Études de fonctions

I Plan d'étude d'une fonction

I.1 Notion de fonction. Domaine de définition.

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un procédé permettant d'associer à certains nombres réels un autre nombre réel. Une telle fonction est, la plupart du temps, donnée par une **règle d'association** de la forme

$$f: \quad x \longmapsto \left(\begin{array}{c}\text{expression}\\ \text{dépendant de } x\end{array}\right).$$

Dans cette écriture, f est le **nom de la fonction,** et l'« expression dépendant de x » est notée $\boldsymbol{f(x)}$**.**

Par exemple, l'écriture $f: x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2 - 2$ définit la fonction f, qui associe à tout réel x le réel $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 - 2$. Le nombre 5 est transformé par la fonction f en $\mathrm{e}^5 + 23$; on écrit donc $f(5) = \mathrm{e}^5 + 23$.

Attention ❢ **On ne dit pas « la fonction $f(x)$ » mais « la fonction f ».** Ainsi, on ne peut pas dire « la fonction x^2+1 ». On dira en revanche « la fonction $x \mapsto x^2+1$ » (ce qui se lit « x donne x^2+1 »).

Rem. ◇ Une règle d'association peut être réécrite en choisissant une autre lettre pour la variable. On dit que **la variable est muette.** Ainsi, toutes les écritures suivantes :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2 - 2 \quad \text{et} \quad t \longmapsto \mathrm{e}^t + t^2 - 2 \quad \text{mais aussi (!)} \quad f \longmapsto \mathrm{e}^f + f^2 - 2$$

désignent la **même** fonction.

Il arrive souvent que l'expression $f(x)$ n'existe pas pour toutes les valeurs de x. La première étape de l'étude d'une fonction consiste donc à déterminer les réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Déf. • Domaine de définition d'une fonction
Le **domaine de définition d'une fonction** f est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ existe. On le note $\mathscr{D}_f$.

***Exercice* 1** ► Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$, **3)** $u: x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{x-4}}$,

2) $g: x \mapsto \sqrt{x^3 - x^2 - 6x}$, **4)** $v: x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$.

I.2 Images et antécédents

Déf. • Image et antécédents
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1) Soit x un réel appartenant au domaine de définition de f.
L'image de x par f est ______________________
2) Soit t un réel quelconque.
Un antécédent de t par f est un ______________________

Représentation graphique

Rem. ◇ Un réel x admet 0 ou 1 image par une fonction f donnée. Un réel t peut admettre 0, 1, plusieurs, voire une infinité d'antécédents par une fonction f.

Méthode ✎ Chercher l'image de a par f, c'est *calculer* $f(a)$. Chercher le(s) antécédent(s) de a par f, c'est *résoudre l'équation* $f(x) = a$ d'inconnue x.

***Exercice* 2** ► Soit $\varphi: x \mapsto 4\sqrt{1-x^2}$. Est-ce que 2 admet des images par φ ? Des antécédents ?

Déf. • Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1) On dit que f **est définie sur l'intervalle I** lorsque $f(x)$ existe pour tout x appartenant à I, autrement dit quand

______________ ou encore ______________

2) On dit que f **est à valeurs dans l'intervalle J** lorsque $f(x)$ appartient à J pour tout réel x appartenant au domaine de définition de f :

____

Représentation graphique :

Attention **Ne jamais confondre ces deux notions.** La première concerne la variable x de la fonction, la deuxième son image $f(x)$ par la fonction.

Exercice **3** ► Quand on dit que « la racine carrée d'un réel est toujours positive », que dit-on concernant la fonction racine carrée ?

Exercice **4** ► Proposez plusieurs intervalles sur lesquels la fonction $f : 1-\sqrt{2x-1}$ est définie. Montrez que f est à valeurs dans $]-\infty, 1]$. Est-ce que d'autres intervalles peuvent convenir ?

I.3 Variations d'une fonction

Une fonction étant donnée, on souhaite savoir sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante etc. L'outil mathématique le plus couramment utilisé pour répondre à cette question est la **dérivation.**

I.3.1 Dérivation sur un intervalle ; opérations sur les fonctions

Nous rappellerons dans le paragraphe I.3.3 ce que signifie pour une fonction « être dérivable en un point » ainsi que l'interprétation graphique associée. Nous nous concentrerons pour l'instant sur l'aspect calculatoire.

Avant de se lancer dans un calcul de dérivée, il faut se poser la question : « **la fonction est-elle dérivable sur la totalité de son domaine de définition ?** ». La plupart du temps, la réponse sera « oui ». Pour l'instant, nous nous contenterons du principe informel suivant :

Lorsqu'une fonction est fabriquée à partir de fonctions usuelles **autres que la racine carrée, les fonctions puissance α avec $0 < \alpha < 1$ et la fonction valeur absolue,** cette fonction est dérivable sur la totalité de son domaine de définition.

Ex. ✻ Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{2+\ln(x^2+x-1)}{1-x^2}$ est dérivable sur la totalité de son domaine de définition. En revanche $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x-1}$ pose des problèmes à ce sujet à cause de la racine carrée ; nous verrons plus bas comment les traiter.

Rem. ◇ D'autres fonctions « problématiques » viendront s'ajouter à la racine carrée et aux puissances non entières au cours de cette année, en particulier les fonctions trigonométriques réciproques arc-cosinus et arc-sinus.

Une fois ceci fait, on part de la connaissance des dérivées usuelles et on utilise les formules d'opérations sur les dérivées pour obtenir la dérivée de la fonction. On rappelle les dérivées à connaître :

Fonction f	$f(x)$	définie sur	à valeurs dans	non dérivable en	$f'(x)$
Puissances entières	x^n $(n \in \mathbb{N})$				
	$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$				
Puissances non entières	x^α $(0 < \alpha < 1)$				
	x^α $(\alpha > 1)$				
	x^α $(\alpha < 0)$				
Racine carrée	$\sqrt{x}$				
Exponentielle	e^x				
Logarithme	$\ln(x)$				
Cosinus	$\cos(x)$				
Sinus	$\sin(x)$				
Valeur absolue	$\lvert x \rvert$				

Astuce ➾ Toutes les fonctions puissances se dérivent à l'aide de la même formule :

$$\frac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Pour dériver $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, on remarque que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et on utilise la formule précédente en remplaçant α par $-n$.

Pour fabriquer d'autres fonctions que les fonctions usuelles, on combine ces dernières à l'aide d'**opérations sur les fonctions.** Rappelons ces opérations.

Déf. • Opérations sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, λ une constante.

1) Le **produit de f par λ**, noté λf, est la fontion $x \mapsto \lambda f(x)$.
Il est défini sur ______________

2) La **somme de f et g**, notée $f+g$, est la fonction $x \mapsto f(x)+g(x)$.
Elle est définie sur ______________

3) Le **produit de f et g**, noté $f\,g$, est la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$.
Il est défini sur ______________

4) Le **quotient f par g**, noté $\dfrac{f}{g}$, est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Il est défini sur ____

On peut ensuite utiliser les formules d'opérations sur les dérivées :

Thm • Opérations sur les dérivées

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur la totalité de leur domaine de définition, λ une constante.
Alors les fonctions λf, $f+g$, $f\,g$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur la totalité de leur domaine de définition et on a

$$(\lambda f)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' =$$
$$(f+g)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$(f\,g)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' =$$

Attention ❢ Le symbole prime ($'$) est réservé aux fonctions. Toutefois, en pratique, on dérive des expressions dépendant d'une variable. On introduit une autre notation utile au calcul :
Quand la variable s'appelle x, on pourra écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$ en remplacement de $f'(x)$.
Par exemple :
- On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$ **mais pas** $(2x)' = 2x$.
- On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\,\sin(x)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\,\sin(x) + x\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(x)\big)$
$= \sin(x) + x\,\cos(x)$.

Évidemment, quand la variable s'appelle t, on utilisera $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ etc.

***Exercice* 5** ► Dériver les fonctions suivantes en précisant où elles sont dérivables :

$$f : x \mapsto (3x^2 - x)\,\ln(x), \quad g : x \mapsto \frac{1}{2+\sin(x)}, \quad h : x \mapsto \frac{x-1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On introduit une nouvelle opération sur les fonctions : la **composition.** On dit que l'on compose deux fonctions quand on applique l'une des deux fonctions au résultat fourni par l'autre.

Déf. • Composée de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **composée de g par f** et on note __________ (notation qui se lit « g rond f ») la fonction
____
Elle est définie sur ____

D'après la définition, on aura donc $(g \circ f)(x) =$ ______________________

Illustration :

***Exercice* 6** ► Déterminer le domaine de définition et la règle d'association des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ lorsque :
1) $f : x \mapsto 3x$ et $g : t \mapsto \sin(t)$,
2) $f : t \mapsto \mathrm{e}^t + 1$ et $g : X \mapsto X^4$,
3) $f : x \mapsto \ln(x) - 1$ et $g : r \mapsto \sqrt{r}$.

Voyons comment dériver des fonctions composées dans les cas simples.

Thm • Théorème de dérivation des fonctions composées

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur la totalité de leur domaine de définition.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur la totalité de son domaine de définition et on a

$$(g \circ f)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Écrite avec des expressions, cette formule devient

____

***Exercice* 7** ► Soit u une fonction dérivable sur son domaine de définition. Dériver les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln\big(u(x)\big), \quad x \mapsto \cos\big(u(x)\big), \quad x \mapsto \big(u(x)\big)^n.$$

***Exercice* 8** ► Dériver les fonctions suivantes :

$$u : x \longmapsto \sin\!\left(3x - \tfrac{\pi}{6}\right), \qquad \varphi : x \longmapsto \big(2x + \ln(2x+1)\big)^3,$$
$$v : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}, \qquad \psi : t \longmapsto \frac{1}{(t^2-1)^4}.$$

I.3.2 Détection des points « spéciaux »

Que faire lorsque certaines fonctions intervenant dans le calcul ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition complet ?

1) On repère les fonctions φ qui ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition complet ;

2) On rappelle en quel(s) point(s) a la fonction φ n'est pas dérivable ;
3) On détermine pour quelle(s) valeur(s) de la variable x l'argument de la fonction φ vaut a.

Les valeurs de x qu'on obtient ainsi seront appelées de **points « spéciaux ».**

– En un point spécial, **on ne sait pas si la fonction est dérivable ou non.** Pour trancher la question, il faut étudier ces points individuellement (cf. paragraphe suivant).
– En tous les autres points, la fonction est dérivable **de façon certaine.**

Exercice **9** ► Déterminer les éventuels points spéciaux des fonctions suivantes :

$$u:\ x\mapsto\sqrt{2x-1},\qquad v:\ x\mapsto\sqrt{x^3-2x^2+x},\qquad w:\ x\mapsto\sqrt{1+x^2}.$$

I.3.3 Nombre dérivé en un point

Pour savoir si une fonction est dérivable ou non en un point spécial, on revient à la définition de la dérivabilité en un point.

Déf. • Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point de $\mathcal{D}_f$.

1) On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement ________________ admet une limite **finie** lorsque x tend vers a.

2) Quand c'est le cas, on appelle **nombre dérivé de f en a** la limite obtenue. On la note **$f'(a)$.**

► **Pour étudier un point spécial a :**

1) On écrit le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$;
2) On effectue le changement de variable :

$$\begin{cases} h=x-a & \text{quand } x\to a \text{ ou } x\to a^+,\\ h=a-x & \text{quand } x\to a^-.\end{cases}$$

3) On détermine sa limite quand h tend vers 0 (ou 0^+), qui est la même que la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a.

Cette dernière limite sera *toujours* une forme indéterminée. Il faudra modifier son expression en vue de lever l'indétermination (voir la partie sur le calcul de limites).

Exercice **10** ► Déterminer si les fonctions $f: x\mapsto\sqrt{x+2}$ et $g: x\mapsto x\sqrt{x}$ sont dérivables en leurs points spéciaux.

I.4 Tableau de variations et limites

I.4.1 Monotonie et signe de la dérivée

► **Étude d'un exemple :** Variations de la fonction $f: x\mapsto\sqrt{\frac{x^2}{x-1}+x}$.

Le sens de variation d'une fonction est très directement lié au signe de sa dérivée, comme on le rappelle dans le théorème suivant.

Thm • Monotonie et signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
1) Si $f'=0$ sur I, alors f est constante sur I.
2) Si $f'\geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
3) Si $f'>0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
4) Si $f'\leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
5) Si $f'<0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Les théorèmes permettant d'obtenir la stricte croissance ou la stricte décroissance (ce qui nous intéresse habituellement !) peuvent même être généralisés :

Thm • Si f est une fonction continue sur I, que f est dérivable sur I **privé d'un nombre fini de points** et que $f'>0$ sur cet ensemble, alors f est strictement croissante sur l'intervalle I **tout entier.** De même, si $f'<0$ sur cet ensemble, alors f est strictement décroissante sur I.

Ce sont ces théorèmes qui permettent de dresser le tableau de variation d'une fonction en étudiant sa dérivée. En pratique :

1) On étude la dérivabilité d'une fonction et on calcule sa dérivée ;
2) On détermine où la dérivée **s'annule** ;
3) On obtient le signe de la dérivée en **calculant une valeur de $f'(x)$ dans chaque intervalle délimité par les annulations.**

Cette façon de faire est légitime dès que la dérivée f' est une fonction continue. Ce sera presque toujours le cas en pratique.

I.4.2 Étude des limites

Une fois le tableau de variation de la fonction dressé, il convient d'y ajouter les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition :

– Si la borne appartient au domaine de définition, comme la fonction étudiée sera quasiment toujours continue en ce point, il suffit d'indiquer la valeur de la fonction en ce point ;
– Si la borne n'appartient pas au domaine, il faut mener une étude de limite.

Les **théorèmes d'opérations sur les limites** constituent l'outil le plus simple pour déterminer une limite.

Thm • Théorème d'opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I, a un point de I ou une borne de I (éventuellement infinie).

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$.

1) Pour la limite de la somme de f et g au point a, on a :

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$\ell'=+\infty$	$\ell'=-\infty$
$\ell\in\mathbb{R}$			
$\ell=+\infty$			
$\ell=-\infty$			

2) Pour la limite du produit de f par g au point a, on donne le tableau **pour les fonctions positives** dans un premier temps :

$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}_+^*$	$\ell'=0^+$	$\ell'=+\infty$
$\ell\in\mathbb{R}_+^*$			
$\ell=0^+$			
$\ell=+\infty$			

Quand f et g sont de signe quelconque, le tableau reste valable à condition d'ajuster le signe de la conclusion $+\infty$ à l'aide de la règle des signes.

3) Pour la limite du quotient de f par g au point a, on donne le tableau **pour les fonctions positives :**

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}_+^*$	$\ell'=0^+$	$\ell'=+\infty$
$\ell\in\mathbb{R}_+^*$			
$\ell=0^+$			
$\ell=+\infty$			

Quand f et g sont de signe quelconque, même remarque pour le produit.

Deux remarques importantes :

- **On n'effectue pas de calculs à l'aide de la notation lim.** Cette notation sert uniquement à énoncer une hypothèse ou une conclusion. Ainsi, les « chaînes de limites » sont à bannir.

  On n'écrit <u>jamais</u> : $\lim\limits_{x\to\cdots}(\cdots)=\lim\limits_{x\to\cdots}(\cdots)=\cdots$

  On dispose de la notation $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$ qui est synonyme de $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.
- Il reste quatre situations où ces théorèmes ne permettent pas de conclure. Ce sont les **formes indéterminées** que l'on note :

  Il faut dans ce cas tenter de **lever la forme indéterminée** à l'aide de raisonnements plus subtils.

► **Comment lever une forme indéterminée ?** Cela peut être un problème difficile. On dispose pour l'instant de trois outils (nous en verrons d'autres plus tard) :

1) **Dans une somme de termes, factoriser par le terme prépondérant.** Adapté en particulier aux polynômes et aux quotients de polynômes... mais pas seulement !

2) **Utiliser des limites de croissances comparées.** Ce sont des limites usuelles, à connaître, qui affirment qu'une fonction « l'emporte sur une autre ».
Nous en retiendrons trois :

où α et λ sont deux constantes strictement positives.

3) **Utiliser des limites de taux d'accroissements.** Ce sont des conséquences de la définition du nombre dérivé en un point. Les trois qu'on rencontre le plus souvent sont

La première provient de $\exp'(0)=e^0=1$,
la deuxième, de $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$
et la dernière, de $\sin'(0)=\cos(0)=1$.

Exercice **11** ► Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-1}{x^3-3x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3x^3}{2x^2+1}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x+x^2}{x^3+\sqrt{x}}$.

Exercice 12 ► Déterminer des expressions suivantes :

1) $x\ln(x)$ en $+\infty/0^+$, **3)** $x\,\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty/-\infty$,

2) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$ en $+\infty/0^+$, **4)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)}$ en $0^+/+\infty$.

Exercice 13 ► Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x\ln(x)+\mathrm{e}^{-x}-x^2}{2x\left(x-\ln(x)\right)}$

Exercice 14 ► Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x+x^2}$.

Passons maintenant au cas des fonctions composées.

Thm • Théorème de composition de limites

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, g définie sur un intervalle J,
a un point de I ou une borne de I (éventuellement infinie).

Si on a ______ ______ } alors ______

Exercice 15 ► Terminer le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}+x}$.

Exercice 16 ► Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

I.5 Branches infinies

Il arrive souvent que sur une courbe représentative les abscisses ou les ordonnées des points puissent tendre vers l'infini : la courbe présente des points qui se trouvent à une distance arbitrairement grande de l'origine du repère. On dit alors que **la courbe admet une branche infinie.** Ces branches infinies peuvent avoir diverses allures ; nous allons décrire les plus simples.

Déf. • Branche infinie

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
a une borne ouverte (éventuellement infinie) de son domaine de définition.

On dit que **la courbe de f admet une branche infinie en a** situations lorsqu'au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1) $a = \pm + \infty$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Lorsque seule une des deux quantités a et $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ est infinie, la branche infinie est simple.

Déf. • Asymptotes horizontales et verticales

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
a une borne ouverte (éventuellement infinie) de son domaine de définition.

On suppose que f admet une branche infinie en a.

1) La courbe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ quand a est infini et que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ est un nombre fini ℓ.

2) La courbe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$ quand a est fini et que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Illustration

Exercice 17 ► Étudier les branches infinies de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+5}{1-3x}$.

Quand a et $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ sont toutes les deux infinies, les situations sont plus variées. Seules les asymptotes obliques sont au programme.

Déf. • Asymptote oblique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
a une borne infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) de son domaine de définition,
m un réel non nul, p un réel quelconque.

On dit que **la courbe de f admet en a une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$** lorsque

______

Rem. ◇ Le cas $m = 0$ est exclu de cette définition car il correspond à une asymptote *horizontale*.

Illustration

Exercice **18** ► Montrer que la courbe de la fonction $g: x \longmapsto \dfrac{2x^2+3x-1}{3x+1}$ admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$.

Il est rare de pouvoir deviner ainsi les valeurs des constantes m et p adaptées à une fonction donnée. Pour détecter une asymptote oblique, on procède ainsi :

1) On constate que $a = \pm\infty$ et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

2) On étudie $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite est **finie et non nulle**, on poursuit l'étude. Sinon la courbe n'admet pas d'asymptote oblique.

3) On étudie $p = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)$. Si cette limite est finie, alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$.
Sinon elle n'admet pas d'asymptote.

4) On peut éventuellement étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (mx+p)\big) = 0^+$, la courbe est *au dessus* de son asymptote ; si cette limite vaut 0^-, la courbe est *en dessous* de son asymptote.

Exercice **19** ► Reprendre l'exemple précédent en appliquant la méthode ci-dessus.
Déterminer la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

I.6 Tracé de la courbe représentative

Une fois l'étude d'une fonction menée, il est courant de tracer l'allure de sa courbe représentative. Rappelons de quoi il s'agit.

Déf. • Courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient

Les calculatrices et les ordinateurs tracent les courbes de fonctions en dressant un grand tableau de valeurs de la fonction et en plaçant les uns derrière les autres les points correspondants. **Il n'est pas question de procéder ainsi lorsqu'on travaille à la main.**

Lorsqu'on trace l'allure d'une courbe, le but n'est pas d'obtenir la courbe la plus exacte possible mais de **mettre en évidence de façon visuelle les propriétés essentielles de la fonction.**

La méthode de tracé est la suivante :

1) **On repère sur l'axe des abscisses le domaine de définition de la fonction.** La courbe est comprise dans les bandes verticales qui traversent ce domaine.

2) On met en place le **comportement de la fonction aux bornes du domaine de définition :** point terminal muni de sa tangente, ou bien asymptotes et position relative de la courbe.
On peut également placer les **points remarquables** que l'on a rencontrés (extrema locaux, point d'inflexion) et en ajouter quelques un particulièrement simples (point d'abscisse 0 par exemple). **Chaque point placé est impérativement accompagné de sa tangente.**

3) On trace une courbe la plus « naturelle » possible en respectant ces caractéristiques.

► **Comment tracer la tangente à la courbe en un point ?**

Propr. • Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point de $\mathscr{D}_f$ où la fonction f est dérivable. Alors la courbe de la fonction f admet une tangente au point a qui est la droite :

1) passant par le point M de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$,

2) dont le coefficient directeur est $m = f'(a)$.

Il n'est pas nécessaire de déterminer l'équation de la tangente pour la tracer ! Il suffit d'avoir compris ce qu'est un coefficient directeur.

On rappelle tout de même l'équation de la tangente à la courbe de f au point a :

► **Et si la fonction n'est pas dérivable en a ?**

La plupart du temps (mais pas toujours !) la courbe de la fonction admettra une tangente verticale en ce point.

Propr. • Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point de $\mathscr{D}_f$ où la fonction f n'est dérivable. Si les deux conditions suivantes sont réunies :

1) la fonction f est continue en a,

2) la limite du taux d'accroissement de la fonction f en a est infinie, alors la courbe de la fonction f admet une tangente verticale au point a.

► **Qu'est-ce qu'un point d'inflexion ? Comment le détecter ?**

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente : elle se trouve en-dessous de sa tangente à gauche du point de contact et au dessus à droite de ce point, ou inversement.

Thm • Condition suffisante pour les points d'inflexion

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point de $\mathscr{D}_f$ qui n'en est pas une borne. On suppose f deux fois dérivable.

Si f'' s'annule en a en changeant de signe de part et d'autre de a, alors la courbe de f admet en a un point d'inflexion.

II Fonctions usuelles : rappels et compléments

II.1 Fonction racine carrée

Si a est un réel positif, le théorème de la valeur intermédiaire permet de prouver qu'il existe un unique réel *positif* x_0 solution de l'équation $x^2 = a$.

Déf. • Soit a un nombre **réel positif.** La racine carrée de a est l'unique réel **positif** dont le carré est égal à a.

Rem. ◇ Si a est strictement négatif, on perd l'existence de la racine carrée.
Si l'on n'impose pas à la racine carrée d'être positive, on perd son unicité.

Propr. • Propriétés algébriques

1) Pour tout réel a **positif**, $\sqrt{a} \geqslant 0$.

2) Pour tout réel a **positif**, $\left(\sqrt{a}\right)^2 =$ ____ (si $a < 0$, alors $(\sqrt{a})^2$ __________)

3) Pour tout réel x quelconque, $\sqrt{x^2} =$ ____

4) Pour tous réels **positifs** a et b ($b \neq 0$ pour le deuxième) et tout entier naturel n,

$$\sqrt{a\_\_b} = \sqrt{a}\,\_\_\,\sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \qquad\qquad \sqrt{a^n} = \_\_\_\_\_\_$$

Propr. • Propriétés analytiques

1) La fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$.

2) Elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ ________

3) La fonction racine carrée est dérivable sur __________ et

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) =$$

Sa courbe admet une ________________ verticale au point d'abscisse 0.

Démo. ☞ Les deux premiers points sont des conséquences de la théorie des bijections. Le troisième s'obtient en étudiant la limite du taux d'accroissement en a grâce à la technique de la quantité conjuguée.

Tableau de variation + signe **Allure de la courbe**

II.2 Fonction logarithme népérien

Déf. • On appelle **fonction logarithme népérien** et on note **ln** (mais on lit « log ») l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Propr. • **1)** $\ln(1) =$ ____

2) ln est définie sur __________ dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est donnée par

$$\forall\, x > 0, \quad \ln'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) ln est strictement croissante sur ____________

4) Signe de $\ln(x)$: $\ln(x) > 0 \iff$ ______________
et $\ln(x) < 0 \iff$ ______________

Démo. ☞ Conséquences immédiates de la définition.

Thm • Propriété fondamentale du logarithme népérien

Pour tout réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \_\_ b) = \ln(a) \_\_ \ln(b).$$

Démo. En dérivant la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$.

Coroll. • Soit a, b deux réels strictement positifs, n un entier relatif. Alors :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \ln\left(a^n\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Démo. Sur les notes de cours.

Thm • Limites impliquant le logarithme

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \_\_\_\_\_\_$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \_\_\_\_\_\_$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \_\_\_\_\_\_$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

Démo. Conséquences de la propriété fondamentale du logarithme, en utilisant les théorèmes abstraits d'analyse : limite monotone, unicité de la limite, composition de limites. Voir le chapitre *Limites et continuité*.

On retiendra bien :
ln est définie sur ________ à valeurs dans ________

Tableau de variation **Allure de la courbe**

II.3 Logarithmes de base a

Déf. • Soit $a > 0$ et $x > 0$. On appelle **logarithme de base a de x** le nombre, noté $\log_a(x)$ **:**

$$\log_a(x) =$$

Rem. ◇ Le logarithme de base e est le logarithme népérien.
Le logarithme de base 10 est le logarithme décimal. Il est beaucoup utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).
Le logarithme de base 2 est utilisé en informatique.

Thm • Le logarithme de base a vérifie la même relation fondamentale que le logarithme népérien :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0, \quad \log_a(x \_\_ y) = \log_a(x) \_\_ \log_a(y).$$

Démo. Immédiate, à faire en exercice.

Rem. ◇ Les conséquences vues pour la fonction ln restent vraies pour $\log_a$.
Les limites sont les mêmes **quand $a > 1$,** opposées quand $0 < a < 1$.

Courbes de ln, $\log_2$ et $\log_{10}$ **Courbe de $\log_{1/e}$**

II.4 Fonction exponentielle

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle est donc *bijective* de $]0,+\infty[$ dans $]\lim\limits_{0^+}\ln, \lim\limits_{+\infty}\ln[=]-\infty,+\infty[$.
On peut donc introduire sa bijection réciproque :

Déf. • Fonction exponentielle

On appelle **fonction exponentielle** et on note **exp** la bijection réciproque de la fonction ln.

La courbe de la fonction exponentielle est donc symétrique de celle du logarithme par rapport à la droite d'équation $y = x$. En conséquence :

exp est définie sur ________, à valeurs dans ________

Tableau de variation + signe **Allure de la courbe**

Les propriétés analytiques de la fonction exponentielle découlent de celles du logarithme grâce à la théorie des bijections. On peut alors démontrer :

Thm • **1)** La fonction exp est strictement croissante sur ______

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = $ ______ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = $ ______

3) La fonction exp est dérivable sur ______ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)\big) = \_\_\_\_\_\_$$

Démo. ↪ Découle de la théorie des bijections.

Il ne reste plus que les limites de croissances comparées :

Thm • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$

Démo. ↪ Par composition de limites à partir de celles du logarithme.

Du côté de l'algèbre, les propriétés suivantes découlent de la définition de la fonction exponentielle :

Propr. • **1)** exp est définie sur $]-\infty, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$,

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$:

$$\exp\big(\ln(t)\big) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \exp(x) = t \iff \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\ln\big(\exp(x)\big) = \_\_\_\_\_\_$$

3) $\exp(0) = 1$.

Thm • Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tout x et y réels, on a

$$\exp(x \_\_ y) = \exp(x) \_\_ \exp(y).$$

Démo. ↪ À partir de la propriété fondamentale du logarithme.

Cette propriété montre que les calculs sur les exponentielles vérifient des règles analogues à celles régissant les exposants : **ceci légitime la notation e^x pour $\exp(x)$.**

Coroll. • On en déduit que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{e}^{-x} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \mathrm{e}^{nx} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Démo. ↪ Admise (mais laissée en exercice).

II.5 Exposants entiers

Déf. • Puissances où l'exposant est un entier

Soit x un nombre réel quelconque et n un entier naturel non nul.

On convient que : $x^0 = 1,$

on pose : $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}},$

et, **si $x \neq 0$ seulement :** $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}}.$

Ces notations satisfont aux règles de calcul algébrique suivantes :

$$x^{n \_\_ p} = x^n \_\_ x^p \qquad x^{-n} = \_\_\_\_ \qquad x^{n-p} = \_\_\_\_ \qquad x^0 = \_\_\_$$

$$(x \_\_ y)^n = x^n \_\_ x^p \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^n = \_\_\_\_ \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \_\_\_\_ \qquad 1^n = \_\_\_$$

$$\left(x^n\right)^p = \_\_\_\_ \qquad x^1 = \_\_\_ \qquad 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \_\_\_\_\_\_ \\ 1 & \text{si } \_\_\_\_\_\_ \\ \text{(non défini)} & \text{si } \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

... à condition que chaque puissance existe, et que le dénominateur éventuel ne s'annule pas.

Question : est-il possible d'étendre les définitions à des exposants α non entiers, tout en préservant ces règles de calcul ? **Réponse :** oui, à condition de se limiter à des bases strictement positives.

II.6 Exposants non entiers

Soit x un réel **strictement positif** et n un entier quelconque. On remarque que l'on a

$$\ln(x^n) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \text{donc} \qquad x^n = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

en appliquant l'exponentielle de part et d'autre de l'égalité. L'expression $\mathrm{e}^{n\ln(x)}$ a un sens même si n n'est pas entier ce qui permet de généraliser l'écriture x^n.

Déf. • Puissances généralisées

Soit x un réel ____________ α un réel ____________

On définit x^α par

$$x^\alpha = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Propr. • Propriétés des puissances généralisées

1) $\forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\quad x^\alpha > 0.$

2) $\forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\quad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \ln(x)$

3) Toutes les propriétés des puissances vues plus haut restent vraies, pourvu que $x > 0$ et $y > 0$. En particulier, on a :

$$\forall x > 0,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta \quad \text{et} \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}.$$

4) $\forall x > 0,\quad x^{1/2} = \sqrt{x}.$

5) En 0^+ et en $+\infty$, les fonctions puissances généralisées ont les mêmes limites que les puissances entières. Pour α un exposant fixé :

si $\alpha > 0$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases}$ et si $\alpha < 0$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \end{cases}$

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

La dernière propriété explique les conventions suivantes :

Déf. • Puissances de 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On convient que : $0^\alpha = 0$ quand $\alpha > 0$
$0^0 = 1$
0^α n'existe pas quand $\alpha < 0$.

On peut maintenant achever l'étude des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$, où x varie tandis que l'exposant α est fixé.

Propr. • Fonctions puissances non entières $\boldsymbol{x \mapsto x^\alpha}$

Soit α un réel non entier. On considère la fonction puissance α

$$p:\ x \longmapsto x^\alpha.$$

Suivant la valeur de l'exposant α, p a les propriétés suivantes :

	définie sur	continue sur	dérivable sur	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha$
Si $\alpha > 1$	$[0,+\infty[$	$[0,+\infty[$	$[0,+\infty[$	$+\infty$	0^+
Si $0 < \alpha < 1$	$[0,+\infty[$	$[0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$+\infty$	0^+
Si $\alpha < 0$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	0^+	$+\infty$

Partout où p est dérivable, on a

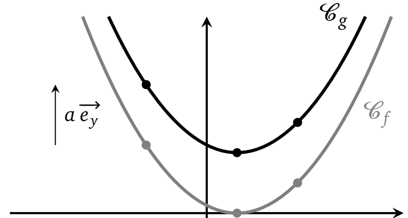
$$p'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\alpha\right) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

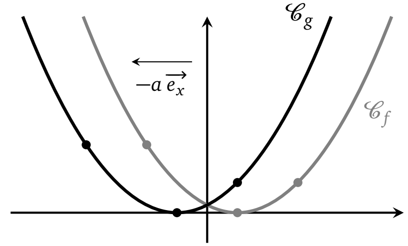
Allure des courbes, suivant la valeur de l'exposant $\boldsymbol{\alpha}$: Voir la feuille séparée.

III Courbes et transformations géométriques

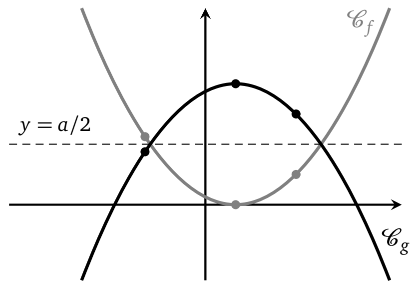
III.1 Fonctions associées



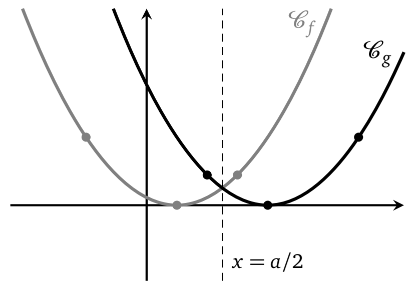
Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto f(x) + a}$
Translation de vecteur $a\,\overrightarrow{e_y}$
Effet sur les ordonnées : $y \mapsto y + a$
Effet sur les pentes : $m \mapsto m$



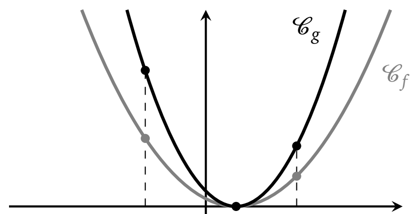
Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto f(x + a)}$
Translation de vecteur $-a\,\overrightarrow{e_x}$
Effet sur les abscisses : $x \mapsto x - a$
Effet sur les pentes : $m \mapsto m$



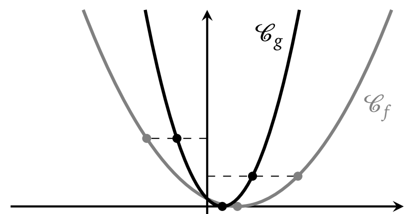
Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto a - f(x)}$
Symétrie d'axe d'équation $y = a/2$
Effet sur les ordonnées : $y \mapsto a - y$
Effet sur les pentes : $m \mapsto -m$



Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto f(a - x)}$
Symétrie d'axe d'équation $x = a/2$
Effet sur les abscisses : $x \mapsto a - x$
Effet sur les pentes : $m \mapsto -m$



Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto k \times f(x)}$
Affinité de base $(0x)$, de rapport k
Effet sur les ordonnées : $y \mapsto k \times y$
Effet sur les pentes : $m \mapsto k \times m$



Courbe de $\boldsymbol{g : x \mapsto f(k \times x)}$
Affinité de base $(0y)$, de rapport $1/k$
Effet sur les abscisses : $x \mapsto x/k$
Effet sur les pentes : $m \mapsto k \times m$

Partant de la courbe d'une fonction f, supposée connue, la courbe de certaines fonctions g, construites par une modification simple de l'expression de f, s'en déduit par une transformation géométrique simple. Les six cas illustrés sur la page précédente sont à connaître.

► **Comment tracer la courbe d'une fonction associée à f ?**

1) Tracer la courbe de f. Choisir quelques éléments de contrôle (points remarquables, asymptotes, tangentes).
2) Écrire $g(x)$ à l'aide de la fonction f.
3) Identifier la transformation géométrique correspondante.
4) Appliquer cette transformation aux éléments de contrôle (on peut travailler géométriquement ou sur les abscisses/ordonnées).
5) Tracer la courbe de g.

Il est souvent nécessaire de répéter le procédé plusieurs fois pour obtenir la fonction souhaitée. À ce sujet, la propriété géométrique suivante nous rendra des services :

Propr. • Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites perpendiculaires, Ω leur point d'intersection.
La composée des symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 est la symétrie centrale de centre Ω.

Illustration

Exercice **20** ► Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

$$\textbf{1)}\ x \mapsto \frac{(x-3)^2}{2}, \qquad \textbf{2)}\ x \mapsto 2-\ln(-1-x), \qquad \textbf{3)}\ x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}.$$

III.2 Fonctions paires, impaires, périodiques

Déf. • Fonctions paires, impaires, périodiques
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de domaine de définition $\mathscr{D}_f$.

1) On dit que f **est paire** lorsque :

2) On dit que f **est impaire** lorsque :

3) Soit $T \in \mathbb{R}$. On dit que f **est périodique de période T** (ou que f **est T-périodique**) lorsque :

Pour démontrer qu'une fonction est paire ou impaire, on calcule $f(-x)$ et on cherche à se ramener à $\pm f(x)$. Pour démontrer qu'une fonction est T-périodique, on calcule $f(x+T)$ et on doit obtenir $f(x)$.

Exercice **21** ► Que dire des fonctions suivantes ?

$$f: x \mapsto x\ln(1+x^2), \quad g: x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \quad h: x \mapsto \sqrt{x^3}, \quad u: x \mapsto \cos\left(3x+\tfrac{\pi}{3}\right).$$

Propr. • Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
1) Si f est paire, alors sa courbe est invariante par la symétrie d'axe (Oy).
2) Si f est impaire, alors sa courbe est invariante par la symétrie centrale de centre O.
3) Si f est T-périodique, alors sa courbe est invariante par la translation de vecteur $T\,\overrightarrow{e_x}$.

Important : Quand une fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0,+\infty[$: ses propriétés sur $]-\infty,0]$ s'en déduisent en utilisant la symétrie de la courbe.

De même, une fonction T-périodique s'étudie sur un intervalle de longueur T, de préférence $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. La courbe complète s'obtient en « recopiant » le fragment de courbe obtenu décalé vers la gauche et vers la droite de multiples entiers de T.

Au début de l'étude d'une fonction, on regarde toujours si elle est paire, impaire ou périodique dans le but de réduire le domaine d'étude.

IV Monotonie, équations et inéquations

Dans ce paragraphe, on revient sur la **définition précise de la monotonie** d'une fonction et on présente les liens que cette notion entretient avec la **résolution d'équations et d'inéquations** ainsi que la **fabrication d'inégalités intéressantes.**

IV.1 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Il n'est pas toujours possible de résoudre algébriquement une équation. Dans ce cas, les **théorèmes des valeurs intermédiaires** permettent d'obtenir l'existence et l'unicité de solutions. Toutefois, la valeur explicite de la solution n'est pas donnée par ces théorèmes : on obtient un intervalle où se trouve la solution, ce qui en donne une valeur approchée si l'intervalle est suffisamment petit.

Thm • Théorème des valeurs intermédiaires (version simple)
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que :
1) ______________________
2) ______________________________________
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution x_0 dans l'intervalle $[a, b]$. Si de plus ______________________________ alors cette solution est unique.

__Illustration__

Exercice **22** ► Montrer que l'équation $x\,\mathrm{e}^x = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 1]$. Y en a-t-il d'autres ?

Pour étudier le signe d'une dérivée f', il est d'usage de déterminer les points où f' s'annule puis de tester son signe entre les zéros. Cette pratique est légitime dès que f' est continue (ce qui est le cas dans la majorité des cas) :

Coroll. • Une fonction continue sur une intervalle et qui ne s'y annule pas garde un signe constant sur cet intervalle.

Démo. ➾ Sur les notes de cours (par l'absurde).

Thm • Théorème des valeurs intermédiaires (version généralisée)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de bornes $a < b$ (finies ou non, comprises ou non), λ un réel **fixé.** On suppose que :
1) ______________________
2) ____
Alors l'équation $f(x) = \lambda$, **d'inconnue** $\boldsymbol{x}$, admet une unique solution x_0 dans l'intervalle I privé de ses extrémités. Si de plus ______________________________ alors cette solution est unique.

__Illustration__

Exercice **23** ► Montrer l'existence et l'unicité d'un réel x_0 tel que $x_0 \ln(x_0) = 1$.

IV.2 Monotonie et comparaison de fonctions

Déf. • Monotonie d'une fonction sur un intervalle
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1) On dit que f **est croissante sur I** quand :

____

2) On dit que f **est décroissante sur I** quand :

____

3) On dit que f **est strictement croissante sur I** quand :

____

4) On dit que f **est strictement décroissante sur I** quand :

____

Ces définitions permettent d'appliquer des fonctions lorsqu'on souhaite démontrer des inégalités.

Exercice **24** ► Produire un encadrement de $a = \frac{7-\sqrt{7}}{5}$ par deux rationnels.

IV.3 Comparaison de fonctions

On rappelle d'abord quelques définitions de base :

Déf. • Relations entre fonctions sur un intervalle

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I, à valeurs réelles.

1) On dit que $\boldsymbol{f = g}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ lorsque ______________________

2) On dit que $\boldsymbol{f \leqslant g}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ lorsque ______________________

(on définit de manière analogue $f < g$ sur I, $f \geqslant g$ sur I etc.)

3) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est majorée par** $\boldsymbol{M}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ lorsque ______________

4) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est minorée par** $\boldsymbol{m}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ lorsque ______________

5) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est bornée sur** $\boldsymbol{I}$ quand ______________
____

Ilustrations

Certaines inégalités entre fonctions peuvent se démontrer en utilisant les règles de calcul sur les inégalités, en partant d'inégalités évidentes. Mais très souvent ces inégalités s'obtiennent à l'aide d'études de fonctions : **montrer que** $\boldsymbol{f \leqslant g}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ **revient à montrer que** $\boldsymbol{g - f \geqslant 0}$ **sur** $\boldsymbol{I}$**.** On peut étudier la fonction auxiliaire $\varphi = g - f$ sur cet intervalle.

- **Si φ se factorise, on peut dresser un tableau de signes.**
- **Sinon on peut étudier les variations de φ afin d'obtenir son signe.** Pour cela, il peut être nécessaire de dériver φ plusieurs fois de suite.

***Exercice* 25** ► Montrez que $\forall\, t \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Quand on cherche à montrer qu'une fonction est bornée à l'aide des règles de calcul sur les inégalités, il est d'usage de majorer sa valeur absolue. En effet :

Propr. • Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée sur I si et seulement $|f|$ est majorée sur I.

Démo. Sur les notes de cours.

Illustration

Cette approche se couple bien avec l'inégalité triangulaire :

Propr. • Inégalité triangulaire
Soit a et b deux nombres réels. Alors ______________________

Démo.

***Exercice* 26** ► Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(x) - 2x\cos(x)$ est bornée sur $[2, 4]$.

IV.4 Résolution d'équations et d'inéquations

Dans une résolution d'équations, on essaie le plus souvent de construire une chaîne d'équivalence. Seules certaines opérations, **aux hypothèses bien précises,** permettent de produire des équivalences. Dans ce qui suit, a, b et k sont des réels, I un intervalle.

Règle n° 1 : additionner est sans danger.

$$\begin{aligned} a=b &\iff a+k=b+k,\\ a\leqslant b &\iff a+k\leqslant b+k,\\ a<b &\iff a+k<b+k. \end{aligned}$$

Règle n° 2 : on peut multiplier, mais par un réel non nul, et il faut faire attention au signe pour les inégalités.

$$\begin{array}{lllll} \textbf{si } \boldsymbol{k\neq 0}, & a=b \iff k\times a=k\times b, & & & \\ \textbf{si } \boldsymbol{k>0}, & a\leqslant b \iff k\times a\leqslant k\times b & \text{et} & a<b \iff k\times a<k\times b, \\ \textbf{si } \boldsymbol{k<0}, & a\leqslant b \iff k\times a\geqslant k\times b & \text{et} & a<b \iff k\times a>k\times b. \end{array}$$

Règle n° 3 : on peut appliquer une fonction, à condition qu'elle soit strictement monotone et de retourner les inégalités dans le cas décroissant.

Si f est **strictement monotone** sur I, que $a\in I$ et que $b\in I$,

$$a=b \iff f(a)=f(b).$$

Si f est **strictement croissante** sur I, $a\in I$ et que $b\in I$,

$$a\leqslant b \iff f(a)\leqslant f(b) \qquad \text{et} \qquad a<b \iff f(a)<f(b).$$

Si f est **strictement croissante** sur I, $a\in I$ et que $b\in I$,

$$a\leqslant b \iff f(a)\geqslant f(b) \qquad \text{et} \qquad a<b \iff f(a)>f(b).$$

Prolongements

1) Les règles s'adaptent aux inégalités $\geqslant$ et $>$ de façon immédiate.
2) Soustraire k, c'est additionner $(-k)$: la règle n° 1 s'applique.
3) Diviser par k, c'est multiplier par $\frac{1}{k}$: la règle n° 2 s'applique.
4) Passer à l'inverse, c'est appliquer la fonction $X\mapsto\frac{1}{X}$: la règle n° 3 s'applique.

Exercice **27** ► Résoudre les inéquations et l'équation suivantes :

1) $\ln(x^2-1)\leqslant\ln(2x+1)$, **2)** $1+\sqrt{1+x}\leqslant\sqrt{8+x}$, **3)** $\sqrt{1+x}=x$.