Probabilité

Coralie Renault

25 janvier 2015

Exercice

Vous jouez à pile ou face avec un ami. Il parie pile, lance la pièce et fait pile.Quelle est la probabilitée qu'il soit un tricheur ? On peut noter p la proportion de tricheur dans la pop

Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice

Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

a) Etablir $G_S(t) = G_N\left(G_X(t)\right)$ pour $|t| < 1$
b) On suppose que les variables admettent une espérance. Etablir l'identité de Wald

$$E(S) = E(N)E(X_1)$$

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Reconnaître la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.
a) On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.
b) On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Calculer

$$E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$$

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice

Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S i.e. tel que l'espérance $E\left((Y - S)^2\right)$ soit minimale.

Exercice

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.
a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\} \text{ et } P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

a) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.
b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres p et q.
Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice

Exercice (*Théorème de Bernstein*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. On va montrer que :

1. B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Pour cela :

— Soit $x \in [0,1]$ et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

— Montrer l'inégalité de Tchébytchev : Soit X une variable aléatoire réelle alors montrer que :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

— Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées tel que $Var(X_1)$ existe. Montrer que :

$$Var(S_n) = nVar(X_1)$$

— Calculer $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$

— Montrer que $\forall \delta > 0$ on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta)$$

— Conclure

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.

c) Observer que la loi de Z est géométrique.