主要内容是什么是**Wallis公式**以及它的推导过程。然后讲述Wallis公式的两个重要应用，即**推导Stirling公式**和**求解Euler-Poisson积分**。

1. **什么是Wallis公式**

Wallis公式是关于圆周率的无穷乘积的公式，公式内容如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$$

其中$(2n)!!=2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)$，$(2n-1)!!=1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)$

开方后还可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

2. **Wallis公式的推导过程**

Wallis公式的推导采用对$\sin^n x$在区间$[0,\pi/2]$内的积分完成，令

$$I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

用部分积分法得到如下推导过程

$$\begin{aligned}I(n)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\\&=-\cos x\sin^{n-1}x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}x dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\\&=(n-1)I(n-2)-(n-1)I(n)\end{aligned}$$

进一步得

$$I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{I(2n+1)}{I(2n-1)}=\dfrac{2n}{2n+1}\\\dfrac{I(2n)}{I(2n-2)}=\dfrac{2n-1}{2n}\end{cases}$$

所以继续得到

$$\begin{aligned}\frac{I(3)}{I(1)}\times\frac{I(5)}{I(3)}\times\ldots\times\frac{I(2n+1)}{I(2n-1)}&=\frac{2\times 1}{2\times 1+1}\times\frac{2\times 2}{2\times 2+1}\times\ldots\times\frac{2\times n}{2\times n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\\frac{I(2)}{I(0)}\times\frac{I(4)}{I(2)}\times\ldots\times\frac{I(2n)}{I(2n-2)}&=\frac{2\times 1-1}{2\times 1}\times\frac{2\times 2-1}{2\times 2}\times\ldots\times\frac{2\times n-1}{2\times n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

所以最终得到

$$I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & n=0\\1 & n=1\\\dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & n=2k+1\\\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2} & n=2k\end{cases}$$

由$\sin x$的单调性可知

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x\qquad x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$
$$\Downarrow$$
$$I(2k+1)<I(2k)<I(2k-1)$$

即得到

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\quad\Rightarrow\quad 1<\frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}}<\frac{2k+1}{2k}$$

由**两边夹挤准则**得到

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$$

这样就推导出了**Wallis公式**。

3. **利用Wallis公式推导Stirling公式**

斯特林公式如下

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

接下来利用**Wallis公式**来推导**斯特林公式**。

借助函数$f(x)=\ln x$的图像面积，通常有三种求法，分别是**积分法**，**内接梯形分割法**，**外切梯形分割法**。实际上最准确的是第一种，后面两种都有一定误差。

对于积分法求面积有

$$A_n=\int_1^n\ln x dx=n\ln n-n+1$$

对于内接梯形分割法有

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{1}{2}(\ln 1+\ln 2)\times 1+\frac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)\times 1+\ldots+\frac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n)\times 1\\&=\frac{1}{2}(2\ln 2+2\ln 3+\ldots+2\ln n)-\frac{1}{2}\ln n\\&=\ln n!-\frac{1}{2}\ln n\end{aligned}$$

很容易知道$P_n<A_n$，令$B_n=A_n-P_n$，很容易证明B_n为有界递增序列，则

$$B_n=n\ln n-n+1-\ln n!+\frac{1}{2}\ln n$$
$$\Downarrow$$
$$\ln n!=1-B_n+\ln n^n+\ln\sqrt{n}-\ln e^n$$
$$\Downarrow$$
$$n!=e^{1-B_n}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

接下来令$\beta_n=e^{1-B_n}$，则β_n有极限，设

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\beta$$

则根据**Wallis公式**得到

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2^{2k}\left(\beta_k\sqrt{k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^2}{\beta_{2k}\sqrt{2k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}\right)^2\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$$

进一步化简得到

$$\beta^2\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{2}\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$$

、

所以最终得到

$$\beta=\sqrt{2\pi}$$

带入原式得到**斯特林公式**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4. **利用Wallis公式求解Euler-Poisson积分**

在上面，我通过Wallis公式完美地推导了斯特林公式，接下来继续看Wallis公式的另一个应用，即**求解Euler-Poisson积分**

Euler-Poisson积分是无限区间$[0,+\infty)$上的非正常积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

它在概率论等数学分支以及其它自然科学中都有重要应用，由于它的被积函数的原函数不能用初等函数表示，因此不能用**牛顿-莱布尼兹公式**求它的值。现在我就用上面学到的Wallis公式来求解。

借助函数$f(x)=(1+x)e^{-x}$在$x=0$时取得最大值1，因此对于任何$x\neq 0$，都有$(1+x)e^{-x}<1$，从而得到$(1-x^2)e^{x^2}<1$和$(1+x^2)e^{-x^2}<1$，所以

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}\qquad x\in[0,+\infty)$$

、

对任意自然数n都有

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

由于

$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{n}x)^2}d(\sqrt{n}x)=\frac{1}{\sqrt{n}}I$$

那么，我们又知道

$$\begin{aligned}&\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\&\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

即得到不等式为

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{1}{\sqrt{n}}I<\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

同时取平方后得到

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}<I^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2\cdot(2n-1)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

由**Wallis公式**可以推出，在$n\to+\infty$的情况下，两边都是以$\pi/4$为极限，由**两边夹挤准则**得到

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$