



Кафедра молекулярных процессов и экстремальных  
состояний вещества

# Математические основы методов анализа результатов физического эксперимента

## 5. Алгоритмы быстрого Фурье-преобразования. Спектры турбулентности.

Коротеева Екатерина Юрьевна, ст.преп.

# Типы преобразований Фурье

**Дискретное преобразование Фурье (ДПФ, DFT)** ставит в соответствие вектору конечной размерности  $N$  другой вектор той же размерности

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

- $N$  – число отсчетов входного сигнала за период времени  $T$
- $n$  - номер отсчета дискретизированного сигнала
- $k$  – номер выходного коэффициента ДПФ (номер гармоники выходного преобразования)

Рассчитать ДПФ сигнала  $N=4$ :  $x[n]=\{1,2,3,4\}$

# Типы преобразований Фурье

Рассчитать ДПФ сигнала  $N=4$ :  $x[n]=\{1,2,3,4\}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$k=0$

$$X[0]=x[0]*e^0+x[1]*e^0+x[2]*e^0+x[3]*e^0 = 1+2+3+4=10$$

$k=1$

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0]*e^{-j2\pi/4*0*1} + x[1]*e^{-j2\pi/4*1*1} + x[2]*e^{-j2\pi/4*2*1} + x[3]*e^{-j2\pi/4*3*1} \\ &= 1 + 2 * e^{-j\pi/2} - 3 * e^{-j\pi} - 4 * e^{-j3\pi/2} = 1 - 2j - 3 * 1 - 4 * (-j) * (-1) = -2 + 2j \end{aligned}$$

Ответ:  $X[k]=\{10, -2+2j, -2, -2-2j\}$

# Типы преобразований Фурье

- Если  $n$  будет меняться вне интервала  $[0, N-1]$ ?

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad n \in \mathbb{Z} \quad x[n + iN] = x[n]$$

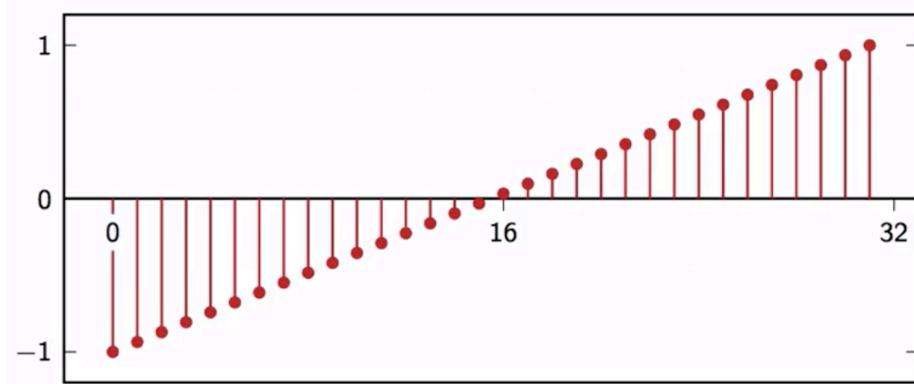
**Дискретные ряды Фурье** (ДРФ, DFS) ставят в соответствие периодической последовательности сигналов с периодом  $N$  другую периодическую последовательность

$$\tilde{x}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[n + iN] \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-nk}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

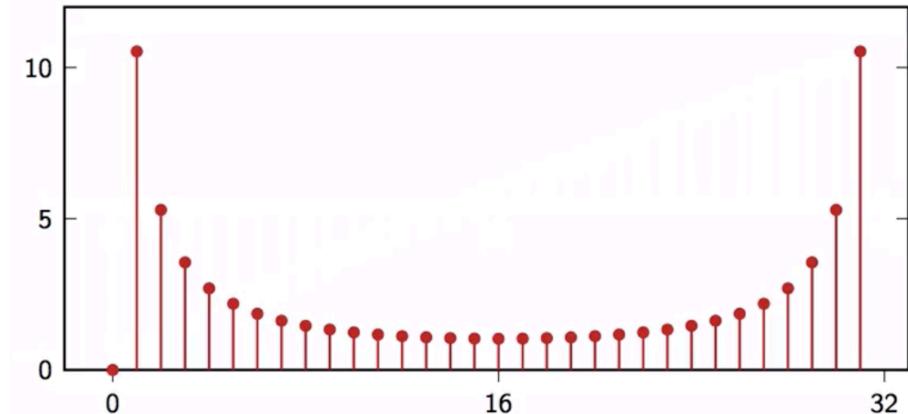
# Типы преобразований Фурье

Только  $N$  коэффициентов ДРФ несут информацию

- Пилообразный сигнал,  $N = 32$

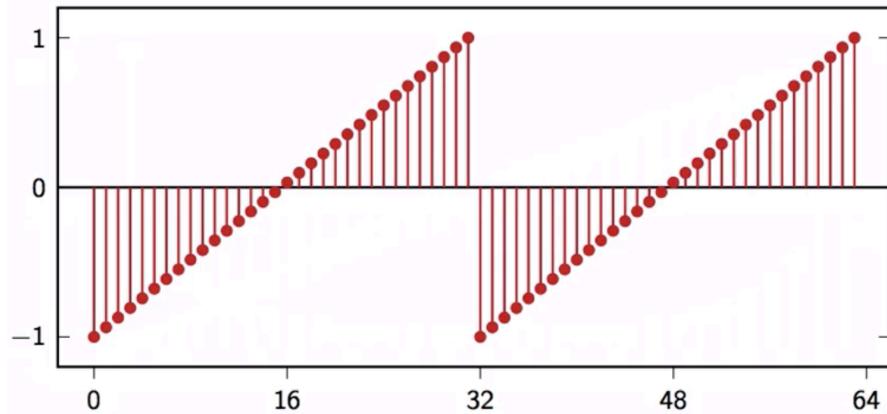


ДПФ сигнала

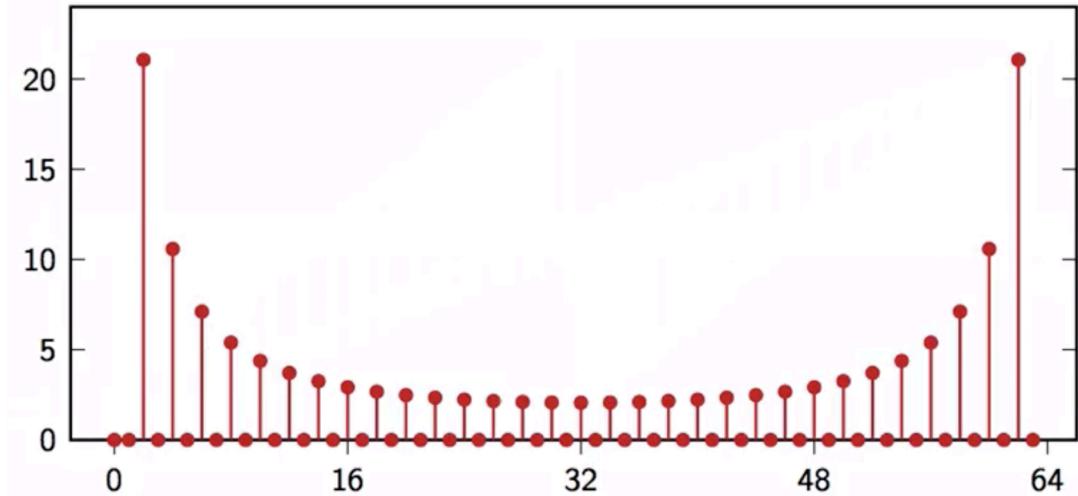


# Типы преобразований Фурье

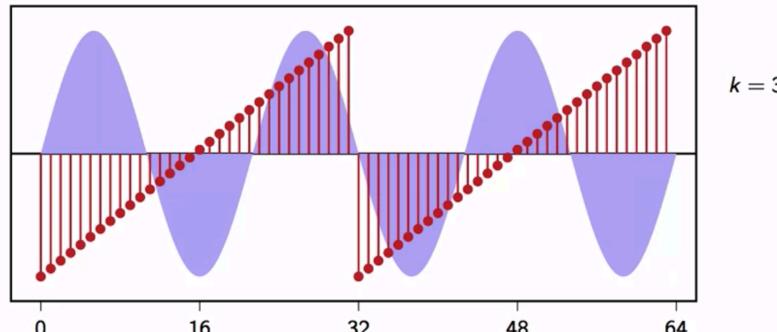
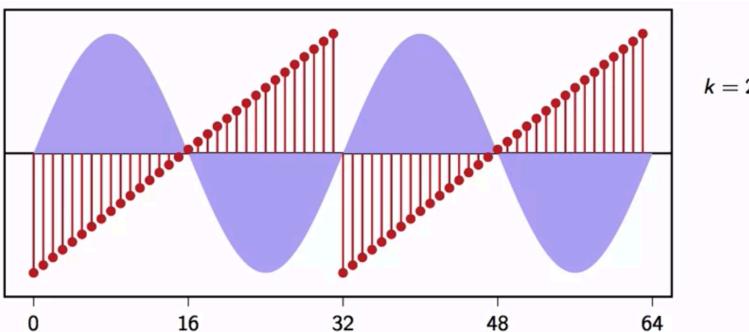
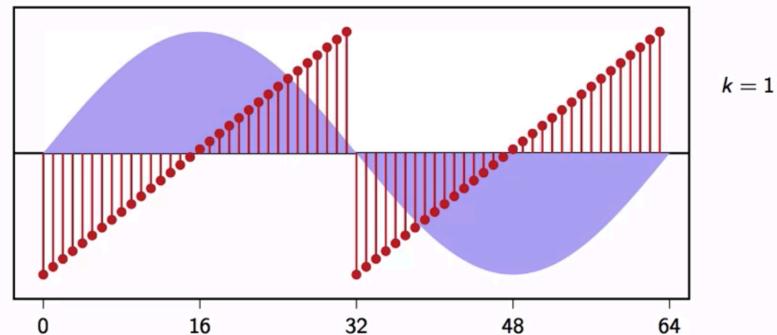
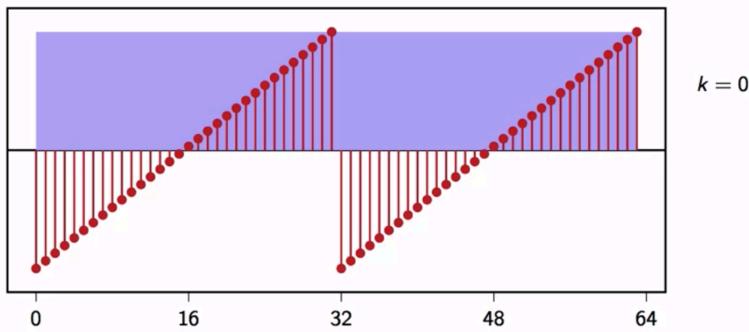
- Периодический пилообразный сигнал с периодом 2,  $N = 64$



ДПФ (ДРФ) сигнала



# Типы преобразований Фурье



- Для периодического сигнала  $y[n]$  с периодом  $L$

$$X_L[k] = \sum_{n=0}^{LM-1} y[n] e^{-j \frac{2\pi}{LM} nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, LM - 1$$

$$X_L[k] = \begin{cases} L \bar{X}[k/L], & k = 0, L, 2L, 3L, \dots \\ 0, & k \neq 0, L, 2L, 3L, \dots \end{cases}$$

# Типы преобразований Фурье

- Если  $N \rightarrow \infty$ ?

В пределе  $(2\pi/N)k \rightarrow \omega$ : 
$$\sum_n x[n] e^{-j\omega n} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

**Преобразование Фурье в дискретном времени** (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT):

- определено для  $x[n] \in \ell_2(\mathbb{Z})$
- ставит в соответствие дискретной последовательности непрерывную функцию

$$X(e^{j\omega}) = \langle e^{j\omega n}, x[n] \rangle$$

# Типы преобразований Фурье

## Преобразование Фурье в дискретном времени (DTFT):

- прямое преобразование - функция действительной переменной

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

периодическая с периодом  $2\pi$



определенна (основной период)  
на отрезке  $[-\pi; \pi]$

- обратное преобразование (если прямое существует):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

# Обобщенная дельта-функция

- ▶ DFT  $\{\delta[n]\} = 1$
- ▶ DTFT  $\{\delta[n]\} = \langle e^{j\omega n}, \delta[n] \rangle = 1$

Однако

▶ DFT  $\{1\} = N\delta[k]$

последовательность не является  
квадратично-суммируемой

▶ DTFT  $\{1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = ?$

Для сигналов, не удовлетворяющих условию абсолютной суммируемости, необходимо использовать **обобщенные функции**

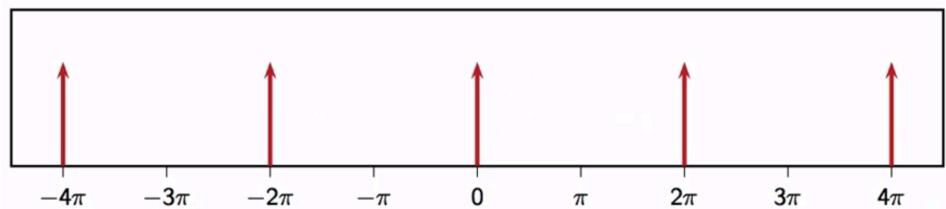
# Обобщенная дельта-функция

**Обобщенная дельта-функция Дирака** определена неявно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau)$$

Периодическое (с периодом  $2\pi$ ) расширение дельта функции - последовательность импульсов

$$\tilde{\delta}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



- ▶ DTFT  $\{1\} = \tilde{\delta}(\omega)$
- ▶ DTFT  $\{e^{j\omega_0 n}\} = \tilde{\delta}(\omega - \omega_0)$

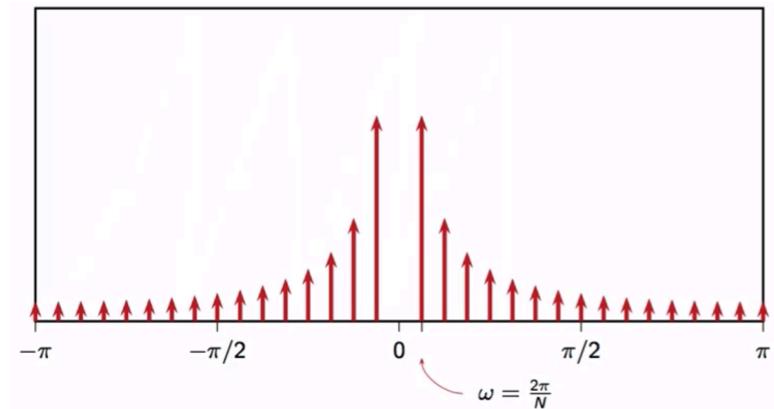
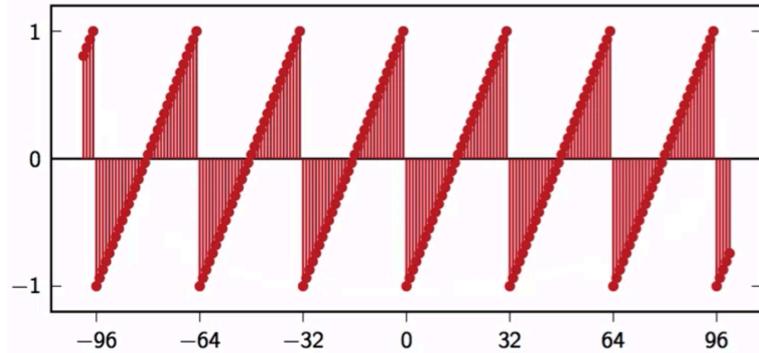
# Обобщенная дельта-функция

Переход от конечной последовательности  $x[n]$  к бесконечной:

1. периодическое расширение

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N]$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$



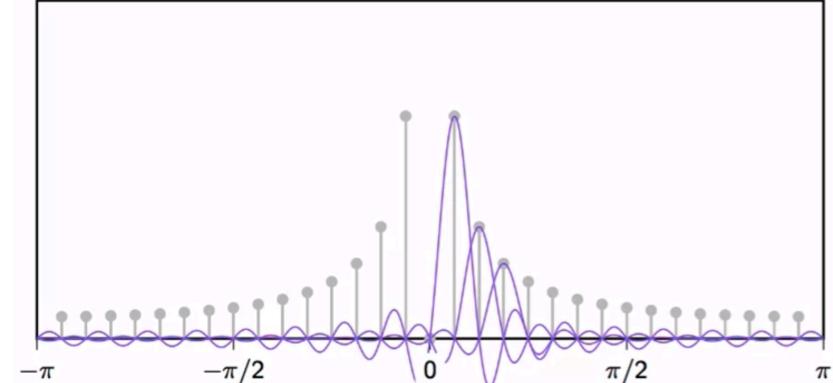
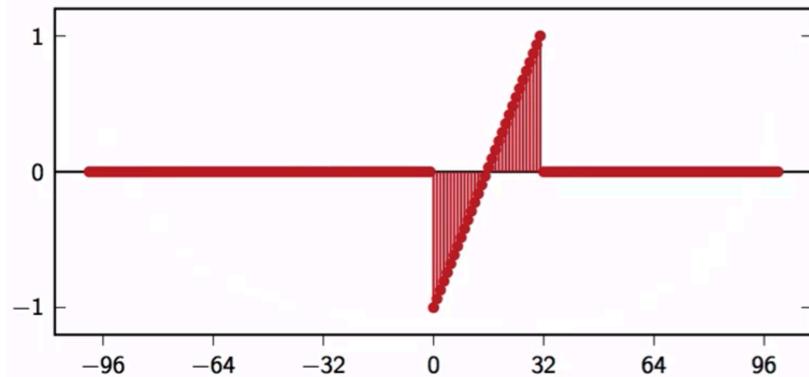
# Обобщенная дельта-функция

Переход от конечной последовательности  $x[n]$  к бесконечной:

2. дополнение нулями (zero-padding)

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \text{ или } n \geq N \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \Lambda\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \quad \Lambda(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\omega m}$$



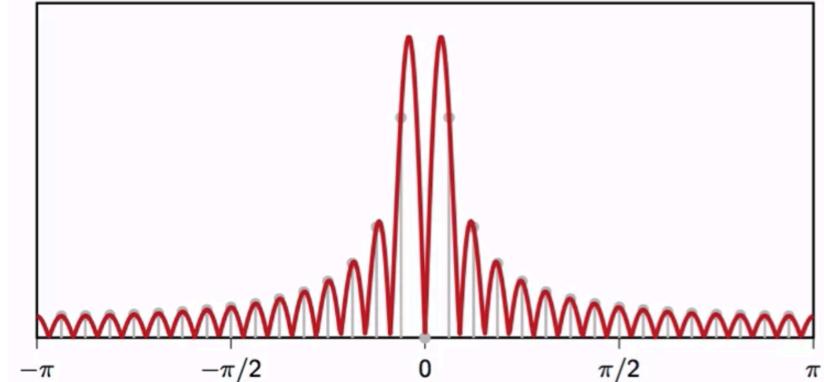
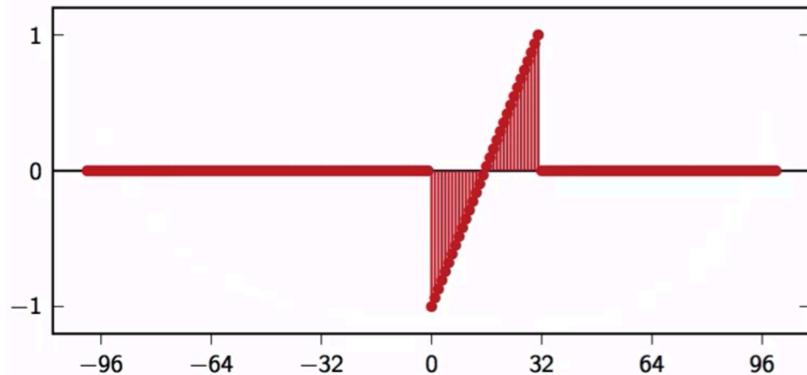
# Обобщенная дельта-функция

Переход от конечной последовательности  $x[n]$  к бесконечной:

2. дополнение нулями (zero-padding)

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \text{ или } n \geq N \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \Lambda\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \quad \Lambda(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\omega m}$$



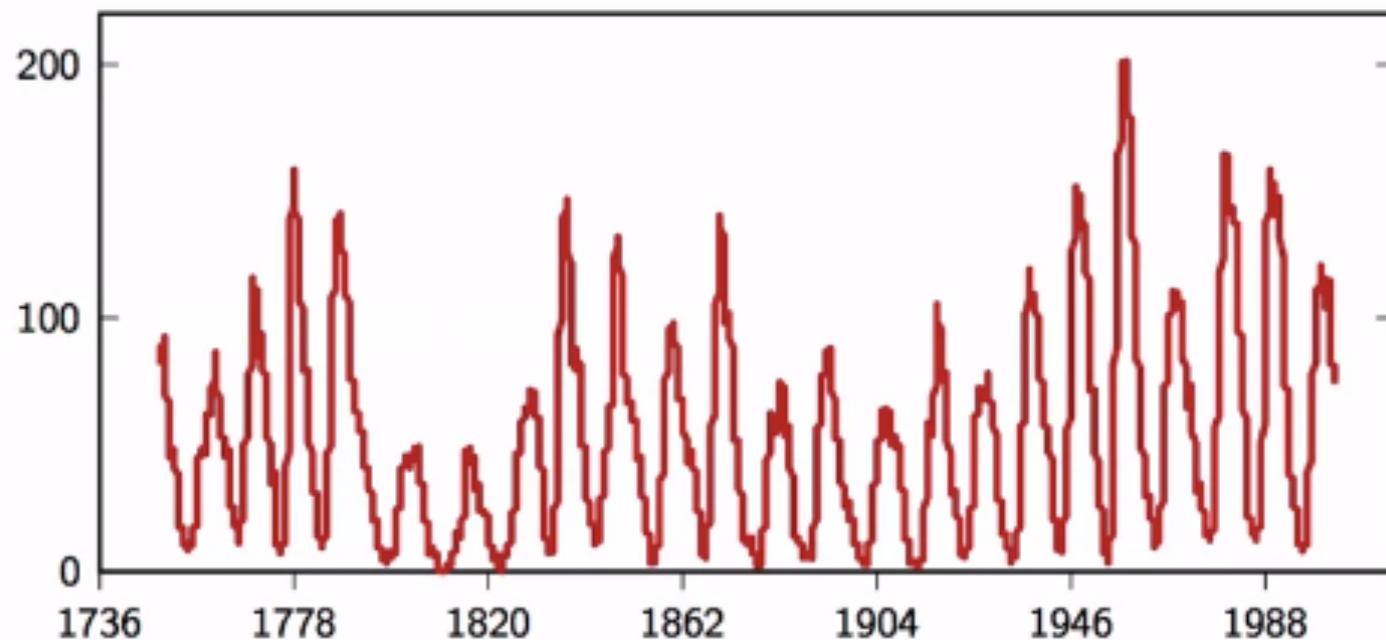
# Быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT)

- [https://nbviewer.jupyter.org/github/forsp/dig\\_proc\\_lect/blob/main/fft.ipynb](https://nbviewer.jupyter.org/github/forsp/dig_proc_lect/blob/main/fft.ipynb)

# Фурье-анализ в эксперименте. Пример 1.

# Фурье-анализ в эксперименте. Пример 1.

Возьмем известный в астрономии сигнал – данные по измерению солнечной активности с 1749 по 2003 гг (ежемесячные измерения, в сумме 2904 отсчета).



# ДПФ данных эксперимента. Пример 1.

Первые 100 коэффициентов DFT-преобразования:



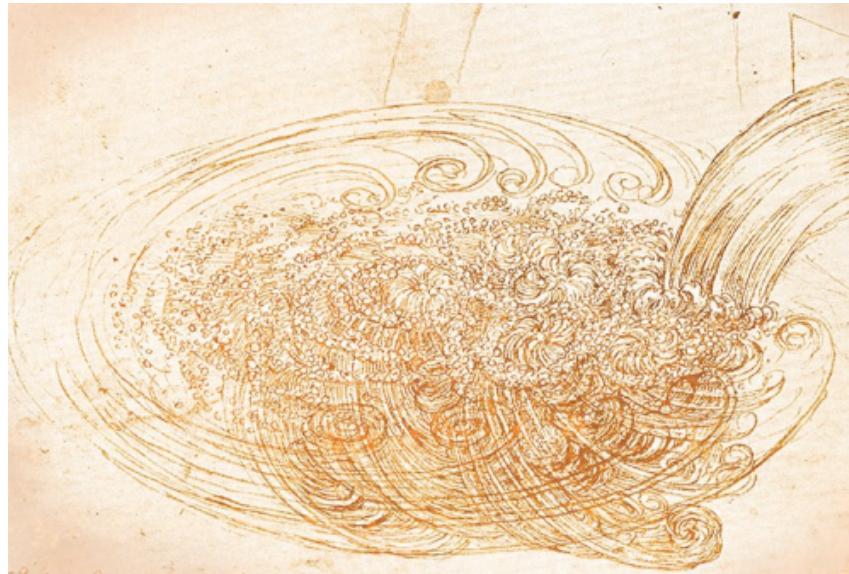
Основной период сигнала (22 цикла за 2904 месяца):

$$2904/22 \approx 11 \text{ (лет)}$$

## Пример 2. Спектры турбулентности.

## Пример 2. Спектры турбулентности.

В физике, **турбулентное** движение жидкости или газа предполагает **неупорядоченное течение**, в котором различные макроскопические параметры претерпевают хаотичное изменение во времени и пространстве



flickr.com

Турбулентные вихри.  
Рисунок Леонардо да Винчи

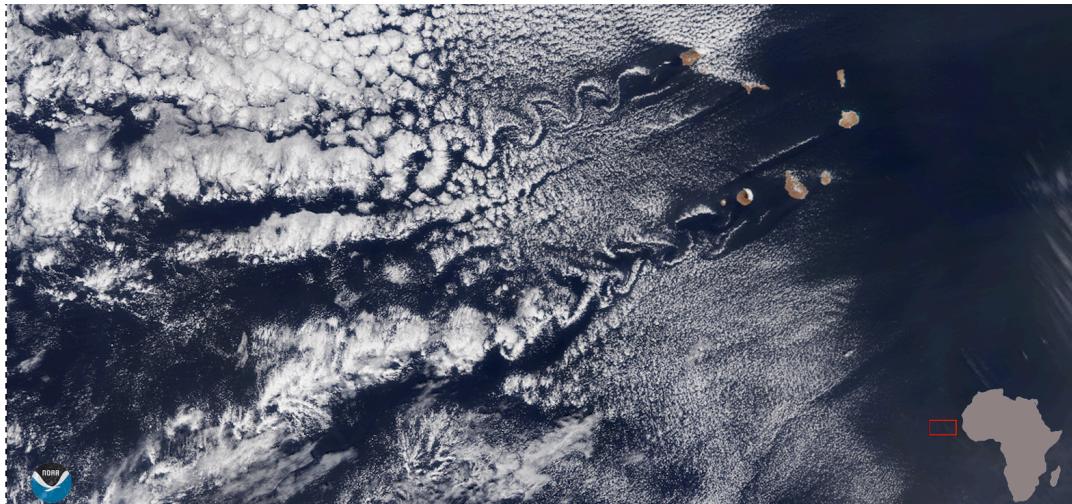
## Пример 2. Спектры турбулентности.

Тип потока жидкости или газа — ламинарный (гладкий) или турбулентный (неупорядоченный) — определяется безразмерным числом (**числом Рейнольдса**), характеризующим отношение инерционных сил к силам вязкого трения в жидкостях и газах:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$$

$\rho$  — плотность жидкости,  
 $u$  — скорость потока,  
 $L$  — характерная длина  
 $\mu$  - коэффициент дин. вязкости

острова Кабо Верде (спутник)



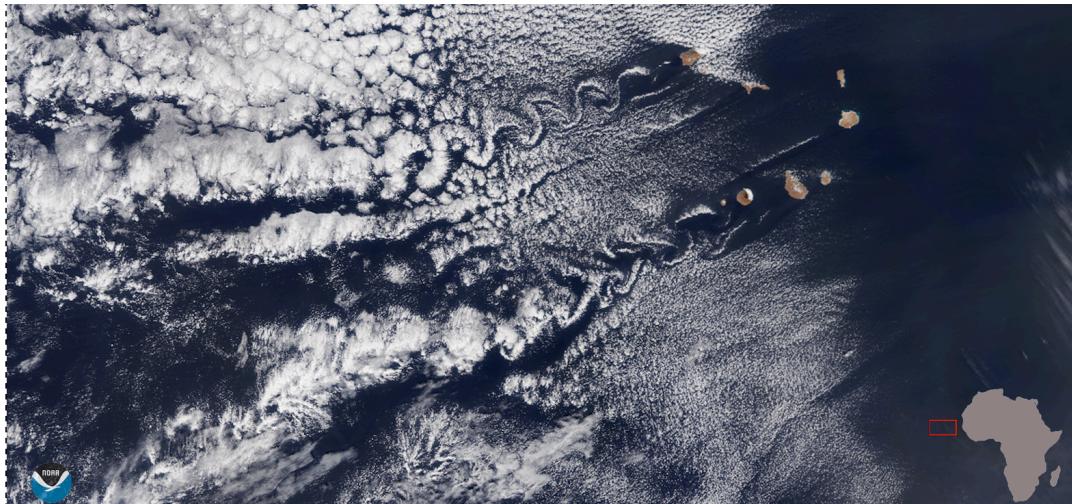
струя воздуха от свечи  
(шлирен-изображение,  
G. Settles 2009)

## Пример 2. Спектры турбулентности.

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$$

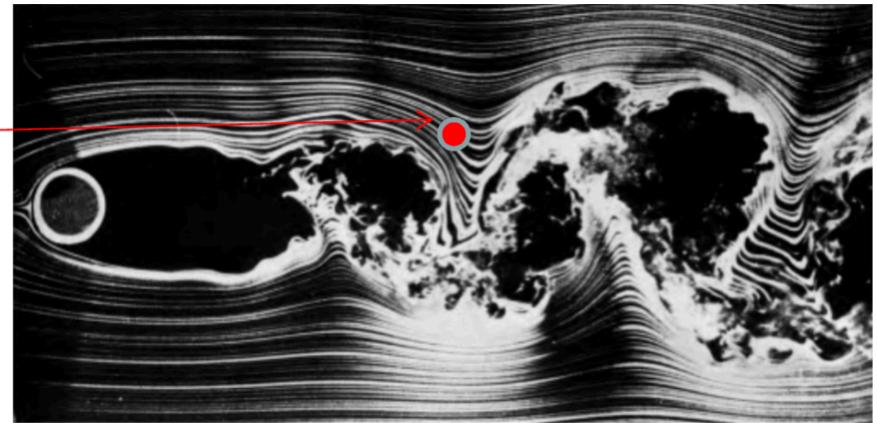
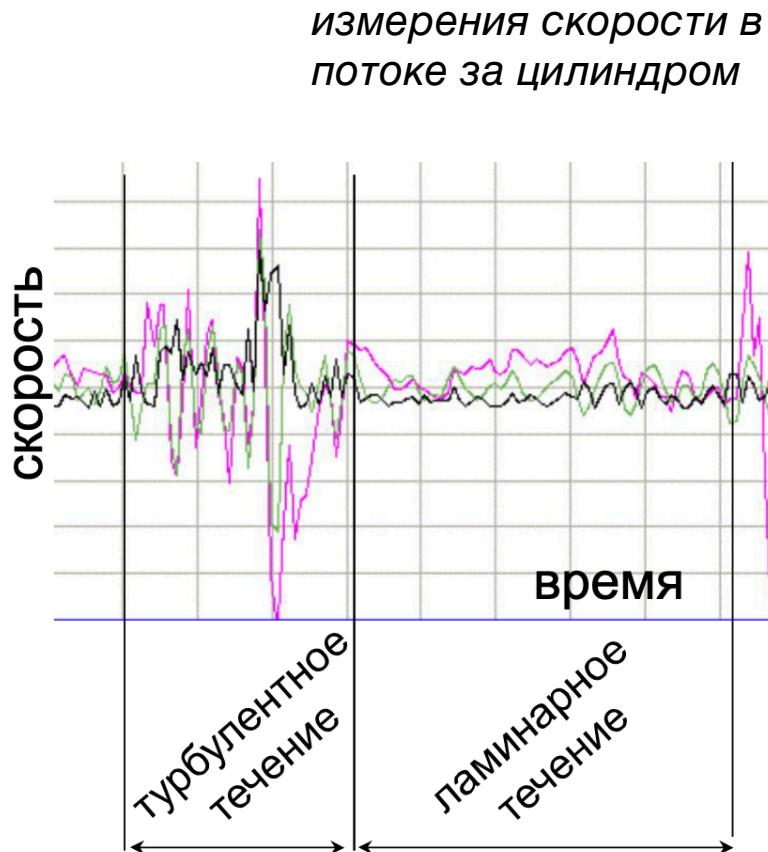
для каждого типа течения есть **критическое значение числа Рейнольдса**, определяющее переход от ламинарного течения к турбулентному

острова Кабо Верде (спутник)



струя воздуха от свечи  
(шлирен-изображение,  
G. Settles 2009)

## Пример 2. Спектры турбулентности.



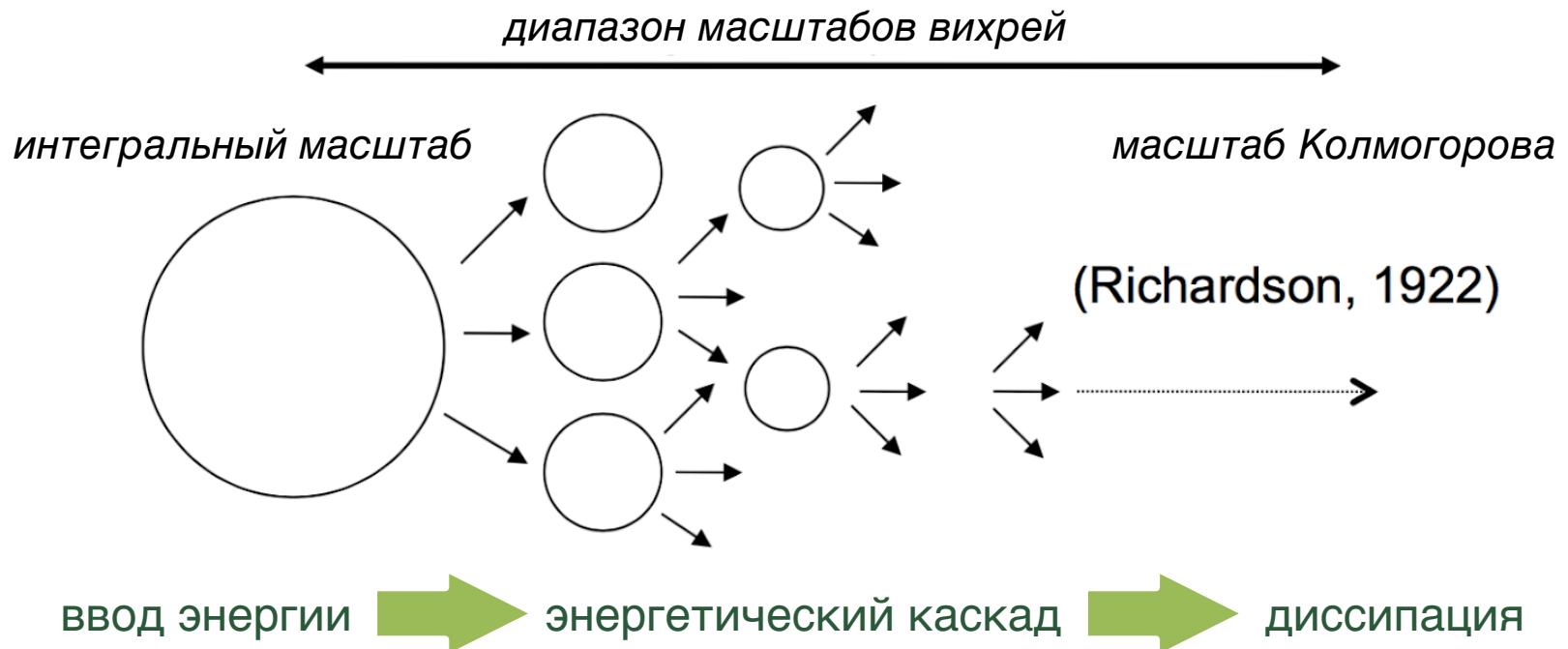
Турбулентность возникает на фоне упорядоченного движения  
(дорожка Кармана)

Явление чередования ламинарной и турбулентной форм движения называется **перемежаемостью**

# Турбулентный каскад

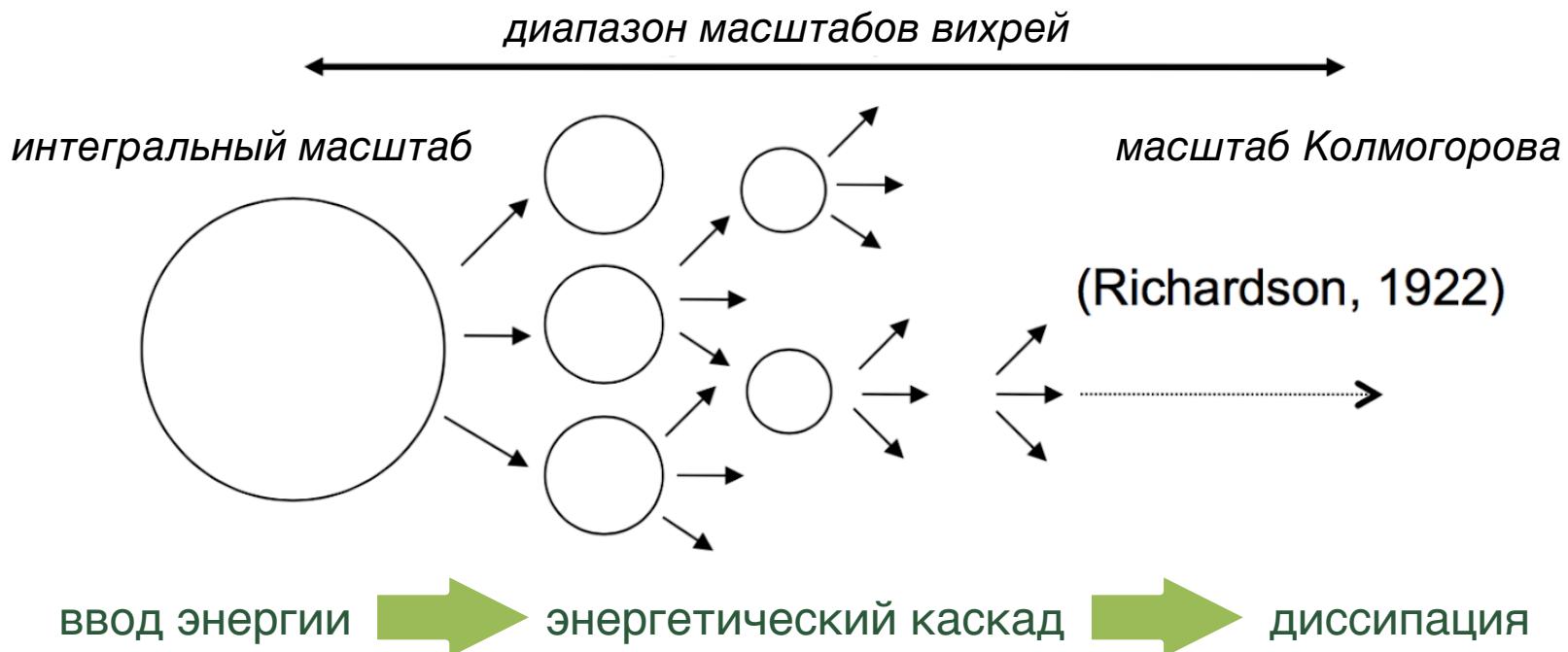
Все турбулентные течения имеют общие свойства:

- трехмерный нестационарный характер
- наличие в потоке как крупных (когерентных), так и очень мелких хаотичных структур

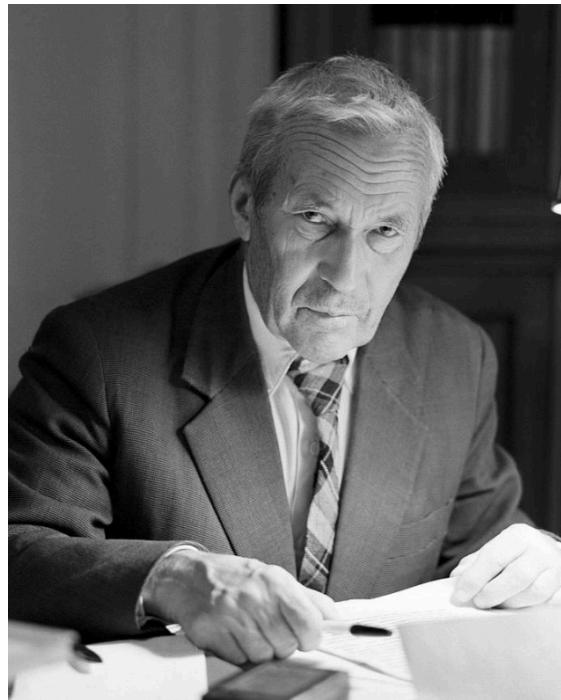


# Турбулентный каскад

Перенос энергии в турбулентном потоке происходит **каскадным образом**: Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям ( $L$ ) и далее передается всё более и более мелким вихревым структурам. В итоге она доходит до сверхмаленьких вихрей (имеющих Колмогоровские масштабы,  $d$ ). Они диссирируют кинетическую энергию и переводят ее в тепло.



# Теория турбулентности (1941)



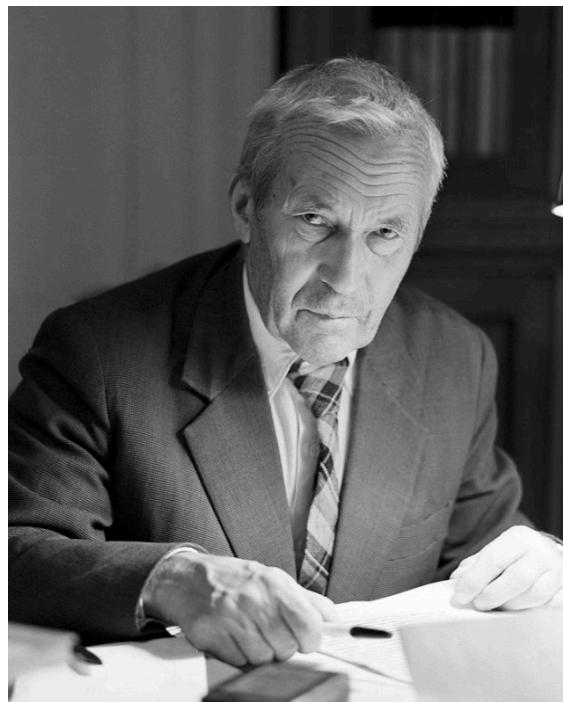
А.Н. Колмогоров (1903–1987)

## 1) Гипотеза *локальной изотропии*:

В случае турбулентности с достаточно большим числом Рейнольдса многомерные распределения вероятностей для относительных скоростей не зависят от среднего течения и граничных условий, а зависят только от вязкости и скорости диссипации.

$$\nu \left[ \frac{L^2}{T} \right] \quad \epsilon \left[ \frac{L^2}{T^3} \right]$$

# Теория турбулентности (1941)



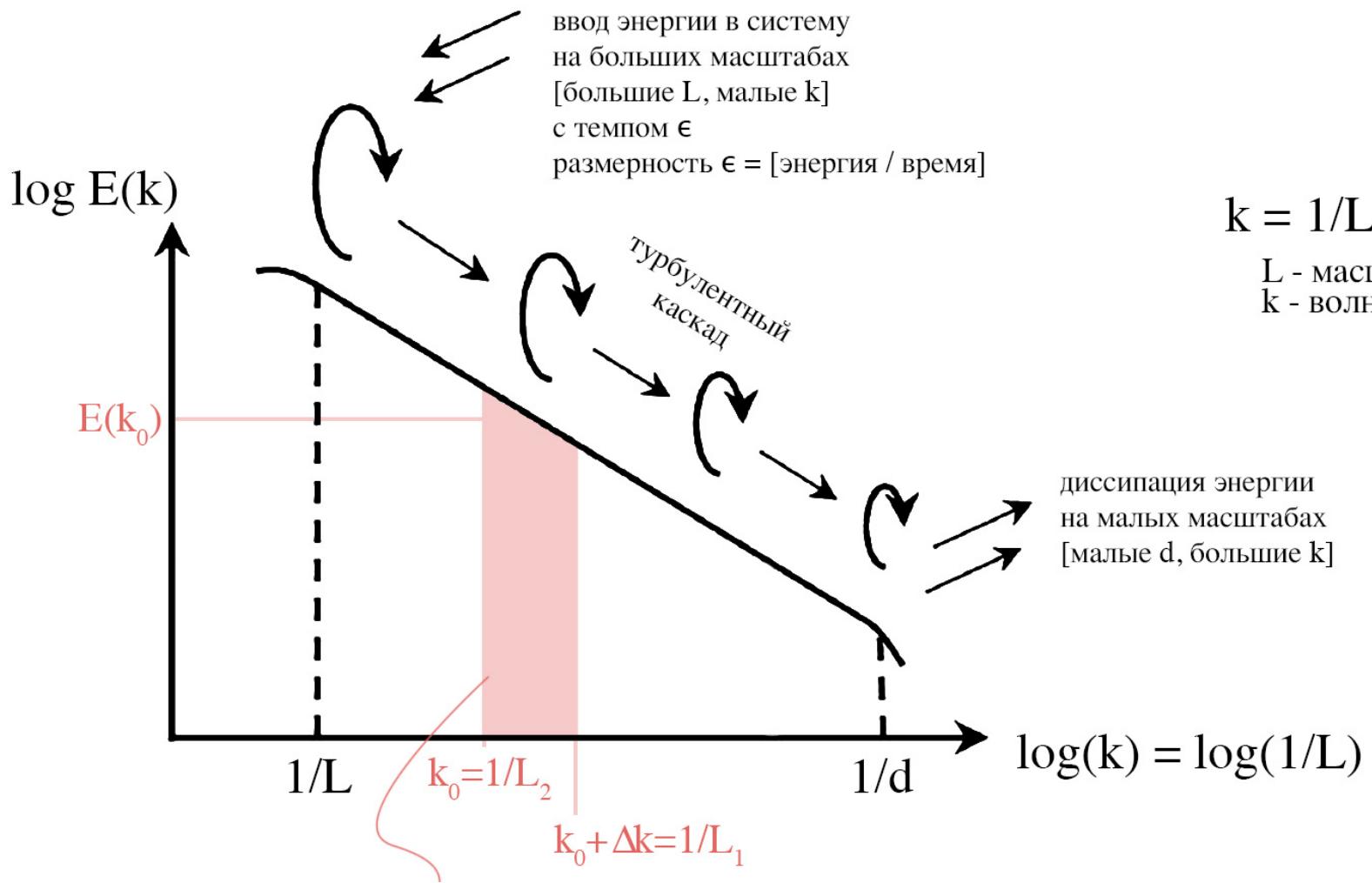
А.Н. Колмогоров (1903–1987)

## 2) Гипотеза *подобия*:

Для однородной изотропной турбулентности скорость диссипации энергии не зависит от макроскопических параметров, а зависимость *спектра энергии* от масштаба и темпа диссипации носит универсальный характер:

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

С - постоянная Колмогорова ( $\sim 1.5$ )  
k - волновое число



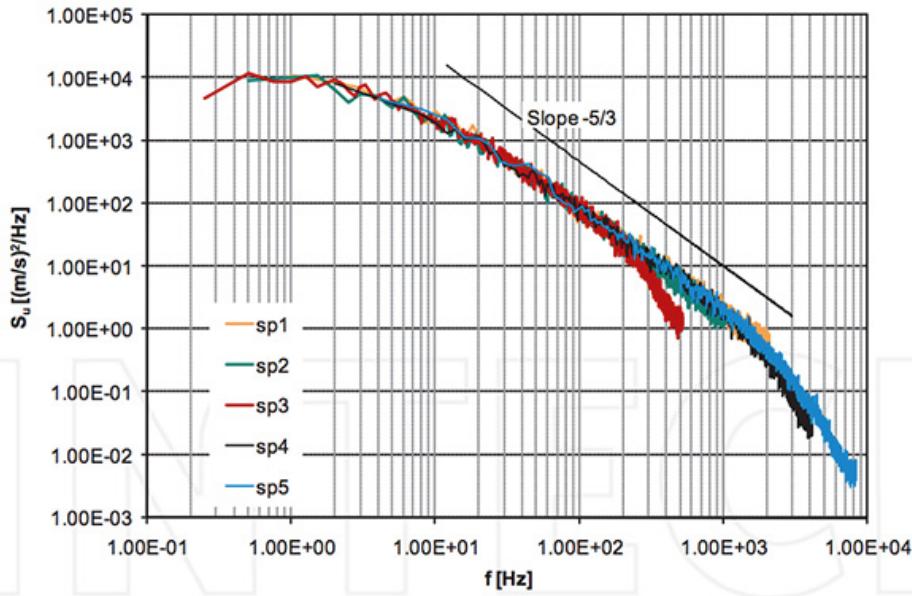
площадь под графиком (прямоугольник):

$$[\text{полная энергия на масштабах от } L_1 \text{ до } L_2] = E(k_0) \cdot \Delta k$$

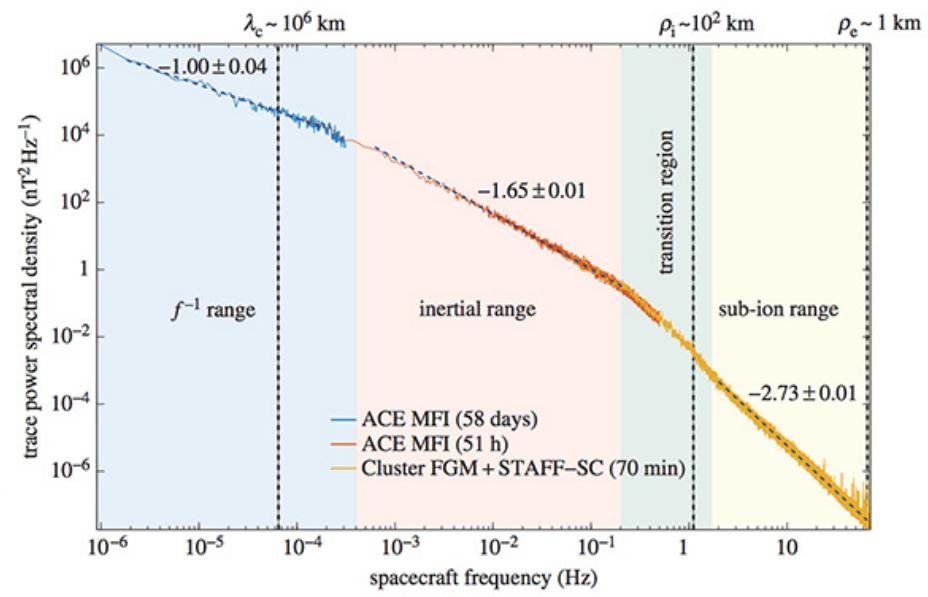
размерность спектра  $E(k) = [\text{энергия} \cdot \text{длина}]$

энергетический спектр турбулентного каскада в терминах волнового числа  $k = 1/L$   
(elementy.ru)

# Экспериментальное подтверждение



моделирование турбулентности  
ветровых тоннелей;  
рисунок из книги *Wind Tunnel Designs  
and Their Diverse Engineering  
Applications*.



измерения турбулентности солнечного  
ветра (в перпендикулярном  
направлении относительно магнитного  
поля);  
рисунок из статьи K. H. Kiyani et al.,  
2015. *Phil. Trans. R. Soc. A*.37320140155

# Экспериментальное подтверждение

Аппроксимация спектров пульсаций из термографических измерений импактной затопленной струи жидкости

