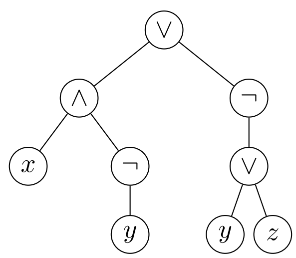
Résumé **Logique propositionnelle (MPSI)** Q. Fortier

- Soit V un ensemble (de **variables**). L'ensemble des **formules logiques** sur V est défini inductivement :
  - T et F sont des formules (Vrai et Faux)
  - Toute variable $x \in V$ est une formule
  - Si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule
  - Si φ, ψ sont des formules alors $\varphi \wedge \psi$ (conjonction) et $\varphi \vee \psi$ (disjonction) sont des formules

```
type 'a formula =
    | T | F (* true, false *)
    | Var of 'a (* variable *)
    | Not of 'a formula
    | And of 'a formula * 'a formula
    | Or of 'a formula * 'a formula
```

- On peut représenter une formule logique par un arbre.
  Exemple : $(x \wedge \neg y) \vee \neg(y \vee z)$ est représenté par



  - L'**arité** d'un connecteur logique est son nombre d'arguments (= nombre de fils dans l'arbre).
    $\neg$ est d'arité 1 (unaire) et $\wedge, \vee$ sont d'arités 2 (binaire).
  - La **taille** d'une formule est le nombre de symboles qu'elle contient (= nombre de noeuds de l'arbre).
  - La **hauteur** d'une formule est la hauteur de l'arbre associé.

- (Exemple de démonstration par induction sur les formules) Soit φ une formule ayant $n(\varphi)$ symboles de négation et $b(\varphi)$ connecteurs binaire. Alors la taille $t(\varphi)$ de φ est : $t(\varphi) = 1 + n(\varphi) + 2b(\varphi)$.

  Preuve : Montrons $P(\varphi) : t(\varphi) = 1 + n(\varphi) + 2b(\varphi)$ par induction.
  Cas de base : $t(T) = 1 = 1 + 0 + 0$ donc $P(T)$ est vraie.
  De même pour $P(F)$ et $P(x)$ où x est une variable.
  Hérédité : Soit φ une formule.
  - Si $\varphi = \neg\psi$ alors $t(\psi) = 1 + n(\psi) + 2b(\psi)$ par induction et $t(\varphi) = t(\neg\psi) = 1 + t(\psi) = 1 + \underbrace{1 + n(\psi)}_{n(\varphi)} + 2\underbrace{b(\psi)}_{b(\varphi)} = 1 + n(\varphi) + 2b(\varphi)$ donc $P(\varphi)$ est vraie.
  - Si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ alors, par induction, $t(\psi_1) = 1 + n(\psi_1) + 2b(\psi_1)$ et $t(\psi_2) = 1 + n(\psi_2) + 2b(\psi_2)$. Donc $t(\varphi) = 1 + t(\psi_1) + t(\psi_2) = 1 + \underbrace{n(\psi_1) + n(\psi_2)}_{n(\varphi)} + 2\underbrace{(1 + b(\psi_1) + b(\psi_2))}_{b(\varphi)}$.
    Donc $P(\varphi)$ est vraie.
  - De même si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$.

  Par induction structurelle, $P(\varphi)$ est donc vraie pour toute formule φ.

- $\varphi \longrightarrow \psi$ est défini par $\neg\varphi \vee \psi$.
  $\varphi \longleftrightarrow \psi$ est défini par $\varphi \longrightarrow \psi \wedge \psi \longrightarrow \varphi$.

- Une **valuation** sur un ensemble V de variables est une fonction $v : V \longrightarrow \{0, 1\}$. 0 est aussi noté Faux ou $\perp$. 1 est aussi noté Vrai ou $\top$. L'**évaluation** $[\![\varphi]\!]_v$ d'une formule φ sur v est définie inductivement :
  - $[\![T]\!]_v = 1$, $[\![F]\!]_v = 0$
  - $[\![x]\!]_v = v(x)$ si $x \in V$
  - $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1 - [\![\varphi]\!]_v$
  - $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = \min([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$
  - $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = \max([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$

  Si $[\![\varphi]\!]_v = 1$, on dit que v est un **modèle** pour φ.

```
let rec eval d = function
    | T -> true
    | F -> false
    | Var(x) -> d x
    | Not(p) -> not (eval p)
    | And(p, q) -> (eval p) && (eval q)
    | Or(p, q) -> (eval p) || (eval q)
```

- Une formule toujours évaluée à 1 est une **tautologie**. Une formule toujours évaluée à 0 est une **antilogie**. Une formule qui possède au moins une évaluation à 1 est **satisfiable**.

- Deux formules φ et ψ sur V sont **équivalentes** (et on note $\varphi \equiv \psi$) si, pour toute valuation $v : V \to \{0,\ 1\}$: $[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.
  - $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
  - $\varphi \vee \neg\varphi \equiv T$ (toujours vrai)
  - $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (de Morgan)
  - $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ (de Morgan)
  - $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$
  - $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$

- La table de vérité permet de voir rapidement quelles sont les évaluations possibles d'une formule. Une formule à n variables possède 2^n évaluations possibles, et donc 2^n lignes dans sa table de vérité.

x	y	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$