1 泊松分布

指数分布和泊松分布息息相关，所以先简单回忆下之前介绍过的泊松分布。公司楼下有家馒头店，每天早上六点到十点营业：

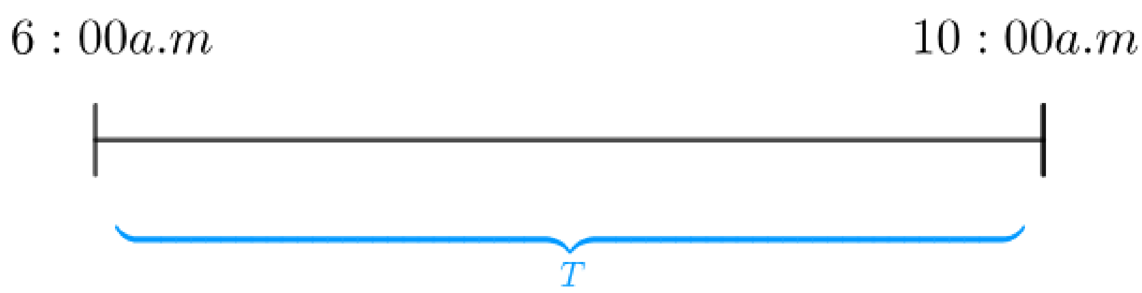
老板统计了一周每日卖出的馒头（为了方便计算和讲解，缩小了数据），想从中找到一些规律：

	销售
周一	3
周二	7
周三	4
周四	6
周五	5

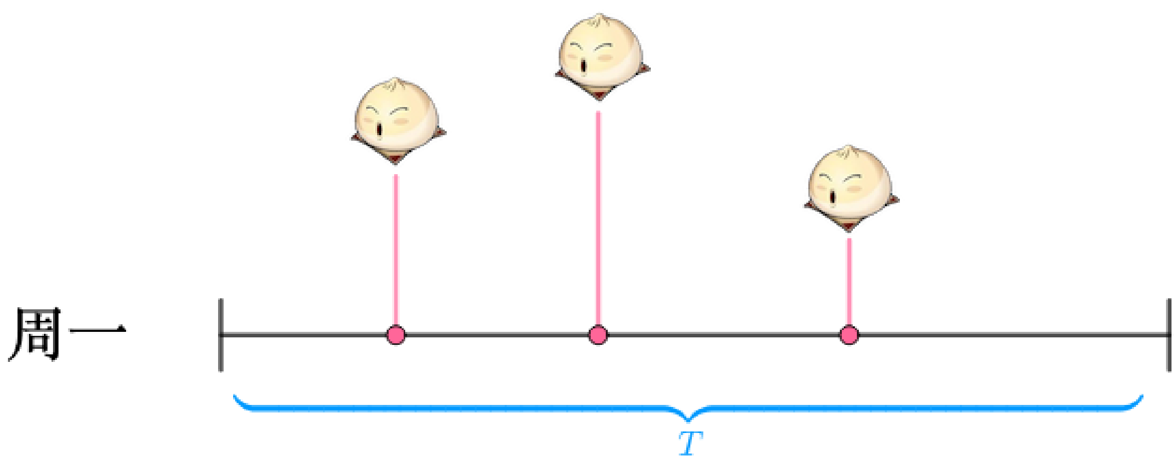
从中可以得到最简单的规律，均值：

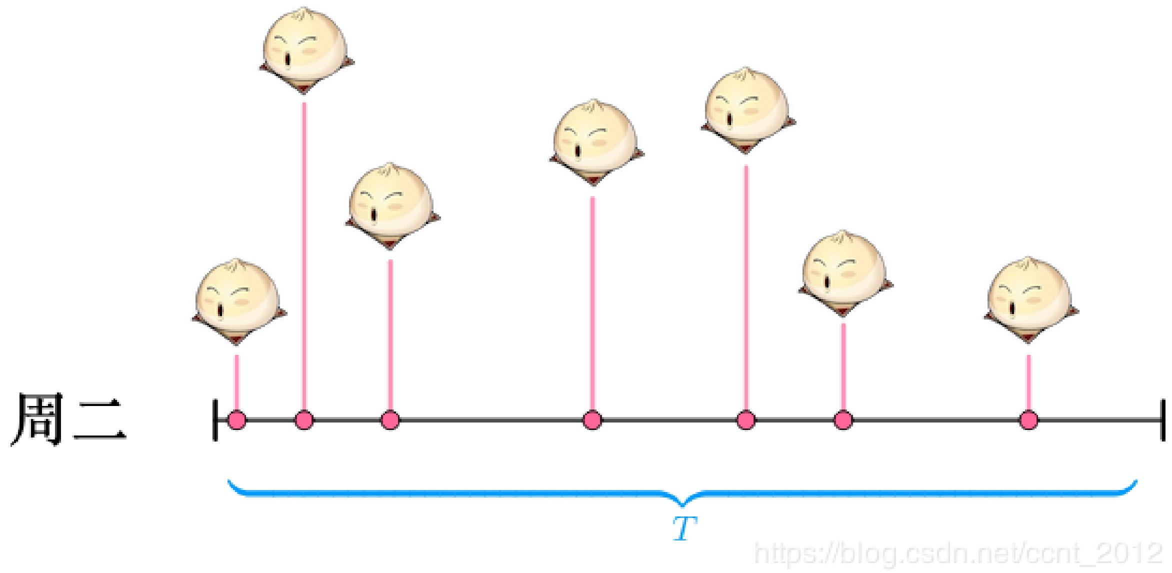
$$\overline{X} = \frac{3+7+4+6+5}{5} = 5$$

这个规律显然不够好，如果把营业时间抽象为一根线段，把这段时间用T 来表示：



然后把卖出的馒头数画在这根线段上（节约篇幅，只画出周一周二作为示意），可以看到每天卖出的馒头起伏还是很大的：





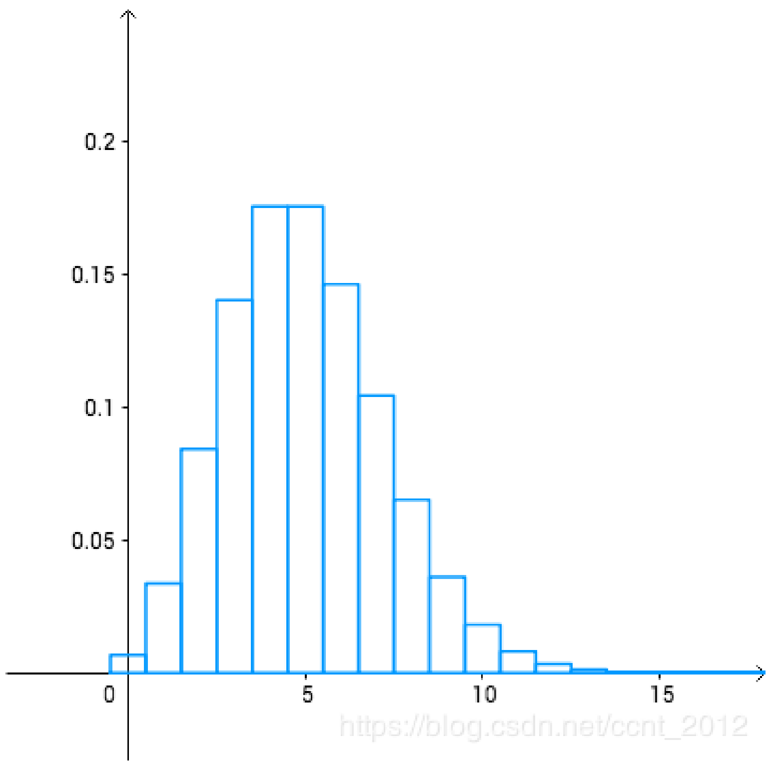
经过老板一系列的骚操作（更具体的推导请看如何理解泊松分布），最后得到每日卖出的馒头数X 服从泊松分布：

$$X \sim P(\lambda), \quad \lambda = \overline{X}$$

泊松分布的具体表达式为：

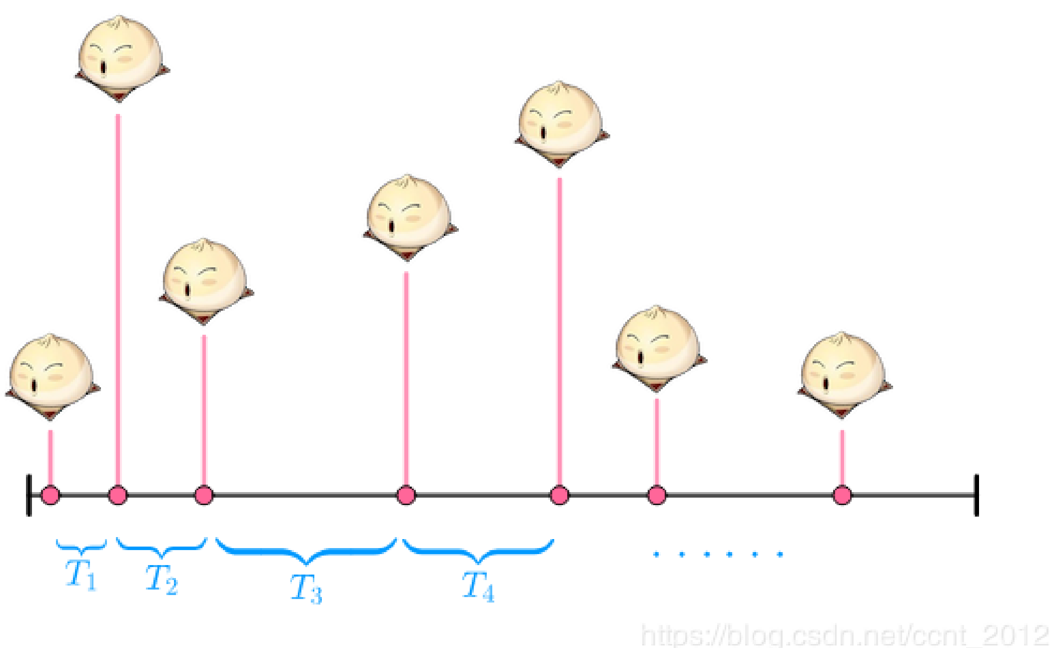
$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

据此可以画出每日卖出馒头数的概率分布，这个规律就比均值要精细很多了：



2 馒头卖出之间的时间间隔

下面来讨论另外一个问题，馒头卖出之间的时间间隔：



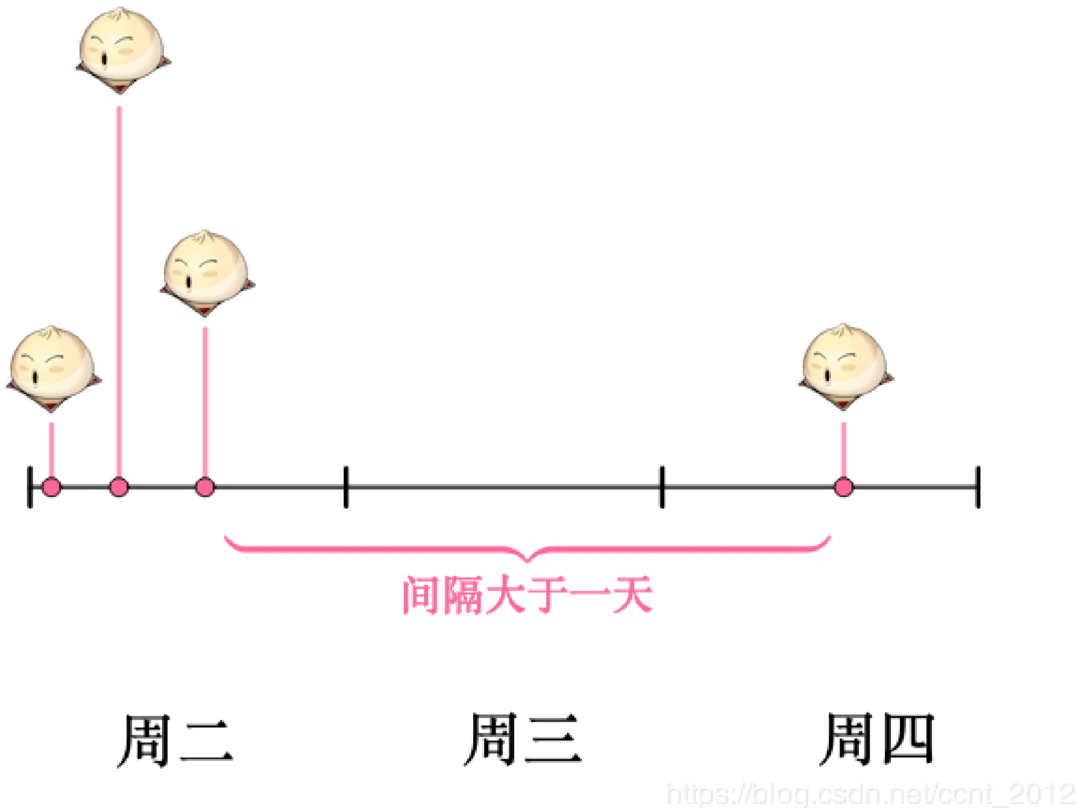
可以看出也是随机变量（也就是图中的T_1、T_2、T_3、$\cdots$），不过相对馒头卖出个数而言，时间间隔肯定是连续的随机变量。

如果知道这个时间间隔，老板也好调整自己的服务员人数（时间间隔短，那么需要的服务人员就多，反之需要的就少），优化成本结构。那么问题来了，这个时间间隔服从什么分布？

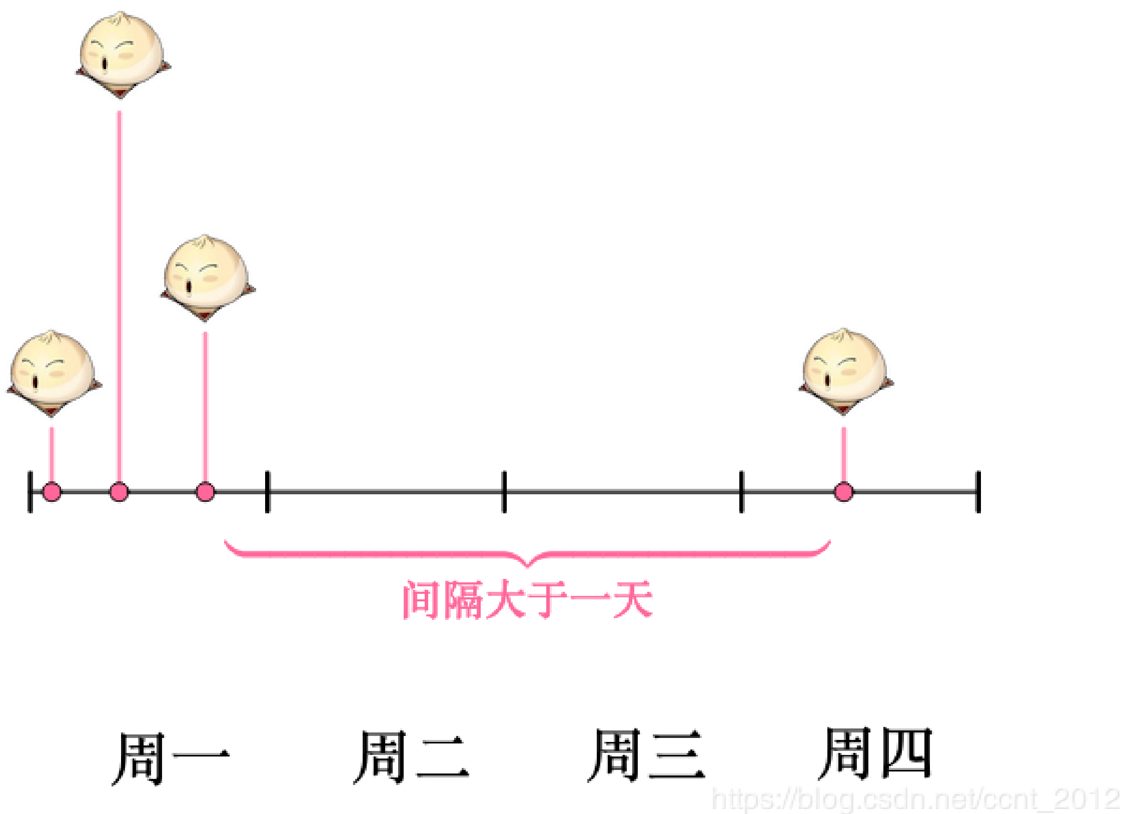
3 一天的间隔

既然都是卖馒头的问题，那么还是让我们从已知的泊松分布上想想办法。之前得到的泊松分布让我们知道了每天卖出的馒头数，所以下面按天来分析看看。

假如某一天没有卖出馒头，比如说周三吧，这意味着，周二最后卖出的馒头，和周四最早卖出的馒头中间至少间隔了一天：



当然也可能运气不好，周二也没有卖出馒头。那么卖出两个馒头的时间间隔就隔了两天，但无论如何时间间隔都是大于一天的：



而某一天没有卖出馒头的概率可以由泊松分布得出：

$$P(X=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

根据上面的分析，卖出两个馒头之间的时间间隔要大于一天，那么必然要包含没有卖出馒头的这天，所以两者的概率是相等的。如果假设随机变量为：

$$Y=\text{卖出两个馒头之间的时间间隔}$$

那么就有：

$$P(Y>1)=P(X=0)=e^{-\lambda}$$

4 泊松过程

之前求出的泊松分布实在限制太大，只告诉了我们每天卖出的馒头数。不过没有关系，稍微扩展下可以得到新的函数：

$$P(X=k,t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

通过新的这个函数就可知不同的时间段内卖出的馒头数的分布了（$t=1$ 时就是泊松分布）：

	t	PDF
每天卖出的馒头数	1	$P(X=k,1)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
半天卖出的馒头数	$\frac{1}{2}$	$P(X=k,\frac{1}{2})=\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}\lambda}$
三小时卖出的馒头数	$\frac{1}{8}$	$P(X=k,\frac{1}{8})=\frac{\left(\frac{1}{8}\lambda\right)^k}{k!}e^{-\frac{1}{8}\lambda}$

扩展后得到的函数称为 泊松过程 ，这里涉及到比较复杂的知识，就不做推导了，感兴趣的同学可以自行根据关键字扩展学习。

5 指数分布

两次卖出馒头之间的时间间隔大于t 的概率，根据之前的分析，等同于t 时间内没有卖出一个馒头的概率，而后者的概率可以由泊松过程给出。至此所需的条件都齐备了，那么开始解题吧，假设随机变量：

$$Y=\text{两次卖出馒头之间的时间间隔}$$

这个随机变量的概率可以如下计算：

$$P(Y>t)=P(X=0,t)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t},\quad t\geq 0$$

进而有：

$$P(Y\leq t)=1-P(Y>t)=1-e^{-\lambda t}$$

这其实已经得到了Y 的累积分布函数了：

$$F(y)=P(Y\leq y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

对其求导就可以得到概率密度函数：

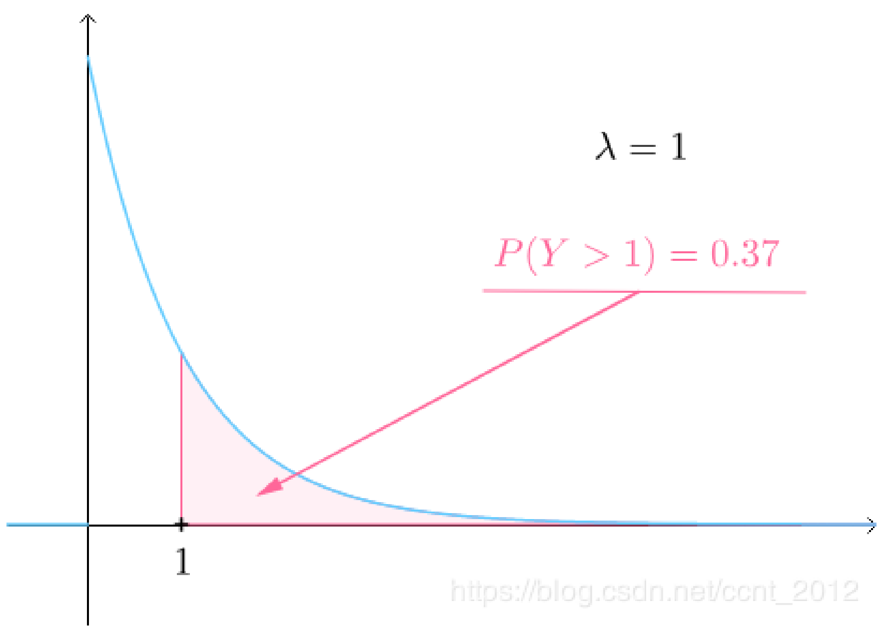
$$p(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

这就是卖出馒头的时间间隔Y 的概率密度函数，也称为 指数分布 。

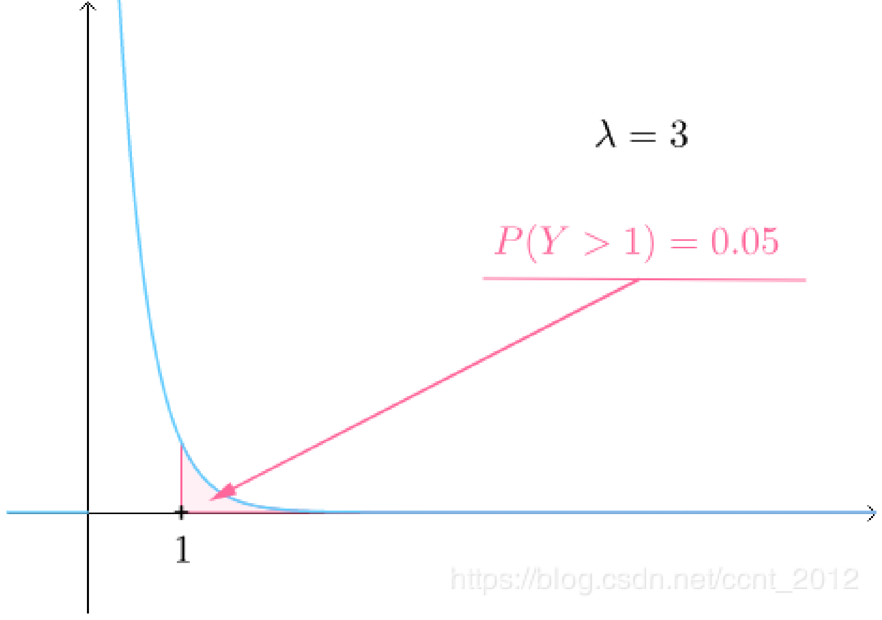
6 指数分布的图像

指数分布中的λ 是每日平均卖出的馒头数，如果λ 越大，也就是说每日卖出的馒头越多，那么两个馒头之间的时间间隔必然越短，这点从图像上也可以看出。

当λ 较小的时候，比如说$\lambda=1$ 吧，也就是说一天只卖出一个馒头，那么馒头卖出间隔时间大于1的可能性就很大（下图是指数分布的概率密度函数的图像，对应的概率是曲线下面积）：



而如果λ 较大的时候，比如说$\lambda=3$ 吧，也就是说一天卖出三个馒头，那么馒头卖出间隔时间大于1的可能性已经变得很小了：



7 泊松分布与指数分布的期望

每日卖出馒头的数目X 服从泊松分布，卖出馒头的时间间隔Y 服从指数分布：

$$X \sim P(\lambda), \quad Y \sim Exp(\lambda)$$

他们的期望分别为：

$$E(X) = \lambda, \quad E(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

根据之前的分析就比较好理解了，$E(X)$ 的含义是平均每日卖出的馒头数，而$E(Y)$ 是每个馒头之间卖出的平均时间间隔，所以两者是倒数关系：每日卖出的越多自然间隔时间越短，每日卖出的越少自然间隔时间越长。

8 小结

还有未尽的一些解释，比如：

- 为什么指数分布常常用来描述电器寿命？
- 为什么指数分布和几何分布一样具有无记忆性？

这里就不一一解释了，感兴趣可以参加我们的《概率论与数理统计》课程，其中有更多更详尽的解释。