Techniques algébriques I

I Expressions polynomiales

I.1 Égalités remarquables

a et b étant deux nombres réels, on a les développements suivants :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Pour des exposants plus élevés, on peut utiliser le **triangle de Pascal** pour déterminer les coefficients. Par exemple, pour $(a+b)^6$:

$$(a+b)^6 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Pour $(a-b)^n$, les formules sont similaires au détail près que les signes alternent :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

***Exercice* 1** ► Calculer $(2x+1)^4$, $(x-3)^3$, $(a-b)^5$.

a et b étant toujours deux nombres réels, les factorisations suivantes rendent de grands services :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Il existe des formules pour factoriser $a^n + b^n$, mais seulement quand n est impair : **prudence** et revenir aux formules en $a^n - b^n$.

***Exercice* 2** ► Factoriser $x^3 - 1$, $16a^4 - 81$, $a^3 + b^3$.

I.2 Pratique de la factorisation

Il s'agit d'observer l'expression pour y **reconnaître des motifs :** trouver un facteur commun, reconnaître une identité remarquable.

***Exercice* 3** ► Factoriser $2x^4 - 20x^3 + 50x^2$ et $(x-2)^2(x^2-4) + (x-2)^4 + (6-3x)^3(x-1)$.

I.3 Factorisation de polynômes de degré 2

Les polynômes de degré 2 sont de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois coefficients réels tels que $a \neq 0$ et x est la variable.

Quitte à utiliser des nombres complexes, on sait toujours les factoriser. **Mais on ne se rue pas sur « delta » sans réfléchir :**

1) Si $c = 0$, on peut factoriser par x ; si $b = 0$, on peut utiliser une identité remarquable.
2) Sinon, on regarde si on peut pas utiliser une identité remarquable pour factoriser.
3) Si b est un entier pair, il peut être élégant de passer par la **forme canonique** (voir les exemples dans l'exercice).
4) Si on connait une racine du polynôme, l'autre est facile à trouver car on connait la somme et le produit des deux racines (voir ci-dessous).
5) **Enfin**, si toutes ces méthodes ont échoué, il est légitime d'avoir recours au discriminant Δ et aux formules donnant les racines du polynôme.

***Exercice* 4** ► Factoriser les polynômes suivants et donner leurs racines :

$$x^2 - 1, \quad x^2 + 1, \quad 3x^2 - 5, \quad 5x^2 - 3x, \quad x^2 + 6x + 7, \quad x^2 - 4x + 9.$$

Rappel de la méthode du discriminant :
On calcule le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ puis :

- Si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  et le polynôme se factorise : $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double : $x_1 = \dfrac{-b}{2a} = x_2$.
  Il se factorise alors : $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de racine réelle et il est impossible de le factoriser dans les réels.
  En revanche, il admet deux racines complexes

$$x_1 = \frac{-b+i\,\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-i\,\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  qui sont conjuguées. Elles permettent la factorisation à l'aide des nombres complexes : $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Exercice **5** ► Factoriser les polynômes $2x^2 - x - 2$ et $x^2 + x + 1$.

On démontre que, dans tous les cas, les racines x_1 et x_2 du polynôme vérifient les relations

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

La somme et le produit des racines se calculent simplement à partir des coefficients du polynôme. Cela permet de déterminer la deuxième racine quand on en connait une.

Exercice **6** ► Factoriser le polynôme $x^2 - (3 - \sqrt{3})\,x + (2 - \sqrt{3})$.

I.4 Factorisation de polynômes

Plus généralement, un polynôme est une écriture de la forme

$$p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des coefficients réels et x une variable réelle. Dans un polynôme, la variable est élevée à divers exposants **entiers positifs,** multipliée par des coefficients puis les résultats sont additionnés. Le plus grand exposant qui apparait dans l'expression est appelé le **degré du polynôme.**

Une **racine du polynôme p** est un nombre x_0 tel que $p(x_0) = 0$.

Pour factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3, on utilise souvent les deux théorèmes suivants :

Thm • Si x_0 est une racine du polynôme p, alors $p(x)$ peut se factoriser par $(x - x_0)$.

Thm • Deux polynômes sont égaux en tout point x si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Remarque. Trouver une racine n'est pas toujours aisé, et on peut s'avérer incapable en pratique de factoriser un polynôme dès que son degré dépasse 2. On essaie souvent les nombres 1 et -1 (recherche de « racines évidentes ») ou on suit une indication de l'énoncé.

Exercice **7** ► Factoriser $2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 5$ et $x^4 - x^3 + 5\,x^2 - 7\,x - 14$ (évaluer en 2).

I.5 Résolution d'équations

On sait résoudre les équations du premier degré (de la forme $a\,x + b = 0$). Pour résoudre des équations plus générales, une méthode consiste à **tout passer dans le premier membre, factoriser l'expression** puis utiliser le théorème suivant :

Thm • Théorème du produit nul
Un produit de nombres réels est nul si et seulement si l'un, au moins, de ces réels est nul.

Exercice **8** ► Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :
ind $25\,x^2 = x^2 - 6x + 9$ et $x^3 = x\,(5 - 2x)$.

II Compétences de base sur les inégalités

On commence par rappeler le vocabulaire :

x est inférieur (ou égal) à y :	$x \leqslant y$	x est positif (ou nul) :	$x \geqslant 0$
x est strictement inférieur à y :	$x < y$	x est strictement positif :	$x > 0$
x est supérieur (ou égal) à y :	$x \geqslant y$	x est négatif (ou nul) :	$x \leqslant 0$
x est strictement supérieur à y :	$x > y$	x est strictement négatif :	$x < 0$

Notez-bien que :

- Le contraire de $x > y$ est : $\quad x \leqslant y$.
- Un nombre réel qui n'est pas positif est strictement négatif.
- Si $x < y$ est vrai, alors $x \leqslant y$ est vrai aussi. La réciproque est fausse.
- Dire que $x \leqslant y$ revient exactement à dire que $y - x \geqslant 0$ ou que $x - y \leqslant 0$.

II.1 Règle des signes et tableaux de signes

Règle des signes :

- Un produit de deux réels positifs est positif ;
- un produit de deux réels négatifs est positif ;
- un produit d'un réel positif par un réel négatif est négatif ;
- les trois points précédents sont vrais en ajoutant « strictement » devant *tous* les signes.

Quand on veut connaître le signe d'une expression compliquée, une stratégie consiste à factoriser cette quantité, puis à étudier séparément le signe de chaque facteur. La règle des signes permet alors de conclure. Quand cette expression dépend d'une variable (par exemple x), on récapitule les résultats dans un **tableau de signes.**

***Exercice* 9** ► Déterminer, en fonction de x, le signe de $2x^3 - x^2 - 6x + 5$.

On déduit de ce principe le signe du trinôme du deuxième degré :

Thm • Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$
et le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Si p admet deux racines réelles distinctes, alors $p(x)$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines, de signe opposé à l'intérieur des racines ;

2) Si p admet au plus une racine réelle, alors $p(x)$ est toujours du signe de a.

Illustrations.

II.2 Opérations sur une inégalité

Lorsqu'une inégalité est vraie, on peut en déduire d'autres en lui appliquant certaines opérations arithmétiques simples. Dans tout ce qui suit, a, b et k sont trois nombres réels.

Règle nº 1 : On peut additionner un réel à une inégalité :

$$\text{Si } a \leqslant b, \quad \text{alors } a + k \leqslant b + k.$$

Règle nº 2 : On peut soustraire un réel à une inégalité :

$$\text{Si } a \leqslant b, \quad \text{alors } a - k \leqslant b - k.$$

Règle nº 3 : On peut multiplier une inégalité par un réel *positif* :

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ et } k \geqslant 0, \quad \text{alors } k \times a \leqslant k \times b.$$

Règle nº 4 : Si on multiplie une inégalité par un réel *négatif*, l'inégalité se retourne :

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ et } k \leqslant 0, \quad \text{alors } k \times a \geqslant k \times b.$$

Règle nº 5 : Si on passe à l'inverse dans une inégalité entre deux nombres *de même signe* et non nuls, l'inégalité se retourne :

$$\text{Si } 0 < a \leqslant b, \quad \text{alors } \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}; \qquad \text{si } a \leqslant b < 0, \quad \text{alors } \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}.$$

Règle pour les inégalités strictes : Les règles précédentes restent vraies en remplaçant *toutes* les inégalités larges par des inégalités *strictes*.

Remarques.

- Passer à l'opposé, c'est multiplier par (-1) : les inégalités se retournent.
- Diviser par k, c'est multiplier par $\frac{1}{k}$ qui est de même signe : les règles 3 et 4 s'appliquent.

II.3 Opérations sur deux inégalités

Dans tout ce paragraphe, a, b, c et d sont des réels.

Règle nº 1 : Transitivité.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c, \quad \text{alors } a \leqslant c.$$

Règle n° 2 : On peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d, \end{cases} \quad \text{alors } a + c \leqslant b + d.$$

Règle n° 3 : On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, *à condition que tout soit positif.*

$$\text{Si } \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d, \end{cases} \quad \text{alors } a \times c \leqslant b \times d.$$

Règles pour les inégalités strictes : Pour les deux première règles, il suffit que dans l'hypothèse, l'une des inégalités soit stricte pour qu'elle le soit dans la conclusion. Même chose pour la troisième, à condition que tout soit *strictement* positif.

Attention !

- Il est **tout à fait interdit** de soustraire membre à membre deux inégalités : la conclusion sera fausse ! Même chose pour la division. En revanche, on peut essayer : de passer à l'opposé/l'inverse, **puis** d'utiliser les règles 2 et 3.
- De même, toujours se ramener à des quantités positives si on veut multiplier membre à membre des inégalités.

***Exercice* 10** ► On sait que le nombre π vérifie $3 < \pi < \dfrac{22}{7}$.

Déduisez-en des encadrements pour : $\dfrac{\pi+1}{2}$, $1 - 3\pi$, $\dfrac{1}{\pi - 4}$ et $\pi^2 - \pi$.

III Propriétés des nombres entiers naturels

On rappelle que :

1) l'ensemble des entiers *naturels* est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

2) l'ensemble des entiers *relatifs* est $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

III.1 Divisibilité et division euclidienne

Déf. • Multiples, diviseurs, divisibilité

Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que ***b* est un diviseur de *a*** quand il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k \times b$. Dans ce cas, on pourra dire indifféremment que ***a* est un multiple de *b*** ou que ***a* est divisible par *b*.**

Ex. ✻ 3 est un diviseur de 357 144 car $357\,144 = 3 \times 119\,048$. On dit aussi que 3 est un diviseur de 357 144 et que 357 144 est un multiple de 3.

Critères simples de divisibilité à connaître :

- pour être divisible par 2 : dernier chiffre pair,
- pour être divisible par 3 : somme des chiffres multiple de 3,
- pour être divisible par 5 : dernier chiffre 0 ou 5,
- pour être divisible par 6 : cumuler divisibilité par 2 et 3,
- pour être divisible par 9 : somme des chiffres multiple de 9.

Qui est divisible par 0 ? Qui est un diviseur de 0 ?

Pour les cas plus délicats, on peut poser la division euclidienne du nombre par le candidat-diviseur.

***Exercice* 11** ► 24367 est-il divisible par 7 ? Même question pour 18120 et 53.

Les quatre nombres intervenant dans une division euclidienne entretiennent deux relations caractéristiques qu'il faut connaître. Elles sont résumées dans le théorème suivant.

Thm • Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit $a \in \mathbb{N}$ quelconque et $b \in \mathbb{N}$ **non nul.**

Alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant b - 1. \end{cases}$$

Cette écriture est appelée la **division euclidienne de *a* par *b*.**

a est le **dividende,** b le **diviseur,** q le **quotient** et r le **reste.**

III.2 Nombres premiers

Déf. • Nombre premier

Un **nombre premier** est un entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et tel que n admette pour seuls diviseurs 1 et lui-même.

Attention ❢ 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers ! Le plus petit nombre premier est 2.

Les nombres premiers inférieurs à une valeurs fixée peuvent être obtenus par le crible d'Ératosthène. Cherchons les nombres premiers inférieurs à 100 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Pour tester si un nombre est premier, une méthode consiste à regarder s'il est divisible par les nombres premiers connus, dans l'ordre, en s'arrêtant lorsque le dividende est inférieur au diviseur.

Exercice **12** ► Déterminer sans calculatrice si 221 et 223 sont des nombres premiers.

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Thm • Décomposition en facteurs premiers

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Alors il existe $p_1 < p_2 < \cdots < p_q$ des nombres premiers,
$k_1, k_2, \ldots, k_q$ des exposants entiers strictement positifs
tels que $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_q^{k_q}$.
Les nombres premiers $(p_1, \ldots, p_q)$ et les exposants $(k_1, \ldots, k_q)$ sont uniques.

Exercice **13** ► Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 3 960 et 4 368.

La décomposition en facteurs premiers permet notamment :

1) De déterminer si un nombre divise un autre nombre en comparant les exposants qui apparaissent dans leurs décompositions en facteurs premiers ;
2) De simplifier au maximum l'écriture d'une fraction ou d'une racine carrée d'un entier ;
3) De calculer PGCD et PPCM de deux nombres (paragraphe suivant).

Exercice **14** ► **1)** Dire si 28 est un diviseur de 3960 et si 88 est un diviseur de 3960.
2) Simplifier au maximum $\sqrt{3960}$.

III.3 PGCD et PPCM

Déf. • PGCD et PPCM

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1) On appelle **plus grand diviseur commun de a et b,** en abrégé **PGCD de a et b,** le plus grand entier naturel d tel que d soit simultanément un diviseur de a et un diviseur de b.
2) On appelle **plus petit commun multiple de a et b,** en abrégé **PPCM de a et b,** le plus petit entier naturel m **non nul** tel que m soit simultanément un multiple de a et un multiple de b.

Rem. ◇ Pour le PPCM, on ne regarde que les multiples communs non nuls de a et b car sinon tous les PPCM seraient nuls...
On convient que le PPCM de a et 0 est 0 et que le PGCD de a et 0 est a.

Exercice **15** ► Déterminer le PPCM et le PGCD de : 6 et 20, 3 et 5, 4 et 15.

Nous allons donner deux méthodes pour obtenir efficacement PGCD ou PPCM de deux entiers.

Méth. • Utiliser la décomposition en facteurs premiers des nombres

Pour obtenir le PGCD et le PPCM de deux entiers supérieurs à 2, on peut partir de leur décomposition en facteurs premiers.

1) Le PPCM s'obtient en gardant les facteurs premiers apparaissant dans au moins une des décompositions, à la puissance la plus élevée ;
2) Le PGCD s'obtient en ne gardant que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions, à la puissance la plus faible.

Exercice **16** ► Déterminer PGCD et PPCM de 3960 et 4368 à l'aide de leur décomposition en facteurs premiers.

Nombres rationnels et PGCD et PPCM

- Quand on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le PGCD des deux, on obtient directement la forme irréductible de la fraction.
- Le meilleur dénominateur commun de deux fractions est le PPCM de leurs dénominateurs.

Exercice **17** ► Déterminer PGCD et PPCM de 3960 et 4368 à l'aide de leur décomposition en facteurs premiers.

Exercice **18** ► Simplifier au maximum $\frac{84}{280}$ et calculer $\frac{23}{84} + \frac{11}{280}$.

IV Systèmes linéaires d'équations

Étude de trois exemples :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x-2y+3z=-1 \\ -x+y-2z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x-2y+3z=-2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y+z-2t=1 \\ -7x+6y-z-t=2 \end{cases}$$

IV.1 Vocabulaire

Un **système linéaire** est un système d'équations, à plusieurs inconnues (la plupart du temps x, y, z, t etc.), se présentant sous la forme

$$\begin{cases} \text{(combinaison linéaire n° 1 des inconnues)} = \text{(constante n° 1)} \\ \text{(combinaison linéaire n° 2 des inconnues)} = \text{(constante n° 2)} \\ \quad\vdots \\ \text{(combinaison linéaire n° } n \text{ des inconnues)} = \text{(constante n° } n) \end{cases}$$

Dans chaque **combinaison linéaire** d'inconnues, les inconnues sont multpliées par des constantes (qui peuvent être nulles ou négatives) et ces produits sont additionnés. Les inconnues et les constantes peuvent être réels ou complexes.

Les constantes devant les inconnues sont appelées les **coefficients** du système linéaire ; les constantes à droite des égalités forment le **second membre** du système. Quand le second membre est identiquement nul, on dit que le système est **homogène.**

Chaque **solution du système** est un p-uplet comportant autant de composantes qu'il y a d'inconnues. Si le système admet au moins une solution, on dit qu'il est **compatible** et s'il n'admet aucune solution, qu'il est **incompatible.**

Dans un système linéaire, chaque inconnue apparait toujours dans la même colonne (ce qui peut occasionner des « trous ») et les signes “ égal ” sont alignés verticalement.

IV.2 Systèmes échelonnés, systèmes échelonnés réduits

Un **système échelonné** est un système ayant la forme d'un « escalier » dont les « marches » ont une hauteur d'une ligne. Plus précisément, on peut donner la définition suivante :

Déf. • Système échelonné

Un système linéaire est dit **échelonné** lorsque, dans chaque équation à partir de la deuxième, le terme le plus à gauche se trouve strictement à droite du terme le plus à gauche de la ligne précédente.

Dans un système échelonné, le terme le plus à gauche de chaque ligne est appelé un **pivot.** Le nombre de pivots est appelé le **rang du système.**

Exemple / Contre-exemple

On dit que le système est **échelonné réduit** lorsque deux conditions supplémentaires sont réunies :

Déf. • Système linéaire échelonné réduit

On dit qu'un système linéaire est **échelonné réduit** lorsque :

1) il est échelonné,
2) chaque pivot est seul dans sa colonne,
3) à chaque pivot correspond le coefficient 1.

Exemple

IV.3 Méthode du pivot de Gauss

La **méthode du pivot de Gauss** permet de résoudre tous les systèmes linéaires de manière systématique. Elle consiste à transformer le système étudié en un **système échelonné** puis en un **système échelonné réduit** qui lui sont équivalents. Une fois sous cette forme, l'ensemble des solutions s'obtient immédiatement.

Pour ce faire, on applique **uniquement** des opérations élémentaires sur les lignes du système :

1) **Échange de deux lignes :** $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2) **Multiplication d'une ligne par une constante :** $L_i \leftarrow k\,L_i$.
ind **(attention, on doit impérativement avoir $k \neq 0$)**
3) **Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre (combinaisons de lignes) :** $L_i \leftarrow L_i + k\,L_j$ (ici $i \neq j$ mais k peut être quelconque)

Ces opérations sont « réversibles » : leur effet peut être annulé en appliquant une autre opération de la même famille (respectivement $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \frac{1}{k} L_i$, $L_i \leftarrow L_i - k\,L_j$). Pour cette raison, **chaque opération élémentaire transforme un système en un système équivalent, qui a exactement les mêmes solutions.**

La méthode du pivot de Gauss est une succession de trois phases :

1) L'**échelonnement du système (la « descente »)**
Le but est d'arriver à un système échelonné. On répète de la gauche vers la droite le procédé suivant : on choisit un pivot ; si nécessaire, on le remonte par échange de lignes ; on élimine les termes **en dessous** du pivot par multiplications de lignes et combinaisons de lignes.

2) La **réduction du système (la « remontée »)**
Le but est d'arriver à un système échelonné réduit. On élimine ensuite les termes *au-dessus* de chaque pivot par multiplications et combinaisons de lignes. On divise ensuite chaque ligne par le coefficient de son pivot.

3) La **conclusion.** Une inconnue qui apparait dans un pivot est une **inconnue principale.** Les autres inconnues sont des **inconnues auxiliaires.** Les inconnues auxiliaires peuvent prendre des valeurs arbitraires : on les passe dans le second membre de chaque équation. Les inconnues principales s'expriment en fonction des constantes et des inconnues auxiliaires. On peut maintenant écrire l'**ensemble des solutions du système.**

Rem. ◇ **1)** À tout moment, il est autorisé de simplifier une ligne en la divisant par une constante non nulle.
2) Lors de l'échelonnement du système, on peut aboutir à des équations contradictoires. On interrompt la résolution est on conclut que le système est incompatible.
3) Il n'y a pas toujours d'inconnues auxiliaires.

On admettra le théorème suivant :

Thm • Nombre de solutions d'un système linéaire
À l'issue de la résolution d'un système linéaire, il n'y a que trois possibilités :
1) le système n'admet **aucune** solution (il est incompatible),
2) le système admet **une unique** solution (il est compatible sans inconnue auxiliaire),
3) le système admet **une infinité** de solutions (il est compatible avec au moins une inconnue auxiliaire).

On sait dans quel cas on se trouve dès la fin de l'échelonnement du système : il suffit de regarder s'il y a des équations incohérentes et de comparer le nombre de pivots et le nombre d'inconnues.

V Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une *fonction* (souvent notée y en mathématiques) plutôt qu'un nombre réel ou complexe (le x auquel on est habitué). Cette équation relie la fonction inconnue y à sa dérivée y', voire à ses dérivées d'ordre supérieur y'', $y^{(3)}$ etc.

Les équations différentielles sont omniprésentes en sciences expérimentales où elles caractérisent l'évolution temporelle de nombreux systèmes.

L'étude des équations différentielles est un vaste domaine mathématique. Nous nous limiterons pour l'instant aux cas les plus simples.

V.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants

Étude de trois exemples

(E_1) $y'(t) - 2\,y(t) = 4$ $\quad$ (E_2) $y'(t) + 3\,y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t}$ $\quad$ (E_3) $y'(t) + y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}$.

Vocabulaire
Ces équations sont de la forme : $\boldsymbol{y'(t) + a\,y(t) = f(t)}$,
ou plus succinctement : $\boldsymbol{y' + a\,y = f(t)}$.

Dans cette écriture :

– y est la **fonction inconnue,** c'est elle que l'on cherche à déterminer. Elle est définie sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ (souvent $\mathbb{R}$ ou $[0, +\infty[$) et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
– t est la **variable** de la fonction. Elle varie dans l'intervalle I.
– a est le **coefficient**. C'est une constante réelle qui est connue.
– f est une fonction, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui est connue. On l'appelle le **second membre** de l'équation différentielle.

On dit que ces équations différentielles sont **du premier ordre** car seules la fonction inconnue y et sa dérivée première y' interviennent. Elle est **linéaire** car dans le membre de gauche, y et y' sont multipliées par des grandeurs connues, puis les résultats sont additionnés.

Ex. ✻ $y'(t) - 2\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^t$ et $y'(t) + 4\,y(t) = 0$ sont deux exemples d'équations de ce type.

On appelle **équation homogène associée** l'équation différentielle où l'on a remplacé le second membre par 0.

Ainsi, l'équation différentielle : $(E)\ \ y'(t)-2\,y(t)=2\,\mathrm{e}^{t}$
a pour équation homogène associée : $(H)\ \ y'(t)-2\,y(t)=0.$

Méthode de résolution

Pour résoudre l'équation différentielle $y'(t)+a\,y(t)=f(t)$, on procède par étapes :

1) **On résout l'équation homogène associée $\boldsymbol{y'(t)+a\,y(t)=0}$.**
Pour cela, on dispose du théorème suivant :

Thm • Solution d'une équa. diff. linéaire homogène, du premier ordre, à coeff. constants
Soit a une constante réelle,
(H) l'équation différentielle $y'(t)+a\,y(t)=0$.
Alors les fonctions solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y_H:\ \ t\mapsto K\,\mathrm{e}^{-a\,t},\quad \text{où } K \text{ est un paramètre réel.}$$

2) **On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.**
Le but est de trouver **un exemple** de fonction y_P qui vérifie l'équation avec second membre. Pour cela, on cherche y_P de forme « analogue » au second membre de l'équation présentant un ou des paramètres.

second membre	forme adéquate pour la sol. part.
constante	$y_P(t)=a$
cte . $\mathrm{e}^{\lambda t}$	$y_P(t)=a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$
cte . $\cos(\omega\,t)$ cte . $\sin(\omega\,t)$ cte . $\cos(\omega\,t)$ + cte . $\sin(\omega\,t)$	$y_P(t)=a\,\cos(\omega\,t)+b\,\sin(\omega\,t)$

On calcule le premier membre de l'équation à partie de la forme choisie, puis on identifie les coefficients pour que y_P soit solution de l'équation différentielle.

Astuce ➠ Si le second membre est solution de l'équation homogène, on multiplie la forme adéquate proposée par t.

3) **On conclut.**
Les solutions de l'équation différentielle avec second membre peuvent toutes s'écrire comme la somme :
– de la solution particulière y_P (obtenue à la deuxième étape),
– et d'une solution quelconque y_H de l'équation homogène associée (obtenue à la première étape).

V.2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

Étude de quatre exemples

$$\begin{array}{ll}(E_1) & y''(t)+3\,y'(t)+2\,y(t)=2\,\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ (E_2) & 4\,y''(t)-4\,y'(t)+y(t)=4\,\mathrm{e}^{t}\\ (E_3) & y''(t)+2\,y'(t)+5\,y(t)=2\,\sin(3t)\\ (E_4) & y''(t)+\omega_0^2\,y(t)=0.\end{array}$$

Vocabulaire

Ces équations sont de la forme : $\boldsymbol{a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)}$,
ou plus succintement : $\boldsymbol{a\,y''+b\,y'+c\,y=f(t)}$.

Le vocabulaire du premier ordre reste valable, à deux détails près :

- Il y a trois coefficients a, b, c (qui restent constants et connus).
- L'équation est du deuxième ordre car y'' apparait en plus de y et y'.
- On introduit **l'équation caractéristique associée** qui est

$$(E_c)\quad a\,r^2+b\,r+c=0.$$

Méthode de résolution

Pour résoudre l'équation différentielle $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$, la méthode est analogue au premier ordre.

1) **On résout l'équation homogène associée $\boldsymbol{a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0}$.**
Pour cela, on dispose du théorème suivant :

Thm • Solution d'une équa. diff. linéaire homogène, du deuxième ordre, à coeff. constants
Soit (a,b,c) trois constantes réelles où $a\neq 0$,
(H) l'équation différentielle $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) dépend des racines de l'équation caractéristique (E_c) :
— Si l'équation caractéristique admet **deux racines réelles distinctes $\boldsymbol{r_1\neq r_2}$:** les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y_H:\ t\mapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 t}+B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$$

où A et B sont deux paramètres réels.

— Si l'équation caractéristique admet **une racine double r_0 :** les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$y_H : t \mapsto (A + B\,t)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$$

où A et B sont deux paramètres réels.

— Si l'équation caractéristique admet **deux racines complexes conjuguées $\lambda \pm i\,\omega$:** les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$y_H : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\left[A\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)\right].$$

où A et B sont deux paramètres réels.

2) On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.
Même technique qu'au premier ordre.

Astuce ➽ Si le second membre est solution de l'équation homogène, on multiplie la forme adéquate proposée par t. S'il est solution *double* de l'équation homogène, on multiplie la forme par t^2.

3) On conclut.
Même principe que pour le premier ordre.

Rem. ◇ La progression en trois étapes (résolution de l'équation homogène, recherche de solution particulière, conclusion par addition des deux conclusions) est commune à toutes les équations différentielles **linéaires.**

V.3 Principe de superposition

Quand le second membre d'une équation différentielle apparait comme une somme de plusieurs termes, pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on peut :

1) Chercher une solution particulière de l'équation obtenue en ne conservant que le premier terme de la somme ; recommencer en ne conservant que le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier ;

2) On obtient autant de fonctions qu'il y a de termes dans le second membre. En les additionnant, on obtient du solution particulière de l'équation complète.

Rem. ◇ Ce principe fonctionne là encore pour toutes les équations différentielles **linéaires.**

V.4 Problèmes de Cauchy

À l'issue de la résolution d'une équation différentielle, il reste une infinité de solutions possibles pour l'inconnue y puisque la conclusion présente un ou deux paramètres (notés A et B dans ce cours). Dans les situations expérimentales, y décrit l'évolution temporelle d'un système physique. Son état au cours du temps est censé être entièrement déterminé par les conditions initiales de l'expérience.

Mathématiquement, si l'on ajoute à l'équation différentielle :

– une condition initiale pour les équations du premier ordre,
– deux conditions initiales pour les équations du deuxième ordre,

on démontre qu'il ne subsiste plus qu'une seule fonction y qui convient.

Ce principe est formalisé par le théorème suivant :

Thm • Existence et unicité de la solution aux problèmes de Cauchy

1) Soit a une constante réelle, f une fonction continue sur un intervalle I, t_0 un élément de I et α un réel quelconque.
Alors il existe une et une seule fonction y qui est solution du problème de Cauchy du premier ordre :

$$\begin{cases} y'(t) + a\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

2) Soit a, b, c trois constantes réelles telles que $a \neq 0$, f une fonction continue sur un intervalle I, t_0 un élément de I, α et β deux réels quelconques.
Alors il existe une et une seule fonction y qui est solution du problème de Cauchy du deuxième ordre :

$$\begin{cases} a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Ce théorème sera admis. Concrètement, t_0 désigne l'instant initial d'observation du système (en général $t_0 = 0$ en sciences expérientales) et α et β décrivent l'état initial du système (en position et en vitesse).

Pour résoudre un problème de Cauchy, on commence par résoudre l'équation différentielle seule, puis on utilise la ou les conditions initiales pour déterminer la valeur adéquate du ou des paramètres.

V.5 Démonstrations pour le premier ordre

On cherche à résoudre une équation différentielle de la forme

$$(E)\quad y'(t)+a\,y(t)=f(t),$$

où a est une constante réelle, t appartient à intervalle réel I et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme • La fonction h_0 définie par $h_0(t) = \mathrm{e}^{-at}$ est **une** solution de l'équation différentielle homogène

$$(H)\quad y'(t)+a\,y(t)=0.$$

Démo. La fonction h_0 est bien dérivable sur I, et $h_0'(t)=-a\,\mathrm{e}^{-at}$. En remplaçant h_0 dans le premier membre de l'équation (H), on obtient :

$$h_0'(t)+a\,h_0(t)=-a\,\mathrm{e}^{-at}+a\,\mathrm{e}^{-at}=0,$$

ce qui prouve que h_0 est solution de l'équation différentielle (H).

Thm • Solutions de l'équation homogène

Les fonctions solutions de l'équation homogène

$$(H)\quad y'(t)+a\,y(t)=0$$

sont les fonctions h de la forme

$$h(t)=C\,\mathrm{e}^{-at}\quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Démo. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable quelconque. Rappelons que $\mathrm{e}^{-at} \neq 0$. On peut donc poser

$$z(t)=\frac{y(t)}{\mathrm{e}^{-at}}=y(t)\mathrm{e}^{at}.$$

Nous souhaitons montrer que y est solution de (H) si et seulement si c'est un multiple de $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$, autrement dit, si et seulement si z est une fonction constante. Or la fonction z est dérivable et on a

$$z'(t)=y'(t)\times \mathrm{e}^{at}+y(t)\times a\,\mathrm{e}^{at}=\big(y'(t)+a\,y(t)\big)\mathrm{e}^{at}.$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (H) par équivalence :

y est solution de (H)

$\iff y'(t)+a\,y(t)=0$

$\iff \big(y'(t)+a\,y(t)\big)\mathrm{e}^{at}=0 \quad (\times \mathrm{e}^{at}\neq 0)$

$\iff z'(t)=0$

$\iff$ z est une fonction constante sur I

$\iff$ il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $z(t)=C$ pour tout $t\in I$

$\iff$ il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $y(t)/\mathrm{e}^{-at}=C$ pour tout $t\in I$

$\iff$ il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $y(t)=C\,\mathrm{e}^{-at}$ pour tout $t\in I$.

Thm • Solutions générale de l'équation différentielle

Soit $a\in\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad y'(t)+a\,y(t)=f(t).$$

On suppose que l'on connait une solution particulière y_0 de cette équation différentielle.

Alors les solutions de (E) sont les fonctions qui sont somme de y_0 et d'une solution h de l'équation homogène associée.

Rem. ◇ Il restera à prouver que, quel que soit le second membre f, il existe toujours une solution particulière y_0. Ce sera fait dans le cours *Calcul intégral*.

Démo. Prenons y une fonction dérivable quelconque, y_0 la solution particulière évoquée dans l'énoncé. On a donc

$$y_0'(t)+a\,y_0(t)=f(t).$$

Posons $\delta(t)=y(t)-y_0(t)$. On a donc $y(t)=y_0(t)+\delta(t)$ et $y'(t)=y_0'(t)+\delta'(t)$. Voyons maintenant à quelle condition y est solution de (E) :

y est solution de (E)

$\iff y'(t)+a\,y(t)=f(t)$

$\iff y_0'(t)+\delta'(t)+a\big(y_0(t)+\delta(t)\big)=f(t)$

$\iff \big(y_0'(t)+a\,y_0(t)\big)+\big(\delta'(t)+a\,\delta(t)\big)=f(t)$

$\iff f(t)+\big(\delta'(t)+a\,\delta(t)\big)=f(t)$

$\iff \delta'(t)+a\,\delta(t)=0$

$\iff$ la fonction δ est solution de (H)

$\iff$ y est somme de y_0 et d'une solution de (H).

Thm • Principe de superposition

Soit a une constante réelle, f_1 et f_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère les équations différentielles

$$(E_1)\ \ y'(t)+a\,y(t)=f_1(t)\quad \text{et}\quad (E_2)\ \ y'(t)+a\,y(t)=f_2(t),$$

et on dispose d'une solutions particulière de chaque équation (E_1) et (E_2), que l'on note y_1 et y_2.

Alors la fonction somme y_1+y_2 est solution particulière de l'équation

$$(E)\quad y'(t)+a\,y(t)=f_1(t)+f_2(t).$$

Démo. D'après les hypothèses, on a

$$y_1'(t)+a\,y_1(t)=f_1(t)\quad \text{et}\quad y_2'(t)+a\,y_2(t)=f_2(t).$$

Posons $y_0(t)=y_1(t)+y_2(t)$. La fonction y_0 est dérivable et on a

$$\begin{aligned} y_0'(t)+a\,y_0(t)&=\big(y_1'(t)+y_2'(t)\big)+a\big(y_1(t)+y_2(t)\big)\\ &=\big(y_1'(t)+a\,y_1(t)\big)+a\big(y_2'(t)+a\,y_2(t)\big)\\ &=f_1(t)+f_2(t)\end{aligned}$$

donc y_0 est bien une solution de l'équation différentielle (E).

Thm • Problème de Cauchy du premier ordre

Soit I un intervalle, $a \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ fixés. Alors le **problème de Cauchy**

$$(C) \quad \begin{cases} y'(t) + a\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

admet une unique solution y_C.

Démo. Nous avons vu que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme

$$y(t) = y_0(t) + C\,\mathrm{e}^{-at}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Soit y une telle solution. On a Il suffit d'ajuster la valeur du paramètre C pour que la condition initiale soit satisfaite :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution du problème de Cauchy } (C) \\ \iff \quad & y(t_0) = \alpha \\ \iff \quad & y_0(t_0) + C\,\mathrm{e}^{-at_0} = \alpha \\ \iff \quad & C\,\mathrm{e}^{-at_0} = \alpha - y_0(t_0) \\ \iff \quad & C = \big(\alpha - y_0(t_0)\big)\mathrm{e}^{at_0} \quad (\times \mathrm{e}^{at_0} \neq 0). \end{aligned}$$

Une et une seule valeur de C convient : cela signifie que le problème de Cauchy admet une unique solution.