Colles de mathématiques en PCSI 5

15 mai 2011

Programme

Algèbre linéaire (révision du programme précédent).Calcul matriciel : calculs, formules de changement de base, rang d'une matrice.

Exercice 1. Soient E de dimension finie, et F, G deux sous-espaces de E. Prouver l'équivalence :

$$F \text{ et } G \text{ admettent un supplémentaire commun } \iff \dim(F) = \dim(G).$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie paire, égale à $2p$, $p \in \mathbb{N}$. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Rg}(u) = p$ et $u^2 = 0$. Comparer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

Exercice 3. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d : f \in E \mapsto f' \in E$ l'endomorphisme de dérivation. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \cosh, \sinh)$.

1. Déterminer $\dim F$ et prouver que $d(F) \subset F$, et donc que d induit un endomorphisme de F, noté φ.
2. Écrire la matrice de φ dans une base bien choisie, et calculer ses puissances positives.
3. Montrer que $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ et donner M^{-1}.
4. Déterminer $\ker(\varphi - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id})$.
   En déduire les éléments de F solutions de l'équation différentielle :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \sin(t).$$
5. Déterminer $\ker(\varphi^2 - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi^2 - \mathrm{id})$ en utilisant la matrice M.
   L'équation : $\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - y(t) = \cosh(t)$ a-t-elle des solutions dans F ?

Exercice 4. Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, toutes non nulles et telles que $ABC = 0$. Prouver qu'au moins deux parmi ces trois matrices sont non inversibles.

Exercice 5. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$.

1. Écrire une relation entre A^2, A et I_2 faisant intervenir les coefficients de A.
2. En déduire une CNS pour que A soit inversible, donner alors l'expresion de A^{-1}.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n \in \mathrm{Vect}(A, I_2)$.

4. On suppose Tr $A \neq 0$. Montrer que

$$\forall B \in M_2(\mathbb{K}),\ A^2B = BA^2 \Longrightarrow AB = BA.$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Prouver qu'il existe deux vecteurs colonnes $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = X\,{}^tY$.

2. Interpréter ${}^tYX$ puis déterminer les puissances de A.

3. En déduire une CNS pour que $I_n + A$ soit inversible et donner alors son inverse en fonction de A.

Exercice 8. Pour $n \geqslant 1$, on note $M = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

En considérant l'espace $E = \mathbb{K}_n[X]$, et l'endomorphisme $u : P(X) \in E \mapsto P(X+1) \in E$, prouver que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

Prouver qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. On se donne deux matrices carrées de taille $2n \times 2n$, $n \geqslant 1$:

$$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

N étant définie par 4 blocs de taille $n \times n$. Prouver que M et N sont semblables.

Exercice 12. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}, \; P = I_3 + M^2.$$

Vérifier que P est un projecteur et que $PM = MP = 0$.

Exercice 13. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, en notant $\sigma(A)$ la somme des coefficients de A, prouver que $JAJ = \sigma(A)J$.

Exercice 14. Soit A une matrice de taille 2×2. On note f_A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto AX$. Déterminer le rang de f_A en fonction de celui de A. Généraliser à des dimensions quelconques.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 1$. Prouver qu'il n'existe aucunes matrices A, B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{I}_n = AB - BA$.

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $\mathrm{Rg}(f) = 1$, f est-il nécessairement un projecteur ?

2. Si de plus, $\mathrm{Tr}(f) = 1$, prouver que f est un projecteur.