Ensembles et applications

Ensembles

▷ 1 Calcul algébrique avec des ensembles

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

▷ 2 Trace d'une partition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E. On suppose que ces parties sont deux-à-deux disjointes et que leur réunion vaut E.

1) Soit B une partie quelconque de E. On pose $A'_k = A_k \cap B$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Montrez que les parties A'_k sont deux-à-deux disjointes et calculer leur réunion.

2) Illustrer par un schéma.

▷ 3 Calcul algébrique avec des ensembles II

Soit X et Y deux parties d'un ensemble Z.

1) Représenter sur un schéma l'ensemble

$$(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}).$$

2) Simplifier son écriture.

▷ 4 Pour s'exercer à raisonner rigoureusement

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer **soigneusement** les équivalences suivantes :

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B.$$

► 5 Une égalité par double inclusion

Soit X, Y, Z trois parties de E. On souhaite montrer que

$$(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (Z \cup \overline{X}) = (X \cup Y) \cap (Z \cup \overline{X}).$$

1) Démontrer qu'entre ces deux ensembles, une inclusion est évidente.

2) Démontrer l'autre inclusion.

► 6 Démontrer une égalité par deux approches

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et que $A \cap B = A \cap C$.

1) Démontrer que $B \subset C$ puis que $B = C$.

2) Démontrer successivement que $B = B \cup (A \cap B)$, que $B = (A \cup B) \cap (B \cup C)$, que $B = C \cup (A \cap B)$ et enfin que $B = C$.

▷ 7 Là encore, la rigueur est de mise

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \implies A = B.$$

► 8

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$A \setminus B = B \setminus A \iff A = B.$$

► 9 Fonctions indicatrices et opérations sur les ensembles

Soit A et B deux parties de E.

1) Montrer que : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}(A)$.

2) Montrer que : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \,.\, \mathbb{1}_B$.

3) Montrer que : $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A \,.\, (1 - \mathbb{1}_B)$.

4) Montrer que : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Image directe, image réciproque

► 10 Propriétés de l'image directe

Soit $f : E \to F$, A et B deux parties de E.

1) Établir que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (on reviendra aux définitions et on procédera par double inclusion)

2) Démontrer ensuite que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3) Montrer que si f est injective, cette dernière inclusion est une égalité. Trouver un exemple de fonction non injective et d'ensembles A et B pour lesquels cette inclusion est stricte.

► 11

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

1) Montrer que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$. Construire un exemple où cette inclusion est stricte. Montrer que cette inclusion est toujours une égalité lorsque f est surjective.

2) Montrer que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$. Construire un exemple où cette inclusion est stricte. Montrer que cette inclusion est toujours une égalité lorsque f est injective.

Applications injectives, surjectives, bijectives

▷ 12

Soit f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n + 1 \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ n - 1 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Étudier l'injectivité et la surjectivité de chacune de ces applications.

2) Proposer des applications $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ayant les mêmes règles d'association que f et g et qui soient bijectives.

3) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

► 13 Une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (2x+y, x-y). \end{array}$

Démontrer que f est bijective et préciser sa bijection réciproque f^{-1}.

► 14 ♠ Un peu d'arithmétique

Soit f l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2, \quad f\big((p,q)\big) = p + q\sqrt{2}.$$

1) Démontrer que f est injective (on pourra procéder par l'absurde ; on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2) Démontrer que f n'est pas surjective.

► 15

Dire en justifiant si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Après cela, modifier si nécessaire les ensembles de départ ou d'arrivée pour les transformer en bijections.

1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto 2x \end{array}$

2) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 - 2x + 4 \end{array}$

3) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x+2| \end{array}$

4) $f : \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{array}$

5) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (\mathrm{e}^x, x + \ln(y)) \end{array}$

6) $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \mathrm{e}^z \end{array}$

► 16

Considérons les ensembles $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$
et $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$.

1) Représenter ces deux ensembles dans le plan complexe.

2) Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \Pi \longrightarrow D \\ z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

est bien définie.
(vous justifierez que, pour tout $z \in \Pi$, $f(z)$ existe et appartient à D).

3) Montrer que f est une bijection.

► 17

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer les implications suivantes :

a. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective ;

b. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a. Démontrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

b. En déduire que f est bijective et préciser f^{-1}.

► 18

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère

$$h : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \times G \\ x \longmapsto \big(f(x), g(x)\big). \end{array}$$

1) Montrer que si f est injective ou si g est injective, alors h est injective.

2) Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont.

3) Les réciproques sont-elles vraies ?

► 19

Soit E, F, G et H quatre ensembles et trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$.

Prouver que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont toutes les trois bijectives.