I Exercice CCP

Rappelons les règles de déduction naturelle suivantes, où A et B sont des formules logiques et Γ un ensemble de formules logiques quelconques :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{AX} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\,\to_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$$

1. Montrer que le séquent $\vdash \neg A \to (A \to \bot)$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.
2. Montrer que le séquent $\vdash (A \to \bot) \to \neg A$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.
3. Donner une règle correspondant à l'introduction du symbole $\wedge$ ainsi que deux règles correspondant à l'élimination du symbole $\wedge$. Montrer que le séquent $\vdash (\neg A \to (A \to \bot)) \wedge ((A \to \bot) \to \neg A)$ est dérivable.
4. On considère la formule $P = ((A \to B) \to A) \to A$ appelée loi de Peirce. Montrer que $\models P$, c'est-à-dire que P est une tautologie.
5. Pour montrer que le séquent $\vdash P$ est dérivable, il est nécessaire d'utiliser la règle d'absurdité classique $\bot_c$ (ou une règle équivalente), ce que l'on fait ci-dessous (il n'y aura pas besoin de réutiliser cette règle). Terminer la dérivation du séquent $\vdash P$, dans laquelle on pose $\Gamma = \{(A \to B) \to A, \neg A\}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{?}{\Gamma \vdash A}\,? \qquad \cfrac{}{\Gamma \vdash \neg A}\,\text{AX}}{\Gamma = (A \to B) \to A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_i}{(A \to B) \to A) \vdash A}\,\bot_c}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,\to_i$$

II Lois de de Morgan

1. Prouver le séquent $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.
2. Prouver le séquent $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$.
3. Prouver le séquent $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$.

En utilisant le tiers exclu de la logique classique $\frac{}{\Gamma \vdash p \vee \neg p}\,\text{te}$:

4. Prouver le séquent $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$.

III Démonstrations

1. Prouver le séquent $\vdash P \to (Q \to P)$.
2. Prouver le séquent $\vdash P \to (P \to Q) \to Q$.
3. Prouver le séquent $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$.