Chapitre 6
Séries et familles sommables

1. Séries dans un espace vectoriel normé

1.1. Définitions

- Série, somme parielle, convergence, divergence
- Exemples
  - Séries géométriques Démonstration
  - Série harmonique Démonstration
  - Séries de Riemann Démonstration

1.2. Propriétés

- Propriété 1 : convergence du terme général Démonstration
- Propriété 2 : convergence de la série des restes d'une série convergenete
  Démonstration
- Propriété 3 : lien entre série et suite Démonstration

1.3. Propriétés algébriques

- Définition : opérations sur les séries
- Propriété 4 : convergence de la somme (du produit par un scalaire)
- L'application $\sum u_n \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc linéaire.

1.4. Absolue convergence

- Définition
- Théorème :
  si E est de dimension finie, l'absolue convergence entraîne la convergence
- Exemples
- Contre-exemple : la série harmonique alternée
- Formule de Stirling (démonstration admise).

1.5. Série exponentielle

a) Série exponentielle réelle, complexe

b) Exponentielle de matrices

c) Exemple : exponentielle d'une matrice nilpotente, d'une matrice diagonale

2. Compléments sur les séries numériques

2.1. Comparaison des séries à termes positifs

a) Prérequis sur les notions de o, O et $\sim$

b) Comparaison des termes généraux (rappels de M.P.S.I.)

c) Sommation des relations de comparaison

① Comparaison (o/O) des sommes partielles de deux séries dont l'une au moins diverge.

② Comparaison (o/O) des restes de deux séries convergentes.

③ Comparaison ($\sim$) des sommes partielles et des restes de deux séries de termes généraux équivalents.

d) Exemples d'applications

2.2. Règle de D'Alembert

a) Lemme préliminaire — Démonstration

b) Règle de D'Alembert — Démonstration

2.3. Comparaison série-intégrale

a) Théorème 1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Démonstration

b) Théorème 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. — Démonstration

2.4. Séries alternées

a) Définition

b) Critère spécial des séries alternées — Démonstration

c) Exemple

3. Notions de dénombrabilité

- Définition
- Exemples et contre-exemples : $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{R}$.
- Propriétés :

① Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

② Un ensemble non vide est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.

③ Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable

④ Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

- Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont dénombrables Démonstration

4. Familles sommables

4.1. Familles sommables de réels positifs

a) Définition

b) Comparaison

c) Vers la linéarité

d) Sommation par paquets

- Définition : partition
- Théorème de sommation par paquets **à bien connaître** , **démo admise**
- Exemple

4.2. Famille sommables de nombres complexes

a) Définition

b) Exemple fondamental : série absolument convregente

c) Somme

1. Cas d'une famille de réels
2. Cas d'une famille de nombres complexes

d) Commutativité : invariance par permutation des termes

e) Linéarité

f) Théorème de sommation par paquets **à bien connaître** , **démo admise**

4.3. L'exemple des suites doubles sommables

a) Cas de familles doubles de réels positifs

Théorème de Fubini 1 pour les familles doubles de réels positifs

à bien connaître , **démo admise**

b) Cas de familles doubles de complexes

Théorème de Fubini 2 pour les familles doubles de complexes

à bien connaître , **démo admise**

c) Exemples

4.4. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

a) Définition

b) Le théorème fondamental **Démonstration**

c) Exemple

d) <u>Application à l'exponentielle complexe</u>

$$\exp(z+z')=\exp(z)\times\exp(z')$$ **Démonstration**