1 Opérations sur les polynômes

1 ◷ Déterminer $U\big(\mathbb{K}[X]\big)$.

---

2 ◷ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X)X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0 pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

---

3 ◷ On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k X^k$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décrivant l'ensemble des suites presque nulles de réels positifs ou nuls. Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par produit.

---

4 ◷◷

1) Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$ pour tous $a, b, r \in \mathbb{N}$.
2) En déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

5 ◷◷

1) Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que toute racine rationnelle de P est un entier.
2) Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est la puissance $k^{\text{ème}}$ d'aucun entier. Montrer qu'alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.
3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le polynôme $X^3 + kX + 1$ peut-il avoir une racine rationnelle ?

---

6 ◷◷◷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer, en fonction des coefficients de P, une expression simple de : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right)\right|^2 dt$.
2) On suppose que P est non nul à coefficients entiers et que pour tout $u \in \mathbb{U}$: $\big|P(u)\big| < \sqrt{2}$. Montrer qu'alors P est un monôme.
3) Que devient le résultat de la question **2)** si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?

---

2 Division euclidienne

7 ◷ À quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?

---

8 ◷◷ Soit $a \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le polynôme $X^4 - X + a$ est-il divisible par $X^2 - aX + 1$?

---

9 ◷◷ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geqslant 4$.

---

10 Calculer le reste de la division euclidienne :

1) ◷ de $X(X+1)^2(X+2)^3$ par $(X-1)(X-2)$.
2) ◷◷ de X^{100} par $(X-1)^3(X+1)$.
3) ◷◷ de X^{2n} par $\left(X^2+1\right)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) ◷◷◷ de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

11 ◷◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X+1$ et que son reste par $X-3$ vaut 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\left(X^2+4\right)(X-3)$.

---

12 ◷◷◷ Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

---

3 Racines et multiplicités

13 ◷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

---

14 ◷ Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

---

15 ◷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

---

16 ◷ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

---

17 ◷◷ Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

---

18 ◷◷ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$$

est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

19 ◷◷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

---

20 ◷◷◷ Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer qu'alors $\left(X^p-1\right)\left(X^q-1\right)$ divise $(X-1)\left(X^{pq}-1\right)$.

---

4 Nombre maximal de racines

21 ◷ Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré n et $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation : $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

---

22 ◷◷

1) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   a) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $P(x) = \sqrt{x}$?
   b) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \sin x$?
   c) pour tout $x \in [0, 2\pi]$: $P(x) = \sin x$?
   d) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = e^x$?
   e) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$?
   f) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \lfloor x \rfloor$?
2) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
   a) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \overline{z}$?
   b) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = |z|^2$?

---

23 ◷◷ Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
1) $P(n) = n^2$. 2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

---

24 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.
1) ◷◷ On suppose que P est unitaire et que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$: $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$. Calculer $P(n+2)$.
2) ◷◷ On suppose que : $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.
1) ◷◷◷ On suppose que : $P(k) = \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $P(0)$.

---

25 ◷◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n) \in \mathbb{P}$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\big(n + P(n)\big)$ est divisible par $P(n)$.
2) En déduire que : $P\big(X + P(X)\big) = P(X)$, puis trouver une contradiction.

---

26 ◷◷◷ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P(0) = 1$ et $P\left(X^2+1\right) = P(X)^2 + 1$.

---

27 ◷◷◷ On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{A}$ des fonctions $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n décrivant $\mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ décrivant $\mathbb{R}$.
1) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2) Montrer que $\mathscr{A}$ est intègre.
3) Déterminer $U(\mathscr{A})$.

---

5 Équations polynomiales

28 ◷◷ Résoudre les équations polynomiales suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:
1) $P = P'P''$. 2) $P'^2 = 4P$.
3) $P'P'' = 18P$. 4) $P(X+1) = P(X)$.
5) $P(X+1) - P(X) = X$. 6) $\left(X^2+1\right)P'' = 6P$.
7) $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X)$.
8) $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

---

6 Polynômes scindés et relations coefficients-racines

29 ◷◷ Soit $n \geqslant 2$.
1) Simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.
2) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:
$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|.$$
3) Simplifier enfin le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

---

30 ◷◷ Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $(X+1)^n - e^{2in\theta}$.
1) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2) En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}$.
2) ◷◷◷ Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

---

31 Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On pose : $P = X^3 + pX + q$. Comme P est réel de degré 3, P est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après une remarque du cours. On note alors x, y et z ses trois racines complexes comptées avec multiplicité. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :
1) ◷ $x^2 + y^2 + z^2$. 2) ◷◷ $x^3 + y^3 + z^3$.
Et si : $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$:
3) ◷ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. 4) ◷ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

---

32 ◷◷ Soient $p,q\in\mathbb{R}$. On pose : $P=X^3+pX+q$. Comme P est réel de degré 3, P est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après une remarque du cours. On note alors x, y et z ses trois racines complexes comptées avec multiplicité.

1) Prouver l'égalité :

$$P'(x)P'(y)P'(z)=4p^3+27q^2$$

au moyen des relations coefficients-racines.

2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

---

33 ◷◷

1) On note ★ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^3$. Soit $(x,y,z)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^3$. On pose : $P=(X-x)(X-y)(X-z)$.

a) Si (x,y,z) est solution d'★, déterminer P explicitement.

b) Résoudre ★.

2) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xyz=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$

---

34 ◷◷ On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant : $T_0=1$, $T_1=X$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$. Le polynôme T_n ainsi construit est appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*. Dans les questions suivantes, les résultats sont exigés « pour tout $n\in\mathbb{N}$ ».

1) a) Déterminer le degré de T_n et calculer son coefficient dominant.

b) Calculer le coefficient constant de T_{2n}.

2) a) Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta).$$

b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation **a)** est vraie.

c) En dérivant deux fois la relation **a)**, montrer l'égalité : $\left(X^2-1\right)T_n''+XT_n'-n^2T_n=0$.

3) Désormais, $n\geqslant 1$.

a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1,1]$.

b) En déduire que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

c) Simplifier enfin le produit : $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

---

7 POLYNÔMES ANNULATEURS DE MATRICES

35 ◷◷ Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$ est inversible pour $n\geqslant 2$ et calculer son inverse en exhibant d'abord un polynôme annulateur.

---

36 ◷◷ Calculer les puissances des matrices suivantes en exhibant d'abord pour chacune un polynôme annulateur :

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (degré 3).

---

8 POLYNÔMES DE LAGRANGE

37 ◷ Soient $n\geqslant 2$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{K}$ distincts et $L_1,\ldots,L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iL_i$.

---

38 ◷◷ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ tels que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kP\left(\frac{k}{n}\right).$$

---

39 ◷◷ On note $L_1,\ldots,L_n$ les polynômes de Lagrange de $1,\ldots,n$.

1) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.

2) Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ pour lequel : $P(k)=k^{n-1}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

3) En déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

---

40 ◷◷◷ Déterminer l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ pour lesquels : $P(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ (resp. $P(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$).
