MP Programme de colle n° 19

Chapitre 14

Intégration sur un intervalle

II. Les grands théorèmes

Les étudiants devront connaître l'énoncé exact des quatre grands théorèmes.

Questions de cours proposées (sans obligation…)

- Q.C. 1 : énoncé d'un des quatre théorèmes
- Q.C.2 : démonstration
  - Soit du théorème 3 (« continuité de l'intégrale à paramètre »)
  - Soit l'intégrabilité de la fonction Γ.
  - Soit la continuité de la fonction Γ.
  - Soit le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction Γ.
  - Soit le caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction Γ.

Les quatre théorèmes à connaître impérativement

Théorème 1 de **convergence dominée**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ (**CM**) .

Si ❋ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f (**C S**)

❋ il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leqslant \varphi$ (**D**)

Alors :

- ❑ $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$
- ❑ la suite des intégrales $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$

Théorème 2 : **intégration terme à terme d'une série de fonctions**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si ❋ la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme une fonction $S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$,

❋ la série des intégrales $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ et la série $\sum \int_I f_n$ converge et a pour somme $\int_I S$

Théorème 3 : **"continuité d'une intégrale à paramètre"**

Soit $f : \begin{cases} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où $\left| \begin{array}{l} A \subset F \text{ avec } F \text{ e.v.n. de dimension finie} \\ I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \end{array} \right.$

Si ① f est continue par rapport à la première variable **(C1)**

i.e. $\forall t \in I \,:\, f(.,t) \in \mathcal{C}(A,\mathbb{K})$

② f est continue par morceaux par rapport à la 2^{nde} variable **(CM2)**

i.e. $\forall x \in A \,:\, f(x,.) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$

③ $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\, x \in A : |\, f(x,.)\,| \leqslant \varphi$ **(D)**

alors la fonction $g : x \longrightarrow \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est bien définie et continue sur A.

Théorème 4 : **"dérivabilité d'une intégrale à paramètre "**

Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où J et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si ① $\forall x \in J \,:\, f(x,.) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

② f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui vérifie les hypothèses (C1), (CM2) et (D) du théorème de continuité sous le signe intégrale.

alors la fonction $g : x \longrightarrow \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \,:\, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad .$$