Soit $E = \{1, ..., n\}$. Si X est un ensemble, on note $\binom{X}{2}$ l'ensemble des sous-ensembles de taille 2 de X.
Supposons qu'il existe $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_p\}$ des sous-ensembles de taille 4 de E tels que tout élément de $\binom{E}{2}$ soit inclus dans exactement 2 ensembles de $\mathcal{S}$.
Alors:

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{\{i,j\}\in\binom{S}{2}} 1 = \sum_{S\in\mathcal{S}} \binom{4}{2} = \sum_{S\in\mathcal{S}} 6 = 6p$$

Et:

$$\sum_{\{i,j\}\in\binom{E}{2}} \sum_{S\in\mathcal{S},\{i,j\}\subseteq S} 1 = \sum_{\{i,j\}\in\binom{E}{2}} 2 = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

Comme:

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{\{i,j\}\in\binom{S}{2}} 1 = \sum_{\{i,j\}\in\binom{E}{2}} \sum_{S\in\mathcal{S},\{i,j\}\subseteq S} 1$$

On en conclut:

$$6p = n(n-1)$$