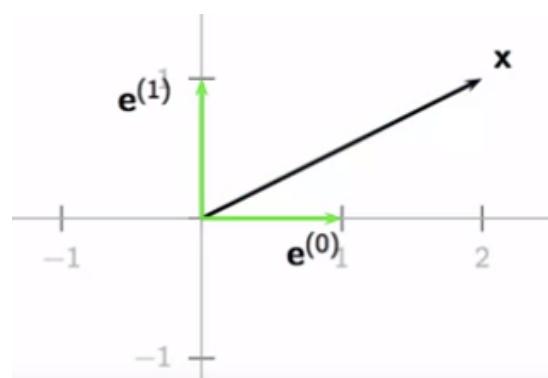
$$e^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x = 2e^{(0)} + e^{(1)}$$

Базисы в пространстве сигналов

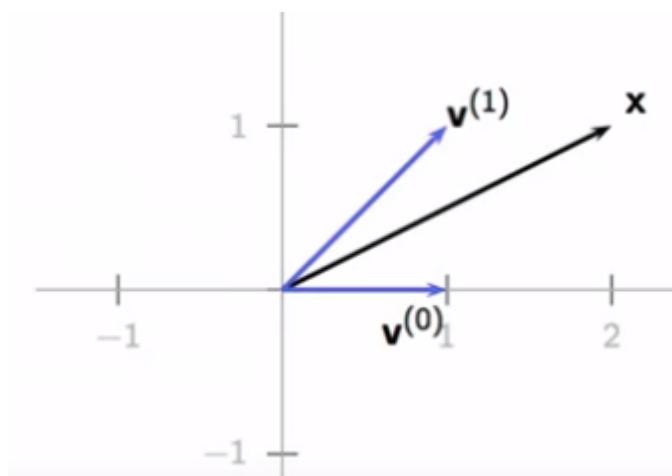
Другой вариант базиса в пространстве \mathbb{R}^2

$$\mathbf{v}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор $[x_0, x_1]^T$ можно представить как

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_0 = x_0 - x_1, \quad \alpha_1 = x_1$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{x} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$$

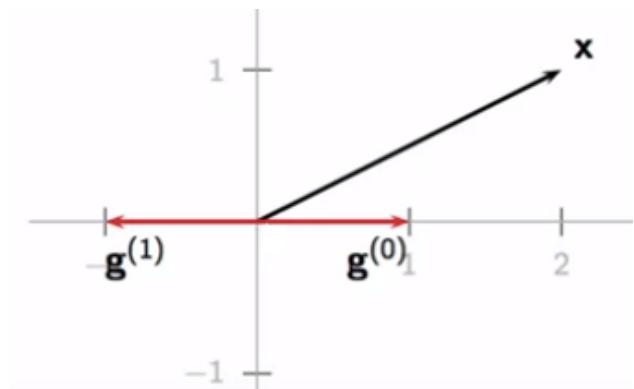
Базисы в пространстве сигналов

Не любой набор векторов может быть базисом.

Пример

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \neq \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{для любого } x_1 \neq 0$$



! векторы $\mathbf{g}^{(1)}$ и $\mathbf{g}^{(2)}$ не являются
линейно независимыми

Базисы в пространстве сигналов

для бесконечномерных сигналов?

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)}$$

- в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

k-й элемент

- в пространстве $L_2[-1, 1]$:

$$f(t) = \sum_k \alpha_k h^{(k)}(t)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \pi t, \sin \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 3\pi t, \sin 3\pi t, \dots$$

Базисы в пространстве сигналов

По определению, набор векторов $\{w^{(k)}\}$ в пространстве векторов H является **базисным**, если:

- любой вектор x из H можно представить как

$$x = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k w^{(k)}, \alpha_k \in \mathbb{C}$$

- коэффициенты α_k определены однозначно (линейно независимы), т.е.

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k w^{(k)} = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0, k = 0, 1, \dots, K - 1$$

Базисы в пространстве сигналов

- **Ортогональный** базис

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(n)} \rangle = 0 \text{ при } k \neq n$$

- **Ортонормированный** базис

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(n)} \rangle = \delta[n - k]$$

Для построения ортогонального и ортонормированного базиса из набора линейно независимых векторов используется алгоритм Грама-Шмидта

- **Коэффициенты разложения** любого вектора по ортонормированному базису

$$\alpha_k = \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle$$

Переход к новому базису

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)} = \sum_{k=0}^{K-1} \beta_k \mathbf{v}^{(k)}$$

Если базис $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$ ортонормированный, то

$$\beta_h = \left\langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{x} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}^{(h)}, \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)} \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \left\langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{w}^{(k)} \right\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k c_{hk} = \begin{bmatrix} c_{00} & \dots & c_{0(K-1)} \\ c_{(K-1)0} & \ddots & c_{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{K-1} \end{bmatrix}$$



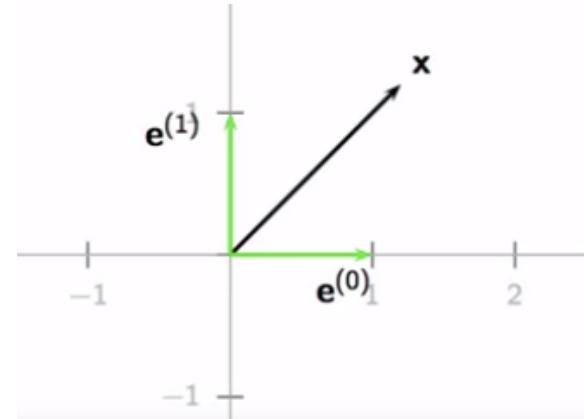
матрица перехода, не зависит от \mathbf{x}

Переход к новому базису

Пример: для пространства \mathbb{R}^2

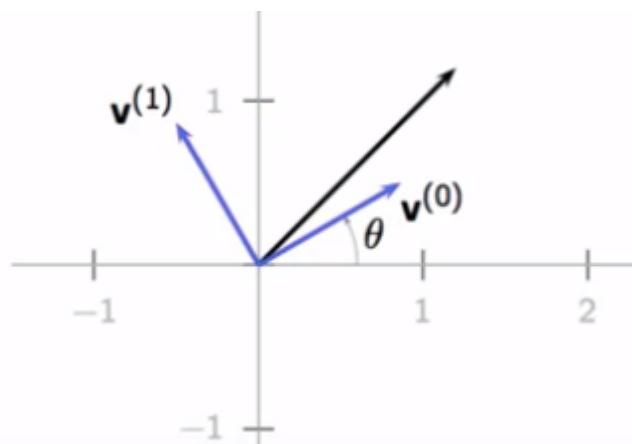
канонический базис:

$$E = \{\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(1)}\}$$



новый базис (поворот плоскости на угол θ):

$$V = \{\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}\}$$



$$\mathbf{v}^{(0)} = [\cos \theta \quad \sin \theta]^T$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = [-\sin \theta \quad \cos \theta]^T$$

$$c_{hk} = \langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{e}^{(k)} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Базисы в пространстве сигналов

- представление вектора \mathbf{x} из H относительно произвольного ортонормированного базиса $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)}, \alpha_k \in \mathbb{C}$$

называют **обобщенным рядом Фурье**,

а коэффициенты α_k – **коэффициентами Фурье**

- **равенство Парсеваля** – закон сохранения энергии:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} = \left| \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle \right|^2 = |\alpha_k|^2$$

Проблемы аппроксимации

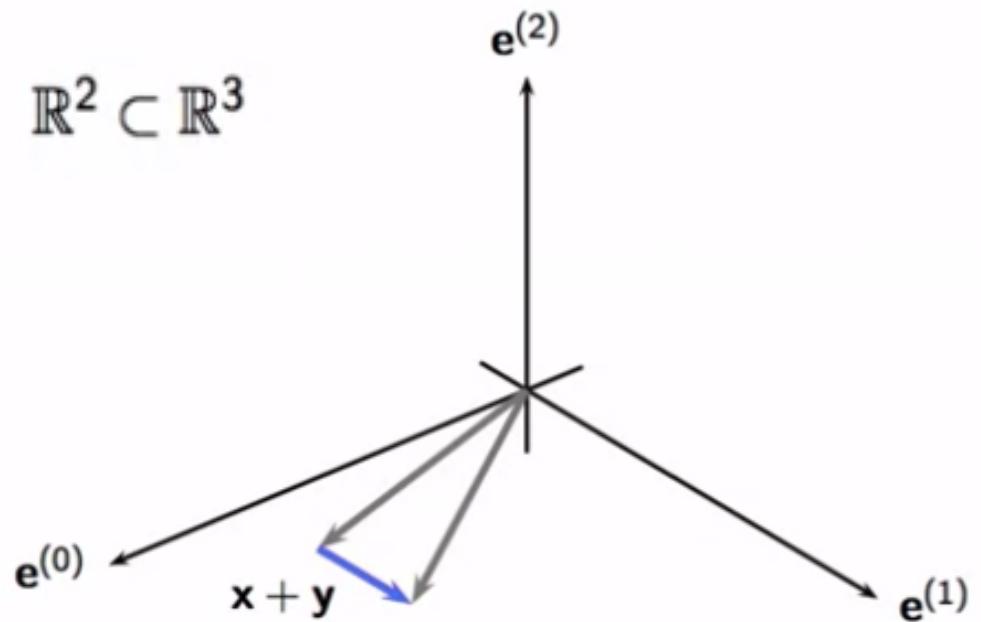
Векторное подпространство сигналов

Векторное подпространство — непустое подмножество линейного пространства, которое является замкнутым по отношению к операциям сложения и умножения на скаляр

Пример: плоскость \mathbb{R}^2 в пространстве \mathbb{R}^3

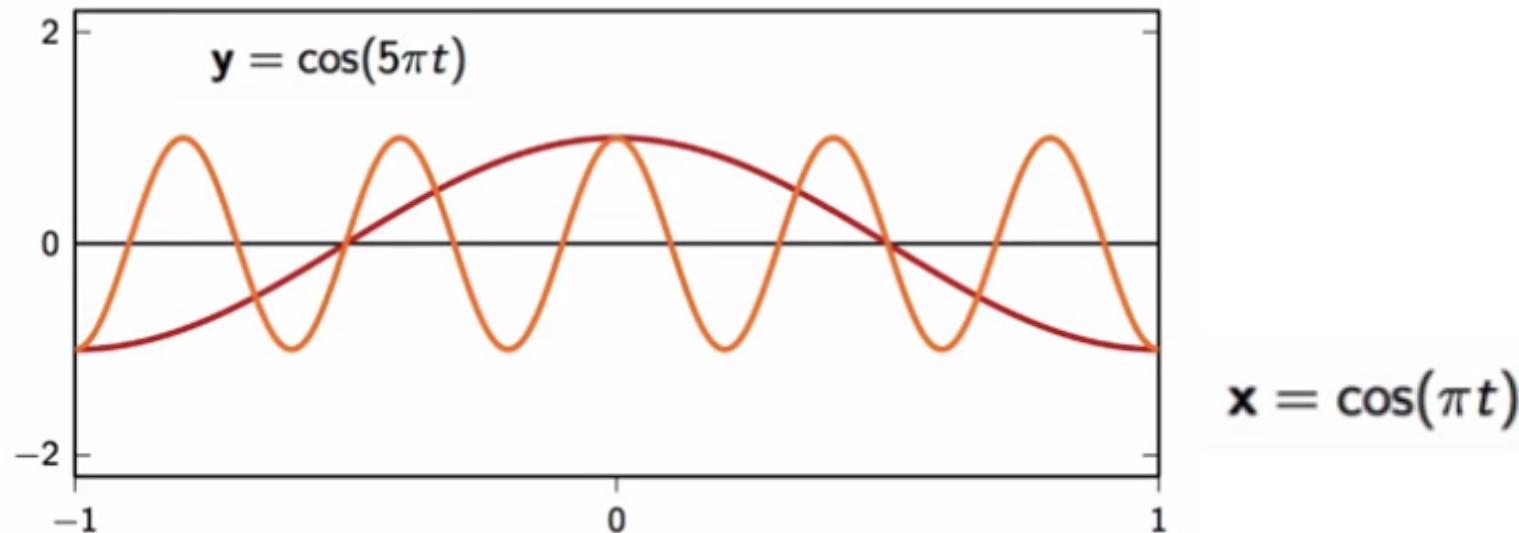
свой базис:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

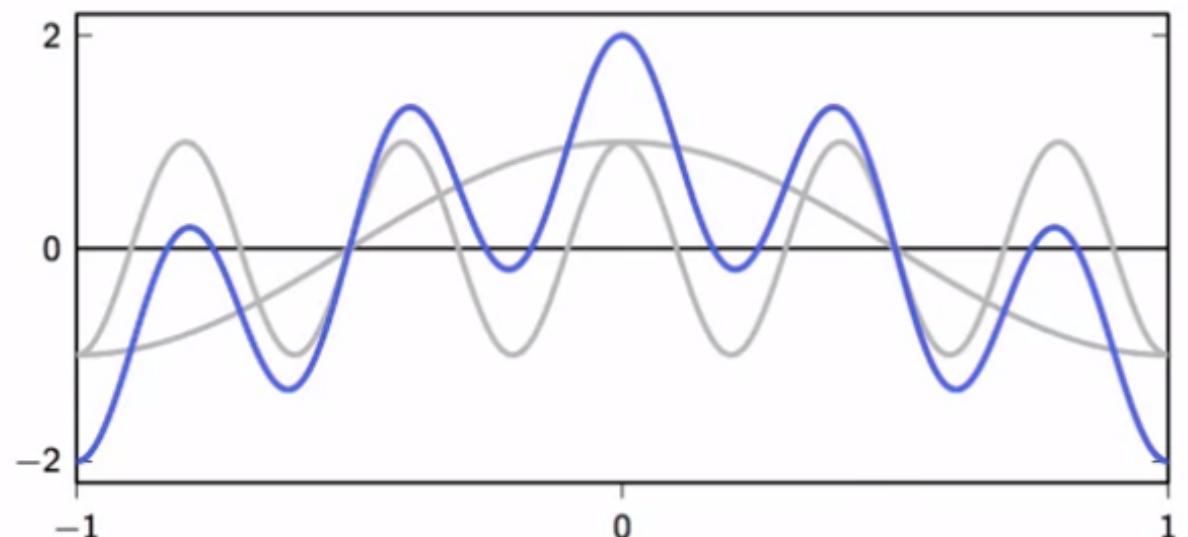


Векторное подпространство сигналов

Подпространство симметричных функций в $L_2[-1,1]$:



$x + y$ – тоже
симметричная
функция в $L_2[-1,1]$:



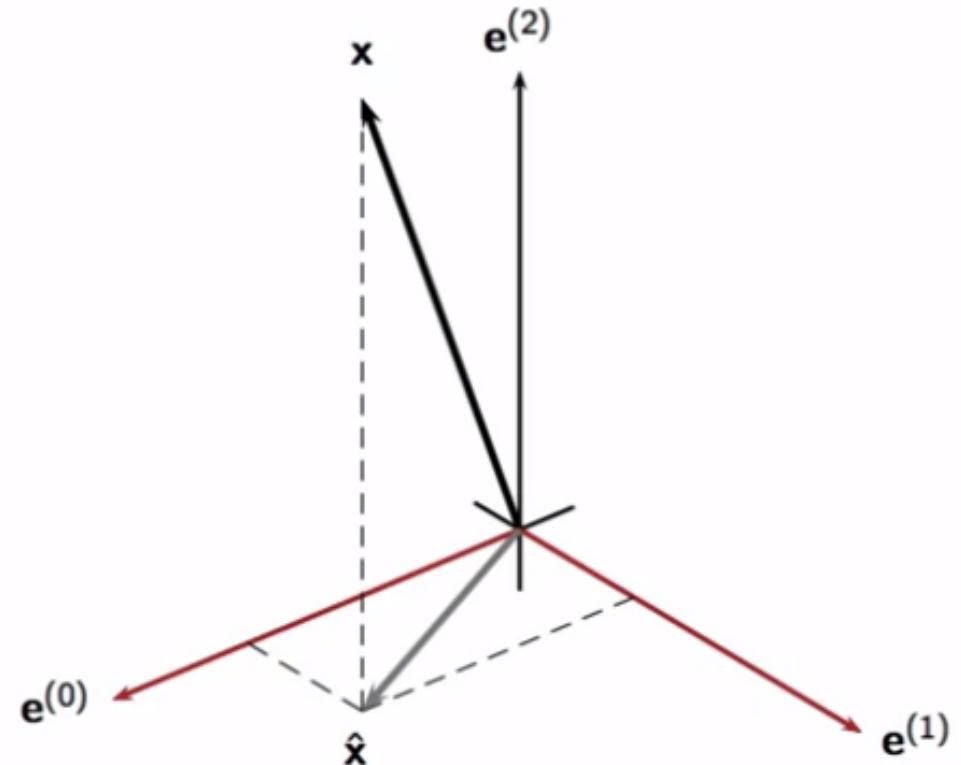
Проблемы аппроксимации

Как аппроксимировать значение вектора x на подпространство S (например, плоскость \mathbb{R}^2) пространства $V (\mathbb{R}^3)$?

$$x \in V, S \subseteq V$$

«Лучшей» аппроксимацией вектора x на подпространство S будет его ортогональная проекция

$$\hat{x} \in S$$



Проблемы аппроксимации

В k -мерном случае

$\{s^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,K-1}$ - ортонормированный базис для S

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \left\langle s_k, x \right\rangle s^{(k)}$$

- ортогональная проекция x на подпространство S

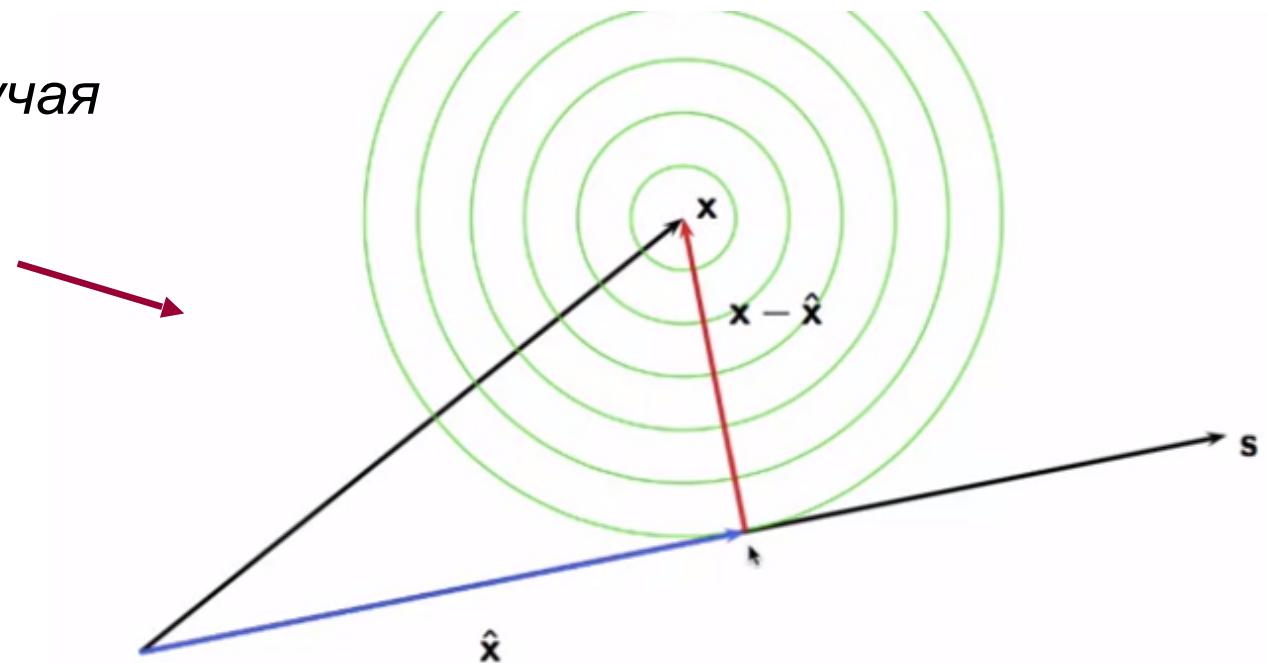
Свойства ортогональной проекции:

- $\hat{x} = \operatorname{argmin} \|x - y\|, y \in S$
- ошибка аппроксимации является ортогональной самой проекции

$$\left\langle x - \hat{x}, \hat{x} \right\rangle = 0$$

Проблемы аппроксимации

иллюстрация для случая
 $V = \mathbb{R}^2$, $S = \mathbb{R}^1$



Свойства ортогональной проекции:

- $\hat{x} = \operatorname{argmin}_{y \in S} \|x - y\|$
- ошибка аппроксимации является ортогональной самой проекции

$$\langle x - \hat{x}, \hat{x} \rangle = 0$$

Полиномиальная аппроксимация

Рассмотрим векторное подпространство полиномов степени n

$$P_N[-1, 1] \subset L_2[-1, 1]$$

Общий вид $\mathbf{p} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{N-1} t^{N-1}$

Элементарный базис вида

$$\mathbf{s}^{(k)} = t^k, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1$$

не является ортонормированным

Полиномиальная аппроксимация

Задача:

аппроксимировать функцию

$$x = \sin t \in L_2[-1, 1]$$

на подпространство полиномов 3-й степени

$$P_3[-1, 1]$$

Стадии решения:

- построение ортонормированного базиса из элементарного
- вычисление проекции функции x на ортонормированный базис
- вычисление ошибки аппроксимации
- сравнение ошибки с аппроксимацией рядами Тейлора

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Алгоритм Грамма-Шмидта позволяет на основе линейно независимой системы векторов $\{\mathbf{s}^{(k)}\}$ построить ортонормированный базис $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$.

Для этого на каждом шаге k :

- из каждого следующего вектора $\mathbf{s}^{(k)}$ вычитаем линейно зависимые от вычисленных ранее $k-1$ векторов компоненты

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} - \sum_{n=0}^{k-1} \left\langle \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{s}^{(k)} \right\rangle \mathbf{u}^{(n)}$$

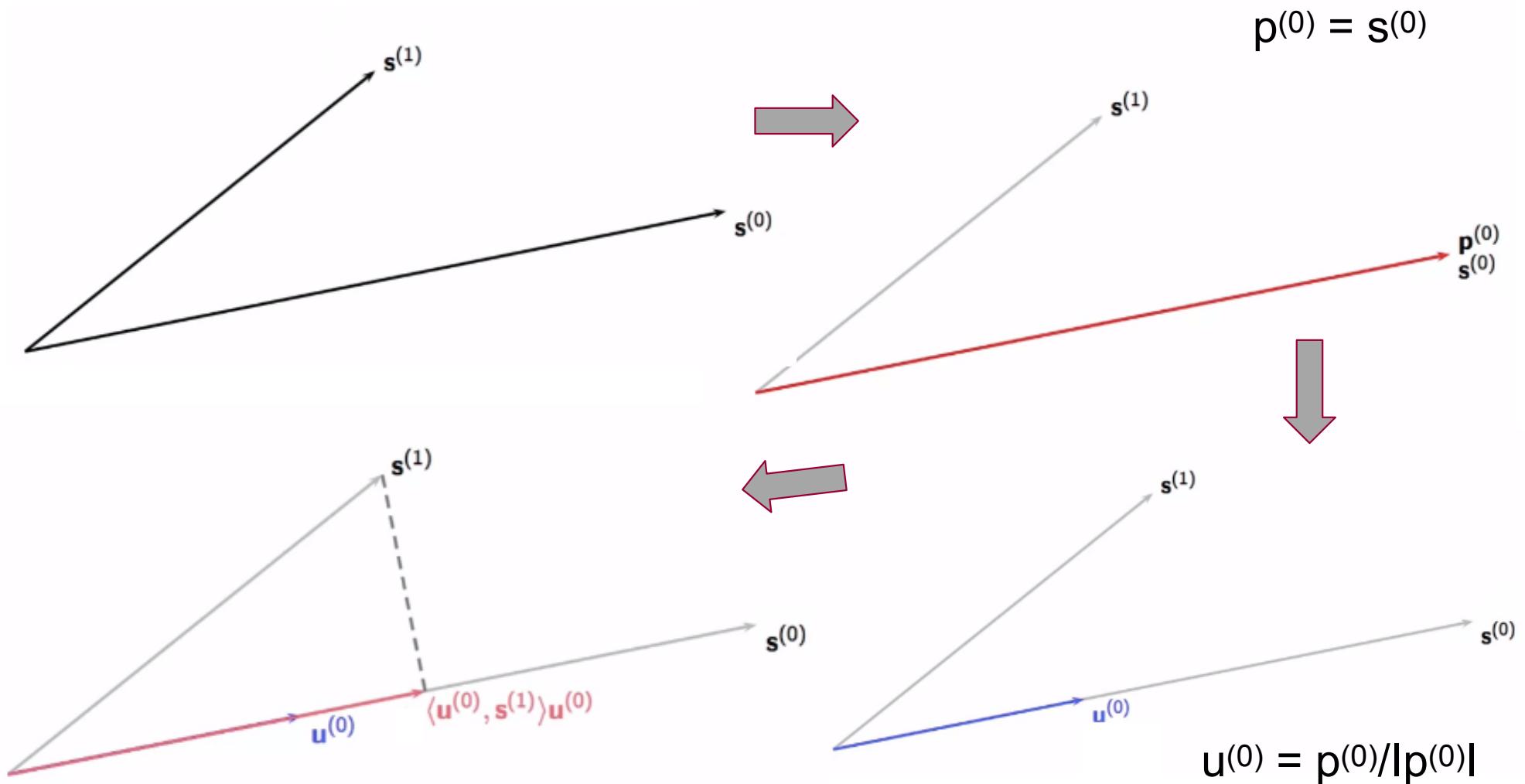
- нормализуем полученный вектор $\mathbf{p}^{(k)}$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k)} / \|\mathbf{p}^{(k)}\|$$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

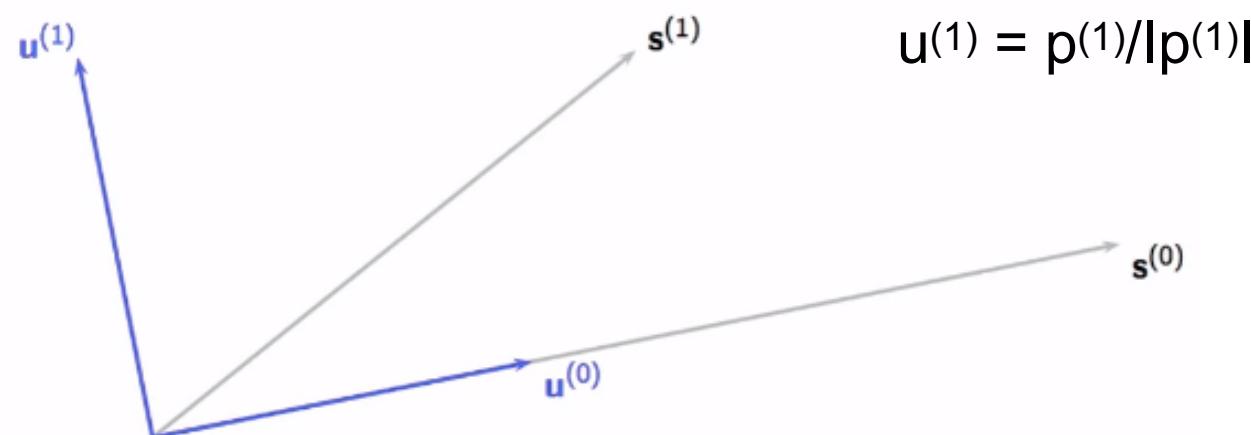
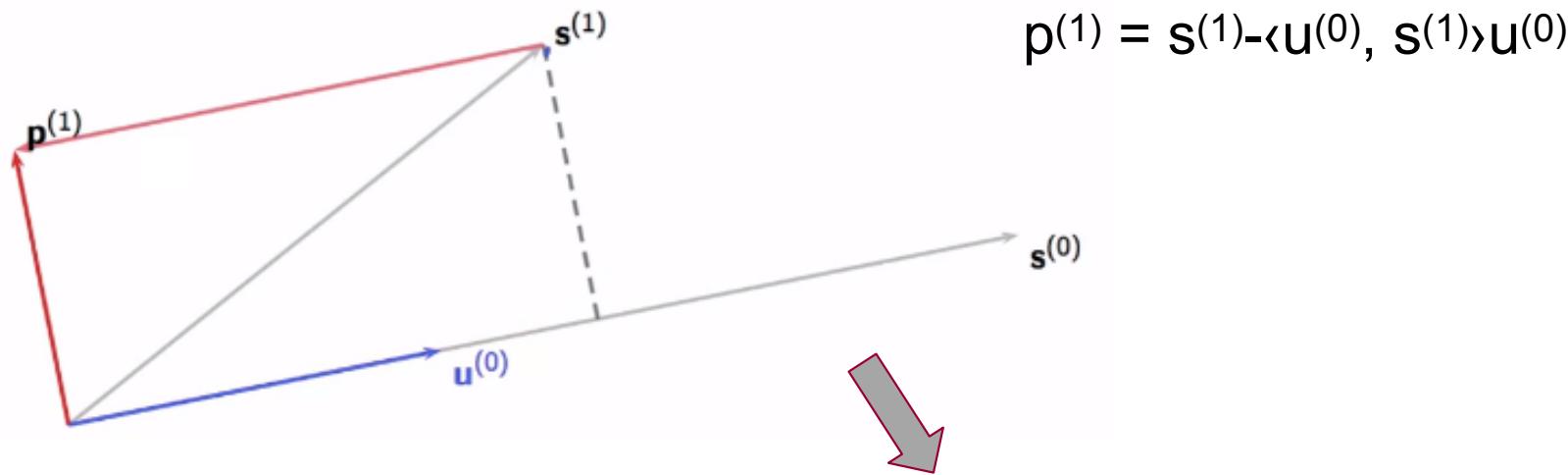
Графическая иллюстрация для $k = 2$

вектора $s^{(0)}$ и $s^{(1)}$ линейно независимы



Ортогонализация Грамма-Шмидта

Графическая иллюстрация для $k = 2$



Полиномиальная аппроксимация

Аппроксимировать $x = \sin t \in L_2[-1, 1]$ на $P_3[-1, 1]$

Вспомним, что скалярное произведение в $L_2[-1, 1]$ определяется как интеграл

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$$

Применим алгоритм Грамма-Шмидта к базису

$$\mathbf{s}^{(k)} = t^k, k=0,1,2:$$

► $\mathbf{s}^{(0)} = 1$

- $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{s}^{(0)} = 1$

- $\|\mathbf{p}^{(0)}\|^2 = 2$

- $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} / \|\mathbf{p}^{(0)}\| = \sqrt{1/2}$

Полиномиальная аппроксимация

Аппроксимировать $x = \sin t \in L_2[-1, 1]$ на $P_3[-1, 1]$

► $\mathbf{s}^{(1)} = t$

- $\langle \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{s}^{(1)} \rangle = \int_{-1}^1 t / \sqrt{2} = 0$

- $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{s}^{(1)} = t$

- $\|\mathbf{p}^{(1)}\|^2 = 2/3$

- $\mathbf{u}^{(1)} = \sqrt{3/2} t$

► $\mathbf{s}^{(2)} = t^2$

- $\langle \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{s}^{(2)} \rangle = \int_{-1}^1 t^2 / \sqrt{2} = 2/3\sqrt{2}$

- $\langle \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)} \rangle = \int_{-1}^1 t^3 / \sqrt{2} = 0$

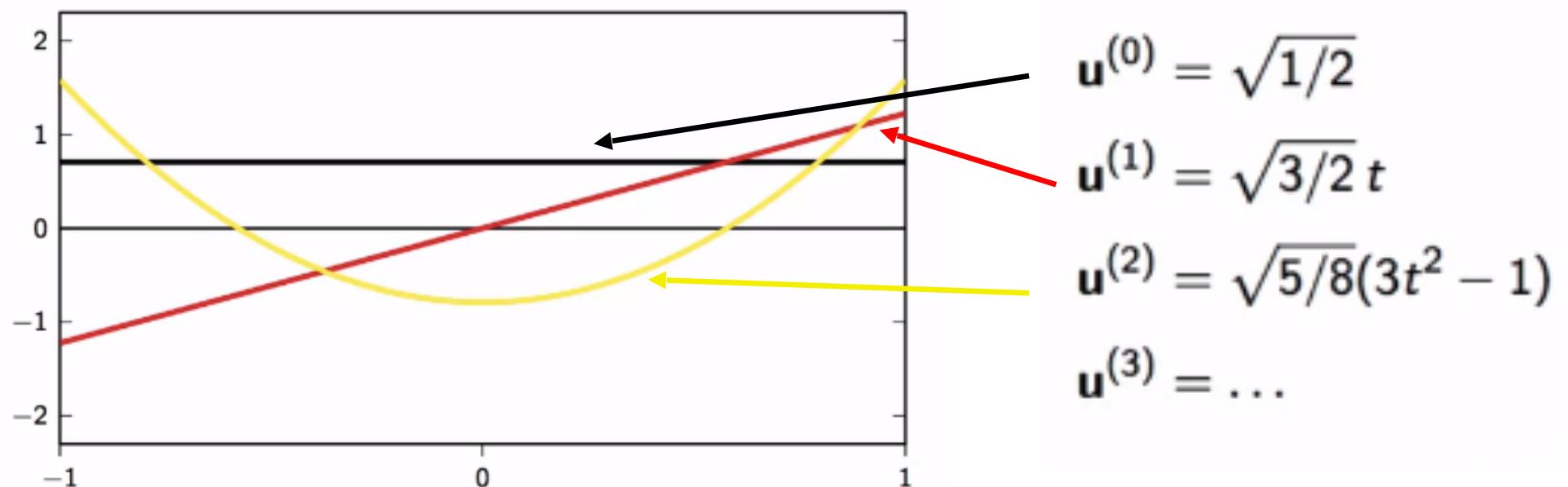
- $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{s}^{(2)} - (2/3\sqrt{2})\mathbf{u}^{(0)} = t^2 - 1/3$

- $\|\mathbf{p}^{(2)}\|^2 = 8/45$

- $\mathbf{u}^{(2)} = \sqrt{5/8}(3t^2 - 1)$

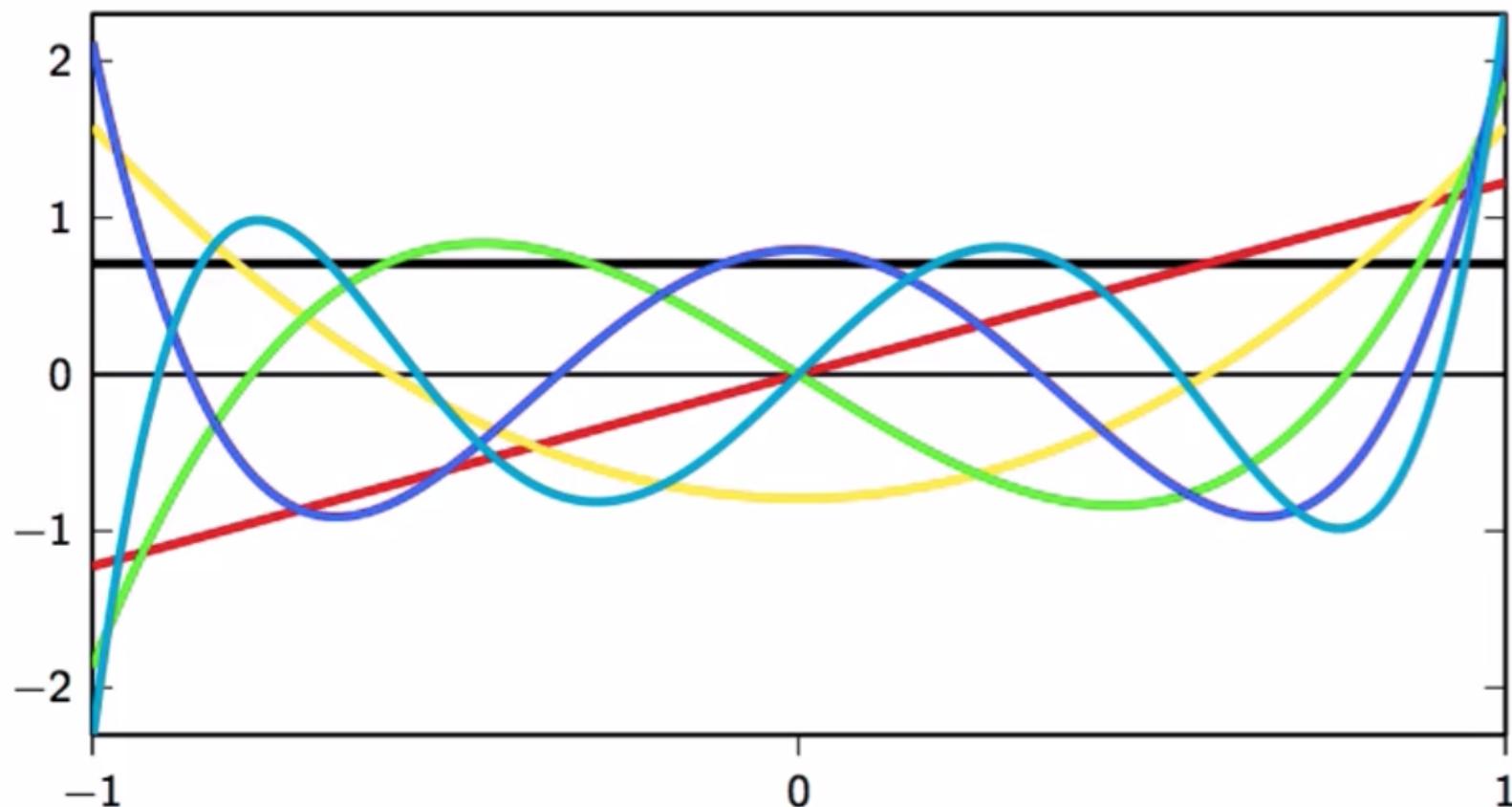
Полиномиальная аппроксимация

Получившийся ортонормированный базис – набор **полиномов Лежандра**



Полиномиальная аппроксимация

Получившийся ортонормированный базис – набор **полиномов Лежандра**



Полиномиальная аппроксимация

$x = \sin t \in L_2[-1, 1]$ на $P_3[-1, 1]$

$$\alpha_k = \left\langle \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{x} \right\rangle = \int_{-1}^1 u_k(t) \sin t dt$$

- ▶ $\alpha_0 = \langle \sqrt{1/2}, \sin t \rangle = 0$
- ▶ $\alpha_1 = \langle \sqrt{3/2}t, \sin t \rangle \approx 0.7377$
- ▶ $\alpha_2 = \langle \sqrt{5/8}(3t^2 - 1), \sin t \rangle = 0$

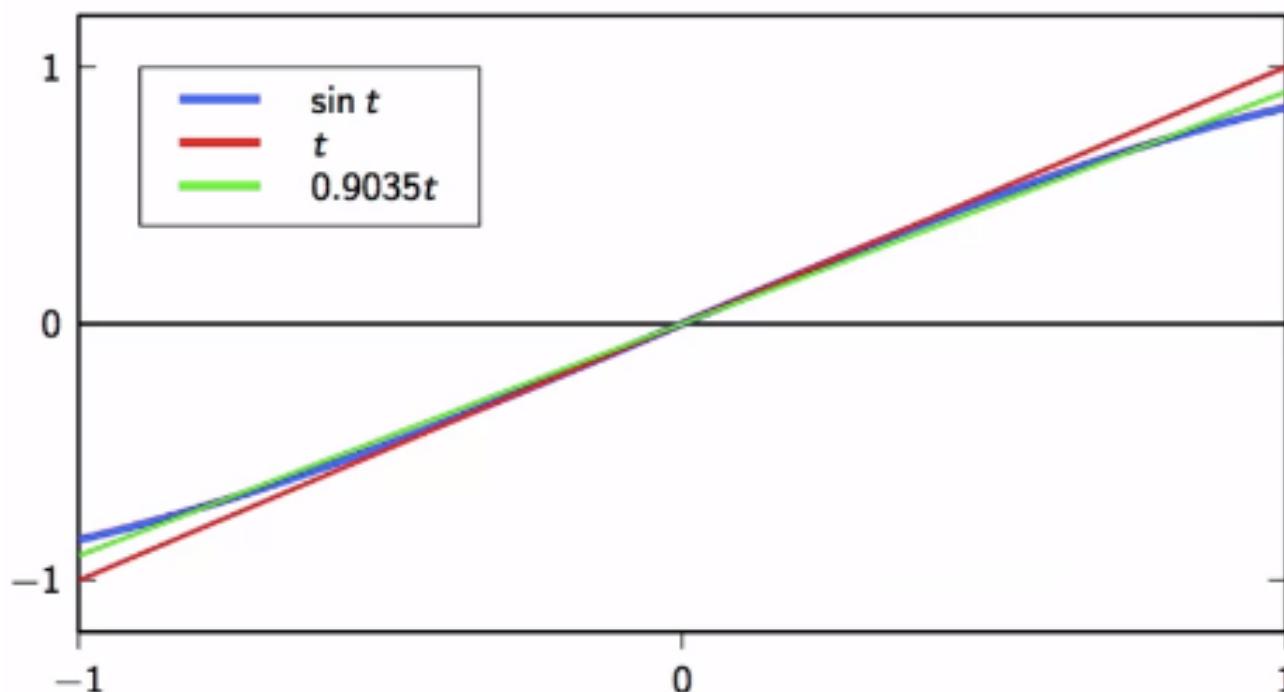
интеграл от
произведения четной
функции на нечетную
на $(-1, 1)$

Полиномиальная аппроксимация

Т.о., ортогональной проекцией (полиномиальной аппроксимацией) функции $x = \sin t \in L_2[-1, 1]$

на $P_3[-1, 1]$

будет функция $\sin t \rightarrow \alpha_1 \mathbf{u}^{(1)} \approx 0.9035t$

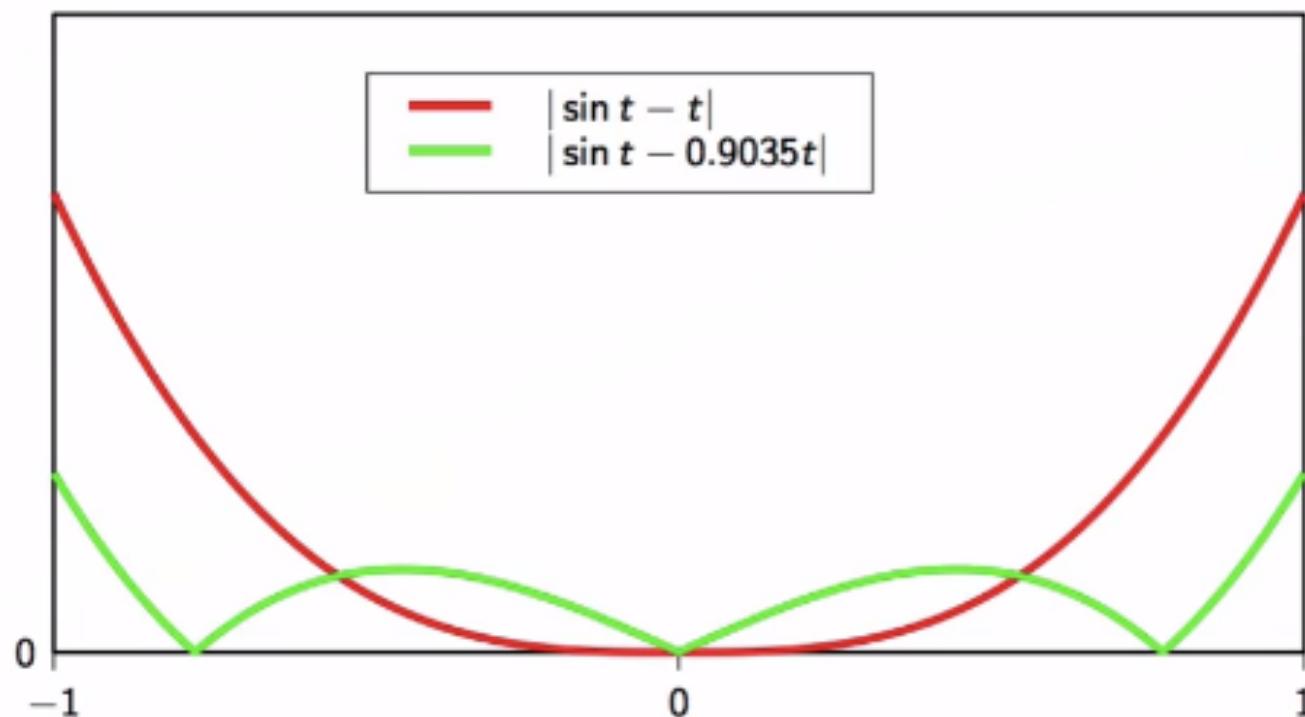


При разложении в
ряд Тейлора

$$\sin t \approx t$$

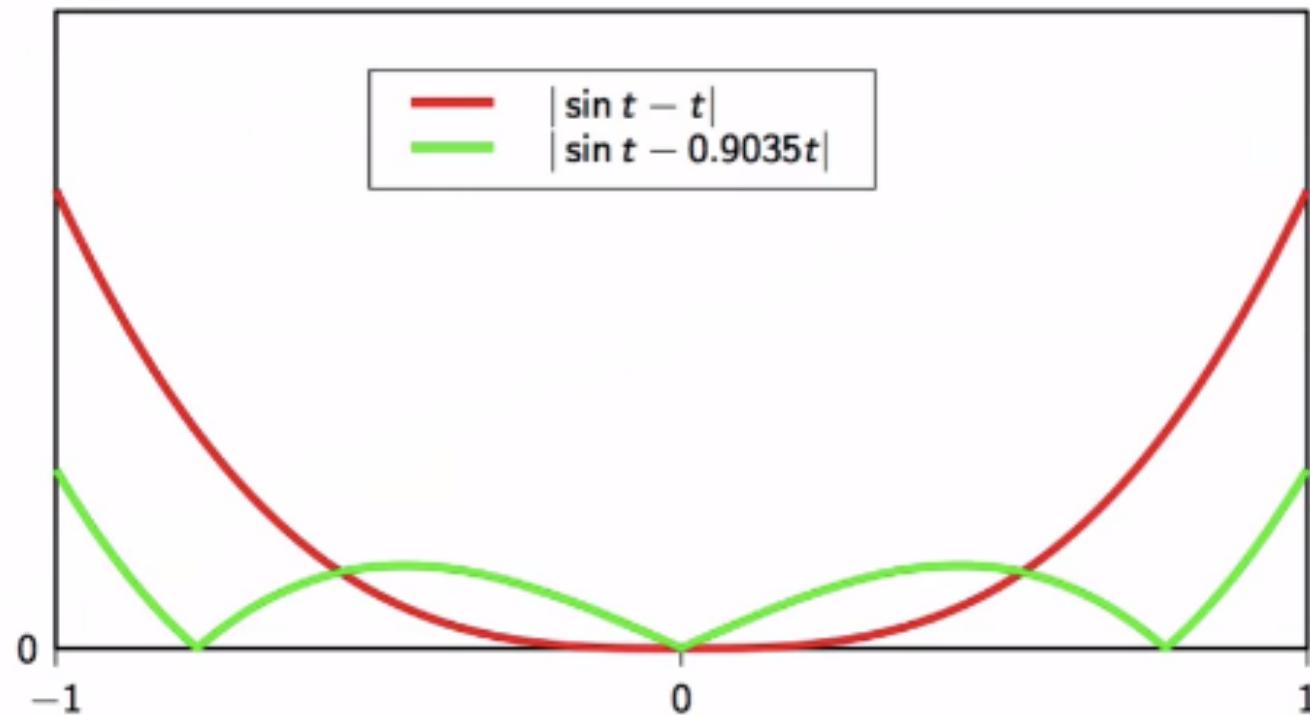
Полиномиальная аппроксимация

Сравнение ошибок аппроксимации при разложении по ортонормированному базису (полиномы Лежандра) и при разложении в ряд Тейлора



Вопрос: Какая аппроксимация предпочтительней в точке 0? а на всем интервале $[-1, 1]$?

Полиномиальная аппроксимация



$$\|\sin t - \alpha_1 \mathbf{u}^{(1)}\| \approx 0.0337$$

$$\|\sin t - t\| \approx 0.0857$$