MP Programme de colle n° 20

Chapitre 15

Calcul différentiel

1. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles
2. Différentiabilité
3. Matrices jacobiennes
4. Cas des applications numériques

Exercices à donner

- Calcul de dérivées selon un vecteur
- Calcul de dérivées partielles
- Continuité, différentiabilité, caractère $\mathcal{C}^1$
- Recherche d'extremums locaux sur un ouvert
- Recherche d'extremums globaux sur un compact

Démos à connaître

2.4

Proposition 2 Si $f : U \to F$ est différentiable en a, alors f admet en ce point une dérivée selon tout vecteur u non nul et $\boxed{\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{d}f(a).u}$

Proposition 3 Soit $f : U \to F$ différentiable en a et $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ base de E.

Soit $h \in E$ tel que $h = \sum_{j=1}^{n} h_j.e_j$. Alors $\mathrm{d}f(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j.\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

3.3

Proposition 4 : **Dérivée le long d'un arc**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\gamma : I \to U$ un arc différentiable.

Ainsi $\forall t \in I \ : \ \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ où $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^n$

Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable.

Alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I \ : \ \boxed{(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t).\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{où } a = \gamma(t)$$

4.1.a

Théorème de représentation des formes linéaires

Soit E espace euclidien : $\forall\, \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \exists !\, a \in E \,/\, \varphi = (a\,|\,.)$

4.1.b

Propriété 1 : **coordonnées** de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ en base orthonormée

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ dans la base $\mathcal{B}$ constituent le n-uplet

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)}$$

4.1.c

Propriété 2 : Soit E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale. Plus précisément :

$$\forall u \in E \,/\, \| u \| = 1,\ \ D_u f(a) \leqslant \left\| \text{grad}(f)(a) \right\| = D_v f(a) \quad \text{où } v = \frac{\text{grad}(f)(a)}{\|\text{grad}(f)(a)\|}$$

4.1.d

Gradient en coordonnées polaires

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta).e_\theta}$$

4.2

Théorème : Soit U ouvert de E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a.

Si f admet en a un extremum local, alors a est un point critique.