1 甜在心馒头店

公司楼下有家馒头店：

每天早上六点到十点营业，生意挺好，就是发愁一个事情，应该准备多少个馒头才能既不浪费又能充分供应？

老板统计了一周每日卖出的馒头（为了方便计算和讲解，缩小了数据）：

	销售
周一	3
周二	7
周三	4
周四	6
周五	5

均值为：

$$\overline{X}=\frac{3+7+4+6+5}{5}=5$$

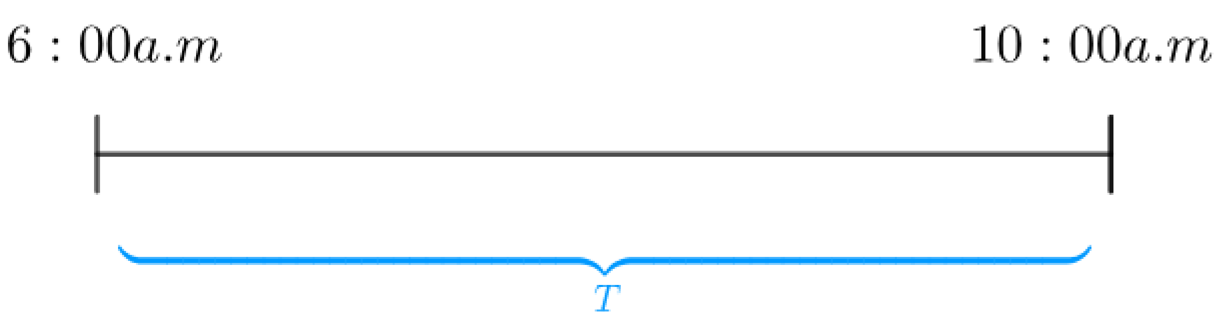
按道理讲均值是不错的选择（参见“如何理解最小二乘法？”），但是如果每天准备5个馒头的话，从统计表来看，至少有两天不够卖，40% 的时间不够卖：

	销售	备货五个
周一	3	
周二	7	不够
周三	4	
周四	6	不够
周五	5	

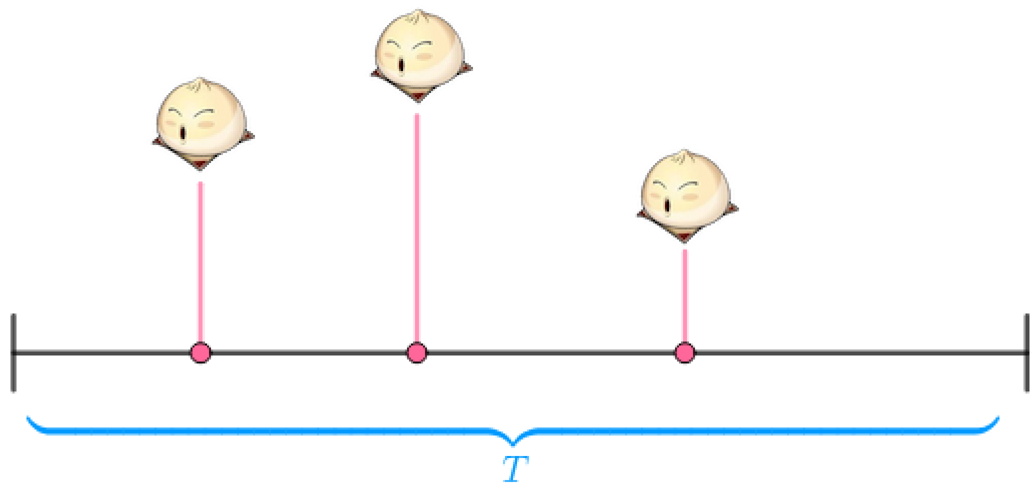
你“甜在心馒头店”又不是小米，搞什么饥饿营销啊？老板当然也知道这一点，就拿起纸笔来开始思考。

2 老板的思考

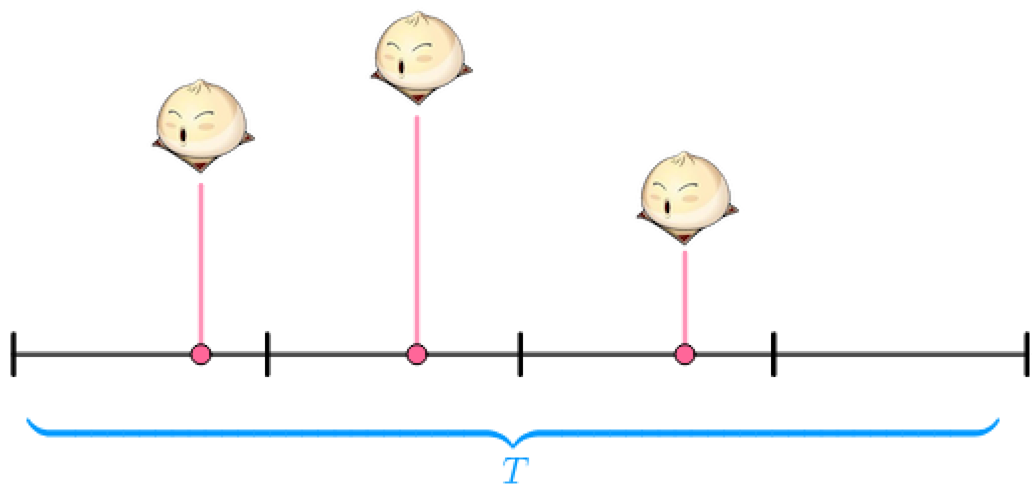
老板尝试把营业时间抽象为一根线段，把这段时间用 T 来表示：



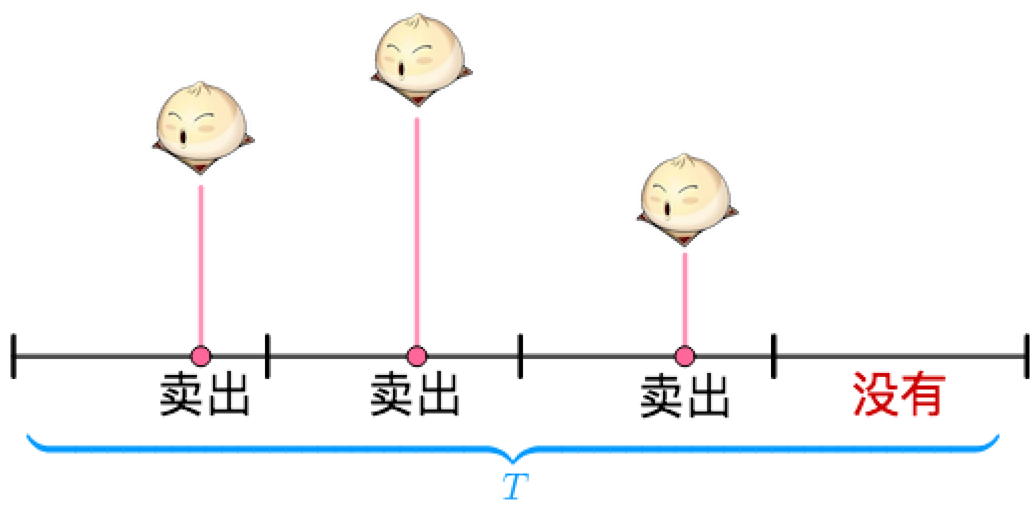
然后把周一的三个馒头（甜在心馒头是有褶子的馒头）按照销售时间放在线段上：



把 T 均分为四个时间段：



此时，在每一个时间段上，要不卖出了（一个）馒头，要不没有卖出：



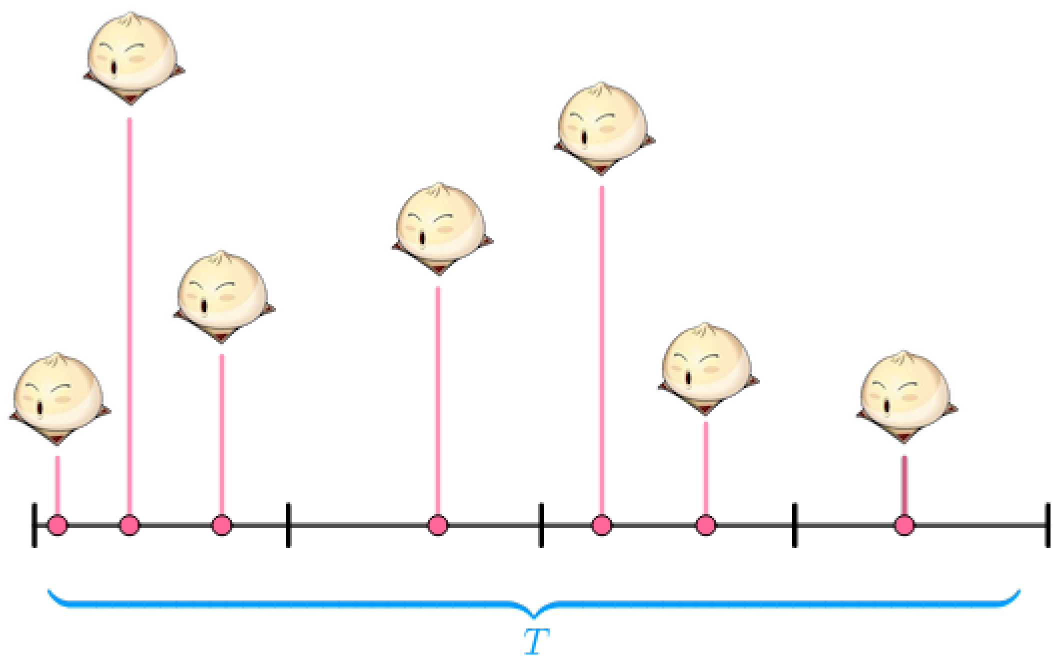
在每个时间段，就有点像抛硬币，要不是正面（卖出），要不是反面（没有卖出）：

T 内那么卖出3个馒头的概率，就和抛了4次硬币（4个时间段），其中3次正面（卖出3个）的概率一样了。

这样的概率通过二项分布来计算就是：

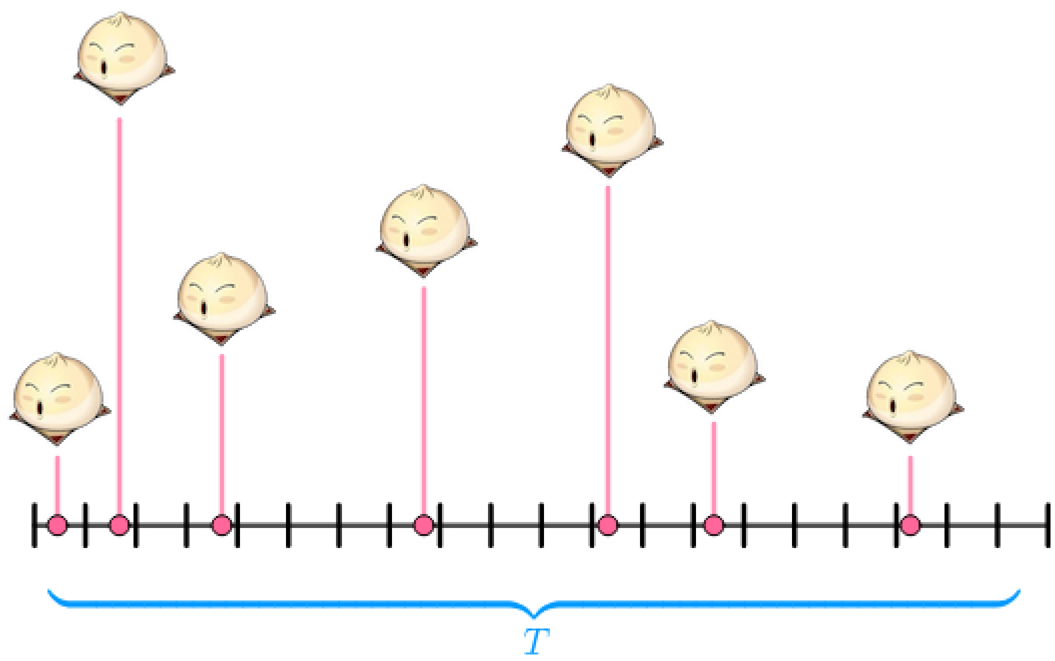
$$\binom{4}{3}p^3(1-p)^1$$

但是，如果把 周二 的七个馒头放在线段上，分成四段就不够了：



从图中看，每个时间段，有卖出3个的，有卖出2个的，有卖出1个的，就不再是单纯的“卖出、没卖出”了。不能套用二项分布了。

解决这个问题也很简单，把 T 分为20个时间段，那么每个时间段就又变为了抛硬币：



这样，T 内卖出7个馒头的概率就是（相当于抛了20次硬币，出现7次正面）：

$$\binom{20}{7}p^7(1-p)^{13}$$

为了保证在一个时间段内只会发生“卖出、没卖出”，干脆把时间切成 n 份：

$$\binom{n}{7}p^7(1-p)^{n-7}$$

越细越好，用极限来表示：

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{7}p^7(1-p)^{n-7}$$

更抽象一点，T 时刻内卖出 k 个馒头的概率为：

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

3 p 的计算

“那么”，老板用笔敲了敲桌子，“只剩下一个问题，概率 p 怎么求？”

在上面的假设下，问题已经被转为了二项分布。二项分布的期望为：

$$E(X)=np=\mu$$

那么：

$$p=\frac{\mu}{n}$$

4 泊松分布

有了 $p=\dfrac{\mu}{n}$ 了之后，就有：

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{\mu}{n}^k(1-\frac{\mu}{n})^{n-k}$$

我们来算一下这个极限：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{\mu}{n}^k(1-\frac{\mu}{n})^{n-k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\mu^k}{n^k}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu^k}{k!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\end{aligned}$$

其中：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}=e^{-\mu}$$

所以：

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{\mu}{n}^k(1-\frac{\mu}{n})^{n-k}=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

上面就是泊松分布的概率密度函数，也就是说，在 T 时间内卖出 k 个馒头的概率为：

$$P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

一般来说，我们会换一个符号，让 $\mu=\lambda$ ，所以：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

这就是教科书中的泊松分布的概率密度函数。

5 馒头店的问题的解决

老板依然蹙眉，不知道 μ 啊？

没关系，刚才不是计算了样本均值：

$$\overline{X}=5$$

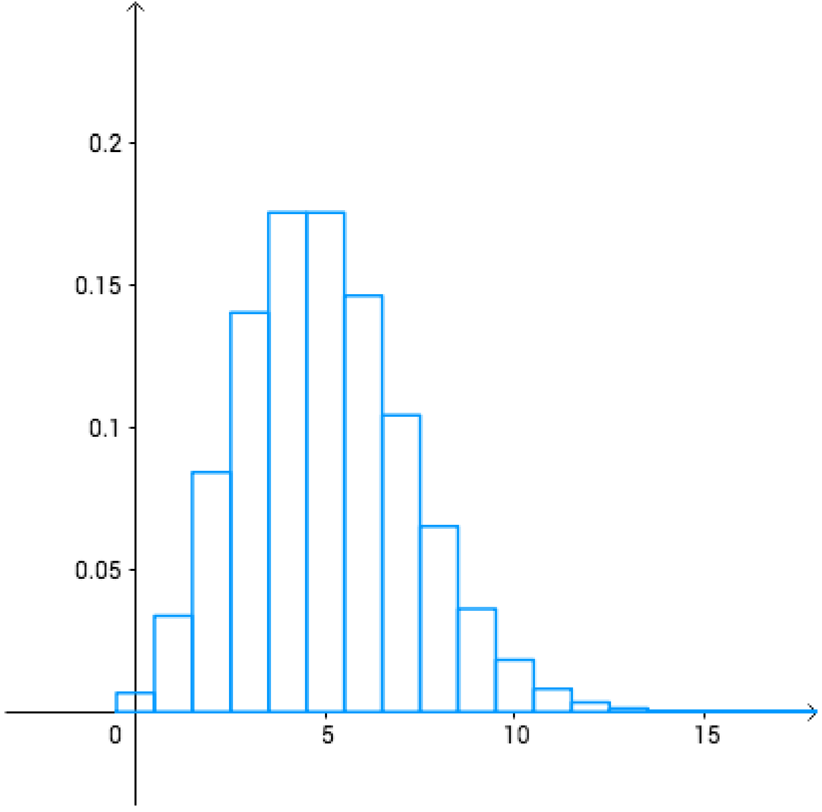
可以用它来近似：

$$\overline{X}\approx\mu$$

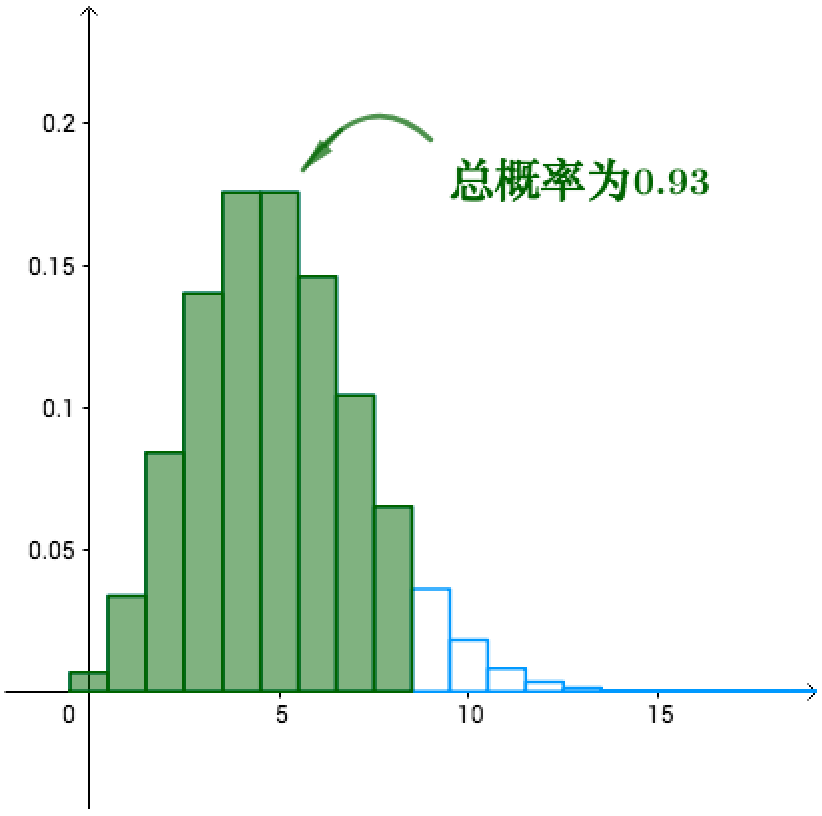
于是：

$$P(X=k)=\frac{5^k}{k!}e^{-5}$$

画出概率质量函数的曲线就是：



可以看到，如果每天准备8个馒头的话，那么足够卖的概率就是把前8个的概率加起来：



这样 93% 的情况够用，偶尔卖缺货也有助于品牌形象。

老板算出一脑门的汗，“那就这么定了！”

6 总结

这个故事告诉我们，要努力学习啊，要不以后馒头都没得卖。

生活中还有很多泊松分布。比如物理中的半衰期，我们只知道物质衰变一半的时间期望是多少，但是因为不确定性原理，我们没有办法知道具体哪个原子会在什么时候衰变？所以可以用泊松分布来计算。

还有比如交通规划等等问题。