MP: Espace préhilbertien et Topologie.

Coralie Renault

7 mars 2015

Exercice

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
b) Etudier la parité des polynômes P_n.
c) Prouver que pour chaque $n \geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Exercice

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

— Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $deg(P_n) = n$, pour tout n.
— Montrer que P_n possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$.
— On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait :

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

Exercice

Soit S l'espace des matrices symétriques réelles de taille n et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\inf_{M=(m_{ij})\in S} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Exercice

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etudier f.

Exercice

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Caractériser f

Exercice

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a) Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$, a-t-on $A \in \mathcal{O}(3)$?
b) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice

a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$$

b) Soit un réel $a \neq \pm 1$; déduire de a) la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos t + 1)\,\mathrm{d}t$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.