Chapitre 15
Calcul différentiel

Dans tout le chapitre sauf contre-ordre :

- ➩ E, F et G désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

  Dans les exercices , on aura souvent : $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$
- ➩ U désigne un ouvert de E.
- ➩ f désigne une fonction de U dans F.

1. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1. Dérivée selon un vecteur

a) Définition

<u>Définition 1</u> : Soit $f:U\to F$ où U est un ouvert de E. Soit $\vec{u}\in E\setminus\{0_E\}$.

On dit que f admet en un point $a\in U$ une **dérivée selon le vecteur $\vec{u}$** si la fonction $\varphi_{a,\vec{u}}:t\to f(a+t\vec{u})$ admet une dérivée en 0.

Cette dérivée est notée $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)$.

- Justification, interprétations **1**. Bien noter que $\boxed{\mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)\in F}$
- On justifie notamment que la limite a un sens car $\varphi_{a,\vec{u}}:t\to f(a+t\vec{u})$ est bien définie sur un voisinage de 0 (car U est un ouvert).
- Ainsi $\boxed{\mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}}$ (1)

b) Méthode pratique, exemples

- <u>Cas simples</u> : définir la fonction $\varphi_{a,\vec{u}}$ et si sa dérivée est simple, la calculer et prendre sa valeur en 0 (c'est la définition !)

  ❋ Exemple 1 **2**.

  $$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad a=(1,2) \qquad \vec{u}=(1,-1)$$

- <u>Cas plus compliqué</u> (si a est un point délicat) : utiliser (1).

  ❋ Exemple 2 : **3**.

  $$f:(x,y)\to\frac{y^2}{x} \text{ si } x\neq 0 \;;\; f(0,y)=0 \text{ si } y\in\mathbb{R}$$

  ➩ f admet en $a=(0,0)$ une dérivée selon tout vecteur $\vec{u}\neq 0_E$

  f n'est pourtant pas continue en 0 !

❋ Exercice : $f:(x,y)=\dfrac{yx^2}{y^2+x^4}$ si $(x,y)\neq 0$; $f(0,0)=0$

⇨ f admet en $(0,0)$ une dérivée selon tout vecteur $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ égale à $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ si $\beta\neq 0$ et à 0 si $\beta=0$.

f n'est pourtant pas continue en 0 ! **4**.

1.2. Dérivées partielles

a) Définitions

Définition 2 : Soit $f:U\to F$ où U est un ouvert de E.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E.

On dit que f admet en un point $a\in U$ une **dérivée selon la i-ième variable ou par rapport à x_i** si f admet une dérivée selon e_i .

Cette dérivée est notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

- Ainsi : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\mathrm{D}_{e_i}f(a)}$.

Définition 3 : Soit $f:U\to F$ où U est un ouvert de E.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E.

Si f admet en tout point $a\in U$ une dérivée par rapport à x_i, l'application **dérivée partielle par rapport x_i** est l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:\begin{cases}U\to F\\ a\to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\end{cases}$

- On définit de même pour tout vecteur $\vec{u}\in E\setminus\{0_E\}$: $\mathrm{D}_{\vec{u}}:\begin{cases}U\to F\\ a\to \mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)\end{cases}$.

b) Méthode pratique, exemples

Propriété :

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, rapporté à sa base canonique..

Alors : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f(.,y)'(x)}$ De même : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,.)'(x)}$

- Démonstration **5**.
- ☺ Ceci revient à dire qu'on fixe y et qu'on dérive par rapport à x.

❋ Exemple 3 Dérivées partielles de $(x,y)\to \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, **6**.

- Dans les cas particuliers, utiliser $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f(.,y_0)'(x_0)}$ ou revenir au taux d'accroissement $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}}$

❋ Exemple 2 (suite) calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Différentiabilité

2.1. Définitions

Définitions 4 : Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert de E.

- On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

  $\forall h \in E \,/\, (a+h) \in U : f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$.

- L'application $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est unique et est appelée **différentielle de *f*** au point a (ou **application linéaire tangente** de f en a) et notée $\boxed{\mathrm{d}f(a)}$.

- Si f est différentiable en tout point $a \in U$, on peut alors définir la **différentielle** de f comme l'application : $\boxed{\mathrm{d}f : \begin{cases} U \to \mathcal{L}(E,F) \\ a \to \ df(a) \end{cases}}$

- $o(\|h\|)$ désigne une fonction du type $h \to \|h\|.\varepsilon(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0_E} \varepsilon(h) = 0_F$.
- Ainsi on a aussi :

  $\boxed{\forall h \in E \,/\, (a+h) \in U : f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|.\varepsilon(h) \text{ où } \lim\limits_{h \to 0_E} \varepsilon\ h\ = 0_F}$

- Justification de l'unicité de φ. **7**.
- Comme vu au Chap.13, $df(a)$ étant linéaire, l'image d'un vecteur u de E sera notée $\boxed{df(a).u}$ au lieu de la notation normale plus lourde $[df(a)](u)$.
- On a ainsi : $\boxed{f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \|h\|.\varepsilon(h)}$

2.2. Exemples **8**.

❈ Exemple 1 : Toute application constante est différentiable et $\mathrm{d}f(a) = O_{\mathcal{L}(E)}$

❈ Exemple 2 : Toute application linéaire est différentiable et $\mathrm{d}f(a) = f$

❈ Exemple 3 : Cas des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Alors : [f est différentiable en a] $\Leftrightarrow$ [f est dérivable en a]

et $\mathrm{d}f(a) : \begin{cases} \mathbb{R} \to \quad \mathbb{R} \\ h \to f'(a) \times h \end{cases}$.

- Démonstration **9**. Ainsi, réciproquement : $\boxed{f'(a) = \mathrm{d}f(a).1}$

2.3. Continuité

Proposition 1 :

Toute application différentiable en a est continue en a.

- Démonstration **10**.

2.4. Lien avec dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

a) Le lien fondamental

Proposition 2 : Si $f : U \to F$ est différentiable en a, alors f admet en ce point une dérivée selon tout vecteur u non nul et $\boxed{D_u f(a) = df(a).u}$

- Démonstration **11**.
- En particulier, si $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de E :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] : \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a).e_j}$$

b) Application

Proposition 3 :

Soit $f : U \to F$ différentiable en a et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E.

Soit $h \in E$ tel que $h = \sum_{j=1}^{n} h_j . e_j$. Alors $df(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

- Démonstration **12**.
- La relation de différentiabilité de f en a s'écrit donc :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)}$$

- Par ailleurs, si $u = \sum_{j=1}^{n} u_j . e_j$, la dérivée selon u en a est égale, si f est différentiable en a, à : $\boxed{D_u f(a) = df(a).u = \sum_{j=1}^{n} u_j . \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$

❈ Contre-exemple cf. ex.2 du §1.1 : $D_{\alpha,\beta} f(0,0) = \frac{\beta^2}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$

c) Cas particuliers

❑ Prenons ici : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $a = (x_0, y_0)$, $h = (h_1, h_2)$, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$

- La relation de différentiabilité de f en a s'écrit ici :

$$\boxed{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|h\|)} \quad (1)$$

- La dérivée de f selon $\vec{u}$ en a est alors égale à :

$$\boxed{Df_u(x_0, y_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

- Notons que l'écriture (1) de la différentiabilité de f ne fait que généraliser les développements limités d'ordre 1 obtenus pour les fonctions de la variable réelle : $\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + o(h)}$

d) Exemple traité **13**. (sera repris en § 6.3)

❈ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\left| \begin{array}{l} f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{array} \right.$

2.5. Opérations sur les fonctions différentiables

a) Combinaisons linéaires

Proposition 1 : Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont différentiables en a, alors :

- $f + g$ est différentiable en a et $\boxed{\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est différentiable en a et $\boxed{\mathrm{d}(\lambda.f)(a) = \lambda.\mathrm{d}f(a)}$

- Démonstration **14**.

b) Produits

Proposition 2 : Si $f : U \to F_1$ et $g : U \to F_2$ sont différentiables en a

et si $B : F_1 \times F_2 \to G$ est une application bilinéaire, alors

- $B(f, g)$ est différentiable en a et

$$\boxed{\mathrm{d}(B(f,g))(a).h = B(\mathrm{d}f(a).h, g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a).h)} \quad (2)$$

- Démonstration non exigible **15**.
- Exercice : retrouver la dérivée d'un produit à l'aide de (2)

c) Composée

Proposition 3 : Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F.

Si $f : U \to V$ est différentiable en a et $g : V \to G$ est différentiable en $f(a)$

- $g \circ f$ est différentiable en a et $\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)}$ (3)

- Démonstration non exigible **16**.
- Exercice : retrouver la formule $(g \circ f)'(a)$ à l'aide de (3)

3. Matrices jacobiennes

3.1. Matrice de la différentielle de f en a, matrice jacobienne

❑ Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base de F :

$$\text{pour } f : U \to F \text{ on a alors } \forall a \in U : \; f(a) = \sum_{i=1}^{m} f_i(a) e'_i \,.$$

Les fonctions $f_i : U \to F$ sont les " fonctions coordonnées" de f.

Proposition 4 : Soit $f : U \to F$ différentiable en a.

Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ bases respectives de E et F.

La matrice de $\mathrm{d}f(a)$ relativement au couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{d}f(a)) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j}$

- Démonstration **17**.

- Ainsi : $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{d}f(a))=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

<u>Définition</u> : Soit $f:U\to F$ une fonction différentiable

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^m$.

La **matrice jacobienne** de f en a est la matrice de la différentielle de f en a relativement aux bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Elle est notée $\boxed{J_f(a)}$

- Ainsi pour $E=F=\mathbb{R}^2$, $a=(x_0,y_0)$:

  la matrice jacobienne de $f=(f_1,f_2)$ en a s'écrit :

$$\boxed{J_f(a)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}$$

- <u>Exemple traité</u> : $\Phi:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta)\to(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) \end{cases}$

3.2. <u>Applications au calcul des dérivées partielles</u>

a) <u>Méthode des matrices jacobiennes</u> **18**.

- Ici $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^q$ et $G=\mathbb{R}^m$.

  Soient $\mathcal{B}=(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, $\mathcal{C}=(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ et $\mathcal{D}=(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ bases canoniques respectives de E, F et G.

  Notons $f=(f_1,f_2,...,f_q)$, $g=(g_1,g_2,...,g_m)$ et $g\circ f=h=(h_1,h_2,...,h_m)$.

- Ainsi, si $y=(y_1,y_2,...,y_q)=f(x_1,x_2,...,x_n)=f(x)$

  puis $z=(z_1,z_2,...,z_m)=g(y)=g(y_1,y_2,...,y_q)$,

  la relation (3) se traduit matriciellement par :

$$\boxed{J_h(a)=J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))\times J_f(a)}$$

où $J_f(a)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}$, $J_g(b)=\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(b)\right)_{i,j}$ et $b=f(a)$

ce qui se traduit par les égalités :

$$\forall(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!] : \boxed{\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{q}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\times\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right)} \quad (3)$$

b) Exemples, règle de la chaîne

❑ ainsi si $m=1$ i.e. si g et $h=g\circ f$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, la formule devient :

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\times\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right)}$$

Méthode de calcul des dérivées partielles d'une composée

① Avoir en filigrane la formule $(g\circ f)'\ a\ =g'(f(a))\times f'(a)$

② Si* g dépend de plusieurs variables $(y_1,y_2,\dots,y_q)$, f est elle-même une fonction à q coordonnées $f=(f_1,f_2,\dots,f_q)$: on remplace dans la formule g' par $\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$, f par f_k pour $k\in[\![1,q]\!]$, et on somme

$$(g\circ f)'(a)=\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\times f_k'(a)\right)$$ (étape inachevée !...)

③ Si* f (et donc f_k et $g\circ f$) dépend de plusieurs variables x_j, remplacer le premier et les derniers "prime" par le symbole de dérivée partielle pour la variable considérée ; écrire :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum\dots\times\frac{\partial\dots}{\partial x_j}(a)$$

* Sinon, laisser des "prime"

pourquoi "règle de la chaîne" ? **20**.

❑ Exemples **19**.

❋ Exemple 1 :

$$\boxed{F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\times\frac{\partial x}{\partial u}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\times\frac{\partial y}{\partial u}(t)}$$

Exercice : écrire de même la dérivée partielle de F par rapport à v.

❋ Exemple 2 :

$$\boxed{F(t)=f(x(t),y(t))}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{F'(t)=\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\times x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\times y'(t)}$$

❋ Exemple 3 :

$$\boxed{F(x,y)=g(f(x,y))}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\ g'(f(x,y))\times\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

Exercice : écrire de même la dérivée partielle de F par rapport à y.

❋ Exercice : retrouver ces formules par produit de matrices jacobiennes.

3.3. Dérivée le long d'un arc

<u>Proposition 4</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\gamma : I \to U$ un arc différentiable.

Ainsi $\forall t \in I\ :\ \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^n$

Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable.

Alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I\ :\ \boxed{(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t).\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{où } a = \gamma(t)$$

- Démonstration **21**.
- Si $\gamma : t \to a + tu$, on trouve $\boxed{(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{D}_u f(a)}$ où $a = \gamma(0)$

4. Cas des applications numériques

4.1. Vecteur gradient

a) Théorème de représentation des formes linéaires

<u>Théorème</u> : Soit E espace euclidien : $\forall\, \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \exists!\, a \in E \,/\, \varphi = (a\,|\,.)$

- Démonstration **22**.
- Exemple : si $E = \mathbb{R}^2$, $\boxed{\varphi(x,y) = ax + by = \langle (a,b) \,|\, (x,y) \rangle}$ **23**.

b) Vecteur gradient

<u>Définition</u> : Soit E un espace euclidien.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, on appelle **gradient** de f en a l'unique vecteur noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ tel que $\forall\, h \in E :\ \mathrm{d}f(a).h = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \,|\, h$.

- Justification **24**.

<u>Propriété 1</u> : **coordonnées** de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ en base <u>orthonormée</u>

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ dans la base $\mathcal{B}$ constituent le n-uplet

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)}$$

- Démonstration **25**.

c) Interprétation géométrique

<u>Propriété 2</u> : Soit E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale. Plus précisément :

$$\forall u \in E \,/\, \| u \| = 1,\ |D_u f(a)| \leqslant \| \mathrm{grad}(f)(a) \| = D_v f(a) \quad \text{où } v = \frac{\mathrm{grad}(f)(a)}{\|\mathrm{grad}(f)(a)\|}$$

- Démonstration **26**.

d) Expression du gradient en coordonnées polaires

- Physique : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).e_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta).e_\theta}$

  - Ntations rectifiées $\dfrac{\partial f}{\partial r} \leftarrow \dfrac{\partial F}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \leftarrow \dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, démonstration **27**.

4.2. Condition nécessaire d'extremum local d'un ouvert U

Définition : Soit U ouvert de E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a.
a est un **point critique** de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$ autrement dit si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$.

Théorème : Soit U ouvert de E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a.
Si f admet en a un extremum local, alors a est un point critique.

- Démonstration **28**.
- Ce théorème est à comparer au théorème similaire vu pour les fonctions de I, intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ (Chap.10 Th.5.1)
- On précise que f admet en a un maximum (resp. minimum) local si $\boxed{\exists r > 0 \,/\, \forall x \in B(a,r) : f(x) \leqslant f(a)}$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$)

4.3. Exemples de recherche d'extremums

a) Recherche d'extremums locaux

- On décrit la méthode pour une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $E = \mathbb{R}^2$ mais elle s'applique pour $E = \mathbb{R}^n$.

Méthode : recherche d'extremum local

① On recherche les points critiques de f sur U ; on résout à cet effet l'équation $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$ et donc le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

② Une fois les points critiques trouvés, qui sont les **extremums potentiels**, pour chacun d'eux, noté ici (x_0, y_0) :
on pose et on calcule : $\Delta(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$

- Si on veut démontrer par exemple que c'est un maximum local : on cherche $r > 0$ tel que $\forall (h,k) \in B((0,0),r)$: $\Delta(h,k) \leqslant 0$
- Si on veut montrer a contrario que ce n'est pas une extremum
  - ⇨ ou bien on trouve une suite (h_n, k_n) de limite nulle telle que le signe de $\Delta(h_n, k_n)$ est alterné
  - ⇨ ou bien on trouve deux suites (h_n, k_n) de limite nulle telles que, pour l'une $\Delta(h_n, k_n) > 0$, et pour l'autre $\Delta(h_n, k_n) < 0$.
  - ⇨ ou bien on prouve que dans toute boule $B((0,0),\varepsilon)$, il existe un (h,k) tels que $\Delta(h,k) > 0$ et un tel que $\Delta(h,k) < 0$

✵ Exemple 1 **29**.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \rightarrow & x^2-y^2+z^2\end{cases}$$ ➪ pas d'extremum local

✵ Exemple 2 : **30**.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \rightarrow & 2x^2y+(y-1)^2\end{cases}$$ ➪ 2 points critiques, un extremum

✵ Exemple 2 : **30**.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \rightarrow & 4x^4-5x^2y^2+y^2\end{cases}$$ ➪ un extremum local non global

b) Recherche d'extremums globaux

Méthode : recherche d'extremum global sur un compact A

- On note que A étant compact et f continue, elle admet un maximum et un minimum.
- Les extremums sont à rechercher :
  - D'une part dans $\mathring{A}$ qui est ouvert donc parmi les extremums locaux de f sur $\mathring{A}$ ⇧
  - D'autre part sur la frontiére de A : on paramètre en général celle-ci : $\begin{cases}x=X(t)\\ y=Y(t)\end{cases}$ et on étudie la fonction $t\rightarrow F(x(t),y(t))$

✵ Exemple 4 **31**.

$$f:\begin{cases}\Delta & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \rightarrow & xy(1-x-y)\end{cases}$$

où $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0 \text{ et } x+y\leqslant 1\}$

➪ un maximum atteint en un point

➪ un minimum atteint moult fois

✵ Exemple 5 (CCP 2007) **32**.

$$f:\begin{cases}[0,1]\times[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \rightarrow & \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\end{cases}$$

➪ un maximum atteint en un point

➪ un minimum atteint en un point

5. Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé

5.1. Définition

Définition : Soit X une partie de E.

On dit qu'un vecteur **v est tangent à X en a** s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

5.2. Plan tangent à une surface

Définition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Le graphe de f, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = f(x, y)\}$ est aussi appelé **surface d'équation** $z = f(x, y)$ et notée $\mathcal{S}_f$.

- Définition à mettre en relation avec celle de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, d'équation $y = f(x)$.
- Exemple : surface d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **33**.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- Si X est le graphe de f, alors l'ensemble des vecteurs tangents à X en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est un plan vectoriel P.
- Le plan affine $\mathcal{P} = a + P$ a alors pour équation cartésienne :

$$\boxed{z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)} \quad \text{où } z_0 = f(x_0, y_0)$$

- On l'appelle le **plan tangent** en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à la surface $\mathcal{S}_f$.

- Démonstration **34**.
- Equation à comparer avec l'équation de la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, y_0)$: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
- Exemple plan tangent à la sphère d'équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **35**

5.3. Vecteurs tangents à une ligne de niveau

Définition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de E, espace euclidien.

On appelle ligne de niveau k de f (où $k \in \mathbb{R}$) l'ensemble des points x de U pour lesquels $f(x) = k$.

- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, on obtient, à une translation près, la coupe de la surface $\mathcal{S}_f$ par le plan horizontal d'équation $z = k$.
- Noter la dénomination très liée à la cartographie **36**.

Proposition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, différentiable sur U, un ouvert de E.

Si X est une ligne de niveau de f, les vecteurs tangents à X en un point a sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$.

- Démonstration **37**.
- Exemple tangente à un cercle, à une ellipse **38**.

6. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

6.1. Définition

Définition : Une application $f: U \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable sur U et si sa différentielle est continue sur U.

On note $\mathcal{C}^1(U,F)$ l'ensemble des applications $f: U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$.

6.2. Propriété caractéristique

Théorème essentiel :

$f: U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base $\mathcal{B}$ de E sont définies et continues sur U.

- ☺ Démonstration admise
- Exemple **39**. (déjà vu au § 2.4.d)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\left| \begin{array}{l} f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{array} \right.$

- Conséquence : $\forall \vec{u} \in E \setminus \{0_E\}$, $D_{\vec{u}}f$ est alors aussi continue puisque $\mathrm{D}_{\vec{u}}f = \sum_{j=1}^{n} u_j . \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

6.3. Propriétés algébriques

❑ On retrouve les propriétés algébriques usuelles de stabilité par combinaison linéaire, produit et composition (quand c'est possible) de sorte que :

- $(\mathcal{C}^1(U,F),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- $(\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}),+,\times,.)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

6.4. Caractérisation des fonctions constantes

Lemme : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et un arc $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1],U)$.

Alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = f(b) - f(a)$ où $a = f(0)$ et $b = f(1)$

- Démonstration **40**.

Théorème : Soit U un ouvert connexe par arcs et $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$. Alors :

$$[f \text{ est constante}] \Leftrightarrow [\mathrm{d}f = 0]$$

- Démonstration lorsque U est convexe **41**.

6.5. Généralisation : applications de classe $\mathcal{C}^k$

a) Définitions

Définitions :

- On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordre k par :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}\right)$$

- Une application $f : U \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

b) Propriétés algébriques

- Ici encore stabilité par combinaison linéaire, produit et composition
  - $(\mathcal{C}^k(U,F),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
  - $(\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}),+,\times,.)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

c) Théorème de Schwarz

Théorème : Si $f \in \mathcal{C}^2(U,F)$, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

- ☺ Démonstration admise
- Exemple traité **42**.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

7. Exemples d'équations aux dérivées partielles

❑ **Objet** : résoudre une équation aux dérivées partielles du 1ier ordre, c'est-à-dire déterminer les applications fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ qui vérifient une équation liant $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et f.

❑ **Hypothèse de travail** : on supposera en général U convexe

☺ On verra que ce n'est pas toujours absolument nécessaire, qu'on peut alléger cette hypothèse

❑ **Méthodologie** : on sera amenés souvent à effectuer des changements de variables (cf. Exemples 3 et 4). Les seuls prévus par le programme sont les transformations affines (exemple 3) et le passage en coordonnées polaires (exemple.4).

7.1. Exemple 1 : simple mais fondamental

❋ Exemple 1 **43**.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0}$$

7.2. Exemple 2 : un peu plus sophistiqué

❋ Exemple 2 **44**.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y\,f}$$

7.3. Exemple 3 : avec changement de variables affine

❋ Exemple 3 **45**.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 4\,(x-y)\,f}$$

⇨ On posera : $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

7.4. Exemple 4 : avec passage en coordonnées polaires

❋ Exemple 4 **46**.

$$\boxed{y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

⇨ On posera : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$