Taylor多项式：

若函数 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶导数则称 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式。

常见积分函数：

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C;$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln[x+\sqrt{x^2+a^2}]+C$$

例如 将真分式 $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)^3(x^2+x+1)}$ 分解成部分分式.

$$原式=\frac{A_{11}}{(x-1)}+(\frac{A_{12}}{x-2}+\frac{A_{22}}{(x-2)^2})+(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+1)^2}+\frac{B_{31}x+C_{31}}{(x^2+1)^3})+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+x+1)}.$$

其中 A_{ij},B_{ij} 与 C_{ij} 均为常数，下面将用待定系数法求出.

注意：
tanX的导数是1/cosX^2
利用万能公式可以将三角有理函数转换为真分式有理函数
无理函数一般可用三角函数转换成三角有理函数0（or (ax+b)^(1/n),令整体等于t即可），然后再做积分
当定积分的积分域对称时，考虑被积函数奇偶性能化简定积分，有时候可以通过换元将积分域搞成对称积分域
当n是奇数时对类似cosx^(-n)求积分技巧分子分母同乘以余弦值，再将分母的余弦改成正弦

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\xrightarrow{t=1/x}\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{\sqrt[4]{1+t^4}}{t}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt[4]{1+t^4}}\xrightarrow{u^4=1+t^4}=-\int\frac{\frac{1}{4}*4u^3(u^4-1)^{-\frac{3}{4}}}{u\sqrt[4]{u^4-1}}du$$
$$=-\int\frac{u^2}{u^4-1}du=-\frac{1}{2}\int\frac{(u^2+1)-(1-u^2)}{u^4-1}du=-\frac{1}{2}(\int\frac{du}{u^2+1}+\int\frac{du}{u^2-1})$$
$$=-\frac{1}{2}\arctan u-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c$$
$$=-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right|+c$$

华里士（Wallis）公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

空间曲线的切线和法平面（无切平面）：
主要思想是将直线看成参数方程
则在M0处的切向量为lim(t→t0)[x(t)-x(t0),y(t)-y(t0),z(t)-z(t0)]=lim(t→t0)[x(t)-x(t0),y(t)-y(t0),z(t)-z(t0)]/(t-t0)=(x'(t0),y'(t0),z'(t0))
切线方程为[x-x(t0)]/x'(t0)=[y-y(t0)]/y'(t0)=[z-z(t0)]/z'(t0)
法平面为[x-x(t0)]x'(t0)+[y-y(t0)]y'(t0)+[z-z(t0)]z'(t0)=0

如何求形如{F(x,y,z)=0;G(x,y,z)=0}的直线切线向量a?
应为a与F(x,y,z)和G(x,y,z)的法向量(F'x,F'y,F'z)，(G'x,G'y,G'z)同时垂直，即a=|i,j,k;F'x,F'y,F'z;G'x,G'y,G'z|

空间曲面的切平面和法向量（无切线）：
主要思想是过曲面一点的无数属于曲面的曲线{x=x(t),y=y(t),z=z(t)}满足F(x(t),y(t),z(t))=0
对t求导得(F'x,F'y,F'z)(x'(t),y'(t),z'(t))=0，所以(F'x,F'y,F'z)是曲面在任意点(x,y,z)处的法向量
(a,b,c)处切面方程(x-a)F'x(a,b,c)+(y-b)F'y(a,b,c)+(z-c)F'z(a,b,c)=0

奇函数定义域关于原点对称，图像关于原点对称（f(x)=-f(-x)）
偶函数定义域关于原点对称，图像关于y轴对称（f(x)=f(-x)）
函数与反函数图像在同一个平面内关于y=x对称

等价无穷小量(原函数在x=0处的切线)：
x->0 tan(x) ~ sin(x) ~ ln(1+x) ~ e^x-1~ arctan(x)~ arcsin(x)~ x
x->0 (1+x)^1/x ~ e
极限式的乘除可以用等价无穷小替换,但在加减中替换成等价无穷小不一定正确

重要（不）等式：
x/(x+1)<ln(x+1)<x (x>0)
sinx<x<tanx (0<x<pi/2)
｜｜x｜-｜y｜｜≤|x±y|≤｜x｜+｜y｜
(a,b)^2≤(a,a)(b,b) => (∑xiyi)^2≤(∑xi^2)*(∑yi^2) => 可以联想到概率论中相关系数计算
1^2+2^2+...+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 => 由(n+1)^3-n^3=1+3n^2+3n累加可证
1^3+2^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2=[n(n+1)]^2/4 => 由(n+1)^4-n^4=1+4n^3+6n^2+4n累加可证

数学归纳法：
最简单和常见的数学归纳法是证明当*n*等于任意一个自然数时某命题成立。证明分下面两步：
证明当n= 1时命题成立。
假设n=m时命题成立，那么可以推导出在n=m+1时命题也成立。（m代表任意自然数）

数列极限：
夹逼准则：
如果数列{Xn},{Yn}及{Zn}满足下列条件：

1. 当n>No时，其中No∈N*，有Yn≤Xn≤Zn，
2. 当n→+∞，limYn =limZn =a，

那么，数列{Xn}的极限存在，且当 n→+∞，limXn =a。该结论可以推广至函数
数列极限与子列极限关系：
数列{An}收敛的充要条件是他的所有子列均收敛，此时有子列的极限等于数列{An}的极限
单调有界收敛定理：
若数列{An}单增有上界，则{An}收敛于sup{An},若数列{An}单增减有下界，则{An}收敛于inf{An}
如判断(1+1/n)^n,先用二项式定理展开判断An+1>An，再用放缩法证明An<3

收敛级数性质：
若数列{An}的级数收敛，则n->∞ limAn=0
若数列{An}的级数收敛，c是一个常数，则数列{cAn}的级数收敛且是数列{An}级数的c倍
若数列{An}，{Bn}的级数均收敛，则数列{An+Bn}的级数收敛且是数列{An}，{Bn}级数的和

正项级数比阶判敛法：
设An≥0且n→+∞时lim(n^p*An)=C,则
当0≤C<+∞（高阶or同阶无穷小）且p>1时{An}级数收敛
当0<C≤+∞（同阶or低阶无穷小）且p≤1时{An}级数发散
正项级数比值判敛法(处理不了C=1情况)：
设An>0且n→+∞时lim(An+1/An)=C,则
当C<1时{An}级数收敛，可用于求幂级数收敛半径
当C>1（+∞）时{An}级数发散，且n→+∞，lim(An)=+∞，so可以用级数的特性处理数列极限问题，例如当n→+∞时limn^n/(n!3^n)收敛
正项级数根式判敛法(处理不了C=1情况)：
设An>0且n→+∞时limAn^1/n=C,则
当C<1时{An}级数收敛，可用于求幂级数收敛半径
当C>1（+∞）时{An}级数发散，且n→+∞，lim(An)=+∞，so可以用级数的特性处理数列极限问题
正项级数积分判敛法：
设An>0，级数范围n∈[1,+∞),函数f(x)在[1,+∞)单减，且有f(n)=An
则{An}级数与无穷积分∫(1,+∞)f(x)dx的收敛性一致

交错级数Leibniz判敛法：
若交错级数∑(-1)^(n-1)An（An>0）满足数列{An}单减且n→+∞时limAn=0
则交错级数收敛且值∈[a1-a2,a1]

一般级数绝对值判敛法：
若级数∑|An|收敛，则级数∑An也收敛

幂级数：
设数列{Anx^n}构成的幂级数收敛半径为R，和函数为S(x)
连续性 => 幂级数的和函数在(-R,R)内连续
可积性 => 对于任意的x∈(-R,R)，∫(0,x)S(t)dt=∑[An*x^(n+1)]/(n+1)，新级数收敛半径R'≥R
可导性 => 和函数在(-R,R)内任意阶可导，且对于任意的x∈(-R,R)，可对和函数和幂级数两边同时求k阶导，新的幂级数收敛半径也为R

函数f(x)在收敛半径内幂级数展开必须满足f(x)是任意阶可导
函数幂级数展开

- 先对函数求导
- 先对函数积分
- 整体替换（如1/(1+x^2)可以看成1/(1+x)展开）

幂级数求和套路一样
∑(1,∞)x^n/[n(n+1)]=[xS(x)]'' => S(x)=[ln(1-x)]/x-ln(1-x)+1
∑(0,∞)n*0.8^n] => 将0.8换成x即变成幂级数求和，结果是x/(1-x)^2=20
∫(0,1)[ln(1+t)]/tdt=∑(1,∞)[(-1)^(n+1)/n^2]=π^2/12

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$
$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots,x\in(-1,1]$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$
$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$
$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-1,1)$$
$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots,x\in(-1,1)$$
$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\cdots x\in(-1,1)$$
$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$
$$\csc x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\cdots,x\in(0,\pi)$$
$$\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots,x\in(0,\pi)$$

傅立叶（Fourier）级数：
{1,sinx,cosx,sin2x,cos2x...sinnx,cosnx}彼此构成∫(-π,π)f(x)g(x)dx=0正交函数族（无限维空间中的正交基）
傅立叶级数形如A0/2+∑(1,∞)（AncosnX+BnsinnX），可适用于任何周期函数，其中An=1/π∫(-π,π)f(x)cosnXdx，Bn=1/π∫(-π,π)f(x)sinnXdx
对于周期为2L的周期函数f(x),令g(t)=f(Lt/π)即可得到周期为2π的周期函数g(t),傅立叶级数形如A0/2+∑(1,∞)[Ancos(nπX/L)+Bnsin(nπX/L)]，其中An=1/L∫(-L,L)f(x)cos(nπX/L)dx，Bn=1/L∫(-L,L)f(x)sin(nπX/L)dx

---

傅立叶（Fourier）级数收敛性：
狄里克莱判别法

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段单调，且最多只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数点点收敛，并且

（1）若 x_0 为 $f(x)$ 的连续点，形式 Fourier 级数收敛到 $f(x_0)$，即
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0]=f(x_0)$$

（2）若 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，形式 Fourier 级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$，即
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0]=\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

（3）在端点 $-\pi,\pi$，形式 Fourier 级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$，即
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos n\pi]=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$$

复合函数求偏导：
z=f(xy,x/y)，f具有二阶连续混合偏导，如f=sin(u+v)
记u=xy,v=x/y
∂z/∂x=(∂f/∂u)y+(∂f/∂v)/y
$∂^2$z/∂y∂x=∂f/∂u+y[($∂^2$f/∂u^2)x-($∂^2$f/∂v∂u)(x/y^2)]-(∂f/∂v)/y^2+1/y[($∂^2$f/∂u∂v)x-($∂^2$f/∂v^2)(x/y^2)] => $∂^2$f/∂v∂u=$∂^2$f/∂u∂v可以进一步化简

偏导数整体就是个符号，不能理解成分数，一元函数导数可以看成是分数
二阶混合偏导与自变量求导顺序无关

隐函数定义：
若存在y=f(x)满足F(x,f(x))=0 （x∈(a,b)），则称y=f(x)是由方程F(x,f(x))=0确定的隐函数
当满足隐函数存在定理时
[∂F(x,y)/∂x]dx+[∂F(x,y)/∂y]dy=0 =>两边做微分
∂F(x,y)/∂x+[∂F(x,y)/∂y](dy/dx)=0 =>两边对x求导

```
已知z^x=y^z,求z关于x和关于y的一阶偏导
xlnz=zlny
(lnz)dx+(x/z)dz=(lny)dz+(z/y)dy
dz=[yzlnz/(yzlny-xy)]dx-[z^2/(yzlny-xy)]dy
∂z/∂x=yzlnz/(yzlny-xy),∂z/∂y=z^2/(yzlny-xy)
```

```
对y=[(x-1)(x-2)/(x-3)/(x-4)]^.5求导  lny=.5[ln(x-1)+ln(x-2)-ln(x-3)-ln(x-4)]
对y=x^x求导  lny=xlnx
```

方向导数：
若函数f(x,y)在点A(a,b)可微，则其在点A沿任意方向l=(cosα,sinα)的方向导数都存在且∂f(a,b)/∂l=[∂f(a,b)/∂x]cosα+[∂f(a,b)/∂y]sinα
方向导数可以看成f(x,y)在x和y平面方向的偏导数在方向l上的合成效果

梯度向量：
梯度向量是指函数f(x,y)在点A(a,b)处方向导数最大的那个方向，记作gradf(a,b)
若函数f(x,y)在点A(a,b)可微，则gradf(a,b)=(∂f(a,b)/∂x,∂f(a,b)/∂y)
∂f(a,b)/∂l=[∂f(a,b)/∂x]cosα+[∂f(a,b)/∂y]sinα=(∂f(a,b)/∂x,∂f(a,b)/∂y).(cosα,sinα)=||(∂f(a,b)/∂x,∂f(a,b)/∂y)||cosθ≤||(∂f(a,b)/∂x,∂f(a,b)/∂y)||

高阶导数（跟二项式定理形式一样）：

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

例如求y=x/(1+x^2)的n阶导函数 对y(1+x^2)=x两边进行n次求导，左边可套用公式

渐近线：
铅直渐近线:即直线x=x0判断方法:lim(x→x0)f(x)=+∞(或-∞),即直线x=x0为铅直渐近线
斜渐近线:(不妨设为y=ax+b)判断方法:lim(x→∞)[f(x)-(ax+b)]=0即可
再由:
lim(x→∞)[f(x)/x]=a
lim(x→∞)[f(x)-ax]=b
求出a,b。水平渐近线就是a=0的情况(已包括在内)

参变量积分求导公式：
先对上限求导数，减去对下限求导数，再加上对被积函数求导数

定理 15.1.5（一般的参变量积分的求导公式） 设 $f(x,u)$ 在闭区间 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 也连续，$a(u),b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且
$$a\leqslant a(u),\quad b(u)\leqslant b,\quad u\in[\alpha,\beta],$$
则 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，并且
$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f'_u(x,u)dx+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u).$$

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\sin x)}{\sin x}dx$$
$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$$
$$I'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\alpha^2\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$
$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx=I(1)=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}d\alpha=\frac{1}{2}\pi\operatorname{arcsinh}1$$

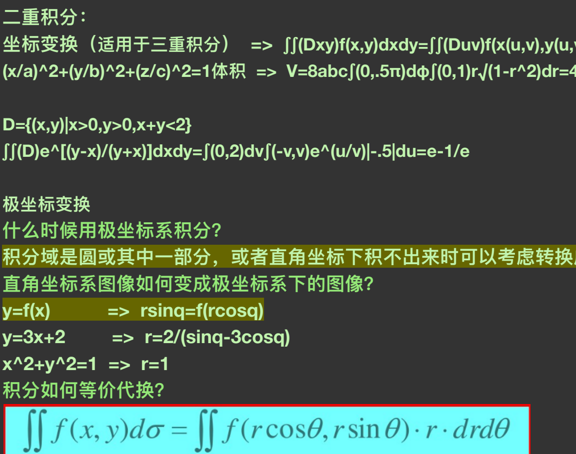
```
J=∫(0,∞)sin(ax)/xdx, k≥0
F(a)=∫(0,∞)e^(-kx)sin(ax)/xdx
F'(a)=∫(0,∞)e^(-kx)cos(ax)dx=k/(a^2+k^2)
F(a)=arctan(a/k), (由F(0)=0可得C=0)
k→0 J=lim[∫(0,∞)e^(-kx)sin(ax)/xdx]=lim[arctan(a/k)]={π/2,a>0;0,a=0;-π/2,a<0}
```

```
b>a>0
∫(0,1)(x^b-x^a)/lnxdx=∫(0,1)dx∫(a,b)x^ydy=∫(a,b)dy∫(0,1)x^ydx=ln[(1+b)/(1+a)]
```

```
F(α)=∫(0,π)ln(1+αcosx)dx,|α|<1
F'(α)=∫(0,π)cosx/(1+αcosx)dx=π/α-π/[α√(1-α^2)]
F(α)=πln[1+√(1-α^2)]/2
```

```
F=∫(-∞,+∞)e^(-x²)dx
F=∫(-∞,+∞)e^(-y²)dy
由于x,y是互不相关的的积分变量 =>
F² = ∫(-∞,+∞)e^(-x²)dx*∫(-∞,+∞)e^(-y²)dy= ∫∫(D)e^(-x²-y²)dxdy=∫(0,2π)dθ∫(0,∞)ρe^(-ρ²)dρ= π
F=√π
```

二重积分：
可理解为D积分域下求对应的f(x,y)映射的体积



二重积分：
坐标变换（适用于三重积分） => ∫∫(Dxy)f(x,y)dxdy=∫∫(Duv)f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv，其中J=|D(x,y)/D(u,v)|
(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1体积 => V=8abc∫(0,.5π)dφ∫(0,1)r√(1-r^2)dr=4πabc/3

D={(x,y)|x>0,y>0,x+y<2}
∫∫(D)e^[(y-x)/(y+x)]dxdy=∫(0,2)dv∫(-v,v)e^(u/v)|-.5|du=e-1/e

极坐标变换
什么时候用极坐标系积分?
积分域是圆或其中一部分，或者直角坐标下积不出来时可以考虑转换成极坐标系下的积分
直角坐标系图像如何变成极坐标系下的图像?
y=f(x) => rsinq=f(rcosq)
y=3x+2 => r=2/(sinq-3cosq)
x^2+y^2=1 => r=1
积分如何等价代换?

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\cdot drd\theta$$

如何确定D?
q观察可得，对于任意的q，求出对应的r（先积r后积q）

D={x,y}|x^2+y^2<x+y}
∫∫(D)(x+y)/(x^2+y^2)dxdy=∫(-.25π,.75π)dφ∫(0,sinφ+cosφ)(sinφ+cosφ)dr=π

三重积分：
Ω={(x,y,z)|(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2≤1,z>0}
∫∫∫(Ω)(y+z)dxdydz=∫∫∫(Ω)zdxdydz=c^2/2∫∫(D)[1-(x/a)^2-(y/b)^2]dxdy=πabc^2/4

球坐标系变换
直角坐标系图像如何变成球坐标系下的图像?
{x=rsinθcosφ,y=rsinθsinφ,z=rcosθ; r>0,0≤φ≤2π,0≤θ≤π}
适用于积分域是球或球的一部分，其中|J|=r^2sinθ
Ω={(x,y,z)|x^2+y^2+(z-R)^2≤R^2}
∫∫∫(Ω)(x^2+z^2)dxdydz=∫(0,.5π)dθ∫(0,2π)dφ∫(0,2Rcosθ)r^4sinθ[(sinθcosφ)^2+cosθ^2]dr=28πR^5/15