I Exercice CCP

Rappelons les règles de déduction naturelle suivantes, où A et B sont des formules logiques et Γ un ensemble de formules logiques quelconques :

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{AX} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_e \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_i \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\,\to_e \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$$

1. Montrer que le séquent $\vdash \neg A \to (A \to\bot)$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.

> Solution :
>
> $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\neg A, A \vdash \neg A}\,\text{ax}}{\neg A, A \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg A \vdash A \to\bot}\,\to_i}{\vdash \neg A \to (A \to\bot)}\,\to_i$$

2. Montrer que le séquent $\vdash (A \to\bot) \to \neg A$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.

> Solution :
>
> $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A \to \bot}\,\text{ax}}{A \to \bot, A \vdash \bot}\,\to_e}{A \to \bot \vdash \neg A}\,\neg_i}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\,\to_i$$

3. Donner une règle correspondant à l'introduction du symbole $\wedge$ ainsi que deux règles correspondant à l'élimination du symbole $\wedge$. Montrer que le séquent $\vdash (\neg A \to (A \to\bot)) \wedge ((A \to\bot) \to \neg A)$ est dérivable.

> Solution :
>
> $$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A \to (A \to\bot)}\,\text{Q1} \qquad \dfrac{}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\,\text{Q2}}{\vdash \neg A \to (A \to\bot), (A \to\bot) \to \neg A}\,\wedge_i$$

4. On considère la formule $P = ((A \to B) \to A) \to A$ appelée loi de Peirce. Montrer que $\models P$, c'est-à-dire que P est une tautologie.

> Solution : Attention : il n'est pas demandé un arbre de dérivation mais de montrer que P est vraie pour toute valuation. On peut dessiner la table de vérité de P, où on utilise $A \to B = \neg A \vee B$:
>
> | A | B | $\varphi = A \to B$ | $\psi = \varphi \to A$ | $P = \psi \to A$ |
> |---|---|---|---|---|
> | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
> | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
> | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
>
> Remarque : Vu que « $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$ » est au programme, on peut aussi démontrer cette question à partir de la suivante.

5. Pour montrer que le séquent $\vdash P$ est dérivable, il est nécessaire d'utiliser la règle d'absurdité classique $\bot_c$ (ou une règle équivalente), ce que l'on fait ci-dessous (il n'y aura pas besoin de réutiliser cette règle). Terminer la dérivation du séquent $\vdash P$, dans laquelle on pose $\Gamma = \{(A \to B) \to A, \neg A\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{?}{\Gamma \vdash A}\,? \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg A}\,\text{AX}}{\Gamma = (A \to B) \to A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_i}{(A \to B) \to A) \vdash A}\,\bot_c}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,\to_i$$

Solution :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash B$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \to B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (A \to B) \to A$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\end{prooftree}
$$

II Lois de de Morgan

1. Prouver le séquent $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.

Solution : On note $\Gamma = \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg p \vee \neg q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg p \vdash p \wedge q$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg p \vdash \neg p$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg p \vdash \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg q \vdash p \wedge q$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg q \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg q \vdash \neg q$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$}
\end{prooftree}
$$

2. Prouver le séquent $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$.

Solution :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), p \vdash \neg(p \vee q)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), p \vdash p$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), p \vdash p \vee q$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\neg(p \vee q), p \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q) \vdash \neg p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), q \vdash \neg(p \vee q)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), q \vdash q$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\neg(p \vee q), q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee q) \vdash \neg q$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$}
\end{prooftree}
$$

3. Prouver le séquent $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$.

Solution : On note $\Gamma = \{\neg p \wedge \neg q, p \vee q\}$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p \vee q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p \vdash \neg p \wedge \neg q$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, p \vdash \neg p$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, p \vdash \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, q \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, q \vdash \neg p \wedge \neg q$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, q \vdash \neg q$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$}
\end{prooftree}
$$

En utilisant le tiers exclu de la logique classique $\dfrac{}{\Gamma \vdash p \vee \neg p}\ \text{te}$:

4. Prouver le séquent $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$.

Solution : On note $\varphi = \neg(p \wedge q)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{te}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash p \vee \neg p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, p, q \vdash \neg(p \wedge q)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, p, q \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, p, q \vdash q$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\varphi, p, q \vdash p \wedge q$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\varphi, p, q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\varphi, p \vdash \neg q$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$\varphi, p \vdash \neg p \vee \neg q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg p \vdash \neg p$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg p \vdash \neg p \vee \neg q$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$}
\end{prooftree}
$$

III Démonstrations

1. Prouver le séquent $\vdash P \to (Q \to P)$.

   Solution :

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{ax}}{\vdash P \to (Q \to P)}\ \to_i \times 2$$

2. Prouver le séquent $\vdash P \to (P \to Q) \to Q$.

   Solution :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, P \to Q \vdash P}\ \text{ax} \qquad \dfrac{}{P, P \to Q \vdash P \to Q}\ \text{ax}}{P, P \to Q \vdash Q}\ \to_e}{\vdash P \to (P \to Q) \to Q}\ \to_i \times 2$$

3. Prouver le séquent $\vdash \neg(P \land \neg P)$.

   Solution :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash p \land \neg p}\ \text{ax}}{p \land \neg p \vdash p}\ \land_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash p \land \neg p}\ \text{ax}}{p \land \neg p \vdash \neg p}\ \land_e}{p \land \neg p \vdash \bot}\ \neg_e}{\vdash \neg(p \land \neg p)}\ \neg_i$$