Graphes : définitions

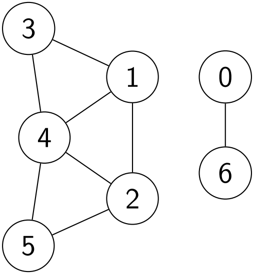
Quentin Fortier

September 27, 2023

Graphe : Définitions

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

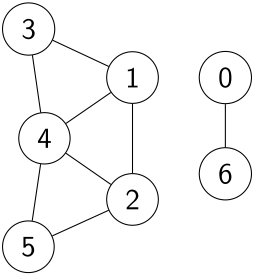
1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



Graphe : Définitions

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et
$E = \{\{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

Graphe : Définitions

Définition

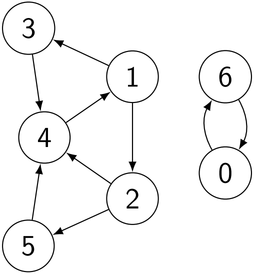
Un graphe est dit **simple** s'il ne contient pas de boucle (arête reliant un sommet à lui-même) ni d'arête multiple (deux arêtes reliant les mêmes sommets).

Par défaut, on considère des graphes simples. Sinon, l'énoncé le précise.

Graphe : Définitions

Un **graphe orienté** est un couple $\vec{G} = (V, \vec{E})$ où :

1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. $\vec{E} \subseteq V \times V$ est un ensemble de **couples** de sommets (appelés **arcs**)



Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et
$\vec{E} = \{(0,6), (6,0), (1,2), (1,3), (4,1), (2,4), (2,5), (3,4), (5,4)\}$.

Graphe : Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).

Graphe : Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^{-}(v)$ et $\deg^{+}(v)$ les degrés entrants et sortants de v.

Graphe : Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v.
- Si $e \in E$, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e :
  $G - e = (V, E - \{e\})$.

Graphe : Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v.
- Si $e \in E$, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e : $G - e = (V, E - \{e\})$.
- Si $v \in V$, on note $G - v$ le graphe obtenu en supprimant v : $G - v = (V - \{v\}, E')$, où E' est l'ensemble des arêtes de E n'ayant pas v comme extrémité.

Graphe : Formule des degrés

Formule des degrés (HP)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Graphe : Formule des degrés

Formule des degrés (HP)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage) :
On divise chaque arête en deux demi-arêtes. Le nombre de demi-arêtes est égal à :

1. $2\ |E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Graphe : Formule des degrés

Formule des degrés (HP)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage) :

On divise chaque arête en deux demi-arêtes. Le nombre de demi-arêtes est égal à :

1. $2\ |E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Graphe : Formule des degrés

Formule des degrés (HP)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage) :
On divise chaque arête en deux demi-arêtes. Le nombre de demi-arêtes est égal à :

1. 2 $|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$
Autre preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes.

Corollaire (HP)

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Corollaire (HP)

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Corollaire (HP)

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

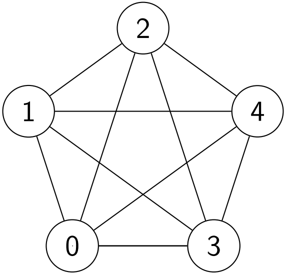
Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v)\ \text{pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v)\ \text{impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Application : existe t-il un graphe dont les sommets ont pour degrés 1, 2, 2, 3, 5 ?

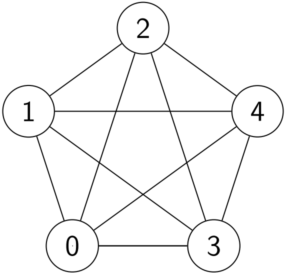
Un **graphe complet** est un graphe non orienté possèdant toutes les arêtes possibles.



Un graphe complet avec n sommets a arêtes

Graphe : Graphe complet

Un **graphe complet** est un graphe non orienté possèdant toutes les arêtes possibles.



Un graphe complet avec n sommets a $\binom{n}{2}$ arêtes : c'est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à n sommets.

Graphe : Graphe complet

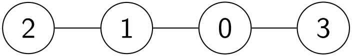
Question

Soit V un ensemble de n sommets.

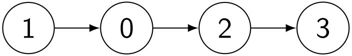
1. Combien existe t-il de graphes non orientés simples ayant V comme ensemble de sommets ?
2. Combien existe t-il de graphes orientés simples ayant V comme ensemble de sommets ?

Chemin

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives.



Chemin (non orienté) entre 2 et 3

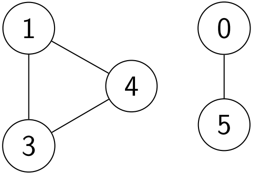


Chemin (orienté) de 1 à 3

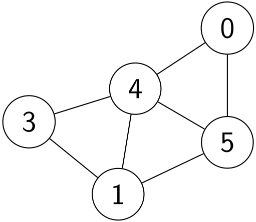
Un chemin est **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.
La **distance** de u à v est la plus petite longueur d'un chemin de u à v (∞ si il n'y a pas de chemin).

Graphe : Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



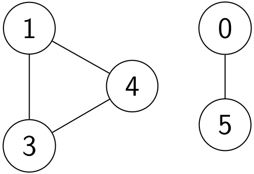
Graphe non connexe



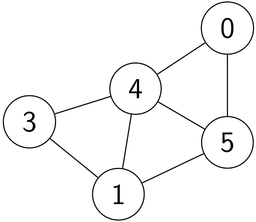
Graphe connexe

Graphe : Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



Graphe non connexe



Graphe connexe

Question

Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe à n sommets ?

Graphe : Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

Graphe : Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

Graphe : Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.

Graphe : Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors

Graphe : Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G - v$ est un graphe connexe à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G - v$ a au moins $n-1$ arêtes.

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G-v$ est un graphe connexe à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G-v$ a au moins $n-1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.
   - Sinon,

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G - v$ est un graphe connexe à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G - v$ a au moins $n-1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.
   - Sinon, tous les sommets de G sont de degré ≥ 2.
     Alors $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2(n+1) \geq 2n$.
     Donc $|E| \geq n$, ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

Graphe : Connexité

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$:

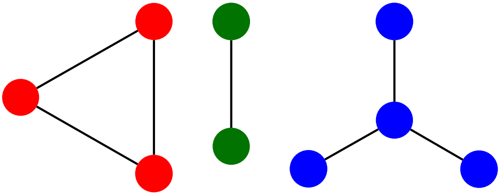
$$u \sim v \iff \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Graphe : Connexité

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$:

$$u \sim v \Longleftrightarrow \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Les classes d'équivalences $V/\sim$ sont les sous-graphes connexes maximaux (au sens de $\subseteq$) de G, ils sont appelés **composantes connexes**.



Un graphe avec 3 composantes connexes.

Graphe : Connexité

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Graphe : Connexité

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \iff$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

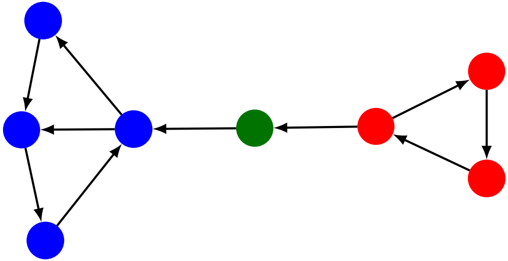
Graphe : Connexité

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

Les classes d'équivalences $V/\leftrightsquigarrow$ sont appelées **composantes fortement connexes**.



Un graphe orienté avec 3 composantes fortement connexes.

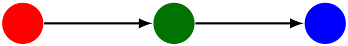
Graphe : Connexité

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \iff$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

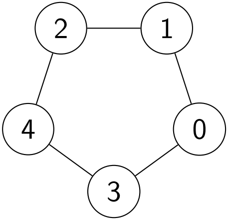
Les classes d'équivalences $V/\leftrightsquigarrow$ sont appelées **composantes fortement connexes**.



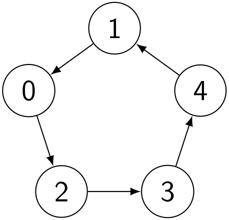
Le graphe des composantes fortement connexes est acyclique.

Graphe : Cycle

Un **cycle** est un chemin de longueur ≥ 3 revenant au sommet de départ.



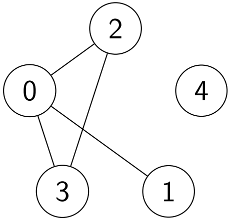
Cycle non orienté



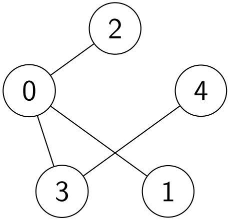
Cycle orienté

Graphe : Cycle

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

Question

Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique à n sommets ?

Graphe : Cycle

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

Graphe : Cycle

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

<u>Preuve</u> : Supposons que tous les sommets soient de degrés ≥ 2.
Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont ≥ 2).
Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

Graphe : Cycle

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

Preuve : Supposons que tous les sommets soient de degrés ≥ 2.
Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont ≥ 2).
Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

Remarque : tout graphe acyclique avec au moins 2 sommets contient 2 sommets de degré ≤ 1.

Graphe : Cycle

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n-1$ arêtes ».

Graphe : Cycle

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. D'après le lemme, un graphe G acyclique à $n+1$ sommets possède un sommet v de degré ≤ 1.

Graphe : Cycle

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. D'après le lemme, un graphe G acyclique à $n+1$ sommets possède un sommet v de degré ≤ 1.
   Comme G est acyclique, $G - v$ l'est aussi et a au plus $n-1$ arêtes, par $\mathcal{H}(n)$.
   Donc G a au plus $n - 1 + \deg(v) \leq n$ arêtes, ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

Graphe : Arbre

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- T est **connexe acyclique**.
- T est connexe et a $n-1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n-1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T.

Preuve : au tableau.

Graphe : Arbre

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- T est **connexe acyclique**.
- T est connexe et a $n-1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n-1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T.

Preuve : au tableau.

Un arbre est **couvrant** s'il contient tous les sommets.

Les arbres vus en MPSI étaient enracinés. Ici il n'y a pas de racine.