Colles de mathématiques en PCSI 5

14 février 2012

Programme

Calcul intégral : propriétés usuelles et calcul d'intégrales.

Exercice n° 1

1. Soient $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. En considérant le trinôme :

$$P(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 \mathrm{d}x,$$

prouver l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\right).$$

2. Prouver qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont liées sur $\mathbb{R}$.

3. (Application directe) Soient $f, g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, positives et telles que $fg \geqslant 1$. Prouver que

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant 1.$$

Exercice n° 2

Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Prouver que :

$$\left(\int_a^b f(x)^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup\{f(x),\ x \in [a,b]\}.$$

Exercice n° 3

1. Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Prouver que

$$\left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Prouver qu'il en va de même pour toute fonction en escalier. En déduire, par approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier, que le résultat reste vrai pour toute fonction continue par morceaux. C'est le *lemme de Riemann-Lebesgue.*

Exercice n° 4

Pour $x > 1$, on se propose de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I est bien définie.
2. On décide alors d'approcher I par des sommes de Riemann à pas constant. En utilisant l'identité : $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\alpha})(X - \mathrm{e}^{-i\alpha})$, prouver que la n-ième somme s'écrit :
$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{(x-1)(x^{2n}-1)}{x+1}\right).$$
Conclure.

Exercice n° 5

On utilisera ici le théorème de Heine qui permet d'affirmer qu'une fonction continue sur un segment est uniformément continue, ie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x, y \in I,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soient $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, continues. Prouver que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice n° 6

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $\forall x \in [a,b],\ g(x) > 0$.

1. Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
2. Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
3. (Application) Si f est définie et continue au voisinage de 0, déterminer la limite :
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice n° 7

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{j}{n}\right).$$

Exercice n° 8

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Prouver que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice n° 9

Simplifier
$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t.$$

Exercice n° 10

On pose ici $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Conparer I_n et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

2. Prouver que $(I_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. Chercher une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} pour tout k.

4. Prouver que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

5. Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$. Donner alors un équivalent simple de (I_n).

Exercice n° 11

1. Soit (f_i) une famille de fonctions convexes définies sur un intervalle (commun) I. On suppose que $\forall x \in I$, $\sup\{f_i(x)\}$ existe. Prouver alors que la fonction $x \in I \mapsto \sup\{f_i(x)\}$ est convexe sur I.

2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ minorée. Prouver qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. Nous la noterons $\tilde{f}$.

3. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et croissante. Montrer que :
$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
(On pourra commencer par le cas où f est en escalier.)

Exercice n° 12

Déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n.$$