SEMAINE 20
INTÉGRALES CURVILIGNES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

EXERCICE 1 :

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle n'ayant aucun pôle de module 1. On note Γ le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

2. En déduire les intégrales simples

$$J_n(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{1 + r^2 - 2r\,\cos t}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N}\ ,\ r \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ r \neq 1)\ .$$

3. Retrouver aussi les intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{2\pi} \cos^n \theta\,\mathrm{d}\theta\ .$$

- -

1. Il suffit de savoir faire le calcul lorsque F est un élément simple : $F(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k}$. Posons pour cela $\gamma(t) = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$, paramétrage de l'arc Γ). On a alors, pour $k > 1$,

$$I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\big(\gamma(t)-a\big)^k} = \left[\frac{1}{1-k}\ \frac{1}{\big(\gamma(t)-a\big)^{k-1}}\right]_0^{2\pi} = 0$$

car $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Pour $k = 1$, on ne dispose pas d'expression d'une primitive de la fonction à valeurs complexes $t \mapsto \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$. Une solution consiste à poser $a = \alpha + i\beta$ et à considérer l'intégrale $I(a) = I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$ comme une fonction des deux variables réelles α et β. On a $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-\alpha-i\beta}$. Sur chacun des deux ouverts connexes par arcs $U = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| > 1\}$, la fonction I des deux variables réelles α et β est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\big(\gamma(t)-\alpha-i\beta\big)^2} = \left[\frac{-1}{\gamma(t)-\alpha-i\beta}\right]_0^{2\pi} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\big(\gamma(t)-\alpha-i\beta\big)^2} = \left[\frac{-i}{\gamma(t)-\alpha-i\beta}\right]_0^{2\pi} = 0\ .$$

La fonction I est donc constante sur chacun des deux ouverts U et V. De

$$I(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{it}}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = 2i\pi\ ,$$

on déduit $I(a) = 2i\pi$ si $|a| < 1$.

Si $|a| > 1$, écrivons $|z-a| \geq \big||z|-|a|\big| = |a|-1$, donc $|I(a)| \leq \dfrac{2\pi}{|a|-1}$ et $\displaystyle\lim_{|a|\to+\infty} I(a) = 0$, donc $I(a) = 0$ pour $|a| > 1$.

Enfin, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme, on a facilement $\displaystyle\int_\Gamma P(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

En conclusion, si F est une fraction rationnelle quelconque (sans pôle de module un), on décompose F en éléments simples : la partie entière n'apporte aucune contribution à l'intégrale I ; dans la partie polaire en un pôle a (de la forme $\dfrac{c_{a,1}}{z-a}+\cdots+\dfrac{c_{a,r}}{(z-a)^r}$ si le pôle est d'ordre r), aucun terme n'apporte de contribution à l'intégrale si $|a|>1$ et seul le terme $\dfrac{c_{a,1}}{z-a}$ apporte une contribution non nulle si $|a|<1$. Le coefficient $c_{a,1}$ est appelé le **résidu** de la fraction rationnelle F au pôle a et noté $\mathrm{Res}(F,a)$. On a donc la formule

$$I=\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z=2i\pi\cdot\sum_{|a|<1}\mathrm{Res}(F,a)\ .$$

2. On a $J_n(r)=\mathrm{Re}\big(I_n(r)\big)$, avec $I_n(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{int}\,\mathrm{d}t}{1+r^2-2r\,\cos t}$. Or,

$$I_n(r)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{int}\,\mathrm{d}t}{(1-r\,e^{it})(1-r\,e^{-it})}=\frac{1}{i}\int_\Gamma\frac{z^{n-1}\,\mathrm{d}z}{(1-rz)\left(1-\dfrac{r}{z}\right)}=-\frac{1}{ir}\int_\Gamma\frac{z^n}{(z-r)\left(z-\dfrac{1}{r}\right)}\,\mathrm{d}z\ ,$$

d'où la discussion :

- si $0<r<1$, le seul pôle de la fraction rationnelle $F=\dfrac{X^n}{(X-r)\left(X-\dfrac{1}{r}\right)}$ dans le disque unité ouvert est r (pôle simple), et on obtient facilement son résidu $\mathrm{Res}(F,r)=\dfrac{r^{n+1}}{r^2-1}$, donc

$$J_n(r)=I_n(r)=\frac{2\pi\,r^n}{1-r^2}\ .$$

- si $r>1$, le seul pôle de module inférieur à 1 est $\dfrac{1}{r}$, de résidu $\dfrac{1}{r^{n-1}(1-r^2)}$, donc

$$J_n(r)=I_n(r)=\frac{2\pi}{r^n(r^2-1)}\ .$$

3. On a

$$W_n=\frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^n\mathrm{d}\theta=\frac{1}{i\,2^n}\int_\Gamma\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{i\,2^n}\int_\Gamma\frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\ .$$

Le seul pôle de la fraction $F=\dfrac{1}{i\,2^n}\,\dfrac{(X^2+1)^n}{X^{n+1}}$ est zéro (de module <1), le résidu de F en ce pôle est le coefficient de X^n dans le développement de

$$\frac{1}{i\,2^n}\,(X^2+1)^n=\frac{1}{i\,2^n}\,\sum_{k=0}^n C_n^kX^{2k}\ .$$

Il est donc nul si n est impair, et vaut $\dfrac{C_{2p}^p}{i\,2^p}$ si $n=2p$, donc

$$W_{2p+1}=0\qquad\text{et}\qquad W_{2p}=2\pi\,\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}=2\pi\,\frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\ .$$

EXERCICE 2 :

1. Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Écrire une équation différentielle **(E)** vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

- -

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. La fonction f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et on a $0 \leq f(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$; on en déduit l'existence et la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k\, \dfrac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}$ et, si on se donne $a > 0$, on a, pour $x \geq a$ et $t \geq 0$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{t^k}{1+t^2}\, e^{-at} \leq t^k\, e^{-at}\ ,$$

la fonction $t \mapsto t^k\, e^{-at}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g^{(k)}(x) = (-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On observe notamment que $g''(x) + g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, donc g est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E})\ :\qquad y'' + y = \frac{1}{x}\ .$$

2. L'équation homogène $(\mathbf{E}_0)$: $y'' + y = 0$ admet $(\sin,\cos)$ comme système fondamental de solutions. Utilisons la méthode de variation des constantes pour exprimer les solutions de **(E)**. Nous posons $y(x) = u(x)\,\sin x + v(x)\,\cos x$ en imposant $u'(x)\,\sin x + v'(x)\,\cos x = 0$. L'équation **(E)** devient $u'(x)\,\cos x - v'(x)\,\sin x = \dfrac{1}{x}$.

On résout le système $\begin{cases} u'(x)\ \sin x\ +\ v'(x)\ \cos x\ =\ 0 \\ u'(x)\ \cos x\ -\ v'(x)\ \sin x\ =\ \dfrac{1}{x} \end{cases}$, ce qui donne $u'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ et $v'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$. On sait que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont (semi-)convergentes. Une solution particulière de **(E)** peut donc être exprimée sous la forme

$$y_0 : x \mapsto \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\,\cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\,\sin x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme $y = A\cos x + B\sin x + y_0(x)$; en particulier, la fonction g de la question **1.** est de cette forme-là. On a $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ car $|g(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$; comme $\lim\limits_{+\infty} y_0 = 0$, cela entraîne $A = B = 0$. Finalement, $g = y_0$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = \dfrac{\pi}{2}$, alors que

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos x \cdot \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right) = I$;
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

Pour ce deuxième point en effet, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$ et (pour $x < 1$),

$$\left|\sin x \cdot \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq x \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = x\,|\ln x| \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

On obtient donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 3 :

1. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$. Montrer que g est solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, d'une équation différentielle du premier ordre. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

2. Soit φ la solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle

(E) $$y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

telle que $\lim\limits_0 \varphi = \lim\limits_0 \varphi' = 0$. Donner un équivalent de φ en $+\infty$.

- -

1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, si l'on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, la fonction f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et la majoration $0 \leq f(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ prouve que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}$. Si a est un réel strictement positif, on a

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t^2}{1+t^2}\,e^{-at^2}\,,$$

cette dernière fonction de la variable t étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad g'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2\ e^{-xt^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t=g(x)-\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t\ .$$

Le changement de variable $t\sqrt{x}=u$ dans cette dernière intégrale montre que g vérifie, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$g'(x)-g(x)=-\frac{G}{\sqrt{x}}\ .$$

En posant $g(x)=\lambda(x)\ e^x$ (méthode de "variation de la constante"), on obtient

$$\lambda(x)=-G\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t+C\ .$$

La fonction $\lambda:x\mapsto e^{-x}\ g(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, de $\lambda(0)=g(0)=\dfrac{\pi}{2}$, on tire $C=\dfrac{\pi}{2}$ et

$$g(x)=e^x\ \lambda(x)=e^x\ \left(\frac{\pi}{2}-G\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t\right)\ .$$

Enfin, la majoration immédiate $0\leq\lambda(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\leq\frac{\pi}{2}\ e^{-x}$ montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\lambda(x)=0$, donc

$$\frac{\pi}{2}=G\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=G\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\ 2u\ \mathrm{d}u=2G^2\ .$$

Comme G est positif, on conclut

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\ \mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

2. Les solutions de l'équation sans second membre associée sont $(\lambda x+\mu)\ e^x$.

Utilisons la méthode de variation des constantes pour exprimer les solutions de **(E)**. Posons donc $y(x)=\big(\lambda(x)+x\,\mu(x)\big)\ e^x$, avec la condition $\lambda'(x)+x\mu'(x)=0$. On dérive deux fois : $y'=(\lambda+\mu+\mu x)\ e^x$, puis $y''=(\lambda+2\mu+\mu'+\mu x)\ e^x$. Ainsi,

$$(\mathbf{E})\iff\mu'(x)\ e^x=\frac{1}{\sqrt{x}}\iff\mu'(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ ,\qquad\text{puis}\quad\lambda'(x)=-\sqrt{x}\,e^{-x}\ .$$

Les conditions initiales sont alors $\lambda(0)=0$ et $\lambda(0)+\mu(0)=0$, donc $\lambda(0)=\mu(0)=0$ et

$$\mu(x)=\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t\qquad\text{et}\quad\lambda(x)=-\int_0^x\sqrt{t}\,e^{-t}\ \mathrm{d}t=\sqrt{x}\,e^{-x}-\int_0^x\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$$

donc

$$\varphi(x)=\sqrt{x}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ e^x\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=\sqrt{x}+(2x-1)\ e^x\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}\ \mathrm{d}u\ .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a donc

$$\varphi(x)=\sqrt{x}+(2x-1)\ e^x\ \big(G+o(1)\big)=2Gxe^x+o(x\,e^x)\ ,\qquad\text{soit}\quad\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\pi}\ x\ e^x\ .$$

EXERCICE 4 :

1. Lemme de Gronwall

Soit c un réel, soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, u à valeurs réelles, v à valeurs positives ou nulles. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad u(x) \leq c + \int_0^x u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad u(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_0^x v(t)\, \mathrm{d}t\right)\ .$$

2. Soit $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle

(E) $$y'' + \big(1 - p(x)\big)\, y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- -

1. Posons $w(x) = c + \displaystyle\int_0^x u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t$. On a $u \leq w$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction w est dérivable et $w' = uv \leq wv$. Posons maintenant $V(x) = \displaystyle\int_0^x v(t)\, \mathrm{d}t$ et $f(x) = e^{-V(x)}\, w(x)$. La fonction f est dérivable et $f' = e^{-V}(w' - wv) \leq 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leq f(0) = w(0) = c$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad w(x) \leq c \cdot e^{V(x)} \qquad \text{et, a fortiori ,} \quad u(x) \leq c \cdot e^{V(x)}\ ,$$

ce qu'il fallait prouver.

2. Soit φ une solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+$. Alors φ est solution de

$$(\mathbf{E}') \ : \qquad y'' + y = p(x)\, \varphi(x)\ .$$

La méthode de variation des constantes permet alors d'écrire

$$\varphi(x) = A\, \cos x + B\, \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, p(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

On a donc $|\varphi(x)| \leq c + \displaystyle\int_0^x |p(t)|\, |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t$ avec $c = |A| + |B|$. Le lemme de Gronwall donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad |\varphi(x)| \leq c \cdot \exp\left(\int_0^x |p(t)|\, \mathrm{d}t\right) \leq c \cdot \exp\left(\int_0^{+\infty} |p(t)|\, \mathrm{d}t\right)\ ,$$

donc la fonction φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 5 :

Soit le système différentiel à coefficients constants

$$(\mathbf{S}) \ : \quad X' = AX \ , \quad \text{avec} \quad X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \ , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ .$$

1. Condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que toutes les solutions du système **(S)** soient bornées sur $\mathbb{R}$?

2. À quelle condition les solutions de **(S)** sont-elles bornées sur $\mathbb{R}_+$?

3. En déduire que toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec toutes ses valeurs propres imaginaires pures ?

4. Étendre au cas d'une matrice complexe antihermitienne ($A^* = -A$).

- -

1. Les solutions de **(S)** s'expriment sous la forme $X(t) = e^{tA}\, X_0$, mais le calcul de e^{tA}, partant d'une matrice A quelconque, n'est pas aisé. Effectuons alors la réduction de A suivant ses sous-espaces caractéristiques : on peut écrire $A = PBP^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale par blocs : $B = \mathrm{diag}(B_1, \cdots, B_m)$, chaque bloc $B_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{C})$ étant de la forme $B_k = \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$, où $N_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{C})$ est nilpotente.

Effectuons le changement de fonctions inconnues $X = PY \iff Y = P^{-1}X$. Alors, en posant $Y_0 = Y(0)$ (“condition initiale”), on a

$$(\mathbf{S}) \iff Y' = BY \iff Y(t) = e^{tB}\, Y_0 \ .$$

Les solutions de **(S)** sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les coefficients de la matrice e^{tB} sont bornés. Or, la matrice e^{tB} est aussi diagonale par blocs : $e^{tB} = \mathrm{diag}(e^{tB_1}, \cdots, e^{tB_m})$, où

$$e^{tB_k} = e^{t\lambda_k}\, e^{tN_k} = e^{t\lambda_k} \left(I_{\alpha_k} + t\, N_k + \frac{t^2}{2}\, N_k^2 + \cdots + \frac{t^{\beta_k - 1}}{(\beta_k - 1)!}\, N_k^{\beta_k - 1} \right) ,$$

β_k étant l'indice de nilpotence de la matrice N_k (*rappelons que* β_k *est l'ordre de la valeur propre* λ_k *en tant que racine du polynôme minimal, alors que* α_k *est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique ; le sous-espace caractéristique est* $\mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{\beta_k}$ *et il est de dimension* α_k).

Les matrices I_{α_k}, N_k, N_k^2, $\cdots$, $N_k^{\beta_k - 1}$ étant linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{C})$ (*exercice classique*), on voit que la fonction $t \mapsto e^{tB_k}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on a, d'une part $t \mapsto e^{t\lambda_k}$ bornée sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\lambda_k \in i\mathbb{R}$) et d'autre part $\beta_k = 1$ (c'est-à-dire $N_k = 0$ ou encore $B_k = \lambda_k I_{\alpha_k}$).

Une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de **(S)** soient bornées sur $\mathbb{R}$ est donc que la matrice A soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$, ses valeurs propres étant toutes imaginaires pures.

2. En reprenant les calculs précédents, on voit que les solutions de **(S)** sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, toutes les fonctions $t \mapsto t^p\, e^{t\lambda_k}$ $(0 \leq p \leq \beta_k - 1)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Or,

$\triangleright$ si $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$, aucune de ces fonctions n'est bornée sur $\mathbb{R}_+$;

▷ si $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$, seule celle pour $p = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$;

▷ si $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, elles sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de **(S)** soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ est que toutes les valeurs propres de A aient une partie réelle négative ou nulle, celles de partie réelle nulle étant racines simples du polynôme minimal (pour ces dernières, le sous-espace caractéristique doit être confondu avec le sous-espace propre).

3. Si A est antisymétrique réelle, si X est solution de $X' = AX$ (à valeurs réelles, il suffit pour cela de prendre $X_0 = X(0) \in \mathbb{R}^n$) , alors, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X(t)\|^2\big) = 2\big(X'(t)|X(t)\big) = 2\big(A\,X(t)|X(t)\big) = 0$$

($X \mapsto \|X\|^2$ est une **intégrale première** du système différentiel **(S)**). Les solutions de **(S)** sont constantes en norme, donc bornées (on l'a montré pour les solutions à valeurs rélles, mais il en est de même des solutions à valeurs complexes, puisque si $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est une telle solution, alors $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ sont aussi solutions de **(S)**). De la question **1.**, on déduit que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

4. Si A est antihermitienne, si $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $X = (x_1, \cdots, x_n)$ est une solution de **(S)**, on a, en notant $\|\cdot\|$ la norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$, $\|X(t)\|^2 = {}^t\overline{X}X$, donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X\|^2\big) = {}^t\overline{X}\,'X + {}^t\overline{X}X' = {}^t\overline{X}\ {}^t\overline{A}X + {}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}(A^* + A)X = 0$$

car $A^* + A = 0$, d'où la même conclusion qu'à la question précédente (qui est d'ailleurs un cas particulier de celle-ci) : la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.