Dans cet exercice, on considère un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$, des sommets $s, t \in V$ et une **capacité** $c : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.
Si $A \subseteq V$, on définit :

- $A^+ = \{(u, v) \in \overrightarrow{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de A »)
- $A^- = \{(u, v) \in \overrightarrow{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans A »)

Si $v \in V$, on définit $v^+ = \{v\}^+$ et $v^- = \{v\}^-$.
Si $f : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\overrightarrow{B} \subseteq \overrightarrow{E}$, on définit :

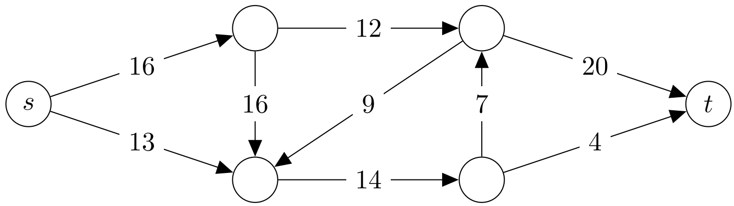
$$f(\overrightarrow{B}) = \sum_{\overrightarrow{e} \in B} f(\overrightarrow{e})$$

Un **flot** est une fonction $f : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} : 0 \leq f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$
- $\forall v \in V - \{s, t\} : f(v^-) = f(v^+)$ (la somme des flots rentrants dans un sommet est égal à la somme des flots sortants).

La **valeur** d'un flot f est définie par $|f| = f(s^+)$. L'objectif de cet exercice est de trouver un flot de valeur maximum dans $\overrightarrow{G}$.

1. Dans le graphe ci-dessous, on a représenté la capacité sur chaque arc. Donner le flot de de plus grande valeur que vous réussissez à trouver dans ce graphe, en explicitant la quantité de flot sur chaque arc. On ne demande aucune justification.



2. Montrer que tout graphe muni d'une capacité possède un flot (on cherchera à définir un flot très simple).
3. Soit $\overrightarrow{P}$ un chemin de s à t et c la capacité minimum des arcs de $\overrightarrow{P}$. On définit $f : \overrightarrow{E} \longmapsto \mathbb{R}^*$ qui vaut c sur chaque arc de $\overrightarrow{P}$ et 0 partout ailleurs. Justifier que f est un flot.
4. L'algorithme suivant permet de construire un flot en ajoutant itérativement un chemin de s à t :

Algorithme : Ford-Fulkerson

$f \leftarrow$ flot nul
Tant que $\exists$ un chemin $\overrightarrow{P}$ de s à t, dont les arcs sont tous de capacité > 0 :
  $c \longleftarrow$ minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$
  Diminuer de c la capacité des arcs de $\overrightarrow{P}$
  Augmenter le flot f de c, le long des arcs de $\overrightarrow{P}$

Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le graphe de la 1ère question.

5. On suppose que toutes les capacités sont entières. Montrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson termine et donner la complexité dans le pire cas.

Une **coupe** de $\overrightarrow{G}$ est un ensemble $S \subseteq V$ contenant s mais pas t. La capacité d'une coupe S est la somme $c(S^+)$ des capacités des arcs sortants de S.

6. Soit S une coupe. Montrer que $f(S^+) \leq c(S^+)$ et $f(S^+) = |f|$.
7. Soit f un flot et S une coupe vérifiant $f(S^+) = c(S^+)$. Montrer que :
   - f est un flot de valeur maximum
   - S une coupe de capacité minimum
8. Montrer que si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum
9. Quelle méthode connaissez-vous pour trouver un chemin dans l'algorithme de Ford-Fulkerson ? Implémenter l'algorithme de Ford-Fulkerson en OCaml, avec l'une de ces méthodes.