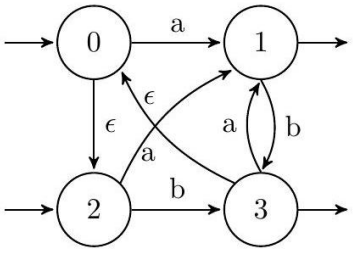
I Exercice CCP



1. Déterminiser cet automate.
2. Construire une expression régulière dénotant le langage reconnu par cet automate.
3. Décrire simplement avec des mots le langage reconnu par cet automate.

II Langage local, linéaire et automate de Glushkov

1. Construire l'automate de Glushkov reconnaissant $(ab+b)^*b$.
2. Montrer que si e est une expression linéaire alors $L(e)$ est un langage local.
3. Montrer qu'il existe un nombre fini de langages locaux sur un alphabet fixé.

> Solution : Tout langage local est de la forme $(P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \setminus \Sigma^* N \Sigma^*$ où $P \subseteq \Sigma$, $S \subseteq \Sigma$, $N \subseteq \Sigma \times \Sigma$, en rajoutant éventuellement ε. Si $n = |\Sigma|$, il y a au plus 2^n choix pour P, 2^n pour S et 2^{2n} pour N (car $|\Sigma \times \Sigma| = |\Sigma||\Sigma| = 2^{2n}$). D'où au plus $2^n \times 2^n \times 2^{2n}$ valeurs différentes pour l'ensemble $(P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \setminus \Sigma^* N \Sigma^*$.

4. Soient $\mathcal{L}_{\text{rat}}$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}$, $\mathcal{L}_{\text{lin}}$ l'ensemble des langages rationnels, locaux et linéaires (c'est à dire décrits par une expression rationnelle linéaire). Quelles sont les inclusions entre ces 3 ensembles? Ces inclusions sont-elles strictes?

III Stabilité des langages rationnels

Pour chacune des propositions suivantes, expliquer pourquoi elle est vraie ou donner un contre-exemple :

1. Si L est rationnel et $L \subseteq L'$ alors L' est rationnel.
2. Si L' est rationnel et $L \subseteq L'$ alors L est rationnel.
3. Si L est rationnel alors L^* est rationnel.
4. Si L^* est rationnel alors L est rationnel.
5. Si L est rationnel sur un alphabet Σ alors $\Sigma^* \setminus L$ (complémentaire de L) est rationnel.
6. Une union finie de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n rationnels $\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} L_k$ rationnel).
7. Une union dénombrable de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n, ... rationnels $\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ rationnel).
8. Une intersection finie de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n rationnels $\Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} L_k$ rationnel).
9. Une intersection dénombrable de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n, ... rationnels $\Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} L_k$ rationnel).

IV Calcul des ensembles $P(L)$, $S(L)$, $F(L)$

Soit L un langage. On rappelle les définitions du cours :

- $P(L) = \{a \in \Sigma \mid a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ (premières lettres des mots de L)

- $S(L) = \{a \in \Sigma \mid \Sigma^* a \cap L \neq \emptyset\}$ (dernières lettres des mots de L)
- $F(L) = \{u \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* u \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ (facteurs de longueur 2 des mots de L)

Dans la suite, on utilise le type suivant d'expression rationnelle :

```
type 'a regexp =
    | Vide | Epsilon | L of 'a
    | Union of 'a regexp * 'a regexp
    | Concat of 'a regexp * 'a regexp
    | Etoile of 'a regexp
```

1. Écrire une fonction `has_eps : 'a regexp -> bool` déterminant si le langage d'une expression rationnelle contient ε.

   Solution :

   ```
   let rec has_eps = function
       | Vide | L _ -> false
       | Epsilon | Etoile _ -> true
       | Union (e1, e2) -> has_eps e1 || has_eps e2
       | Concat (e1, e2) -> has_eps e1 && has_eps e2
   ```

2. Écrire une fonction `union : 'a list -> 'a list -> 'a list` telle que, si `l1` et `l2` sont des listes sans doublon (ce qu'on suppose être le cas...), `union l1 l2` renvoie une liste sans doublon contenant les éléments des deux listes. Par exemple, `union [1; 2] [3; 1]` peut renvoyer `[1; 2; 3]` (l'ordre des éléments de la liste de retour n'importe pas).

   Solution :

   ```
   let rec union l1 l2 = match l1 with
       | [] -> l2
       | a::q1 -> if List.mem a l2 then union q1 l2 else a::(union q1 l2)
   ```

3. Écrire une fonction `prefixe` de type `'a regexp -> 'a list` telle que `prefixe e` renvoie $P(L(\mathtt{e}))$.

   Solution :

   ```
   let rec prefixe = function
       | Vide | Epsilon -> []
       | L a -> [a]
       | Union (e1, e2) -> union (prefixe e1) (prefixe e2)
       | Concat (e1, e2) -> if has_eps e1 then union (prefixe e1) (prefixe e2) else prefixe e1
       | Etoile e -> prefixe e
   ```

4. Que faudrait-il modifier à `prefixe` pour obtenir une fonction `suffixe` renvoyant $S(L)$?

   Solution : Échanger `e1` et `e2` dans `Concat(e1, e2) -> ...`

5. Écrire une fonction `produit : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list` effectuant le produit cartésien de 2 listes : si `l1` et `l2` sont des listes, `produit l1 l2` renvoie une liste de tous les couples distincts composés d'un élément de `l1` et un élément de `l2`. Par exemple, `produit [1; 2] [3; 1]` peut renvoyer `[(1, 3); (1, 1); (2, 3); (2; 1)]` (l'ordre des éléments de la liste de retour n'importe pas).

   Solution : Avec `List.map` :

   ```
   let rec produit l1 l2 = match l1 with
       | [] -> []
       | a::q1 -> List.map (fun b -> (a, b)) l2 @ produit q1 l2
   ```

   Sans `List.map` :

```
let rec produit l1 l2 = match l1 with
    | [] -> []
    | a::q1 -> let rec aux l2 = match l2 with
        | [] -> []
        | b::q2 -> (a, b)::aux q2
        in aux l2 @ produit q1 l2
```

6. En déduire une fonction `facteur` de type `'a regexp -> ('a * 'a) list` telle que `facteur e` renvoie $F(L(\mathtt{e}))$.

Solution :

```
let rec facteur = function
    | Vide | Epsilon | L _ -> []
    | Union (e1, e2) -> union (facteur e1) (facteur e2)
    | Concat (e1, e2) -> union (facteur e1) (union (produit (suffixe e1) (prefixe e2)) (facteur e2))
    | Etoile e -> union (facteur e) (produit (suffixe e) (prefixe e))
```

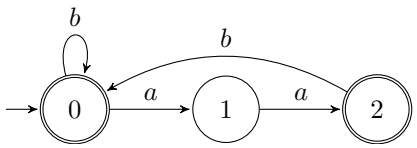
V Reconnaissable $\Longrightarrow$ rationnel avec le lemme d'Arden

1. (Lemme d'Arden) Soient A et B deux langages tels que $\varepsilon \notin A$. Montrer que l'équation $L = AL \cup B$ (d'inconnue le langage L) admet pour unique solution A^*B.

Solution : A^*B est bien une solution : en effet $AA^*B \cup B = (AA^* \cup \{\varepsilon\})B = A^*B$.
Montrons maintenant que A^*B est la seule solution. Soit L une solution de $L = AL \cup B$.
Montrons d'abord par récurrence sur k que $A^kB \subseteq L$.
Comme $B \subseteq AL \cup B = L$, l'initialisation pour $k = 0$ est vérifiée.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^kB \subseteq L$. Alors $A^{k+1}B \subseteq AL$. Donc $A^{k+1}B \subseteq AL \cup B = L$.
On a donc bien montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB \subseteq L$. D'où $A^*B = \cup_{k\in\mathbb{N}} A^kB \subseteq L$.
Supposons que $L \not\subseteq A^*B$ et considérons un mot $u \in L \backslash A^*B$ de longueur minimum. Comme $L = AL \cup B$, $u \in AL$ ou $u \in B$. Comme $u \notin A^*B$, $u \notin B$. Donc $u \in AL$: u s'écrit au' avec $a \in A$ et $u' \in L$. Si $u' \in A^*B$ alors $u = au' \in A^*B$, ce qui est faux. Donc $u' \in L \backslash A^*B$, ce qui est une contradiction avec la définition de u. Conclusion : $L \subseteq A^*B$.
Comme $L \subseteq A^*B$ et $L \supseteq A^*B$, on a bien montré que $L = A^*B$.

Soit $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe. Si $q_i \in Q$ est un état, on pose $L_i = \{m \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_i, m) \in F\}$ (étiquettes des chemins de q_i vers un état final). En écrivant des relations entre les L_i puis en résolvant de proche en proche avec le lemme d'Arden, on obtient une expression rationnelle pour le langage L_0 de l'automate.

2. Appliquer cette méthode pour trouver une expression rationnelle pour chacun des automates ci-dessous. En remplaçant a par 0 et b par 1, que reconnaît le 2ème automate?



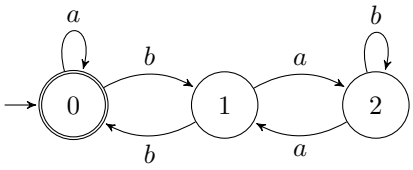
Solution : On utilise la notation des expressions rationnelles pour plus de lisibilité.

$$(0)\ L_0 = \varepsilon + bL_0 + aL_1$$

$$(1)\ L_1 = aL_2$$

$$(2)\ L_2 = \varepsilon + bL_0$$

En remplaçant L_2 dans (1), on obtient $L_1 = a + abL_0$.
En remplaçant L_1 par cette valeur dans (0), on obtient $L_0 = \varepsilon + bL_0 + aa + aabL_0 = \varepsilon + aa + (b + aab)L_0$.
D'après le lemme d'Arden, $L_0 = (b + aab)^*(\varepsilon + aa)$. On vérifie que c'est bien le langage de l'automate.



Solution : On obtient les équations suivantes :

$$(0)\ L_0 = \varepsilon + aL_0 + bL_1$$

$$(1)\ L_1 = aL_2 + bL_0$$

$$(2)\ L_2 = aL_1 + bL_2$$

En appliquant le lemme d'Arden à (2) (avec $A = \{b\}$ et B $= aL_1$), on trouve $L_2 = b^*aL_1$.
En reportant dans (1), on trouve $L_1 = ab^*aL_1 + bL_0 = (ab^*a)^*bL_0$ en appliquant le lemme d'Arden avec $B = bL_0$ et $A = ab^*a$.
En remplaçant dans (1), on trouve $L_0 = \varepsilon + aL_0 + b(ab^*a)^*bL_0 = \varepsilon + (a + b(ab^*a)^*b)L_0$ d'où $L_0 = (a + b(ab^*a)^*b)^*$.
En remplaçant a par 0 et b par 1, on remarque que l'automate reconnaît les multiples de 3 écrits en base 2 (l'état i correspond à un reste de i modulo 3). On obtient donc l'expression rationnelle $(0 + 1(01^*0)^*1)^*$ pour les multiples de 3 en base 2.

VI Reconnaissable $\Longrightarrow$ rationnel par prog. dyn. ($\approx$ Floyd-Warshall)

Soit $(\Sigma, Q, 0, F, \delta)$ un automate déterministe dont les états sont des entiers de 0 à n (et 0 est l'état initial).
Soit $L(i, j, k)$ le langage des étiquettes des chemins de i à j n'utilisant que des états intermédiaires strictement inférieurs à k.

1. Montrer que $L(i, j, 0)$ est rationnel, pour tous les états i, j.

   Solution : Soit i et j deux états (éventuellement égaux) et $a_1, ..., a_p$ toutes les étiquettes des transitions de i vers j. Alors $L(i, j, 0) = \{a_1, ..., a_p\}$ est fini donc rationnel.

2. Prouver une équation de récurrence sur $L(i, j, k)$.

   Solution : Soit $u \in L(i, j, k)$ l'étiquette d'un chemin C de i vers j n'utilisant que des états intermédiaires strictement inférieurs à k. Si C n'utilise pas l'état k alors $u \in L(i, j, k-1)$. Sinon C est la concaténation d'un chemin de i à k, d'un certain nombre de cycles de k à k, puis d'un chemin de k à j. On en déduit :

   $$L(i, j, k) = L(i, j, k-1) \cup (L(i, k, k-1)L(k, k, k-1)^*L(k, j, k-1))$$

3. En déduire, par récurrence, que tout langage reconnaissable est rationnel.

   Solution : Montrons par récurrence sur $k \in \{0, ..., n\}$, $P(k)$: pour tous états i, j, $L(i, j, k)$ est rationnel ».
   $P(0)$ est vraie d'après la question 1.
   Supposons $P(k)$ vraie pour un $k > 0$. Soient i, j deux états. Alors $L(i, j, k-1)$, $L(i, k, k-1)$, $L(k, k, k-1)$, $L(k, j, k-1)$ sont rationnels par hypothèse de récurrence donc $L(i, j, k) = L(i, j, k-1) \cup (L(i, k, k-1)L(k, k, k-1)^*L(k, j, k-1))$ est rationnel comme concaténation et étoile de langages rationnels.

VII Racine d'un langage

Soit L un langage reconnaissable sur Σ. Montrer que $\sqrt{L} = \{m \in \Sigma^* \mid m^2 \in L\}$ est un langage reconnaissable.

Solution : Soit $A = (\Sigma, Q, i, F, \delta)$ un automate déterministe reconnaissant L dont les états sont des entiers 0, ..., $n-1$.
Soit $L_{j,k}$ le langage des étiquettes des chemins de l'état j à l'état k dans A. $L_{j,k}$ est reconnaissable, par $(\Sigma, Q, j, \{k\}, \delta)$.
De plus, on montre que $\sqrt{L} = \bigcup_{q \in Q} \bigcup_{f \in F} L_{i,q} \cap L_{q,f}$:

- Soit $m \in \sqrt{L}$. Soit $q_m = \delta^*(i, m)$ et $f_m = \delta^*(q_m, m)$. Alors $m \in L_{i,q_m}$ et $m \in L_{q_m,f_m}$ et $f_m \in F$ (car $m^2 \in L$). Donc $m \in L_{i,q_m} \cap L_{q_m,f_m} \subseteq \bigcup_{q \in Q} \bigcup_{f \in F} L_{i,q} \cap L_{q,f}$.

- Soit $m \in \bigcup_{q\in Q}\bigcup_{f\in F} L_{i,q}\cap L_{q,f}$: il existe alors $q \in Q$ et $f \in F$ tels que $m \in L_{i,q}\cap L_{q,f}$. Alors $\delta^*(i, m^2) = \delta^*(q, m) = f \in F$. D'où $m^2 \in L$, donc $m \in \sqrt{L}$.

Ainsi $\sqrt{L} = \bigcup_{q\in Q}\bigcup_{f\in F} L_{i,q} \cap L_{q,f}$ est rationnel comme union et intersection de langages rationnels (une union de langages rationnels est rationnel par définition, et une intersection de langages rationnels est rationnel en utilisant par exemple l'automate produit du cours).