Graphes : Parcours en largeur (BFS)

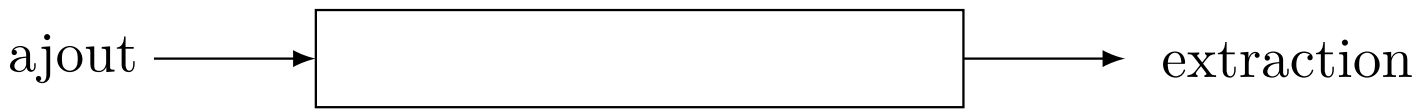
Quentin Fortier

September 27, 2023

File

Une **file** est une structure de donnée possédant les opérations :

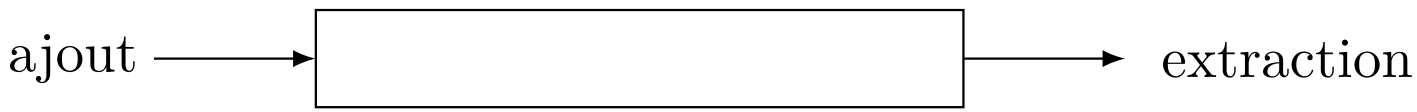
- Ajout d'un élément à la fin de la file.
- Extraction (suppression et renvoi) de l'élément au début de la file. Ainsi, c'est toujours l'élément le plus ancien qui est extrait.



File

Une **file** est une structure de donnée possédant les opérations :

- Ajout d'un élément à la fin de la file.
- Extraction (suppression et renvoi) de l'élément au début de la file. Ainsi, c'est toujours l'élément le plus ancien qui est extrait.



Une file est aussi appelée structure FIFO (*First In, First Out*) alors qu'une pile est LIFO (*Last In, First Out*).

File

Exercice

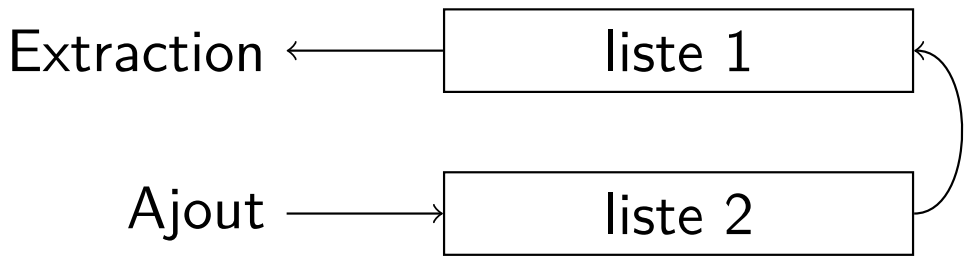
Donner des implémentations possibles de file.

File

Exercice

Donner des implémentations possibles de file.

- Avec un tableau circulaire et deux indices (début et fin).
- Avec 2 listes :



Parcours en largeur (BFS) : Avec file

Parcours en largeur avec file q :

```
let bfs (g : int list array) (r : int) =
    let seen = Array.make (Array.length g) false in
    let q = Queue.create () in
    let add v =
        if not seen.(v) then (
            seen.(v) <- true; Queue.add v q
        ) in
    add r;
    while not (Queue.is_empty q) do
        let u = Queue.pop q in
        (* traiter u *)
        List.iter add g.(u)
    done
```

Parcours en largeur (BFS) : Avec file

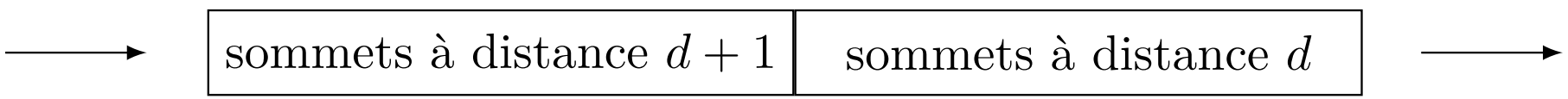
Parcours en largeur avec file q :

```
let bfs (g : int list array) (r : int) =
    let seen = Array.make (Array.length g) false in
    let q = Queue.create () in
    let add v =
        if not seen.(v) then (
            seen.(v) <- true; Queue.add v q
        ) in
    add r;
    while not (Queue.is_empty q) do
        let u = Queue.pop q in
        (* traiter u *)
        List.iter add g.(u)
    done
```

Ressemble beaucoup au DFS avec pile.

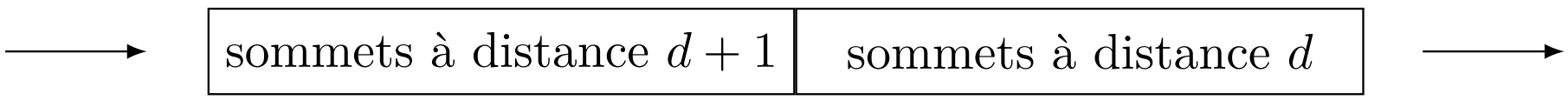
Parcours en largeur (BFS) : Avec file

La file q est toujours de la forme :



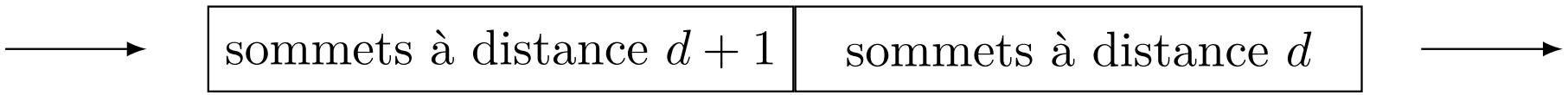
Parcours en largeur (BFS) : Avec file

La file `q` est toujours de la forme :



Les sommets sont donc **traités par distance croissante** à `s` : d'abord `s`, puis les voisins de `s`, puis ceux à distance 2...

Parcours en largeur (BFS) : Avec 2 couches



Une variante du BFS utilise deux listes : `cur` pour la couche courante, `next` pour la couche suivante.

```
let bfs g r =
    let seen = Array.make (Array.length g) false in
    let rec aux cur next = match cur with
        | [] -> if next <> [] then aux next []
        | u::q when seen.(u) -> aux q next
        | u::q -> seen.(u) <- true;
                  aux q (next @ g.(u)) in
    aux [r] []
```

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet s aux autres?

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet s aux autres?

Stocker des couples (sommet, distance) dans la file :

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet s aux autres?

Stocker des couples (sommet, distance) dans la file :

```
let bfs g r =
    let dist = Array.make (Array.length g) (-1) in
    let q = Queue.create () in
    let add d v =
        if dist.(v) = -1 then (
            dist.(v) <- d;
            Queue.add (v, d) q
        ) in
    add 0 r;
    while not (Queue.is_empty q) do
        let u, d = Queue.pop q in
        List.iter (add (d + 1)) g.(u)
    done;
    dist  (* dist.(u) est la distance de r à u *)
```

Application au calcul de distance

Théorème

`bfs g r` renvoie un tableau `dist` tel que, pour tout sommet `v` accessible depuis `r`, `dist.(v)` $= d(r, v)$

Preuve : Par invariant de boucle : voir le poly de Jean-Baptiste Bianquis.

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet `r` aux autres?

En utilisant un BFS avec deux couches :

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet `r` aux autres?

En utilisant un BFS avec deux couches :

```
let bfs g r =
    let dist = Array.make (Array.length g) (-1) in
    let rec aux d cur next = match cur with
        | [] -> if next <> [] then aux (d + 1) next []
        | u::q when dist.(u) <> -1 -> aux d q next
        | u::q -> dist.(u) <- d;
                  aux d q (g.(u) @ next) in
    aux 0 [r] [];
    dist (* dist.(u) est la distance de r à u *)
```

Application au calcul de distance

Remarque : le parcours en largeur ne sert à trouver les distances que si le graphe est non pondérée, et où la longueur d'un chemin est son nombre d'arêtes. Sur les graphes pondérés, il faut utiliser Dijkstra/Floyd-Warshall/Bellman-Ford...

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment connaître un plus court chemin d'un sommet `r` à un autre?

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment connaître un plus court chemin d'un sommet `r` à un autre?

On stocke dans `pred.(v)` le sommet qui a permis de découvrir `v` :

```
let bfs g r =
    let pred = Array.make (Array.length g) (-1) in
    let q = Queue.create () in
    let add p v = (* p est le père de v *)
        if pred.(v) = -1 then (pred.(v) <- p; Queue.add v q) in
    add r r;
    while not (Queue.is_empty q) do
        let u = Queue.pop q in
        List.iter (add u) g.(u)
    done;
    pred  (* pred.(v) est le prédécesseur de v dans le parcours en
```

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment en déduire un plus court chemin de r à v?

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment en déduire un plus court chemin de r à v?

```
let rec path pred v =
    if pred.(v) = v then [v]
    else v::path pred pred.(v)
```