

- Un **couplage** de $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M :

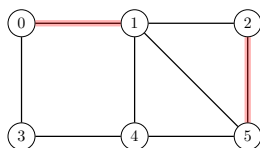
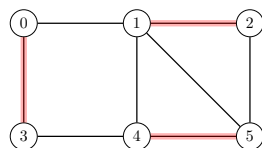
$$\forall e_1, e_2 \in M, e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

Un sommet $v \in V$ est **couvert** par M s'il appartient à une arête de M . Sinon, v est **libre** pour M .

- Exercice : Écrire une fonction `est_couplage` : `(int*int) list -> int > bool` déterminant si une liste d'arêtes (chaque arête étant un couple) forme un couplage.

```
let est_couplage m n = (* n = nb de sommets *)
  let couvert = Array.make n false in
  let rec aux l = match l with
    | [] -> true
    | (u, v)::q ->
      if couvert.(u) || couvert.(v) then false
      else begin
        couvert.(u) <- true;
        couvert.(v) <- true;
        aux q
      end
  in aux m
```

- La **taille** de M , notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
 M est un couplage **maximum** s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
 M est un couplage **maximal** s'il n'existe pas de couplage M' tel que $M \subsetneq M'$.
 M est un couplage **parfait** si tout sommet de G appartient à une arête de M .
 Un chemin est **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
 Un chemin élémentaire de G est **M -alternant** si ses arêtes sont alternativement dans M et dans $E \setminus M$.
 Un chemin de G est **M -augmentant** s'il est M -alternant et si ses extrémités sont libres pour M .
- Soit M un couplage de G et P un chemin M -augmentant. Alors $M \Delta P$ est un couplage de G et $|M \Delta P| = |M| + 1$.

Un couplage M  $M \Delta P$, où
 $P = 3-0-1-2-5-4$

- M est un couplage maximum de $G \iff$ Il n'existe pas de chemin M -augmentant dans G .

Preuve :

\implies Soit M un couplage maximum. Supposons qu'il existe un chemin M -augmentant P . Alors $M \Delta P$ est un couplage de G et $|M \Delta P| > |M|$: absurde.

\impliedby Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (V, M \Delta M^*)$.

Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.

Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de M et des arêtes de M^* .

Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de M^* que de M : c'est un chemin M -augmentant.

- On en déduit l'algorithme :

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (V, E)$

Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$

Tant que il existe un chemin M -augmentant P

 dans G :

$M \leftarrow M \Delta P$

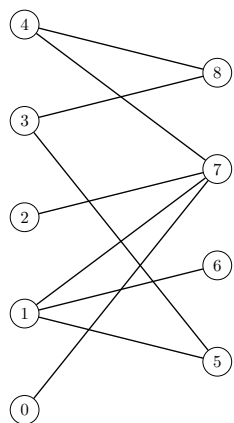
Remarques :

- On peut aussi partir d'un couplage initialement non vide, et on obtiendra quand même un couplage maximum à la fin.
- Il est difficile de trouver un chemin M -augmentant dans un graphe quelconque : c'est pour cela qu'on s'intéresse aux graphes bipartis dans la suite.
- Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** s'il existe V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \sqcup V_2$ et toute arête de E ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .
Remarque : cela revient à donner une couleur à chaque sommet de façon à ce que les extrémités de chaque arête soient de couleurs différentes.
- Exercice : Écrire une fonction `est_biparti` : `int list array -> bool` pour déterminer si un graphe (représenté par liste d'adjacence) est biparti, en complexité linéaire.
Solution : On fait un parcours en profondeur depuis un sommet quelconque en alternant les couleurs 0 et 1.

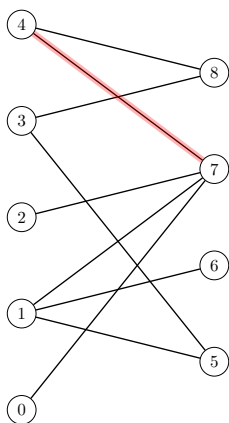
```
let est_biparti g =
  let n = Array.length g in
  let couleurs = Array.make n (-1) in
  let rec aux u c = (* on donne la couleur c à u *)
    if couleurs.(u) = -1 then begin
      couleurs.(u) <- c;
      List.for_all (fun v -> aux v (1 - c)) g.(u)
    end else couleurs.(u) = c
  in aux 0 0
```

- Il est facile de trouver un chemin M -augmentant dans un graphe biparti $G = V_1 \sqcup V_2$:
 - Partir d'un sommet $v \in V_1$ libre.
 - Se déplacer (DFS) en alternant entre des arêtes de M et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité.
 - Si on arrive à un sommet libre de V_2 , alors on a trouvé un chemin M -augmentant.

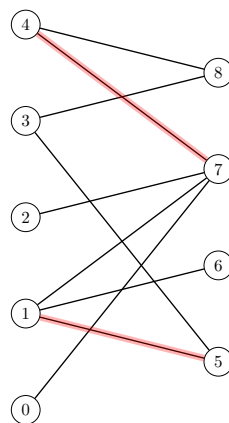
Exemple de recherche d'un couplage maximum par chemin augmentant dans un graphe biparti :



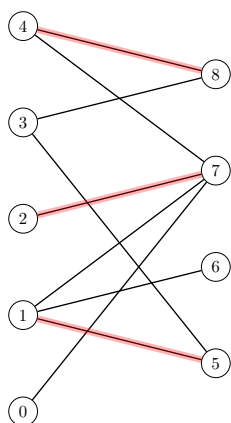
Graphe biparti G et
couplage $M = \emptyset$



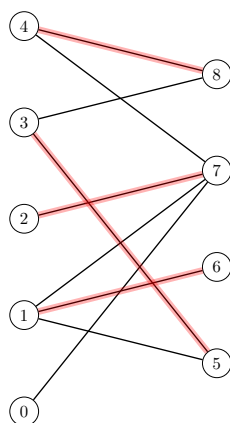
$M \leftarrow M \Delta P$, où
 $P = 4 - 7$



$M \leftarrow M \Delta P$, où
 $P = 1 - 5$



$M \leftarrow M \Delta P$, où
 $P = 2 - 7 - 4 - 8$



$M \leftarrow M \Delta P$, où
 $P = 3 - 5 - 1 - 6$