I Distances sur les mots

Étant donné un mot, l'objectif de cet exercice est de savoir à quelle langue il appartient. Pour cela, on dispose d'un ensemble de mots appartenant à chaque langue.

I.1 Distance de Hamming

La **distance de Hamming** entre deux mots de même longueur est le nombre de positions où les deux mots sont différents. Par exemple, la distance de Hamming entre *arbre* et *arche* est 2 car il y a deux différences : à l'indice 2 ($b \neq c$) et à l'indice 3 ($r \neq h$). On rappelle qu'on peut accéder à la i-ème lettre d'une chaîne de caractères `s` avec `s[i]` et qu'on peut connaître sa taille avec `len(s)`.

1. Écrire une fonction `hamming(s, t)` qui calcule la distance de Hamming entre deux mots de même longueur. Par exemple, `hamming("arbre", "arche")` doit renvoyer 2.

> Solution :
>
> ```
> def hamming(s, t):
>     n = len(s)
>     d = 0
>     for i in range(n):
>         if s[i] != t[i]:
>             d += 1
>     return d
> ```

I.2 Plus proches voisins

On suppose avoir une liste `X` de mots dont les langues sont données par `y` (`y[i]` est la langue du mot `X[i]`). On commence par séparer `X` en deux ensembles `X_train` et `X_test` (et les langues correspondantes `y_train` et `y_test`).

2. Écrire une fonction `split(L)` renvoyant deux listes `L1` et `L2` séparant `L` en deux listes de même taille (à ± 1 près).

> Solution : 1ère possibilité (avec slicing) :
>
> ```
> def split(L):
>     n = len(L)
>     return L[:n//2], L[n//2:]
> ```
>
> 2ème possibilité :
>
> ```
> def split(L):
>     n = len(L)
>     L1, L2 = [], []
>     for i in range(n):
>         if i % 2 == 0:
>             L1.append(L[i])
>         else:
>             L2.append(L[i])
>     return L1, L2
> ```

3. Expliquer quel est l'intérêt de séparer les données en deux ensembles avant d'utiliser un algorithme d'apprentissage.

> Solution : L'algorithme est censé être utilisé sur de nouvelles données (que l'on ne connaît pas encore). Tester l'algorithme sur des données qu'il a déjà vues ne permet pas de savoir s'il est efficace sur de nouvelles données.

On suppose l'existence d'une fonction `voisins(x, k)` permettant de trouver les indices des k plus proches voisins d'un mot x dans la liste de mots `X_train` (en utilisant, par exemple, la distance de Levenshtein). Ainsi, si `L = voisins(x, k)` alors `L[0]` est l'indice du mot de le plus proche de `x` dans `X_train`, et `X_train[L[0]]` est le mot correspondant (le mot le plus proche de `x` dans `X_train`).

4. Écrire une fonction `plus_frequent(L)` renvoyant l'élément le plus fréquent d'une liste `L`.
Par exemple, `plus_frequent([3, 4, 1, 1, 4, 3, 1])` doit renvoyer `1`. On essaiera d'avoir la meilleure complexité pos-

sible.

Solution :

```python
def plus_frequent(L):
    d = {}
    for x in L:
        if x in d:
            d[x] += 1
        else:
            d[x] = 1
    return max(d, key=d.get)
```

On peut aussi remplacer `return max(d, key=d.get)` par :

```python
    kmin, vmin = 0, 0
    for k in d:
        if d[k] > vmin:
            kmin, vmin = k, d[k]
    return kmin
```

5. En déduire une fonction `knn(x, k)` qui renvoie la langue majoritaire parmi les k mots les plus proches de `x` dans `X_train`.

Solution :

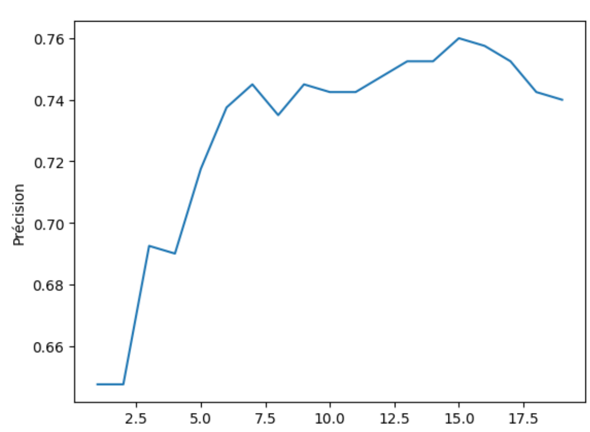
```python
def knn(x, k):
    L = voisins(x, X_train, k)
    return plus_frequent([y_train[i] for i in L])
```

6. Écrire une fonction `precision(k)` qui renvoie la précision de l'algorithme `knn` pour une valeur de k donnée, en utilisant les données de test (`X_test`).

Solution :

```python
def precision(k):
    n = len(X_test)
    nb_correct = 0
    for i in range(n):
        if knn(X_test[i], k) == y_test[i]:
            nb_correct += 1
    return nb_correct / n
```

En calculant la précision pour différentes valeurs de k, on obtient la courbe suivante :



7. Donner (approximativement) l'erreur minimum que l'on peut obtenir avec l'algorithme des plus proches voisins.

Solution : Graphiquement, la précision maximum semble être 0.76. Donc l'erreur minimum est $1 - 0.76 = 0.24$.

8. On suppose avoir stocké les valeurs de précision dans un dictionnaire `precisions` dont les clés sont des valeurs de k et les valeurs les précisions correspondantes. Écrire une fonction `meilleur_k(precisions)` qui renvoie la valeur de k qui donne la meilleure précision.

Solution : 1ère solution :

```python
def meilleur_k(precisions):
    return max(precisions, key=precisions.get)
```

2ème solution :

```python
def meilleur_k(precisions):
    kmax = 1
    for k in precisions:
        if precisions[k] > precisions[kmax]:
            kmax = k
    return kmax
```

9. On applique l'algorithme des plus proches voisins avec deux langues : anglais (donné par l'entier 0 dans `y_train`) et français (donné par l'entier 1 dans `y_train`). On obtient la matrice de confusion $\begin{pmatrix} 72 & 33 \\ 30 & 65 \end{pmatrix}$. Dire à quoi correspond chacun des nombres de cette matrice. Quelle est la précision correspondante ?

Solution : 72 est le nombre de fois où l'algorithme a prédit anglais et où la langue était bien anglais. 33 est le nombre de fois où l'algorithme a prédit anglais et où la langue était français. 30 est le nombre de fois où l'algorithme a prédit français et où la langue était anglais. 65 est le nombre de fois où l'algorithme a prédit français et où la langue était français. La précision est donc $137/200 = 0.685$.

II Marché immobilier à Lyon

On stocke dans une matrice $M = (m_{i,j})$ les informations sur des appartements de Lyon, où chaque ligne correspond à un appartement et chaque colonne à une information : $m_{i,j}$ est la valeur de l'information j pour l'appartement i.

Prix (en millier d'euros)	Nombre de m2	Année de construction	Étage	DPE
300	50	2010	2	B
180	25	1990	1	C
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Par exemple, le tableau ci-dessus sera stocké dans une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 300 & 50 & 2010 & \cdots \\ 180 & 25 & 1990 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{pmatrix}$$

1. Le DPE (Diagnostic de Performance Énergétique) est une échelle de classement des logements en fonction de leur consommation d'énergie. Elle va de A à G, où A est le meilleur classement et G le pire.
Pourquoi est-ce important de convertir cette lettre en nombre, avant d'appliquer un algorithme d'apprentissage ? Peut-on associer un nombre arbitraire à chaque lettre ?

Solution : Pour pouvoir calculer des moyennes, distances... on a besoin d'utiliser des réels. Il faut associer à chaque lettre un nombre, en respectant l'ordre des lettres.

Dans la suite, on supposera que les lettres ont été converties en nombres.

2. Écrire une fonction `moyenne(M, j)` renvoyant la moyenne des valeurs de la colonne j de la matrice M.

Solution :

```python
def moyenne(M, j):
    n = len(M)
    s = 0
    for i in range(n):
        s += M[i][j]
    return s / n
```

3. Écrire une fonction `ecart_type(M, j)` renvoyant l'écart-type des valeurs de la colonne j de la matrice M, c'est-à-dire $\sigma_j = \sqrt{\sum_i \frac{(m_{i,j} - \mu_j)^2}{n}}$ où μ_j est la moyenne de la colonne j de M.
On fera en sorte d'avoir une complexité linéaire en le nombre de lignes de `M`.

Solution : Il faut éviter de recalculer `moyenne` à chaque fois, en stockant le résultat dans une variable.

```python
def ecart_type(M, j):
    n = len(M)
    mu = moyenne(M, j)
    s = 0
    for i in range(n):
        s += (M[i][j] - mu) ** 2
    return (s / n) ** 0.5
```

4. Écrire une fonction `normalisation(M)` qui renvoie une nouvelle matrice $M' = (m'_{i,j})$ obtenue en normalisant toutes les colonnes de la matrice M, c'est-à-dire en soustrayant la moyenne et en divisant par l'écart-type : $m'_{i,j} = \frac{m_{i,j} - \mu_j}{\sigma_j}$.
Quelle est la complexité de cette fonction ?

Solution :

```python
def normalisation(M):
n, p = len(M), len(M[0])
    M2 = grille(n, p)
    for j in range(p): # O(np)
        mu = moyenne(M, j) # O(n)
        sigma = ecart_type(M, j) # O(n)
        for i in range(n): # O(n)
            M2[i][j] = (M[i][j] - mu) / sigma
    return M2
```

On passe p fois dans le `for j in range(p)`, qui exécute `moyenne` ($\mathrm{O}(n)$), `ecart_type` ($\mathrm{O}(n)$), et `for i in range(n)` ($\mathrm{O}(n)$), ce qui fait au total une complexité $p \times (\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(n)) = \boxed{\mathrm{O}(np)}$.

5. Quelle est la moyenne et l'écart-type de chaque colonne de M' obtenue par normalisation ?

Solution : La moyenne de la colonne j de M est : $\frac{1}{n}\sum_i m'_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_i \frac{m_{i,j} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\frac{\sum_i m_{i,j}}{n} - \frac{\mu}{n\sigma} = \frac{\mu}{n\sigma} - \frac{\mu}{n\sigma} = 0$.
L'écart-type de la colonne j de M est : $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (m'_{i,j} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (\frac{m_{i,j} - \mu}{\sigma})^2} = 1$.
Car $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i (m_{i,j} - \mu)^2$ par définition.

6. Pourquoi est-ce important de normaliser les données avant d'utiliser un algorithme d'apprentissage automatique ?

Solution : Sinon, un algorithme d'apprentissage automatique pourrait donner plus d'importance à certaines colonnes qu'à d'autres, car elles auraient des valeurs plus grandes.

Dans la suite, on suppose que M a été normalisée.

7. Écrire une fonction `distance(u, v)` qui renvoie la distance euclidienne entre les listes `u` et `v` (supposées de même taille), définie par $\sqrt{\sum_j (u_j - v_j)^2}$.

> Solution :
>
> ```
> def distance(u, v):
>     s = 0
>     for j in range(len(u)):
>         s += (u[j] - v[j]) ** 2
>     return s ** 0.5
> ```

8. Écrire une fonction `centre(X)` qui renvoie le centre de la matrice `X`, c'est-à-dire liste obtenue en calculant la moyenne de chaque colonne de la matrice X. Par exemple, si X est la matrice suivante alors `centre(X)` renverra : `[2, 3.5, 1.5]` :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

> Solution :
>
> ```
> def centre(X):
>     L = [0] * p
>     for i in range(len(X)):
>         for j in range(len(X[0])):
>             L[j] += X[i][j]
>     for j in range(p):
>         L[j] /= n
>     return L
> ```
>
> Ou, en réutilisant `moyenne` :
>
> ```
> def centre(X):
>     L = []
>     for j in range(len(X[0])):
>         L.append(moyenne(X, j))
>     return L
> ```

9. Écrire une fonction `calculer_centres` tel que, si `classes` est une liste de matrices, `calculer_centres(classes)` renvoie la liste des centres de chaque matrice de `classes`.

> Solution :
>
> ```
> def calculer_centres(classes):
>     L = []
>     for X in classes:
>         L.append(centre(X))
>     return L
> ```

10. Écrire une fonction `calculer_classes(M, centres)` qui renvoie une liste `L` telle que `L[i]` soit la liste des lignes de `M` dont le centre le plus proche (au sens de `distance`) est `centres[i]`.

> Solution :

```python
def calculer_classes(M, centres):
    k = len(centres)
    L = [[] for i in range(k)]
    for i in range(len(M)):
        c = 0 # numéro du centre le plus proche de M[i]
        d = distance(M[i], centres[0])
        for j in range(1, k):
            d2 = distance(M[i], centres[j])
            if d2 < d:
                c = j
                d = d2
        L[c].append(M[i])
    return L
```

11. Écrire une fonction `kmeans(M, k)` qui applique l'algorithme des k-moyennes à la matrice `M` et renvoie la liste des centres et des classes trouvés. On initialisera les centres en prenant les k premières lignes de `M`.

> Solution :
>
> ```python
> def kmeans(M, k):
>     centres = M[:k] # extrait les k premières listes
>     classes = calculer_classes(M, centres)
>     while True:
>         centres2 = calculer_centres(classes)
>         classes2 = calculer_classes(M, centres2)
>         if classes == classes2:
>             return centres2, classes2
>         centres = centres2
>         classes = classes2
> ```

12. Par quelle méthode pourrait-on choisir le nombre k de classes ?

> Solution : On peut soit essayer de deviner graphiquement le nombre de classes (si la dimension n'est pas trop élevée) soit utiliser la méthode du coude : afficher l'inertie en fonction de k et conserver la valeur de k à partir de laquelle l'inertie ne diminue plus significativement.

13. On suppose avoir obtenu, sur l'exemple donné en début d'exercice, 3 classes dont les centres sont, après dénormalisation (inverse de `normalisation`) : `[5000, 120, 1990, 1, 0]`, `[150, 24, 2000, 1, 5]`, `[400, 60, 2005, 2, 2]`. Interpréter.

> Solution : On en déduit qu'on peut séparer l'ensemble des appartements en trois classes : les appartements de luxe (très chers et spacieux), les studios étudiants (petits et peu chers) et les appartements familiaux (prix et taille moyens).