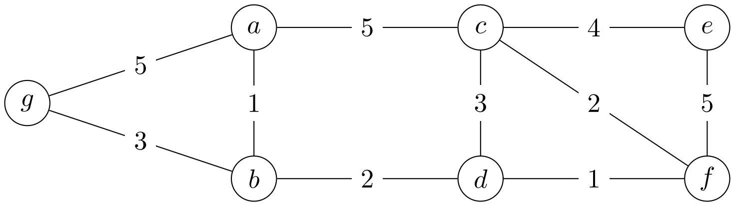
I Application de l'algorithme de Kruskal

Appliquer l'algorithme de Kruskal à la main sur le graphe suivant :



II Plus large chemin

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré. La **largeur** $l(C)$ d'un chemin est le minimum des poids de ses arêtes. Soient $u, v \in V$. Un chemin de u à v est un **plus large chemin** (*widest path*) s'il n'existe pas d'autre chemin de u à v de plus grande largeur.

1. Donner un plus large chemin de g à f dans le graphe du I.1.
2. Comment modifier l'algorithme de Kruskal de façon à trouver un arbre couvrant T de poids maximum dans G ?
3. Soit C le chemin de u à v dans T. Montrer que C est un plus large chemin de u à v (l'algorithme de Kruskal permet donc de trouver les plus larges chemins).

III Questions sur les arbres couvrants de poids minimum

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré.

1. Soit C un cycle de G et $e = \{u, v\}$ une arête de C dont le poids est strictement supérieur au poids des autres arêtes de C. Montrer que e ne peut pas appartenir à un arbre couvrant de poids minimum de G.
2. (Propriété d'échange) Soient T_1, T_2 deux arbres couvrants de G et e_1 une arête de $T_1 - T_2$. Montrer qu'il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ (le graphe obtenu en remplaçant e_1 par e_2 dans T_1) est un arbre couvrant de G.
3. Le nombre de domination $d(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq V$ tel que $\forall v \in V$, $v \in S$ ou v est adjacent à un sommet de S.
   Montrer que si G est connexe alors $d(G) \leq \dfrac{|V|}{2}$.
4. Soit G un graphe connexe et T un arbre couvrant de poids minimum. La **largeur** d'un chemin C est le poids maximum d'une arête de C. Soient u et v deux sommets de G. Montrer que le chemin de u à v dans T est de largeur minimum, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'autre chemin de u à v de plus petite largeur.
5. Montrer que si tous les poids des arêtes de G sont différents, alors G admet un unique arbre couvrant de poids minimum.
6. Soit T_1 un arbre couvrant de poids minimum de G et T_2 le 2ème plus petit arbre couvrant, c'est-à-dire l'arbre couvrant de poids minimum en excluant T_1. Montrer que T_1 et T_2 diffèrent d'une arête et en déduire un algorithme pour trouver T_2.

IV Mise à jour d'arbre couvrant de poids minimum

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré et T un arbre couvrant de poids minimum de G. Soit $e \in E$.

1. On diminue le poids de e. Expliquer comment mettre à jour T pour qu'il soit toujours un arbre couvrant de poids minimum.
2. On augmente le poids de e. Expliquer comment mettre à jour T pour qu'il soit toujours un arbre couvrant de poids minimum.