Théorème des bornes atteintes

Exercice 1 [01813] [Correction]
Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2 [01812] [Correction]
Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 3 [01810] [Correction]
Soient $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a\,;b], f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x) - \alpha.$$

Exercice 4 [01811] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 5 [01815] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit $T > 0$ une période de f.
Sur $[0\,;T]$, f est bornée par un certain M car f est continue sur un segment.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - nT \in [0\,;T]$ pour $n = E(x/T)$ donc
$\left|f(x)\right| = \left|f(x-nT)\right| \leq M$.
Ainsi f est bornée par M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : [énoncé]
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|f(x)\right| \leq M.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(g(x))\right| \leq M$ donc $f \circ g$ est bornée.
Puisque la fonction g est continue sur le segment $[-M\,;M]$, elle y est bornée par un certain M'.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|g(f(x))\right| \leq M'$ car $f(x) \in [-M\,;M]$ ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 3 : [énoncé]
Posons $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = g(x) - f(x)$$

φ est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc y admet un minimum en un certain $c \in [a\,;b]$.
Posons $\alpha = \varphi(c) = g(c) - f(c) > 0$. Pour tout $x \in [a\,;b]$, $\varphi(x) \geq \alpha$ donc $f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $M = f(0) + 1$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \leq A, f(x) \geq M \text{ et } \forall x \geq B, f(x) \geq M.$$

On a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.
Sur $[A\,;B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A\,;B]$ car continue sur un segment.
On a $f(a) \leq f(0)$ car $0 \in [A\,;B]$ donc $f(a) \leq M$.
Pour tout $x \in [A\,;B]$, on a $f(x) \geq f(a)$ et pour tout $x \in \left]-\infty\,;A\right] \cup \left[B\,;+\infty\right[$, $f(x) \geq M \geq f(a)$.
Ainsi f admet un minimum absolu en a.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit y une valeur prise par f. Si celle-ci n'a qu'un antécédent, c'est fini.
Sinon, soit $a < b$ les deux seuls antécédents de y.
f est continue sur $[a\,;b]$ donc y admet un minimum en c et un maximum en d, l'un au moins n'étant pas en une extrémité de $[a\,;b]$. Supposons que cela soit c.
Si $f(c)$ possède un autre antécédent c' que c.
Si $c' \in [a\,;b]$ alors f ne peut être constante entre c et c' et une valeur strictement comprise entre $f(c) = f(c')$ et $\max_{[c;c']} f$ possède au moins 3 antécédents.
Si $c' \notin [a\,;b]$ alors une valeur strictement intermédiaire à y et $f(c)$ possède au moins 3 antécédents. Impossible.