

Inégalité Isopérimétrique

Marine MALO
Coralie RENAULT

Mai 2012

École normale supérieure de Cachan, antenne de Bretagne
Sous la direction de Rozenn TEXIER-PICARD



Medieval map of Paris.

Table des matières

1	Inégalité isopérimétrique dans \mathbb{R}^2	4
1.1	Dualité	4
1.2	Pseudo-preuve de Steiner	4
1.3	Cas des fonctions \mathcal{C}^1	5
1.3.1	Les bases Hilbertiennes	5
1.3.2	En utilisant l'inégalité de Wirtinger	8
2	Espace de Sobolev	14
3	Inégalité Isopérimétrique dans \mathbb{R}^n	19
4	Remerciements	23

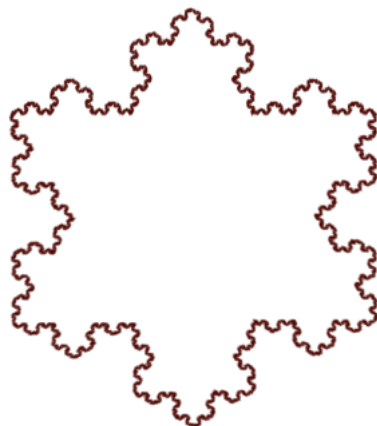


FIGURE 1 – Flocon de Koch

Au V^e siècle après JC, Proclus, un philosophe grec a écrit *"Le cercle est la première, la plus simple et la plus parfaite des figures"*. La symétrie parfaite du cercle justifie ce statut et c'est à la reine Didon que l'on doit l'une des plus belles propriétés du cercle appelée la propriété isopérimétrique du cercle.

Le poète romain Virgile a, en effet, raconté l'histoire de la reine Didon dans son livre *Enéide*. Didon était une princesse phénicienne qui venait de la cité de Tyre et qui dut quitter la ville lorsque son frère tua son mari pour obtenir ses biens. Elle arriva alors en Afrique en 900 avant JC et s'arrêta à ce qui deviendra plus tard la ville de Carthage. Elle essaya d'obtenir auprès du Roi de la ville, Jorbas, de nouvelles terres pour elle et les gens qui l'accompagnaient. Ils passèrent un marché : la Reine pourrait devenir propriétaire mais uniquement de la terre qu'elle pourrait encercler avec la peau d'un boeuf. Elle commença par faire découper la peau du boeuf en plusieurs lanières afin de fabriquer une corde puis chercha l'aire maximale qu'elle pourrait encercler. Plus précisément, elle chercha à résoudre le problème mathématique suivant : *"Parmi toutes les courbes possibles à périmètre fixé quelle est celle qui possède l'aire maximale ?"*. On peut supposer que Didon trouva la réponse qui est le cercle et obtint une terre de surface comprise entre 25 et 60 hectares. Si les deux bouts de la ficelle avaient été fixés sur les bords de la mer Méditerranée, elle aurait obtenu encore plus de terres, en étendant la corde en une forme de demi-cercle. Ceci fut fait dans d'autres villes. En effet, si on regarde des cartes de cités médiévales européennes entourées par une muraille, on peut voir que d'autres ont tiré les mêmes conclusions que la reine Didon.

Nous allons donc nous intéresser à plusieurs preuves de l'inégalité isopérimétrique. Une différence fondamentale entre ses preuves réside dans les espaces sur lesquels nous travaillons. Pour commencer, la démonstration de Steiner est valable pour les courbes \mathcal{C}_{PM}^1 de périmètre fini.

Concernant la démonstration avec les bases hilbertiennes, les courbes sont \mathcal{C}^1 .

Pour la démonstration utilisant l'inégalité de Wirtinger, les courbes sont \mathcal{C}^1 dans un premier temps. Puis nous montrons que la démonstration reste vraie pour les fonctions appartenant aux espaces de Sobolev en utilisant la densité.

Cependant, certaines formes ne sont pas admissibles comme le flocon de Koch (voir figure1, page 3) qui a un périmètre infini.

1 Inégalité isopérimétrique dans \mathbb{R}^2

1.1 Dualité

Il existe une sorte de dualité dans le problème d'isopérimétrie. On peut s'intéresser à “ parmi toutes les courbes à périmètre donné quelle est celle qui possède l'aire maximale ?” ou bien à une propriété de minimalité vérifiée par le cercle qui est : “parmi toute les figures planes qui possèdent la même aire, le disque a le plus petit périmètre”. Ainsi, si on considère une courbe fermée \mathcal{C} de périmètre L et qu'elle enferme une aire A , il existe un cercle de périmètre L . Notons r le rayon de ce cercle, on a donc $L = 2\pi r$. Le cercle délimite un disque d'aire égale à πr^2 . Par la propriété d'isopérimétrie du cercle, l'aire contenue par la courbe \mathcal{C} ne peut pas être plus grande que πr^2 et est égale à πr^2 si et seulement si \mathcal{C} est un cercle. Nous avons donc :

$$\pi r^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi}L^2$$

et nous obtenons donc l'inégalité isopérimétrique :

$$A \leq \frac{1}{4\pi}L^2$$

où l'on a égalité lorsque la courbe est un cercle.

A partir de l'inégalité, il est facile de retrouver que parmi toutes les figures de mêmes aires, le disque a le plus petit périmètre. En effet, considérons une figure plane arbitraire de périmètre L et d'aire A . Soit D le disque d'aire A et de périmètre l alors on a $l^2 4\pi = A$. Il s'ensuit que $L \geq l$ car $L < l$ implique que l'inégalité isopérimétrique n'est pas respectée.

Ainsi, les deux caractérisations du disque sont deux formulations équivalentes de la propriété d'isopérimétrie du cercle. On peut d'ailleurs noter que la propriété de minimisation explique pourquoi les gouttelettes d'huiles au dessus de votre soupe sont circulaires et non triangulaires ou bien hexagonales car la tache va chercher à minimiser son énergie. Cette dernière dérive d'une force de tension superficielle qui est proportionnelle à sa surface .

1.2 Pseudo-preuve de Steiner

En 1836, Jacob Steiner a donné une “pseudo-preuve” de l'inégalité isopérimétrique par condition nécessaire. En effet, pour développer sa preuve il part du principe qu'il existe une solution à son problème c'est-à-dire qu'il existe une courbe qui parmi toute les courbes fermées à périmètre donné contient la plus grande aire. L'existence de la solution ne sera pas traitée ici et a été prouvée plus tard par Weierstrass en utilisant le calcul variationnel.

Le raisonnement de Steiner est le suivant : Soit \mathcal{C} la courbe recherchée, on aimerait montrer que c'est un cercle. On va utiliser l'outil qu'il a développé : la symétrisation de Steiner.

Première étape : La forme que l'on cherche est convexe. On rappelle que la courbe est convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in S^2, [x, y] \subset S$ où S est la surface délimitée par la courbe. Si la forme n'était pas convexe alors il existerait au moins deux points P et Q sur la courbe tel que le segment n'est pas inclus dans la surface, il y aurait donc un “creux” entre la surface et le segment. On pourrait donc créer une nouvelle courbe \mathcal{C}' qui aurait le même périmètre mais une aire plus grande qui serait obtenue en effectuant la symétrie du “creux” par rapport au segment. Cela contredirait notre hypothèse de départ qui était que \mathcal{C} était la courbe qui contenait la plus grande aire. (voir figure3, page 6))

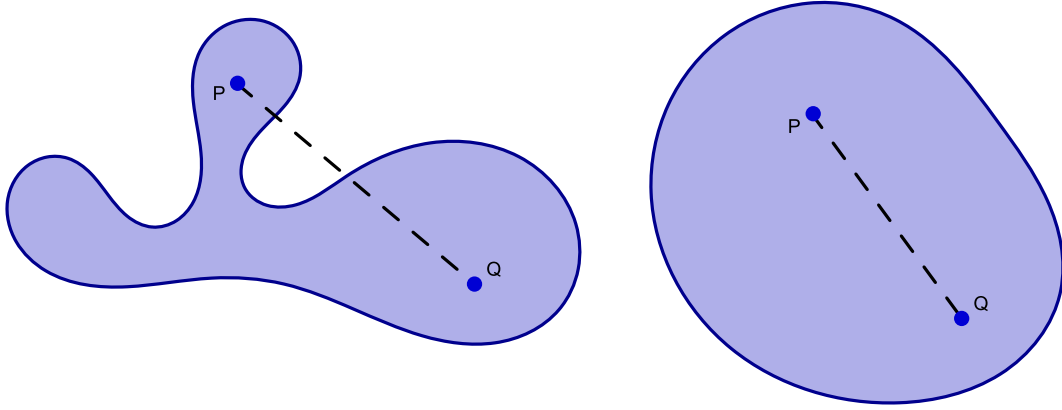


FIGURE 2 – Exemple de partie non-convexe (à gauche) et convexe (à droite)

Deuxième étape : B et B' ont la même aire Choisissons deux points R et S sur la courbe convexe \mathcal{C} de tel sorte qu'ils divisent la courbe en deux arcs d'égale longueur \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' . $[RS]$ coupe la surface S en deux surfaces B et B' . La propriété d'optimalité de la courbe \mathcal{C} implique que B et B' ont la même aire.

En effet, supposons que l'aire de B' soit plus importante que celle de B . Si on considère la courbe obtenue en effectuant la symétrie de B' par rapport à $[RS]$ (on parle de l'image miroir de B') on obtient une nouvelle surface S' d'aire plus grande que S et de même périmètre donc la courbe \mathcal{C} ne serait pas celle cherchée car on aurait trouvé une autre courbe de même périmètre mais d'aire plus grande. On arrive à une contradiction donc B et B' ont la même aire.

Troisième étape : \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' sont des demi-cercles ainsi \mathcal{C} est un cercle. Supposons par l'absurde que l'un des deux arcs n'est pas un demi cercle, \mathcal{C}' par exemple. On sait que $\exists A \in \mathcal{C}'$ tel que $\alpha = \widehat{RAS} \neq \frac{\pi}{2}$. Imaginons maintenant que les côtés AR et AS pourraient être déplacés par une charnière placée en A , nous pourrions ainsi augmenter ou diminuer l'angle de l'articulation. De plus, on suppose que les deux surfaces G et E (voir figure4, page 6) ont été fixées de manière rigide aux bras de la charnière et qu'ils bougent lorsque l'angle entre les deux bras est modifié. On peut ainsi faire en sorte d'obtenir un angle α égal à $\frac{\pi}{2}$ en augmentant l'air du triangle RAS (En effet, les points R et S ont des positions différentes). Si on effectue la symétrie par rapport à $[RS]$, on obtient une nouvelle figure qui a le même périmètre que \mathcal{C}' mais une aire plus grande donc on arrive à une contradiction avec la définition de \mathcal{C} . Ainsi \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' sont des demi-cercles donc \mathcal{C} est un cercle.

1.3 Cas des fonctions \mathcal{C}^1

1.3.1 Les bases Hilbertiennes

On se donne une courbe \mathcal{C} régulière, simple, fermée, de classe \mathcal{C}^1 de longueur totale L et d'aire intérieure S .

On peut donc définir \mathcal{C} par une représentation normale $s \mapsto f(s)$. c'est à dire $\|f'(s)\| = 1 \forall s$

Considérons f comme une fonction à valeurs complexes, soit $f(s) = u(s) + iv(s)$, où u et v sont deux applications à valeurs réelles, L -périodiques et de classe \mathcal{C}^1 , f est donc \mathcal{C}^1 .

Notons alors les résultats suivants :

$$|f'(s)|^2 = (u'(s))^2 + (v'(s))^2 = 1 \quad (1)$$

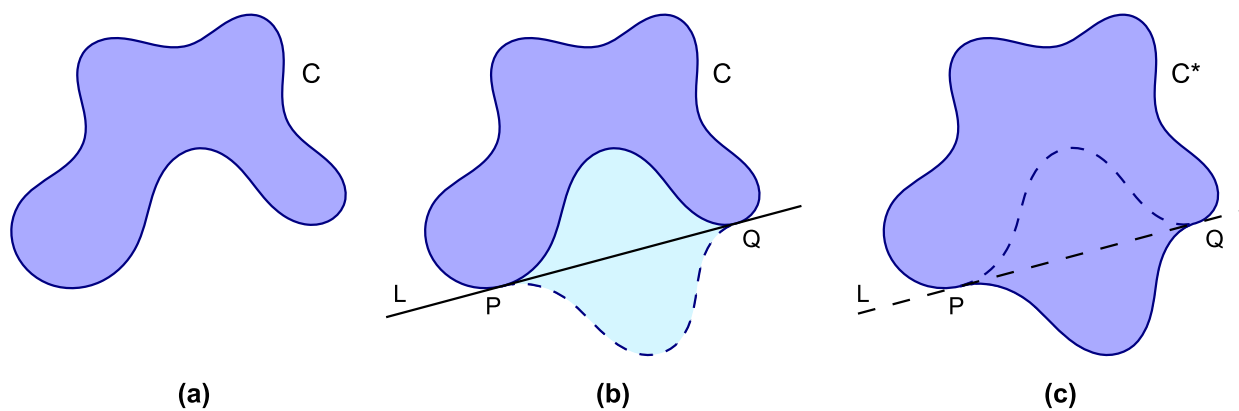


FIGURE 3 – (a) Une partie non-convexe régulière. (b) Existence de P et Q (c) Construction de l'image miroir

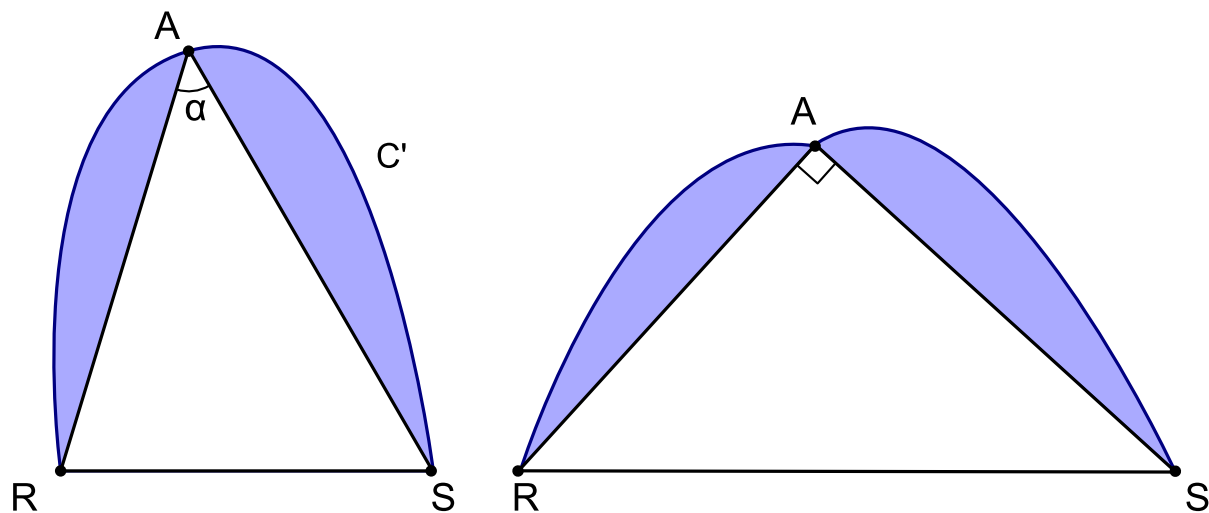


FIGURE 4 – Utilisation d'un argument mécanique

$$S = \int_0^L u(s)v'(s)ds = \frac{1}{2}Im \left(\int_0^L f'(s)\overline{f(s)}ds \right)$$

D'après l'égalité (1), on a

$$L = \int_0^L |f'(t)|^2 dt$$

$$\text{soit } L^2 = L \int_0^L |f'(t)|^2 dt$$

Ainsi, si on note $\Delta = L^2 - 4\pi S$ on a :

$$\Delta = L \int_0^L |f'(t)|^2 dt - 4\pi \int_0^L u(s)v'(s)ds$$

$$\text{d'où } \Delta = L \int_0^L |f'(t)|^2 dt - 2\pi Im \left(\int_0^L f'(s)\overline{f(s)}ds \right)$$

Nous allons maintenant utiliser le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si x et y sont deux éléments de H , alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Mais f et f' sont deux éléments de L_L^2 (fonction qui appartiennent à $L^2(\mathbb{T}_L)$ où $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$) De plus on note $c_n(f)$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f . On a donc

$$\langle f', f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f'(s)\overline{f(s)}ds = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f', e_n \rangle \overline{\langle f, e_n \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f') \overline{c_n(f)}$$

On a une relation entre les coefficients de Fourier de f et f' :

$$c_n(f) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} dt$$

On intègre par parties :

$$\begin{cases} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} & v(t) = \frac{-L}{2i\pi n} e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{L} \left[\left[\frac{-f(t)L}{i2\pi n} e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} \right]_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-f'(t)L}{i2\pi n} e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} dt \right] \\
&= \frac{1}{L} \left[\frac{-f(\frac{L}{2})L}{i2\pi n} e^{-\pi n} + \frac{f(\frac{-L}{2})L}{i2\pi n} e^{i\pi n} + \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{f'(t)L}{i2\pi n} e^{\frac{-i2\pi nt}{L}} dt \right]
\end{aligned}$$

Or on a $f(\frac{L}{2}) = f(\frac{-L}{2})$ d'où :

$$\frac{2i\pi n}{L} c_n(f) = c_n(f')$$

Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f') \overline{c_n(f)} = \frac{2i\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(f)|^2$

D'autre part f' vérifie l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{L} \int_0^T |f'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$$

Donc on a :

$$\Delta = L \int_0^L |f'(t)|^2 dt - 2\pi \operatorname{Im} \left(\int_0^L f'(s) \overline{f(s)} ds \right) = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 - 4\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(f)|^2$$

D'où :

$$\Delta = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 - n) |c_n(f)|^2 = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n(n-1) |c_n(f)|^2$$

Ainsi $\Delta \geq 0$ donc $L^2 \geq 4\pi S$.

Si on a l'égalité, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 - n) |c_n(f)|^2 = 0$, cela implique que $c_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$
Or f est \mathcal{C}^1 donc égale à sa série de Fourier (d'après le théorème de Dirichlet) donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}} = c_0(f) + c_1(f) e^{\frac{2i\pi t}{L}}$$

On a donc que f est la paramétrisation d'un cercle.

1.3.2 En utilisant l'inégalité de Wirtinger

On considère $\mathcal{C}_{per}^1([a, b]) = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]), u(a) = u(b)\}$

Théorème 2 (Inégalité de Wirtinger)

$$X = \{u \in \mathcal{C}_{per}^1([-1, 1]), \int_{-1}^1 u(x) dx = 0\}.$$

$$\text{alors } \forall u \in X, \int_{-1}^1 u'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u(x)^2 dx.$$

De plus, on a égalité ssi il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$

Démonstration Preuve inspirée de celle de Hurwitz :

Première étape : Montrons dans un premier temps le résultat pour $u \in X \cap \mathcal{C}^2([-1, 1]) = \mathcal{C}_{per}^2([-1, 1])$. u est alors développable en série de Fourier et s'écrit

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)] \text{ pour tout } x \in [-1, 1]$$

$$a_0 = 0 \text{ car } \int_{-1}^1 u(x) dx = 0.$$

Ainsi on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)]$ pour tout $x \in [-1, 1]$ converge simplement vers u sur $[-1, 1]$. De plus $x \mapsto a_n(x) \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ et $\pi \sum_{n=1}^{+\infty} [-na_n \sin(n\pi x) + nb_n \sin(n\pi x)]$ converge uniformément sur tout $[a, b] \subset [-1, 1]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme et on obtient

$$u'(x) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} [-na_n \sin(n\pi x) + nb_n \sin(n\pi x)].$$

En utilisant la formule de Parseval, on obtient

$$\int_{-1}^1 u(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\int_{-1}^1 u'(x)^2 dx = \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2).$$

d'où $\forall u \in X \cap \mathcal{C}^2([-1, 1])$

$$\int_{-1}^1 u'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u(x)^2 dx.$$

Cas d'égalité : $a_n = b_n = 0$ pour $n \geq 2$ d'où $u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$

Deuxième étape : On introduit le lemme suivant :

Lemme 1

Les fonctions $\mathcal{C}^2([a, b])$ sont denses dans les fonctions $\mathcal{C}^1([a, b])$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ pour la norme $\|f\|^2 = \int_a^b (f^2 + f'^2)$

Démonstration du lemme : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on cherche à approximer f par une fonction

$$f_n \in \mathcal{C}^2([a, b]) \text{ pour } \|\cdot\| \text{ définie par } \forall g \in \mathcal{C}^1([a, b]), \|g\|^2 = \int_a^b (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2) dx.$$

$f' \in \mathcal{C}^0([a, b])$ donc d'après le théorème de Weierstrass, il existe $g_n \in \mathcal{C}^2([a, b])$ tel que $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} f'$.

On pose $f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$. On veut montrer que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} f$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_0^x g_n(t) dt - \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |g_n(t) - f'(t)| dt \\ &\leq b \|g_n - f'\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|||_\infty} f$.

Montrons maintenant la convergence pour la norme $\| \cdot \|$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2 &= \int_a^b |f_n - f|^2 + |f'_n - f'|^2 \\ &= \int_a^b |f_n - f|^2 + |g_n - f'|^2 \\ &\leq (b-a)(b^2+1) \|g_n - f'\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|||_\infty} f$ ■

Retour sur la preuve de l'inégalité de Wirtinger, on conclut par densité en utilisant le lemme précédent.

Cas général :

On rappelle que l'on note $\|f\|_2^2 = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$

L'inégalité de Wirtinger équivaut donc à montrer que $\|u'\|_2 \geq \pi \|u\|_2$.

Soit $u \in X$ et soit $\varepsilon > 0$ d'après le lemme, il existe $v \in \mathcal{C}^2[-1, 1]$ tel que $\|u - v\| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{cases} \|u - v\|_2 \leq \|u - v\| \leq \varepsilon \\ \|(u - v)'\|_2 \leq \|u - v\| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

et d'après la première partie de la démonstration on a :

$$\|v'\|_2 \geq \pi \|v\|_2.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \pi \|u\|_2 &\leq \pi (\|u - v\|_2 + \|v\|_2) \\ &\leq \pi \varepsilon + \pi \|v\|_2 \\ &\leq \pi \varepsilon + \pi \|v'\|_2 \\ &\leq \pi \varepsilon + \|v' - u'\|_2 + \|u'\|_2 \\ &\leq (1 + \pi) \varepsilon + \|u'\|_2 \end{aligned}$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\pi \|u\|_2 \leq \|u'\|_2$ ■

Corollaire 1

$\forall u, v \in \mathcal{C}_{per}^1([-1, 1])$

$$\int_{-1}^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2) dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx.$$

De plus, on a égalité ssi il existe $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ constantes telles que $\forall x \in [-1, 1], (u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2$.

Démonstration : Tout d'abord, on peut remarquer que si l'on remplace u par $u - r_1$ et v par $v - r_2$, l'inégalité reste la même. Par translation, les fonctions restent \mathcal{C}_{per}^1 . C'est pourquoi, on peut supposer que $\int_{-1}^1 u(x) dx = \int_{-1}^1 v(x) dx = 0$

On prend ainsi $u, v \in X = \{u \in \mathcal{C}_{per}^1([-1, 1]) : \int_{-1}^1 u(x) dx = 0\}$

$$\int_{-1}^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2 - 2\pi u(x)v'(x))dx = \int_{-1}^1 (v'(x) - \pi u(x))^2 dx + \int_{-1}^1 (u'(x)^2 - \pi^2 u(x)^2) dx.$$

Le premier terme est clairement positif et le second l'est d'après le théorème précédent. On a alors l'inégalité voulue.

Cas d'égalité :

$$\int_{-1}^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2 - 2\pi u(x)v'(x))dx = 0$$

$$\text{d'où } \int_{-1}^1 (v'(x) - \pi u(x))^2 dx = 0 \text{ ie } v' = \pi u$$

$$\text{et } \int_{-1}^1 (u'(x)^2 - \pi^2 u(x)^2) dx = 0$$

D'après le théorème précédent, ceci implique :

$$u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$$

$$v(x) = \alpha \sin(\pi x) - \beta \cos(\pi x)$$

Et donc $u^2 + v^2 = 0$. Ceci conclut la preuve d'après la remarque préliminaire. ■

Théorème 3 (*Inégalité isopérimétrique*)

Prenons $u, v \in \mathcal{C}_{per}^1([a, b])$ et posons

$$L(u, v) = \int_a^b \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx.$$

$$M(u, v) = \frac{1}{2} \int_a^b (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

qui correspondent respectivement à la longueur et à l'aire de la courbe (u, v) .

Alors $\forall u, v \in \mathcal{C}_{per}^1([a, b])$

$$(L(u, v))^2 - 4\pi M(u, v) \geq 0.$$

De plus, pour tout $u, v \in \mathcal{C}_{per}^1([a, b])$, on a égalité ssi $(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2$ avec $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ constantes.

Démonstration : On suppose dans un premier temps que $u'(x)^2 + v'(x)^2 > 0$

Commençons par paramétriser la courbe à l'aide de l'abscisse curviligne. On va se ramener à un paramètre $y \in [-1, 1]$, équivalent à l'abscisse curviligne à une fonction affine près.

$$\begin{cases} y = \eta(x) = -1 + \frac{2}{L(u, v)} \int_a^x \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx. \\ \varphi(y) = u(\eta^{-1}(y)). \\ \psi(y) = v(\eta^{-1}(y)) \end{cases}$$

φ et $\psi \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ comme composée de fonctions \mathcal{C}^1 .

$$\varphi'(y) = \eta'^{-1}(y) u'(\eta^{-1}(y)) = \frac{1}{\eta'(x)} u'(\eta^{-1}(y)).$$

$$\text{or } \eta'(x) = \frac{2}{L(u, v)} \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \varphi'(y) = \frac{L(u, v)}{2\sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2}} u'(x). \\ \psi'(y) = \frac{L(u, v)}{2\sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2}} v'(x) \end{cases}$$

$$\text{d'où } \sqrt{\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2} = \frac{L(u, v)}{2} \frac{\sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2}}{\sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2}}$$

$$\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} = \frac{L(u, v)}{2}.$$

On en déduit

$$\int_{-1}^1 \frac{L(u, v)}{2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2} dy.$$

$$L(u, v) = \int_{-1}^1 \sqrt{\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2} dy.$$

$$L(u, v)^2 = 4(\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2).$$

$$2L(u, v)^2 = 4 \int_{-1}^1 \varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2 dy.$$

$$L(u, v) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2} dy.$$

On pose ensuite $M(u, v) = \int_{-1}^1 \varphi(y)\psi'(y)dy$

D'après le corollaire, nous avons que

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}_{per}^1, \int_{-1}^1 (\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2) dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 \varphi(x)\psi'(x) dx.$$

Ceci implique que $\frac{L(u, v)^2}{2} \geq 2\pi M(u, v)$

Soit $L(u, v)^2 - 4\pi M(u, v) \geq 0 \forall u, v \in \mathcal{C}_{per}^1([a, b])$ ■

Remarque 1

L hypothèse $u'(x)^2 + v'(x)^2 > 0 \forall x \in [a, b]$ n'est pas indispensable.

1ère étape : Notons pour $a \leq \alpha < \beta \leq b$

$$\begin{cases} \tilde{L}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx \\ \tilde{M}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v'(x) dx \end{cases}$$

On a alors

$$\tilde{L}(a, b) = L(u, v).$$

$$\tilde{M}(a, b) = M(u, v).$$

On considère $O = \{x \in]a, b[: u'(x)^2 + v'(x)^2 > 0\}$

Cas $O =]a, b[$ traité précédemment

Cas $O = \emptyset$ résultat trivial.

On suppose donc que $O \neq \emptyset$

$u, v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ donc u' et v' sont continues ainsi O est ouvert. On peut trouver $a \leq a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} \leq b, \forall i \geq 1$ tel que $O = \cup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$.

En effet, soit O ouvert de \mathbb{R} , soient $C_i, i \in I$ ses composantes connexes. $C_i =]m_i, n_i[$. Montrons que I est dénombrable. Pour cela, on va construire une injection de I dans \mathbb{N} . On pose

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{N}$$

$$i \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}, q_n \in C_i\} \text{ où } \mathbb{Q} = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Les composantes connexes sont disjointes donc si $q_n \notin C_i \cap C_j$ alors $i \neq j$ donc ϕ est une injection.

Pour $x \in O^c$, $u'^2 + v'^2 = 0$ et donc $\tilde{L}(b_i, a_{i+1}) = \tilde{M}(b_i, a_{i+1}) = 0$

2ème étape : Pour paramétrer la courbe, on choisit un multiple de l'abscisse curviligne.

$$\begin{cases} y = \eta(x) = -1 + \frac{2}{L(u, v)} \int_a^x \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx, \forall x \in]a_i, b_i[\\ \varphi(y) = u(\eta^{-1}(y)) \\ \psi(y) = v(\eta^{-1}(y)) \end{cases}$$

$]a_i, b_i[\subset O$ donc cette paramétrisation a bien un sens. On pose

$$\begin{cases} \alpha_i = -1 + 2 \frac{L(a, a_i)}{L(a, b)} \\ \beta_i = -1 + 2 \frac{L(a, b_i)}{L(a, b)} \end{cases}$$

$$\beta_i - \alpha_i = \frac{2}{L(a, b)} \left(\int_a^{b_i} \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx - \int_a^a \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx \right)$$

$$\beta_i - \alpha_i = 2 \frac{L(a_i, b_i)}{L(a, b)}.$$

$$\beta_i = -1 + 2 \frac{L(a, a_{i+1}) + L(a_{i+1}, b_i)}{L(a, b)} \text{ par linéarité de l'intégrale or } L(a_{i+1}, b_i) = 0 \text{ donc } \beta_i = \alpha_{i+1}$$

et $\cup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i] = \cup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \alpha_{i+1}] = [-1, 1]$.

Pour $u \in]\alpha_i, \beta_i[, \sqrt{\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2} = \frac{L(a, b)}{2}$ comme montré précédemment.

$$\frac{L(a_i, b_i)}{\beta_i - \alpha_i} = \frac{L(a_i, b_i)}{2 \frac{L(a_i, b_i)}{L(a, b)}} = \frac{L(a, b)}{2}.$$

Or $\varphi(\alpha_i) = u(a_i)$, $\varphi(\beta_i) = u(b_i)$, $\psi(\alpha_i) = v(a_i)$, $\psi(\beta_i) = v(b_i)$

Soient $\varphi, \psi' \in \mathcal{C}_{per}^1([-1, 1])$

$$L(a_i, b_i) = \frac{2}{L(a, b)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2) dy.$$

En effet, $\frac{2}{L(a, b)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2) dy = \frac{2}{L(a, b)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{L(a, b)^2}{4} dy = \frac{L(a, b)}{2} (\beta_i - \alpha_i) = L(a_i, b_i)$.

Puis $L(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} L(a_i, b_i) = \frac{2}{L(a, b)} \int_{-1}^1 (\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2) dy$, on a également

$$M(a, b) = \sum_{i=1}^{+\infty} M(a_i, b_i) = \int_{-1}^1 \varphi(y) \psi'(y) dy$$

Puis, on conclut en utilisant le corollaire :

$$[L(u, v)]^2 - 4\pi M(u, v) = [L(a, b)]^2 - 4\pi M(a, b) = 2 \int_{-1}^1 (\varphi'(y)^2 + \psi'(y)^2) dy - 4\pi \int_{-1}^1 \varphi(y) \psi'(y) dy \geq 0.$$

2 Espace de Sobolev

Une envie naturelle est d'appliquer l'inégalité isopérimétrique à des formes géométriques comme le carré. Mais une telle courbe n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . On ne peut donc pas appliquer l'inégalité isopérimétrique telle qu'on l'a démontrée. On a donc besoin d'introduire une nouvelle classe de fonctions qui englobe ce genre de courbes et pour lesquelles l'inégalité est toujours vraie. On introduit pour cela les espaces de Sobolev.

Soit $I =]a, b[$ intervalle borné ou non et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p(I), \exists g \in \mathcal{L}^p(I) \text{ tel que } \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty \int_a^b u \varphi' = - \int_a^b g \varphi\}.$$

Pour $u \in W^{1,p}$, on note $u' = g$ et on l'appelle dérivée faible de u .

On travaillera essentiellement avec $H^1(I) = W^{1,2}(I)$

Remarque 2

Il est clair que si $u \in \mathcal{C}^1 \cap L^p(I)$ et si $u' \in L^p(I)$ (ici u' est la dérivée usuelle de u) alors $u \in W^{1,p}(I)$. De plus, la dérivée usuelle de u coïncide avec la dérivée de u au sens $W^{1,p}$. En particulier, si I est borné alors $\mathcal{C}^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$

Exemple 1

Soit $I =]-1, 1[$ et $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Soit } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty \quad J = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 x\varphi'(x)dx$$

Après une intégration par parties, on obtient :

$$J = \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx$$

Or $\varphi(1) = 0$ car $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et donc $J = - \int_0^1 H(x)\varphi(x)dx$ avec

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

donc $u \in W^{1,p}(I)$ et $u' = H$ mais $u \notin \mathcal{C}^1(I)$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Dans l'exemple précédent, la fonction quoique non dérivable était quand même \mathcal{C}_{PM}^1 . Voyons l'exemple d'une fonction appartenant à $W^{1,2}$ mais n'étant pas \mathcal{C}_{PM}^1 .

Exemple 2

Soit $I =]-1, 1[$ et $u(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La dérivée faible de u est alors $u'(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{4}}} \in L^2([-1, 1])$ Ainsi $u \in W^{1,2}([-1, 1])$ mais u n'est pas \mathcal{C}_{PM}^1 car admet une dérivée infinie en 0.

La démonstration de Steiner n'est pas valable pour ce genre de courbes, pourtant grâce à la démonstration qui suit on prouve que de telles courbes vérifient l'inégalité isopérimétrique.

Notations : L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

la norme associée $\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Théorème 4 (Théorème de densité)

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}$.

Démonstration : admise ■

Revenons maintenant sur la preuve de l'inégalité de Wirtinger dans la cas où les fonctions sont dans $W^{1,2}(I)$.

Lemme 2

Si $u \in W^{1,2}(a, b)$ alors il existe un unique $v \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que $u = v$ pp sur $[a, b]$ et $v(x) = c + \int_a^x u'(t)dt$ où c est une constante. u est appelé représentant continu.

Démonstration : Nous ne démontrerons pas ce lemme ici, pour plus de détails voir référence n°4. ■

Ce lemme permet de donner un sens à la définition suivante (quitte à prendre un représentant continu de la fonction u) :

$$W_{per}^{1,2}(a, b) = \{u \in W^{1,2}(a, b) / u(a) = u(b)\}$$

Théorème 5 (Inégalité de Wirtinger)

$$X = \{u \in W_{per}^{1,2}([-1, 1]), \int_{-1}^1 u(x)dx = 0\}.$$

$$\text{alors } \forall u \in X, \int_{-1}^1 u'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u(x)^2 dx$$

De plus, on a égalité ssi $u(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Démonstration : Première étape : Soit $u \in X \cap \mathcal{C}^2[-1, 1]$ fait précédemment.

Deuxième étape : Soit $u \in X$, on se ramène à des fonctions de $X \cap \mathcal{C}^2[-1, 1]$ par densité.

$\forall u \in X$, on peut trouver $(u_n)_n \in (X \cap \mathcal{C}^2[-1, 1])^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{W^{1,2}}} u$ dans $W^{1,2}([-1, 1])$.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver n suffisamment grand tel que

$$\int_{-1}^1 u'(x)^2 dx \geq \int_{-1}^1 u'_n(x)^2 dx - \varepsilon \text{ et } \int_{-1}^1 u_n(x)^2 dx \geq \int_{-1}^1 u(x)^2 dx - \varepsilon$$

En effet, $\|u_n - u\|_{W^{1,2}} \leq \varepsilon$.

Par définition de la norme sur $W^{1,2}$, on a $\int_{-1}^1 |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq \varepsilon$ et donc pour n assez grand $\int_{-1}^1 u_n^2(x) - u^2(x) \leq \varepsilon$, de même on montre que pour n assez grand, on a $\int_{-1}^1 u_n^2(x) dx \geq \int_{-1}^1 u(x)^2 dx - \varepsilon$.

En combinant ces deux inégalités avec la première étape, on obtient :

$$\int_{-1}^1 u'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u(x)^2 dx - (\pi^2 + 1)\varepsilon$$

Puis on fait tendre ε vers zéro. On obtient ainsi l'inégalité voulue.

Cas d'égalité : Soit $u \in X$ vérifiant l'égalité, on peut montrer que u est de classe \mathcal{C}^2 (cela utilise des résultats classiques de régularité dans le cas de calculs des variations), on est alors ramené au cas de la première démonstration. ■

Théorème 6 (Inégalité isopérimétrique)

Prenons $u, v \in W_{per}^{1,2}([a, b])$

$$L(u, v) = \int_a^b \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx.$$

$$M(u, v) = \frac{1}{2} \int_a^b (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Alors $\forall u, v \in W_{per}^{1,2}([a, b])$

$$(L(u, v))^2 - 4\pi M(u, v) \geq 0.$$

De plus, pour tout $u, v \in W_{per}^{1,2}([a, b])$, on a égalité ssi $(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2$ avec $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ constantes.

Démonstration : Première étape : On montre le résultat pour $u, v \in W_{per}^{1,2} \cap \mathcal{C}^1([a, b])$. Ce cas a déjà été traité précédemment.

Deuxième étape : On enlève maintenant l'hypothèse $u, v \in W_{per}^{1,2} \cap \mathcal{C}^1([a, b])$.

De même que précédemment, étant donnés $u, v \in W_{per}^{1,2}([a, b])$, on peut trouver $(u_n)_n, (v_n)_n \in (W_{per}^{1,2} \cap \mathcal{C}^1([a, b]))^{\mathbb{N}}$ tels que $u_n, v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u, v$ dans $W^{1,2}([a, b]) \cap L^\infty([a, b])$.

De plus, L et M sont continues pour la norme de $W^{1,2}$.

Démonstration : Soient $u, v, u_n, v_n \in W_{per}^{(1,2)}([a, b])$ avec $u_n \xrightarrow{W^{(1,2)}} u$ et $v_n \xrightarrow{W^{(1,2)}} v$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{L^2} u & u'_n \xrightarrow{L^2} u' \\ v_n \xrightarrow{L^2} v & v'_n \xrightarrow{L^2} v' \end{cases}$$

Montrons la continuité de M :

$$\begin{aligned} M(u, v) - M(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} \int_a^b uv' - u_n v'_n \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (u - u_n)v' - (v' - v'_n)u_n \\ &= \frac{1}{2(b-a)} (< u - u_n, v' >_{L^2} + < v' - v'_n, u_n >_{L^2}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par continuité du produit scalaire dans } L^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Montrons maintenant la continuité de L :

Lemme 3

$$\begin{aligned} 1 \quad & \forall a, b \geq 0, \text{ on a } |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \\ 2 \quad & \forall a, b, c, d \geq 0, \text{ on a } |\sqrt{a + c} - \sqrt{b + d}| \leq \sqrt{|a + c - b - d|} \leq \sqrt{|a - b|} + \sqrt{|c - d|} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |L(u, v) - L(u_n, v_n)| &\leq \int_a^b |\sqrt{u'^2 + v'^2} - \sqrt{u_n'^2 + v_n'^2}| d\lambda \\ &\leq \int_a^b |\sqrt{u'^2 - u_n'^2} + \sqrt{v'^2 - v_n'^2}| d\lambda \\ &\stackrel{\text{par Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{b-a} \left[\left(\int_a^b |u'^2 - u_n'^2| d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |v'^2 - v_n'^2| d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b |u'^2 - u_n'^2| d\lambda &= \int_a^b |u' - u_n'| |u' + u_n'| d\lambda \\ &\leq \underbrace{\left(\int_a^b |u' - u_n'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \underbrace{\left(\int_a^b |u' + u_n'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2 \left(\int_a^b |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\text{par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

On démontre de même que $\int_a^b |v' - v_n'|^2 d\lambda \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Donc L est continue. ■

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver n suffisamment grand tel que

$$[L(u, v)]^2 \geq [L(u_n, v_n)]^2 - \varepsilon \text{ et } M(u_n, v_n) \geq M(u, v) - \varepsilon$$

et en combinant ces inégalités avec la première étape, on obtient :

$$[L(u, v)]^2 - 4\pi M(u, v) \geq [L(u_n, v_n)]^2 - 4\pi M(u_n, v_n) - (1 + 4\pi)\varepsilon \geq -(1 + 4\pi)\varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on obtient l'inégalité isopérimétrique en le faisant tendre vers 0. ■

Remarque 3

L'inégalité isopérimétrique peut se démontrer pour $u, v \in W_{per}^{1,1}([a, b])$. On peut déjà remarquer que les quantités $L(u, v)$ et $M(u, v)$ sont bien définies pour $u, v \in W_{per}^{1,1}([a, b])$. En effet,

$$\begin{aligned} |L(u, v)| &\leq \int_a^b \sqrt{u'(x)^2 + v'(x)^2} dx \\ &\leq \int_a^b |u'(x) + v'(x)| dx \\ &\leq \|u'\|_1 + \|v'\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |M(u, v)| &\leq \int_a^b |u(x)v'(x)| dx \\ &\leq \|u\|_\infty \|v'\|_1 \end{aligned}$$

De plus, L et M sont continues pour la norme de $W^{1,1}$ et donc la démonstration s'adapte totalement.

3 Inégalité Isopérimétrique dans \mathbb{R}^n

Définition 2

1. $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^n$ et $n \geq 1$. On définit $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ on pose : $d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$

Exemple 3

1. Si $n = 1$, $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ donc $A + B = [a + c, b + d]$
2. Si $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ on a $B_R + B_S = B_{R+S}$.
Montrons que $B_{R+S} \subset B_R + B_S$:
– Soit $x \in B_{R+S}$. On commence par supposer que $|x| < R$ alors on a directement $x = x + 0$ où $x \in B_R$ et $0 \in B_S$ d'où l'inclusion.
– Soit $x \in B_{R+S}$. On suppose maintenant que $|x| > R$, donc $\exists \epsilon > 0$ tel que $|x| = R + S - \epsilon$.
Considérons $x_R = \frac{R-\epsilon}{R+S-\epsilon}x$. On a donc $x_R \in [0, x]$ et $|x_R| < R$ donc $x_R \in B_R$. De plus on remarque que $|x - x_R| = S - \frac{\epsilon}{2}$ donc $x - x_R \in B_S$ d'où $x \in B_R + B_S$ d'où l'inclusion.
Montrons que $B_R + B_S \subset B_{R+S}$. Soit $x \in B_R + B_S$, $x = x_R + x_S$ avec $|x_R| < R$ et $|x_S| < S$. Par inégalité triangulaire on a donc $|x_R + x_S| < R + S$ d'où $x \in B_{R+S}$

Proposition 1

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ avec A compact et $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$. On a alors les propositions suivantes :

1. Soit $A + \overline{B_R} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq R\}$
2. Si A est convexe alors $A + B_R$ est aussi convexe.

Démonstration : 1. Soit $x \in A + \overline{B_R}$ et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq R\}$ alors $\exists a \in A$ et $\exists b \in \overline{B_R}$ tel que $x = a + b$ donc $|x - a| = |b| \leq R$ donc $x \in X$
Réciproquement, A est compact donc $\forall x \in X$, on peut trouver $a \in A$ tel que $|x - a| \leq R$. En posant $b = x - a$, on a que $x \in A + \overline{B_R}$
2. Découle de la définition de la convexité. ■

Nous allons maintenant appliquer la proposition sur un exemple :

Exemple 4

Soit A un rectangle de \mathbb{R}^2 alors $A + \overline{B_R}$ est donné par la figure 5, page 20. On peut voir que $M(A + \overline{B_R}) = M(A) + RL(\partial A) + R^2\pi$ où $L(\partial A)$ est le périmètre de ∂A

On va donner un sens aux notions intuitives de surfaces et de volumes.

Définition 3

Soit $A \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ où A est un ensemble compact.

On note $M(A)$ la mesure de Lebesgue de A . On définit $L(\partial A)$ par la formule de Minkowski-Steiner :

$$L(\partial A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(A + \overline{B_\epsilon}) - M(A)}{\epsilon}$$

où $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \epsilon\}$

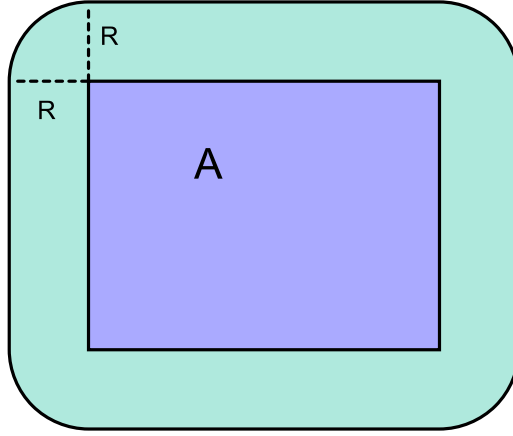


FIGURE 5 – Rectangle A augmenté de la boule de rayon R

Remarque 4

1. Une question que l'on peut se poser est : est ce que cette définition de $L(\partial A)$ correspond à la notion usuelle de la mesure de dimension $(n-1)$? C'est le cas si A est suffisamment régulière.

Exemple 5

Si $A = \overline{B_R}$ on retrouve la formule de la surface d'une sphère.

$$\begin{aligned}
 (R + \varepsilon)^n - R^n &= \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{k-i} \varepsilon^i R^{n-i-1} \right] \\
 &= \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left[R^{n-1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{k-i} \varepsilon^i R^{n-i-1} \right] \right] \\
 &= \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} R^{n-1} + \mathcal{O}_0(\varepsilon) \right]
 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{(R + \varepsilon)^n - R^n}{\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n-1} R^{n-1} + \mathcal{O}_0(\varepsilon) = nR^{n-1}$$

D'où le résultat.

On admettra le résultat suivant (pour plus d'informations : séminaire de Valentin) :

Théorème 7 (*Brunn-Minkowski*)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ compacts, $n \geq 1$ alors on a :

$$[M(A + B)]^{\frac{1}{n}} \geq [M(A)]^{\frac{1}{n}} + [M(B)]^{\frac{1}{n}}$$

Remarque 5

1. La fonction $A \mapsto [M(A)]^{\frac{1}{n}}$ est concave (même démonstration que le théorème) : On a donc $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^{2n}$ compacts et $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$[M(\lambda A + (1 - \lambda)B)]^{\frac{1}{n}} \geq \lambda [M(A)]^{\frac{1}{n}} + (1 - \lambda) [M(B)]^{\frac{1}{n}}$$

2. La fonction étant strictement concave, l'inégalité est stricte sauf s'il existe une homothétie envoyant A sur B

Exemple 6

1. Pour $n = 1$, $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ on a $A + B = [a + c, b + d]$ et donc

$$\begin{cases} M(A + B) &= d + b - a - c \\ M(A) &= b - a \\ M(B) &= d - c \end{cases}$$

donc $M(A + B) = M(A) + M(B)$

2. Si $A = [0, 1]$ et $B = [0, 1] \cup [2, 3]$ on a donc $A + B = [0, 4]$ or

$$M(A + B) = 4 > M(A) + M(B) = 3$$

Théorème 8

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, $n \geq 2$, $L = L(\partial A)$, $M = M(A)$ et w_n la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^n alors on a :

$$L^n - n^n w_n M^{n-1} \geq 0$$

avec égalité si A est une boule.

Démonstration : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact.

On va commencer par expliciter w_n : Soit B_n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n et on note donc $w_n = \lambda_n(B_n)$ où λ_n est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

On remarque que $\forall a > 0$, l'image de λ_n par l'application $x \mapsto ax$ est $a^{-n} \lambda_n$, donc $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a :

$$\lambda_n(a^{-1}A) = a^{-n} \lambda_n(A)$$

On a donc en particulier :

$$\lambda_n(aA) = a^n \lambda_n(A)$$

de plus on a en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
w_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{B_n\}}(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}} \, dx_1 \cdots dx_d \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbf{1}_{\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2\}} \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^1 \lambda_{n-1} \left(\sqrt{1 - x_n^2} B_{n-1} \right) dx_n \\
&= w_{n-1} \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \\
&= w_{n-1} I_{n-1}
\end{aligned} \tag{2}$$

où l'on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx.$$

Une intégration par parties simple montre que $\forall n \geq 2$,

$$I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$$

De plus, en remarquant que $I_0 = 2$ et $I_1 = \frac{\pi}{2}$, on déduit par récurrence que $\forall n \geq 2$

$$I_{n-1} I_{n-2} = \frac{2\pi}{n}$$

Il en vient que $\forall n \geq 3$ on a :

$$w_n = I_{n-1} I_{n-2} w_{n-2} = \frac{2\pi}{n} w_{n-2}$$

]

Or on sait que $w_1 = 2$, $w_2 = \pi$, donc on en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad w_{2k+1} = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

On a donc la formule générale :

$$w_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

on revient à la preuve du théorème :

$$\begin{aligned}
L(\partial A) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(A + \overline{B_\epsilon}) - M(A)}{\epsilon} \\
&\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left[[M(A)]^{\frac{1}{n}} + [M(\overline{B_\epsilon})]^{\frac{1}{n}} \right]^n - M(A)}{\epsilon}
\end{aligned}$$

on a $M(B_\varepsilon) = \varepsilon^n w_n$ d'où :

$$L(\partial A) \geq M(A) \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \varepsilon \left(\frac{w_n}{M(A)}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n - 1}{\varepsilon}$$

Finalement on a :

$$L(\partial A) \geq M(A)n \left(\frac{w_n}{M(A)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

d'où l'inégalité. ■

4 Remerciements

Notre travail enfin achevé, nous tenons à remercier Rozenn Texier-Picard sans qui ce séminaire n'aurait pas pu voir le jour. Ses précieux conseils et son soutien nous ont permis de mener à bien notre travail.

De plus, nous tenons à remercier Théo Pierron, Adrien Fontaine et Basile Pillet pour leurs conseils avisés en L^AT_EX

Références

- [1] *Introduction to the calculus of variations* de Bernard DACOROGNA éditions "Imperial College Press"
- [2] *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications* de Haïm BREZIS éditions "Dunod"
- [3] *The parsimonious universe : shape and form in the natural world* de Stephan HILDEBRANDT et Anthony TROMBA éditions "Springer"
- [4] *Développement d'analyse : Préparation à l'oral de l'Agrégation* de Karine MADERE éditions "Ellipses"