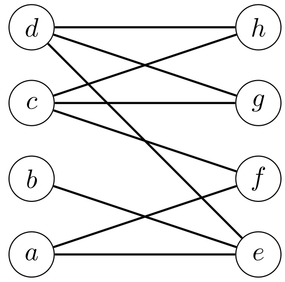
I Application de l'algorithme de couplage maximum

Appliquer l'algorithme du cours pour trouver un couplage maximum dans le graphe suivant :



II Hypercube

Un **hypercube** Q_n a pour sommets les mots binaires de taille n, 2 sommets étant reliés s'ils différent d'un bit.

1. Dessiner Q_3.
2. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de Q_n?
3. Montrer que Q_n est biparti.
4. Montrer que Q_n possède un couplage parfait.
5. Soit $n \geq 2$. Montrer que Q_n est **hamiltonien** : il existe un cycle qui visite tous les sommets exactement une fois. Dessiner un tel cycle de Q_3.

III Questions sur les couplages

1. Soit G un graphe. Montrer que si G a un couplage parfait alors G possède un nombre pair de sommets. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit M_1 et M_2 deux couplages d'un graphe G, avec M_2 maximal (c'est-à-dire qu'on ne peut pas ajouter d'arête à M_2 en conservant un couplage). Montrer que $|M_1| \leq 2|M_2|$, puis donner un cas d'égalité.
3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une couverture par sommets (*vertex cover*) de G est un ensemble C de sommets tels que chaque arête de G est adjacente à au moins un sommet de C. L'objectif est de trouver une couverture par sommets C^* de cardinal minimum.
   On propose l'algorithme suivant :

   2-approximation de vertex cover

   $M \longleftarrow$ couplage maximal de G
   $C \longleftarrow$ ensemble des sommets couverts par M

   Montrer que C est bien une couverture par sommet et que $|C| \leq 2|C^*|$.

IV Questions sur les graphes bipartis

1. Montrer qu'un arbre est un graphe biparti.
2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycle impair.