Chapitre 5
Séries et familles sommables

1. Séries dans un espace vectoriel normé

1.1. Définitions

Définitions 1 : **série, somme partielle, terme général, …**

Soit E un espace vectoriel normé.

- On appelle **série** de **terme général** u_n et on noté $\boxed{\sum u_n}$ ou $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i}$.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle aussi la suite des **sommes partielles**.
- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  La limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la **somme** de la série $\sum u_n$ et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_i$
- On dit que la série $\sum u_n$ **diverge** si elle ne converge pas.

- Exemple 1 : **séries géométriques** **1**.
  - La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et a pour somme 2.
  - Plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$: la série géométrique

    $\boxed{\sum z^n \text{ converge si et seulement si } |z| < 1}$ et alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$

    pour $|z| \geqslant 1$, la série $\sum z^n$ diverge grossièrement (cf § 1.2)
- Exemple 2 : **téléscopage** **2**.
  - La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1.

    (il suffit de décomposer en éléments simples $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$)

  Exemple 3 : **série harmonique** **3**.
  - La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge grossièrement (utiliser $\frac{1}{i} \geqslant \int_i^{i+1} \frac{dt}{t}$)
  - On montre que $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln(n)}$
- Exemple 4 : **séries de Riemann** **4**.
  - $\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$

1.2. Propriétés

Propriété 1 : convergence du terme général

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

- Démonstration **5**.
- Par contraposition : $\boxed{[(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0] \Rightarrow [\sum u_n \text{ diverge}]}$.

  On parle dans ce cas de **divergence grossière**

Propriété 2 : convergence du reste

Si la série $\sum u_n$ converge :

- on peut définir $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,:\, R_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i}$

  R_n s'appelle le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

- Démonstration **6**.

Propriété 3 : lien entre série et suite

$[(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}] \Leftrightarrow [\text{la série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}]$

- Démonstration **7**.
- Intérêt : ceci permet de traiter certaines suites rebelles.
- Exemple 5 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}} \times \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ converge. **8**.

1.3. Propriétés algébriques

Définition : **opérations sur les séries**

On définit

- La somme des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ par :

  $$\sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$$
- Le produit de la série $\sum u_n$ par le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par :

  $$\alpha.\sum u_n = \sum (\alpha u_n)$$

Propriété 4 : **convergence de la somme de deux séries**

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et si $\alpha \in \mathbb{K}$,

- les séries $\sum (u_n + v_n)$ et $\sum (\alpha u_n)$ convergent.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

- Démonstration **9**.
- L'application $\sum u_n \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc linéaire.

1.4. Absolue convergence

a) Définition

> Définition: une série $\sum u_n$ d'un espace vectoriel normé E est dite absolument convergente si la série numérique réelle $\sum \|u_n\|_E$ converge.

- En particulier pour une série numérique (réelle ou complexe) :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument} \Leftrightarrow \text{la série réelle } \sum |u_n| \text{ converge}}.$$

- Rappel MPSI : pour les séries réelles ou complexes, la convergence absolue entraîne la convergence (démonstration à revoir) ↙

b) L'absolue convergence entraîne la convergence en dimension finie

> Théorème :
>
> Toute série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

- Démonstration **10**.
- Intérêt : ceci permet notamment d'utiliser lorsque c'est possible des résultats concernant les techniques sur les séries à termes positifs (par exemple : comparaison des termes généraux)

- Exemples : **11**.

  Les séries $\sum \frac{e^{in\alpha}}{n^2}$, $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{n^2}$, $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ sont toutes convergentes car absolument convergente.

  De plus sachant que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$, il vient : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$

- Exemple 5 : $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 1$
- Attention : une série peut être convergente sans être absolument convergente : la réciproque du théorème 1.3 est donc fausse. ↙

- Contre-exemple 6 : **la série harmonique alternée** **12**.

  La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

  On peut par ailleurs montrer que $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$

c) Application : **formule de Stirling**

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

(exercice 2 du T.D. 6)

1.5. Exponentielle de matrices

a) Série exponentielle réelle, complexe **13**.

- $\sum \frac{1}{n!}$ converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et on note $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

  On verra (produit de Cauchy) que

  $\forall z \in \mathbb{C}$: $\boxed{\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')}$

  On retrouve (MPSI) : $\boxed{\exp(a+ib) = e^a(\cos(b) + i\sin(b))}$

  On rappelle que $\boxed{|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}}$ et $\boxed{\arg(\exp(z)) \equiv \mathrm{Im}(z) \quad [2\pi]}$

b) Exponentielle de matrices

> Proposition : On se place dans l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la série exponentielle $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge absolument.

- Démonstration **14**. **CCP oral…**

  Attention à la démonstration :

  on n'a en général ni $\|M^n\| = \|M\|^n$, ni même seulement $\|M^n\| \leqslant \|M\|^n$

  Ici on utilise $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

  Il existe par ailleurs des normes pour lesquelles $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, par exemple $\|A\| = \sup(\{A.x \ ; \ x \in E \, / \, \|x\| = 1\})$

- On verra que si M et N commutent : $\boxed{\exp(M+N) = \exp(M) \times \exp(N)}$

c) Exponentielles : **15**.

- d'une matrice diagonale $\boxed{\exp(diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n})}$
- d'une matrice nilpotente : $\boxed{\exp(N) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{N^i}{i!}}$

2. Compléments sur les séries numériques

2.1. Comparaison des séries à termes positifs

a) Prérequis sur les notions de o, O et $\sim$

Diverses façons de définir $u_n = o(v_n)$
❖ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} /$ si $n \geqslant n_0$ alors $\lvert u_n \rvert \leqslant \varepsilon \lvert v_n \rvert$ ❖ Il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant n_0}$ de limite 0 telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$ ❖ (Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas :) $\boxed{\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0}$.

Diverses façons de définir $u_n = O(v_n)$
❖ $\exists k \in \mathbb{R}_+ , \exists n_0 \in \mathbb{N} /$ si $n \geqslant n_0$ alors $\lvert u_n \rvert \leqslant k \lvert v_n \rvert$ ❖ Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geqslant n_0}$ bornée telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ ❖ (Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas :) $\boxed{\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

Diverses façons de définir $u_n \sim v_n$
❖ $u_n = v_n + o(v_n)$ ❖ Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geqslant n_0}$ de limite 1 telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ ❖ (Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas :) $\boxed{\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1}$

- Exemples : si $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$ et si $u_n \to 0$, alors $f(u_n) \sim g(u_n)$. Ainsi :

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \operatorname{Arc}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim e^{1/n} - 1 \sim \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}}$$

- Propriétés : $\boxed{\text{Si } u_n \sim v_n \text{ alors } u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(v_n)}$

b) Comparaison des termes généraux (rappels de M.P.S.I.)

Proposition 1 : **comparaison des termes généraux**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs ❖ Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant v_n$ ou si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$: ○ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. ○ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge. ❖ Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

- Exemples : **16**.
  - ○ $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\sum e^{-n^2}$ convergent,
  - ○ $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$ et $\sum \dfrac{1}{n + \ln(n)}$ divergent.
- Exemple 7 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} - \ln(n+1)$ converge.

  Sa limite s'appelle la **constante d'Euler**, souvent notée Γ.

c) Sommation des relations de comparaison

① Comparaison (o/O) des sommes partielles de deux séries dont l'une au moins diverge.

Proposition 2 :

Soit $\sum v_n$ une série divergente de réels positifs et $\sum u_n$ une série complexe.

❖ Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{i=0}^{n} u_i = o(\sum_{i=0}^{n} v_i)$

❖ Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{i=0}^{n} u_i = O(\sum_{i=0}^{n} v_i)$.

- Démonstration **17**.
- Application : convergence au sens de Césaro (en moyenne) **18** :

  Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $\boxed{\text{si } u_n \to \ell\text{, alors } \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \to \ell}$

② Comparaison (o/O) des restes de deux séries convergentes.

Proposition 3 :

Soit $\sum v_n$ une série convergente de réels positifs et $\sum u_n$ une série complexe.

❖ Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = o(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i)$

❖ Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = O(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i)$.

- Démonstration **19**.
- Exemple : $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ **20**

③ Comparaison ($\sim$) des sommes partielles et des restes de deux séries de termes généraux équivalents.

Proposition 4 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors :.

❖ Si l'une des séries diverge, l'autre aussi et $\sum_{i=0}^{n} u_i \sim \sum_{i=0}^{n} v_i$

❖ Si l'une des séries converge, l'autre aussi et $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i \sim \sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i$

- Démonstration **21**.
- Exemple 1 : $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{n}}$
- Exemple 2 : complément sur la **constante d'Euler** **22** :

  $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln(n)}$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \Gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

2.2. Règle de D'Alembert

a) Lemme préliminaire

Lemme : Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs.

- ❖ Si $\exists k \in]0,1[\;/\; [n \geqslant n_0] \Rightarrow \left[\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k\right]$, alors $\sum u_n$ converge.
- ❖ Si $[n \geqslant n_0] \Rightarrow \left[\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1\right]$, alors $\sum u_n$ diverge..

b) Règle de D'Alembert

Théorème : Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs.

On suppose que $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ❖ Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- ❖ Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

- Démonstration **23**.
- Remarque : si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure :
  - En fait si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, la série diverge
  - Mais si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^-$, on ne peut vraiment pas conclure $\boxed{\swarrow}$

    en effet : $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.
- Exemple : **24**.

  $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ diverge : on trouve ici $\boxed{\ell = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e > 1}$.

2.3. Comparaison série-intégrale

a) Un premier résultat

Théorème 1 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- Démonstration **25**.
- Remarque : on verra (chapitre ultérieur) que ceci revient à écrire :

  $$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \Leftrightarrow \left[\int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{converge}\right] \Leftrightarrow [f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+]$$
- Exemple : **séries de Bertrand** (hors-programme mais bon à savoir !) **26**.

  $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \text{ converge si et seulement si } (\alpha,\beta) \succ (1,1)}$$

b) Un résultat plus précis

Théorème 2 : Soit $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \; - f(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

- Démonstration **27**.
- Exemple : encore la constante d'Euler ! **28**.

2.4. Séries alternées

a) Définition

Définition : Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si $u_n = (-1)^n v_n$

où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels de même signe (par exemple $\geqslant 0$).

b) Critère spécial des séries alternées

Théorème : Soit la série alternée $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n v_n$.

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors :

- la série alternée $\sum u_n$ converge. Soit S sa somme :
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $S \in [S_n \overset{\leftrightarrow}{;} S_{n+1}]$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: le reste R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

- Démonstration **29**.

c) Exemples **30**.

- Exemple 1 : Série de Riemann alternée :

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0$$

mais ne converge absolument que si $\alpha > 1$.

- Exemple 2 : Soit la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right)$ (où $\alpha > 0$)
  - Elle n'est pas définie si $\alpha \leqslant 0$ (considérer u_2)
  - Elle diverge si $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$
  - Elle converge mais non absolument si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$
  - Elle converge absolument si $\alpha > 1$

3. Notions de dénombrabilité

> Définition : **ensemble dénombrable**
>
> Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

- Exemples et contre-exemples : **31**.

  $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables ; $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

> Propriétés :
>
> ① Tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est dénombrable.
>
> ② Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables ; donc toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
>
> ③ Un ensemble non vide est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.
>
> ④ Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable
>
> ⑤ Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

- Démonstration (T.D.) de ① à ④ **32** ⑤ : démonstrations admises.
- Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont dénombrables **33**.

  il suffit d'écrire $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\mathbb{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a}{10^n} ; a \in \mathbb{Z}$

4. Familles sommables

4.1. Familles sommables de réels positifs

a) Définition

> Définition 1 : **famille sommable de réels positifs**
>
> Soit I un ensemble dénombrable.
>
> Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite sommable si
>
> l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{\sum_{i\in F} u_i \text{ ; } F \text{ partie finie de } I\right\}$ est majoré.
>
> Dans ce cas, sa somme est par définition $\text{Sup}(\mathcal{S})$ et notée $\sum_{i\in I} u_i$.

- Si la famille n'est pas sommable, on pourra noter $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$
- Exemples et contre-exemples : **34**.
  - Toute famille finie de réels poitifs est sommable.
  - Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (ouf !).
  - Les familles $(r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ et $(r^2)_{r\in\mathbb{Q}\cap 0,1}$ ne sont pas sommables.

b) Comparaison

Propriété : Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs.

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\forall i \in I :\ u_i \leqslant v_i$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} v_i$

- Démonstration **35**.

c) Vers la linéarité

Propriété : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs.

Alors la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable $\sum\limits_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} u_i + \sum\limits_{i\in I} v_i$

- Démonstration **36**.

d) Sommation par paquets

Définition 2 : **partition d'un ensemble E**

On dit qu'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E est une partition de E si

- $\forall n \in \mathbb{N} \ :\ A_n \neq \varnothing$
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ :\ m \neq n \ \Rightarrow\ A_m \cap A_n = \varnothing$
- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$

- Exemple : les classes d'équivalences constituent une partition de l'ensemble sur lequel est défini cette relation d'équivalence.

Théorème de **sommation par paquets 1** (pour une famille de réels positifs)

Soient une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si on a conjointement :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable
- la série $\sum \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i \right)$ converge

Dans ce cas : $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i \right)$

- Démonstration hors programme.

e) Exemple **37**.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } n \notin \ -1,0 \\ u_{-1} = u_0 = 0 \end{cases}$

4.2. Famille sommables de nombres complexes

a) Définition

> Définition 3 : **famille sommable de nombres complexes (ou réels)**
>
> Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

b) Exemple fondamental

> Propriété : **famille sommable et convergence absolue**
>
> Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Démonstration **38**.

c) Somme

1. Cas d'une famille de réels

- On définit préalablement pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}}$$

- On vérifie que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{x^+\geqslant 0}\ \boxed{x^-\geqslant 0}\ \boxed{x=x^+-x^-}\ \boxed{|x|=x^++x^-}$$

- D'où il résulte que $\boxed{x^+\leqslant |x|}$ et $\boxed{x^-\leqslant |x|}$
- Ainsi, par comparaison que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels, les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont elles-mêmes sommables.

  On peut donc poser (par souci de linéarité) :

> Définition 4 : **somme d'une famille sommable de réels positifs**
>
> Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille réelle sommable, sa somme est par définition :
>
> $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

- De plus $\boxed{\sum_{i\in I}|u_i| = \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in I} u_i^-}$

2. Cas d'une famille de nombres complexes

> Propriété : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables.

- On pose donc par souci de linéarité :

> Défintion 5 : **somme d'une famille sommable de nombres complexes**
>
> Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille complexe sommable, sa somme est par définition : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i) + i\cdot\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)$.

d) Commutativité

> Propriété : **invariance par permutation**
>
> Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille complexe sommable : si on effectue une permutation sur l'ordre des indices, la somme reste inchangée.

- Démonstration : l'ordre des indices (si tant est qu'il en existe un !) n'intervient pas dans la définition de la sommabilité.

e) Linéarité

> Propriété : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$
>
> Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$.
>
> Alors la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable $\sum_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$

- Démonstration **39**.

f) Sommation par paquets

> Théorème de **sommation par paquets 2** (pour une famille complexe)
>
> Soit une famille complexe $(u_i)_{i\in I}$ et soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.
>
> Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si on a conjointement :
>
> ❖ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable
>
> ❖ la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ converge
>
> Dans ce cas : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

- Démonstration hors-programme :

  pour l'équivalence, on applique le théorème de sommation par paquets 1 à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$; pour l'égalité finale, c'est plus compliqué…
- Attention au module (à la valeur absolue) dans la seconde condition.

4.3. L'exemple des suites doubles sommables

a) Cas de familles doubles de réels positifs

> **Théorème de Fubini 1 pour les familles doubles de réels positifs**
>
> Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.
>
> Alors $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si on a conjointement :
>
> ❖ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fixé), la série $\sum_m a_{m,n}$ converge
>
> ❖ la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge
>
> Dans ce cas : $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$

- Démonstration **40**.

b) Cas de familles doubles de complexes

Théorème de Fubini 2 pour les familles doubles de complexes

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

- Démonstration **41**.
- Remarque : pour démontrer que la famille est sommable, on utilisera le théorème de Fubini 1 sur la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$

c) Exemples traités **42**.

- $\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_m b_n}$ où les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.
- $\boxed{\sum_{p,q\geqslant 2} p^{-q} = 1 = \sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)}$
- $\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{(-1)^{i+j}}{(1+i+j)^{\alpha}}}$

4.4. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

a) Définition

Définition : **Produit de Cauchy de deux séries**

On appelle produit de Cauchy des deux séries complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ où $\forall n\in\mathbb{N}$: et $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$.

b) Le théorème fondamental

Théorème : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries complexes absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergent et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

- Démonstration **43**.

c) Exemple **44**.

- Existence et valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$.

d) Application à l'exponentielle complexe **45**.

- $\forall\ z,z' \in\mathbb{C}^2$: $\boxed{\exp(z+z') = \exp(z)\times\exp(z')}$.