Centrale Maths 2

Séance 1

Exercice 1 (Centrale 2022) : Soit $E_n = M_n(\mathbb{R})$. D_n est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls. T_n est l'ensemble des matrices de trace nulle.
Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $S_M = \left\{(A,B) \in E_n^2, AB - BA = M\right\}$.

1) On trouve $D_n = Vect\left(\left(E_{i,j}\right)_{i\neq j}\right)$, donc $\dim(D_n) = n^2 - n$
2) Il vient $T_n = Ker(Tr)$, donc T_n est le noyau d'une forme linéaire non nulle et $\dim(T_n) = n^2 - 1$.
3) Lorsque A est une matrice diagonale et B une matrice quelconque avec leurs coefficients dans [0,1], on remarque que tous les coefficients de $Matrice(A,B)$ sont nuls.
4) Si A est diagonale, pour $i \in [\![1,n]\!]$, il vient $(AB)_{ii} = (BA)_{ii} = A_{ii}B_{ii}$, donc $(AB - BA)_{ii} = 0$.
5) On sait que $Tr(AB) = Tr(BA)$. Donc si $Tr(M) \neq 0$, $S_M = \varnothing$. S_M n'est jamais de cardinal 1 : si $(A,B) \in S_M$, alors $AB - BA = M$ et $\left(2A, \frac{1}{2}B\right) \in S_M$.
6)

Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on prend $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et on trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on peut chercher A à diagonale nulle. On trouve $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Oral Centrale 22) :

2) On peut conjecturer que T est d'espérance finie.

3) Les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, donc les $(X_k = 1)$ le sont aussi. Il vient $P(G_n) = \prod_{k=nl+1}^{(n+1)l} P(X_k = 1) = \frac{1}{2^l}$.

4) On fixe $N \in \mathbb{N}$. Lorsque G_n se produit, on a $b+1+a$ déplacements consécutifs de $+1$, ce qui provoque une sortie de l'intervalle $[-a,b]$. Donc $\bigcup_{n=1}^{N} G_n \subset (\overline{T = +\infty})$, où $\overline{T = +\infty}$ désigne l'événement contraire de $T = +\infty$.

Donc $0 \leq P(T = +\infty) \leq 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{G_n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)^N$.

Donc en passant les inégalités à la limite, $P(T = +\infty) = 0$.

5) On sait que T est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k)$. Or si $k = Nl + r$, $P(T > k) \leq P(T > Nl)$.

Or $\bigcup_{n=1}^{N-1} G_n \subset (\overline{T > Nl})$, donc $P(T > Nl) \leq 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{N-1} G_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{N-1} \overline{G_n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)^{N-1} \leq \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)^{k/l-2}$ car $N \geq \frac{k}{l} - 1$.

Donc si $q = \left(1 - \frac{1}{2^l}\right) \in \left]0,1\right[$, $0 \leq P(T > k) \leq \left(q^{1/l}\right)^k \frac{1}{q^2}$ et par majoration, la série $\sum P(T > k)$ converge, donc T est d'espérance finie.

Exercice 3 (Oral Centrale 22) : pour $a>0$, on pose $S(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$

1) Si $a>0$, $\frac{a}{n^2+a^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{a}{n^2}$ et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $D_S=\mathbb{R}_+^*$.

2) On sait que pour $a\in D, n\geq 2$, $S(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{k^2+a^2}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}$. Avec une comparaison série-intégrale, il vient après justifications $\int_{n+1}^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}dt\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\leq\int_{n}^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}dt$.

   Donc $0\leq\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{n+1}{a}\right)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\leq\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{n}{a}\right)$.

   Or si $x>0$, $\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(\frac{1}{x})=\text{Arctan}(x)\leq x$ en étudiant la fonction $x\mapsto x-\text{Arctan}(x)$

   Donc $\left|S(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{k^2+a^2}\right|\leq\text{Arctan}(\frac{a}{n})\leq\frac{a}{n}$.

3) Voir par ailleurs

4) Il semble que $\lim_{a\to+\infty}S(a)=\frac{\pi}{2}$.

5) Par comparaison série-intégrale, il vient $\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}dt\leq S(a)\leq\int_{0}^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}dt$.

   Donc $\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)\leq S(a)\leq\frac{\pi}{2}$. Par encadrement, $\lim_{a\to+\infty}S(a)=\frac{\pi}{2}$.

6) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ car si $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{n^2-x^2}{\left(x^2+n^2\right)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

7) On pose $U_n(a)=\frac{a}{n^2+a^2}$ pour $a>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Chaque U_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. $U_n'(a)=\frac{n^2-a^2}{\left(n^2+a^2\right)^2}=f_n(a)$ et $|U_n'(a)|\leq\frac{n^2+a^2}{\left(n^2+a^2\right)^2}\leq\frac{1}{n^2}$, donc $\|U_n'\|_\infty\leq\frac{1}{n^2}$ et $\sum(U_n)'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par théorème de dérivation des séries de fonctions, on a bien $\forall a\in D, f(a)=S'(a)$

Exercice 4 (Oral Centrale 22) : On pose $f(0)=0$ et, pour $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Avec la limite du taux d'accroissement : pour $x\neq 0$, $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$. Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to 0}{\to}0$ et f est dérivable, donc continue en 0 et $f'(0)=0$

2) f' ne semble pas continue en 0, donc f ne semble pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x\neq 0$ $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

On calcule $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-1$ et $f'\left(\frac{1}{2n\pi+\pi}\right)=1$. Donc par caractérisation séquentielle, f' n'a pas de limite en 0 et f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) g est dérivable par somme et $g'(0)=f'(0)+2=2$ Comme $\frac{g(x)-g(0)}{x}\underset{x\to 0}{\to}2$, avec la définition de limite, il existe $\eta>0$ $\forall x\in\left]0,\eta\right[, g(x)>g(0)$.

4) Soit $x\in[-0.1, 0.1]$. Pour $x\neq 0$, $g'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\geq 1+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0,8$ car $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq |x|\leq 0.1$ et g est croissante au voisinage de 0

5) h est dérivable par somme et $h'(0)=f'(0)+1=1$

6) Si $x\neq 0$, $h'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$h'\left(\frac{1}{U_n}\right)=\frac{2}{2n\pi+\frac{\alpha}{n}}\sin\left(2n\pi+\frac{\alpha}{n}\right)+1-\cos\left(2n\pi+\frac{\alpha}{n}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2n\pi}}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1-\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Avec des développements limités : si $\alpha+\alpha^2\neq 0$, $h'\left(\frac{1}{U_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha^2}{2}\right)$

On prend $\alpha=-\frac{1}{2}$: $\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha^2}{2}=-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}<0$ et pour n assez grand, $h'\left(\frac{1}{U_n}\right)<0$.

Donc h n'est pas croissante au voisinage de 0.

8) La fonction f est lipschitzienne sur $[0,1]$ car $\|f'\|_{\infty,[0,1]}\leq 3$. Donc avec l'inégalité des accroissements finis, si $a,b\in[0,1]$, $|f(b)-f(a)|\leq 3|b-a|$.

Si on prend $a(0)=0$ et, pour $x\in\mathbb{R}^*, a(x)=x^{3/2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, a est dérivable sur $[0,1]$, mais pas lipschitzienne. En effet, si elle l'était, on aurait pour $x\neq y$ $\frac{|a(y)-a(x)|}{|y-x|}\leq M$, donc en passant l'inégalité à la limite quand y tend vers x $|a'(x)|\leq M$.

Pourtant, $a'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée en prenant $a'(\frac{1}{2n\pi})=\sqrt{2n\pi}$.

9) On note $V_n(x)=\frac{1}{n^2}f(x-\frac{1}{n})$. Chaque V_n est dérivable sur $[0,1]$ et $V_n'(x)=\frac{1}{n^2}f'(x-\frac{1}{n})$

Avec $\|f'\|_{\infty,[0,1]}\leq 3$, il vient $\|V_n'\|_{\infty,[0,1]}\leq 3$ donc on a convergence normale de $\sum V_n'$ et $\|f\|_{\infty,[0,1]}\leq 1$ et on a donc convergence normale, donc simple de $\sum V_n$.

On conclut par théorème de dérivation des séries de fonctions

Séance 2 :

Exercice 5 (Oral Centrale 22) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) On utilise le théorème de la bijection pour $f_n(x) = e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$. $f_n'(x) = e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right)$

   Donc $f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ et f_n est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f_n(0) = 1$ et par croissance comparée, $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\rightarrow} 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On compare $f_n(a_n)$ et $f_{n+1}(a_n)$: pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\right) \geq f_n(x)$.

   Donc $f_{n+1}(a_n) \geq f_n(a_n) = \frac{1}{2} = f_{n+1}(a_{n+1})$. Comme f_{n+1} est décroissante, $a_n \leq a_{n+1}$.

3) Par l'absurde : si $a_n \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} a \in \mathbb{R}_+$, alors comme (a_n) est croissante, il vient $a_n \leq a$ et par décroissance de f_n, $f_n(a) \leq f_n(a_n) = \frac{1}{2}$. On prend la limite quand n tend vers l'infini et on obtient $1 \leq \frac{1}{2}$. C'est absurde, donc (a_n) est croissante et ne converge pas : $a_n \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} +\infty$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f_n est C^1, $f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt$, donc $f_n(x) = 1 - \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}dt$.

6) En prenant la limite quand x tend vers l'infini (ou avec la fonction Γ), il vient $\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}dt = 1$, donc par Chasles, $f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}dt$.

Exercice 6 (Centrale 22) :

1) On utilise la norme infinie. On a immédiatement V_n borné.
   Si $M, N \in V_n$, $\lambda \in [0,1]$, $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \lambda M_{i,j} + (1-\lambda)N_{i,j} \in [0,1]$, donc $\lambda M + (1-\lambda)N \in V_n$ et V_n est convexe.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ une valeur propre complexe de M .Alors pour $|x_i| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$,

   $|\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}||x_j| \leq n|x_i|$. Or $X \neq 0$ donc $|\lambda| \leq n$.

3) U_n est une ensemble fini donc $M \mapsto \det(M)$ possède un maximum sur U_n, et $\det$ est continue sur le fermé borné V_n, donc possède un maximum sur V_n (théorème des bornes atteintes).

5) On développe par rapport à la i_0 ème ligne : il existe des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$, qui ne dépendent pas de x, tels que $\det(M_{i_0,j_0}(x)) = \sum_{i \neq i_0} M_{i,j_0}\lambda_i + x\lambda_{i_0}$. On obtient le résultat suivant le signe de λ_{i_0} : si $\lambda_{i_0} \geq 0$, il vient $\det(M_{i_0,j_0}(x)) \leq \det(M_{i_0,j_0}(1))$ et si $\lambda_{i_0} < 0$, on a $\det(M_{i_0,j_0}(x)) \leq \det(M_{i_0,j_0}(0))$

6) On prouve $u_n = v_n$. Comme $U_n \subset V_n$, on sait que $u_n \leq v_n$. De plus, soit $M \in V_n$ telle que $v_n = \det(M)$ On utilise 5) et on travaille coefficient par coefficient pour le remplacer par 1 ou 0 en obtenant une matrice de déterminant plus grand. Pour $i_0 = j_0 = 1$, il vient $\det(M) \leq \max\left(\det(M_{1,1}(0)), \det(M_{1,1}(1))\right)$ et on note $N(1,1)$ la matrice choisie parmi $M_{1,1}(0)$ et $M_{1,1}(1)$ dont le déterminant est le plus grand. On applique ensuite ce procédé à $N(1,1)$ pour $i_0 = 1$ et $j_0 = 2$ et on construit ainsi une matrice $N \in V_n$ telle que $v_n = \det(M) \leq \det(N) \leq u_n$. On a donc bien par double inégalité $u_n = v_n$.

8) Pour $i \in [\![1,n]\!], X_i = X_i^2$. Donc $P\left(tr(M) \leq 1\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1\right)$. Si on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on sait que $S_n \sim B(n,p)$. Donc $P\left(tr(M) \leq 1\right) = P\left(S_n \leq 1\right) = P\left(S_n = 0\right) + P\left(S_n = 1\right) = (1-p)^{n-1}\left(np + 1 - p\right)$

Exercice 7 (Oral Centrale 22) :

1) On trouve $D_2(a,b) = a^2 - 2b$ et $D_3(a,b) = a^3 - 3ab$.
2) On développe par rapport à la dernière ligne et on trouve $D_{n+2}(a,b) = aD_{n+1}(a,b) - b\,D_n(a,b)$.
3) Voir par ailleurs.
4) Par récurrence double, on prouve que $a \mapsto D_n(a,b)$ est de degré n.
5) $a \mapsto D_n(a,b)$ semble posséder n racines distinctes.
6) On remarque que $D_n(a,b) = \det\left(aI_n - A_n(b)\right)$. Donc si $a \mapsto D_n(a,b)$ possède n racines distinctes, alors $A_n(b)$ possède n valeurs propres distinctes et est diagonalisable.
7) On montre que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n\left(\cos\theta\right) = \cos\left(n\theta\right)$ par récurrence double (polynômes de Tchebyvhev).
8) On résout $T_n\left(\cos\theta\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(n\theta\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$.

   Les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\right)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ sont des racines de T_n. Par bijectivité de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, elles sont distinctes, donc comme $\deg(T_n) = n$, ce sont les seules racines et elles sont simples.
9) On sépare le cas $b = 0$: $D_n(a,b) = a^n$ et 0 est la seule racine.

   Si $b \neq 0$, on prouve par récurrence double que $D_n(a,b) = 2\left(\sqrt{b}\right)^n T_n\left(\dfrac{a}{2\sqrt{b}}\right)$ et les racines sont les $2\sqrt{b}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]$.

Exercice 8 (Oral Centrale 22) :

1) On calcule $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)-1=\mathrm{Re}\left(\frac{2}{1-\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)}\right)-1$.

   Or avec l'angle moitié, si $\theta\neq 0[2\pi]$, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}\frac{1}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{1}{2}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)=0$.

2) A est symétrique réelle donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux (car ils ont des bases constituées de vecteurs propres orthogonaux entre eux).
3) Voir par ailleurs
4) On voit sur les exemples que $B(n)$ est diagonale et que le spectre de A est constitué de n valeurs propres distinctes. Donc les colonnes de P constituent une base C de vecteurs propres de A et les colonnes de P sont orthogonales (car elles appartiennent à des sous-espaces propres distincts puisque chaque sous-espace propre est de dimension 1).
5) Pour $p\neq q$, on remarque que $S_{p,q}=\langle X_p,X_q\rangle=0$ puisque les colonnes de P sont orthogonales.
6) $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\exp\left(\frac{ikp\pi}{n+1}\right)\right)-1=\mathrm{Re}\left(\frac{1-(-1)^p}{1-\exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)}\right)-1$ si p n'est pas un multiple de $2(n+1)$

   . Dans ce cas, on a donc $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)=\frac{1-(-1)^p}{2}-1=-\frac{1+(-1)^p}{2}$.

   Si p est pas un multiple de $2(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)=n$

7) On effectue un calcul direct en utilisant $\forall a,b\in\mathbb{R},\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin(a)\sin(b)$:

   $S_{p,q}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k(p-q)\pi}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{k(p+q)\pi}{n+1}\right)\right)$ pour $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$.

   Ici, $p\neq q$, donc $p-q$ et $p+q$ ne sont pas des multiples de $2(n+1)$.

   Donc $S_{p,q}=-\frac{1+(-1)^{p-q}}{2}+\frac{1+(-1)^{p+q}}{2}$. Donc $S_{p,q}==\frac{(-1)^{p+q}-(-1)^{p-q}}{2}=\frac{(-1)^{p-q}}{2}\left((-1)^{2q}-1\right)=0$