- Définitions :

	Signification	Exemple
Alphabet	Ensemble fini de lettres	$\Sigma = \{a, b\}$
Mot	Suite finie de lettre	$m = abaa$
ε	Mot vide (sans lettre)	
Langage	Ensemble de mots	$L = \{\varepsilon, a, baa\}$

ε est un mot, pas une lettre.

- Opérations sur des mots $u = u_1 ... u_n$ et $v = v_1 ... v_p$:

	Définition	Exemple avec $u = ab$ et $v = cbc$
Concaténation	$uv = u_1 ... u_n v_1 ... v_p$	$uv = abcbc$
Puissance	$u^n = u ... u$	$u^3 = ababab$
Taille	$\lvert u \rvert = n$	$\lvert u \rvert = 2$

Deux mots sont égaux s'ils ont la même taille et les mêmes lettres.

- Opérations sur des langages $L_1 = \{\varepsilon, ab\}$ et $L_2 = \{b, ab\}$:

	Définition	Exemple
Concaténation	$L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$	$L_1 L_2 = \{b, ab, abb, abab\}$
Puissance	$L^n = \{u^n \mid u \in L\}$	$L_1^2 = \{\varepsilon, ab, abab\}$
Etoile	$L^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$	$L_1^* = \{\varepsilon, ab, abab...\}$

Comme L_1 et L_2 sont des ensembles, on peut aussi considérer $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$...

- Les langages rationnels sont tous ceux qu'on peut obtenir avec les règles suivantes :
  - Un langage fini est rationnel
  - L_1 et L_2 rationnels $\implies$ $L_1 \cup L_2$ rationnel
  - L_1 et L_2 rationnels $\implies$ $L_1 L_2$ rationnel
  - L rationnel $\implies$ L^* rationnel

  Exemples : Un alphabet Σ est toujours rationnel car fini. Σ^* est rationnel car est l'étoile du langage rationnel Σ.

- Une expression rationnelle est une suite de symboles contenant : lettres, $\emptyset$, ε, $\mid$ (union, parfois notée $+$), *.
  À chaque expression rationnelle e on associe un langage $L(e)$.

  Exemple : Le langage de l'expression rationnelle $e = a^*b \mid \varepsilon$ est $L(e) = (\{a\}^*\{b\}) \cup \{\varepsilon\}$.

- L rationnel $\iff$ $\exists$ une expression rationnelle de langage L.
- Définition possible d'expression rationnelle en OCaml :

```
type 'a regexp =
    | Vide | Epsilon | L of 'a
    | Union of 'a regexp * 'a regexp
    | Concat of 'a regexp * 'a regexp
    | Etoile of 'a regexp

(* définition de e ci-dessus *)
let e = Union(Concat(Etoile(a), b), Epsilon)
```

  Exemple : déterminer si ε appartient au langage de e.

```
let rec has_eps e = match e with
    | Vide | L _ -> false
    | Epsilon | Etoile _ -> true
    | Union(e1, e2) -> has_eps e1 || has_eps e2
    | Concat(e1, e2) -> has_eps e1 && has_eps e2
```

- Quelques techniques de preuve :
  - Sur des mots : récurrence sur la taille du mot.
  - Pour montrer l'égalité de deux langages : double inclusion ou suite d'équivalences.
  - Pour montrer $P(L)$ pour un langage rationnel L : par récurrence, en montrant le cas de base (si L est un langage fini) et les cas d'hérédité ($P(L_1) \land P(L_2) \implies P(L_1 L_2)$, $P(L_1) \land P(L_2) \implies P(L_1 \cup L_2)$, $P(L) \implies P(L^*)$).
  - Pour montrer $P(e)$ pour une expression rationnelle e : par récurrence, en montrant les cas de base ($P(\emptyset)$, $P(\varepsilon)$, $P(a)$, $\forall a \in \Sigma$) et les cas d'hérédité ($P(e_1)$ et $P(e_2) \implies P(e_1 e_2)$ et $P(e_1 \mid e_2)$, $P(e) \implies P(e^*)$).

  Exemple : Le miroir d'un mot $u = u_1 ... u_n$ est $\widetilde{u} = u_n ... u_1$ et le miroir d'un langage L est $\widetilde{L} = \{\widetilde{u} \mid u \in L\}$.
  Montrons : L rationnel $\implies$ $\widetilde{L}$ rationnel.
  On pourrait le montrer par récurrence, mais il est peut-être plus simple de définir une fonction $f(e)$ qui à une expression rationnelle e associe une expression rationnelle pour le miroir de $L(e)$:
  - $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\forall a \in \Sigma, f(a) = a$.
  - $f(e_1 e_2) = f(e_2) f(e_1)$ (le miroir de uv est $\widetilde{v}\widetilde{u}$).
  - $f(e_1 \mid e_2) = f(e_1) \mid f(e_2)$.
  - $f(e_1^*) = f(e_1)^*$.

  On a bien défini une fonction f telle que, pour toute expression rationnelle e, $f(e)$ est une expression rationnelle de $\widetilde{L(e)}$. Donc le miroir d'un langage rationnel est rationnel.