[redacted]

17. Производная и ее геометрический смысл

Вычисление производных в точке. Уравнение касательной к графику функции.

17.1. Справочный материал

Операцию взятия производной называют *дифференцированием.* Функцию, у которой существует производная в точке x_0 называют *дифференцируемой* в точке x_0.

Производные элементарных функций

$$(C)'=0; \tag{1}$$

$$(kx+b)'=k; \tag{2}$$

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha\in\mathbb{R}; \tag{3}$$

$$(e^x)'=e^x; \tag{4}$$

$$(a^x)'=a^x \ln a; \tag{5}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}; \tag{6}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \tag{7}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{8}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{9}$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{10}$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{11}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{12}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{13}$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{14}$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{15}$$

Правила дифференцирования

Пусть C — постоянная; u, v — дифференцируемые функции. Тогда

$$(Cu)' = Cu'; \tag{16}$$

$$(u+v)' = u' + v'; \tag{17}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{18}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \tag{19}$$

$$(\varphi(f(x))') = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x), \tag{20}$$

где $\varphi(f(x))$ — сложная функция.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0), \tag{21}$$

где $(x_0; y_0)$ — точка касания; $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной (или тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX).

17.2. Примеры

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = 5x^7$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования (16), получим $f'(x) = (5x^7)' = 5(x^7)'$.

Используя формулу (3), имеем

$$f'(x) = 5(x^7)' = 5 \cdot 7x^{7-1} = 35x^6.$$

Ответ: $f'(x) = 35x^6$.

Пример 2. Вычислить значение производной функции

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{2x + 5} \text{ при } x = 1.$$

Решение. 1) Полагая $u = 3x^2 - x + 7$, а $v = 2x + 5$, имеем $f(x) = \dfrac{u}{v}$.

Производная функции такого вида может быть взята по правилу дифференцирования (19):

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Вычислим отдельно производные функций u и v:

$$u' = (3x^2 - x + 7)' = 3 \cdot 2x - 1 = 6x - 1;$$

$$v' = (2x+5)' = 2.$$

Подставляя найденные выражения в последнюю дробь, имеем

$$f(x) = \frac{(6x-1)(2x+5)-(3x^2-x+7)\cdot 2}{(2x+5)^2} =$$

$$= \frac{12x^2-2x+30x-5-6x^2+2x-14}{(2x+5)^2} = \frac{6x^2+30x-19}{(2x+5)^2}.$$

2) Найдем значение производной при $x=1$:

$$f'(1) = \frac{(6\cdot 1+30\cdot 1-19)}{(2\cdot 1+5)^2} = \frac{17}{49}.$$

Ответ: $\frac{17}{49}$.

Пример 3. Вычислить значение производной функции

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2 \text{ при } x = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. 1) Воспользовавшись правилом дифференцирования (17), получим

$$f'(x) = \left(\sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2\right)' = (\sqrt{3}\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)' - \left(\frac{3}{\pi}x^2\right)'.$$

Применяя формулы (16), (8), (1) и (3), имеем

$$f'x = \sqrt{3}\cos x + 0 - \frac{3}{\pi}2x = \sqrt{3}\cos x - \frac{6}{\pi}x.$$

2) Вычислим значение производной в точке $x = \frac{\pi}{6}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Пример 4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение. 1) Уравнение касательной, согласно формуле (21), записывают в виде $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0;\ y_0)$ – точка касания. Абсцисса x_0 точки пересечения графика заданной функции с осью Oy равна 0, а ордината $y_0 = f(0) = \dfrac{3 \cdot 0^2 + 2}{0 - 1} = -2$. Таким образом, точка касания $(0;\ -2)$.

2) Найдем производную заданной функции в точке x_0. Используя правило дифференцирования (19) и формулу (3), получим

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2+2}{x-1}\right)' = \frac{(3x^2+2)'(x-1) - (3x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2x(x-1) - (3x^2+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{6x(x-1) - 3x^2 - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x-1)^2}.$$

3) В точке $x_0 = 0$ имеем

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 2}{(0-1)^2} = -2.$$

4) Искомое уравнение касательной имеет вид

$$y - (-2) = -2(x - 0), \text{ или } y + 2 = -2x,\ \ y = -2x - 2.$$

Ответ: $y = -2x - 2$.

Пример 5. Вычислить значение производной функции $f(x) = \sin x \times$ $\times \sqrt{2x} + 2x + 3$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. $f'(x) = (\sin x \cdot \sqrt{2x})' + (2x)' + 3' = (\sin x)'\sqrt{2x} + \sin x \cdot (\sqrt{2x})' + 2 =$ $\cos x \cdot \sqrt{2x} + \sin x \cdot \dfrac{(2x)'}{2\sqrt{2x}} + 2 = \cos x \cdot \sqrt{2x} + \dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}} + 2$. Здесь мы последовательно воспользовались формулами (17), (16), (1), (18), (8), (3 при $n = \dfrac{1}{2}$) и (20). Найдем $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \dfrac{\pi}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2 \cdot \frac{\pi}{2}}} + 2 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 =$ $= \dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi} + 2$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi} + 2$.

Пример 6. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) =$ $2x^2 + x - 1$, которая параллельна прямой, заданной уравнением $y = 5x + 7$.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной: $f'(x_0)=4x_0+1$. Из условия параллельности прямых следует, что их угловые коэффициенты совпадают: $4x_0+1=5$, т.е. $x_0=1$. Далее $y_0=f(x_0)=2\cdot 1^2+1-1=2$ и из (21) имеем $y-2=5(x-1)$ или $y=5x-3$.

Ответ: $y=5x-3$.

Пример 7. На графике функции $y=\ln x$ взята точка A. Касательная к графику, проведенная через точку A, наклонена к оси OX под углом, тангенс которого равен $\sqrt{3}$. Найти абсциссу точки A.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной: $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. По условию $\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$, отсюда $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17.3. Аудиторные задачи

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

1. $y=4x^3+6x+3$, $x_0=1$.

2. $y=\sqrt{x}-16x+\sin 1$, $x_0=\dfrac{1}{4}$.

3. $y=\dfrac{4x-7}{x^2+4}$, $x_0=0$.

4. $y=\dfrac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$, $x_0=1$.

5. $y=x\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

6. $y=\dfrac{\cos x}{x-1}$, $x_0=0$.

7. $y=2x+\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

8. $y=3x\operatorname{tg} 2x$, $x_0=0$.

9. $y=3x^2-\ln x$, $x_0=1$.

10. $y=(5x^4-x)\operatorname{tg} x+3x+1$, $x_0=\pi$.

11. $y=2\ln(\cos x)+8x^3$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

12. $y=3\ln^2 x+\dfrac{4}{x}+1$, $x_0=e$.

13. $y=\sqrt{x}\cdot \operatorname{tg} 3x+5,\ x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

14. $y=(6x^3-x)e^{\cos x}+1,\ x_0=\pi$.

15. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-4x^3,\ x_0=\pi$.

Найти производные следующих функций:

16. $y=x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

17. $y=x+\arcsin 3x$.

18. $y=\sin x^2\cdot \operatorname{arctg} 2x$.

19. $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}$.

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

20. $y=5x^2\sqrt{x}-\dfrac{64}{x^{3/2}},\ x_0=4$.

21. $y=\dfrac{3}{x^2}+5x-\dfrac{2}{x}+4,\ x_0=-2$.

22. $y=10^x\dfrac{1}{\ln 10}+\dfrac{4}{x^2}-5x-7,\ x_0=2$.

23. $y=\operatorname{ctg} x+\dfrac{12x^3}{\pi^2},\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

24. $y=(3x^2-7x+2)(1-2x-5x^2),\ x_0=1$.

25. $y=(5-3x)\cos x,\ x_0=\pi$.

26. $y=\sqrt[4]{3-2x^2},\ x_0=1$.

27. $y=\sqrt{\operatorname{tg} 3x},\ x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

28. $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{6}},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

29. $y=\sqrt{2(1-\cos^2 x)},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$. tangent line

30. $y=x^3\cdot\arcsin\dfrac{1}{x},\ x_0=\sqrt{2}$.

31. $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10),\ x_0=5$.

32. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2},\ x_0=0$.

33. $y=\sqrt{1+5x},\ x_0=\dfrac{3}{5}$.

34. Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^5+3x+2$ в точке с абсциссой 1.

35. Касательная к параболе $y=x^2+mx+16$ проходит через начало координат. Найти значение параметра m, при котором абсцисса точки касания

положительна, а ордината равна 8.

36. Известно, что график функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ касается прямой $y=4x+4$ в точке с абсциссой -1 и пересекает эту прямую в точке с абсциссой 0. Найти a, b, c.

37. Найти значение x, при котором касательная к графику функции $f(x)=24\cdot 2^{x+5}$ с угловым коэффициентом $k=3\cdot\ln 2$ пересекает ось абсцисс.

38. Через точку $(3,-4)$ проходят две касательные к графику функции $f(x)=4+\dfrac{3}{x}$. Найти сумму абсцисс точек касания.

39. Найти уравнения касательных к параболе $y=x^2$, проходящих через точку $(2,3)$.

40. Найти углы между кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ в их точках пересечения.

41. В каких точках касательная к параболе $y=x^2$ параллельна прямой $y=4x-5$ и перпендикулярна прямой $2x-6y+5=0$?

42. При каких p и q парабола $y=x^2+px+q$ касается прямой $y=3x-2$ в точке с абсциссой 0?

43. Найти угол между кривыми $y=\sin x$ и $y=\cos x$ в их точках пересечения.

44. В каких точках касательная к параболе $y=x^2$ образует с прямой $3x-y+1=0$ угол в 45°?

45. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

46. В какой точке кривой $y=x^2-1$ касательная перпендикулярна прямой $-2x-y+1=0$?

47. На кривой $y=x^2-3x+2$ найти точку, касательная в которой параллельна прямой $y=-5x+3$.

48. Найти значение x_0, при котором касательная к графику функции $y=9x-x^3+2$ в точке с абсциссой x_0 отсекает от положительной полуоси абсцисс втрое больший отрезок, чем от отрицательной полуоси ординат.

49. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\dfrac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

50. Найти уравнение общей касательной к кривым

$$y=x^2+4x+8,\quad y=x^2+8x+4.$$

51. Найти все значения x_0, при которых касательные к графикам функций

$$y=3\cos 5x, \quad y=5\cos 3x+2$$

в точках с абсциссой x_0 параллельны.

52. Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\dfrac{1}{1-x}$ в точке $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найти a.

53. Определить, под каким углом синусоида

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$$

пересекает ось абсцисс в начале координат?

17.4. Домашнее задание

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

1. $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$, $x_0=1$.

2. $y=3^x\dfrac{2}{\ln 3}-2x^3-3$, $x_0=2$.

3. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3\ln x$, $x_0=1$.

4. $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x_0=2$.

5. $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{2-x}$, $x_0=1$.

6. $y=\sin x(x^2-2x+3)$, $x_0=0$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-1}}$, $x_0=1$.

8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $y=(x^2-3x+1)e^x$, $x_0=0$.

10. $y=\sin^2 2x+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

11. $y=\dfrac{2\operatorname{ctg} 3x}{x^2}+\cos\dfrac{\pi}{16}$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

12. В какой точке кривой $y=-x^2+2$ касательная перпендикулярна прямой $x-y+1=0$?

13. Найти сумму координат точки с отрицательной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x)=x^2+2x+4$ проходит через начало координат.

14. Если прямая $y=3-5x$ является касательной к параболе $y=x^2+bx+c$ в точке с абсциссой 0, то чему равна сумма $b+c$?

15. Найти значение x, при котором касательная к графику функции $f(x)=8\cdot 2^{x-3}$ с угловым коэффициентом $k=2\ln 2$ пересекает ось абсцисс.

16. Через точку $(2,-5)$ проходят две касательные к графику функции $f(x)=-3\sqrt{x}+1$. Найти сумму абсцисс точек касания.

17. Написать уравнение касательной к кривой $y=\ln(x-1)$, параллельной прямой $y=2x-1$.

18. Найти угол с осью абсцисс касательной к кривой $y=x\ln x$, проведенной в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

19. При каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$?

20. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции

$$y=\frac{x+1}{x-3},$$

которые образуют с осью Ox угол $\dfrac{3\pi}{4}$.

21. В какой точке кривой

$$y=x^2-5x+6$$

следует провести касательную для того, чтобы она прошла через точку $M(1,1)$?

22. Найти значение x_0, при котором касательная к графику функции $y=7x-x^3-3$ в точке с абсциссой x_0 отсекает от положительной полуоси абсцисс втрое больший отрезок, чем от отрицательной полуоси ординат.

23. Показать, что семейства кривых, задаваемых уравнениями

$$y=ax, \quad y^2+x^2=c^2,$$

при любых a, c пересекаются под прямым углом.

17.5. Примерный тест

1. Если прямая $y=7x-3$ является касательной к параболе $y=ax^2+bx+c$ в точке с абсциссой 0, то $b+c$ равно

1) 10; 2) -10; 3) 4; 4) -4; 5) 3.

2. Угол между кривыми

$$xy=a^2, \quad x^2-y^2=b^2$$

в их точках пересечения равен

1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\arcsin\frac{b}{a}$.

3. Производная функции

$$y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2 x-1}}$$

в точке $x=\frac{\pi}{4}$ равна

1) -3; 2) 3; 3) 1; 4) π; 5) 0.

4. Производная функции

$$y=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x}+2$$

в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$ равна

1) $-\sqrt{3e}/2$; 2) $\sqrt{3e}/2$; 3) $-\sqrt{3e}$; 4) $3e/2$; 5) $\sqrt{3e}$.

5. Если касательная к графику функции $f(x)=2x^2-2$ перпендикулярна прямой $x-4y+1=0$, то точка касания имеет координаты

1) $(-1/4, 15/16)$; 2) $(-1,0)$; 3) $(-1/4, 15/8)$; 4) $(1,0)$; 5) $(1/2, 3/4)$.

17.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 18; **2.** -15; **3.** 1; **4.** -4; **5.** 1; **6.** 1; **7.** 1; **8.** 0; **9.** 5; **10.** $20\pi^3+2$; **11.** $\frac{3}{2}\pi^2-2$; **12.** $\frac{6}{e}-\frac{4}{e^2}$; **13.** $\sqrt{\frac{3}{\pi}}+3\sqrt{\frac{\pi}{3}}$; **14.** $\frac{18\pi^2-1}{e}$; **15.** $-1-12\pi^2$;

16. $\frac{11}{4}\cdot x\cdot\sqrt[4]{x^3}$; **17.** $1+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; **18.** $2x\cos x^2\cdot\operatorname{arctg}2x+\sin x^2\cdot\frac{2}{1+4x^2}$; **19.** $\frac{2}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}3x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}$; **20.** 103; **21.** 1; **22.** 94; **23.** -3; **24.** 30; **25.** 3; **26.** -1; **27.** 3; **28.** $\frac{1}{6}$; **29.** 1; **30.** $\frac{3}{2}\pi-2$; **31.** -14400; **32.** 2; **33.** $\frac{5}{4}$; **34.** $y=8x-2$; **35.** -6; **36.** $c=4$, $a=2$, $b=5$; **37.** $-\frac{8\ln 2+1}{\ln 2}$; **38.** -0,75; **39.** $y=2x-1$ и $y=6x-9$; **40.** 90° и $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\approx 37^\circ$; **41.** В точке $(2,4)$ касательная параллельна заданной прямой, а в точке $(-3/2,9/4)$ касательная перпендикулярна заданной прямой; **42.** $p=3$, $q=-2$; **43.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70,5^\circ$; **44.** $x=-1$; **46.** $(1/4,-15/16)$; **47.** $(1,-3)$; **48.** $-\frac{\sqrt{26}}{3}$; **49.** 2; **50.** $y=8x+4$; **51.** πn, $\pi/8+\pi n/4$, $n\in\mathbb{Z}$; **52.** $a=1$. *Указание*: условие пересечения прямой и параболы равносильно существованию двух различных корней соответствующего квадратного уравнения, полусумма абсцисс этих корней по условию задачи должна быть равной 2; **53.** $\frac{\pi}{3}$.

Домашнее задание:

1. 1/2; **2.** -6; **3.** 3,5; **4.** 1; **5.** 3; **6.** 3; **7.** $-1,5$; **8.** 5; **9.** -2; **10.** 0; **11.** $-\frac{25920}{\pi^3}$; **12.** $(1/2,7/4)$; **13.** 2; **14.** -2; **15.** $\frac{\ln 2-1}{\ln 2}$; **16.** 12; **17.** $y=2x-3-\ln 2$; **18.** 45°; **19.** $a=e^2$; **20.** (8, 0), (0, 0); **21.** (2, 0), (0,6); **22.** $-\frac{\sqrt{20}}{3}$.

[redacted]