[redacted]

16. Логарифмические и показательные системы уравнений и неравенств

Логарифмические и показательные системы уравнений и методы их решения. Логарифмические и показательные неравенства и их решения методом интервалов.

16.1. Справочный материал

Логарифмические и показательные системы уравнений

Системы, содержащие показательные и логарифмические уравнения, обычно решаются сведением показательного или логарифмического уравнения к алгебраическому уравнению (например, заменой переменных) с последующим решением полученной алгебраической системы.

Равносильные преобразования неравенств

В дополнении к известным преобразованиям приведем другие равносильные преобразования неравенств.

1. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(1, +\infty)$.

2. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(0, 1)$.

3. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(1, +\infty)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x).$$

4. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(0, 1)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x).$$

Логарифмические неравенства

Рассмотрим *простейшие* логарифмические неравенства.

Пусть α некоторое положительное число, отличное от единицы. Замена неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{1}$$

в случае $a > 1$ неравенством $f(x) < g(x)$, а в случае $0 < a < 1$ неравенством $f(x) > g(x)$ называется *потенцированием* неравенства (1).

В общем случае переход от неравенства (1) к неравенству $f(x) < g(x)$ либо к неравенству $f(x) > g(x)$ неравносилен. Например, замена неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$ неравенством $x < x^2$ есть неравносильный переход, так как числа, представляющие собой решения неравенства $x < x^2$, не являются решениям исходного неравенства.

Согласно утверждениям 3 и 4 о равносильности, неравенства вида (1) решают следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. Решают неравенство на ОДЗ, учитывая, что потенцирование есть равносильное преобразование на этом множестве.

Иногда неравенство (1) заменяют при $a>1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>f(x) \end{cases}$$

или при $a<1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ g(x)<f(x). \end{cases}$$

Для того, чтобы привести логарифмическое неравенство к виду (1), надо сделать нужные преобразования, тождественные на ОДЗ исходного неравенства или на каком-либо ином множестве.

Показательные неравенства

Пусть a — фиксированное, отличное от единицы положительное число. Замена неравенства

$$f(x)<g(x) \tag{2}$$

на неравенство

$$\log_a f(x)<\log_a g(x) \tag{3}$$

при $a>1$, либо неравенством

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \tag{4}$$

при $0<a<1$ называется *логарифмированием* неравенства (2). В общем случае такой переход неравносилен. Однако, если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ одновременно положительны на ОДЗ неравенства (2), то при $a>1$ неравенства (2) и (3) равносильны, а при $0<a<1$ неравенства (2) и (4) также равносильны.

Наиболее часто логарифмирование неравенств применяется в случае, когда

$$f(x)=a^{f_1(x)},\ g(x)=a^{g_1(x)},$$

где число a таково, что $a>0$ и $a\neq 1$. При этом применяются утверждения 1 и 2 о равносильности.

16.2. Примеры

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y}=0,5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестных x и y определяется системой неравенств

$$x-2y>0, \quad 3x+2y>0.$$

Из первого уравнения системы, записанного в виде

$$(\sqrt{2})^{x-y+6}=(\sqrt{2})^{6-2y},$$

получаем уравнение

$$x-y+6=6-2y \quad \text{или} \quad x+y=0.$$

Из второго уравнения системы, записанного в виде

$$\log_3[(x-2y)(3x+2y)]=3,$$

получаем уравнение

$$(x-2y)(3x+2y)=27.$$

Подставляя в него $y=-x$, найдем, что

$$3x^2=27,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. Соответственно, $y_1=-3$, $y_2=3$. Из этих пар чисел только пара $(3,-3)$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $(3, -3)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_3(x^2-1) \leqslant 1.$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-1>0$, значит, есть объединение двух промежутков $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$. На этой области исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-1 \leqslant 3,$$

которое удовлетворяется только для x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Из этих x в ОДЗ попадают лишь принадлежащие одному из двух промежутков $-2 \leqslant x < -1$ и $1 < x \leqslant 2$. Следовательно, все x из указанных промежутков удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $-2 \leqslant x < -1$, $1 < x \leqslant 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{\sin \pi/3}(x^2-3x+2) \geqslant 2.$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-3x+2>0$, значит, есть объединение двух промежутков $-\infty<x<1$ и $2<x<+\infty$. Поскольку $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ и $2=2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3}{4}$, то на этой области исходное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x+2 \leqslant \frac{3}{4}$ или неравенству $4x^2-12x+5 \leqslant 0$. Решения последнего неравенства составляют промежуток $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$. Поскольку $\frac{1}{2}<1$ и $\frac{5}{2}>2$, то множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ и $2 < x \leqslant \frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ и $2 < x \leqslant \frac{5}{2}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x) \geqslant \log_{1/2} 2 - \log_{1/2}(x-1).$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $4-x>0$ и $x-1>0$, т. е. ОДЗ является интервалом $1<x<4$. На этом интервале исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{1/2}(4-x)(x-1) \geqslant \log_{1/2} 2$$

или неравенству

$$(4-x)(x-1)\leqslant 2.$$

Решения последнего неравенства составляют два промежутка $-\infty<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<+\infty$. Из этих решений в интервале $1<x<4$ лежат лишь x из двух промежутков $1<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<4$.

Ответ: $1<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<4$.

Пример 5. Решить неравенство

$$2^{x-1}>\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{x-1}>2^{-\frac{4}{x}}.$$

Логарифмируя по основанию 2, получим равносильное неравенство

$$x-1>-\frac{4}{x}.$$

Перенесем все члены этого неравенства влево и приведем получившееся в левой части неравенства выражение к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{x^2-x+4}{x}>0,$$

равносильное исходному. Дискриминант квадратного трехчлена x^2-x+4 отрицателен (он равен -15). Значит, числитель последнего неравенства положителен при любом действительном x, и поэтому неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{x}>0;$$

множество решений которого есть промежуток $x>0$.

Ответ: $x>0$.

Пример 6. Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Решение. Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}=3^{40x^2}$ и $3>1$, то данное неравенство равносильно неравенству $4x^2-3x+\frac{1}{2}<40x^2$ или неравенству

$$36x^2+3x-\frac{1}{2}>0. \qquad (5)$$

Корнями квадратного трехчлена $36x^2+3x-\frac{1}{2}$ являются $x_1=-\frac{1}{6}$ и $x_2=\frac{1}{12}$. Поэтому множество решений неравенства (5), а следовательно , и исходного неравенства есть два промежутка: $-\infty<x<-\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}<x<+\infty$.

Ответ: $-\infty<x<-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}<x<+\infty$.

16.3. Аудиторные задачи

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y=4, \\ \log_4 x+\log_2 y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ x-y=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 5^y=11, \\ 5\cdot 4^x+4\cdot 5^y=24. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=12, \\ 2^y\cdot 3^x=18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=2. \end{cases}$

8. Найти большее значение переменной в решении системы

$$\begin{cases} 16^{y+x}=4^{x-y} \\ 81^{\log_9\sqrt{4-x}}=1. \end{cases}$$

Найти наибольшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

9. $\lg 2^{3x-1}-\lg 2^{x+2}<\lg 4.$

10. $\lg 5^{2x+3}-\lg 25>\lg 5^{3x-2}+\lg 5.$

11. $(x+1)\log_{0,7}3-\log_{0,7}27>0$.

12. $\log_6(x^2-x)<1$.

13. $5^{\log_5(2x-1)}<7$.

14. $\log_2\log_{\sqrt{5}}(x-1)<1$.

15. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2-4x+4)}<1$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

16. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_9(x+2)>-\dfrac{3}{2}$.

17. $\log_2(3-2x)-\log_{\frac{1}{8}}(3-2x)<\dfrac{4}{3}$.

18. $\log_{x+1}(5-x)>1$.

19. $\log_{2x+1}(3-2x)<1$.

20. $\log_{x-2}(2x-9)<1$.

Найти число целых решений неравенства:

21. $\sqrt{x-7}\left(\lg(x+1)+\dfrac{1}{\log_{x+2}10}\right)\leqslant 0$.

22. $2^{\log_2^2 x+2}+x^{\log_2 x}<5x^{2\log_x 4}$.

При каких целых x выполняются неравенства:

23. $\log_{\frac{3}{2}}(3x-2)-\log_{\frac{3}{2}}56<\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2}-\log_{\frac{3}{2}}7$.

24. $\log_{\frac{7}{6}}(2x-3)-2\log_{\frac{7}{6}}6<\log_{\frac{7}{6}}\dfrac{1}{4}-\log_{\frac{7}{6}}3$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

25. $5^{x+1}-3^{x+2}>2\cdot 5^x-2\cdot 3^{x-1}$.

26. $7^{x+2}-8^{x+2}<6\cdot 7^{x+1}-7\cdot 8^{x+1}$.

27. $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\leqslant 0$.

28. $9^{x+1}-3^{x+3}<3^x-3$.

29. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x}\geqslant\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}$.

30. $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$.

31. $5^{\sqrt{x-2}}>5^{1-\sqrt{x-2}}+4$.

32. $(x-3)^{x^2-9}>1$.

33. $(x+1)^{x^2-4}\geqslant 1$.

Решить неравенства:

34. $3^{\sqrt{x+1}+1}-28+3^{2-\sqrt{x+1}}<0$.

35. $(x+1)^{x^2-36}<1$.

36. $\dfrac{6\cdot 4^x}{4^{2x}-1}\leqslant\dfrac{3\cdot 4^x}{4^x-1}-\dfrac{3}{4^x+1}$.

37. Найти число целых значений аргумента в области определения функции $y=\sqrt{\dfrac{\log_2^2(x-2)}{11x-x^2-28}}$.

38. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$$

Решить неравенства:

39. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

40. $(\log_{\sin x} 2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.

41. $\log_{(5-x)^2}(x^2+4)\leqslant 0$.

42. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1$$

выполняется при любом x.

43. Найти все такие значения x, по абсолютной величине меньшие 3, которые при всех $a\geqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$\log_{2a-x^2}(x-2ax)>1.$$

44. Найти все решения неравенства для каждого значения параметра a

$$a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a>0.$$

45. Для каждого значения параметра $a>0$ решить неравенство

$$x^{\sin x-a}>1$$

при условии, что $x\in(0,\pi/2)$.

16.4. Домашнее задание

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \log_3 x+\log_9 y=3, \\ \log_{\frac{1}{3}} x+\log_3 y=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5\cdot 3^{x-1}-3\cdot 2^y=-1, \\ 3^{x+1}+5\cdot 2^{y-1}=14. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x-2^y=1, \\ 2^{3x}-2^{3y}=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_3(2x+y^2)=1, \\ 2^{x+y^2}-4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_5(\log_3 x+\log_3 y)=0, \\ 4^{x-y}=16. \end{cases}$

6. Найти большее значение переменной в решении системы

$$\begin{cases} 9^{\log_3(x+2)}=25 \\ 4^{x-2y}=2^{x+2y}. \end{cases}$$

Найти число целых решений неравенства:

7. $\log_3(x^2+2x-3)\leqslant\log_{1/3}\dfrac{1}{x+17}$.

8. $(x^2+25)\log_{0,2}(x-3)+\dfrac{10x}{\log_{x-3}5}\geqslant 0$.

9. $\sqrt{5-x}\left(22^{2x+4}-2^{3x}\cdot 11^{4x-4}\right)\leqslant 0$.

Найти наибольшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

10. $\lg 3^{8-x}+\lg 5>\lg 27+\lg 15$.

11. $(2x-3)\log_{\frac{3}{4}} 5-3\log_{\frac{3}{4}} 5>0$.

12. $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2)>2$.

13. $3^{\log_3(x+5)}<2$.

14. $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>0$.

15. $\log_{\sqrt{5}}(2x-1)-\log_{\frac{1}{25}}(2x-1)<\dfrac{5}{2}$.

16. $\log_x(2x-3)<1$.

17. $\log_{x-1}(4-x)<1$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

18. $3^{2x+2}-3^{x+4}<3^x-9$.

19. $11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}\leqslant 2\cdot x^{2\log_x 11}$.

20. $3^x+10^{x-2}>19\cdot 3^{x-2}+10^{x-3}$.

21. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}}\geqslant\dfrac{5}{2}$.

22. $2^{\sqrt{x+1}}-1<3\cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}$.

23. $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{1}{4}}>1$.

24. Найти число целых значений аргумента в области определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{\ln^2(10-x^2)}}$.

25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y|\log_y x|=\log_x|\log_x y|, \\ \lg^2 x+\lg^2 y=8. \end{cases}$$

Решить неравенства:

26. $\log_{3x^2+1}(2x^2+x+7)\geqslant 1$.

27. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1)\geqslant 1$.

28. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1$$

выполняется при любом значении x.

29. Найти все значения параметра α, при которых неравенство

$$4^x-\alpha\cdot 2^x-\alpha+3\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

16.5. Примерный тест

1. Все решения неравенства

$$2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}$$

составляют множество

1) $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$; 2) $(-\infty,4)$; 3) $\{2\}\cup(4,+\infty)$; 4) $(3,+\infty)$; 5) $(3,4)\cup(4,+\infty)$.

2. Все решения неравенства

$$2^{x+2}-5^{x+1}-2^{x+3}>2^{x+4}-5^{x+2}$$

составляют множество

1) $(-\infty,0)$; 2) $(0,+\infty)$; 3) $(1,+\infty)$; 4) $(-\infty,1)$; 5) $(0,1)$.

3. Если (x,y) — решение системы

$$\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=725, \\ 3^{x}-2^{\frac{y}{2}}=25, \end{cases}$$

то $x+y$ равно

1) 5; 2) 6; 3) -5; 4) 0; 5) 4.

4. Наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству

$$(x-2)^{x^2-1}>1,$$

равно

1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 0; 5) 4.

5. Наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x},$$

равно

1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) $\varnothing$.

16.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $(4,16)$; **2.** $(6,2)$; **3.** $(3,2)$; **4.** $(1,0)$; **5.** $(2,1)$; **6.** $(2,1)$; **7.** $(2,4)$; **8.** 3; **9.** 2; **10.** 1; **11.** 1; **12.** 2; **13.** 3; **14.** 5; **15.** 3; **16.** -1; **17.** 0; **18.** 1; **19.** 1; **20.** 4; **21.** 1; **22.** 2; **23.** 1; **24.** 2; **25.** 3; **26.** 0; **27.** 0; **28.** -1; **29.** -3; **30.** 1; **31.** 4; **32.** 5; **33.** 3; **34.** $[-1,3)$; **35.** $(0,6)$; **36.** $(0,+\infty)$; **37.** 3; **38.** $(3,9)$. *Указание:* прологарифмировать первое уравнение по основанию x; **39.** $(0,1/2)\cup(1,2)\cup(3,6)$; **40.** $(1/2,3/4)$; **41.** $(4,5)\cup(5,6)$; **42.** $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; **43.** $x\in(-3,-1)$; **44.** При $a=0$ решений нет, при $a>0$ $x<-2+\log_3 a$, при $a<0$ $x<\log_3(-a)$; **45.** При $a\geqslant 1$ $x\in(0,1)$, при $a\leqslant \sin 1$ $x\in(0,\arcsin a)\cup(1,\pi/2)$, при $\sin 1<a<1$, $x\in(\arcsin a,\pi/2)\cup(0,1)$.

Домашнее задание:

1. $(3,81)$; **2.** $(1,1)$; **3.** $(1,0)$; **4.** $(1,1)$; **5.** $(3,1)$; **6.** 3; **7.** 5; **8.** 0; **9.** 2; **10.** 3; **11.** 2; **12.** 2; **13.** -4; **14.** Нет целых решений; **15.** 2; **16.** 2; **17.** 3; **18.** -1; **19.** 2; **20.** 5; **21.** 0; **22.** -1; **23.** 0; **24.** 4; **25.** $(100, 0,01)$, $(100,\ 100)$, $(0{,}01,\ 100)$, $(0{,}01;\ 0{,}01)$. *Указание:* в первом уравнении перейти к десятичным логарифмам; **26.** $[-2,0)\cup(0,3]$; **27.** $(-\sqrt{8},-1)\cup(1,\sqrt{41}/5)$; **28.** $a<-2$; **29.** $\alpha\geqslant 2$.

[redacted]