

14. Преобразование логарифмических и показательных выражений

Логарифмическая и показательная функции. Свойства логарифмов. Основное логарифмическое тождество. Свойства степеней.

14.1. Справочный материал

Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$; $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получилось b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b.$$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a a = 1$, $a \neq 1$; $a > 0$.
2. $\log_a 1 = 0$, $a \neq 1$; $a > 0$.
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, $a \neq 1$; $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $a \neq 1$; $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.
5. $\log_a b^p = p \log_a b$, $a \neq 1$; $b > 0$; $a > 0$.
6. $\log_{a^q} b = \frac{1}{q} \cdot \log_a b$, $a \neq 1$; $b > 0$; $a > 0$; $q \neq 0$.
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a \neq 1$; $c \neq 1$; $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a \neq 1$; $b \neq 1$; $a > 0$; $b > 0$.

14.2. Примеры

Пример 1. Найти значение выражения $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Решение. Согласно свойству (5) логарифмов имеем $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4} = \log_3 \log_4 (4)^{\frac{1}{9}} = \log_3 \left(\frac{1}{9} \log_4 4 \right)$. По свойству (1) логарифмов $\log_4 4 = 1$, т.е. получим

$$\log_3 \left(\frac{1}{9} \log_4 4 \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2}.$$

Используя свойства (5) и (1) логарифмов, имеем

$$\log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3 = -2.$$

Ответ: -2 .

Пример 2. Найти значение выражения $(\sqrt[3]{7})^{\frac{3}{\log_2 7}}$.

Решение. Используя свойство (8) логарифмов, перейдем в показателе степени к логарифму по основанию 7:

$$(\sqrt[3]{7})^{\frac{3}{\log_2 7}} = [(7)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{\log_2 7}} = 7^{\frac{1}{\log_2 7}} = 7^{\log_7 2}.$$

По основному логарифмическому тождеству последнее выражение равно 2.

Ответ: 2.

Пример 3. Найти значение выражения

$$\frac{3}{7} (\log_2 32 + 27^{\log_3 4})^{\log_{69} 14}.$$

Решение. Используя свойство (5) логарифмов и основное логарифмическое тождество, преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \log_2 32 + 27^{\log_3 4} &= \log_2 (2^5) + (3^3)^{\log_3 4} = 5 \log_2 2 + 3^{3 \log_3 4} = \\ &= 5 + 3^{\log_3 (4)^3} = 5 + 4^3 = 69. \end{aligned}$$

Исходное выражение принимает вид $\frac{3}{7} (69^{\log_{69} 14})$. Используя основное логарифмическое тождество, окончательно получим

$$\frac{3}{7} (69^{\log_{69} 14}) = \frac{3}{7} \cdot 14 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 4. Найти значение выражения

$$\frac{3 \log_3^2 45 - 2(\log_3 45)(\log_3 5) - \log_3^2 5}{3 \log_3 45 + \log_3 5}.$$

Решение. Используя свойства (3) и (5) логарифмов, преобразуем числитель дроби

$$\begin{aligned} & 3 \log_3^2 45 - 2(\log_3 45)(\log_3 5) - \log_3^2 5 = \\ & = 3[\log_3(5 \cdot 9)]^2 - 2[\log_3(5 \cdot 9)](\log_3 5) - \log_3^2 5 = \\ & = 3[\log_3 5 + \log_3 9]^2 - 2[\log_3 5 + \log_3 9](\log_3 5) - \log_3^2 5 = \\ & = 3(\log_3 5 + \log_3 3^2)^2 - 2(\log_3 5 + \log_3 3^2)(\log_3 5) - \log_3^2 5 = \\ & = 3(\log_3 5 + 2)^2 - 2 \log_3^2 5 - 4 \log_3 5 - \log_3^2 5 = 8 \log_3 5 + 12. \end{aligned}$$

Таким же образом преобразуем знаменатель дроби

$$\begin{aligned} & 3 \log_3 45 + \log_3 5 = 3 \log_3(5 \cdot 9) + \log_3 5 = \\ & = 3(\log_3 5 + \log_3 9) + \log_3 5 = 3(\log_3 5 + \log_3 3^2) + \log_3 5 = \\ & = 3(\log_3 5 + 2) + \log_3 5 = 3 \log_3 5 + 6 + \log_3 5 = 4 \log_3 5 + 6. \end{aligned}$$

После упрощения числителя и знаменателя исходное выражение принимает вид

$$\frac{8 \log_3 5 + 12}{4 \log_3 5 + 6} = \frac{2(4 \log_3 5 + 6)}{4 \log_3 5 + 6} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 5. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение. Представим $\log_{30} 8$ в виде

$$\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30}.$$

Разлагая числа 30 и 8 на простые множители и используя свойства логарифмов, получаем

$$\log_{30} 8 = \frac{3 \lg 2}{\lg 5 + \lg 3 + \lg 2}.$$

Учитывая, что

$$\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = 1 - \lg 5$$

и используя условие задачи, получаем

$$\log_{30} 8 = \frac{3(1-a)}{b+1}.$$

Ответ: $\frac{3(1-a)}{b+1}.$

14.3. Аудиторные задачи

Найти значения выражений:

1. $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18.$

2. $7^{\log_7 \sqrt{7}^{27}}.$

3. $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}.$

4. $\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49.$

5. $\log_{\frac{8}{27}} \log_{25} 125.$

6. $6^{\frac{2}{\log_5 6}}.$

7. $\log_{16} \log_3 \sqrt[8]{\sqrt[3]{27}}.$

8. $\left(5 - 5^{\frac{1}{\log_3 5}}\right)^{\log_{\sqrt{8}} 5}.$

9. $49^{\frac{1}{2 \log_9 7}}.$

10. $\frac{2 \log_3 63}{\log_{81} 3} - \frac{4 \log_3 7}{\log_9 3}.$

11. $(0,8)^{1/(3 \log_{27} 4)} \cdot 5^{1/(3 \log_{27} 4)}.$

12. $\log_3 [(\log_2 5)(\log_5 8)].$

13. $8^{\log_2 \sqrt[3]{\sqrt{5}+3}} - 3^{\log_9 (\sqrt{5}-3)^2}.$

14. $\log_{1/4} \frac{16}{13+2\sqrt{42}} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}.$

$$15. 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{7+\sqrt{21}} + \log_{1/5}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}.$$

$$16. 0,25(1+4^{\log_2 5})^{\log_{26} 4}.$$

$$17. 64^{-(\log_{\frac{1}{3}} 2)(\log_{\frac{1}{4}} 9)+4}.$$

$$18. 9^{3-\log_3 54} + 7^{-\log_7 2}.$$

$$19. 2^x + 2^{-x}, \text{ если } 4^x + 4^{-x} = 34.$$

$$20. \frac{2 \log_3 12 - 4 \log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4 \log_3 2}{3 \log_3 12 + 6 \log_3 2}.$$

$$21. \frac{2 \log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)(\log_3 18)}{2 \log_3 2 + \log_3 18}.$$

$$22. \log_6^2 3 + \frac{\log_6 18}{\log_2 6}.$$

23. Вычислить

$$3 \log_{\frac{a^3}{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} + \log_{\frac{a^3}{b}} b,$$

если известно, что $\log_a b = 2$.

$$24. \text{ Найти } \log_{30} 120, \text{ если } \log_2 3 = a, \log_3 5 = b.$$

$$25. \text{ Вычислить } \log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{0,6}, \text{ если } \log_{5,4} 27 = a.$$

$$26. \text{ Вычислить } \log_{1,25} 3, 2m^a, \text{ если } \log_m 5 = c, \log_m 4 = a.$$

Найти значения выражений:

$$27. \left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2 \log_3 5}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$28. 3^{\frac{1}{\log_5 3}} \cdot 3^{\log_3^2 4} - 5 \cdot 4^{\log_3 4} + \lg 0,1.$$

$$29. \frac{24 \sqrt{\log_{24} 4}}{4 \sqrt{\log_4 24}}.$$

$$30. (\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2 \log_{18} 2) \log_2 3 - \log_3 2.$$

$$31. \text{ Найти значение выражения } \log_{(27 \sqrt[4]{y})} \left(\frac{9}{x^6} \right), \text{ если } a = \log_3 x \text{ и } b = \log_x y.$$

32. Доказать, что

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\lg a + \lg b),$$

если $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$.

14.4. Домашнее задание

Найти значения выражений:

1. $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81}$.
2. $\log_9^3 \log_2 8$.
3. $(\sqrt{5})^{\frac{2}{\log_9 5}}$.
4. $10^{3-\lg 4} - 49^{\log_7 15}$.
5. $9^x + 9^{-x}$, если $3^x + 3^{-x} = 3$.
6. $25^{\log_{125} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2}$.
7. $\log_{3\sqrt{3}} \log_2 \sqrt[6]{\sqrt{16}}$.
8. $\frac{\log_5^2 7\sqrt{5} + 2 \log_5^2 7 - 3(\log_5 7\sqrt{5})(\log_5 7)}{\log_5 7\sqrt{5} - \log_5 49}$.
9. $20^{1/(2 \log_{81} 5)} \cdot (0, 25)^{1/(2 \log_{81} 5)}$.
10. $\frac{3 \log_3 54}{\log_{81} 3} - \frac{4 \log_3 6}{\log_{27} 3}$.
11. $\log_{12}^2 2 + \frac{\log_{12} 24}{\log_6 12}$.
12. $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5-\sqrt{3}}} + 2^{\log_4 (1-\sqrt{3})^2}$.
13. $4^{\log_2 \sqrt{6-\sqrt{30}} + \log_{1/4} (\sqrt{6}-\sqrt{5})}$.
14. $\log_{1/25} \frac{1}{9+2\sqrt{14}} + \log_5 \frac{125}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.
15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \cdot 7^{\log_7^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_7 2} + 3^{\log_9 4}$.
16. $5\sqrt{\log_5 4} - 4\sqrt{\log_4 5} + 1$.

17. Вычислить

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{4} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a},$$

если известно, что $\log_a b = 14$.

18. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{2,7}$, если $\log_{0,1} 27 = a$.

19. Найти значение выражения $\log_{(8\sqrt[3]{y})} \left(\frac{4}{x^6} \right)$, если $a = \log_2 x$ и $b = \log_x y$.
20. Доказать, что

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m = 2 \log_{a+b} m \log_{a-b} m,$$

если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

14.5. Примерный тест

1. Значение выражения

$$\frac{5 - \log_{\sqrt{5}}(\sqrt[3]{3})}{9^{1 + \log_{0,5} 2}}.$$

равно

1) $\frac{\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{27}}{9}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$; 5) $\frac{1}{3}$.

2. Если $\log_a 2 = m$, а $\log_a 3 = n$, то $\log_{12} 13,5a^n$ равен

1) $\frac{4n}{m+n}$; 2) $\frac{4n-m}{n+2m}$; 3) $\frac{n-m}{n+2m}$; 4) $\frac{4n-m}{m+n}$; 5) 1.

3. Если $\log_{0,1} 27 = a$, то $2 \log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{2,7}$ равен

1) $\frac{2}{a}$; 2) $2 + \frac{2}{a}$; 3) a ; 4) $1 + a$; 5) $2a$.

4. Значение выражения

$$\frac{2 \log_3 12 - 4 \log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4 \log_3 2}{\log_3 12 + 2 \log_3 2}$$

равно

1) 1; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 3; 5) $\frac{2}{3}$.

14.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 7; 2. 9; 3. 1; 4. 1; 5. $-\frac{1}{3}$; 6. 25; 7. -0,75; 8. $\sqrt[3]{25}$; 9. 9; 10. 16;
11. 3; 12. 1; 13. $2\sqrt{5}$; 14. -2; 15. $\sqrt{7}$; 16. 1; 17. 64^3 ; 18. $\frac{3}{4}$; 19. 6;
20. 1; 21. -2; 1; 23. $\frac{3}{2}$; 24. $\frac{3+a+ab}{1+a+ab}$; 25. $\frac{1}{a} - \frac{2}{3}$; 26. $\frac{3a-c}{c-a}$;
27. 4; 28. -1; 29. 1; 30. 2; 31. $\frac{8-24a}{12+ab}$.

Домашнее задание:

1. 1; 2. $\frac{1}{8}$; 3. 9; 4. 25; 5. 7; 6. 16; 7. $-\frac{2}{3}$; 8. $\frac{1}{2}$; 9. 9; 10. 24;
11. 1; 12. 4; 13. $\sqrt{6}$; 14. 3; 15. 2; 16. 1; 17. $\frac{1}{8}$; 18. $1 + \frac{1}{a}$;
19. $\frac{8-24a}{12+ab}$.