Séries numériques

Techniques de calcul de sommes

▶ 1 Séries télescopiques

1) a. Déterminer une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = u_{n+1} - u_n.$$

b. En déduire la convergence et la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right).$$

2) On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

a. Déterminer des constantes $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{3n+2}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}.$$

b. Conclure quant à la convergence et la somme éventuelle de la série étudiée.

▶ 2 Utilisation de la série exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On admet que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et que sa somme vaut e^x.

Montrer la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

1) $\displaystyle\sum \frac{2^n - 3^n}{n!}$

2) $\displaystyle\sum \frac{2^{n+2}}{n!}$,

3) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\, n!}$,

4) $\displaystyle\sum \frac{n^2\, 2^n}{n!}$,

5) $\displaystyle\sum \frac{n(n-1)(n-2)\, 3^n}{n!}$.

▶ 3 Séries géométriques dérivées

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1) À $n \in \mathbb{N}$ fixé, en dérivant la fonction f_n de deux manières différentes, obtenir une expression explicite de

$$\sum_{k=1}^{n} n\, x^{k-1}.$$

2) En déduire que, pour tout $q \in \left]-1,1\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

3) En dérivant une fois de plus, montrer que pour tout $q \in \left]-1,1\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$ est convergente et obtenir que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

4) En déduire que la série $\sum (n^2+n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$ est convergente et calculer sa somme.

Théorèmes de comparaison

▶ 4

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum \arctan(n)$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)+n}{n^2+4n^3}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\arctan(n)}{n^2}$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(\tfrac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)+\cos(n)}{\sqrt{n^5}}$

7) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n(1+n)}{n^2\sqrt{n}+(-1)^n}$

8) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2\ln(n)}{2^n}$

9) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^5(n)\, n}$

10) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$

11) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)$

12) ♠ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$.

▶ 5 Casse-tête

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs que l'on suppose convergente.

1) Montrer que la série $\sum u_n^2$ est également convergente.

2) Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ est également convergente.

3) a. Montrer que, pour tous réels a et b : $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

b. Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est également convergente.

▶ 6 Constante d'Euler

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

et $a_n = u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

1) Établir une relation entre les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La limite de la suite (u_n) s'appelle la **constante d'Euler**. Elle est notée γ.

3) Grâce à ce qui précède, redémontrer que

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Comment l'avait-on démontré dans le cours ?

4) Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+2+\cdots+n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \tfrac{1}{n}\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right).$$

Comparaisons séries intégrales

► 7

On souhaite étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\alpha}}.$$

1) Par une technique de comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de

$$a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}.$$

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série proposée soit convergente.

► 8 Séries de Bertrand

1) En utilisant des comparaisons série-intégrale, déterminer la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ln(n)}, \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ln^2(n)}, \quad \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\,\sqrt{\ln(n)}}.$$

Pourquoi des séries pour $n \geqslant 2$? pour $n \geqslant 3$?

2) ♠ Soit $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\,\ln^{\beta}(n)}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

3) ♠ Soit α et β deux réels. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur (α, β) la série de Bertrand suivante est convergente :

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^{\alpha}\,\ln^{\beta}(n)}.$$

► 9 Reste d'une série de Riemann

On s'intéresse au reste $(R_n)_{n\geqslant 1}$ de la série de Riemann d'exposant 2.

1) Justifier l'existence de ce reste et rappeler son écriture sous forme de somme.

2) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent simple de ce reste.

3) ♠ Généraliser ce résultat à toutes séries de Riemann d'exposant $\alpha > 1$.

Résultats classiques

► 10 Développement en série de $\ln(1+x)$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur ce domaine et déterminer l'expression explicite de toutes ses dérivées successives.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour f entre 0 et x.

3) On choisit un nombre $x \in [0,1]$ fixé.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ fixé, la série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

est convergente et préciser sa somme.
(remarque : ce résultat reste vrai pour tout $x \in]-1,1]$, voir le cours de spé sur les séries entières)

5) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ ?$$

► 11 Développement en série de l'exponentielle

En reprenant la méthode de l'exercice précédent, démontrer que, pour tout x réel,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

(on traitera successivement deux cas : $x \leqslant 0$ puis $x > 0$.)

► 12 Règle de d'Alembert

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum u_n$ dans les situations où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

ℓ étant une limite finie ou infinie (mais de toute façon positive).

1) On suppose que $\ell > 1$.

a. Justifier qu'il existe un réel $m > 1$ et un rang n_0 tels que : $\forall n \geqslant n_0,\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant m$.

b. En déduire que : $\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \geqslant m^{n-n_0}\,u_{n_0}$.

c. Quelle est la limite de la suite u ?
Qu'en déduire concernant la série $\sum u_n$?

2) On suppose maintenant que $0 \leqslant \ell < 1$.

a. Démontrer l'existence d'un réel $m \in]0,1[$ et d'un rang n_0 tels que : $\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \leqslant m^{n-n_0}\,u_{n_0}$.

b. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

3) À l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{\sqrt{n}\,\mathrm{e}^n}, \qquad ♠ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n}.$$

4) Cas où $\ell = 1$.
Montrer que toutes les séries de Riemann se trouvent dans ce cas. Expliquer pourquoi le cas $\ell = 1$ est parfois qualifié de « cas douteux ».