



*Кафедра молекулярных процессов и экстремальных
состояний вещества*

Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

2. Классификация сигналов. Преобразование
данных. Дискретизация и квантование.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст.преп.

Классификация сигналов

Классификация сигналов

Любая изменяющаяся во времени физическая величина потенциально является сигналом.

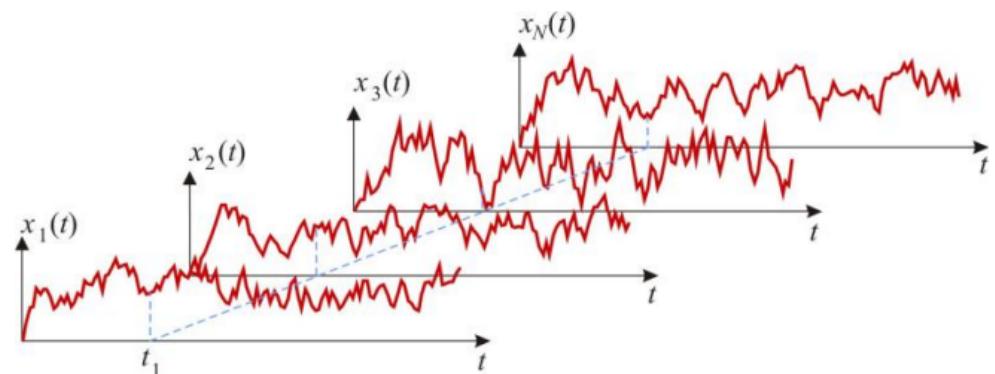
Классификация сигналов

По способу представления сигналы разделяются на случайные и детерминированные.

- **Случайные (стохастические)** сигналы принимают произвольные значения в любой момент времени.

Описываются случайной функцией, мгновенные значения которой не известны, а могут быть лишь предсказаны с некоторой вероятностью.

Используется аппарат теории вероятностей.

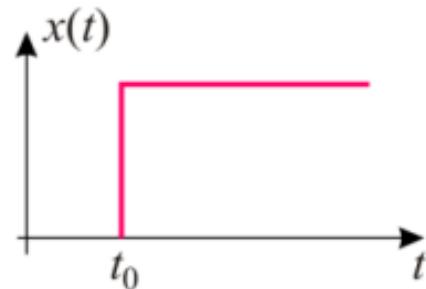


Классификация сигналов

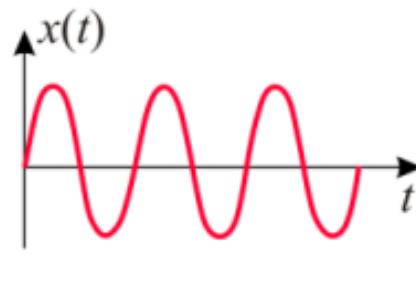
По способу представления сигналы разделяются на случайные и детерминированные.

- **Детерминированные (регулярные)** сигналы описываются аналитической функцией.

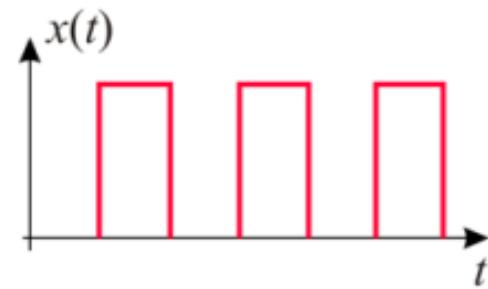
Являются определенной идеализацией реальных сигналов и не содержат информации.



ступенчатый



синусоидальный



импульсный

Классификация сигналов

Детерминированные сигналы разделяются на *периодические и непериодические*.

- **Периодический** сигнал повторяется во времени с определенным периодом, то есть выполняется условие:

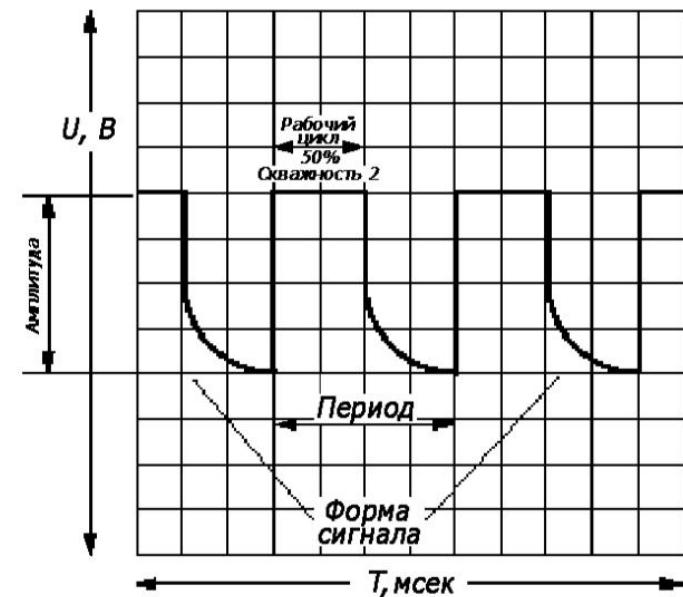
$$s(t) = s(t + kT),$$

k - любое целое число, T – период сигнала

- **Непериодический** сигнал, как правило, ограничен во времени.
Можно получить из периодического, увеличивая период.

Характеристики периодического сигнала:

- **Амплитуда** - Разность максимального и минимального значения сигнала в пределах периода
- **Период** - Длительность цикла сигнала (с)
- **Частота** - Количество циклов в секунду (Гц)
- **Ширина** – длительность (прямоугольного) импульса (с)
- **Скважность** - Отношение периода повторения к ширине (%)
- **Форма** сигнала: Последовательность прямоугольных импульсов, единичные выбросы, синусоида, пилообразные импульсы, и т.п.



Классификация сигналов

Пример периодического сигнала – **гармоническое колебание**:

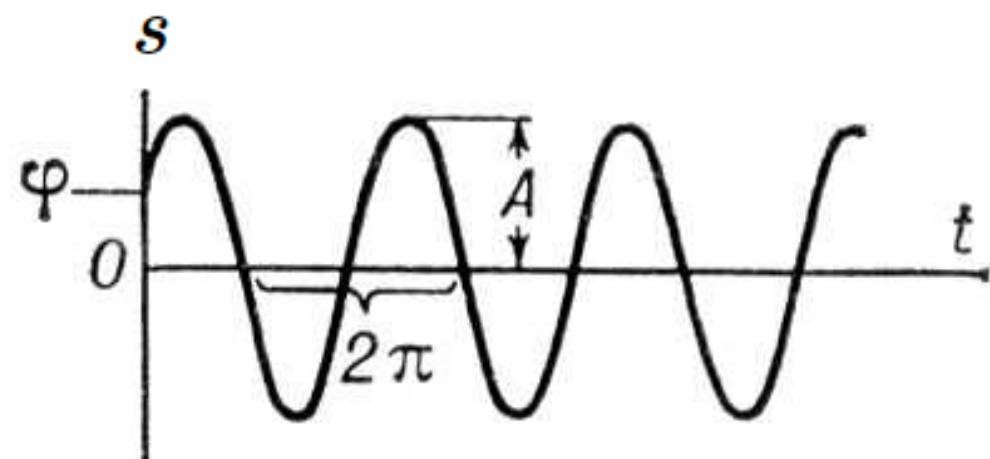
$$s(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \phi\right)$$

A - амплитуда,

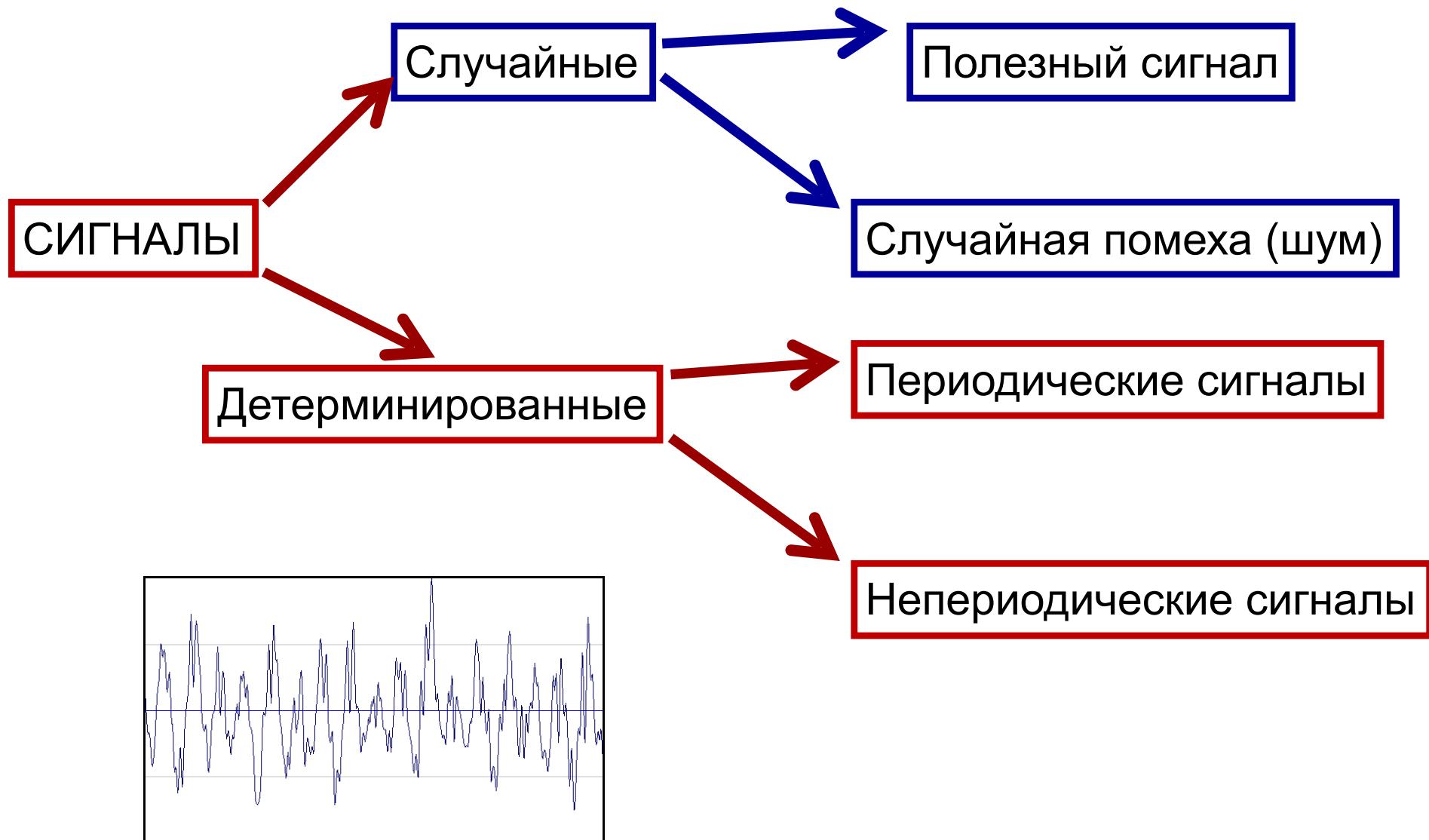
T – период,

ϕ – начальная фаза

$2\pi/T = \omega$ – угловая частота

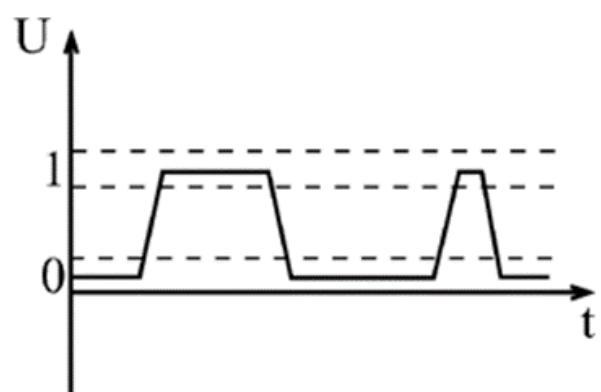
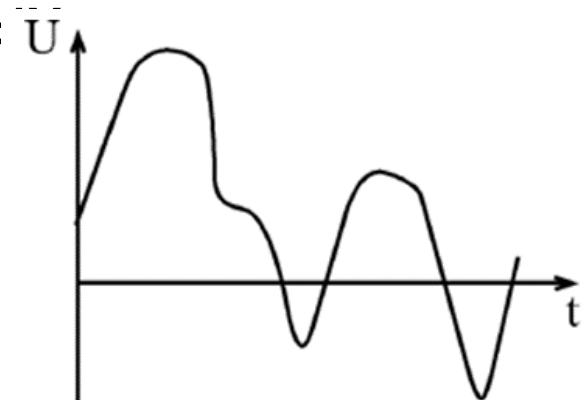


Классификация сигналов



Классификация сигналов

- **Аналоговый** сигнал — сигнал даннъ эксперимента, у которого область значений измеряемого параметра и область определения описываются *непрерывным множеством*.

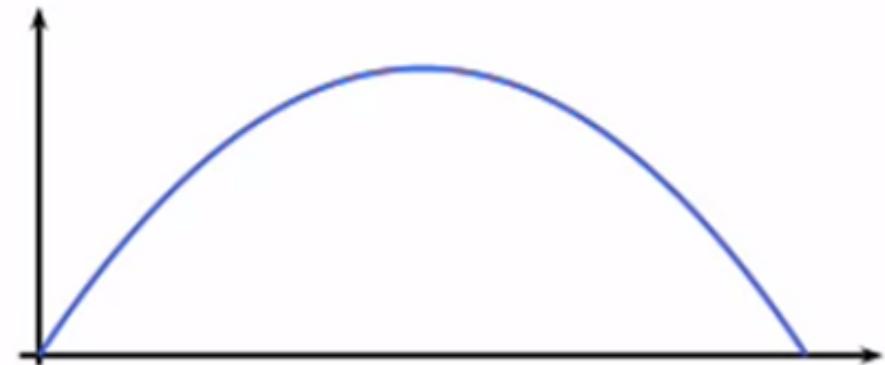


- **Цифровой** сигнал — сигнал, который можно представить в виде последовательности дискретных (цифровых) значений.

Аналоговые сигналы в физике

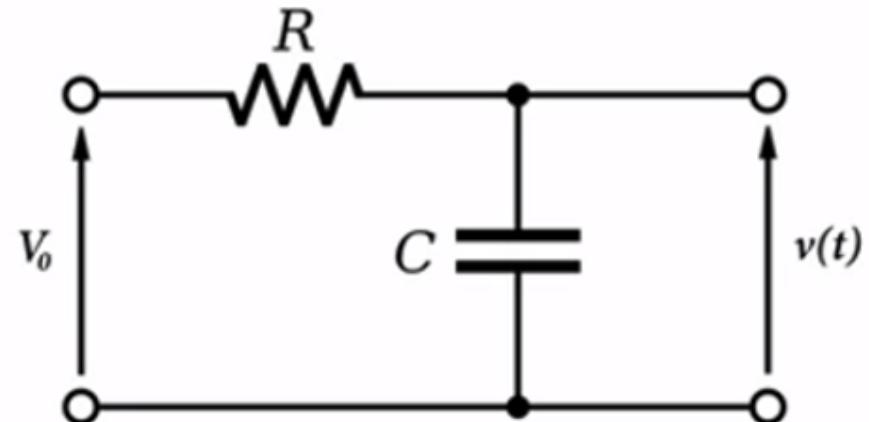
- движение снаряда
(Галилей 1638 г)

$$y(t) = v_y t - gt^2/2$$



- напряжение в цепи

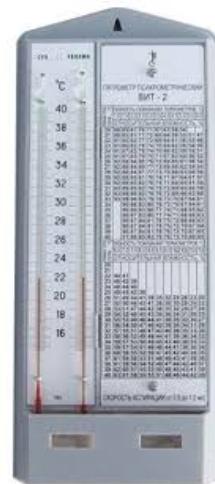
u



Аналоговые сигналы в физике



Для каждого аналогового сигнала – свое устройство записи



Сигналы в физике

От аналогового...



$f(t)$ - ?

... к цифровому...

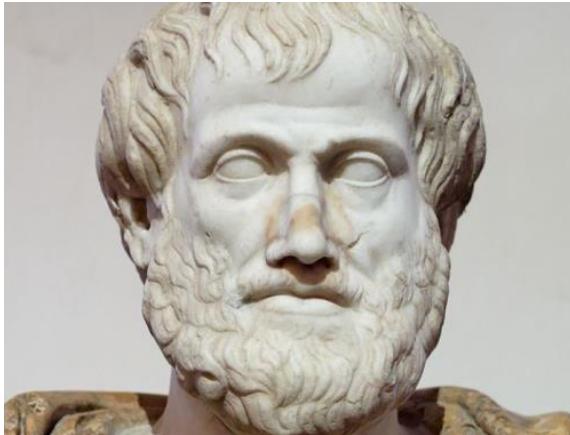
... 74 31 -66 9 -123 33 159 -26 102 148 86
-136 -179 70 72 -84 -113 -42 -88 88 8 -180 -7
-133 8 164 -4 108 35 -82 74 -49 52 32 -31 ...

путем:

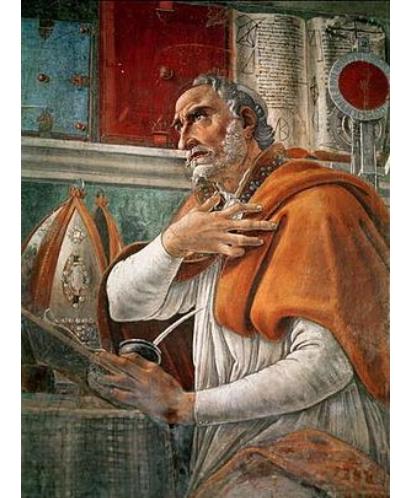
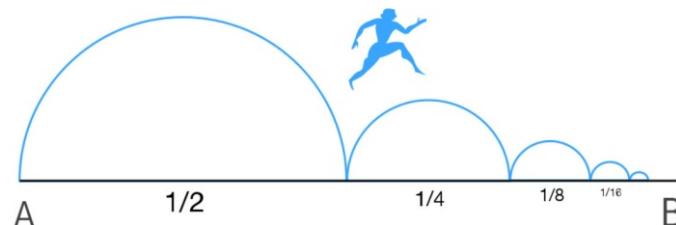
- **дискретизации** по времени
- **квантования** по уровню

Дискретизация по времени

Что есть **время**?



Зенон: парадокс
дихотомии

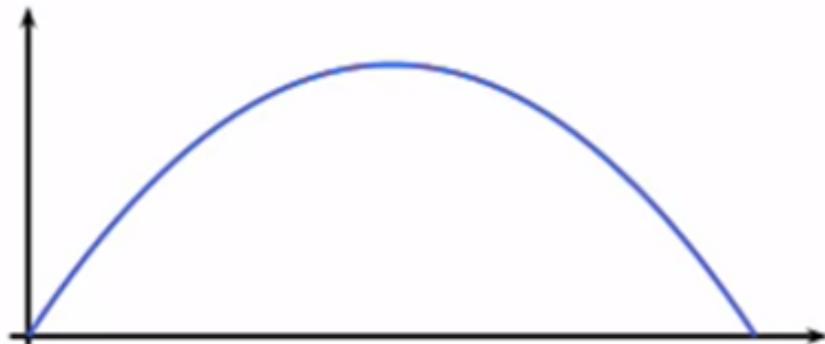


Св. Августин (5 век):
отрицание времени



И. Кант: «Время есть абсолютно
первый формальный принцип чувственно
воспринимаемого мира».

Дискретизация по времени



траектория движения



серия измерений

Дискретизация аналогового сигнала:

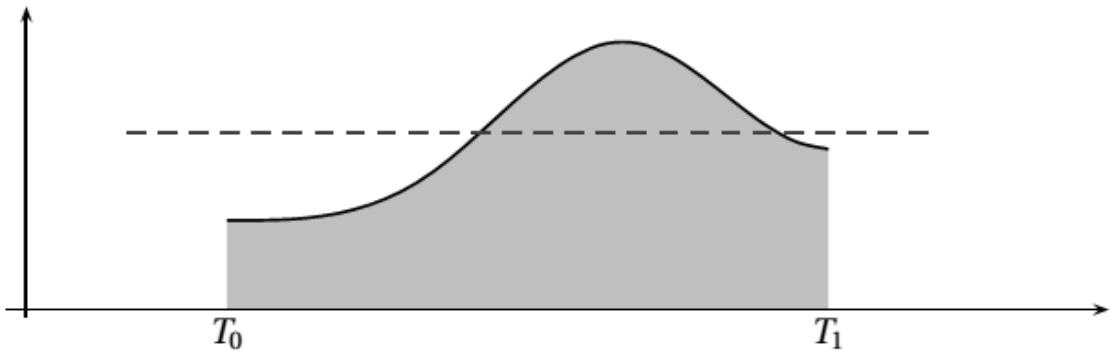
сигнал представляется в виде последовательности значений, взятых в дискретные моменты времени, которые называются **отсчётами (сэмплами)**.

$$x[n] = \dots, 1.2390, -0.7372, 0.8987, 0.1798, -1.1501, -0.2642 \dots$$

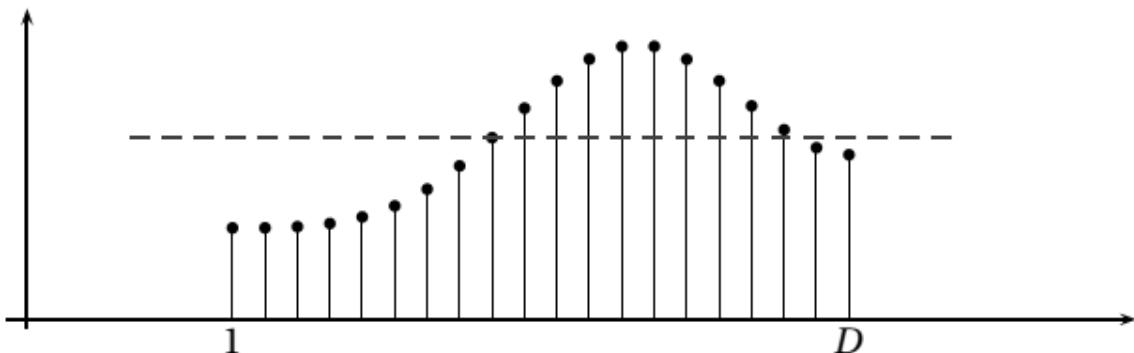
! n не имеет физической размерности

Дискретизация по времени

Расчет среднего



$$\bar{C} = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} f(t) dt$$

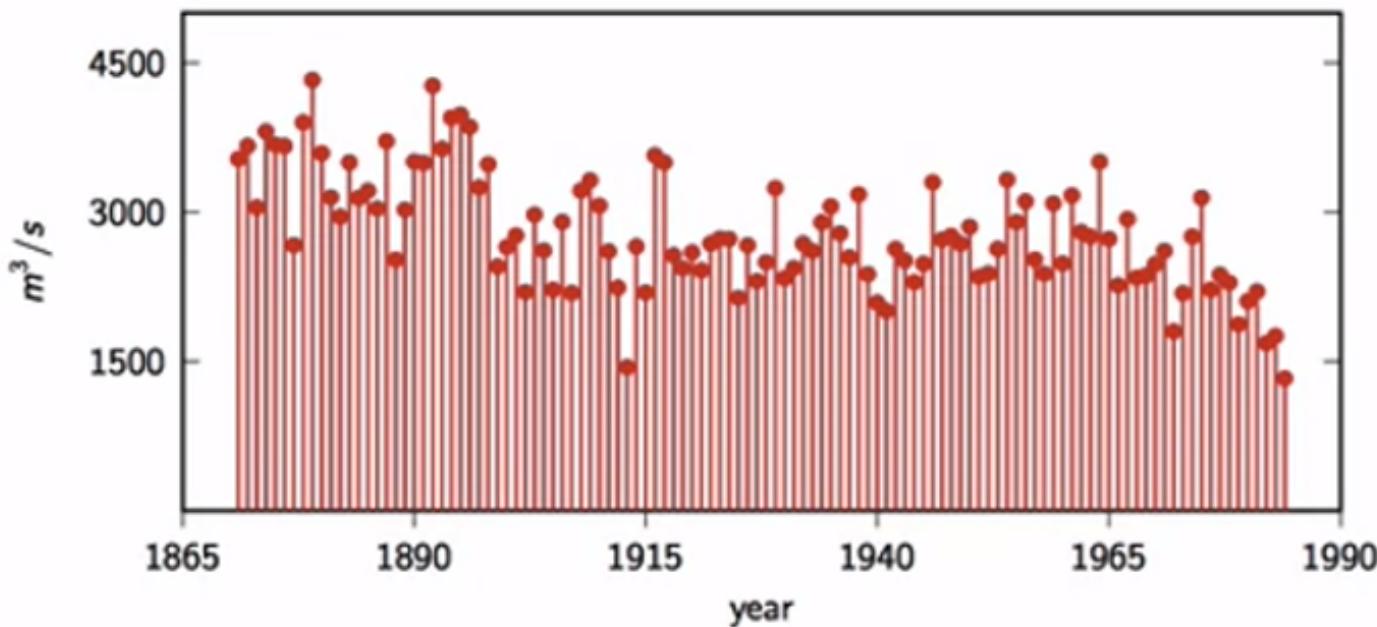


$$\hat{C} = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^D c_n$$

Дискретизация по времени

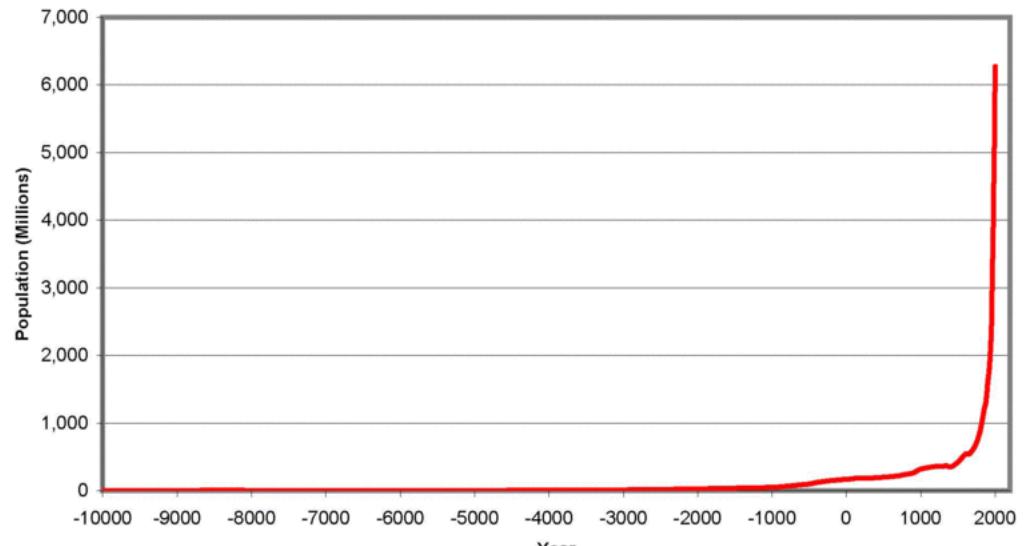
Метеорология:
запись уровня воды в реке Нил

Палермский
камень (2500 г до
н.э.)

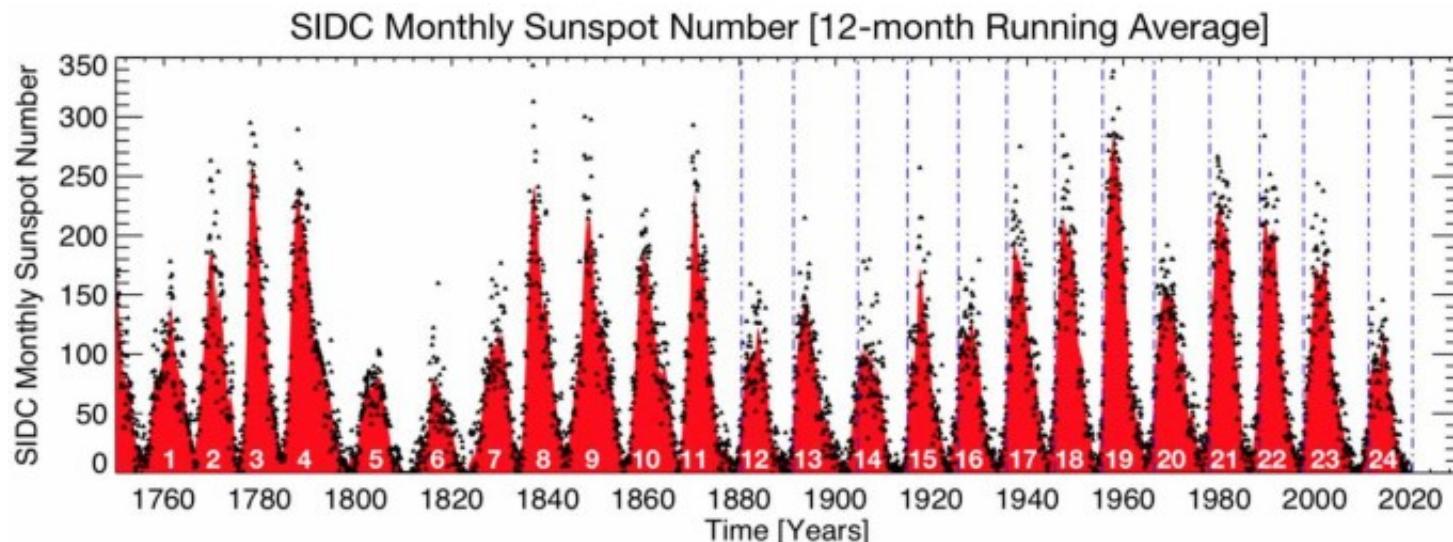


Дискретизация по времени

Социология:
слежение за численностью
населения



Source: J. Bradford DeLong, "Estimating World GDP, One Million B.C. - Present." http://www.j-bradford-delong.net/TCEH/1998_Draft/World_GDP/Estimating_World_GDP.html. Accessed Mar 5, 2008.



McIntosh et al. *Sol Phys* 295, 163 (2020).

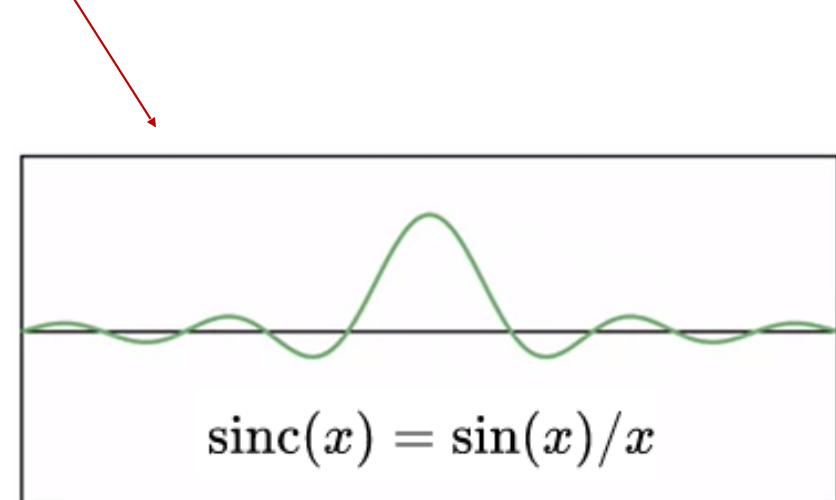
Астрономия:
слежение за
солнечной
активностью

Дискретизация по времени

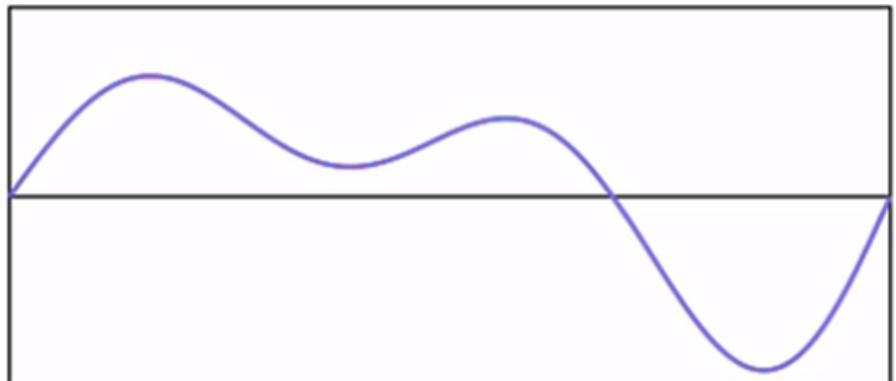
При некоторых ограничивающих условиях возможно восстановление аналоговой функции $x(t)$ по ее дискретным отсчетам $x[n]$ по **интерполяционной формуле Уиттекера-Шеннона**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot sinc\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

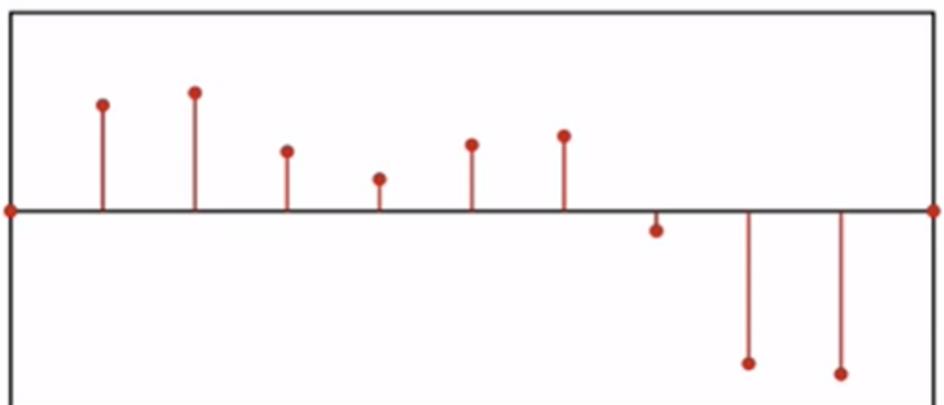
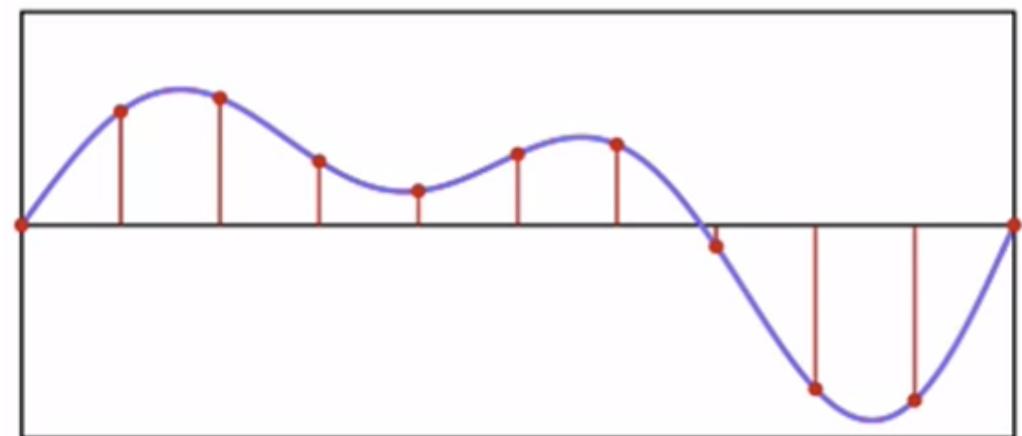
T – период дискретизации;
 $F_s = 1/T$ – частота
дискретизации



Дискретизация по времени

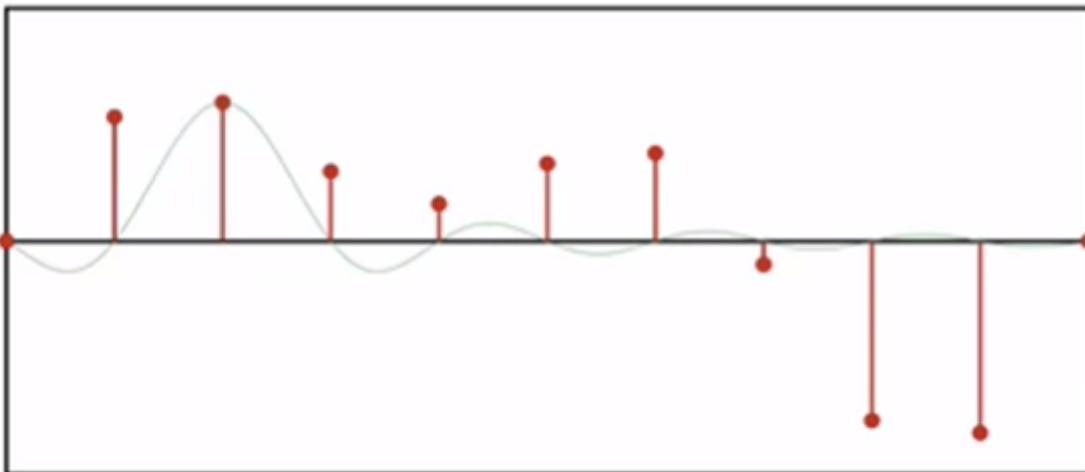


$x(t)$



$x[n]$

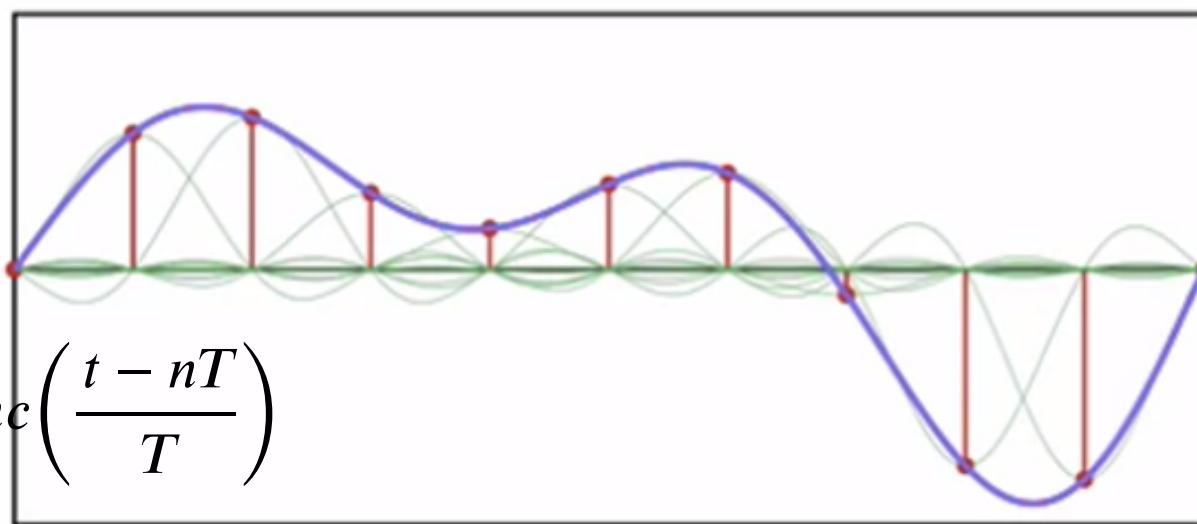
Дискретизация по времени



Joseph Fourier

восстановление сигнала

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$



Сигналы в физике

От аналогового...



$f(t)$ - ?

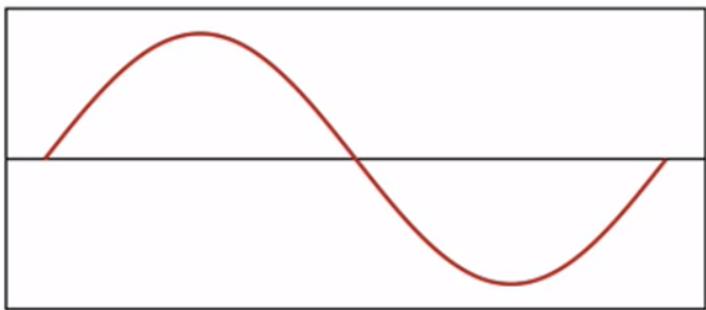
... к цифровому...

... 74 31 -66 9 -123 33 159 -26 102 148 86
-136 -179 70 72 -84 -113 -42 -88 88 8 -180 -7
-133 8 164 -4 108 35 -82 74 -49 52 32 -31 ...

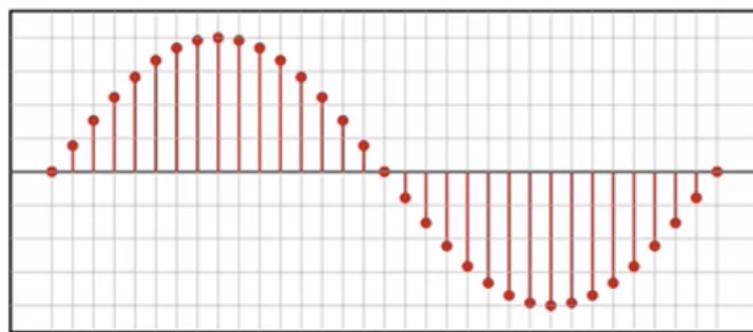
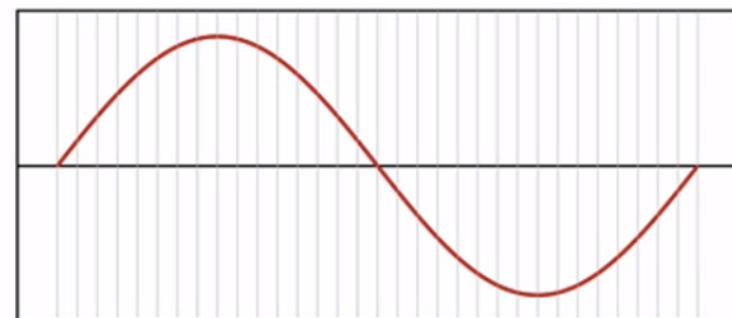
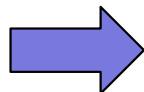
путем:

- **дискретизации** по времени
- **квантования** по уровню

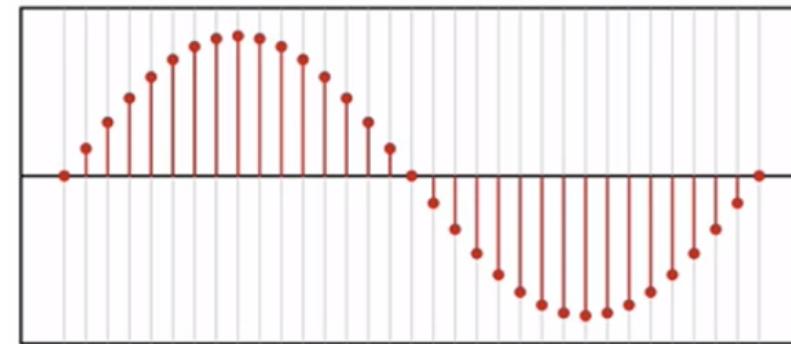
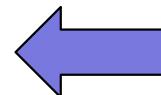
Квантование сигнала



$x(t)$

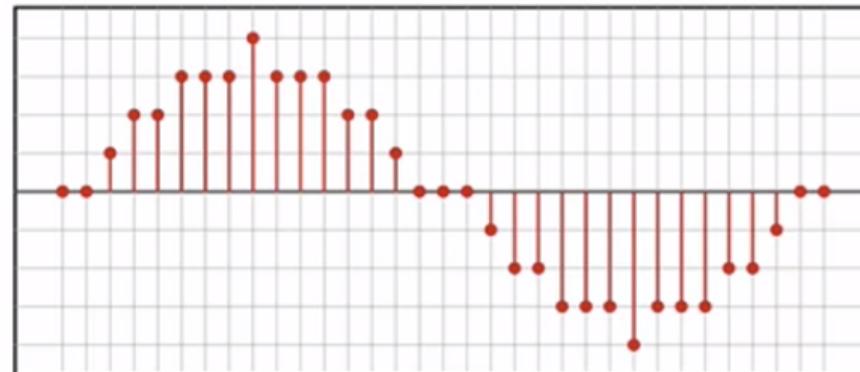
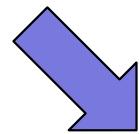


$x[n]$

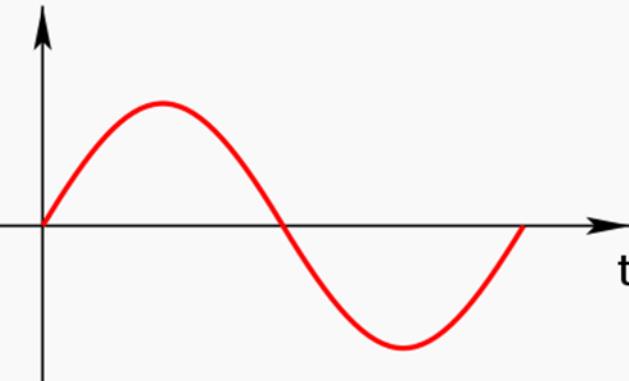
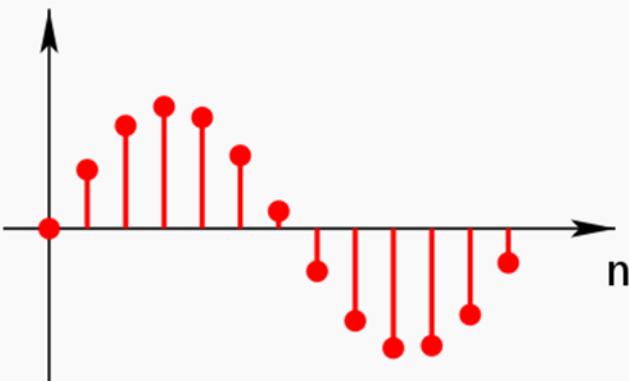
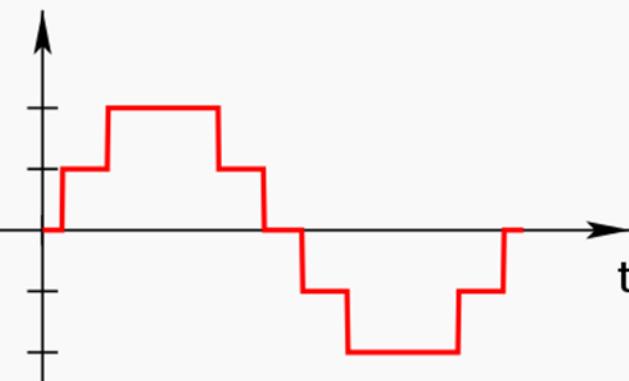
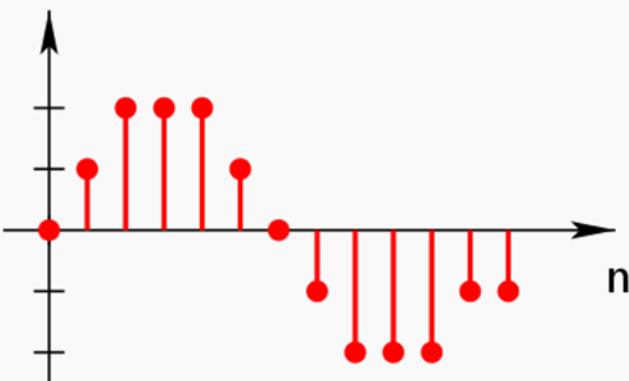


$\hat{x}[n]$

квантование по уровню =
дискретизация по амплитуде



Сигналы в физике

	Непрерывные	Дискретные
Неквантованные	 Аналоговый сигнал	
Квантованные		 Цифровой сигнал

Сигналы в физике

Цифровой сигнал представляется в виде последовательности целых чисел:

- сигнал можно хранить на любом устройстве, поддерживающем хранение целых чисел
- обработка не зависит от природы сигнала

Устройства, осуществляющие дискретизацию по времени и квантование по уровню, называются **аналого-цифровыми преобразователями (АЦП)**.



Устройства, переводящие цифровой сигнал в аналоговый, называются **цифро-аналоговыми преобразователями (ЦАП)**.

Сигналы в физике

- *Аналоговые приборы*

Показания являются непрерывной функцией изменений измеряемой величины



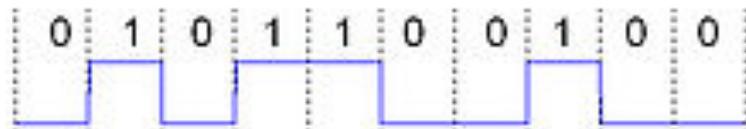
- *Цифровые приборы*

Состоят из АЦП и цифровых отсчетных устройств.
Результаты преобразования АЦП в виде кода могут подаваться на регистрирующие или вычислительные приборы



Сигналы в физике

$\{0,1\}$



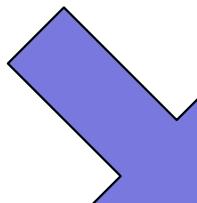
Бинарный (логический) сигнал – вид цифрового сигнала

Преимущества цифровых сигналов по сравнению с аналоговыми:

- *хранении*
- *обработке*
- *передаче* сигнала

Сигналы в физике

- *хранение сигналов*



- обработка аналоговых сигналов



аналоговый микшерный пульт



гидравлический интегратор Лукьянова

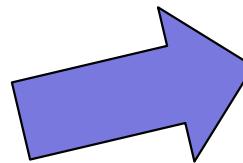
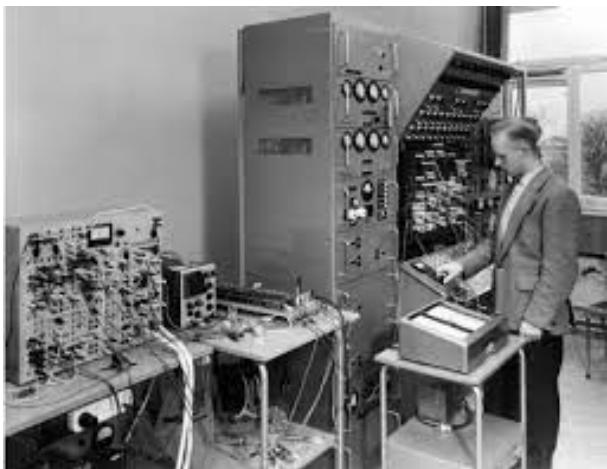


Антикитерский механизм (до 205 года до н. э.)



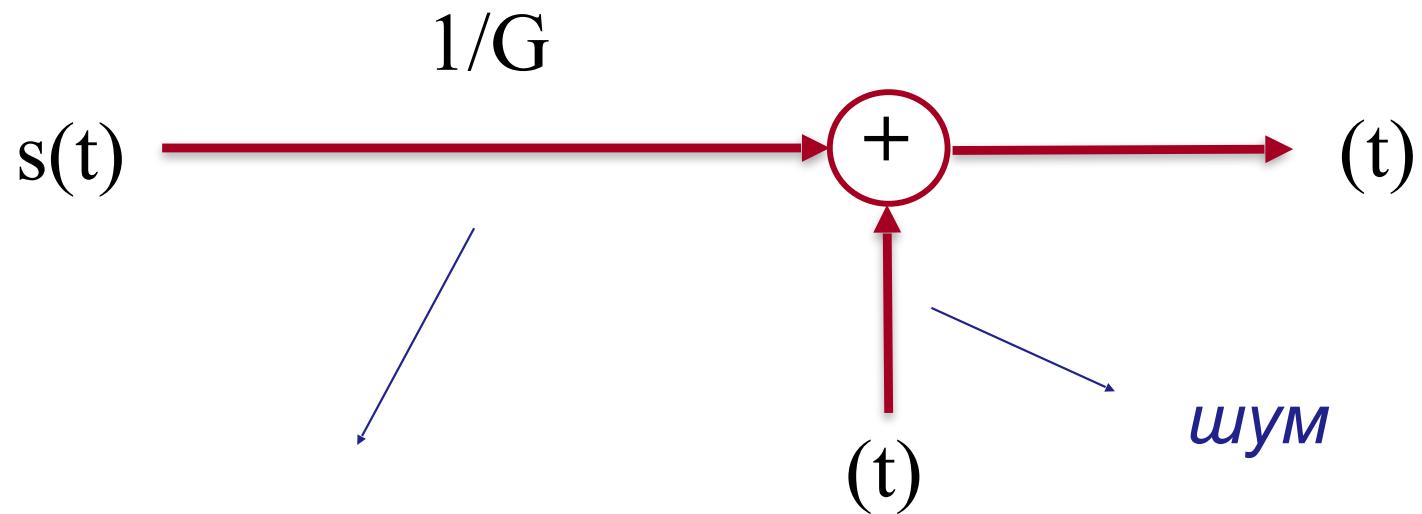
АВМ
«АКАТ-1» (Польша)

▪ обработка цифровых сигналов



```
CustomerMaintenance - Microsoft Visual Studio (Administrator)
FILE EDIT VIEW PROJECT BUILD DEBUG TEAM TOOLS TEST ANALYZE WINDOW HELP
[...]
Server Explorer Tools
frmCustomerMaintenance.cs
1 1 Public Class frmCustomerMaintenance
2 2     Dim customer As Customer
3 3
4 4     Private Sub btnDeleteCustomer_Click(sender As Object,
5 5         e As EventArgs) Handles btnDeleteCustomer.Click
6 6         If txtCustomerID.Text = "" Then
7 7             Validator.IsInt32(txtCustomerID) Then
8 8                 Dim customerID As Integer = CInt(txtCustomerID.Text)
9 9                 If customer Is Nothing Then
10 10                 MessageBox.Show("No customer found with this ID. " &
11 11                     "Please try again.", "Customer Not Found")
12 12                 Me.ClearControls()
13 13             Else
14 14                 Me.DisplayCustomer()
15 15             End If
16 16         End If
17 17
18 18     Private Sub btnSaveCustomer(customerID As Integer)
19 19         Try
20 20             customer = CustomerDB.GetCustomer(customerID)
21 21             Catch ex As Exception
22 22             MessageBox.Show(ex.Message, ex.GetType().ToString())
23 23         End Try
24 24
25 25     Private Sub ClearControls()
26 26         txtCustomerID.Text = ""
27 27         txtName.Text = ""
28 28         txtAddress.Text = ""
29 29         txtCity.Text = ""
30 30         txtState.Text = ""
31 31         txtZipCode.Text = ""
32 32         txtPhone.Text = ""
33 33         txtEmail.Text = ""
34 34         btnDelete.Enabled = False
35 35         btnUpdate.Enabled = False
36 36         txtCustomerID.SelectAll()
37 37     End Sub
38 38
39 39     Private Sub DisplayCustomer()
40 40         txtName.Text = customer.Name
41 41         txtAddress.Text = customer.Address
42 42         txtCity.Text = customer.City
43 43         txtState.Text = customer.State
44 44         txtZipCode.Text = customer.Zipcode
45 45         txtPhone.Text = customer.Phone
46 46         txtEmail.Text = customer.Email
47 47         btnDelete.Enabled = True
48 48         btnUpdate.Enabled = True
49 49     End Sub
50 50
51 51     Private Sub btnAdd_Click(sender As Object,
52 52         e As EventArgs) Handles btnAdd.Click
53 53         Dim addCustomerForm As New frmAddCustomer()
54 54         addCustomerForm.addCustomer = True
55 55         Dim result As DialogResult = addCustomerForm.ShowDialog()
56 56         If result = DialogResult.OK Then
57 57             customer = addCustomerForm.Customer
58 58             txtCustomerID.Text = customer.CustomerID.ToString()
59 59             Me.DisplayCustomer()
60 60         End If
61 61     End Sub
62 62
63 63     Private Sub btnModify_Click(sender As Object,
64 64         e As EventArgs) Handles btnModify.Click
65 65         Dim modifyCustomerForm As New frmModifyCustomer()
66 66     End Sub
67 67
68 68     Error List [0 Errors | 0 Warnings | 0 Messages]
69 69     Description
70 70
71 71
72 72
73 73
74 74
75 75
76 76
77 77
78 78
79 79
80 80
81 81
82 82
83 83
84 84
85 85
86 86
87 87
88 88
89 89
90 90
91 91
92 92
93 93
94 94
95 95
96 96
97 97
98 98
99 99
100 100 %
```

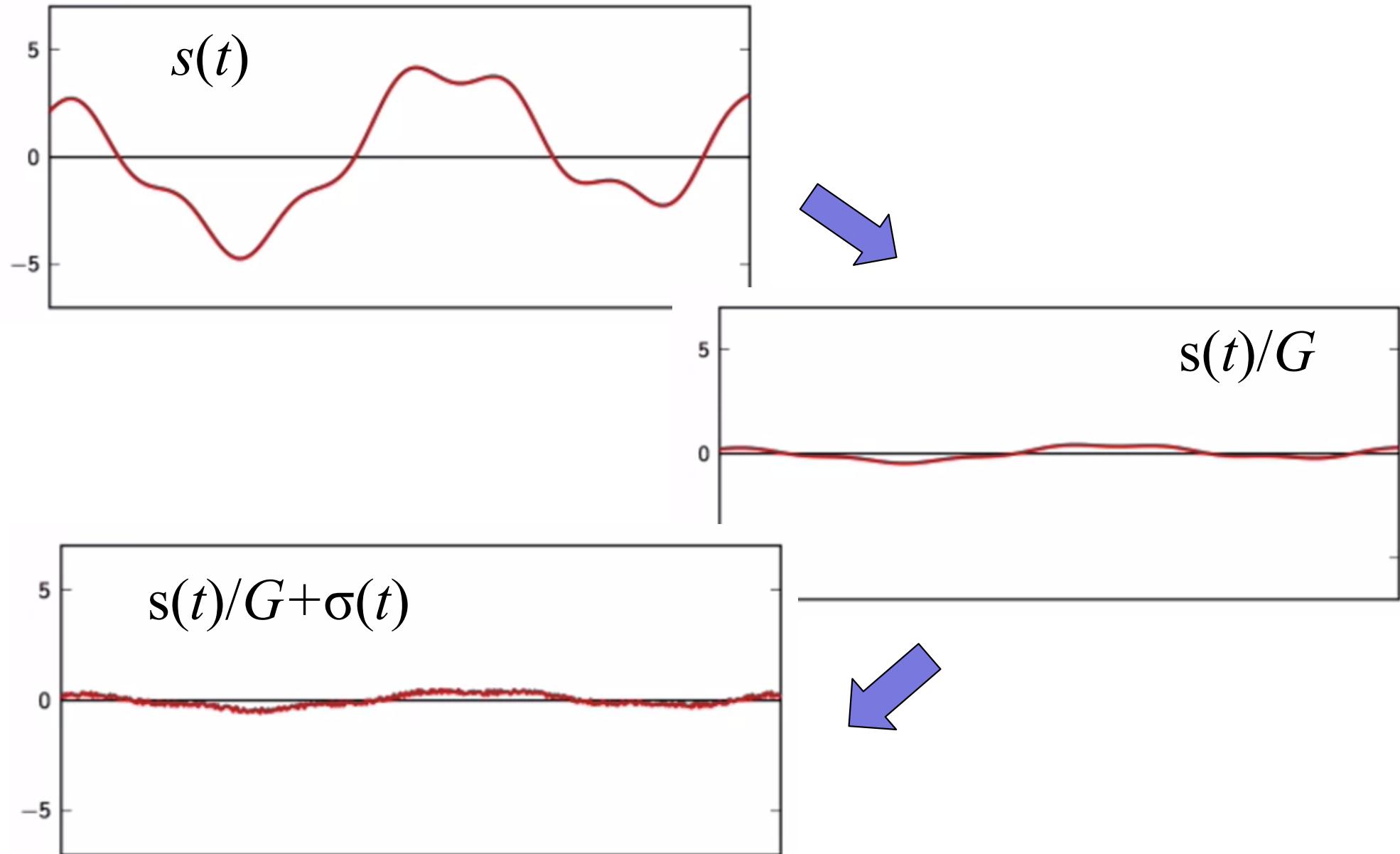
- передача сигналов



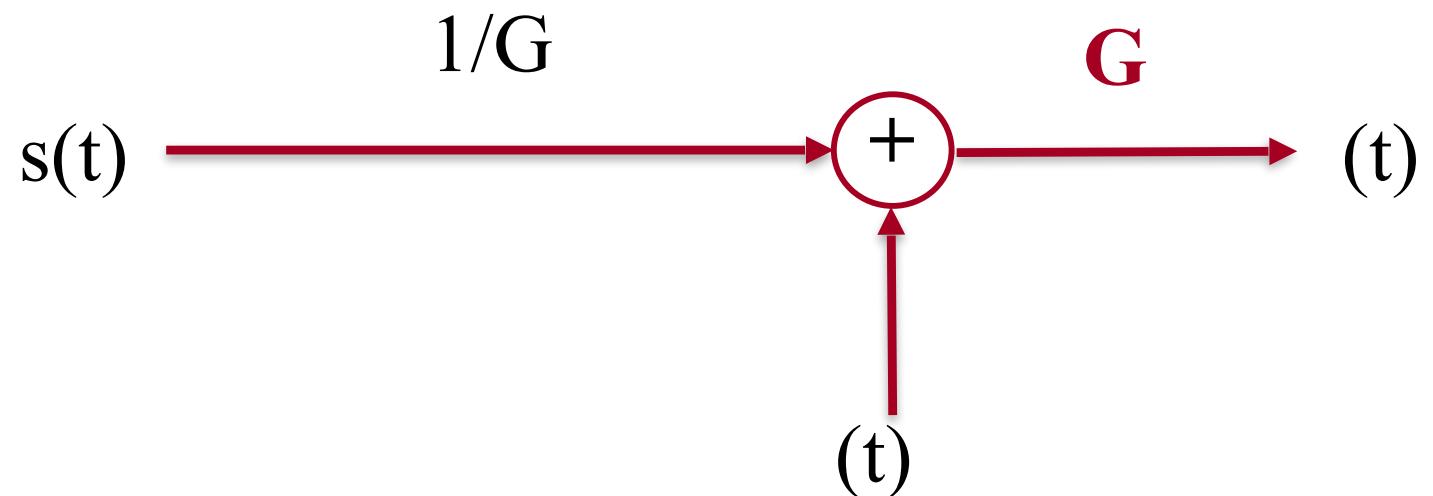
ослабление
сигнала

$$(t) = s(t)/G + (t)$$

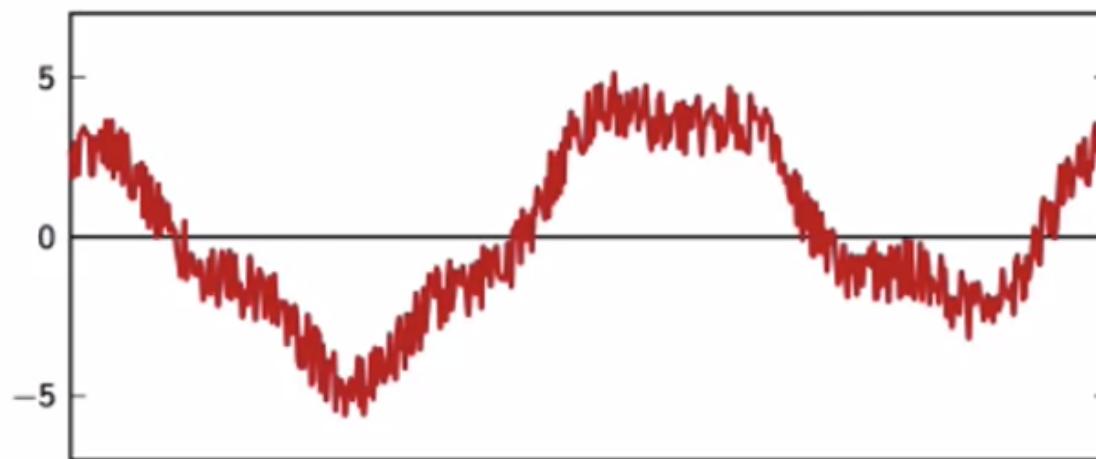
- передача аналоговых сигналов



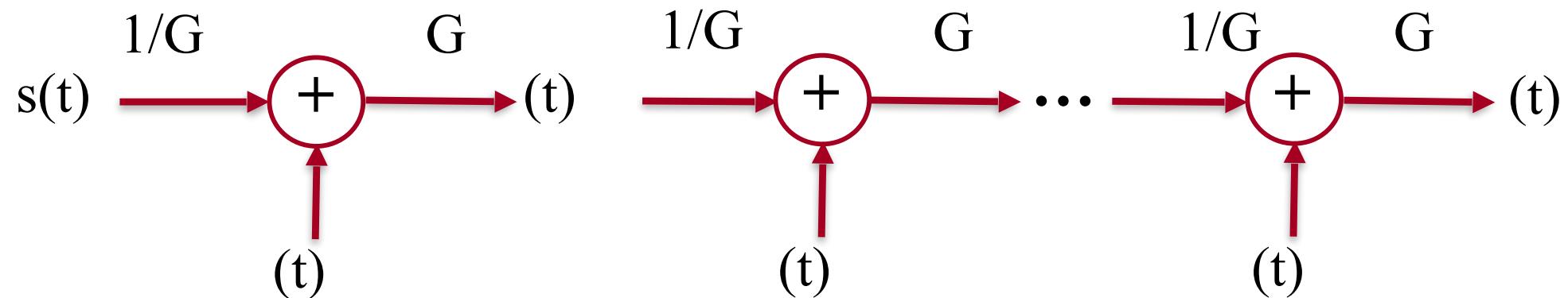
- передача сигналов



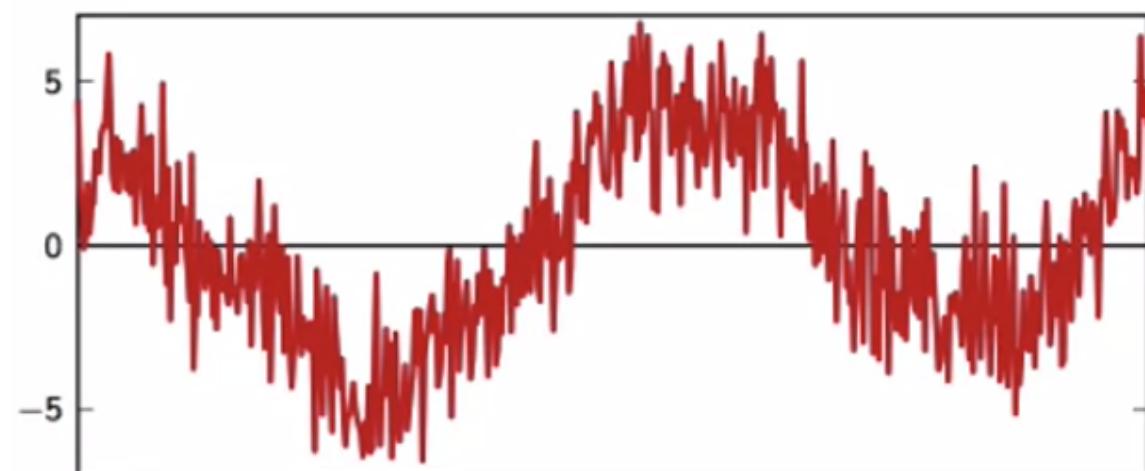
Но! $(t) =$ $= s(t) + G\sigma(t)$



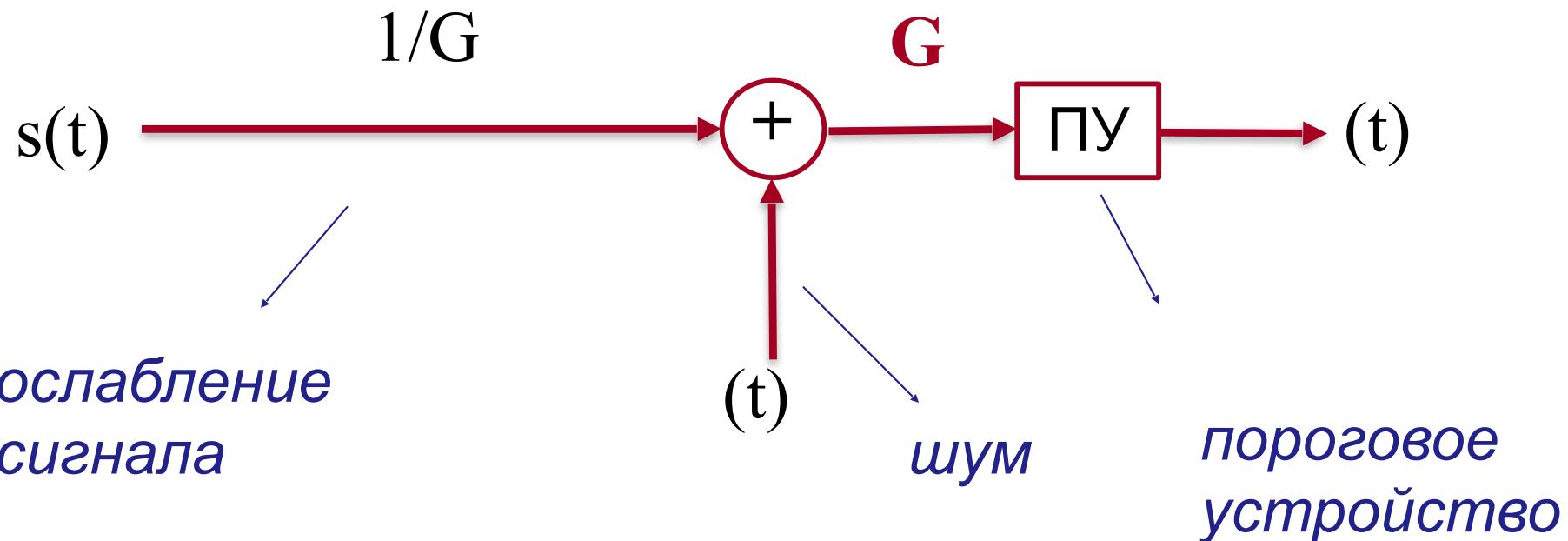
- передача сигналов на дальние расстояния



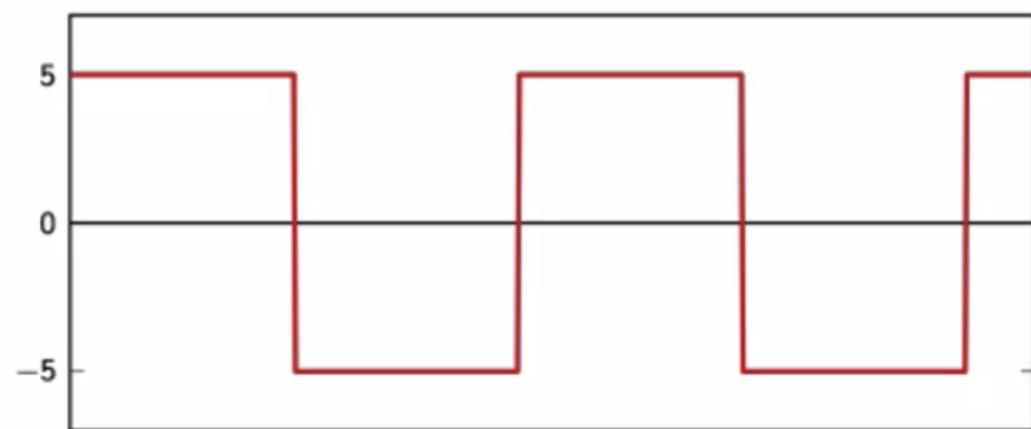
$$(t) = s(t) + NG$$



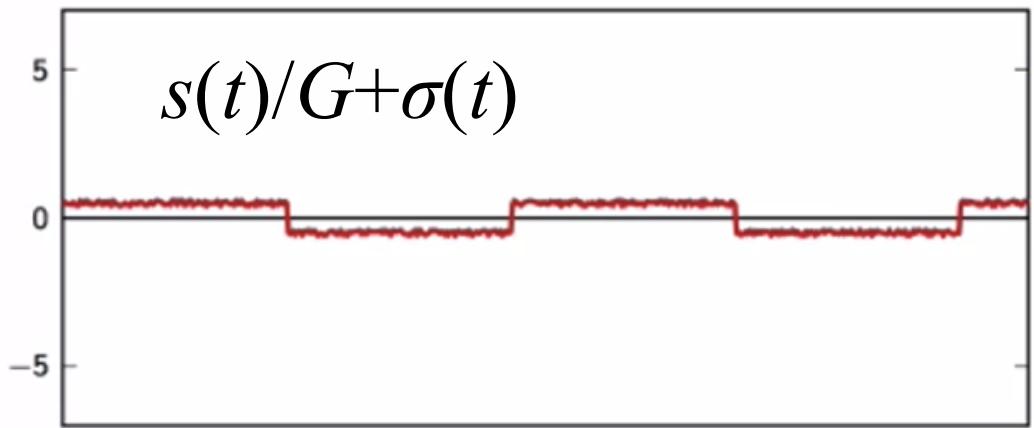
- передача цифровых сигналов



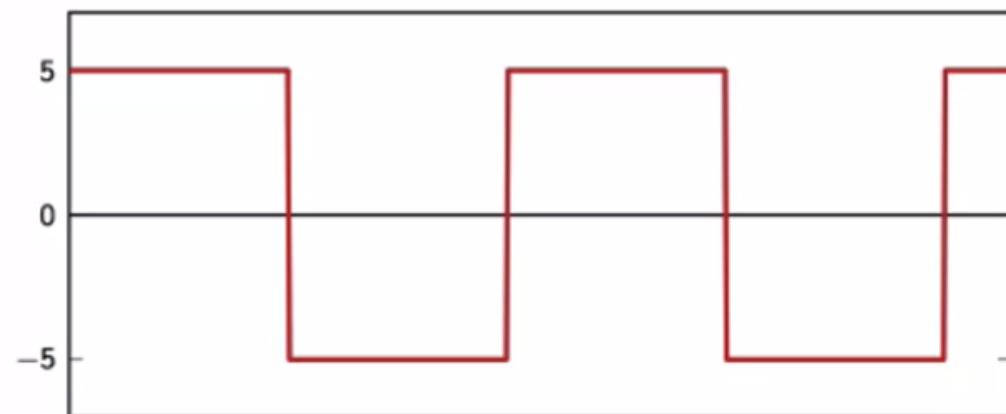
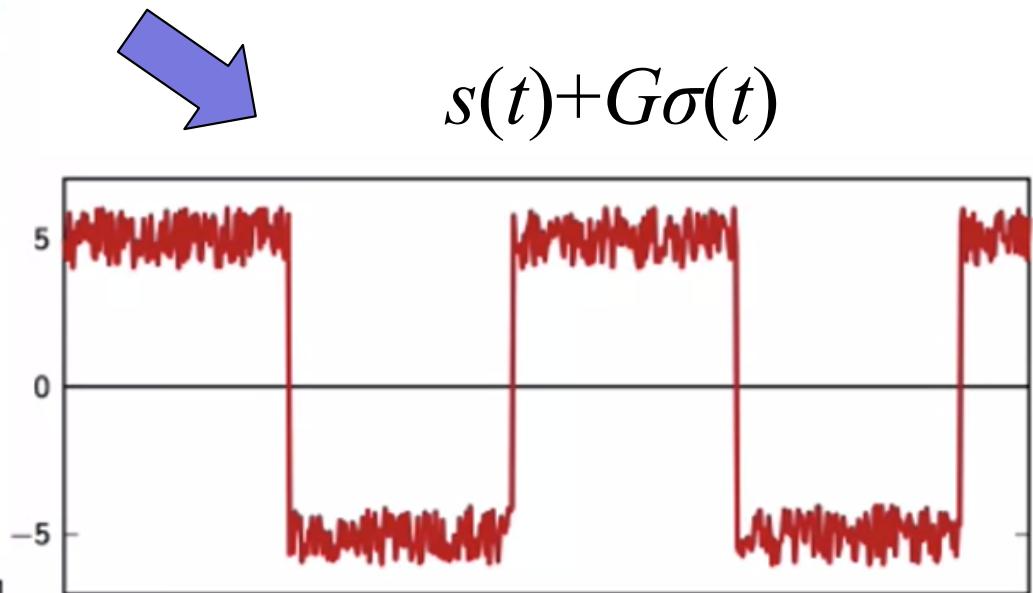
$s(t)$ –
цифровой сигнал
(набор целых чисел)



- передача цифровых сигналов



пороговый фильтр



- **передача цифровых** сигналов

При передаче цифровых сигналов происходит их кодирование:

- В источнике – сжатие, устранение «лишней» информации
- В канале передачи - добавление *избыточности* в данные (повышение надежности передачи)

Пример:

0 кодируется как *0000*, 1 как *1111*



- Защита данных (криптография, стеганография)

Дискретные сигналы

Дискретные сигналы

Дискретный сигнал – последовательность комплексных чисел:

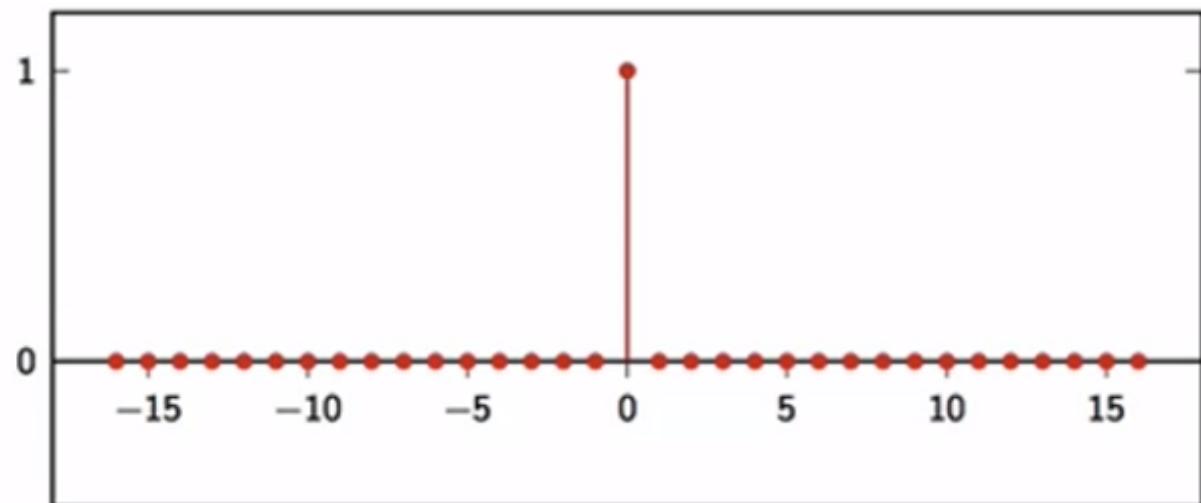
- размерность 1D (пока)
- обозначение $x[n]$
- ставит соответствие $Z \rightarrow C$
- $n = \dots, 0, 1, 2, \dots, N-1, \dots$ - отсёты (сэмплы)
- n не имеет физической размерности (порядок отсчетов)
- T – интервал дискретизации
- периодичность определяется числом сэмплов, после которых сигнал повторяется

Дискретные последовательности

- **Единичный импульс** (дискретная δ -функция Дирака) – простейшая дискретная последовательность

$$x[n] = \delta[n]$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Как выглядят графики $\delta[n-3]$ и $\delta[n+3]$?

Дискретные последовательности

Операция **сдвига** для дискретной б-функции:

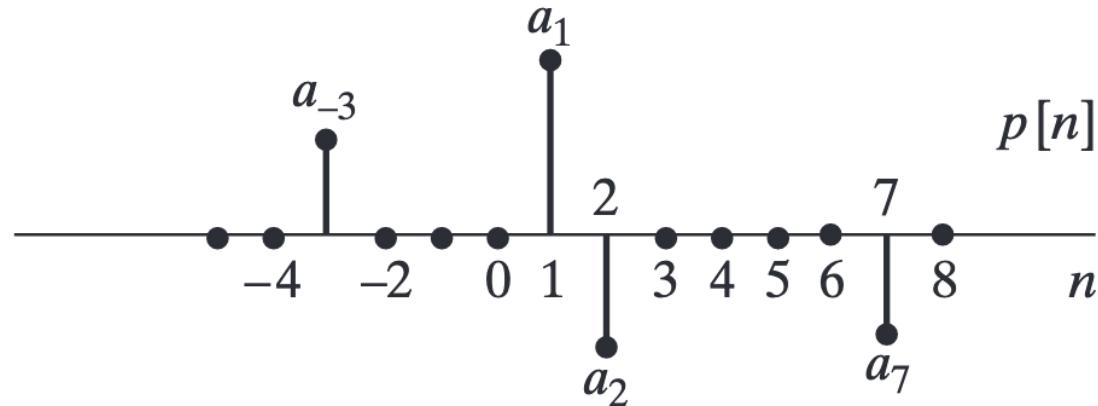
$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Любой дискретный сигнал можно представить в виде

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

$x[k]$ – отсчеты исходного аналогового сигнала

Дискретные последовательности



$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7].$$

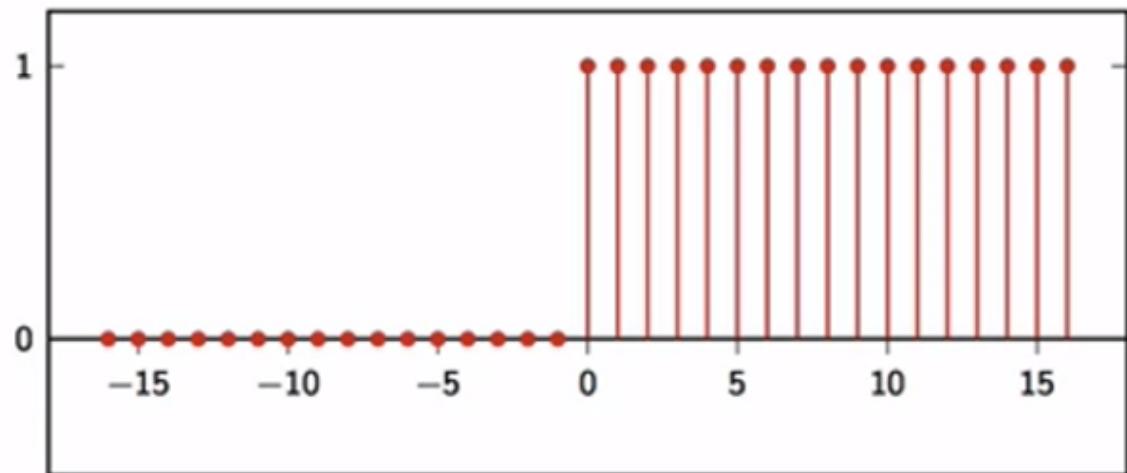
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$

Дискретные последовательности

- **Единичный ступенчатый сигнал или функция Хевисайда**

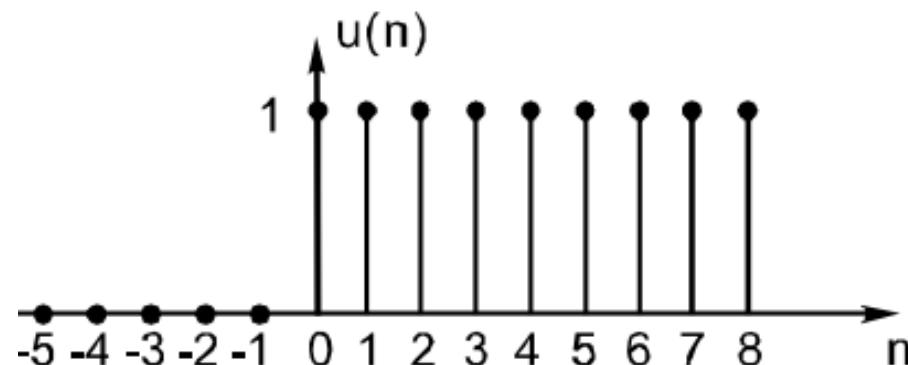
$$x[n] = u[n]$$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

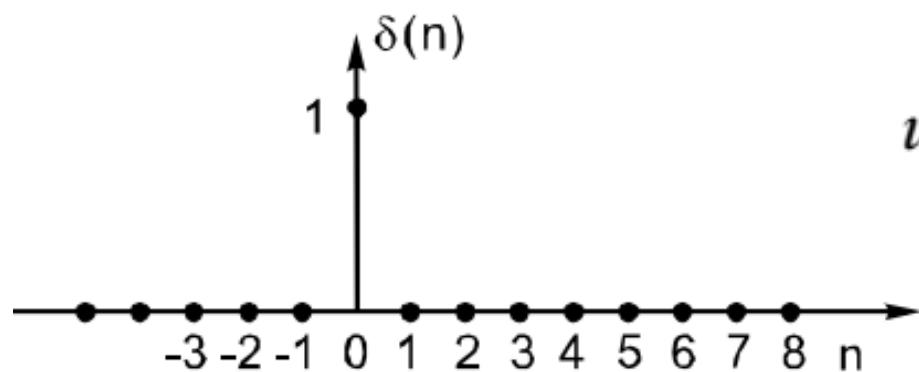


Как единичная ступенчатая последовательность связана с единичным скачком?

Дискретные последовательности



$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1).$$



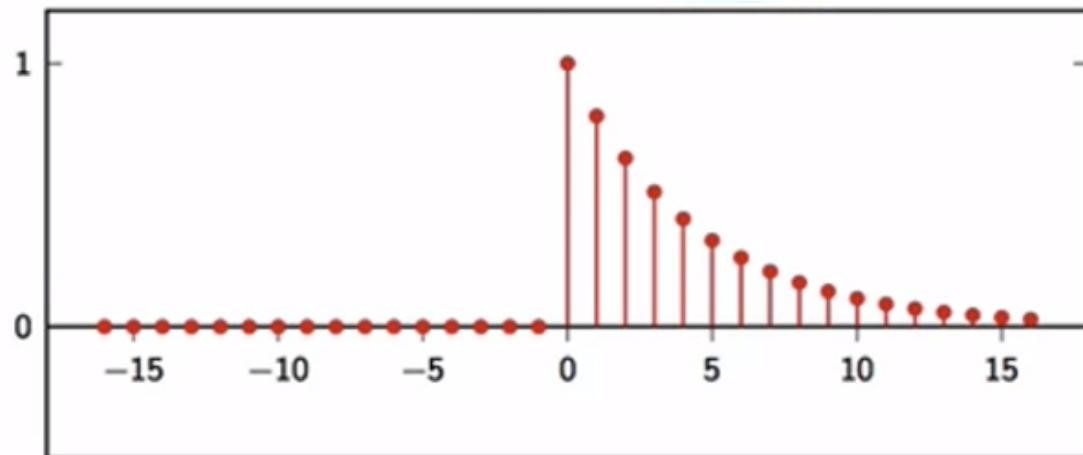
$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k).$$

Дискретные последовательности

- Экспоненциально затухающая последовательность

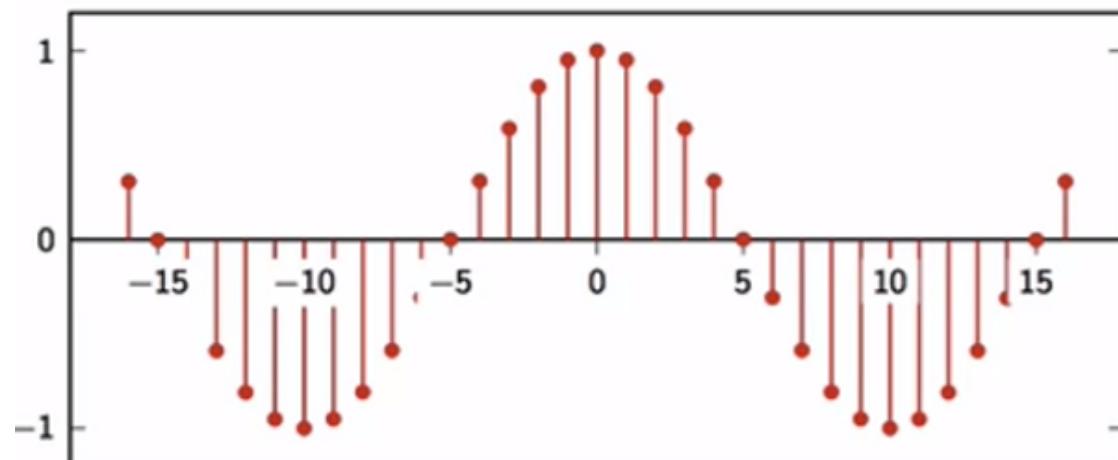
$$x[n] = a^n u[n],$$

$$a \in \mathbb{C}, |a| < 1$$



- Синусоидальная последовательность

$$x[n] = \sin(\omega_0 n + \phi)$$



Типы дискретных сигналов

- конечно-размерные: $x[n], \quad n = 0, \dots, N - 1$
- бесконечные: $x[n], \quad n \in \mathbb{Z}$
- периодические: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN], \quad k \in \mathbb{Z}$
(бесконечные по размеру, но несут
конечную информацию)
- дополненные нулями (finite support signals):

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \text{ и } n \geq N \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Операции с дискретными сигналами

- суммирование: $z[n] = x[n] + y[n]$
- масштабирование: $y[n] = \alpha \cdot x[n]$
- перемножение: $z[n] = x[n] \cdot y[n]$
- дифференцирование $y[n] = x[n] - x[n-1]$
- интегрирование $y[n] =$

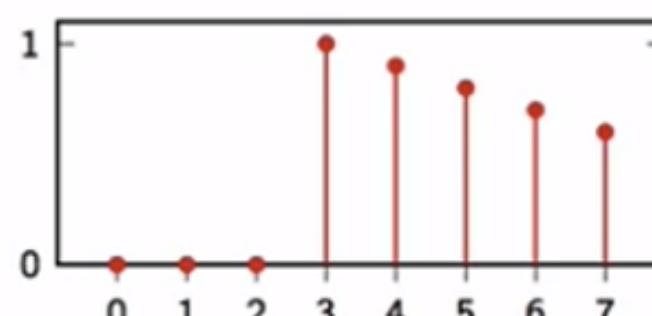
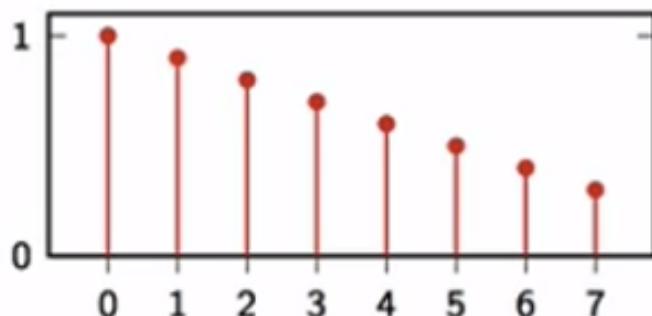


для любых типов сигналов

Операции с дискретными сигналами

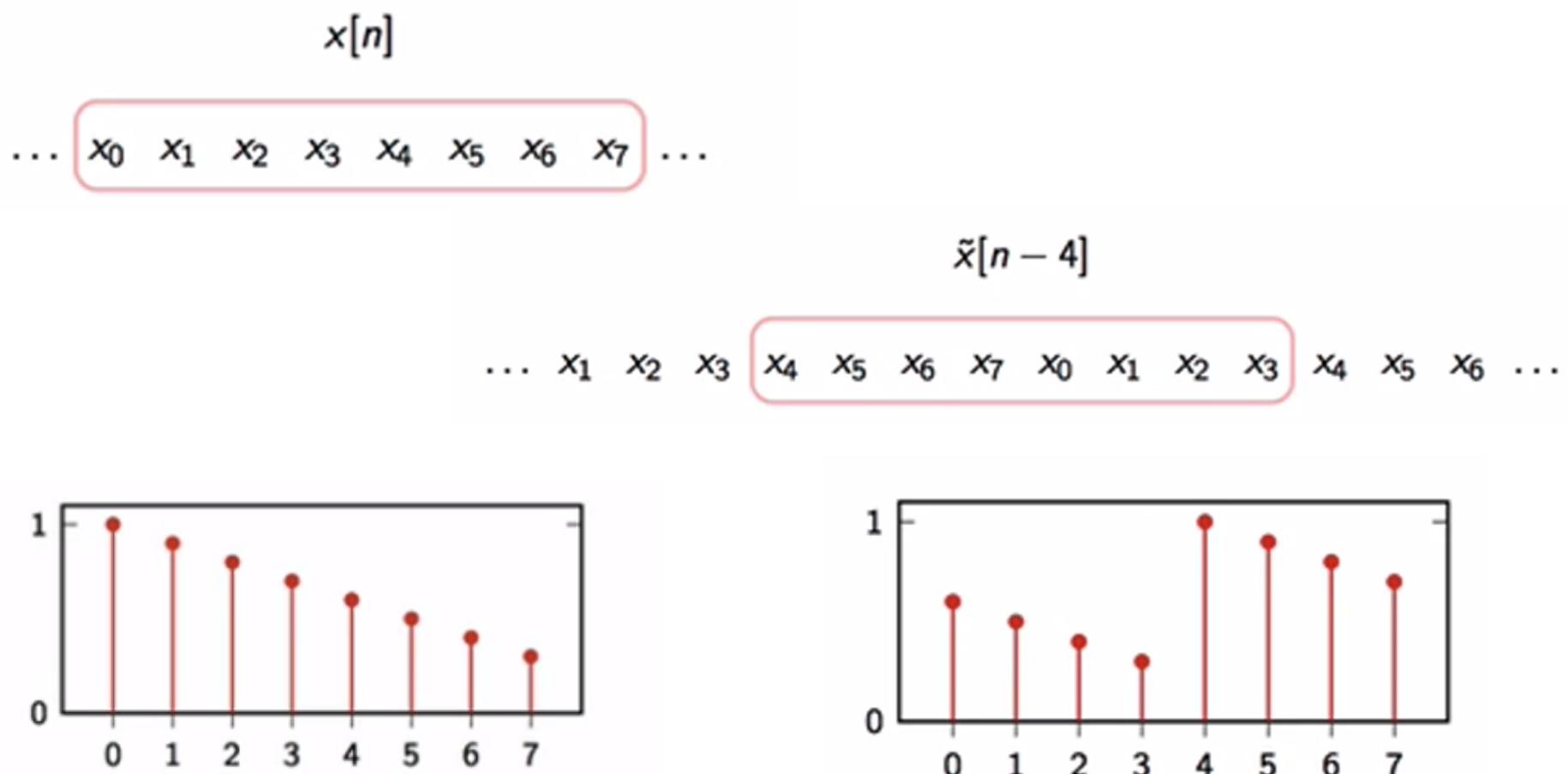
- сдвиг на k отсчетов (задержка): $y[n] = x[n-k]$

k - целое число



Операции с дискретными сигналами

при периодическом расширении конечно-мерного сигнала потери информации при сдвиге не будет



Энергия и мощность сигнала

- **Энергия** сигнала $x[n]$ определяется как:

$$E_x = \|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Для сигналов с конечной энергией $E_x < \infty$



$x[n]$ – квадратично-суммируемая последовательность

Для сигналов с $E_x = \infty$ используют понятие мощности сигнала

Энергия и мощность сигнала

- **Мощность** сигнала $x[n]$ определяется как:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Для периодических сигналов:

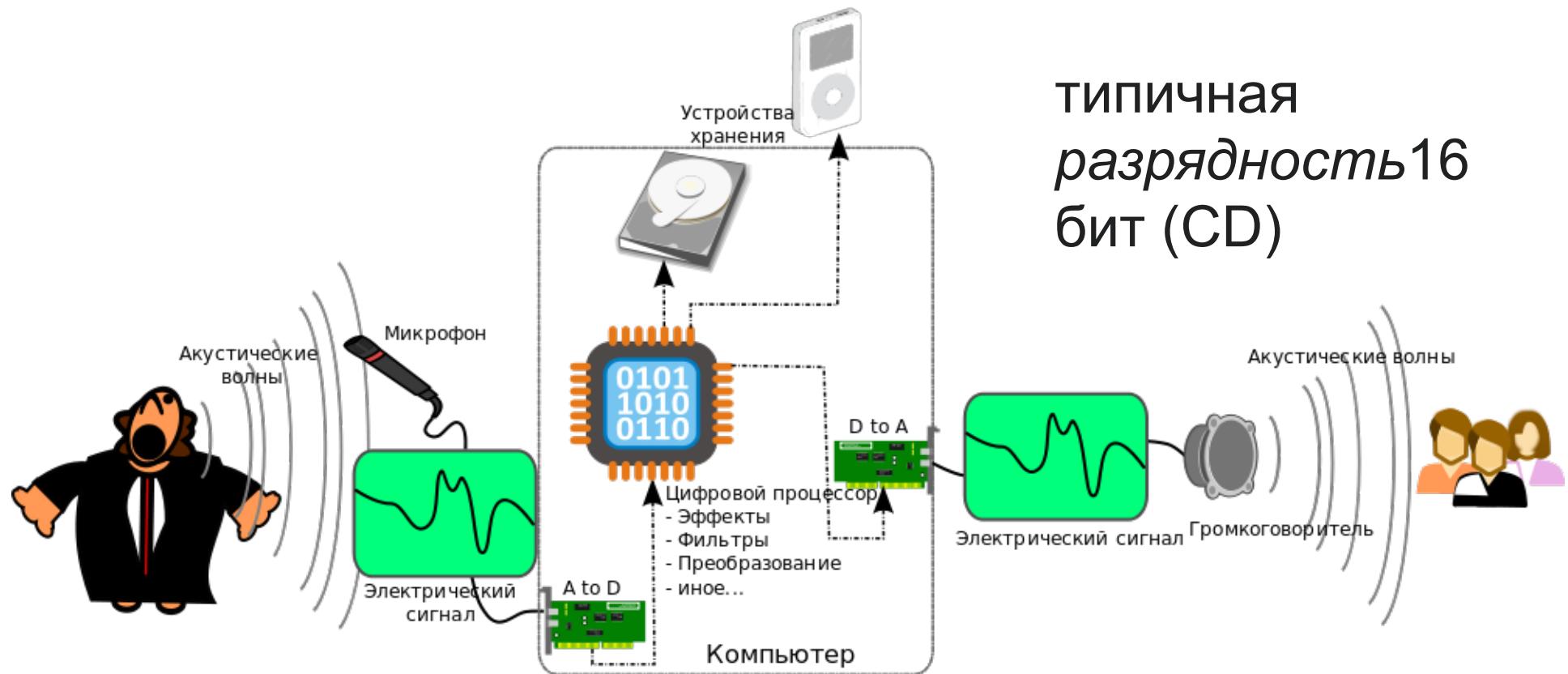
$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Для сигналов с конечной энергией $P = 0$

У периодических сигналов энергия бесконечна, а мощность – конечна (!)

Синтез звука на ПК

Синтез звука на ПК



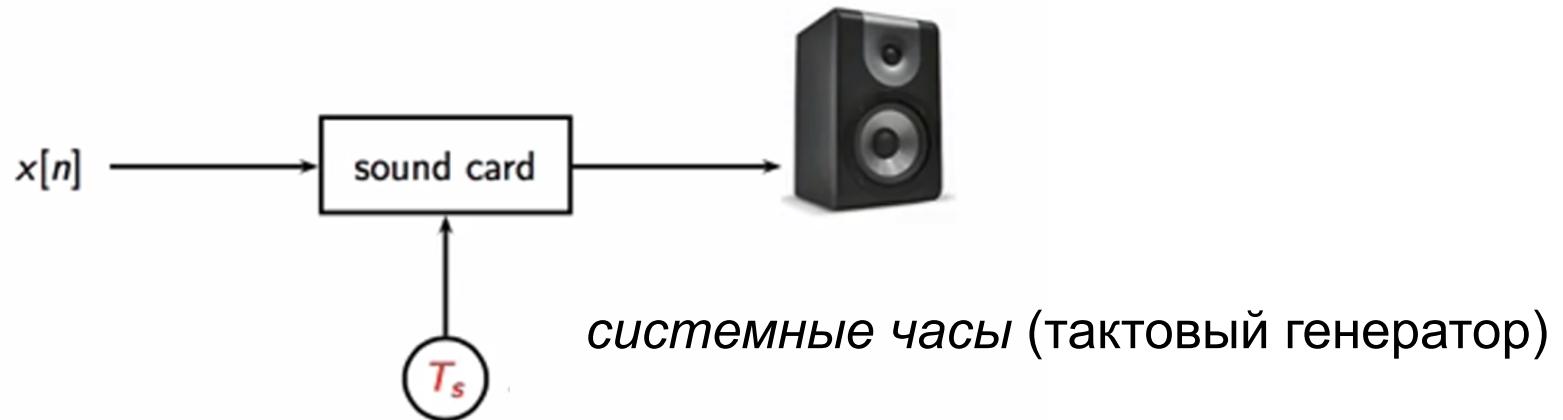
ти^чная
разрядность 16
бит (CD)

используемые частоты
дискретизации звука:

- 8000 Гц – телефонная связь
- 44100 Гц – аудио CD
- 48000 Гц - DVD

Синтез звука на ПК

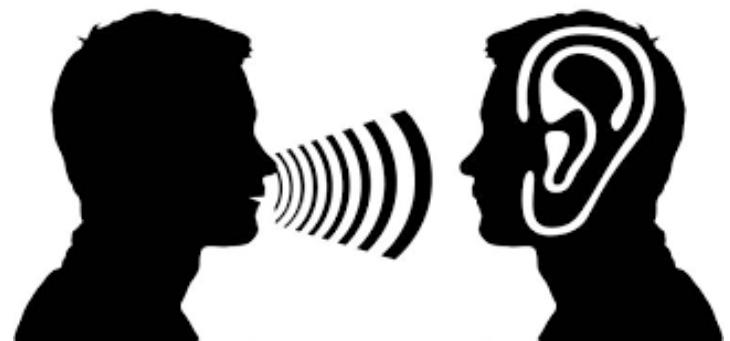
ПК переводит цифровой сигнал в физический с помощью звуковой карты



- T_s - время (в сек) между сэмплами
- периодичность в M сэмплов - период в MT_s секунд
- физическая частота

$$f = \frac{1}{MT_s} \Gamma u$$

Речевая система связи
является аналоговой на уровне
передачи звука, но цифровой
на уровне передачи слов.



Если ст р ть нес лько укв, НЛН Н3М3Н7Ь
НЗК070РЫ3 СNM80ЛЫ, 70 8СЁ Р48Н0 8Ы СМ0Ж3Т3
ЗТ0 ПР04ЗСТЬ.

- <https://neurosciencenews.com/>
- [https://ru.wikipedia.org/wiki/Цифровая звукозапись](https://ru.wikipedia.org/wiki/Цифровая_звукозапись)
- Signal Processing for Communications, by P.Prandoni and M. Vetterli, © 2008, EPFL Press
- [https://ru.wikipedia.org/wiki/Аналоговый компьютер](https://ru.wikipedia.org/wiki/Аналоговый_компьютер)