Colles de mathématiques en PCSI 5

3 et 10 mai 2012

Programme

Polynômes. Espaces vectoriels. Espaces vectoriels de dimension finie.

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et tous les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{K}$ pour corps de base.

Exercice 1. Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2} + ... + \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice 2. On introduit l'opérateur linéaire $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Prouver que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ si P n'est pas constant.

2. Prouver que pour $n \geqslant 1$,

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

3. Calculer $\Delta^n(X^n)$

4. Déterminer pour $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p.$$

5. Si $\deg P = n$, prouver que $(P(X),\ P(X+1), ..., P(X+n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On introduit les polynômes de Hilbert :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ H_p(X) = \frac{X(X-1)...(X-p+1)}{p!}.$$

a. Justifier que $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b. Calculer $\Delta^n(H_p)$.

c. Si P est un polynôme, montrer que

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Delta^k P(0) H_k.$$

d. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, prouver que

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \iff \text{les coordonnées de } P \text{ dans la base } (H_p) \text{ sont entières.}$$

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Expliciter $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E. Donner une CNS sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sous-espace de E.

Exercice 5. Soient A, B et C trois sous-espaces d'un espace E tels que :

$$A \cap B = A \cap C,\ A + B = A + C \text{ et } B \subset C.$$

Prouver que $B = C$.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée. Prouver alors que f est une homothétie.
2. On suppose que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ u = u \circ f$. Prouver que f est une homothétie.

Pour la deuxième question, on prouvera qu'un tel f préserve toutes les droites vectorielles de E ($\forall D$, $f(D) \subset D$). Pour cela on considérera la symétrie d'axe D par rapport à un supplémentaire de D.

Exercice 7. Soient E de dimension finie, et F, G deux sous-espaces de E. Prouver l'équivalence :

$$F \text{ et } G \text{ admettent un supplémentaire commun } \iff \dim(F) = \dim(G).$$

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$. Calculer, en fonction de u et $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie paire, égale à $2p$, $p \in \mathbb{N}$. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Rg}(u) = p$ et $u^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$.

Exercice 10. Soit E un espace de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme *nilpotent d'ordre* $n \geqslant 1$, c'est à dire tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.

Exercice 11. Donner un exemple d'endomorphisme qui admet un inverse à gauche, mais pas à droite, c'est à dire un endomorphisme u tel qu'il existe v vérifiant $v \circ u = \mathrm{Id}$ mais avec $u \circ v \neq \mathrm{Id}$.

On pourra penser à l'intégration et la dérivation par exemple.

Exercice 12. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $d : f \in E \mapsto f' \in E$ l'endomorphisme de dérivation. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \cosh, \sinh)$.

1. Déterminer $\dim F$ et prouver que $d(F) \subset F$, et donc que d induit un endomorphisme de F, noté φ.
2. Écrire la matrice de φ dans une base bien choisie, et calculer ses puissances positives.
3. Montrer que $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ et donner M^{-1}.
4. Déterminer $\ker(\varphi - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id})$.
   En déduire les éléments de F solutions de l'équation différentielle :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \sin(t).$$
5. Déterminer $\ker(\varphi^2 - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi^2 - \mathrm{id})$ en utilisant la matrice M.
   L'équation : $\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - y(t) = \cosh(t)$ a-t-elle des solutions dans F ?