Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions

1.1. Convergence simple

a) Définition

b) Exemples

1.2. Convergence uniforme

a) Définition

b) La convergence uniforme entraîne convergence simple — Démonstration

c) Méthodes pratiques pour démontrer ou infirmer une convergence uniforme

d) Exemples

e) Interprétation structurelle

- Conservation du caractère borné — Démonstration
- Conséquence : $\mathcal{B}\ A,F$, convergence unifome et convergence pour $\|\ \|_\infty$

f) Interprétation géométrique pour les fonctions de I dans $\mathbb{R}$

1.3. Conservation de propriétés par passage à la limite

a) Convergence uniforme et continuité

- Théorème : conservation de la continuité — Démonstration
- Corollaire (convergence uniforme sur tout segment)

b) Théorème de la double limite (démonstration admise)

- Extension au cas où $A = I \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$
- Exemple

c) Convergence uniforme et intégration

- Théorème : limite d'une suite d'intégrales — Démonstration
- Interprétation : convergence au sens de la norme $\|\ \|_1$
- Exemples et contre-exemples

d) Convergence uniforme et primitivation

- Théorème : convergence et primitivation (démonstration admise)

e) Convergence uniforme et dérivabilité

- Théorème : conservation du caractère $\mathcal{C}^1$ (démonstration admise)
- Théorème : conservation du caractère $\mathcal{C}^k$ (démonstration admise)
- Contre-exemple

2. Séries de fonctions

2.1. Idée générale

On adapte dans le langage des séries tout ce qui concerne la suite de fonctions $S_n \;_{n\in\mathbb{N}}$ qui se nomme aussi **série de fonctions** $\boxed{\sum f_n}$.

2.2. Convergence simple

- Définition, exemple

2.3. Convergence uniforme

a) Définition

b) Propriétés essentielles

Démonstrations

- ❉ $\boxed{\left[\sum f_n \text{ converge uniformément}\right] \Rightarrow \left[\sum f_n \text{ converge simplement}\right]}$
- ❉ $\boxed{\left[\sum f_n \text{ converge uniformément}\right] \Rightarrow \left[\ f_n \xrightarrow{c.u.} 0\ \right]}$
- ❉ Si $\sum f_n$ converge simplement, en notant $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$:

  alors $\boxed{\left[\sum f_n \text{ converge uniformément}\right] \Leftrightarrow \left[\ R_n \xrightarrow{c.u.} 0\ \right]}$

c) Exemples

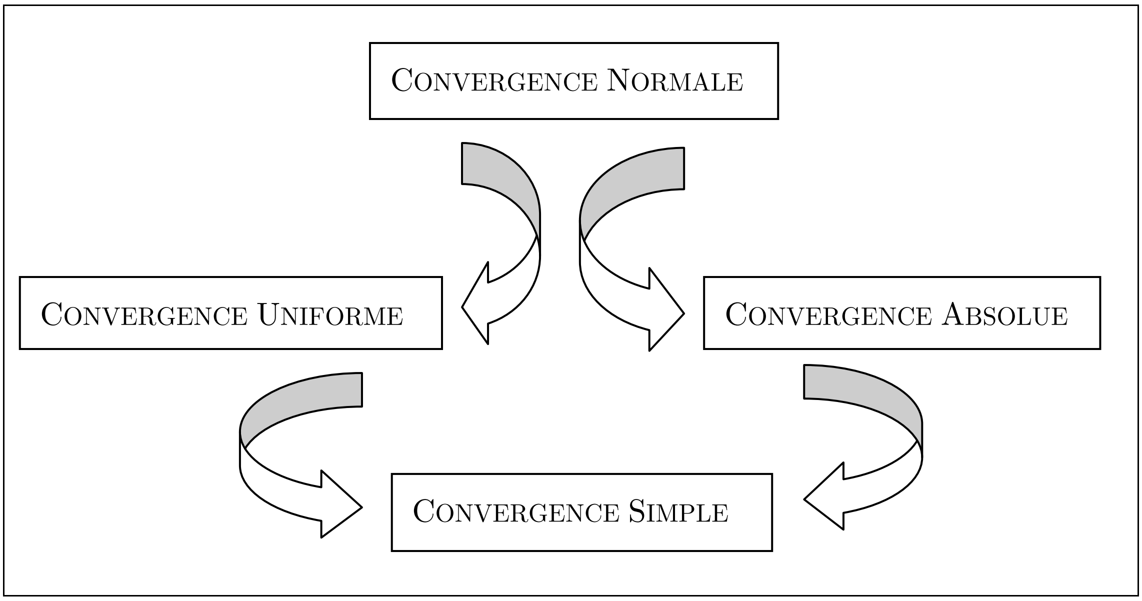
2.4. Convergence absolue

- Définition. Lien avec la convergence simple.

2.5. Convergence normale

- Définition, méthodes pratiques, exemples.

2.6. Liens entre les divers type de convergence et exemples



Démonstration

2.7. « Multithéorème » : conservation de propriétés

- Principe : on applique les résultats des cinq théorèmes vus au § 1.3 aux sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ et sans aucune démonstration, on reformule dans le langage propre aux séries :

> Multithéorème : **convergence uniforme et passages à la limite**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
>
> On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I (ou même seulement sur tout segment inclus dans I). Sa somme est notée S (définie sur I).
>
> ① Conservation de la continuité
>
> ② Interversion des symboles $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$.
>
> ③ Interversion des symboles $\int_a^b$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$.
>
> ④ Série de fonctions et primitivation.
>
> ⑤ Série de fonctions et dérivation.

3. Approximations uniformes

3.1. d'une fonction continue par des fonctions en escalier

- Démonstration admise
- Interprétation : $\mathcal{E}([a,b],F)$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],F)$ muni de $\|\ \|_\infty$
- Application : **méthode des rectangles**

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]}$$

3.2. d'une fonction continue par des fonctions affines par morceaux

- Démonstration admise
- Application : **méthode des trapèzes**

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right)\right]}$$

3.3. d'une fonction continue par des fonctions polynômes

> Théorème 3 de Weierstrass : Toute fonction $f\in\mathcal{C}([a,b],F)$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

- Démonstration admise
- Interprétation : $K[x]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],F)$ muni de $\|\ \|_\infty$
- On a même : $\overline{K[x]} = \mathcal{C}([a,b],F)$.