[redacted]

18. Исследование функций

Определение максимальных и минимальных значений функции, точек экстремума, наибольших и наименьших значений. Определение промежутков монотонности функций. Задачи на экстремум. Интеграл, определенный и неопределенный. Первообразная. Площадь криволинейной трапеции.

18.1. Справочный материал

Монотонные функции и условия монотонности функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (a,b), если для $x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует большее значение функции).

Функция $y=f(x)$ называется *строго возрастающей* на интервале (a,b), если для $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на интервале (a,b), если для $x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Функция $y=f(x)$ называется *строго убывающей* на интервале (a,b), если для $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функции возрастающие или убывающие на интервале (a,b) называются *монотонными* на (a,b).

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема на (a,b). Она является возрастающей на (a,b) в том и только в том случае, когда производная $f'(x) \geqslant 0$ на (a,b).

Функция $y=f(x)$ является убывающей на (a,b) только тогда, когда $f'(x) \leqslant 0$ на (a,b).

Таким образом у монотонной функции производная сохраняет знак.

Экстремумы функций

Точка x_0 является точкой (локального) *максимума* для функции $y=f(x)$, если найдется такой интервал (a,b), $x_0 \in (a,b)$, что выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \text{для всех точек} \quad x \in (a,b),$$

принадлежащих ОДЗ функции. Значение $f(x_0)$ называют *максимальным значением* функции.

Точка x_0 является точкой (локального) *минимума* для функции $y=f(x)$, если найдется такой интервал (a,b), $x_0 \in (a,b)$, что выполнено неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \text{для всех точек} \quad x \in (a,b),$$

принадлежащих ОДЗ функции. Значение $f(x_0)$ называют *минимальным значением* функции.

Точки максимума и минимума называются точками (локального) *экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремальными значениями* функции.

Определения точек максимума и минимума являются локальными (т.е. зависят от поведения функции вблизи этих точек), поэтому у функции может быть несколько максимумов и несколько минимумов в области допустимых значений. Функция также может иметь несколько экстремальных значений в ОДЗ.

Значение функции, которое превосходит все остальные значения функции в ОДЗ называется *наибольшим значением* функции.

Значение функции, которое меньше либо равно всех остальных значений функции в ОДЗ называется *наименьшим значением* функции.

С помощью производных можно находить экстремумы функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на (a,b) и точка $x_0\in(a,b)$ является точкой экстремума, тогда $f'(x_0)=0$ (это *необходимое условие экстремума функции*).

Данное условие не всегда является достаточным.

Точка x_0 называется *критической* для функции $y=f(x)$, если производная функции $f(x)$ в этой точке равна нулю или не существует.

Критические точки являются точками "подозрительными" на экстремум.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема на (a,b), точка $x_0\in(a,b)$ является критической для данной функции. Если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой экстремума: а именно, максимума, если знак меняется с плюса на минус, и минимума, если знак меняется с минуса на плюс. Если же при переходе через критическую точку производная знака не меняет, то x_0 не является точкой экстремума. (это *достаточное условие существования экстремума функции*).

Общая схема исследования функции на экстремум заключается в следующем:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем достаточное условие существования экстремума в кри-

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C.$$

Основными правилами интегрирования являются:

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;
2. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$.

Определенным интегралом на промежутке $[a, b]$ от функции $f(x)$ называется разность $F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Таким образом справедлива *формула (Ньютона-Лейбница):*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F|_a^b.$$

Геометрический смысл формулы Ньютона-Лейбница заключается в следующем. Рассмотрим фигуру P, ограниченную осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, заданной на $[a, b]$. Тогда площадь S этой фигуры (называемой *криволинейной трапецией*) равна

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

18.2. Примеры

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 - 5.$$

Решение. Для нахождения точек экстремума функции необходимо найти производную $f'(x)$ и найти значения x, в которых она равна нулю:

$$1) \quad f'(x) = \left(\frac{x^5}{5} - x^4 - 5\right)' = \frac{5}{5}x^4 - 4x^3 - 0 = x^4 - 4x^3.$$

$$2) \quad x^4 - 4x^3 = 0, \; x^3(x-4) = 0.$$

Решение. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых x и y, т.е.

$$86 = x + y.$$

По условию задачи произведение этих слагаемых xy должно быть максимально. Обозначим $g(x;\ y) = xy$ и будем искать максимум функции $g(x;\ y)$. Эта функция зависит от двух переменных x и y, однако, используя условие задачи, ее можно представить в виде функции лишь от одной переменной x:

$$g(x;\ y) = x \cdot y = x(86 - x) = 86x - x^2 = f(x).$$

Теперь легко найти значение x, при котором функция $f(x)$ достигает максимума. Найдем производную $f'(x)$ и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = (86x - x^2)' = 86 - 2x = 2(43 - x),$$

$$2(43 - x) = 0,\ x = 43.$$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43$.

Ответ: $x = 43$; $y = 43$.

Пример 4. Для функции $y = \cos^2 x$ найти ту первообразную, график которой проходит через точку $M(\pi/2, \pi/4)$.

Решение. Вычислим неопределенный интеграл от данной функции:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Для того, чтобы из всех найденных первообразных выбрать искомую, используем условие задачи. Получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{4} + C = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $C = 0$.

Ответ: Первообразная $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$.

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 + x$, $y = x + 1$.

Решение. Сначала найдем точки пересечения этих кривых. Приравниваем
$$x^2+x=x+1.$$
Отсюда $x=\pm1$. На отрезке $[-1,1]$ кривая $y=x+1$ расположена выше, чем кривая $y=x^2+x$, поэтому площадь S нужной фигуры равна
$$S=\int_{-1}^{1}[(x+1)-(x^2+x)]dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$
Ответ: $S=\dfrac{4}{3}$.

18.3. Аудиторные задачи

Найти экстремумы функций:

1. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$.
2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.
3. $y=x-e^x$.
4. $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.
5. $y=x\ln x$.
6. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x)=(x-1)(x^2-1)(x^2-4)$. Найти число точек экстремума.

Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках:

7. $y=x+\dfrac{1}{x}$ на $[-2,-1/2]$.
8. $y=x^4-2x^2+3$ на $[-4,3]$.
9. $y=1+\cos x$ на $[-\pi/3,\pi/3]$.
10. $y=2\sin x-1$ на $[0,\pi/6]$.
11. Найти интервал убывания функции
$$y=16x^3-24x^2+9x-1.$$
12. Найти интервал возрастания функции
$$y=-8x^3+55x^2-100x-58.$$

13. Найти $\frac{m}{2}+4M$, где m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на отрезке $[1,6]$.

14. Найти $m+2M$, где m и M — значения функции $f(x)=x+\frac{4}{x-3}$ в точках минимума и максимума соответственно.

Найти точки экстремумов функций:

15. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

16. $y=x+\frac{1}{x}$.

17. $y=\operatorname{tg} x-2x$ на промежутке $(-\pi,\pi)$.

Найти наименьшие значения функций на заданных отрезках:

18. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$ на $[-1,4]$.

19. $y=\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+2$ на $[-3,1]$.

20. $y=\frac{48}{5}x^5-3x+5$ на $[-1,1]$.

21. $y=\frac{4}{x^2}+x^2$ на $[1,2]$.

Найти наименьшие и наибольшие значения функций на заданных отрезках:

22. $y=7+4x^3-x^4$ на $[-1,3]$.

23. $y=\cos 2x-x$ на $[-\pi/2,\pi/2]$.

24. $y=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x}$ на $[-1,1/8]$.

25. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\left|4x\ln 2-2^x+5\ln 2\right|$ на отрезке $[-1,6]$.

26. Найти точку, в которой выполняется необходимое условие экстремума функции $y=3x^4-16x^3+24x^2$, но экстремума в ней нет.

27. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=1-x^3+ax^2-3ax$ убывает на $\mathbb{R}$.

28. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y=x+e^{a-x}$ равно 4?

29. Доказать неравенство $\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}$, если x — положительно.

30. Доказать неравенство $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}$, если x — положительно.

31. Каковы должны быть стороны прямоугольного участка, периметр которого 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

32. Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы периметр был наименьшим?

33. Число 48 представлено в виде суммы двух слагаемых, так, что их произведение максимально. Найти эти слагаемые.

34. Найти число, которое превышало бы свой утроенный квадрат на максимальное значение.

35. Число 64 представлено в виде произведения двух положительных сомножителей так, что сумма их квадратов минимальна. Найти эти множители.

36. Найти число, для которого разность его куба и утроенного его квадрата минимальна.

37. Найти положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение.

38. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны a ?

39. Какой сектор нужно вырезать из данного круга, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости ?

40. Исследовать и построить график функции $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+2$.

41. Найти все значения параметра b, для которых уравнение

$$2x^3-3x^2-12x-b=0$$

имеет три различных корня.

42. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x=y^2$ и $y=x^2$.

43. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $x+y=2$.

44. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x-x^2$ и $x+y=0$.

45. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, осью абсцисс и прямыми $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

46. Для функции $y=1+3x^2$ найдите первообразную, которая при $x=2$ принимает значение 1.

47. Для функции $y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ найдите первообразную, которая при $x=1$ принимает значение 1.

48. Для функции $y=2\cos 2x$ найдите первообразную, которая при $x=\pi$ принимает значение 3.

49. Найти ту первообразную функции $y=x$, которая касается прямой $y=x-1$.

50. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

18.4. Домашнее задание

Найти значения функций в точках максимума:

1. $y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{8}$.

2. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+71\frac{13}{15}$.

3. $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$.

4. Найти точку минимума функции $f(x)=-9x^5+90x^4-180x^3-30$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

5. $y=x^3-6x^2+1$ на $[-1,2]$.

6. $y=\sin x\cdot\sin 2x$ на полном периоде.

7. Найти значение выражения $m-3M$, если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=-2x^3-3x^2+12x-16$ на отрезке $[-1,2]$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=-x^2+3|x|-2$$

на отрезке $[-2,0]$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\left|9x\ln 3-3^x-8\ln 3\right|$ на отрезке $[1,4]$.

10. Пусть m и M — значения функции $y=-0,2x^5+x+4$ в точке минимума и точке максимума, соответственно. Найти $\frac{m}{M}$.

11. Вычислить сумму целых значений x, не превышающих по модулю 5 и принадлежащих промежуткам убывания функции $f(x)=-4x^3-6x^2+45x+25$.

12. Доказать неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

13. Найти количество целых точек на интервале убывания функции

$$y = 4x^3 + 12x^2 - 63x + 62.$$

14. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = x^5 - 2ax^3 + 11ax + 1$ возрастает на $\mathbb{R}$.

15. Разделить число 8 на две такие части, чтобы произведение их произведения на разность было максимальным.

16. Найти число, для которого разность между ним и его утроенным кубическим корнем была минимальной.

17. Вписать в заданный шар цилиндр максимального объема.

18. Исследовать и построить график функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x + \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

20. Для функции $y = \dfrac{2}{1+4x^2}$ найдите первообразную, которая при $x = \dfrac{1}{2}$ принимает значение 0.

21. Найти все первообразные функции $y = x + 2$, касающиеся кривой $y = x^2$.

18.5. Примерный тест

1. Сумма наибольшего и наименьшего значения функции

$$y = x + \cos^2 x$$

на отрезке $[0, \pi/2]$ равна

1) $\dfrac{1+\pi}{2}$; 2) $1 + \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi}{4}$; 4) $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$; 5) π.

2. Число 26 представлено в виде суммы трех положительных чисел так, что сумма их квадратов наименьшая, причем второе слагаемое втрое больше первого. Тогда произведение этих чисел равно

41. $b \in (-20, 7)$; **42.** $1/3$; **43.** 4,5; **44.** 4,5; **45.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **46.** $x+x^3-9$; **47.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-\frac{5}{3}$; **48.** $\sin 2x+3$; **49.** $y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$; **50.** $y=x^3+1$.

Домашнее задание:

1. 1; **2.** 72; **3.** 5; **4.** 2; **5.** 1 и -15; **6.** $-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ и $\frac{4}{9}\sqrt{3}$; **7.** -2; **8.** 0,25 и -2; **9.** $81-28\ln 3$; **10.** $\frac{2}{3}$; **11.** 2; **13.** 5; **14.** $0 \leqslant a \leqslant \frac{55}{9}$; **15.** $4+\frac{4}{\sqrt{3}}$ и $4-\frac{4}{\sqrt{3}}$; **16.** 1; **17.** Отношение высоты цилиндра к диаметру основания равно $\sqrt{2}$; **19.** $\frac{\pi}{2}$; **20.** $\operatorname{arctg} 2x-\frac{\pi}{4}$; **21.** $y=\frac{1}{2}x^2+2x-2$.

[redacted]