DS 2 option informatique corrigé

Exercice E3A

1. $\mathcal{M}_1$ n'est pas déterministe car il y a 2 transitions étiquetées par a qui sortent de l'état 1.
2.
```
let max_card d =
    let rec aux l = match l with
        | [] -> 0
        | k::q -> let s = find d k in
           max (card s) (aux q) in
    aux (keys d)
```
3.
```
let est_deterministe m =
    max_card m <= 1 && card m.init = 1
```
4.
```
let etats_suivants m s x =
    let rec parcours_clefs clefs acc = match clefs with
        | [] -> acc
        | (etat, y)::r -> if mem etat s && y = x
                then parcours_clefs r (union acc (find m.trans (etat, y)))
                else parcours_clefs r acc
    in parcours_clefs (keys m.trans) empty
```
5. Une chaîne de caractères est mieux adaptée à la programmation impérative (comme pour un tableau), on utilise donc une boucle plutôt qu'une fonction récursive :
```
let reconnu m w =
    let s = ref m.init in
    for i = 0 to String.length w - 1 do
        s := etats_suivants m !s w.[i]
    done;
    card (inter !s m.final) > 0
```
6. Si la structure de dictionnaire était persistante, `add` serait de type : `('a, 'b) dict -> 'a -> 'b -> ('a, 'b) dict` car, les structures persistantes n'étant pas modifiables, l'ajout d'un nouveau couple (clef, valeur) impose de créer un nouveau dictionnaire, qui est renvoyé en résultat de la fonction.

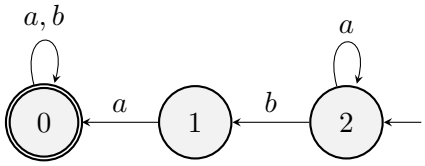
   Si la structure d'ensemble était impérative, le contenu d'un ensemble serait modifiable après sa création. `empty` ne pourrait plus être un ensemble unique de référence comme c'est le cas ici. En effet, tout ajout d'élément à l'ensemble `empty` le transformerait en un ensemble non vide, de sorte qu'un appel ultérieur à `empty` ferait référence à un ensemble non vide, ce qui n'est évidemment pas souhaitable ! Il faudrait donc que `empty` devienne une fonction de type `unit -> set` qui recrée un nouvel ensemble vide à chaque appel (de même que la fonction `new` pour les dictionnaires impératifs)

CentraleSupélec 2022 : corrigé

I Mots et automates

Q1. Le langage L_1 est le langage $\{uaba^n \mid u \in \Sigma^*, n \geq 0\}$, aussi donné par l'expression rationnelle $\Sigma^* aba^*$.
Son miroir $\tilde{L_1}$ est le langage $\{a^n ba_u \mid u \in \Sigma^*, n \geq 0\}$, donné par l'expression rationnelle $a^* ba\Sigma^*$.

Q2. Voici un automate $\tilde{A_1}$ qui convient :



Q3. L'automate miroir $\tilde{A} = (Q, I', F', T')$ est donné par :

- $I' = F$
- $F' = I$
- $T' = \{(q, a, q') \mid (q', a, q) \in T\}$

Vérifions que $u \in L_A$ si et seulement si $\tilde{u} \in L_{\tilde{A}}$:

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si $u = u_1 \dots u_n \in L_A$, alors il existe un chemin acceptant $q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \dots \xrightarrow{u_n} q_n$ d'étiquette u, avec $q_0 \in I$, $q_n \in F$ et pour tout i, $(q_{i-1}, u_i, q_i) \in T$.
  Alors par construction de $\tilde{A}$, on a $q_n \in I'$, $q_0 \in F'$ et pour tout i, $(q_i, u_i, q_{i-1}) \in T'$. Alors le chemin $q_n \xrightarrow{u_n} q_{n-1} \dots \xrightarrow{u_0} q_0$ est un chemin acceptant dans $\tilde{A}$ d'étiquette $\tilde{u}$. Donc $\tilde{u} \in L_{\tilde{A}}$.

- Avec la définition de $\tilde{A}$, on remarque que $\tilde{\tilde{A}} = A$. On peut donc se ramener au cas précédent, et obtenir ce qui suit : si $\tilde{u} \in L_{\tilde{A}}$, alors $\tilde{\tilde{u}} = \in L_{\tilde{\tilde{A}}} = L_A$

Q4. Voici la fonction demandée.

```
let transpose (a : automate) : automate =
        (* fonction auxiliaire traitant la liste des transitions
           *)
        let rec aux_trans delta =
                match delta with
                | [] -> acc
                | (q1,l,q2)::t -> (q2,l,q1)::(aux_trans t)
        in
        {nb = a.nb ; init = a.final ; final = a.init ; trans =
           aux_trans a.trans}
```

On peut également appliquer `List.map` à `a.trans` en fournissant une fonction bien choisie, pour s'épargner l'écriture d'une fonction auxiliaire. Voici ce que cela donne :

```
let transpose (a : automate) : automate =
        let aux x =
                let (q1,a,q2) = x in (q2,a,q1)
        {nb = a.nb ; init = a.final ; final = a.init ; trans =
           List.map aux a.trans}
```

Q5. La complexité fonction demande d'évaluer la complexité de la création de chacun des champs du nouvel automate :

- La création des champs `nb`, `init`, `final` demande une recopie des valeurs de ces champs dans l'automate `a`. Leurs complexités respectives sont donc $O(1), O(|I|), O(|F|)$.
- La création du champ `trans` demande un parcours de la liste `a.trans` ; à chaque élément de cette liste, on applique une transformation qui s'exécute en temps constant. La création de ce champ a donc une complexité asymptotiquement majorée par $O(|T|)$.
- Au total, le nombre d'opérations nécessaire est majoré par $O(|I| + |F| + |T|)$.

Q6. Voici la fonction demandée.

```
let palindrome (w : string) : bool =
        let i = ref 0 in
        let res = ref true in
        let n = String.length s in
        while (!res) && (!i < n/2) do
                if s.[!i] <> s.[n-!i] then
                        res := false;
                i := !i+1
        done;
        !res
```

On remarque qu'il suffit, dans la boucle, de ne parcourir que la moitié du mot, et de comparer deux lettres à chaque étape : la i-ème, et la $n-i$-ème (où n est la longueur du mot).
Si le mot est de longueur impaire, la lettre centrale n'est pas examinée. Au plus, on aura donc fait n accès en mémoire pour examiner les lettres, et $\frac{n}{2}$ comparaisons. La complexité est donc bien linéaire.

Q7. Si Σ ne contient qu'une lettre a, alors $\Sigma^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$. On remarque immédiatement que tous ces mots sont des palindrômes, $\text{Pal}(\Sigma) = \Sigma^*$. Ce langage est alors engendré par l'expression rationnelle Σ^*, donc il s'agit d'un langage rationnel.

Q8. Soient a, b deux lettres tel que Σ contiennent a et b. Montrons que $\text{Pal}(\Sigma)$ n'est pas rationnel.

Procédons par l'absurde : si $\text{Pal}(\Sigma)$ est rationnel, alors le langage $L = \text{Pal}(\Sigma) \cap a^*ba^*$ est également rationnel par intersection. Alors par le théorème de Kleene, il existe un automate qui reconnaît L. Supposons qu'il a N états. Considérons le mot $u = a^N ba^N$.
On peut appliquer le lemme de l'étoile et obtenir ce qui suit : il existe une décomposision $u = xyz$ avec y non vide telle que $L(xy^*z) \subseteq L$. On distingue plusieurs cas :

- Si y ne contient que des a, alors y est intégralement contenu dans un des deux facteurs a^N de u. Comme y est non vide, le mot xz est alors de la forme $a^p b a^q$ avec $p \neq$, donc ce n'est pas un palindrôme. Alors $xz \notin L$, ce qui contredit le résultat du lemme de l'étoile.
- Si y contient au moins un b, alors le mot xy^2z n'appartient pas à L, ce qui donne également une contradiction.

Dans tous les cas, on a alors une contradiction. Donc le langage $\mathrm{Pal}(\Sigma)$ n'est pas rationnel.

Q9. Le langage $L_{q,q'}$ est reconnaisable par l'automate $A_{q,q'} = (Q, q, q', T)$ par construction. On peut alors exprimer L_A comme l'union de ces langages pour $q \in I$ et $q' \in F$:

$$L_A = \bigcup_{q \in I, q' \in F} L_{q,q'}$$

Q10. Procédons par double inclusion :

- $\boxed{\subseteq}$ On note $L = u \in \mathrm{Pal}(\Sigma) \cap (\Sigma^2)^*$. Par construction, tous ses mots sont des palindrômes contenant un nombre pair de lettres ; ils sont donc tous de longueur paire. On peut alors montrer par récurrence sur la longueur n de ces mots qu'ils sont tous de la forme $u\tilde{u}$:
  - Si $n = 0$, le seul mot possible est le mot vide, et on a bien $\varepsilon = \varepsilon\tilde{\varepsilon}$.
  - Si $w \in L$ est un mot de longueur $n + 2$, remarquons que c'est en particulier un palindrôme, donc il s'écrit $w = ava$, où $v \in L$ est un mot de longueur n. Par hypothèse de récurrence, v est de la forme $u\tilde{u}$ pour $u \in \Sigma^*$. Alors on a $w = (au)(\tilde{u}a) = (au)(\tilde{au})$.
- $\boxed{\supseteq}$ Si $v = u\tilde{u}$ pour un certain mot u, alors :
  - v est de longueur paire car $|v| = |u| + |\tilde{u}| = 2|u|$. Donc $v \in (\Sigma^2)^*$.
  - $\tilde{v} = \tilde{u\tilde{u}} = u_1 u_2 \dots u_n \tilde{u}_n \dots u_2 u_1 = u_1 u_2 \dots u_n u_n \dots u_2 u_1 = u\tilde{u} = v$. Donc $v \in \mathrm{Pal}(\Sigma)$.

  Finalement, $v \in L$.

Q11.

- Pour $L = L(a^*b)$, tout $v \in D(L)$ s'écrit $u\tilde{u}$ avec u de la forme $a^n b$ avec $n \in \mathbb{N}$. Donc v est de la forme $a^n bba^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $D(a^*b) = \{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Pal}(\Sigma) \cap a^*b^2a^*$.
- Si $u \in R(a^*b^*a^*)$, alors $u\tilde{u}$ doit être de la forme $a^p b^q a^r$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}$. Comme $u\tilde{u}$ est un palindrôme (d'après la question 10), on doit avoir $p = r$. De plus, il doit être de longueur paire (d'après la question 10), donc q est de la forme $2k$. Finalement, $u = a^p b^k$, et on en déduit $R(L) = L(a^*b^*)$.

Q12.

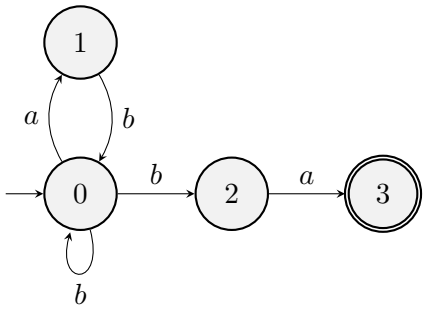
- Le langage $D(L)$ n'est pas reconnaissable par un automate dans le cas général : on a montré à la question précédente que si $L = a^*b$, alors $D(a^*b) = \mathrm{Pal}(\Sigma) \cap a^*b^2a^*$, et on peut montrer à l'aide du lemme de l'étoile et d'un raisonnement par l'absurde (similaire à celui de la question 8) que ce langage n'est pas régulier ; donc d'après le théorème de Kleene, il n'est pas reconnaissable.

- Soit $u \in \Sigma^*$. On a :
  $u \in R(L)$
  ssi $u\tilde{u} \in L$
  ssi $u\tilde{u}$ est accepté par A
  ssi il existe un chemin de la forme $q_1 \xrightarrow{u}_* q_2 \xrightarrow{\tilde{u}}_* q_3$ avec $(q_1, q_2, q_3) \in I \times Q \times F$ Donc
  ssi il existe $(q_1, q_2, q_3) \in I \times Q \times F$ tels que $u \in L_{q_1,q_2}$ et $\tilde{u} \in L_{q_2,q_3}$
  ssi il existe $(q_1, q_2, q_3) \in I \times Q \times F$ tels que $u \in L_{q_1,q_2} \cap \tilde{L}_{q_2,q_3}$
  ssi $u \in \bigcap_{(q_1,q_2,q_3)\in I\times Q\times F} L_{q_1,q_2} \cap \tilde{L}_{q_2,q_3}$

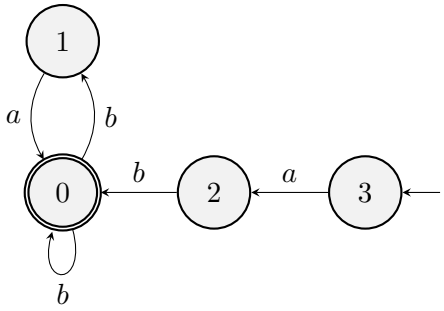
  d'après ce qui précède, $R(L) = \bigcap_{(q_1,q_2,q_3)\in I\times Q\times F} L_{q_1,q_2} \cap \tilde{L}_{q_2,q_3}$.

  Or, chacun des langages $L_{q,q'}$ est reconnaissable par automate d'après la question 9. De plus, les langages reconnaissable par automate forment une classe stable par intersection finie, et par miroir d'après la question 3. Donc $R(L)$ est reconnaissable par un automate.

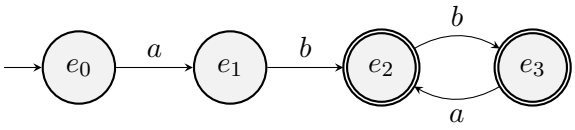
Q13. Voici un automate A_2 qui convient



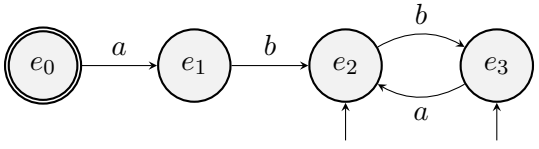
Q14. Donnons d'abord l'automate miroir $\tilde{A}_2$



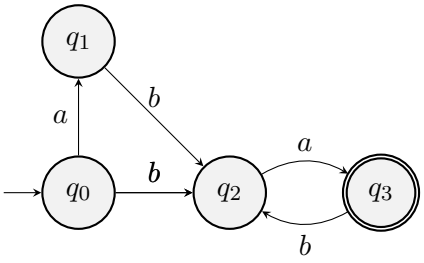
Et voici son déterminisé A_3



Q15. Donnons d'abord l'automate miroir $\tilde{A}_3$



Et voici son déterminisé A_4



Q16. Etant donné que l'opération de déterminisation conserve le langage reconnu, on a les égalités suivantes : $L_{A_4} = L_{\tilde{A_3}} = \tilde{L}_{A_3} = \tilde{L}_{\tilde{A_2}} = \tilde{\tilde{L}}_{A_2} = L_{A_2}$

Q17. Voici la fonction demandée

```
let rec supprimer (l : 'a list) : 'a list =
        (* fonction auxiliaire supprimant de la liste l'élément
           donn" en argument *)
        let rec supprimer_un l x =
                match l with
                | [] -> []
                | a::t -> let l2 = supprimer_un t x in
                          if a = x then l2 else a::l2
        in
        match l with
        | [] -> []
        | a::t -> let l2 = supprimer_un t a in a::(supprimer t)
        (* on supprime toute occurrence de a dans t, pour ne
           garder que celle-ci *)
```

Q18. La fonction auxiliaire `supprimer_un` parcourt linéairement la liste `l` qu'elle reçoit en argument. Sa complexité est donc $O(m)$ où m est la longueur de la liste donnée en entrée.

Si on note n la longueur de la liste en entrée de `supprimer`, le pire des cas est celui où tous les éléments de la liste sont déjà distincts. Dans ce cas, la fonction effectue n appels récursifs, et à chacun d'eux, appelle `supprimer_un` sur une liste de longueur au plus n. Chaque appel récursif a donc une complexité en $O(n)$; comme on en fait au plus n, la complexité totale est en $O(n^2)$.

Q19. On remarque ce qui suit : si X est un ensemble d'états, alors `numero`(X) peut être vu comme un nombre en binaire tel que le i-ème chiffre en partant de la droite (en commençant à $i = 0$) est un 1 si et seulement si $i \in X$.
Il suffit donc, pour répondre à la question posée, de regarder la valeur du q-ème bit en partant de la droite.

```
let est_dans (q : int) (k : int) : bool =
        ((k/pow.(q)) mod 2) = 1
```

Q20. Voici la fonction demandée :

```
let numero (l : int list) : int =
        (* fonction auxiliaire calculant k a partir d'une liste d'
           elements distincts *)
        let rec aux (li : int list) (res : int) : int =
                match li with
                | [] -> res
                | a::t -> aux t (res+pow.(a))
        in
        aux (supprime l) 0
```

On remarquera en particulier que la liste vide, représentant l'ensemble vide, est encodée par 0.

Q21. Voici la fonction demandée :

```
let rec intersecte (l : int list) (k : int) : bool =
        match l with
        | [] -> false
        | a::t -> if est_dans a k then true else intersecte t k
```

On peut également utiliser `List.exists` :

```
let rec intersecte (l : int list) (k : int) : bool =
        List.exists (fun q -> est_dans q k) l
```

Q22. On va utiliser la stratégie suivante : on parcourt `T` dans une fonction auxiliaire pour créer deux listes `la` et `lb`, représentant respectivement les ensembles $\delta(X, a)$ et $\delta(X, b)$, puis utiliser les fonctions précédentes.

```
let rec etat_suivant (k : int) (delta : (int * char * int) list )
   : int * int =
        (* création des listes la et lb *)
        let rec creer_listes del la lb =
                match del with
                | [] -> (la,lb)
                | (q1,lettre,q2)::t -> let b = est_dans q1 k in
                                       let b' = (lettre = 'a') in
                                       if b && b' then creer_listes t (
                                          q1::la) lb
                                       else if b then creer_listes t la
                                           (q1::lb)
                                       else creer_listes t la lb
                                             creer_listes
        in
        let (la,lb) = creer_listes delta [] [] in
        (numero la, numero lb)
```

Q23. Voici la fonction demandée

```
let rec cherche (k : int) (l : (int * int) list ) : int  =
        match l with
```

```
3           | [] -> -1
4           | (q,x)::t -> if q = k then x else cherche k t
```

Q24. Pour construire l'automate déterminisé, on va essentiellement respecter les points suivants :

- on conserve dans un accumulateur (à la manière d'une pile) les nouveaux états du déterminisé qu'on génère et qu'il faut encore traiter.
- on conserve dans une liste les renommages à effectuer, dans l'ordre où on rencontre les états. Cela permet également de savoir quels états ont déjà été rencontrés.
- on conserve trace du prochain indice disponible pour connaître l'entier par lequel on renommera chaque état.
- si l'accumulateur est vide, on a fini. Sinon, on prend le premier état de la liste et on génère les états suivants.

```
1  let rec determinise (a : automate) : automate  =
2          let n = pow.(a.nb) in
3
4          (* acc : etats a traiter *)
5          (* i : prochain indice *)
6          (* sigma : liste de renommage *)
7          (* res : transitions *)
8          (* resf : etats finaux *)
9          let aux_etape acc i sigma res resf =
10                 match acc with
11                 | [] -> (i,sigma,res,resf)
12                 | q::t -> if cherche q sigma = -1 then
13                                 begin
14
15                                 (* on ajoute cet etat *)
16                                 let new_sigma = (q,i)::sigma in
17
18                                 (* on calcule les etats suivants*)
19                                 let (qa,qb) = etat_suivant q (a.
                                       delta) in
20
21                                 (* on cherche s'ils ont deja ete
                                       rencontres *)
22                                 let b_qa = (cherche qa sigma = -1)
                                        in
23                                 let b_qb = (cherche qa sigma = -1)
                                        in
24
25                                 (* on ajoute éventuellement ces
                                       transitions *)
26                                 let new_res =
27                                         if b_qa then res else (q,'
                                               a',qa)::res in
```

```
                                let newer_res =
                                        if b_qa then new_res else
                                           (q,'b',qb)::new_res in

                                (* on determine si ces etats sont
                                   finaux *)
                                let b1 = intersecte qa a.final in
                                let b2 = intersecte qb a.final in
                                let new_resf =
                                        if (not b_qa) && b1 then
                                                qa::resf
                                        else
                                                resf
                                in let newer_resf =
                                        if (not b_qb) && b2 then
                                                qa::new_resf
                                        else
                                                new_resf
                                in

                                (* on continue*)
                                aux_etape t (i+1) new_sigma
                                   newer_res newer_resf
                                end
                        else
                                aux_etape acc t i res

        (* on construit enfin les champs du nouvel automate *)
        let init = numero (a.init) in
        let (i,sigma,trans,f) = aux_etape [init] 0 [] [] [] in

        let f_det = List.map (fun x -> cherche x sigma) f in
        let trans_det = List.map (fun x -> let (q1,a,q2) = x in (
           cherche q1, a, cherche q2)) trans in

        (* et on renomme les états *)
        { nb = i ; init = [0] ; final = f_det  ; trans = trans_det
           }
```

Q25.

- Commençons par les dernières étapes : chaque "renommage" à l'aide de la fonction `cherche` a une complexité en $O(N)$, car on cherche le nouveau numéro d'un état du déterminisé dans une liste.
  On fait au plus N renommages dans la liste des états finaux, puis au plus $4N$ dans la liste des transitions (car chaque état a au plus deux transitions sortantes, et que chacune est encodée par un triplet contenant deux entiers).
  Au total, la complexité de ces renommages est en $O(5N \times N) = O(N^2)$.

- Cherchons maintenant la complexité de la partie récursive :

- Si on tombe sur un état déjà rencontré, on ne fait que refaire un appel récursif sans autre opération. Le coût de ces opérations, sans l'appel récursif, est donc en $O(1)$, et ceci peut se produire au plus $O(N)$ fois, puisque l'automate a au plus $2N$ transitions.
- Si on tombe sur un état jamais rencontré, ce qui arrive exactement N fois, on procède aux opérations suivantes :
  * Calculer les états suivants. Ceci se fait à l'aide de la fonction `etat_suivant`, dont la complexité est en $O(|T|)$ (nombre de transitions de l'automate d'origine), lui même majoré par $O(n^2)$.
  * Chercher si les états suivants ont déjà été rencontrés. Ceci se fait en $O(N)$.
  * Chercher éventuellement si les états suivants sont acceptants. Ceci se fait à l'aide de la fonction `intersecte`. Celle-ci parcourt la liste des états finaux de l'automate d'origine, et fait des opérations en temps contstant pour chacun. La complexité est donc en $O(n)$.

  La complexité totale de ces opérations est donc en $O(N + n^2)$. Puis on exécute les appels récursifs.

La complexité totale est alors $O(N + N^2 + N \times (N + n^2)) = O(N^2 + Nn^2)$.

Propriété intéressante : avant de traiter les questions suivantes, on peut montrer cette propriété qui servira dans plusieurs questions : avec les hypothèses de l'énoncé, pour tout mot $u \in \Sigma^*$, il existe au plus un unique état $q \in Q$ tel que la lecture de u depuis l'état q amène à l'état f.

Cela peut se montrer par récurrence sur la longueur de u :

- Si $u = \varepsilon$, c'est évident.
- Sinon, u s'écrit $u = av$. Par hypothèse de récurrence, il existe au plus un $q' \in Q$ tel que la lecture de v depuis q' amène à l'état f. On utilise maintenant le fait que l'automate miroir est accessible et déterministe : la lecture de la lettre a depuis q' amène vers au plus un état q. Par miroir, il existe alors au plus un unique état q tel que la lecture de u depuis q amène dans l'état f.

Q26. L'automate miroir $\tilde{A}$ est accessible par hypothèse, chacun de ses états sont donc accessibles. En particulier, cela implique que tous les états de A sont co-accessibles.

Si $q \in \delta^*(\{I\}, u)$, cela signifie que l'état q est accessible dans l'automate A en lisant le mot u depuis un état initial de A ; de plus, q est co-accessible d'après ce qui précède. Alors il existe un mot w qui est l'étiquette d'un chemin depuis q jusqu'à un état final de A.

Cet assemblage nous permet de construire un chemin acceptant dans A, d'étiquette uw. Il existe donc bien un $w \in \Sigma^*$ tel que $uw \in L$.

Q27. On peut procéder par double inclusion ; et comme u et v jouent des rôles symétriques dans l'énoncé, on peut ne montrer qu'une seule inclusion, car l'autre se traitera de la même manière. Supposons donc que $u^{-1}L = v^{-1}L$ et montrons que $\delta^*(\{I\}, u) \subset \delta^*(\{I\}, v)$.

Soit $q \in \delta^*(\{I\}, u)$. D'après la question précédente, il existe w tel que $uw \in L$. Donc $w \in u^{-1}L = v^{-1}L$; alors $vw \in L$. Il existe donc un état dans $\delta^*(\{I\}, v)$ depuis lequel on peut lire w pour arriver dans f. Or, d'après la propriété montrée précédemment, cet état est nécessairement q. Donc $q \in \delta^*(\{I\}, v)$.

Q28.

- Comme l'opération de déterminisation conserve les langages reconnus, l'automate $B = (\tilde{A})_{det}$ reconnaît le même langage que $\tilde{A}$, c'est-à-dire $\tilde{L}$. Alors $(\tilde{B})_{det}$ reconnaît le même langage que $\tilde{B}$, c'est-à-dire $\tilde{\tilde{L}} = L$.
- Comme B est l'automate déterminisé accessible de $\tilde{A}$, il est en particulier déterministe et accessible, et c'est l'automate miroir de $\tilde{B}$. Donc l'automate $\tilde{B}$ vérifie les hypothèses formulées au début de la partie $I.D$, qu'on a utilisées pour montrer la propriété $(*)$. Donc $(\tilde{B})_{det}$ vérifie la propriété $(*)$;.

Q29. Voici la fonction demandée :

```
let minimal (a : automate) : automate = determinise (transpose (
    determinise (transpose a)))
```

II Expression rationnelle associée à un automate

Q30. Voici la fonction demandée :

```
let rec lettre (e : exprat) : int =
        match e with
        | Vide -> 0
        | Epsilon -> 0
        | Lettre _ -> 1
        | Union(e1,e2) -> (lettre e1) + (lettre e2)
        | Concat(e1,e2) -> (lettre e1) + (lettre e2)
        | Etoile(e1) -> lettre e1
```

Q31. Voici la fonction demandée :

```
let rec est_vide (e : exprat) : int =
        match e with
        | Vide -> true
        | Epsilon -> false
        | Lettre _ -> false
        | Union(e1,e2) -> (est_vide e1) && (est_vide e2)
        | Concat(e1,e2) -> (est_vide e1) || (est_vide e2)
        | Etoile(e1) -> false
```

Q32. Voici la fonction demandée :

```
let se (e : exprat) : exprat =
        match e with
        | Etoile(Epsilon) -> Epsilon
        | Etoile(Etoile(e1)) -> Etoile(e1)
        | _ -> e
```

Q33. En appliquant une fois la simplification de la concaténation sur l'arbre le plus profond de E_n, on la transforme en E_{n-1}. Par récurrence, on montre qu'en l'applicant n fois, on la transforme en $E_0 = a + \emptyset$. Enfin, il suffit d'appliquer une fois la simplification de l'union pour obtenir a.
Il faut alors appliquer $n + 1$ simplifications de règles.

Q34. Voici la fonction demandée :

```
let rec simplifie (e : exprat) : exprat =
        match e with
        | Union(e1,e2) -> let e1' = simplifie e1 and e2' =
           simplifie e2 in
                          su (Union(e1',e2'))
        | Concat(e1,e2) -> let e1' = simplifie e1 and e2' =
           simplifie e2 in
                          sc (Concat(e1',e2'))
        | Etoile(e1) -> let e1' = simplifie e1 in
                          se (Etoile(e1'))
        | _ -> e
```

Q35. Voici la fonction demandée.

```
let rec somme (a : mat) (b : mat) : mat =
        (* on vérifie que les deux matrices ont le même nombre de
           lignes *)
        let na = Array.length a and nb = Array.length b in
        if (na <> nb) then failwith "Erreur␣:␣nombre␣de␣lignes␣
           incompatible␣dans␣somme"
        else
        begin
                let c = Array.make_matrix (na) (Array.length (a
                   .(0))) Vide in
                for i = 0 to na-1 do
                        (* on vérifie que les i-ème lignes des
                           deux matrices ont le même nombre de
                           cases *)
                        let pa = Array.length a.(0) and pb = Array
                           .length b.(0) in
                        if (pa <> pb) then failwith "Erreur␣:␣
                           nombre␣de␣colonnes␣incompatible␣dans␣
                           somme"
                        else
                        begin
                                for j = 0 to pa-1 do
                                        c.(i).(j) <- Union(a.(i).(
                                           j),b.(i).(j))
                                done
                        end
                done;
                c
```

```
20          end
```

Les opérations qui majorent la complexité sont l'exécution des deux boucles. Pour deux matrices de taille $(n \times p)$, la boucle externe effectue n itérations, et la boucle interne en effectue p. Le contenu de la boucle interne s'effectue en temps constant. Le nombre d'opérations est donc proportionnel à np, et la complexité est alors en $O(np)$.

Q36. Voici la fonction demandée.

```
let rec somme (a : mat) (b : mat) : mat =
        (* on vérifie que les deux matrices ont le même nombre de
           lignes *)
        let n = Array.length a and p = Array.length b and q =
           Array.length b.(0) in
        let c = Array.make_matrix n q Vide in
        for i = 0 to n-1 do
                for j = 0 to q-1 do
                        for k = 0 to p-1 do
                                c.(i).(j) <- Union(c.(i).(j),
                                   Concat(a.(i).(k),b.(k).(j)))
                        done;
                done
        done;
        c
```

La complexité de cette fonction est proportionnelle au nombre d'itérations de ses trois boucles. Avec les notations de l'énoncé, elle est en $O(npq)$.

Q37. Avec ces notations, on a les expressions suivantes pour chaque langage :

- $L_{0,0} : (a + bd^*c)^*$
- $L_{0,1} : a^*b(d + ca^*b)^*$
- $L_{1,0} : d^*c(a + bd^*c)^*$
- $L_{1,1} : (d + ca^*b)^*$

Q38. Comptons les opérations importantes dans le calcul des 4 blocs précédents.

- Les matrices D^* et $(D + Ca^*B)^*$ sont des étoiles de matrices de taille $(n - 1 \times n - 1)$. Comme elles apparaissent à plusieurs reprises, il suffit de les calculer une fois chacune, ce qui se fait en $C(n-1)$ pour chacune d'elles une fois que le calcul de la matrice interne est fini.
- Le calcul de a^* et de $(a + BD^*C)^*$ se fait en $C(1)$ une fois les matrices internes calculées, car il s'agit de matrices de taille (1×1). Ce coût sera vraisemblablement négligé devant les coûts évoqués après.
- Le calcul des unions dans A' et dans C' est en $O(1)$, car il est appliqué à des matrices de taille 1×1.

- Il reste le calcul des différents produits. Dans A', le produit BD^*C implique des matrices de tailles respectives $(1 \times n-1), (n-1 \times n-1), (n-1 \times 1)$. En calculant les deux produits successivement, on a d'abord un produit en $O((n-1)^2)$, puis un produit en $O(n-1)$. La somme des coûts de ces deux opérations est alors majorée asymptotiquement par $O(n^2)$.

  On peut appliquer le même raisonnement pour les autres produits dans les autres blocs, et tous leurs coûts sont majorés par $O(n^2)$.

Au total, cela montre que le calcul de M^* nécessite deux calculs d'étoiles de complexité $C(n-1)$, et d'autres opérations dont la complexité est majorée asymptotiquement par $O(n^2)$, d'où la formule de récurrence $C(n) = 2C(n-1) + O(n^2)$.

Itérons cette relation de récurrence :

$$\begin{aligned} C(n) &= 2C(n-1) + O(n^2) \\ &= 4C(n-2) + 2O(n^2) + O(n^2) \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1}C(1) + (2^{n-2} - 1)O(n^2) \\ &= O(2^n n^2) \end{aligned}$$

Q39. On a désormais 4 blocs de taille $\frac{n}{2}$, et toutes les matrices impliquées dans le calcul de A', B', C', D' sont de taille $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$. Comptons alors les opérations importantes :

- Il y a 4 calculs d'étoile : D^*, A^*, $(A + BD^*C)^*$ et $(D + CA^*B)^*$. Ceux-ci contribuent pour une complexité de $4C(\frac{n}{2})$.
- Il y a 12 produits, chacun impliquant deux matrices de taille $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$. Chacun compte alors pour une complexité de $O(\frac{n^3}{8}) = O(n^3)$.
- Il y a 4 sommes, chacune compte pour $O(\frac{n^2}{4})$.

Au total, la complexité de $C(n)$ s'exprime alors comme suit : $C(n) = 4C(\frac{n}{2}) + O(n^3)$.

Itérons cette relation de récurrence :

$$\begin{aligned} C(n) &= 4C(\frac{n}{2}) + O(n^3) \\ &= 16C(\frac{n}{4}) + 4O(n^3) + O(n^3) \\ &= 64C(\frac{n}{8}) + +16O(n^3) + 4O(n^3) + O(n^3) \\ &\vdots \\ &= 4^{\log_2(n)}C(1) + (4^{\log_2(n)} - 1)O(n^3) \\ &= O(n^5) \end{aligned}$$

Q40. Si une matrice M est de taille quelconque, on peut utiliser la procédure suivant : si n est pair, on divise en des blocs de taille identique ; si n est impair, on pose $n = 2p + 1$ et on divise en des blocs de taille p et $p+1$. En appliquant un raisonnement similaire au raisonnement précédent, on peut se ramener à une complexité en $O(n^5)$ à nouveau.

```
let rec etoile (m : mat) : mat =
        let n = Array.length m in
        let p = n/2 in
        let q =
                if n mod 2 = 0 then p else p+1
        in

        (* a ce stade, on a toujours p+q = n *)
        let (a,b,c,d) = decouper m p in
        let de = etoile d in
        let ae = etoile a in
        let ae_b = produit ae b in
        let de_c = produit de c in
        let bdec = produit b de_c in
        let caeb = produit c ae_b in
        let a0 = somme a bdec in
        let d0 = somme d caeb in

        let a' = etoile a0 in
        let d' = etoile d0 in
        let b' = produit ae_b d0 in
        let c' = produit de_c a0 in

        recolle a' b' c' d'
```

Q42. Posons $X = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}$ avec pour tout i, $x_i = \varepsilon$ si $i \in I$,, et $x_i = \emptyset$ sinon.
On définit de même $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ avec pour tout i, $y_i = \varepsilon$ si $i \in F$, et $y_i = \emptyset$ sinon.

On note $[M_A^*]_{i,j} = e_{i,j}$ les expressions rationnelles qui servent de coefficients à la matrice M_A^*. On peut alors calculer XM_A^*, puis XM_A^*Y.

XM_A^* est une matrice de taille $(1 \times n)$, de terme général $t_j = \sum_{i=0}^{n-1} x_i e_{i,j} \equiv \sum_{i \in I} e_{i,j}$. Et donc XM_A^*Y est une matrice de taille (1×1), dont le seul coefficient est $\sum_{j=0}^{n-1} t_j y_j \equiv \sum_{j \in F} t_j \equiv \sum_{i \in I} \sum_{j \in F} e_{i,j}$.

Ainsi, on a $L([XM_A^*Y]_{0,0}) = L(\sum_{i \in I} \sum_{j \in F} e_{i,j}) = \bigcup_{i \in I, j \in f} L_{i,j} = L_A$.

Q43. Voici la fonction demandée :

```
let langage (a : automate) : exprat =
        (* on réserve la mémoire nécessaire *)
        let n = a.nb in
        let x = Array.make_matrix 1 n Vide in
        let y = Array.make_matrix n 1 Vide in
```

```
6           let m = Array.make_matrix n n Vide in
7
8           (* on initialise chaque case *)
9           let rec init_x li =
10                  match li with
11                  | [] -> ()
12                  | i::l -> x.(0).(i) <- Epsilon ; init_x l
13          in
14          let rec init_y li =
15                  match li with
16                  | [] -> ()
17                  | i::l -> y.(i).(0) <- Epsilon ; init_y l
18          in
19          let rec init_m li =
20                  match li with
21                  | [] -> ()
22                  | (q0,a,q1)::l -> m.(q0).(q1) <- Union(m.(q0).(q1)
                       , Lettre a) ; init_m l
23          in
24          init_x (a.init) ;
25          init_y (a.final) ;
26          init_m (a.trans) ;
27
28          (* on calcule enfin le produit matriciel *)
29          let me = etoile m in
30          let xme = produit x me in
31          let xmey = produit xme y in
32
33          xmey.(0).(0)
```

Si on appelle n le nombre d'états de l'automate d'entrée, et qu'on suppose fixée la taille de Σ, alors :

- la réservation en mémoire des trois tableaux coûte au plus $O(n^2)$.
- l'initialisation des trois tableaux coûte au plus $O(|I| + |F| + |T|) = O(n^2)$
- le calcul de l'étoile coûte au plus $O(n^5)$.
- Le calcul des produits coûte au plus $O(n^2)$.

La complexité est alors majorée par le calcul de l'étoile : $O(n^5)$.

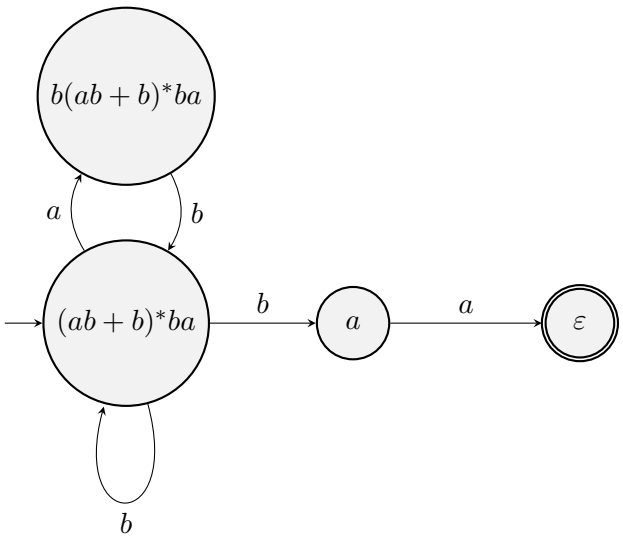
III Automate des dérivées d'Antimirov

$$\begin{aligned}\partial_a(E) = \partial_a((ab+b)^*ba) &= \partial_a((ab+b)^*)\cdot\{ba\} \cup \partial_a(ba)\\ &= \partial_a(ab+b)\cdot\{(ab+b)^*\}\cdot\{ba\} \cup \partial_a(b)\cdot\{a\}\\ &= \partial_a(ab+b)\cdot\{(ab+b)^*ba\} \cup \emptyset\\ &= (\partial_a(ab) \cup \partial_a(b))\cdot\{(ab+b)^*ba\}\\ &= (\partial_a(a)\cdot\{b\})\cdot\{(ab+b)^*ba\}\\ &= \{b(ab+b)^*ba\}\end{aligned}$$

Q44.

$$\begin{aligned}\partial_b(E) = \partial_b((ab+b)^*ba) &= \partial_b((ab+b)^*)\cdot\{ba\} \cup \partial_b(ba)\\ &= \partial_b((ab+b)^*)\cdot\{ba\} \cup \partial_b(b)\cdot\{a\}\\ &= \partial_b(ab+b)\cdot\{(ab+b)^*\}\cdot\{ba\} \cup \{a\}\\ &= (\partial_b(ab) \cup \partial_b(b))\cdot\{(ab+b)^*ba\} \cup \{a\}\\ &= (\emptyset \cup \{\varepsilon\})\cdot\{(ab+b)^*ba\} \cup \{a\}\\ &= \{(ab+b)^*ba, a\}\end{aligned}$$

Q45. L'ensemble d'états obtenus est l'ensemble d'expressions rationnelles suivant : $Q = \{E, b(ab+b)^*ba, a, \varepsilon\}$.
L'automate obtenu est alors précisément l'automate A_2 de la question 13 :



Q46. On peut procéder par équivalence directement :

$$\begin{aligned}w \in v^{-1}u^{-1}L &\text{ ssi } vw \in u^{-1}L\\ &\text{ssi } (uv)w \in L\\ &\text{ssi } w \in (uv)^{-1}L\end{aligned}$$

Q47. On peut procéder par récurrence sur la longueur de w :

- Si $w = \varepsilon$, on a $L(\partial_\varepsilon(S)) = L(\bigcup_{E\in S} \partial_\varepsilon(E)) = L(\bigcup_{E\in S} \{E\}) = L(S)$
- Si $w = ua$, on a :

$$
\begin{aligned}
L(\partial_{ua}(S)) &= L\left(\bigcup_{E\in S} \partial_{ua}(E)\right) \\
&= L\left(\bigcup_{E\in S} \partial_a(\partial_u(E))\right) \\
&= \bigcup_{E\in S} L\left(\partial_a(\partial_u(E))\right) \\
&= \bigcup_{E\in S} a^{-1}L\left(\partial_u(E)\right) \\
&= \bigcup_{E\in S} a^{-1}u^{-1}L\left(E\right) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \bigcup_{E\in S} (ua)^{-1}L\left(E\right) && \text{(question 46)} \\
&= (ua)^{-1}\left(\bigcup_{E\in S} L\left(E\right)\right) && \text{(se vérifie facilement)} \\
&= w^{-1}L(S)
\end{aligned}
$$

Q48. On peut procéder par récurrence sur la longueur de w :

- Si $w = \varepsilon$, on a $\partial_\varepsilon(E) = \{E\}$, qui est bien l'ensemble des états accessible depuis E en lisant ε.
- Si $w = ua$, on a $\partial_{ua}(E) = \partial_a(\partial_u(E))$. Par hypothèse de récurrence, $E' = \partial_u(E)$ est l'ensemble des états accessibles depuis E en lisant u.
  On remarque alors que :
  $e \in \partial_{ua}(E)$ ssi $e \in \partial_a(\partial_u(E))$
  ssi il existe $s \in \partial_u(E)$ tel que $e \in \partial_a(s)$
  ssi la transition (s, a, e) existe et s est accessible depuis E en lisant u
  ssi e est accessible depuis E en lisant $ua = w$.

Q49. On peut procéder par équivalence :

$w \in L(E)$	ssi $w\varepsilon \in L(E)$	(trivial)
	ssi $\varepsilon \in w^{-1}L(E)$	(définition)
	ssi $\varepsilon \in L(\partial_w(E))$	(question 47)
	ssi il existe $E' \in \partial_w(E)$ telle que $\varepsilon \in L(E')$	
	ssi il existe $E' \in \partial_w(E)$ telle que $E' \in F$	(définition)
	ssi il existe $E' \in F$ accessible depuis E en lisant w	(question 48)
	ssi w est accepté par l'automate d'Antimirov	(définition)

Q50. On procède par induction sur E.

- Si $E = \emptyset$, on a $Q(E) = \emptyset$ et donc $|Q(E)| = 0 \leq \|E\| = 0$
- Si $E = \varepsilon$, on a $Q(E) = \emptyset$ et donc $|Q(E)| = 0 \leq \|E\| = 0$
- Si $E = a$, on a $Q(E) = \{\varepsilon\}$ et donc $|Q(E)| = 1 \leq \|E\| = 1$
- Si $E = E_1 + E_2$, on a
  $$
  \begin{aligned}
  Q(E) &= \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1 + E_2) = \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} (\partial_w(E_1) \cup \partial_w(E_2)) \\
  &= \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1)\right) \cup \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_2)\right) = Q(E_1) \cup Q(E_2)
  \end{aligned}
  $$
  et donc $|Q(E)| \leq |Q(E_1)| + |Q(E_2)| \leq \|E_1\| + \|E_2\| \ = \|E\|$

- Si $E = E_1 E_2$, on a
$$\begin{aligned} Q(E) &= \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1E_2) \subset \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} (\partial_w(E_1)\cdot E_2 \cup \bigcup_{v\in S^+(w)} \partial_v(E_2)) \\ &= \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1)\cdot E_2\right) \cup \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \bigcup_{v\in S^+(w)} \partial_v(E_2)\right) \\ &= \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1)\right)\cdot E_2 \cup \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_2)\right) \\ &= Q(E_1)\cdot E_2 \cup Q(E_2) \end{aligned}$$
et donc $|Q(E)| \leq |Q(E_1)\cdot E_2| + |Q(E_2)| = |Q(E_1)| + |Q(E_2)| \leq \|E_1\| + \|E_2\| \ = \|E\|$

- Si $E = E_1^*$, on a
$$\begin{aligned} Q(E) &= \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1^*) \subset \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} (\bigcup_{v\in S^+(w)} \partial_v(E_1)\cdot E_1^*) \\ &= \bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} (\partial_w(E_1)\cdot E_1^*) = \left(\bigcup_{w\in\Sigma^*\setminus\{\varepsilon\}} \partial_w(E_1)\right)\cdot E_1^* \\ &= Q(E_1)\cdot E_1^* \end{aligned}$$
et donc $|Q(E)| \leq |Q(E_1)\cdot E_1^*| = |Q(E_1)| \leq \|E_1\| = \|E\|$

Ainsi, on remarque que pour toute expression rationnelle E, $Q(E)$ est un ensemble fini. Or, $Q(E)$ est précisément l'ensemble des états de l'automate d'Antimirov de l'expression E. Alors cet automate admet bien un nombre fini d'états.