MP Programme de colle n° 18

Cours :

Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

5. Couple et famille de variables aléatoires discrètes
6. Fonction génératrice

Chapitre 13

Equations différentielles linéaires

1. Equations différentielles linéaires scalaires du 1^{er} ordre

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes ou délicates)

Chapitre 10

5.2.b

Caractérisation X et Y sont indépendantes si et seulement si

$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\boxed{P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})\times P(\{Y=y\})}$.

Théorème Soient $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

5.2.c

Théorème

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors XY est d'espérance finie égale à $E(XY) = E(X)\times E(Y)$

  On a notamment : $\boxed{E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP((X=x)\cap(Y=y))}$

- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes d'espérance finie, alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ est d'espérance finie et $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$.

5.3.c

Corollaire $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

5.3.d

<u>Théorème</u> Soient $X,\ Y,\ X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes possédant des moments d'ordre 2.

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$
- $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$

5.4

<u>Théorème</u>

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, d'espérance m et admettant une variance $V = \sigma^2$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

6.1

<u>Propriété préliminaire</u> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit la série entière $\sum P(X=n)t^n$.

- Son rayon de convergence vérifie $R \geqslant 1$.
- Elle converge normalement sur $[-1,1]$.
- Sa somme G_X est continue sur $[-1,1]$ et si $R > 1$ sur $]-R,R[$.
- $\forall t \in]-R,R[\cup [-1,1]$, t^X est d'espérance finie et $\boxed{G_X(t) = E(t^X)}$

6.2

Loi de X	Notation	Fonction génératrice	Rayon
de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$G_X(t) = q + pt$	$+\infty$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$G_X(t) = (q+pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$	$\dfrac{1}{q}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

Exercices

- <u>Un ou deux exercice sur le chapitre 10 § 5 et 6</u>
- <u>Un eexercice sur les équations différetielles du premier ordre</u>
  - <u>E.D.L. scalaires du premier ordre et raccordements</u>