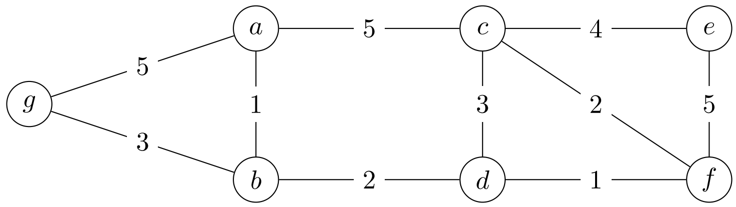
I Application de l'algorithme de Kruskal

Appliquer l'algorithme de Kruskal à la main sur le graphe suivant :



II Plus large chemin

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré. La **largeur** $l(C)$ d'un chemin est le minimum des poids de ses arêtes. Soient $u, v \in V$. Un chemin de u à v est un **plus large chemin** (*widest path*) s'il n'existe pas d'autre chemin de u à v de plus grande largeur.

1. Donner un plus large chemin de g à f dans le graphe du I.1.
2. Comment modifier l'algorithme de Kruskal de façon à trouver un arbre couvrant T de poids maximum dans G ?
3. Soit C le chemin de u à v dans T. Montrer que C est un plus large chemin de u à v (l'algorithme de Kruskal permet donc de trouver les plus larges chemins).

> Solution : Supposons que C ne soit pas un plus large chemin. Alors, il existe un chemin C' de u à v de plus grande largeur. Soit e une arête de poids minimum de C : on a donc $w(e) < l(C')$. $T - e$ est composé de deux composantes connexes (V_1 contenant u et V_2 contenant v) et C' relie u et v donc il existe une arête e' de C' entre un sommet de V_1 et un sommet de V_2. $T - e + e'$ est un arbre couvrant car est connexe (une seule composante connexe) et contient $n - 1$ arêtes (autant que T), où n est le nombre de sommets de G.
> S'il y a plusieurs arêtes e de poids minimum, on répète plusieurs fois l'opération précédente.
> Ainsi on obtient un arbre $T - e + e'$ tel que $l(T - e + e') > l(T)$, ce qui est absurde.

III Questions sur les arbres couvrants de poids minimum

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré.

1. Soit C un cycle de G et $e = \{u, v\}$ une arête de C dont le poids est strictement supérieur au poids des autres arêtes de C. Montrer que e ne peut pas appartenir à un arbre couvrant de poids minimum de G.

> Solution : Soit T un arbre couvrant de de poids minimum. Supposons par l'absurde que $e \in T$. Alors $T - e$ contient deux composants connexes G_u et G_v. Comme $C - e$ est un chemin qui relie u et v, il existe une arête e' de $C - e$ entre un sommet de G_u et un sommet de G_v. $T - e + e'$ est un arbre couvrant car est connexe (une seule composante connexe) et contient $n - 1$ arêtes. Mais $w(T - e + e') = w(T) - w(e) + w(e') < w(T)$, ce qui est absurde.

2. (Propriété d'échange) Soient T_1, T_2 deux arbres couvrants de G et e_1 une arête de $T_1 - T_2$. Montrer qu'il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ (le graphe obtenu en remplaçant e_1 par e_2 dans T_1) est un arbre couvrant de G.

> Solution : Démonstration très similaire à la question précédente.

3. Le nombre de domination $d(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq V$ tel que $\forall v \in V$, $v \in S$ ou v est adjacent à un sommet de S.
Montrer que si G est connexe alors $d(G) \leq \dfrac{|V|}{2}$.
4. Soit G un graphe connexe et T un arbre couvrant de poids minimum. La **largeur** d'un chemin C est le poids maximum d'une arête de C. Soient u et v deux sommets de G. Montrer que le chemin de u à v dans T est de largeur minimum, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'autre chemin de u à v de plus petite largeur.
5. Montrer que si tous les poids des arêtes de G sont différents, alors G admet un unique arbre couvrant de poids minimum.

> Solution : Supposons par l'absurde qu'il existe deux arbres couvrants de poids minimum T_1 et T_2. Soit e l'arête de

poids minimum qui n'est pas à la fois dans T_1 et T_2. Supposons sans perte de généralité que $e \in T_2$. D'après la question précédente, il existe $e_1 \in T_1 - T_2$ tel que $T_1 - e_1 + e$ est un arbre couvrant. Mais, par définition de e, $w(e) < w(e_1)$ (inférieur strict car tous les poids sont différents) donc $T_1 - e_1 + e$ est un arbre couvrant de poids strictement plus petit que T_2, ce qui est absurde.

6. Soit T_1 un arbre couvrant de poids minimum de G et T_2 le 2ème plus petit arbre couvrant, c'est-à-dire l'arbre couvrant de poids minimum en excluant T_1. Montrer que T_1 et T_2 diffèrent d'une arête et en déduire un algorithme pour trouver T_2.

IV Mise à jour d'arbre couvrant de poids minimum

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré et T un arbre couvrant de poids minimum de G. Soit $e \in E$.

1. On diminue le poids de e. Expliquer comment mettre à jour T pour qu'il soit toujours un arbre couvrant de poids minimum.
2. On augmente le poids de e. Expliquer comment mettre à jour T pour qu'il soit toujours un arbre couvrant de poids minimum.