

- La logique propositionnelle définit la notion de formule vraie (si elle est vraie pour toute valuation). La déduction naturelle permet de formaliser la notion de preuve mathématique.
- Un **séquent** est noté $\Gamma \vdash A$ où Γ est un ensemble de formules logiques et A une formule logique. $\Gamma \vdash A$ signifie Intuitivement que sous les hypothèses Γ , on peut déduire A .
- Règles de déduction naturelle classique, où A, B, C sont des formules quelconques :

	Introduction	Élimination
Conjonction	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$
Disjonction	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$	$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$
Implication	$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$	$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$
Négation	$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$
Vrai \top	$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$	
Faux \perp		$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$

Axiome	Affaiblissement	Réduction à l'absurde
$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ax}$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{aff}$	$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{raa}$

Il n'est pas nécessaire d'apprendre ces règles par coeur (elles seront rappelées), mais il faut les comprendre et savoir les utiliser.

- Une **preuve** d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, les arcs des règles et la racine est $\Gamma \vdash A$.
Exemples :

- Preuve de $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

$$\frac{\frac{\frac{}{A \wedge B \rightarrow C \vdash A \wedge B \rightarrow C} \text{ax} \quad \frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge_i}{(A \wedge B) \rightarrow C, A, B \vdash C} \rightarrow_e \quad \frac{}{(A \wedge B) \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C} \rightarrow_i}{(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow_i$$

- Preuve de $A \vdash \neg \neg A$:

$$\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax} \quad \frac{}{\neg A \vdash \neg A} \text{ax}}{A, \neg A \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{}{A \vdash \neg \neg A} \neg_i$$

- On peut décomposer une preuve longue en plusieurs parties, pour plus de lisibilité. Par exemple pour prouver $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$:

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A} \text{ ax}}{A \vdash A \vee B} \vee_i^g \quad \frac{\frac{\overline{B \wedge C \vdash B \wedge C} \text{ ax}}{B \wedge C \vdash B} \wedge_e^g \quad \frac{\overline{B \wedge C \vdash B} \text{ ax}}{B \wedge C \vdash A \vee B} \vee_i^d}{\frac{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee (B \wedge C) \text{ ax}}{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B (*)} \vee_e}$$

On montre de même $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$ (**) et finalement :

$$\frac{\frac{\overline{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B} * \quad \overline{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C} **}{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)} \wedge_i}{\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)} \longrightarrow_i$$

- (Correction de la déduction naturelle) Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de preuve de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \vdash A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Soit T un arbre de preuve pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

– (\wedge_i) Supposons T de la forme : $\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$

Par hypothèse de récurrence sur T_1 et T_2 , on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.

Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B , et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

– (\wedge_e) Supposons T de la forme : $\frac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_e^g$ Par récurrence sur T_1 , $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A$.

– Les autres cas sont similaires...