Centrale Maths 2

Séance 1 : jeudi 1er Juin de 13h30 à 15h30

Exercice 1 (Centrale 2022) : Soit $E_n = M_n(\mathbb{R})$. D_n est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls. T_n est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $S_M = \{(A,B) \in E_n^2, AB - BA = M\}$.

1) Montrez que D_n est un sous espace vectoriel de E_n et déterminer sa dimension et une base.
2) Même question avec T_n.
3)
   a) Ecrire une fonction $diag(n)$ qui retourne une matrice diagonale aléatoire de taille n avec les coefficients compris dans $[0,1]$.
   b) Ecrire une fonction $Matrice(A,B)$ qui pour deux matrices A et B carrées de même taille retourne $AB - BA$.
   c) Essayer la fonction $Matrice(A,B)$ avec A une matrice diagonale et B une matrice quelconque avec leurs coefficients dans [0,1]. Que pouvez-vous supposer ?
4) Montrez l'hypothèse précédente.
5) Existe-t-il $M \in E_n$ tel que S_M soit vide ? Existe-t-il $M \in E_n$ tel que S_M soit de cardinal 1 ?
6) Trouver des couples (A,B) qui conviennent pour les matrices suivantes : $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Oral Centrale 22) :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.

On pose $S_n = X_0 + ... + X_n$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$ On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n \notin [-a,b]\}$, si cet ensemble est non vide, et $T = +\infty$ sinon. On dit que T est le temps de sortie de $[-a,b]$.

1) Écrire, en PYTHON , une fonction $temps(a,b)$ qui renvoie le temps de sortie T . Tester avec $a = 5$ et $b = 7$.
2) Écrire, en PYTHON , une fonction $moyenne(a,b)$ qui renvoie la moyenne de T sur un nombre de 10000 expériences. Tester avec $a = 5$ et $b = 7$. Que peut-on conjecturer ?
3) On pose $l = b + 1 - a$ On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \bigcap_{k=nl+1}^{(n+1)l} (X_k = 1)$. Montrer que les événements G_n pour $0 \leq n \leq N$ sont indépendants, de même probabilité. Donner leur probabilité commune.
4) Montrer que $P(T = +\infty) = 0$.
5) Montrer que T est d'espérance finie.

Exercice 3 (Oral Centrale 22) : pour $a > 0$, on pose $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$

1) Étudier la convergence de la somme et déterminer le domaine de définition D de S.
2) Montrer que $\forall a \in D, \forall n \geq 2, \left| S(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^2 + a^2} \right| \leq \frac{a}{n}$.
3) Écrire un programme qui calcule $S(1)$ et $S(5)$ à 10^{-3} près.
4) Écrire un programme qui trace la courbe de S sur $[1, 50]$. Conjecturer $\lim_{a \to +\infty} S(a)$.
5) Valider la conjecture du 4).
6) On pose $f_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{\left(x^2 + n^2\right)^2}$ puis $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$. Déterminer le domaine de définition de f
7) Justifier la relation $\forall a \in D, f(a) = S'(a)$

Exercice 4 (Oral Centrale 22) : On pose $f(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Soient $g : x \mapsto f(x) + 2x$ et $h : x \mapsto f(x) + x$.

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Tracer le graphe de f'. La fonction f semble-t-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Démontrez le résultat.
3) Justifier que g est dérivable. Que vaut $g'(0)$? Etablir qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \left]0, \eta\right[, g(x) > g(0)$
4) Tracer les graphes de g et g' sur $[-0.1, 0.1]$. La fonction g semble-t-elle croissante au voisinage de 0 ? Montrez-le.
5) Justifier que h est dérivable. Que vaut $h'(0)$? La fonction h semble-t-elle croissante au voisinage de 0 ?
6) Montrer le résultat précédent en considérant $h'\left(\frac{1}{U_n}\right)$ où $U_n = 2n\pi + \frac{\alpha}{n}$, avec α convenablement choisi.
7) Le vérifier en traçant $h'\left(\frac{1}{U_{30+10n}}\right)$ pour n compris entre 0 et 17.
8) La fonction f est-elle lipschitzienne sur $[0,1]$? Une fonction dérivable sur $[0,1]$ est-elle nécessairement lipschitzienne ?
9) Montrer que $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f(x - \frac{1}{n})$ est dérivable sur $[0,1]$.

Séance 2 : lundi 12 Juin de 13h30 à 15h30

Exercice 1 (Oral Centrale 22) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que l'équation $e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution $a_n \in \mathbb{R}_+$
2) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
3) Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
4) Tracer sur une même figure $a_n, n, n+1$ pour $0 \le n \le 50$. Que peut-on conjecturer ?
5) Tracer $3(a_n - n)$ pour $0 \le n \le 50$. Que peut-on conjecturer ?
6) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$. Montrer que $f_n(x) = 1 - \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$.

   En déduire que $f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$

Exercice 2 (Centrale 22) : soit $n \ge 2$. On note U_n l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont dans $\{0,1\}$ et V_n l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont dans $[0,1]$.

1) Montrer que V_n est convexe et borné. On admet qu'il est fermé.
2) Soit $M \in V_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \le n$.
3) Montrer que $M \mapsto \det(M)$ possède un maximum sur U_n, noté u_n et un maximum sur V_n, noté v_n.
4) Ecrire une fonction $U(n)$ qui génère 1000 matrices de U_n et renvoie le maximum des déterminants de ces matrices. Ecrire de même une fonction $V(n)$.
   Observer les valeurs renvoyées pour n compris entre 0 et 10 et émettre une conjecture.
5) Soit $M \in V_n$. Soit $x \in [0,1]$. On note $M_{i_0,j_0}(x)$ la matrice dont les coefficients sont les mêmes que ceux de M, sauf celui situé à la i_0 ème ligne et j_0 ème colonne qui a été remplacé par x.
   Montrer que $\det(M_{i_0,j_0}(x)) \le \max\left(\det(M_{i_0,j_0}(0)), \det(M_{i_0,j_0}(1))\right)$.
6) Montrer le résultat conjecturé en 4).
7) Soit $p \in [0,1]$. Soient $X_1, .., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $M = (X_i, X_j)_{1\le i,j\le n}$. Ecrire une fonction $M(n,p)$ qui permet de renvoyer une matrice $M(\omega)$.
8) Calculer la probabilité de l'événement $(tr(M) \le 1)$.

Exercice 3 (Oral Centrale 22) : Pour $a,b \in \mathbb{C}$, on pose $D_1(a,b) = a$ et, pour tout $n \geq 2$:

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & b \\ (0) & & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & -b \\ (0) & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $D_n(a,b)$ pour $n \leq 3$.
2) Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_{n+2}(a,b)$, $D_{n+1}(a,b)$ et $D_n(a,b)$.
3) Coder en Python une fonction $D1(n,a,b)$ renvoyant $D_n(a,b)$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a,b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.
5) Pour $b \in [\![1,n]\!]$ et $n \in [\![3,5]\!]$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a,b)$ sur $\left[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}\right]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$.
6) Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?
7) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
8) Calculer les racines du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9) Déterminer alors les zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$ en fonction du nombre complexe b.

Exercice 4 (Oral Centrale 22) : Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|a_{i,j}| = 1$ si $|i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $X_j = \left(\sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad \sin\left(\frac{2j\pi}{n+1}\right) .. \sin\left(\frac{nj\pi}{n+1}\right)\right)^T$.

On note $P \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $X_1,..,X_n$ et, pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $S_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{kq\pi}{n+1}\right)$.

1) Que vaut $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$?
2) Montrer que A est diagonalisable. Que dire de ses sous-espaces propres ?
3) Écrire une fonction $A(n)$ (resp. $P(n)$) qui renvoie la matrice A (resp. P).
4) Écrire une fonction $B(n)$ qui renvoie la matrice $P^{-1}AP$. Calculer $B(n)$ pour différentes valeurs de n. Émettre une conjecture sur le spectre de A et sur la famille $(X_1,..,X_n)$. On admet la validité de ces conjectures.
5) En déduire la valeur de $S_{p,q}$ pour $p \neq q$.
6) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On discutera selon la valeur de p.
7) Montrer les conjectures du 5) et du 4)