MP*: Calcul différentiel

Coralie Renault

1er avril 2015

Exercice

Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$.

Exercice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 2y^3$.

- Déterminer l'équation du plan tangent P_{M_0} au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
- Pour le point M_0 de coordonnées $(2, 1, 2)$, déterminer tous les points M tel que le plan tangent en M soit parallèle à P_{M_0}.

Exercice

Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Exercice

Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(2, 3, 7)$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) Le théorème de Schwarz est-il vérifié ?

Exercice (*Fonctions harmoniques*)

Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est nul.
a) Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.
On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.
b) Montrer que f est harmonique si, et seulement si,φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.
c) En résolvant cette équation, déterminer f.

Exercice

Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Exercice

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$, de classe $\mathcal{C}$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique.
Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

Exercice

Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Exercice

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(x+1, t)\, \mathrm{d}t$$

Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.