Espaces préhilbertiens

Espace préhilbertien réel

Exercice 1 [00504] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\mathrm{tr}(AB+BA))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$$

Exercice 2 [00505] [correction]
Démontrer que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe i.e. que pour tout $x, y \in B$ différents et tout $t \in \left]0,1\right[$, $\|(1-t)x+ty\| < 1$.

Exercice 3 [00507] [correction]
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i \mid x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E.

Exercice 4 [00508] [correction]
Soient E un espace préhilbertien réel et $f, g : E \to E$ telles que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 5 [00509] [correction]
Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.

Exercice 6 [00510] [correction]
Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Etablir

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

Exercice 7 [00511] [correction]
On munit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 8 [00512] [correction]
Soit E un espace de Hilbert réel.
a) Montrer que pour $x, y \in E$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

b) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E et $a \in E$. Montrer qu'il existe $x \in F$ vérifiant $d(a, F) = \|x - a\|$.
c) Etablir que si H est un hyperplan fermé de E, il existe $a \in E$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ x \in H \Leftrightarrow (a \mid x) = 0$$

Exercice 9 [00513] [correction]
Soit E un espace préhilbertien réel.
a) Etablir que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,/ \int_{-1}^1 |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$

est un hyperplan fermé de E.
c) Soit $Q \in H^\perp$. Etablir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-1}^{1} |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

d) Etablir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\bar{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Exercice 10 [02666] [correction]
a) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que A est de degré n.

Exercice 11 [03024] [correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A \mid P \rangle \text{ ?}$$

Exercice 12 [03079] [correction]
On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
b) Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.
c) On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 13 [03081] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose

$$F = \{f \in E/\forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E/\forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$$

a) Montrer que $F^\perp = G$.
b) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 14 [03157] [correction]
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geqslant 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel.
On suppose

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, (x_i \mid x_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 15 [03180] [correction]
Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, (1-\lambda)x + \lambda y \notin S$$

Exercice 16 [03318] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,-1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\| \leqslant M$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant M^2$$

Exercice 17 [03321] [correction]
On munit l'espace $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $f\in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x\in[0,1],F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f)=F$.
a) Déterminer un endomorphisme $v^\star$ vérifiant

$$\forall f,g\in E,\langle v(f),g\rangle=\langle f,v^\star(g)\rangle$$

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^\star\circ v$.

Exercice 18 [03322] [correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi:E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle+k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisant pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 19 [03325] [correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Etablir

$$F^\perp=\bar{F}^\perp$$

Exercice 20 [03480] [correction]
On note $E=\mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi:E\times E\to\mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que l'application φ est bien définie de $E\times E$ vers $\mathbb{R}$.
b) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
c) Pour $p,q\in\mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^p,X^q)$.
d) Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1,X,X^2)$.

Exercice 21 [03478] [correction]
Soit E un espace de Hilbert réel et C une partie convexe fermée non vide de E.
a) Soient u et v deux vecteurs de E. Calculer

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$$

b) Soit (w_n) une suite d'éléments de C telle que

$$\|w_n-x\|\to d(x,C)$$

Montrer que (w_n) est une suite de Cauchy.
c) Montrer que, pour tout x de E, il existe un unique vecteur u de C tel que

$$\|x-u\|=d(x,C)$$

On note $u=p_C(x)$.
d) Montrer que $p_C(x)$ est l'unique vecteur v de C tel que

$$\forall w\in C,(x-v\mid w-v)\leqslant 0$$

e) Montrer que l'application p_C est lipschitzienne.

Exercice 22 [03657] [correction]
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
b) Etudier la parité des polynômes P_n.
c) Prouver que pour chaque $n\geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1}-XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n\in\mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1}=XP_n+\lambda_nP_{n-1}$$

Exercice 23 [03805] [correction]
a) Enoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P,Q)\mapsto\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 [02494] [correction]
a) Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ euclidien

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \mid c)b - (a \mid b)c$$

(on pourra utiliser les coordonnées de a, b, c dans une base où elles comportent un maximum de 0)
b) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ où a est un vecteur unitaire puis reconnaître f.

Exercice 25 [03883] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,i} \geqslant 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

a) Montrer

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t XAX > 0$$

b) En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 26 [03923] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 = A^t A$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 27 [03926] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A + 2B)/3$ appartienne à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Espace préhilbertien complexe

Exercice 28 [00514] [correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} Q(\mathrm{e}^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
b) Montrer que la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.
c) Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.
d) On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$$

Montrer que $M \geqslant 1$ et étudier le cas d'égalité

Exercice 29 [00515] [correction]
Soient E un espace préhilbertien complexe et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$,

$$(u(x) \mid x) = 0$$

Montrer que $u = \tilde{0}$.

Exercice 30 [03080] [correction]
On pose

$$H = \left\{ (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n|^2 < +\infty \right\}$$

Montrer que H est un espace préhilbertien

Exercice 31 [03319] [correction]
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ des nombres complexes.
Préciser image et noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = (x_i \bar{x}_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 32 [00516] [correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^t AB)$$

a) Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
b) Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

c) Etablir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 33 [00517] [correction]
Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha(a \mid x)a$$

a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?
b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 34 [00518] [correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E et f l'application de E vers E donnée par

$$f : x \mapsto x - (a \mid x)b$$

a) A quelle condition la fonction f est-elle bijective ?
b) Exprimer $f^{-1}(x)$ lorsque c'est le cas.
c) A quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 35 [03320] [correction]
Soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté de dimension 3.
On considère l'endomorphisme

$$f : x \in E \mapsto x + a \wedge x$$

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
b) Déterminer un polynôme annulateur de f.

Exercice 36 [00519] [correction]
Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ euclidien : $a \wedge (b \wedge c) = (a \mid c)b - (a \mid b)c$. (on pourra utiliser les coordonnées de a, b, c dans une base où elles comportent un maximum de 0)
Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ où a est un vecteur unitaire puis reconnaître f.

Exercice 37 [00520] [correction]
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer qu'il est impossible que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Exercice 38 [00521] [correction]
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien réel E telle que

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 39 [00523] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$$

Comparer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 40 [02396] [correction]
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 41 [02733] [correction]
Soient $c \in \mathbb{R}$, $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires de E deux à deux distincts tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = c$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que $(v_1, \ldots, v_n)$ soit nécessairement liée.

Exercice 42 [03979] [correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.
Déterminer le maximum sur la boule unité fermée de $f : x \mapsto (a \mid x)(b \mid x)$

Projections orthogonales

Exercice 43 [00524] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée $(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer que la matrice de p_F dans la base e est

$$\sum_{k=1}^{p} X_k {}^t X_k$$

où X_k est la colonne des coordonnées du vecteur x_k dans e.

Exercice 44 [00530] [correction]
[Formule de Parseval]
On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E telle que $V = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$$

Exercice 45 [01331] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
a) La matrice AB est-elle diagonalisable ?
b) Encadrer les valeurs propres de AB.

Exercice 46 [03317] [correction]
Soit E un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté $\langle . \mid . \rangle$.
Soient C une partie convexe non vide et fermée de E et $x \in E$.
a) Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de C telle que

$$\|x - y_n\| \to d(x, C)$$

b) En exploitant l'identité du parallélogramme, établir que la suite (y_n) est de Cauchy.
c) En déduire qu'il existe $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, C)$$

d) Application : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer

$$F^{\perp\perp} = \bar{F}$$

Exercice 47 [03766] [correction]
On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle ., . \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
b) On pose

$$V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E / f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.
c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E / f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \mathrm{d}t$$

Distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 48 [00526] [correction]
[Déterminant de Gram]
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $(u_i \mid u_j)$.
a) Montrer que si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée alors

$$\det G(u_1, \ldots, u_p) = 0$$

b) Etablir la réciproque.
c) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \ldots, e_p, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

Exercice 49 [00527] [correction]
a) Montrer que $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
b) Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \left\{aX + b / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 50 [02734] [correction]
Calculer le minimum de
$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t$$
pour a, b, c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 51 [00529] [correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par
$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$
a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
c) Déterminer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at + b))^2 \,\mathrm{d}t$$

Exercice 52 [02736] [correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\| \|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 53 [02735] [correction]
Calculer
$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 54 [01332] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et
$$\langle\, ,\rangle : (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$
a) Justifier la définition de $\langle\, ,\rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \ldots, X^n)$.
b) Calculer $P_k(0)^2$.
c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Exercice 55 [03764] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer
$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

Exercice 56 [02571] [correction]
a) Montrer que $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t) \,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_3(x) = x$.
b) Pour quels réel a et b la distance de $f_2(x)$ à $g(x) = ax + b$ est-elle minimale ?

Exercice 57 [03117] [correction]
a) Montrer que $(A \mid B) = \mathrm{tr}\,(A^tB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la distance de
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
c) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 58 [00073] [correction]
On munit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :
$$(f \mid g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x) \,\mathrm{d}x$$
Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.
a) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
b) Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
c) Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^t AB)$$

Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AB + BA) = 2(A \mid B)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la relation demandée.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'inégalité triangulaire

$$\|(1-t)x + ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\| \leqslant 1$$

De plus, s'il y a égalité alors $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ et les vecteurs $(1-t)x$ et ty sont positivement liés.
Les vecteurs x et y étant unitaires et positivement liés, ils sont égaux. Ceci est exclu.

Exercice 3 : [énoncé]
Pour $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid e_j)^2$$

donc $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée.
Si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ n'est pas une base, on peut déterminer $e_{n+1} \in E$ tel que $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où

$$e_{n+1} \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$$

Mais alors

$$\|e_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid e_{n+1})^2 = 0$$

ce qui est contradictoire.
Par suite la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 4 : [énoncé]
Aisément

$$(f(\lambda x + \lambda' x') \mid y) = \ldots = (\lambda f(x) + \lambda' f(x') \mid y)$$

et comme ceci vaut pour tout y on peut conclure à la linéarité de f.
Idem pour g.

Exercice 5 : [énoncé]
Aisément

$$(f(\lambda x + \lambda' x') \mid f(y)) = (\lambda f(x) + \lambda' f(x') \mid f(y))$$

donc

$$f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x')) \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} = \{o\}$$

d'où la linéarité de f.

Exercice 6 : [énoncé]
En développant le produit scalaire

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{(x \mid y)}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^2$$

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $f \in F^{\perp}$. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f - P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f - P)$$

avec

$$\left| \int_a^b f(f - P) \right| \leqslant (b - a)\|f\|_{\infty} \|f - P\|_{\infty} \leqslant (b - a)\|f\|_{\infty} \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f\|^2 = 0$ donc $f = 0$. Ainsi $F^{\perp} \subset \{0\}$ puis $F^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) C'est l'identité du parallélogramme.
b) $d(a,F) = \inf\{\|x-a\| / x \in F\}$. Considérons une suite (x_n) d'éléments de F réalisant la borne inférieure : $\|x_n - a\| \to d(a,F)$.
En appliquant l'identité du parallélogramme à $x = x_n - a$ et $y = x_m - a$, on obtient

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - a\right\|^2 + \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = \frac{\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2}{2}$$

Or $\frac{x_n+x_m}{2} \in F$ donc $\left\|\frac{x_n+x_m}{2} - a\right\| \geqslant d(a,F)$ puis

$$\frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 \leqslant \frac{\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2}{2} - d(a,F)^2$$

Sachant que $\|x_n - a\| \to d(a,F)$, on peut affirmer que la suite (x_n) est de Cauchy.
Par suite celle-ci converge et, puisque F est fermé, sa limite x_∞ vérifie $x_\infty \in F$ et $\|x_\infty - a\| = d(a,F)$.
c) Puisque $H \neq E$, il existe $y \in E \backslash H$. Soit alors $x \in H$ vérifiant $d(y,H) = \|x - y\|$. Pour tout $z \in H$, on a $\|(x+\lambda z) - y\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$ donc $2\lambda(x - y \mid z) + \lambda^2\|z\|^2 \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que $(x - y \mid z) = 0$ puis que $a = x - y \in H^\perp$ avec $a \neq 0$ car $y \notin H$.
Ainsi, on dispose d'un vecteur a vérifiant $\forall x \in H$, $(a \mid x) = 0$ i.e. H et $\mathrm{Vect}(a)$ orthogonaux.
De plus, puisque H est un hyperplan et que $a \notin H$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont donc supplémentaires orthogonaux et par suite $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) On sait $F \subset F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp\perp}$ fermé donc $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
b) H est le noyau de la forme linéaire

$$\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(P)| \leqslant \|P\|$ et donc φ est continue.
Par suite H est un hyperplan fermé.
c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe que

$$R = P - \int_{-1}^{1} |u|\, P(u)\,\mathrm{d}u$$

appartient à H. La relation $(R \mid Q) = 0$ donne la relation voulue.
d) La relation précédente donne

$$\int_{-1}^{1}\left(Q(t) - |t|\int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u\right)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Par suite

$$Q(t) = |t|\int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u$$

Ceci n'est possible dans $\mathbb{R}[X]$ que si $\int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et donc seulement si $Q = 0$.
Ainsi $H^\perp = \{0\}$ puis $H^{\perp\perp} = E$ alors que $\bar{H} = H \neq E$.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Il est bien connu que l'application

$$(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. L'application $P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ donc il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec A, ce qui revient à dire

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \langle A,P\rangle = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Si par l'absurde le degré de A est strictement inférieur à n alors $P = XA$ est élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t = P(0) = 0$$

Or la fonction $t \mapsto tA(t)^2$ est continue positive sur $[0,1]$ et la nullité de l'intégrale précédente entraîne alors

$$\forall t \in [0,1], tA(t)^2 = 0$$

On en déduit $A = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A et considérons $P(X) = XA(X)$.

On a

$$0 = P(0) = \langle A \mid P\rangle = \int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient

$$\forall t \in [0,1]\,, tA(t)^2 = 0$$

Le polynôme A admet une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul ce qui est absurde.

Exercice 12 : [énoncé]
a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes

$$(X^2-1)^n,\ \left((X^2-1)^n\right)',\dots,\ \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0,\dots,n\}$ que $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1,1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1,1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.
b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(2(n+1)X(X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

Par la formule de Leibniz

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\left(X\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} + nX\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right)$$

1 et -1 sont racines du polynôme $\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1}+X(X^2-1)R_n(X)+2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1}+(X^2-1)R_{n+1}(X)$$

Récurrence établie
c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes

$$(X^2-1)^n,\ \left((X^2-1)^n\right)',\dots,\ \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

on obtient

$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^1 P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

d) Par la relation qui précède

$$\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$

$$\left[(X^2-1)^n\right]^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n(1+t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Au final

$$\|Q_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}$$

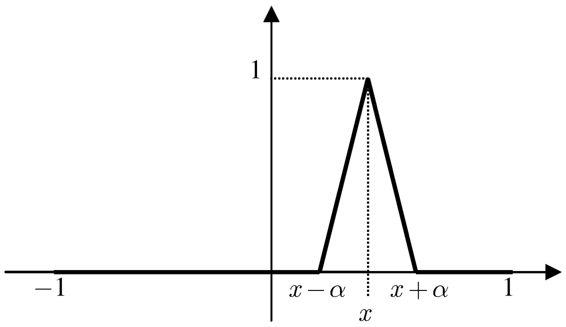
Exercice 13 : [énoncé]
a) Soient $f \in F$ et $g \in G$.

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux et donc $G \subset F^\perp$.
Inversement, soit $g \in F^\perp$.
Montrons que, pour tout $x \in\,]0,1[$, $g(x) = 0$.
Par l'absurde, supposons $g(x) \neq 0$ pour un $x \in\,]0,1[$ et, quitte à considérer la fonction $-g$, supposons $g(x) > 0$. Par continuité de g, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$[x-\alpha, x+\alpha] \subset\,]0,1[\text{ et } g(t) > 0 \text{ sur } [x-\alpha, x+\alpha]$$

Considérons alors la fonction f définie par le schéma.



La fonction f

La fonction f appartient à F et la fonction produit fg est continue, positive mais n'est pas la fonction nulle donc

$$\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

C'est absurde car on a supposé $g \in F^\perp$.
On a donc pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = 0$ puis par continuité, $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
Ainsi $g \in G$ et finalement $F^\perp = G$.
b) Si les sous-espaces vectoriels étaient supplémentaires alors toutes fonctions continues sur $[-1,1]$ est somme d'une fonction de F et d'une fonction de G et est donc une fonction s'annulant en 0. C'est absurde.
Les sous-espaces vectoriels F et G ne sont donc par supplémentaires.

Exercice 14 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n = 2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 2$.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1, (x_i \mid x_j) < 0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D = \mathrm{Vect} x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = y_i + \lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i < 0$ puisque $(x_i \mid x_{n+1}) < 0$.

On remarque alors

$$(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i \lambda_j \left\|x_{n+1}\right\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, (y_i \mid y_j) < 0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2, \dots, y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2, \dots, y_n, x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 15 : [énoncé]
Soient $x, y \in S$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\left\|(1-\lambda)x + \lambda y\right\|^2 = \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x \mid y) + (1-\lambda)^2$$

qui est une expression polynomiale en λ dont le coefficient du second degré est

$$2 - 2(x \mid y)$$

Puisque les vecteurs x et y sont distincts et de même norme, ils ne peuvent être positivement liés et donc

$$(x \mid y) < \|x\| \, \|y\| = 1$$

Par suite

$$2 - 2(x \mid y) > 0$$

Ainsi la quantité $\left\|(1-\lambda)x + \lambda y\right\|^2$ est une expression polynomiale du second degré exactement. Puisque celle-ci prend la valeur 1 pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 1$, elle ne peut reprendre la valeur 1 pour aucune autre valeur λ et ceci permet de conclure.

Exercice 16 : [énoncé]
Cas $n = 1$, c'est immédiat.
Cas $n = 2$:
Si $\|x + y\| \leqslant M$ et $\|x - y\| \leqslant M$ alors

$$\|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \leqslant M^2 \text{ et } \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2 \leqslant M^2$$

Si $(x \mid y) \geqslant 0$ alors première identité donne $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant M^2$, si $(x \mid y) \leqslant 0$, c'est la deuxième identité qui permet de conclure.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Supposons

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{1, -1\}^{n+1}, \left\| \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant M$$

Par l'étude du cas $n = 2$ appliquée au vecteur

$$x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \text{ et } y = x_{n+1}$$

on obtient

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \leqslant M^2$$

donc

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant \sqrt{M^2 - \|x_{n+1}\|^2}$$

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant M^2 - \|x_{n+1}\|^2$$

et l'on peut conclure.
Récurrence établie.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x) g(x) \,\mathrm{d}x = F(1) G(1) - \int_0^1 f(x) G(x) \,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x) g(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \left(G(1) - G(x) \right) \,\mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^\star(g) : x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t) \,\mathrm{d}t$$

on vérifie que $v^\star$ est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^\star(g) \rangle$$

b)Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^\star \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha \cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.

Exercice 18 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 + k \langle x, a \rangle^2$$

En particulier

$$\varphi(a, a) = \|a\|^2 + k \|a\|^4 = (1 + k)$$

Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive, il est nécessaire que $1 + k > 0$.
Inversement, supposons $1 + k > 0$.
Si $k \geqslant 0$ alors $\varphi(x, x) \geqslant \|x\|^2$ et donc

$$\forall x \in E \backslash \{0_E\}, \varphi(x, x) > 0$$

Si $k \in]-1,0[$, $k = -\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$ et

$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 - \alpha \langle x,a\rangle^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x,a\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|a\|^2 = \|x\|^2$$

donc

$$\varphi(x,x) \geqslant \|x\|^2 - \alpha \|x\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2$$

de sorte que

$$\forall x \in E \backslash \{0_E\}, \varphi(x,x) > 0$$

Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.
Finalement, φ est un produit scalaire si, et seulement si, $1+k>0$.

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque $F \subset \bar{F}$, on a déjà

$$\bar{F}^\perp \subset F^\perp$$

Soit $a \in F^\perp$.
Pour tout $x \in \bar{F}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de F telle que $x_n \to x$.
Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle x_n, a\rangle = 0$$

à la limite (le produit scalaire étant continue)

$$\langle x, a\rangle = 0$$

et donc $a \in \bar{F}^\perp$.
Finalement, par double inclusion $F^\perp = \bar{F}^\perp$.

Exercice 20 : [énoncé]
a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable car $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
b) L'application φ est clairement bilinéaire symétrique et positive.
Si $\varphi(P,P) = 0$ alors par intégration d'une fonction continue positive on obtient

$$\forall t \in [0,+\infty[, P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$$

et donc P admet une infinité de racines (les éléments de $[0,+\infty[$), c'est donc le polynôme nul.

c) Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\varphi(X^p, X^q) = I_{p+q}$.
Par intégration par parties

$$\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^n\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et quand $A \to +\infty$, on obtient $I_n = nI_{n-1}$. Sachant $I_0 = 1$, on conclut $I_n = n!$ et

$$\varphi(X^p, X^q) = (p+q)!$$

d) Notons que la famille $(1, X, X^2)$ est libre et qu'il est donc licite de l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt. On pose $P_0 = 1$.
On cherche $P_1 = X + \lambda P_0$ avec $(P_0 \mid P_1) = 0$ ce qui donne $1 + \lambda = 0$ et donc $P_1 = X - 1$.
On cherche $P_2 = X^2 + \lambda P_0 + \mu P_1$ avec $(P_0 \mid P_2) = 0$ et $(P_1 \mid P_2) = 0$ ce qui donne $2 + \lambda = 0$ et $4 + \mu = 0$ donc $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
La famille orthonormalisée cherchée et alors (Q_0, Q_1, Q_2) avec

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = X - 1 \text{ et } Q_2 = \frac{1}{2}\left(X^2 - 4X + 2\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]
a) On a $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, c'est l'identité du parallélogramme.
b) Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On a

$$\|(w_p - x) - (w_q - x)\|^2 + \|(w_p - x) + (w_q - x)\|^2 \leqslant 2\|w_p - x\|^2 + 2\|w_q - x\|^2$$

avec

$$\|(w_p - x) + (w_q - x)\| = 2\left\|\left(\frac{w_p + w_q}{2}\right) - x\right\| \geqslant 2d(x, C)$$

donc

$$\|w_p - w_q\|^2 \leqslant 2\|w_p - x\|^2 + 2\|w_q - x\|^2 - 4d(x,C)^2$$

Puisque $\|w_n - x\| \to d(x, C)$, on peut affirmer que pour $\varepsilon > 0$, on a pour p et q assez grands

$$\|(w_p - x) + (w_q - x)\| \leqslant \varepsilon$$

c) Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, on peut affirmer l'existence d'une suite (w_n) telle que ci-dessus. Puisque cette suite est de Cauchy et que l'espace est complet, elle converge vers un élément que nous notons u.
Puisqu'en sus c'est une suite d'éléments de C et que la partie C est supposée fermée, la limite u est élément de C.
Supposons que v est un autre élément de C vérifiant $\|x - v\| = d(x, C)$.

On a alors par l'identité du parallélogramme

$$2d(x,C)^2 = \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 = 2\left\|x - \frac{(u+v)}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \geqslant 2d(x,C)^2$$

ce qui entraîne $u = v$.
d) Notons encore $u = p_C(x)$. Soit $w \in C$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$, le vecteur $t = (1-\lambda)u + \lambda w$ est élément de C et donc

$$d(x,C)^2 \leqslant \|x-t\|^2 = \|(x-u) - \lambda(w-u)\|^2 = d(x,C)^2 - 2\lambda(x-u \mid w-u) + \lambda^2 \|w-u\|^2$$

Cette relation devant être valable pour tout $\lambda \in [0,1]$, on obtient en faisant $\lambda \to 0^+$

$$(x-u \mid w-u) \leqslant 0$$

Inversement, supposons que v est un vecteur de C vérifiant $(x-v \mid w-v) \leqslant 0$ pour tout $w \in C$
La relation doit être vérifiée notamment pour $w = u$ et donc

$$(x-v \mid u-v) \leqslant 0$$

ce qui donne

$$(x-u \mid u-v) + \|u-v\|^2 \leqslant 0$$

Or $(x-u \mid u-v) \geqslant 0$ donc $\|u-v\|^2 \leqslant 0$ puis $u = v$.
e) Notons $u = p_C(x)$ et $v = p_C(y)$. On a

$$\|y-x\|^2 = \|[(y-v)-(x-u)] - [u-v]\|^2$$

et en développant

$$\|y-x\|^2 = \|(y-v)-(x-u)\|^2 - 2(y-v \mid u-v) - 2(x-u \mid v-u) + \|u-v\|^2 \geqslant \|u-v\|^2$$

ce qui assure que l'application p_C est lipschitzienne de rapport 1.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \geqslant 0$, établissons l'existence et l'unicité de la sous-famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que voulue.
Cas $n = 0$: le polynôme P_0 vaut 1.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
Les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont alors déterminés de façon unique par l'hypothèse de récurrence et il reste seulement à former P_{n+1}. Celui-ci peut s'écrire

$$P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X) \text{ avec } Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$$

On veut $(P_{n+1} \mid P_k) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Le polynôme Q doit donc vérifier

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (Q(X) \mid P_k) = -(X^{n+1} \mid P_k)$$

Ces relations détermine entièrement le polynôme Q puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$Q = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(X^{n+1} \mid P_k)}{\|P_k\|^2} P_k$$

Le polynôme P_{n+1} existe donc et est unique.
Récurrence établie.
b) La famille $((-1)^n P_n(-X))$ vérifie les mêmes conditions que celles ayant défini la suite (P_n). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
On peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$ et donc $(P_{n+1} \mid Q) = 0$.
On peut aussi écrire $XQ = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k$ et donc $(XP_n \mid Q) = (P_n \mid XQ) = 0$.
On en déduit

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], (P_{n+1} - XP_n \mid Q) = 0$$

d) Par simplification des termes de plus haut degré

$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

On peut donc écrire

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$$

Or $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $P_0, \dots, P_{n-2}$ donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

Enfin, par parité, $\alpha_n = 0$ et donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) cf. cours !
b) Au terme des calculs, on obtient la base (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X \text{ et } P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) Soit u un vecteur unitaire tel que $a \in \operatorname{Vect} u$ et v un vecteur unitaire orthogonal à v tel que $b \in \operatorname{Vect}(u, v)$. Il suffit ensuite de travailler dans $(u, v, u \wedge v)$ et d'un peu de courage...
b) Soit $x \neq 0$.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda + 1)x = (a \mid x)a$$

Si x est orthogonal à a alors x est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Sinon x est vecteur propre si, et seulement si, x est colinéaire à a. Or $f(a) = 0$ donc a, puis x, est vecteur propre associé à la valeur propre 0.
On reconnaît en f l'opposé de la projection orthogonale sur le plan de vecteur normal a.

Exercice 25 : [énoncé]
a) En notant $X = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient

$${}^t XAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

et donc

$${}^t XAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j} x_i x_j$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j} x_i x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}|\,|x_j|$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j} x_i x_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}|\,|x_j|\right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{i,j}|\,|x_j|\right)^2 \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1, j\neq i}^n x_j^2 \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2$$

On obtient donc

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j} x_i x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$${}^t XAX > \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$$

b) Si $X \in \ker A$ alors ${}^t XAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$A^7 = A^4 \times (A^t A) = A^{5t} A$$

puis

$$A^7 = A^3 \left({}^t A\right)^2 = A \left({}^t A\right)^3 = A^t \left(A^t A\right) = A^{2t} A = A^4$$

Ainsi $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$ annule A.
Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4 = \ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3 - 1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidemment $\ker A \subset \ker A^4$. Inversement, soit $X \in \ker A^4$. On a

$$A^t AAX = A^4 X = 0$$

donc

$$\left\|{}^t AAX\right\|^2 = {}^t X^t AA^t AAX = 0$$

et par conséquent ${}^t AAX = 0$. Alors

$$\|AX\|^2 = {}^t X^t AAX = 0$$

et donc $AX = 0$. Ainsi $\ker A^4 \subset \ker A$ puis l'égalité.

Exercice 27 : [énoncé]
Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a

$$(I+2M)/3 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

avec $M = A^{-1}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire,

$$\|x + 2Mx\| = 3$$

Mais aussi

$$\|x\| + \|2Mx\| = \|x\| + 2\|x\| = 3$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et, par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$2Mx = \lambda x$$

En considérant à nouveau la norme, on obtient $\lambda = 2$ puis $Mx = x$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut $M = I_n$ puis $A = B$.

Exercice 28 : [énoncé]
a) $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$ et $Q \mapsto \varphi(P,Q)$ linéaire : clair.

$$\varphi(P,P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta \geqslant 0$$

et

$$\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow \forall \theta \in [-\pi,\pi], P(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$$

donc

$$\forall z \in U, P(z) = 0$$

Puisque P admet une infinité de racines, $P = 0$.
b) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$.

$$\varphi(X^k, X^\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(\ell-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \delta_{\ell,k}$$

c) $\varphi(Q,Q) = 1 + |a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_0|^2$ car $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille orthonormée.
d) On a

$$\varphi(Q,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta \leqslant M^2$$

or $\varphi(Q,Q) \geqslant 1$ donc $M \geqslant 1$.
Si $M = 1$ alors $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$ et $Q = X^n$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 29 : [énoncé]
Soient $x, y \in E$. $(u(x+y) \mid x+y) = (u(x) \mid y) + (u(y) \mid x) = 0$ et
$(u(x+iy) \mid x+iy) = i(u(x) \mid y) - i(u(y) \mid x) = 0$ donc $(u(x) \mid y) = -(u(x) \mid y)$ puis $(u(x) \mid y) = 0$.
Comme ceci vaut pour tout $y \in E$, on obtient $u(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 30 : [énoncé]
On sait que

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\right\}$$

est un espace de préhilbertien pour le produit scalaire

$$\langle u \mid v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n$$

Considérons alors l'application $\Delta : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une suite $x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associe

$$\Delta(x) = (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

On vérifie aisément que Δ est une application linéaire et que son noyau est égal à l'espace des suites constantes.
Puisque

$$H = \Delta^{-1}\left(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})\right)$$

H est l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; c'est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Pour $x, y \in H$, posons

$$\varphi(x,y) = \langle \Delta(x) \mid \Delta(y)\rangle + \overline{x_0}y_0$$

L'application φ est évidemment sesquilinéaire hermitienne.

$$\varphi(x,x) = \|\Delta(x)\|_2^2 + |x_0|^2 \geqslant 0$$

Di $\varphi(x,x) = 0$ alors

$$\|\Delta(x)\|_2 = 0 \text{ et } |x_0| = 0$$

Par suite x est une suite constante et puisque son terme initial est nul, c'est la suite nulle.
Finalement φ est un produit scalaire hermitien sur H et donc H est un espace préhilbertien complexe.

Exercice 31 : [énoncé]
On munit $\mathbb{C}^n$ de son produit scalaire canonique et on pose $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$.
On a $A = X^t\bar{X}$ donc, pour une colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

$$AY = X^t\bar{X}Y = X(X \mid Y) = (X \mid Y)X$$

Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ alors

$$\forall y \in \mathbb{C}^n, f(y) = (x \mid y)x$$

On en déduit que si $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ alors

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect} x \text{ et } \ker f = (\mathrm{Vect} x)^{\perp}$$

et si $(x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{C}^n}$ alors $f = \tilde{0}$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) $(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}) = \mathrm{tr}(E_{j,i}E_{k,\ell}) = \mathrm{tr}(\delta_{i,k}E_{j,\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.
b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(AB) = -\mathrm{tr}(A^tB) = -\mathrm{tr}({}^tBA) = -(B \mid A)$$

donc $(A \mid B) = 0$ et l'orthogonalité des espaces. Leur supplémentarité est connue.
c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|(I_n \mid A)| \leqslant \|I_n\| \, \|A\|$$

d'où

$$\mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \geqslant 0$ et (A, I_n) liée, i.e. $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
Si $\alpha = -1$ alors $a \in \ker f_\alpha$ et donc f_α n'est pas bijective.
Si $\alpha \neq -1$ alors, pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$,

$$f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = \mathrm{Id}$$

d'où la bijectivité de f_α.
b) Tout vecteur non nul orthogonal à a est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Tout vecteur non nul colinéaire à a est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \alpha$.
Pour une raison de dimension, il ne peut y avoir d'autres vecteurs propres.

Exercice 34 : [énoncé]
a) L'application f est linéaire et l'espace E est de dimension finie. Il suffit d'étudier l'injectivité de f pour pouvoir conclure.
Si $x \in \ker f$ alors $x = (a \mid x)b$ et donc $(a \mid x) = (a \mid x)(a \mid b)$.
Si $(a \mid x) \neq 0$ alors $(a \mid b) = 1$ et donc $a = b$ (par égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Par contraposée si $a \neq b$ alors $(a \mid x) = 0$ et $x = 0$ donc f bijective.
En revanche si $a = b$ alors $a \in \ker f$ et f n'est pas bijective.
b) Supposons $a \neq b$. Si $y = f(x)$ alors $y = x - (a \mid x)b$ puis $(a \mid y) = (a \mid x)(1 - (a \mid b))$ et donc

$$x = y + \frac{(a \mid y)}{1 - (a \mid b)}b$$

c)

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (a \mid x)b = (1 - \lambda)x$$

Soit λ une valeur propre. Il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $(a \mid x)b = (1 - \lambda)x$ puis $(a \mid x)(a \mid b) = (1 - \lambda)(a \mid x)$ ce qui donne $(a \mid x) = 0$ (qui implique $\lambda = 1$ avec $E_\lambda(f) = \{a\}^{\perp}$) ou $\lambda = 1 - (a \mid b)$.
Si $(a \mid b) = 0$: $\lambda = 1$ est seule valeur propre et l'espace propre associé est l'hyperplan de vecteur normal a.
L'endomorphisme n'est alors pas diagonalisable.
Si $(a \mid b) \neq 0$: $\lambda = 1$ et $\lambda = 1 - (a \mid b)$ sont valeurs propres et puisque $E_1(f)$ est un hyperplan, l'endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Soit λ un réel.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow a \wedge x = (1 - \lambda)x$$

Puisque le vecteur $a \wedge x$ est orthogonal à x, l'équation $f(x) = \lambda x$ ne possède pas de solution non nulle dans le cas $\lambda \neq 1$. Pour $\lambda = 1$

$$f(x) = x \Leftrightarrow a \wedge x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(a)$$

On en déduit $\mathrm{Sp} f = \{1\}$ et $E_1(f) = \mathrm{Vect} a$.
b) Posons

$$g : x \mapsto a \wedge x$$

On a

$$g^2(x) = a \wedge (a \wedge x) = (a \mid x)a - \|a\|^2 x$$

puis

$$g^3(x) = -\|a\|^2 a \wedge x = -\|a\|^2 g(x)$$

Ainsi
$$(f-\mathrm{Id})^3+\|a\|^2(f-\mathrm{Id})=\tilde{0}$$
et donc le polynôme suivant est annulateur de f.
$$(X-1)((X-1)^2+\|a\|^2)$$

Exercice 36 : [énoncé]
Soient u un vecteur unitaire tel que $a\in\mathrm{Vect}u$ et v un vecteur unitaire orthogonal à v tel que $b\in\mathrm{Vect}(u,v)$. Il suffit ensuite de travailler dans $(u,v,u\wedge v)$.
Soit $x\neq 0$.
$$f(x)=\lambda x\Leftrightarrow(\lambda+1)x=(a\mid x)a$$
Si x est orthogonal à a alors x est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Sinon x est vecteur propre si, et seulement si, x est colinéaire à a. Or $f(a)=0$ donc a, puis x, est vecteur propre associé à la valeur propre 0.
On reconnaît en f l'opposé de la projection orthogonale sur le plan de vecteur normal a.

Exercice 37 : [énoncé]
Cas $n=1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1,x_2,x_3 tels que
$$\forall i\neq j,(x_i\mid x_j)<0$$
Puisque $x_1\neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2=\lambda x_1$ et $x_3=\mu x_1$.
$(x_2\mid x_1)<0$ et $(x_3\mid x_1)<0$ donne $\lambda<0$ et $\mu<0$ mais alors
$(x_2\mid x_3)=\lambda\mu\|x_1\|^2>0$!
Cas $n=2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1,...,x_4$ tels que
$$\forall i\neq j,(x_i\mid x_j)<0$$
x_1 étant non nul on peut écrire
$$\forall i\geqslant 2,x_i=\lambda_i x_1+y_i$$
avec $y_i\in\{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i<0$.
On
$$\forall i\neq j\geqslant 2,(x_i\mid x_j)=\lambda_i\lambda_j+(y_i\mid y_j)<0$$
donc $(y_i\mid y_j)<0$.
y_2,y_3,y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n=1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n\geqslant 1$.
Pour $n=1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 1$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1,...,x_{n+3}$ tels que
$$\forall i\neq j,(x_i\mid x_j)<0$$
à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$.
x_1 étant non nul on peut écrire
$$\forall i\geqslant 2,x_i=\lambda_i x_1+y_i$$
avec $y_i\in\{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i<0$.
On a
$$\forall i\neq j\geqslant 2,(x_i\mid x_j)=\lambda_i\lambda_j+(y_i\mid y_j)<0$$
donc $(y_i\mid y_j)<0$.
$y_2,...,y_{n+3}$ se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^\perp$ qui est de dimension n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Récurrence établie.

Exercice 38 : [énoncé]
Pour $j\in\{1,\dots,n\}$,
$$\|e_j\|^2=\sum_{k=1}^n(e_k\mid e_j)^2$$
donc $(e_k\mid e_j)=0$ pour tout $k\neq j$. Ainsi la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est orthonormée.
Soit $x\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$. On a
$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^n(e_k\mid x)^2=0$$
donc $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp=\{0\}$ puis $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)=E$. Par suite la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice et c'est bien entendu une famille libre (car orthonormée) donc une base de E.

Exercice 39 : [énoncé]
Soient $x, y \in E$. On a
$$(f(x+y) \mid x+y) = 0$$
Or
$$(f(x+y) \mid x+y) = (f(x) \mid x)+(f(y) \mid y)+(f(x) \mid y)+(f(y) \mid x) = (f(x) \mid y)+(f(y) \mid x)$$
Si $x \in \ker f$ alors
$$\forall y \in E, (x \mid f(y)) = -(f(x) \mid y) = 0$$
donc $x \in (\mathrm{Im} f)^\perp$. Ainsi
$$\ker f \subset (\mathrm{Im} f)^\perp$$
De plus, par la formule du rang il y égalité des dimensions et donc
$$\ker f = (\mathrm{Im} f)^\perp$$

Exercice 40 : [énoncé]
a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. $\mathrm{tr} u = 0$ donne
$$\sum_{i=1}^n \langle e_i \mid u(e_i)\rangle = 0$$
Si $\dim E = 1$: ok
Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i \mid u(e_i)\rangle \geqslant 0$ et $\langle e_j \mid u(e_j)\rangle \leqslant 0$.
L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j) \mid te_i + (1-t)e_j\rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0,1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.
De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.
b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que
$$\langle \varepsilon_1 \mid u(\varepsilon_1)\rangle = 0$$
On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & A \end{pmatrix}$$
avec $\mathrm{tr} A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\mathrm{tr} u' = \mathrm{tr} A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 41 : [énoncé]
Etudions le problème inverse, c'est-à-dire, étudions la liberté de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.
Supposons $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$. On a alors
$$\langle v_i, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n\rangle = c\lambda_1 + \dots + c\lambda_{i-1} + \lambda_i + c\lambda_{i+1} + \dots + c\lambda_n = 0$$
Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (c) \\ & \ddots & \\ (c) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
et la colonne $X = {}^t(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. Les équations précédentes fournissent le système
$$AX = 0$$
Si la matrice A est inversible alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est assurément libre.
Inversement, si la famille A n'est pas inversible, il existe une relation linéaire sur ses colonnes
$$\mu_1 C_1 + \dots + \mu_n C_n = 0 \text{ avec } (\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$$
Posons alors $u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. On a
$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \langle v_i, u\rangle = 0$$
et donc
$$u \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \cap \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp = \{0_E\}$$
La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est alors liée.
Résumons : $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si, et seulement si, A est inversible.
Puisque
$$\det A = (1 + (n-1)c)(1-c)^{n-1}$$
on peut conclure que $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si, et seulement si,
$$c = 1 \text{ ou } c = -1/(n-1)$$

Exercice 42 : [énoncé]
Cas $a = b$:
$f(x) = (a \mid x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en a.
Cas $a = -b$:
$f(x) = -(a \mid x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en 0.

Cas restants :
Les vecteurs $a+b$ et $a-b$ constituent une famille orthogonale.
Posons
$$e_1=\frac{a+b}{\|a+b\|},\ e_2=\frac{a-b}{\|a-b\|}$$
Les vecteurs e_1 et e_2 forment une famille orthonormale que le peut compléter en une base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour x tel que $\|x\|\leqslant 1$, on peut écrire
$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n \text{ avec } x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$$
et alors
$$(a\mid x)=x_1\frac{1+(a\mid b)}{\|a+b\|}+x_2\frac{1-(a\mid b)}{\|a-b\|}$$
puis
$$f(x)=x_1^2\left(\frac{1+(a\mid b)}{\|a+b\|}\right)^2-x_2^2\left(\frac{1-(a\mid b)}{\|a+b\|}\right)^2$$
Le maximum cherché est pour $x_1=1$ et $x_2=\ldots=x_n=0$. Il vaut
$$\left(\frac{1+(a\mid b)}{\|a+b\|}\right)^2$$
Cette formule convient aussi pour les cas initialement isolés.

Exercice 43 : [énoncé]
On sait
$$p_F(x)=\sum_{k=1}^p(x_k\mid x)x_k$$
donc
$$p_F(e_i)=\sum_{k=1}^p({}^tX_kE_i)x_k$$
en notant $E_i=\mathrm{Mat}_e(e_i)$.
Puisque ${}^tX_kE_i$ est un réel,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F(e_i))=\sum_{k=1}^p({}^tX_kE_i)X_k=\sum_{k=1}^pX_k{}^tX_kE_i$$
puis
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)=\sum_{k=1}^pX_k{}^tX_k$$
car $(E_1\mid\cdots\mid E_n)=I_n$.

Exercice 44 : [énoncé]
On sait déjà
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\mid x)^2\leqslant\|x\|^2$$
en vertu de l'inégalité de Bessel.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $y\in V$ tel que $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$. y est une combinaison linéaire des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\ldots,e_N)$ et donc $\varepsilon\geqslant\|x-y\|\geqslant\|x-p(x)\|$ avec $p(x)$ le projeté de x sur $\mathrm{Vect}(e_0,\ldots,e_N)$ c'est-à-dire $p(x)=\sum_{n=0}^N(e_n\mid x)e_n$. Par suite $|\|x\|-\|p(x)\||\leqslant\|x-p(x)\|\leqslant\varepsilon$ donne
$$\|x\|\leqslant\|p(x)\|+\varepsilon=\sqrt{\sum_{n=0}^N(e_n\mid x)^2}+\varepsilon\leqslant\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\mid x)^2}+\varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon>0$, on obtient $\|x\|\leqslant\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\mid x)^2}$ et finalement
$$\|x\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}(e_n\mid x)^2$$

Exercice 45 : [énoncé]
Notons que les matrices A et B sont des matrices de projections orthogonales car symétriques et idempotentes.
Les cas $A=O_2$ et $A=I_2$ sont immédiats. De même pour les cas $B=O_2$ et $B=I_2$.
On suppose dans la suite ces cas exclus et on travaille donc sous l'hypothèse supplémentaires
$$\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}B=1$$
a) Si $\mathrm{Im}B=\ker A$ alors $AB=O_2$ est donc AB est diagonalisable.
Si $\mathrm{Im}B=\ker A$ alors en passant à l'orthogonal $\mathrm{Im}A\neq\ker B$.
Les droites $\mathrm{Im}A$ et $\ker B$ étant distinctes dans le plan, elles sont supplémentaires.
Considérons une base (X_1,X_2) adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}A$ et $\ker B$.
$ABX_1=A(BX_1)\in\mathrm{Im}A$ donc on peut écrire $ABX_1=\lambda X_1$ car $\mathrm{Im}A=\mathrm{Vect}X_1$.
$ABX_2=0$ car $BX_2=0$.
Ainsi la base (X_1,X_2) diagonalise la matrice AB.
b) Il s'agit ici essentiellement d'encadrer la valeur λ introduite dans l'étude précédente quand $\mathrm{Im}B\neq\ker A$.

On a
$$\lambda \|X_1\|^2 = (\lambda X_1 \mid X_1) = (ABX_1 \mid X_1)$$
Puisque $X_1 \in \operatorname{Im} A$, on peut écrire $X_1 = AU$ et alors
$$(\lambda X_1 \mid X_1) = (ABAU \mid AU)$$
Puisque A est symétrique
$$(ABAU \mid AU) = (BAU \mid A^2U)$$
Puisque $A^2 = A$
$$(BAU \mid A^2U) = (BAU \mid AU)$$
Enfin en procédant de façon semblable
$$(BAU \mid AU) = (B^2AU \mid AU) = (BAU \mid BAU) = \|BX_1\|^2$$
Au final
$$\lambda \|X_1\|^2 = \|BX_1\|^2$$
Or B correspond à une projection orthogonale donc $\|BX_1\|^2 \leqslant \|X_1\|^2$ et on peut affirmer
$$\lambda \in [0,1]$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) Puisque
$$d(x,C) = \inf_{y\in C} \|x-y\|$$
Pour $\varepsilon = 1/(n+1) > 0$, il existe $y_n \in C$ tel que
$$\|x-y_n\| < d(x,C) + \varepsilon$$
En faisant varier n, cela détermine une suite (y_n) d'éléments de C vérifiant
$$\|x-y_n\| \to d(x,C)$$
b) Soient $m,n \in \mathbb{N}$. Par l'identité du parallélogramme
$$\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n-y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right)$$
Puisque C est convexe, le vecteur $(y_n+y_m)/2$ appartient à C et donc
$$\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \geqslant d(x,C)^2$$
et donc
$$\|y_n-y_m\|^2 \leqslant 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - 4d(x,C)$$
Puisque $\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x,C)$, on peut affirmer que pour n et m assez grands
$$\|y_n-y_m\| \leqslant \varepsilon$$
c) Puisque l'espace E est complet la suite (y_n) converge vers un élément $y \in E$. La partie C étant fermée, on obtient $y \in C$. Enfin
$$\|x-y\| = \lim_{n\to+\infty} \|x-y_n\| = d(x,C)$$
d) Puisque $F \subset F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp\perp}$ fermé, on a déjà $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$ (inclusion vraie indépendamment de l'hypothèse de complétude).
Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Puisque $\bar{F}$ est un convexe fermé non vide, il existe $y \in \bar{F}$ tel que
$$\|x-y\| = d(x,\bar{F})$$
Pour tout $z \in F$, on a
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|(x-y)+\lambda z\|^2 \geqslant d(x,\bar{F})^2 = \|x-y\|^2$$
On en déduit $(x-y \mid z) = 0$ et donc$x-y \in F^\perp$
Or $x \in F^{\perp\perp}$ et $y \in \bar{F} \subset F^{\perp\perp}$ donc $x-y \in F^{\perp\perp}$
On en déduit $x-y = 0_E$ puis $x = y \in \bar{F}$.

Exercice 47 : [énoncé]
a) Vérification sans peine.
b) Soit $(f,g) \in V \times W$. On a
$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g''(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g'(t)]_0^1 = 0$$
et les espaces V et W sont donc en somme directe.
Soit $f \in E$. Posons
$$\lambda = f(0) \text{ et } \mu = \frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}$$
On a $f = g+h$ avec $h = \lambda\operatorname{ch} + \mu\operatorname{sh} \in W$ et $g = f-h \in V$ par construction.
Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce qui précède
$$p(f) = f(0)\operatorname{ch} + \frac{f(1)-f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}$$

c) Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g = \alpha\mathrm{ch} + \frac{\beta - \alpha\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}$$

Les fonctions de $E_{\alpha,\beta}$ sont alors de la forme $f = g + h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t = \|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

On en déduit

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t = \|g\|^2 = \frac{(a^2+b^2)\mathrm{ch}(1) - 2ab}{\mathrm{sh}(1)}$$

Exercice 48 : [énoncé]

a) Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$ et on observe alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ en notant $L_1,\dots,L_n$ les lignes de la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$.

On conclut $\det G(u_1,\dots,u_p) = 0$.

b) Si $\det G(u_1,\dots,u_p) = 0$ alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ et on obtient alors que le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ est orthogonal à tout u_j, c'est donc un vecteur commun à $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et à son orthogonal, c'est le vecteur nul.

On conclut que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée.

c) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. En développant $\det G(e_1,\dots,e_p,x)$ selon la dernière colonne :

$$\det G(e_1,\dots,e_p,u+n) = \det G(e_1,\dots,e_p,u) + \begin{vmatrix} G(e_1,\dots,e_p) & 0 \\ \star & \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

or $\det G(e_1,\dots,e_p,u) = 0$ car la famille est liée et donc

$$\det G(e_1,\dots,e_p,x) = \|n\|^2 \det G(e_1,\dots,e_p)$$

avec $\|n\| = d(x,F)$.

Exercice 49 : [énoncé]

a) Sans difficulté, notamment parce qu'un polynôme de degré $\leqslant 2$ possédant trois racines est nécessairement nul.

b) $d(X^2,P) = \left\|X^2 - \pi\right\|$ avec $\pi = aX + b$ projeté orthogonal de X^2 sur P.

$(X^2 - \pi \mid 1) = (X^2 - \pi \mid X) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9 \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

et après calcul

$$d = \sqrt{2/3}$$

Exercice 50 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

La quantité cherchée m apparaît alors sous la forme

$$m = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \left\|X^2 - (aX^2 + bX + c)\right\|^2$$

C'est donc le carré de la distance de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. En introduisant la projection orthogonale p sur ce sous-espace vectoriel

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2$$

On peut écrire

$$p(X^3) = a + bX + cX^2$$

Pour chaque $i = 0,1,2$, on a

$$(p(X^3) \mid X^i) = (X^3 \mid X^i)$$

car

$$(p(X^3) - X^3 \mid X^i) = 0$$

On obtient alors un système d'équations d'inconnue (a, b, c)

$$\begin{cases} a + b/2 + c/3 = 1/4 \\ a/2 + b/3 + c/4 = 1/5 \\ a/3 + b/4 + c/5 = 1/6 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = 1/20,\ b = -3/5 \text{ et } c = 3/2$$

On en déduit

$$m = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2 = (X^3 - p(X^3) \mid X^3) = \frac{1}{2800}$$

Exercice 51 : [énoncé]
a) symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ P(t) = 0$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.
b) Par intégration par parties successives, $\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$ donc

$$\varphi(X^p, X^q) = (p+q)!$$

c) On interprète

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \left\|X^2 - \pi\right\|^2$$

avec $\pi = aX + b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
$(X^2 - \pi \mid 1) = (X^2 - \pi \mid X) = 0$ donne

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

Après résolution $a = 4$, $b = -2$ et

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t = 4$$

Exercice 52 : [énoncé]
Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geqslant 2$.
La quantité cherchée est $m = d(M, \mathrm{Vect}(I, J)) = \|M - p(M)\|$ avec p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(I, J)$.
$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) \mid I) = (M \mid I) = \mathrm{tr}(M)$ et $(p(M) \mid J) = (M \mid J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M.
La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n\mathrm{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \mathrm{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \|M - p(M)\|^2 = (M - p(M) \mid M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1)\mathrm{tr}(M)^2 + (\mathrm{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}$$

Exercice 53 : [énoncé]
En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0, 1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f : t \mapsto \ln t$ et $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.
$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f) \mid f_0) = (f \mid f_0)$ et $(p(f) \mid f_1) = (f \mid f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.
$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) \mid f) = 1/432$.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\,,\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\,,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0, +\infty[\,,\ P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.
b) Pour $k \geqslant 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux.
Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q\rangle\, P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\,\langle 1, Q\rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\,\langle 1, Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q\rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 55 : [énoncé]
En introduisant la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\|A\| = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right) = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant $A = M + N$ avec

$$M = \frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$$

on obtient

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 56 : [énoncé]
a) On reconnaît une restriction du produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.
b) La distance f_2 à g sera minimale quand g est le projeté orthogonal de f_2 sur $\mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.
Ce projeté g vérifie $(f_2 - g \mid f_1) = (f_2 - g \mid f_3) = 0$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a + b = \mathrm{e} - 1 \\ \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $a = 18 - 6\mathrm{e}$ et $b = 4\mathrm{e} - 10$.

Exercice 57 : [énoncé]
a) $(A \mid B) = \mathrm{tr}\,(A^tB)$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$$

b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^t B) = -\operatorname{tr}(AB) \text{ et } (A \mid B) = (B \mid A) = \operatorname{tr}({}^t AB) = \operatorname{tr}(AB)$$

On en déduit $(A \mid B) = 0$.
Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc en somme directe.
Puisqu'on peut écrire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^t M\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^t M\right)$$

avec $\frac{1}{2}(M + {}^t M) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(M - {}^t M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ i.e.

$$d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\left\|M - {}^t M\right\| = 2$$

c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H.
On en déduit

$$d(H, J) = \frac{|(I_n \mid J)|}{\|I_n\|} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Exercice 58 : [énoncé]
a) Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent
$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque
$(P_0 \mid P_2) = 1/3 \neq 0$.
b) $R_0 = P_0$, $\|R_0\| = 1$, $Q_0 : x \mapsto 1$
$(P_0 \mid P_1) = 0$, $R_1 = P_1$, $\|R_1\| = 1/\sqrt{3}$, $Q_1 : x \mapsto \sqrt{3}x$.
$R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1$.
$(R_2 \mid R_0) = 0$ donne $\lambda_0 = -(P_2 \mid P_0) = -1/3$,
$(R_2 \mid R_1) = 0$ donne $\lambda_1/3 = -(P_2 \mid R_1) = 0$.
$R_2 : x \mapsto x^2 - 1/3$, $\|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $Q_2 : x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2}\left(3x^2 - 1\right)$.
c) Le projeté orthogonal de P_3 sur F est

$$R = (Q_0 \mid P_3)Q_0 + (Q_1 \mid P_3)Q_1 + (Q_2 \mid P_3)Q_2$$

soit, après calculs

$$R : x \mapsto \frac{3}{5}x$$

La distance de P_3 à F est alors

$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}$$