MP: Equations différentielles et intégration et dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Coralie Renault

15 mars 2015

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution générale de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Exercice

Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$$

Exercice

Résoudre

$$x \ln x \, y' - (3 \ln x + 1)y = 0$$

Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

en discutant selon les valeurs de α.

Exercice

a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1)$$

b) Soit un réel $a \neq \pm 1$; déduire de a) la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) \, \mathrm{d}t$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 = \|f\|_\infty \text{ et } M_2 = \|f''\|_\infty$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir que pour tout $h > 0$:

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

b) En déduire

$$M_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire