- Un **couplage** de $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

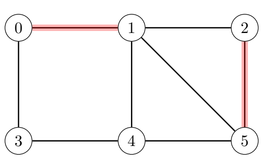
Un sommet $v \in V$ est **couvert** par M s'il appartient à une arête de M. Sinon, v est **libre** pour M.

- Exercice : Écrire une fonction `est_couplage : (int*int) list -> int > bool` déterminant si une liste d'arêtes (chaque arête étant un couple) forme un couplage.

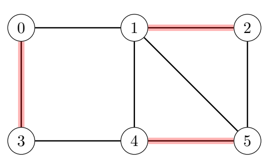
```
let est_couplage m n = (* n = nb de sommets *)
    let couvert = Array.make n false in
    let rec aux l = match l with
        | [] -> true
        | (u, v)::q ->
            if couvert.(u) || couvert.(v) then false
            else begin
                couvert.(u) <- true;
                couvert.(v) <- true;
                aux q
            end
    in aux m
```

- La **taille** de M, notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
M est un couplage **maximum** s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
M est un couplage **maximal** s'Il n'existe pas de couplage M' tel que $M \subsetneq M'$.
M est un couplage **parfait** si tout sommet de G appartient à une arête de M.
Un chemin est **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
Un chemin élémentaire de G est M-**alternant** si ses arêtes sont alternativement dans M et dans $E \setminus M$.
Un chemin de G est M-**augmentant** s'il est M-alternant et si ses extrémités sont libres pour M.

- Soit M un couplage de G et P un chemin M-augmentant. Alors $M \Delta P$ est un couplage de G et $|M \Delta P| = |M| + 1$.



Un couplage M



$M \Delta P$, où
$P = 3 - 0 - 1 - 2 - 5 - 4$

- M est un couplage maximum de G $\iff$ Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G.
Preuve :
$\implies$ Soit M un couplage maximum. Supposons qu'il existe un chemin M-augmentant P. Alors $M \Delta P$ est un couplage de G et $|M \Delta P| > |M|$: absurde.
$\impliedby$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (V, M \Delta M^*)$.
Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.
Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de M et des arêtes de M^*.
Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de M^* que de M : c'est un chemin M-augmentant.

- On en déduit l'algorithme :

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (V, E)$
Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$
Tant que il existe un chemin M-augmentant P dans G **:**
  $M \leftarrow M \Delta P$

Remarques :
- On peut aussi partir d'un couplage initialement non vide, et on obtiendra quand même un couplage maximum à la fin.
- Il est difficile de trouver un chemin M-augmentant dans un graphe quelconque : c'est pour cela qu'on s'intéresse aux graphes bipartis dans la suite.

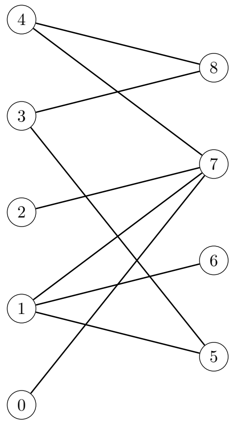
- Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** s'il existe V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \sqcup V_2$ et toute arête de E ait une extremité dans V_1 et l'autre dans V_2.
Remarque : cela revient à donner une couleur à chaque sommet de façon à ce que les extrémités de chaque arête soient de couleurs différentes.

- Exercice : Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe (représenté par liste d'adjacence) est biparti, en complexité linéaire.
Solution : On fait un parcours en profondeur depuis un sommet quelconque en alternant les couleurs 0 et 1.

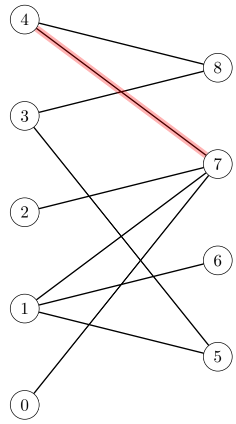
```
let est_biparti g =
    let n = Array.length g in
    let couleurs = Array.make n (-1) in
    let rec aux u c = (* on donne la couleur c à u *)
        if couleurs.(u) = -1 then begin
            couleurs.(u) <- c;
            List.for_all (fun v -> aux v (1 - c)) g.(u)
        end else couleurs.(u) = c
    in aux 0 0
```

- Il est facile de trouver un chemin M-augmentant dans un graphe biparti $G = V_1 \sqcup V_2$:
  - Partir d'un sommet $v \in V_1$ libre.
  - Se déplacer (DFS) en alternant entre des arêtes de M et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité.
  - Si on arrive à un sommet libre de V_2, alors on a trouvé un chemin M-augmentant.

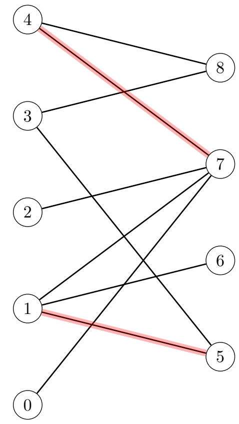
Exemple de recherche d'un couplage maximum par chemin augmentant dans un graphe biparti :



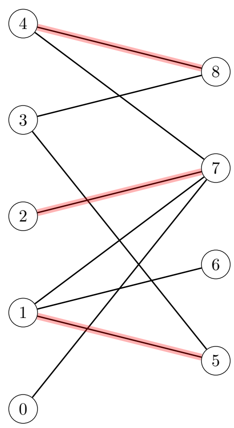
Graphe biparti G et couplage $M = \emptyset$



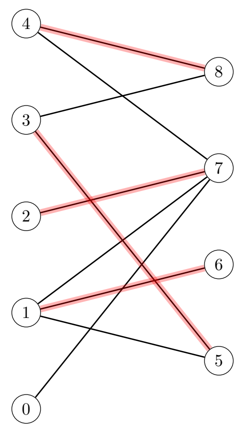
$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 4 - 7$



$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 1 - 5$



$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 2 - 7 - 4 - 8$



$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 3 - 5 - 1 - 6$