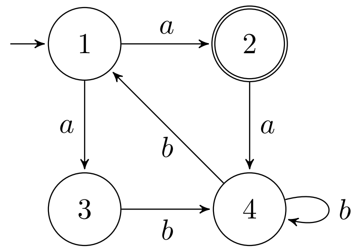
I Algorithme de déterminisation

Déterminiser l'automate suivant en utilisant l'algorithme du cours :



II Clôture des langages reconnaissables

Si $m = m_1...m_n$ est un mot, on définit son miroir $\widetilde{m} = m_n...m_1$. Si L est un langage, on définit son miroir $\widetilde{L} = \{\widetilde{m} \mid m \in L\}$.

1. Montrer que le miroir d'un langage reconnaissable est reconnaissable.

Si L est un langage sur Σ, on définit :

- $Pref(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*,\ uv \in L\}$: ensemble des préfixes des mots de L.
- $Suff(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*,\ vu \in L\}$: ensemble des suffixes des mots de L.
- $Fact(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v, w \in \Sigma^*,\ vuw \in L\}$: ensemble des facteurs des mots de L.

2. Montrer que si L est reconnaissable alors $Pref(L)$, $Suff(L)$, $Fact(L)$ le sont aussi.
3. Montrer que si L est rationnel alors $Pref(L)$, $Suff(L)$, $Fact(L)$ le sont aussi (puisqu'on va montrer que rationnel = reconnaissable, c'est une preuve alternative à la précédente).

III Reconnaissable ou non ?

Pour chacun de ces langages, dire s'il est reconnaissable ou non. Justifier.

1. L_1 = mots sur $\{a, b\}$ sans lettres consécutives égales.
2. L_2 = mots sur $\{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et dont le nombre de b est multiple de 3.
3. $L_3 = \{m \in \{a, b\}^* \mid |m|_a = |m|_b\}$ (où $|m|_a$ est le nombre de a du mot m).
4. L_4 = écritures en base 2 des multiples de 5.
5. $L_5 = \{a^p \mid p \text{ est un nombre premier}\}$.

IV Algorithmes sur les automates

1. À quelle condition nécessaire et suffisante simple le langage reconnu par un automate est vide? Décrire un algorithme pour le savoir.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante simple le langage reconnu par un automate est fini? Décrire un algorithme pour le savoir.
3. Décrire un algorithme pour déterminer si deux automates admettent le même langage.
4. Soit A un automate à n états. Montrer que si $L(A)$ est non vide alors il contient un mot de longueur $\leq n - 1$.
5. On dit qu'un automate est **émondé** si, pour tout état q, il existe d'une part un chemin d'un état initial à q et d'autre part un chemin de q à un état final. Montrer que tout automate est équivalent à un automate émondé.

V Longueur discriminante

1. Soit A un automate. Décrire un algorithme pour déterminer la plus petite longueur d'un mot reconnu par A et préciser sa complexité.

2. Soit A un automate à n états et de langage $L(A)$. Montrer que $L(A) = \emptyset$ si et seulement si $L(A)$ ne contient aucun mot de longueur strictement inférieure à n.

3. Soit $A_1 = (Q_1, i_1, F_1, \delta_1)$ et $A_2 = (Q_2, i_2, F_2, \delta_2)$ deux automates déterministes complets à n_1 et n_2 états et de langages L_1 et L_2. On suppose que $L_1 \neq L_2$. Soit $l(L_1, L_2)$ la plus petite longueur d'un mot u appartenant à l'un des deux langages mais pas à l'autre.
   Montrer que $l(L_1, L_2) < n_1 n_2$.

VI Ensemble distingant

Soient L un langage sur un alphabet Σ et $u, v \in \Sigma^*$. On dit que $w \in \Sigma^*$ est un *suffixe distingant* pour u et v si exactement l'un des mots uw ou vw appartient à L.

Un ensemble de mots D est *distingant* pour L si toute paire de mots de D a un suffixe distingant.

1. Soit L_1 le langage dénoté par l'expression régulière $(ab)^*$. Montrer que $\{\varepsilon, a, b\}$ est un ensemble distingant pour L_1.

2. On note $ind(L)$ le nombre minimum d'états d'un automate déterministe complet reconnaissant L. Montrer que si L a un ensemble distingant de taille n alors $ind(L) \geqslant n$.

3. Que vaut $ind(L_1)$?

4. On suppose que L a un ensemble distingant infini. Montrer que L n'est pas un langage régulier.

5. En déduire que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un langage régulier.

6. Soit L_2 l'ensemble des mots de $\{a, b\}^*$ qui contiennent un nombre pair de a et un nombre pair de b. Déterminer $ind(L_2)$.

VII Oral ENS info

On fixe un alphabet Σ avec $|\Sigma| > 1$. Un mot $w \in \Sigma^*$ est un palindrome s'il s'écrit $w = a_1 \cdots a_n$ et qu'on a $a_i = a_{n-i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On note $\Pi \subseteq \Sigma^*$ le langage des palindromes. Pour un automate fini A sur Σ, on note $L(A)$ le langage reconnu par A.

1. Soit $\Pi_n := \Pi \cap \Sigma^n$. Montrer que pour tout automate fini déterministe complet A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $L(A) \cap \Sigma^{2n} = \Pi_{2n}$, alors A a au moins $|\Sigma|^n$ états.

2. En déduire que le langage Π n'est pas régulier.

3. Étant donné un automate fini A sur Σ, peut-on calculer un automate A_Π qui reconnaisse $L(A) \cap \Pi$?

4. Pour tout mot $u = b_1 \cdots b_m$ de Σ^*, on note $\overline{u} := b_m \cdots b_1$ son miroir. Étant donné A, peut-on calculer un automate A'_Π qui reconnaisse $\{u \in \Sigma^* \mid u\overline{u} \in L(A)\}$?

5. On appelle Π_{pair} l'ensemble des palindromes de longueur paire, i.e., $\Pi_{\text{pair}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_{2n}$. Proposer un algorithme qui, étant donné un automate fini A sur Σ, détermine si $L(A) \cap \Pi_{\text{pair}}$ est vide, fini, ou infini. Discuter de sa complexité en temps et en espace.

6. Modifier l'algorithme de la question 4 pour calculer la cardinalité de $L(A) \cap \Pi_{\text{pair}}$ quand cet ensemble est fini, en faisant l'hypothèse que l'automate d'entrée A est déterministe. Comment la complexité est-elle affectée?

7. Modifier l'algorithme des questions 4 et 5 pour qu'il s'applique à $L(A) \cap \Pi$.