[redacted]

15. Логарифмические и показательные уравнения

Методы решения показательных и логарифмических уравнений. Уравнения с параметром.

15.1. Справочный материал

Логарифмические уравнения

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b, \quad a>0, \quad a\neq 1,$$

с областью допустимых значений $x>0$ имеет решение $x=a^b$.

Решение других логарифмических уравнений стараются свести к решению простейших логарифмических уравнений.

Нужно помнить, что *не всегда допустима замена функции* $y=a^{\log_a f(x)}$ *на* $y=f(x)$. Область существования функции $y=a^{\log_a f(x)}$ включает в себя лишь те x из области существования $y=f(x)$, где выполнено неравенство $f(x)>0$. Поэтому замена в уравнении функции $y=a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y=f(x)$ может привести к появлению *посторонних корней*. Если же в точках множества M функция $y=f(x)$ принимает только положительные значения, то равенство

$$a^{\log_a f(x)}=f(x)$$

является тождеством на M и эта замена есть равносильное преобразование на M.

При решении уравнений, содержащих логарифмические функции, применяются различные преобразования, сводящие данное уравнение к виду, удобному для потенцирования, т.е. к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Так, применяется замена функций $y = (\log_a f(x) + \log_a g(x))$ на функцию $y = \log_a(f(x) \cdot g(x))$, функции $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцию $y = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, функции $y = N \log_a f(x)$ на функцию $y = \log_a(f(x))^N$. Выполняя такие преобразования, следует помнить, что они сохраняют равносильность уравнений на некотором множестве M только в том случае, когда все входящие в уравнения функции определены на M.

Показательные уравнения

Показательным называют уравнение, в котором неизвестная величина входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = b.$$

Его решением при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ является

$$x = \log_a b.$$

Хотя при отдельных значениях a и b могут быть и другие решения. Например, если $a = 1$, $b = 1$, то любое число x является его решением.

Для решения произвольного показательного уравнения его стараются свести к решению простейших уравнений.

15.2. Примеры

Пример 1. Решить уравнение

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 5 = 0.$$

Решение. Поскольку квадратное уравнение

$$2y^2-3y-5=0$$

имеет два корня $y_1=\frac{5}{2}$ и $y_2=-1$, то исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\log_2 x=\frac{5}{2} \text{ и } \log_2 x=-1.$$

Уравнение $\log_2 x=\frac{5}{2}$ имеет решение $x_1=2^{5/2}$, а решение уравнения $\log_2 x=-1$ есть $x_2=1/2$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня $x_1=2^{5/2}$ и $x_2=1/2$.

Ответ: $x_1=2^{5/2}$, $x_2=1/2$.

Пример 2. Решить уравнение $2^{\log_2(x-4)}=2x-7$.

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенству $x-4>0$, т.е. $x>4$. На ОДЗ выполняется тождественное равенство $2^{\log_2(x-4)}\equiv x-4$, поэтому исходное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$x-4=2x-7.$$

Единственный корень этого уравнения $x=3$ не лежит в ОДЗ исходного уравнения. Значит оно не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$$

Решение. ОДЗ состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x-1>0$ и $x>0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $1<x<+\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2((x-1)x)=1$ или уравнению $x^2-x=2$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-1$. Из них ОДЗ принадлежит только x_1, значит, $x_1=2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1=2$.

Пример 4. Решить уравнение

$$6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Используя свойство членов пропорции, имеем

$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}}=\frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$$

или после упрощения

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}=1$$

и логарифмирования, получаем $4-x=0$, откуда следует, что $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 5. Решить уравнение

$$6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 9^x. Имеем

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x-13\left(\frac{2}{3}\right)^x+6=0.$$

Обозначая $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$ и производя замену переменных, получаем уравнение

$$6y^2-13y+6=0,$$

его корнями будут $y_1=3/2$, $y_2=2/3$. Возвращаясь к переменному x, получим уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-1$.

Пример 6. Решить уравнение

$$|x-2|^{10x^2-1}=|x-2|^{3x}.$$

Решение. Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$|x-2|=1,$$

системе

$$\begin{cases}|x-2|=0,\\ 10x^2-1>0,\\ 3x>0,\end{cases}$$

и системе

$$\begin{cases}10x^2-1=3x,\\ |x-2|\neq 0.\end{cases}$$

Уравнение имеет два корня $x_1=3$, $x_2=1$. Первая система имеет решение $x_3=2$.

Вторая система имеет два решения $x_4=1/2$, $x_5=-1/5$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=1/2$, $x_5=-1/5$.

15.3. Аудиторные задачи

Решить уравнения:

1. $\log_2(2x+1)-\log_2 x=\log_4 64$.

2. $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0$.

3. $4\log_2 x^2=\log_2^2(-x)+16$.

4. $\log_3 44=\log_3 5\log_5 11-2\log_3(x-2)$.

5. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}[3(2x+1)]+\log_{\sqrt{3}}3=\log_3(2x+1)^2$.

6. $\log_{16}x+\log_8 x+\log_2 x=\dfrac{19}{12}$.

7. $\dfrac{1}{2}\log_3 x^2+3\log_3\sqrt[3]{x-2}=\dfrac{1}{3}\log_3 8-\log_3\dfrac{1}{x+6}$.

8. $\lg[x(2x-3)]+\lg\dfrac{4x}{2x-3}=0$.

9. $\log_2[(x+1)(2x-3)]+\log_2\dfrac{2(x+1)}{2x-3}=3$.

10. $\log_{1/4}\log_{x-2}16=-1$.

Найти наибольшие корни уравнений:

11. $\log_3^2 x-\log_3 x-3=2^{\log_2 3}$.

12. $\log_3 x+\log_x \dfrac{1}{9}=1$.

13. $\lg^2 x^2-\lg x^5+1=0$.

14. $\log_2^2\dfrac{x+2}{4}=3^{\log_{\sqrt{3}}2}$.

15. Найти произведение корней уравнения $\log_{1/3}^2\dfrac{x}{9}+\log_{1/3}^2\dfrac{x}{3}=1$.

Решить уравнения:

16. $3^{\log_2 x^2}5^{\log_2 x}=2025$.

17. $\log_6\sqrt{2^{x(x-1)}}+3\log_6 3=\log_x x^3$.

18. $\log_x(8x^2)=\sqrt{\log_x 8x^4}$.

19. $x^{4-\lg x}=1$.

20. $4^{\log_5 x}+x^{\log_5 4}=32$.

21. Найти значение выражения $x_0(x_0-10)$, если x_0 — корень уравнения $\lg\sqrt[3]{271+3^{\sqrt{3x}}}=1$.

22. Найти значение выражения $k\cdot p$, если k — количество корней, а p — произведение корней уравнения $\log_{0,5z}\dfrac{1}{2x}+\log_x^{-2}0,5=1$.

Решить показательные уравнения:

23. $\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$.

24. $3^{2-x}-6\cdot 3^{2x}=3^{2x+1}$.

25. $2\cdot 6^x+3\cdot 6^{x+3}=325\cdot 3^{-1}$.

26. $49^{x+1}+55\cdot 7^{x+1}-56=0$.

27. $3^{2x+5}-2^{2x+7}+3^{2x+4}-2^{2x+4}=0$.

28. $4\cdot 3^{2x}-2^{2x-1}-3^{2x+1}-2^{2x}=0$.

29. $6^{x-2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-2}{2}}=66$.

30. $(x^2-2x+2)^{x^2-x}=(x^2-2x+2)^{4x-6}$.

31. $3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0$.

32. $5^x-1=\sqrt{6+2\cdot 5^x}$.

33. $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}}=|x-4|^2$.

34. Найти произведение корней уравнения $x^{\log_2 x}=\dfrac{x^3}{4}$.

35. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{x-1,5}\left(2^x+8\cdot 2^{-x}-6\right)=0$.

36. Найти сумму корней уравнения $2^{x^2}+2^{x^2+3}-2^{x^2+1}=7\cdot 2^{5x+6}$.

37. Пусть x_1 наименьший корень уравнения

$$x^{\lg 2,4}=2,4^{\lg x},$$

кратный 3. Найти значение выражения

$$24^{\lg(24+x_1)\cdot\lg^{-1}24}.$$

Решить уравнения:

38. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

39. $2^{3x^2-2x^3}=\dfrac{x^2+1}{x}$.

40. $\log_7(x+2)=6-x$.

41. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\dfrac{x^2-5x+6}{\ln(a+x)}=$ имеет ровно один корень.

42. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$$

имеет хотя бы одно решение.

43. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $25^x+3|a$ $5^x+36=a^2$ не имеет корней.

44. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

45. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет два решения.

15.4. Домашнее задание

Решить логарифмические уравнения:

1. $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=3\log_5 2$.

2. $\log_{\frac{3}{5}} x+4\log_{\frac{5}{3}} x=3$.

3. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x+5)-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

4. $\log_{0,1}[x(x-7)]-\log_{0,1}\dfrac{9(x-7)}{x}=0$.

5. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=\dfrac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x^{\log_2 x}}=\log_{(x-1)}(x-1)^2$.

7. Найти значение выражения $\dfrac{k+2}{x_0}$, если k — число корней уравнения $\log_{2x+3}(5x^2+11x+3)=2$, а x_0 — его положительный корень.

8. Найти сумму корней уравнения $[\log_{0,4}(x+7)+\log_{0,4}(1-x)]\cdot(x^2-8x-20)=0$.

Решить показательные уравнения:

9. $9^x-3^x-6=0$.

10. $\left(\dfrac{14}{23}\right)^{x+\frac{2}{\sqrt{x}}}=\left(\dfrac{23}{14}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-x-1}$.

11. $4\cdot 7^{2x+4}-3^{2x+6}-2\cdot 7^{2x+3}+3^{2x+3}=0$.

12. $5\cdot 5^{-2x}+4\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=1$.

13. $7^{2x+1}+4\cdot 21^x-3^{2x+1}=0$.

14. $11-3^x=\sqrt{3^x-5}$.

15. $|1-3x|^{\sqrt{5x^2+7x-2}}=|1-3x|^2$.

16. Найти значение выражения $\dfrac{x_0+5}{x_0}$, если x_0 — корень уравнения $2\cdot 16^x-2^{4x}=15+4^{2x-2}$.

17. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{64^{x+3}}=\left(\sqrt[7]{8^{x+3}}\right)^{7x-35}$.

18. Найти сумму корней уравнения $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\log_3(x^2-0,5x-9)}=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\log_2(7-0,5x)}$.

Решить уравнения:

19. $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

20. $3^x=10-\log_2 x$.

21. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

22. $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\cos x}+(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\cos x}=\dfrac{5}{2}$.

23. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $(x-2a)\log_2(x-1)=0$ имеет ровно один корень.

24. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $4^x+3|a|\cdot 2^x+49=a^2$ не имеет корней.

25. Найти множество всех пар (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a\cdot e^x+b=e^{ax+b}.$$

15.5. Примерный тест

1. Выражение $\dfrac{x}{x+1}+1$, где x — корень уравнения

$$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7,$$

равно

1) $\dfrac{31}{16}$; 2) $\dfrac{33}{17}$; 3) $\dfrac{35}{18}$; 4) $\dfrac{37}{19}$; 5) $\dfrac{39}{20}$.

2. Произведение корней уравнения

$$\log_{25}x^2+2\log_{49}7=\log_x 25$$

равно

1) 5; 2) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{1}{125}$; 4) 125; 5) 1.

3. Корень уравнения

$$4\cdot 0,5^{\frac{x+1}{x}}-0,5^{\frac{2x+1}{x}}=14$$

принадлежит промежутку

1) $(0, 1)$; 2) $(-2, 0)$; 3) $(-3, -1)$; 4) $(1, 3)$; 5) $(4, 5)$.

4. При всех $a\leqslant 1$ решениями уравнения

$$144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$$

являются числа

1) $\varnothing$; 2) $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; 3) $\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; 4) $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1+a})$; 5) $-\log_{12}(1+\sqrt{1+a})$.

15.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $\frac{1}{6}$; **2.** 4, $\frac{1}{2}$; **3.** -16; **4.** $\frac{5}{2}$; **5.** 0; **6.** 2; **7.** 6; **8.** $-\frac{1}{2}$; **9.** -3; **10.** 4; **11.** 27; **12.** 9; **13.** 10; **14.** 14; **15.** 27;**16.** 4; **17.** 3; **18.** Нет корней; **19.** 1, 10000; **20.** 25; **21.** 24; **22.** 0,5; **23.** 1; **24.** 0; **25.** -1; **26.** -1; **27.** -1; **28.** $\frac{1}{2}$; **29.** 4; **30.** 1, 2, 3; **31.** 1; **32.** 1; **33.** -4, -1; **34.** 8; **35.** 3,5; **36.** 5; **37.** 27; **38.** 2. *Указание*: разделить обе части уравнения на 2^x и воспользоваться свойством монотонности показательной функции; **39.** 1. *Указание*: сравнить наибольшее значение функции, стоящей в левой части уравнения, с наименьшим в правой; **40.** 5. *Указание:* функция, стоящая в правой части уравнения убывает, а в левой — возрастает; **41.** $-3<a<-2$ или $a=-1$; **42.** $a\in[2,+\infty)$; **43.** $|a|\leqslant 6$; **44.** При $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$, при остальных a уравнение не имеет решений; **45.** $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

Домашнее задание:

1. 3; **2.** $\frac{5}{3}$; **3.** 1; **4.** -3; **5.** 2; **6.** $2^{\sqrt{2}}$; **7.** 1; **8.** -8; **9.** 1; **10.** 49; **11.** $-\frac{3}{2}$; **12.** 1; **13.** -1; **14.** 2; **15.** $\frac{1}{3}$, -2, $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$; **16.** 6; **17.** 4; **18.** 0; **19.** 3; **20.** 2; **21.** 1; **22.** $\pm\arccos(\log_{2+\sqrt{3}} 2)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; **23.** $a\leqslant 0,5$ или $a=1$; **24.** $|a|\leqslant 7$; **25.** $(1, 0)$.

[redacted]