Td analyse agreg 1

Coralie Renault

14 septembre 2016

Exercice 1 (*Polynômes de Hermite, Agreg 2010*)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction H_n sur $\mathbb{R}$ par

$$H_n(y) = (-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n}(e^{\frac{-y^2}{2}}).$$

1. *Rappeler la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$.*
2. *Calculer H_0, H_1 et H_2.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_N est une fonction polynomiale et en préciser le degré et le coefficient dominant.*
4. *On considère la mesure sur $\mathbb{R}$ définie à partir de la mesure de Lebesgue grâce à la fonction de poids $y \mapsto \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. On définit $L^2(\mu)$ avec le produit scalaire*

$$< f, g >:= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(y) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \int_{\mathbb{R}} fg d\mu.$$

   a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est dans $L^2(\mu)$.*
   b) *Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace $L^2(\mu)$.*
   c) *Calculer la norme de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2 (*Etude d'une famille de polynômes, 3a ENS 2008*)

1. *Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par*

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1 - x^2)dx$$

   On notera $\|P\|$ la norme associée.

2. *Construire une suite de polynômes (P_n) telle que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1 telle que*

$$i \neq j \Longrightarrow \int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)(1 - x^2)dx = 0.$$

   Justifier l'unicité d'une telle suite et calculer P_0, P_1, P_2 et leur norme.

3. *Montrer que P_n est orthogonal à tout polynômes de degré strictement inférieur.*

4. *En décomposant le polynôme XP_n dans la base des P_k, montrer que les P_k vérifient une relation de récurrence d'ordre deux de la forme*

$$P_{n+1} = (X - \alpha_n)P_n - \beta_n P_{n-1}.$$

Expliciter α_n et β_n en fonction de P_n et P_{n-1}.

5. *Montrer que P_n admet exactement n racines simples situées dans l'intervalle $[-1, 1]$. Indication : on pourra utiliser le polynôme*

$$\Pi_n = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}} (X - \alpha)$$

où R est l'ensemble des racines de P_n dans $[-1, 1]$ de multiplicité impaire.

6. *On note $(\omega_k^n)_{k=1 \cdot n}$ les n racines de P_n rangées dans l'ordre croissant.*
   a) *Montrer qu'une racine ω_k^n de P_n n'est pas racine de P_{n+1}.*
   b) *Montrer que pour tout n et pour tous réels x, y, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{1}{\|P_n\|^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x - y)}.$$

   c) *En déduire que $P'_{n+1}P_n - P'_n P_{n+1} > 0$.*
   d) *En déduire que $w_k^n < w_k^{n-1} < w_{k+1}^n$.*

Exercice 3 (***Densité des polynômes orthogonaux, dvp, objectif agrégation***)

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty \tag{1}$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $\|.\|_\rho$.

1. *Soit ρ vérifiant (1) et $f \in L^2(I, \rho)$. On considère la fonction Φ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & si x \in I \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

Justifier que l'on peut considèrer sa transformée de Fourrier et que l'on peut écrire

$$\hat{\Phi}(\xi) = \int_I f(x)e^{-i\xi x}\rho(x)dx.$$

2. *Montrer que l'on peut prolonger $\hat{\Phi}$ en une fonction F holomorphe sur*

$$B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}.$$

3. *On note* $g_n(x) = x^n$. *Calculer* $F^{(n)}(0)$ *et en déduire que si*

$$\forall n \in, < f, g_n >_I = \int_I f(x) x^n \rho(x) ds = 0,$$

alors $f(x) = 0$ *dans* $L^2(I, \rho)$.
4. *Conclure.*
5. *Contre-exemple : on considère, sur* $I =]0, +\infty[$, *la fonction de poids*

$$w(x) = x^{-ln(x)}$$

Montrer que les polynômes orthogonaux pour le poids w *ne forment pas une base hilbertienne de* $L^2(I, w)$. *On pourra considérer la fonction*

$$\forall x \in , f(x) = sin(2\pi ln(x)).$$

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 0$$

1. *Montrer que la fonction* f *est nulle.*
2. *Calculer*
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-(1-i)x} \underset{\cdot}{\mathrm{x}}$$
3. *En déduire qu'il existe* f *dans* $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ *non nulle, telle que, pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, *on ait*
$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 0$$

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

1. $(E, \|\|_\infty)$ *est-il complet ?*
2. $(E, \|\|_1)$ *est-il complet ?*