Résumé **Déduction naturelle** Q. Fortier

- La logique propositionnelle définit la notion de formule vraie (si elle est vraie pour toute valuation).
  La déduction naturelle permet de formaliser la notion de preuve mathématique.
- Un **séquent** est noté $\Gamma \vdash A$ où Γ est un ensemble de formules logiques et A une formule logique.
  $\Gamma \vdash A$ signifie Intuitivement que sous les hypothèses Γ, on peut déduire A.
- Règles de déduction naturelle classique, où A, B, C sont des formules quelconques :

	Introduction	**Élimination**
Conjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}\land_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash A}\land_e^g$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash B}\land_e^d$
Disjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\lor_i^g$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}\lor_i^d$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \lor B}{\Gamma \vdash C}\lor_e$
Implication	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to_e$
Négation	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$
Vrai $\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\top_i$	
Faux $\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_e$

Axiome	**Affaiblissement**	**Réduction à l'absurde**
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{ax}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{aff}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{raa}$

Il n'est pas nécessaire d'apprendre ces règles par coeur (elles seront rappelées), mais il faut les comprendre et savoir les utiliser.

- Une **preuve** d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, les arcs des règles et la racine est $\Gamma \vdash A$.
  Exemples :

1. Preuve de $(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \to C \vdash A \land B \to C}\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax} \quad \dfrac{}{B \vdash B}\text{ax}}{A, B \vdash A \land B}\land_i}{(A \land B) \to C, A, B \vdash C}\to_e}{(A \land B) \to C, A \vdash B \to C}\to_i}{(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)}\to_i$$

2. Preuve de $A \vdash \neg\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax} \qquad \dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\text{ax}}{A, \neg A \vdash \bot}\neg_e}{A \vdash \neg\neg A}\neg_i$$

3. On peut décomposer une preuve longue en plusieurs parties, pour plus de lisibilité. Par exemple pour prouver $\vdash A \lor (B \land C) \longrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{A \vdash A \vee B}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B\wedge C \vdash B \wedge C}\,\text{ax}}{B \wedge C \vdash B}\,\wedge_e^g}{B\wedge C \vdash A \vee B}\,\vee_i^d \qquad \dfrac{}{A \vee (B\wedge C) \vdash A \vee (B \wedge C)}\,\text{ax}}{A \vee (B\wedge C) \vdash A \vee B \ (*)}\,\vee_e$$

On montre de même $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$ $(**)$ et finalement :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee (B\wedge C) \vdash A \vee B}\,* \qquad \dfrac{}{A \vee (B\wedge C) \vdash A \vee C}\,**}{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,\wedge_i}{\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,\longrightarrow_i$$

- (Correction de la déduction naturelle) Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

> <u>Preuve</u> : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de preuve de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».
> $P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \models A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.
> Soit T un arbre de preuve pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.
>
> – $(\wedge_i)$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i$
> Par hypothèse de récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
> Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.
>
> – $(\wedge_e)$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\,(\wedge_e^g)$ Par récurrence sur T_1, $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A \wedge B$.
>
> – Les autres cas sont similaires...