正态总体的样本均值与样本方差的分布

设X1,X2,...Xn是来自总体N(μ,σ^2)的样本，Xbar和S^2分别是样本均值跟样本方差，则有

Xbar~N(μ,σ^2/n)　(I)

(n-1)S^2/σ^2~χ^2(n-1)　　(II)　（卡方分布推广）

Xbar与S^2相互独立　　(III)

对于 $m\,(m\geqslant 2)$ 个同方差的正态总体的情形，设 $\overline{X}_i, S_i^2$ 分别是总体 $N(\mu_i,\sigma^2), i=1,2,\cdots$ 的样本均值和样本方差，且设各样本相互独立，则 $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m,S_1^2,S_2^2,\cdots,S_m^2$ 相互独立.

(Xbar-μ)/(S/n^.5)~t(n-1)　(IV)　（根据t分布定义(I)标准化/(II)可证）

```
在总体N(52,6.3^2)中随机抽取一容量为36的样本，求样本均值Xbar落在50.8到53.8之间的概率
Xbar~N(52,1.05^2)
P=Φ(12/7)-Φ(-8/7)=0.8293

在总体N(12,4)中随机抽一容量为5的样本X1,X2,X3,X4,X5.求样本均值与总体均值之差的绝对值大于1的概率及P{max{X1,X2,X3,X4,X5}>15}和
P{min{X1,X2,X3,X4,X5}<10}.
Xbar~N(12,0.8)
P{|Xbar-12|>1}=2[1-Φ(5^.5/2)]=.2628
Fmax(z)=Φ^5(z/2-6)
P{max{X1,X2,X3,X4,X5}>15}=1-Fmax(15)=1-Φ^5(1.5)=0.2923
Fmin(z)=1-[1-Φ(z/2-6)]^5
P{min{X1,X2,X3,X4,X5}<10}=Fmin(10)=1-[1-Φ(-1)]^5=1-Φ^5(1)=0.5785

设样本X1,...X6来自总体N(0,1)，Y=(X1+X2+X3)^2+(X4+X5+X6)^2，试确定常数C使CY服从卡方分布
```

$$X_i\sim N(0,1)\Rightarrow X_1+X_2+X_3\sim N(0,3),X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$$

$$\Rightarrow\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1),\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{3}\sim\chi^2(1),\frac{(X_4+X_5+X_6)^2}{3}\sim\chi^2(1)$$

$$\Rightarrow\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{3}+\frac{(X_4+X_5+X_6)^2}{3}\sim\chi^2(2)\Rightarrow C=\frac{1}{3}$$

两正态总体样本定理

定理四　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立①. 设 $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$, $\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是这两个样本的样本均值；$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是这两个样本的样本方差，则有

1° $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$；

2° 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中　$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$,　$S_w=\sqrt{S_w^2}$.

一式:

根据F分布定义可证

二式:

1. **构造U=Xbar-Ybar~N(μ1-μ2,σ^2/n1+σ^2/n2)**
2. **构造V=(n1-1)S1^2/σ^2+(n2-1)S2^2/σ^2~χ^2(n1+n2-2)**
3. **U,V相互独立，根据t分布定义，参考(IV)可证**

常用构造估计量方法

矩估计法

```
设总体X均值μ及方差σ^2都存在但未知，又设X1,X2,...,Xn是来自X的样本，试求μ，σ^2的矩估计量
E(X)=μ=Xbar
E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=μ^2+σ^2=[Σ(1,n)Xi^2]/n
==>>
μ=Xbar
σ^2=[Σ(1,n)Xi^2]/n-Xbar^2=[Σ(1,n)(Xi-Xbar)^2]/n
所得结果表明总体均值与方差的矩估计量表达式不因不同的总体分布而异
```

最大似然估计法

最大似然估计法思路：对于离散型X，现在已经取到样本值x1,x2,...xn，这表明取到这一样本值的概率L(θ)=∏(1,n)p(xi;θ)比较大，我们自然认为取θ=θ0使得L(θ)最大时较合理

对与连续型X，似然函数L(θ)=∏(1,n)f(xi;θ)dxi,但因子∏(1,n)dxi不随θ而变，故只需考虑L(θ)=∏(1,n)f(xi;θ)的最大值

在很多情况下p(xi;θ)和f(xi;θ)关于θ可微，这时θ0常可从方程dL(θ)/dθ=0解得

又因为L(θ)和lnL(θ)在同一θ处取得极值，因此θ的最大似然估计也可从dlnL(θ)/dθ=0求得，且更简便，称为对数似然方程

注意：

矩估计量与极大似然估计量大部分情况下不相同，如在[a,b]上的均匀分布（有时会相同，如期望方差未知的正态分布）

f(x)的最大似然估计和g(f(x))的最大似然估计是同一个x0，这一性质称为最大似然估计的不变性

估计量评选标准

无偏性（均值方向）：

```
设总体X服从均匀分布U(0,θ),f(x)=1/θ,θ是未知参数，样本为X1,X2,...Xn
1.求θ的矩估计，判断是否无偏
2.求θ的极大似然估计，判断是否无偏
矩估计:
θ=2Xbar
应为E(θ)=E(2Xbar)=2E(X)=θ
所以θ=2Xbar是θ的无偏估计
极大似然估计:
θ=max{X1,X2,...Xn}
g(x)=[nx^(n-1)]/[θ^n]
应为E(θ)=∫(0,θ)x*n*x^(n-1)/θ^ndx=n*θ/(n+1)!=θ
所以θ=max{X1,X2,...Xn}作为参数θ的估计是有偏估计
注意:
如果E(θ')=aθ+b,其中a,b是常数，则(θ'-b)/a是θ的无偏估计，上例中θ=(n+1)*max{X1,X2,...Xn}/n
由此可见一个未知参数可以有不同的无偏估计量
```

有效性（方差方向）：

两个无偏估计，方差越小越有效

相合性（不具备相合性的点估计都不可靠）：

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体X的简单样本，且 $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2<\infty$, 证明估计量 $T_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}ix_i$ 是 μ 的相合估计.

证明: $E(T_n)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(ix_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iE(x_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i\mu=\frac{2}{2(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\mu=\mu$

$Var(T_n)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}Var(\sum_{i=1}^{n}ix_i)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i^2Var(x_i)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\sigma^2$

$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2=\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2$

由切比雪夫不等式，对 $\forall\varepsilon>0$,

$P\{|T_n-E(T_n)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{Var(T_n)}{\varepsilon^2}$

$\therefore\lim_{n\to+\infty}P\{|T_n-\mu|>\varepsilon\}\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}=0$

由于概率不能小于0,

$\therefore\lim_{n\to+\infty}P\{|T_n-\mu|>\varepsilon\}=0$

即 T_n 是 μ 的相合估计.

区间估计

```
设总体X~N(μ,σ^2)，方差已知期望未知，X1,X2,...Xn是来自X的样本，求μ的置信水平为1-α的置信区间
(Xbar-μ)/(σ/n^.5)~N(0,1)
P{|(Xbar-μ)/(σ/n^.5)|<Zα/2}=1-α
所求置信区间为(Xbar-σ/n^.5*Zα/2,Xbar+σ/n^.5*Zα/2)
注意:
置信水平为1-α的置信区间并不唯一，如α=0.05，则又有P{-Z0.04<(Xbar-μ)/(σ/n^.5)<Z0.01}=0.95
计算可得前者的置信区间长度更短，估计精度更高
像N(0,1)那样概率密度图形是单峰且对称情况下，当n固定时前者区间长度为最短
在密度函数不对称时，如卡方分布和F分布，习惯上仍是取对称的分位点来确定置信区间
```

正态总体均值与方差的区间估计

表 7－1　正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限(置信水平为 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$　$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2 未知	$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$　$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$　$\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$　$\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$　$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$　$\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$　$\underline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

当遇到设备平均寿命，药品中杂质含量均值等问题时需要考虑单侧置信区间

右边检验

(1) $H_0:\mu=\mu_0$; $H_1:\mu>\mu_0$

(2) 选取统计量: $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3) 拒绝域为　$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_\alpha$

(4) 取 α, 查表确定临界值　$k=z_\alpha$

(5) 计算　$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

(6) $u\geq z_\alpha$，则拒绝 H_0，接受 H_1；反之，接受 H_0.

基于成对数据的t检验

例 4　做以下的实验以比较人对红光或绿光的反应时间(以 s 计). 实验在点亮红光或绿光的同时，启动计时器，要求受试者见到红光或绿光点亮时，就按下按钮，切断计时器，这就能测得反应时间. 测量的结果如下表：

红光(x)	0.30	0.23	0.41	0.53	0.24	0.36	0.38	0.51
绿光(y)	0.43	0.32	0.58	0.46	0.27	0.41	0.38	0.61
$d=x-y$	−0.13	−0.09	−0.17	0.07	−0.03	−0.05	0.00	−0.10

设 $D_i=X_i-Y_i$　$(i=1,2,\cdots,8)$ 是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$ 的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 试检验假设(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

$$H_0:\mu_D\geqslant 0,\quad H_1:\mu_D<0.$$

解　现在 $n=8$, $\overline{x}_d=-0.0625$, $s_d=0.0765$, 而

$$\frac{\overline{x}_d}{s_d/\sqrt{8}}=-2.311<-t_{0.05}(7)=-1.8946,$$

故拒绝 H_0，认为 $\mu_D<0$，即认为人对红光的反应时间小于对绿光的反应时间，也就是人对红光的反应要比绿光快. □

正态总体均值，方差的检验法

表 8－1　正态总体均值、方差的检验法(显著性水平为 α)

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
1	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$
2	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知)	$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
4	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知)	$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
5	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
6	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
7	$\mu_D\leqslant 0$ $\mu_D\geqslant 0$ $\mu_D=0$ (成对数据)	$t=\frac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D>0$ $\mu_D<0$ $\mu_D\neq 0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$

置信区间 & 假设

置信水平为1-α的置信区间等价于显著水平为α的假设检验的接受域

置信水平为1-α的单侧置信区间(-∞,θ)等价于显著水平为α的左边假设检验（H0:θ=θ0,H1:θ<θ0）的接受域

例 1　设 $X\sim N(\mu,1)$, μ 未知, $\alpha=0.05$, $n=16$, 且由一样本算得 $\overline{x}=5.20$, 于是得到参数 μ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间

$$\left(\overline{x}-\frac{1}{\sqrt{16}}z_{0.025},\overline{x}+\frac{1}{\sqrt{16}}z_{0.025}\right)=(5.20-0.49,5.20+0.49)=(4.71,5.69).$$

现在考虑检验问题 $H_0:\mu=5.5$,　$H_1:\mu\neq 5.5$. 由于 $5.5\in(4.71,5.69)$, 故接受 H_0. □

例 2　数据如上例. 试求右边检验问题 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$ 的接受域，并求 μ 的单侧置信下限($\alpha=0.05$).

解　检验问题的拒绝域为 $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{1/\sqrt{16}}\geqslant z_{0.05}$, 或即 $\mu_0\leqslant 4.79$. 于是检验问题的接受域为 $\mu_0>4.79$. 这样就得到 μ 的单侧置信区间 $(4.79,\infty)$, 单侧置信下限 $\underline{\mu}=4.79$. □

单个分布的卡方拟合检验（不宜检测正态分布）

H0:总体X的分布函数是F(x)

若样本容量充分大（n>=50），则当H0为真时统计量 [∑(1,k)fi^2/(npi)]-n近似服从χ^2(k-1)

偏度 & 峰度

随机变量X的偏度和峰度指X的标准化变量Y=[X-E(X)]/D(X)^.5的三阶矩和四阶矩

偏度V1=E(Y^3)=E[(X-E(X))^3]/D(X)^1.5

样本偏度G1=B3/B2^1.5， 其中Bk是样本k阶中心矩

峰度V2=E(Y^4)=E[(X-E(X))^4]/D(X)^2

样本峰度G2=B4/B2^2， 其中Bk是样本k阶中心矩

正态随机变量的偏度EY^3=0，峰度EY^4=3　（利用期望定义并结合伽玛函数可得）

若总体X为正态变量，则当n充分大时G1~N(0,6(n-2)/[(n+1)(n+3)])，G2~N(3-6/(n+1),24n(n-2)(n-3)/[(n+1)^2(n+3)(n+5)])

例 6　试用偏度、峰度检验法检验例 5 中的数据是否来自正态总体(取 $\alpha=0.1$).

解　现在来检验假设

$$H_0:\text{数据来自正态总体}.$$

这里 $\alpha=0.1$, $n=84$, $\sigma_1=\sqrt{\dfrac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}=0.2579$,

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}=0.4892,$$

$\mu_2=3-\dfrac{6}{n+1}=2.9294$. 下面来计算样本中心矩 B_2,B_3,B_4, 计算时可利用以下关系式：

$$B_2=A_2-A_1^2,\ B_3=A_3-3A_2A_1+2A_1^3,$$
$$B_4=A_4-4A_3A_1+6A_2A_1^2-3A_1^4,$$

其中 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$　$(k=1,2,3,4)$ 为 k 阶样本矩. 经计算得 A_k　$(k=1,2,3,4)$, B_k　$(k=2,3,4)$ 的观察值分别为

$$A_1=143.7738,\quad A_2=20\,706.13,\quad A_3=2\,987\,099,$$
$$A_4=4.316\,426\times10^8,\quad B_2=35.2246,\quad B_3=-28.5,\quad B_4=3\,840.$$

样本偏度和样本峰度的观察值分别为

$$g_1=-0.1363,\quad g_2=3.0948.$$

而 $z_{\alpha/4}=z_{0.025}=1.96$. 由(6.11)式，拒绝域为

$$|u_1|=|g_1/\sigma_1|\geqslant 1.96\quad\text{或}\quad|u_2|=|g_2-\mu_2|/\sigma_2\geqslant 1.96.$$

现算得 $|u_1|=0.5285<1.96$, $|u_2|=0.3381<1.96$, 故接受 H_0, 认为数据来自