Chapitre 11

Intégration sur un intevalle quelconque

I. Théorie

Dans tout le chapitre, les fonctions sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble de telles fonctions.

1. Intégrale généralisée

1.1. Cas où l'intervalle est semi-fermé

a) Définitions

Définition 1 : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Définition 2 : Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a,b[$ a une limite finie en b. Cette limite est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Définition 2-bis : Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si la fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ définie sur $]a,b]$ a une limite finie en a. Cette limite est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

b) Exemples

1.2. Cas où l'intervalle est ouvert

a) Définition

Définition 3 : Soit $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent (où $c \in]a,b[$).

0n note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

b) Exemples

1.3. Propriétés

a) Linéarité

b) Positivité

c) Croissance

d) Intégrale généralisée et dérivation

- Proposition : dérivabilité et dérivée de $x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ Démonstration
- Généralisations

2. Intégrabilité

2.1. Definition

2.2. Convergence absolue et convergence

- Théorème

2.3. Exemples et contre-exemples

2.4. L'espace des fonctions intégrables

- $(\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

3. Cas de fonctions à valeurs réelles positives

3.1. Caractérisation

Proposition : Soit $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

f est intégrable si et seulement si $x \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

- Démonstration

3.2. Théorème de comparaison

Théorème : Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+^*)^2$.

❋ Si $f \leqslant g$, $f \underset{x\to b}{=} o(g)$ ou $f \underset{x\to b}{=} O(g)$ alors :

g est intégrable sur I $\Rightarrow$ f est intégrable sur I

❋ Si $f \underset{x\to b}{\sim} g$, alors :

g est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ f est intégrable sur I

- Démonstration

3.3. Comparaison série intégrale

> Théorème : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.
> La série $\sum f \quad n$ converge si et seulement si
> l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (autrement dit si f est intégrable).

- Démonstration

3.4. Fonctions de référence : intégrales de Riemann

a) Sur $[1,+\infty[$

> Proposition 1 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
> f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement $\alpha > 1$.

- Démonstration

b) Sur $]0,1]$

> Proposition 2 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
> f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement $\alpha < 1$.

- Démonstration

c) Plus généralement sur $]a,b]$

> Proposition 3 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
> f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement $\alpha < 1$.

- Démonstration
- De même $f : x \to \dfrac{1}{a-x \;\; ^{\alpha}}$ est intégrable sur $[b,a[$ si et seulement $\alpha < 1$

3.5. Exemples : justification d'intégrabilité

3.6. Exemples : justification d'intégrabilité et calcul de l'intégrale

3.7. Positivité améliorée

> Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}_+)$.
> Si f est intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f \quad = 0$, alors f est identiquement nulle.

- Démonstration

4. Changement d'inconnues

4.1. rappel du thorème de MPSI.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1 \ [\alpha,\beta],[a,b]$.

Alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

- Méthode pratique.

4.2. Le théorème pour un intervalle quelconque

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C} \ ]a,b[,\mathbb{K}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1 \ ]\alpha,\beta[,]a,b[$, bijective où $a = \lim\limits_{\alpha} \varphi$ et $b = \lim\limits_{\beta} \varphi$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

- Méthode pratique, exemple

5. Intégration par partie

Théorème : Soit $f, g \in \mathcal{C}^1 \ ]a,b[,\mathbb{K}^{\ 2}$.

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule suivante entraîne l'existence du troisième et l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

où $[f(t)g(t)]_a^b = \lim\limits_{\substack{t\to b\\<}} f(t)g(t) - \lim\limits_{\substack{t\to a\\>}} f(t)g(t)$

6. Intégration des relations de comparaison

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$.

On suppose que $f \underset{x\to b}{=} o(g)$.

❋ Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$

❋ Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ diverge et $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$

On a les mêmes propriétés en remplaçant o par O.

Théorème 2 : Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$.

On suppose que $f \underset{x\to b}{\sim} g$.

- ❋ $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.
- ❋ Si elles convergent : $\displaystyle\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$
- ❋ Si elles divergent : $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$

- Démonstration du théorème 2