

Déduction naturelle

Quentin Fortier

April 5, 2023

Système déductif : Définition

La **logique propositionnelle** définit la valeur de vérité d'une formule en considérant toutes les valeurs possibles des variables booléennes.

La **déduction naturelle** formalise la notion de preuve mathématique.

Définition

Un **séquent**, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A .

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ , on peut déduire A .

Définition

Une **règle d'inférence** est constituée :

- d'un ensemble de séquents appelés **prémisses**
- d'un séquent appelé **conclusion**.

Une règle sans prémisses est appelée **axiome**.

Notation pour une règle d'inférence :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash P_1 \quad \Gamma_2 \vdash P_2 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash P_n}{\Gamma \vdash A}$$

Définition

Une **preuve** d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, les arcs des règles d'inférence et la racine est $\Gamma \vdash A$.

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A_1} \quad \dots \quad \frac{\vdots}{\Gamma_n \vdash A_n}}{\Gamma \vdash A}$$

Définition

Une **preuve** d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, les arcs des règles d'inférence et la racine est $\Gamma \vdash A$.

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \Gamma_1 \vdash A_1 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \hline \Gamma_n \vdash A_n \end{array}}{\Gamma \vdash A}$$

Stratégie de preuve : Imaginer comment prouver le séquent en mathématiques puis appliquer les règles correspondantes à l'envers. Si on aboutit à une impasse (un séquent qu'on doit démontrer mais qui est manifestement faux), on backtrack.

Déduction naturelle

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

Déduction naturelle

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

- Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique (\rightarrow , \wedge , \vee , \neg), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots}{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}$$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique (\rightarrow , \wedge , \vee , \neg), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots}{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}$$
- Règle d'élimination, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}{\dots \vdash \dots}$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (**modus ponens**) :

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

$$\frac{\overline{A \vdash A} \text{ ax}}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow_i$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$

Déduction naturelle : Implication

Question

Prouver le séquent $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}}{\Gamma \vdash B \rightarrow C} \text{ ax} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash B \rightarrow A} \text{ ax} \quad \overline{\Gamma \vdash B} \text{ ax}}{\Gamma \vdash A} \rightarrow_e}{\Gamma \vdash C} \rightarrow_e \quad \overline{\Gamma \vdash B} \text{ ax}}{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \rightarrow A \vdash B \rightarrow C} \rightarrow_i \rightarrow_i$$

Où $\Gamma = \{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \rightarrow A, B\}$.

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du \wedge :

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

Il y a deux règles d'élimination pour le \wedge : on peut utiliser l'une ou l'autre.

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

Remarque : on peut aussi généraliser les règles avec différents contextes Γ, Γ' (ce qui revient à avoir le même contexte puis appliquer aff), pour simplifier les preuves.

Ainsi, on peut aussi utiliser :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Déduction naturelle : Conjonction \wedge

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

$$\frac{\frac{\frac{}{A \wedge B \rightarrow C \vdash A \wedge B \rightarrow C} \text{ax}}{(A \wedge B) \rightarrow C, A, B \vdash C} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge_i}{(A \wedge B) \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C} \rightarrow_i}{(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow_i$$

Question

Montrer $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$.

Déduction naturelle : Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

Déduction naturelle : Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

Déduction naturelle : Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Déduction naturelle : Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Exercice

- 1 Montrer $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$.
- 2 On admet aussi $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$.
En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Déduction naturelle : Négation \neg

- Introduction de \neg :

Déduction naturelle : Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

Déduction naturelle : Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Déduction naturelle : Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Déduction naturelle : Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Remarque : il n'est pas possible de démontrer $\neg\neg A \vdash A$ sans règle supplémentaire (tiers-exclu ou raisonnement par l'absurde).

Déduction naturelle : Vrai \top et faux \perp

- Introduction de \top (vrai) :

Déduction naturelle : Vrai \top et faux \perp

- Introduction de \top (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- Élimination de \perp (faux) :

Déduction naturelle : Vrai \top et faux \perp

- Introduction de \top (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- Élimination de \perp (faux) :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ te}$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ te}$$

On ajoute raa à la logique intuitionniste et on veut montrer te.

Question

- 1 Prouver $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.
- 2 Prouver $\vdash A \vee \neg A$.

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

On peut montrer :

- Correction : Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.
- Complétude (HP) : Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \vdash A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

\wedge_i Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2 , on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.

Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B , et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

\wedge_i Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2 , on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.

Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B , et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

\wedge_e Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$$

Par récurrence sur T_1 , $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A$.

Les autres cas sont similaires.