1. Demostrar que el cubo de un número impar es también impar

Debemos de saber la definición de ”impar”:

- Los números pares son los de la forma $2k$, siendo k entero.
- Los números impares son los de la forma $2k+1$, siendo k entero.

Por lo tanto, si $n =$ es impar,

$$\exists k \text{ tal que n } = 2k+1.$$

Entonces,

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

Simplificando, tenemos que

$$k\text{'} = 4k^3 + 6k^2 + 3k.$$

Es decir:

$$n^3 = 2k' + 1. \text{ Impar.}$$

2. Demostrar que si $ABCD$ es un rombo, las diagonales AC y BD son perpendiculares.

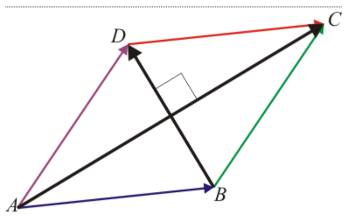

Figura 1: Ejemplo de rombo

Sean $ABCD$ los vértices del rombo. Se verifica que, por ser un paralelogramo

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

y por sus lados de la misma longitud

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

Las diagonales del rombo vienen dadas por los vectores

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ y } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$$

Multiplicando escalarmente estos dos vectores

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$$

Desarrollando la suma por diferencia

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2$$

y, por la igualdad entre las longitudes de los lados

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0$$

3. Demostrar, marcha adelante, que las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Primero observamos (una astucia que se aprende mirando cómo lo han hecho antes otros en casos similares) que si $b = 0$ la cosa sería muy fácil, ya que entonces la ecuación dada sería $ax^2 + c = 0$ y esto se resolvería muy fácilmente, obteniendo

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-c}}{a}$$

Pero como b no es 0 en general, se trata de ver si se puede hacer algún cambio que reduzca el problema a este caso. Pongamos en la ecuación $x = y + m$ (no sabemos qué va a ser y ni m. Se trata de ver si eligiendo bien m se puede conseguir una ecuación de la forma anterior con y como incógnita que pueda resolver como se ha hecho antes. Si tenemos y y m entonces tendremos x.

Vamos adelante:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ es equivalente a:}$$
$$a(y+m)^2 + b(y+m) + c = 0, \text{ desarrollando}$$
$$ay^2 + 2aym + am^2 + by + bm + c = 0,$$
$$\text{eligiendo } m \text{ tal que } 2am + b = 0, \text{ es decir } m = -b/2a, \text{ entonces}$$
$$ay^2 + \cancel{(2am+b)}y + am^2 + bm + c = 0,$$
$$ay^2 + a(-\tfrac{b}{2a})^2 + b(-\tfrac{b}{2a}) + c = 0,$$
$$ay^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c = 0,$$
$$y = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Recordando que $x = y + m$ y $m = -b/2a$,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

4. Demostrar, marcha atrás, que si $x > 0$, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Partimos de la conclusión. Al simplificarla, vemos la relación con la hipótesis:

$$x + \tfrac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

Gracias a la hipótesis $x > 0$, hemos podido establecer la equivalencia

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x + \tfrac{1}{x} \geq 2$$

5. Demostrar que si x e y son números reales positivos, entonces $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Partimos de la conclusión:

$$\sqrt{xy} \leq \tfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 - 2xy \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

Esta igualdad siempre es cierta, y equivale a la conclusión deseada. La hipótesis importa sólo para asegurar que el radicando sea positivo.

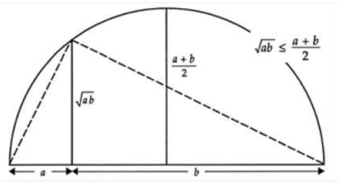

Figura 2: Ejemplo de uso

6. Demostrar que para tres números nulos cualesquiera, a, b, c, se verifica siempre que $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$

Partimos de que los tres números a, b, c, son positivos. Vamos a desarrollar la digualdad de otra forma

$$3ab + 3bc + 3ca \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Restando $2ab + 2bc + 2ca$ en los dos miembros de esta desigualdad, obtenemos

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Si demostramos esta última desigualdad, lo tendremos demostrado, ya que todas las desigualdades que hemos escrito son equivalentes. Observando esta desigualdad, podemos percibir que cada uno de los miembros tiene una expresión que resulta familiar en geometría. El primer miembro es el producto escalar de los vectores (a, b, c) y (b, c, a). El segundo miembro es el producto de los módulos de estos dos vectores (aquí tienen el mismo módulo que es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$).

Sabiendo que el producto escalar de dos vectores es exactamente el producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman (que siempre tiene valor absoluto menor o igual que 1 e igual a 1 sólo en el caso en que los vectores tengan la misma dirección y sentido, es decir cuando las componentes de uno son las del otro por una constante positiva). Por tanto es cierto que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$, además esta demostración nos dice que se da la igualdad solamente cuando $a/b = b/c = c/a$ lo que implica en nuestro caso que $a = b = c$.

7. Demostrar, por contraposición, que de acuerdo con las reglas del ajedrez, cada peón se mueve a lo sumo, 6 veces.

Consideramos un peón cualquiera. Supongamos que se mueve 7 veces o más. Tratamos de llegar a deducir que no hemos cumplido las reglas del ajedrez. Tras el primer movimiento el peón se encuentra al menos en la fila tercera. Tras el segundo movimiento se encuentra al menos en la cuarta... Tras el séptimo movimiento se encuentra al menos en la novena,...fuera del tablero.

8. Sea n un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces n es par.

Demostración por reducción al absurdo. Suponer que n es impar, si aplicamos la solución del problema 1, donde n^3 es impar, entonces por hipotesis n^3 es par. Absurdo.

9. Demostrar que si c es un número impar, la ecuación $n^2 + n - c = 0$ no tiene ninguna solución entera.

Demostracion por reduccion al absurdo. Si c impar y existe solucion

$$n^2 + n = c \text{ es impar}$$

$$n(n+1) \text{ debe de ser impar}$$

Pero si n es impar entonces $n+1$ es par o viceversa, multiplicar algo por un número par da siempre par. Absurdo.

10. Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional: $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$, siendo ésta fracción irreducible. Entonces,

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow a \text{ es par} \Rightarrow a = 2k \text{ con } k \text{ entero.}$$

Sustituyendo:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \text{ es par.}$$

a es par y b es par. Contradicción con "La fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible".

11. Demostrar que los números primos nunca se acaban, siempre hay más.

Primero vamos a asumir que la lista de números primos es finita y llegar a una contradicción, luego la lista debe ser infinita. Imaginemos una lista que contiene (todos) los primos:

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_n.$$

Entonces se puede generar otro número Q (mucho mayor) tal que:

$$Q = (P_1 x P_2 x P_3 x ... x P_n) + 1$$

Este nuevo número Q puede ser primo o no. Si es primo, ya tenemos un nuevo primo que no pertenece a la lista original, y por tanto esa lista no era completa. En el caso de que Q no sea primo, forzosamente tendrá que ser divisible por algún número primo que no puede ser uno de los de la lista, ya que al dividir Q por cualquiera de los primos de la lista siempre obtendremos 1 como resto. Por lo tanto, tiene que existir otro primo P_{n+i} En cualquiera de los dos casos hemos encontrado un número primo que NO estaba en la lista original. Ahora podemos añadir este nuevo primo a la lista y repetir el proceso un infinito número de veces. Siempre encontraremos un primo que no está en la lista.
La cantidad de números primos es infinita.

12. Demostrar por inducción que para cada número natural n la suma de los n primeros números naturales vale $\frac{n(n+1)}{2}$

Vamos a demostrar la propiedad

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

1. Caso inicial: demostrar que se cumple para $n = 1$.

   $$1 = \tfrac{1(1+1)}{2} = 1$$

2. Caso inductivo: partiendo de $n - 1$, demostrar n.
   Asumimos que

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \tfrac{n(n-1)}{2}$$

   Vamos a a calcular

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) + n = \tfrac{n(n-1)}{2} + n = \tfrac{n(n-1)+2n}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

13. Demostrar que para cada número natural n distinto de 1 se verifica que n es primo o se puede representar como producto de números primos.

Demostración por inducción. La hipótesis es cierta en el caso $n = 2$. Supongamosla cierta para $n \leq m$ y probemos que $m + 1$ es un producto de primos. Si tenemos tanta suerte que $m + 1$ es primo, entonces no hay nada que demostrar, en caso contrario, $m + 1$ se podrá escribir de la forma $m + 1 = n_1 \cdot n_2$ con $1 < n_1 \cdot n_2 < m + 1$. Por ser n_1 y n_2 menores que $m + 1$ y mayores que 1, ambos serán productos de primos y también lo habrá de ser $m + 1$.

14. Demostrar, por distinción de casos, que si a y b son dos números reales, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Partimos de la definición de valor absoluto $|r|$ de un número r.

$$|r| = r \text{ si } r \geq 0$$
$$|r| = -r \text{ si } r < 0$$

Luego $|r|$ es siempre ≥ 0 y siempre $r \leq |r|$. Si $a + b \geq 0$ entonces $|a + b| = a + b$.
Como $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, se tiene la desigualdad.
Si $a + b < 0$ entonces $|a + b| = -a - b$.
Como $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, tambien se tiene la desigualdad.

15. Demostrar que para dos números naturales cualesquiera, x, y, es imposible que se verifique que $3x^2 = y^2 + 1$.

Puesto que el primer término es múltiplo de 3 es claro que $y^2 + 1$ lo debe ser. Entonces y^2 no lo puede ser y por lo tanto y tampoco. Entonces es de una de las dos formas posibles: $y = 3h + 1$ o bien $y = 3h - 1$. Pero en cualquier caso y^2 (haciendo cuentas) es de la forma $3k + 1$ que nunca puede ser igual a $3x^2$.

$$y^2 = 9h^2 + 6h + 1 = 3(3h^2 + 2h) + 1 = 3 * h' + 1$$
$$y^2 = 9h^2 + 1 = 3 * (3h^2) + 1 = 3 * h'' + 1$$

Entonces tenemos
$3x^2 = 3h + 2$ que no se puede dar ya que 2 no es multiplo de 3.

16. Demostrar que la siguiente proposición es falsa: "Para tres números enteros no nulos cualesquiera, x, y, z, y para cualquier número natural $n \geq 2$, se verifica que $x^n + y^n \neq z^n$".

Demostración por contraejemplo. Nos basta tomar como valores $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ y $n = 2$. Es claro que:

$$3^2 + 4^2 \neq 5^2$$