Résumé 10 : Probabilités I

Ω sera un ensemble abstrait, c'est-à-dire sans structure particulière. $\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, y compris le sous-ensemble vide $\emptyset$. Nous noterons A^c, ou $\bar{A}$, le complémentaire de la partie A de Ω.

1 Espaces probabilisés

§ 1. ***Tribus.***— C'est la partie qualitative : nous définissons la classe des parties de Ω que nous considérerons

Définition 1.1 (*σ−algèbre, ou tribu*)

On appelle tribu tout ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant les 3 hypothèses suivantes :

1. *$\mathscr{A}$ contient $\emptyset$ et Ω.*
2. *$\mathscr{A}$ est stable par complémentation, i.e que si $A \in \mathscr{A}$, alors $A^c \in \mathscr{A}$.*
3. *$\mathscr{A}$ est stable par les réunions dénombrables et les intersections dénombrables, i.e que si pour tout $i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ sont aussi dans $\mathscr{A}$.*

On dit alors du couple $(\Omega, \mathscr{A})$ qu'il est un **espace probabilisable**.
Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements**.

§ 2. ***Probabilité.***— C'est la partie quantitative : on donne un poids à chaque événement.

Définition 1.2 (*Probabilité*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **mesure de probabilités**, *ou simplement une* **probabilité** *est une application $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ qui vérifie :*

1. *$P(\Omega) = 1$.*
2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ qui sont deux à deux disjoints (i.e $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), on a : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

Le nombre $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A. L'axiome 2. s'appelle la $\sigma-$additivité.
Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Proposition 1.3

Enfin, dans le cas où ω est fini ou dénombrable et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, se donner une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est équivalent à se donner une suite $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} = (P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ sommable de réels positifs tels que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

§ 3. ***Propriétés élémentaires des probabilités.***— On se fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Propriétés 1.4

- $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $A, B \in \mathscr{A}$ *et* $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
- *Si* $A \cap B = \emptyset$, *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Voici un analogue probabiliste du théorème de limite monotone :

Proposition 1.5

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'événements, alors*
$$P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion d'événements, alors*
$$P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

2 Probabilités conditionnelles et espérances

Définition 2.1 (*Indépendance*)

1. *Deux événements A et B sont dits indépendants s'ils vérifient $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.*
2. *Soit une famille finie ou infinie d'événements $(A_i)_{i\in I}$. Ces événements sont dits indépendants, ou mutuellement indépendants, si pour toute partie finie J de I, on a*
$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

: si les $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, ils sont aussi deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse.

C'est la probabilité conditionnelle qui code la manière dont A dépend de B :

Définition 2.2 (*Probabilité conditionnelle*)

Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Théorème 2.3

Supposons que $P(B) > 0$.

1. *A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.*
2. *L'application $A \longmapsto P(A|B)$ de $\mathscr{A}$ dans $[0,1]$ définit une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathscr{A}$, appelée la probabilité conditionnelle sachant B.*

Les trois résultats suivants, quoique élémentaires, sont très utiles, et en particulier le second d'entre eux.

Théorème 2.4 (*Probabilités composées*)

Si $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{A}$ et si $P(A_1\cap\dots\cap A_n) > 0$, alors

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\dots P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}).$$

Théorème 2.5 (*Probabilités Totales*)

Soit (E_n) un système complet d'éléments non négligeables de la tribu $\mathscr{A}$. Pour tout $A\in\mathscr{A}$, on a

$$P(A) = \sum_n P(A|E_n)P(E_n).$$

En particulier, $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

Théorème 2.6 (*Formule de Bayes*)

Si A et B sont des événements non négligeables, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}.$$

3 Variables Aléatoires Discrètes

Définition 3.1 (*Variable aléatoire discrète*)

*Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω est une application $X : \Omega \longrightarrow E$, où E est un ensemble, dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable, et telle que pour tout $x\in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.*
Lorsque $E=\mathbb{R}$, on dit de X qu'elle est une variable aléatoire réelle.
Si X est une variable aléatoire réelle, alors pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, l'application $f\circ X:\Omega\to\mathbb{R}$ est aussi une variable aléatoire réelle.

Exemples :

Les variables aléatoires discrètes 1_A, où $A\in\mathscr{A}$.

Définition 3.2 (*loi d'une v.a.d*)

*Soit $X:\Omega\longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. On appelle **loi de** X la loi notée P_X définie sur la tribu $\mathscr{P}(E)$ de toutes les parties de E vérifiant :*

$$\text{Pour tout } B\subset E,\qquad P_X(B) = P\Big(X^{-1}(B)\Big).$$

On note aussi $P_X(B) = P(X\in B) = P\Big(\{\omega\in\Omega/X(\omega)\in B\}\Big)$.

4 Lois usuelles

Nous donnons ici quelques lois usuelles, que vous rencontrerez dans maintes situations. Elles permettent de classer les variables aléatoires . Par exemple, une variable aléatoire est dite de Poisson si la loi est une loi de Poisson.
Dans le cas des variables de bernoulli, Binômiale, et géométrique, on notera systématiquement $q = 1-p$.

§ 1. *Lois finies.*– Ici, Ω est un ensemble fini.

1.1 Loi uniforme

C'est la loi la plus simple, définie comme étant celle où $P(\{\omega\})$ ne dépend pas du choix de $\omega\in\Omega$. Ainsi, pour toute partie $A\subset\Omega$,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

1.2 Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

Ici, $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ est de cardinal 2, et si p est un réel compris entre 0 et 1, la loi de bernoulli P de paramètre p est définie par

$$P(\{\alpha\}) = p \text{ et } P(\{\beta\}) = q.$$

On pense à cette loi dès lors que l'on s'intéresse au succès ou à l'échec d'une expérience. Si $p = 1/2$, cela corrrespond au lancer d'une pièce non truquée.

Une **variable aléatoire de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ est une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, 1\}$ vérifiant $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$.

Exemples :

Les 1_A sont des variables de Bernoulli, avec $p = P(A)$.

1.3 Loi Binômiale $\mathscr{B}(n, p)$

Soit $p \in [0, 1]$ et $\Omega = [\![0, n]\!]$ un ensemble de cardinal n.
La loi binomiale de paramètre p et de taille n, que l'on condensera en "loi $B(p, n)$", est définie par

$$\text{Pour tout } x \in [\![0, n]\!], \qquad P(\{x\}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

On voit que tous ces réels sont positifs, et que leur somme est égale à 1.

Exemples :

1. FONDAMENTAL : Toute variable aléatoire représentant le nombre de succès dans une suite de n expériences aléatoires indépendantes mutuellement est une variable binomiale de loi $B(n, p)$ pour un ceratin p.
2. On lance n fois une pièce truquée. $\Omega = \{P, F\}^n$. Soit X le nombre total de PILE. X prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$, donc est discrète. Sa loi est donnée par $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ce qui en fait une variable aléatoire binomiale de paramètre p. C'est par ailleurs la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes.

§ 2. *Lois dénombrables.*— On considèrera ici que $\Omega = \mathbb{N}$. Bien sûr, il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbb{N}$.
Rappelons que se donner une loi P sur cet espace discret est équivalent à se donner une suite$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, et de poser pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = P(\{n\})$.

2.1 Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

La loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ est donnée par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = pq^{n-1}.$$

Exemples :

FONDAMENTAL : C'est la loi du premier succès dans une suite d'expériences aléatoires indépendantes deux à deux.

Proposition 4.1 (*Caractérisation d'une loi sans mémoire*)

$X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est une variable géométrique $\iff$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*, P(X \geqslant k + n | X \geqslant n) = P(X \geqslant k)$.

2.2 Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$. La loi de poisson de paramètre λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$, est donnée par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Un de ses intérêt est qu'elle peut fournir une bonne approximation de la loi de Benoulli :

Proposition 4.2 ($\mathscr{B}(p, n) \longleftrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$)

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables Binômiales de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$ telles que $n \times p_n \to \lambda$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

5 Espérance

Définition 5.1 (*Espérance d'une variable aléatoire réelle*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète réelle.

1. *Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on appelle* **espérance** *de X le nombre appartenant à $[0, +\infty]$:*
$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$
2. *Si X est quelconque (i.e pas forcément positive), la variable aléatoire est dite* **d'espérance finie** *si la famille $(xP(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est appelée espérance de X, i.e à nouveau $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x P(X = x)$.*

Nous noterons $\mathscr{L}^1(\Omega)$ (ou plus souvent $\mathscr{L}^1$) l'ensemble des variables aléatoires réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ d'espérance finie.

Propriétés 5.2 (*De l'espérance*)

1. *Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ d'espérances finies. Alors, pour tout réel a, $aX + Y$ est aussi d'espérance finie et*
$$E(aX+Y) = aE(X) + E(Y).$$
2. *Si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$.*
3. *Si $X \geqslant Y$, et si ces deux v.a.d sont d'espérance finie, alors $E(X) \geqslant E(Y)$.*
4. *Si X est positive et d'espérance finie, et si $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.d telle que $|Y| \leqslant X$, alors Y est d'espérance finie.*
5. *Si Y est d'espérance finie, alors $|E(Y)| \leqslant E(|Y|)$.*
6. *$\mathscr{L}^1$ contient toutes les variables aléatoires bornées.*

Proposition 5.3 (*Formule de transfert*)

Soit $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, et f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors
- *$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)f(x)\big)$ est sommable.*
- *Dans ce cas, $E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)f(x)$.*

Proposition 5.4 (*Inégalité de Markov*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ unevariable aléatoire discrète, et $a > 0$. On a l'inégalité
$$P\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}.$$

Démonstration : Notons $A = (|X| \geqslant a) = \{\omega \in \Omega / |X(\omega)| \geqslant a\}$. Nous avons vu que c'est bien un événement. De plus, lavariable aléatoire $|X|$ est supérieure ou égale à lavariable aléatoire $a 1_A$ (on le vérifie sur A, puis sur son complémentaire). D'après la croissance de l'espérance, $E(|X|) \geqslant E(a1_A) = aP(A)$. ■

6 Couple de variables aléatoires

§ 1. ***Variables Aléatoires Indépendantes.—*** Les couples, ou les familles, de variables aléatoires indépendantes sont les plus simples à étudier.

Définition 6.1 (*variables aléatoires indépendantes*)

1. *Un couple de variables aléatoires discrètes $X, Y : \Omega \to E$ sont dites* **indépendantes** *lorsque pour tous $x, y \in E$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, i.e lorsque*
$$\forall x, y \in E, \qquad P\Big((X=x) \cap (Y=y)\Big) = P(X=x) \times P(Y=y).$$
2. *Les variables aléatoires discrètes d'une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites mutuellement indépendantes lorsqu'elles le sont deux à deux.*

Théorème 6.2

1. *Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont indépendantes, et si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.*
2. *Si $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les deux variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.*

La loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes se calcule grâce à :

Proposition 6.3 (*Loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes*)

Si X et Y sont desvariables aléatoires réelles indépendantes, alors pour tout réel k,
$$P(X+Y=k) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)P(X=k-y).$$

Propriétés 6.4 (*Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes*)

Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et de plus
$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

§ 2. ***Variables Aléatoires Dépendantes.—*** On est un peu plus démunis lorsque l'on ne dispose plus de cette hypothèse.

Définition 6.5

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes réelles. Alors l'application $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est aussi unevariable aléatoire discrète. On appelle
- **loi conjointe** *de X et Y, et on note $P_{(X,Y)}$, la loi de la variable aléatoire*

$(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$, *qui est donc une loi sur* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\text{pour tous } x,y\in\mathbb{R},\qquad P_{(X,Y)}\big((x,y)\big)=P\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big).$$

- **lois marginales** *de* (X,Y) *les lois de* X *et de* Y.
- *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *tel que* $P(X=x)>0$, **la loi conditionnelle** *de* Y *sachant* $(X=x)$ *la loi* μ *de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\text{Pour tout } y\in\mathbb{R},\qquad \mu(\{y\})=P(Y=y|X=x).$$

- **loi conditionnelle** μ *de* Y *sachant* $(X>x)$*.... je vous laisse deviner.*

Remarques :

1. Ce que l'on vient de faire pour deux variables aléatoires peut se faire pour un nombre fini d'entre elles. On appelle ainsi vecteur aléatoire discret toutevariable aléatoire discrète $Z:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Si on note alors $Z=(X_1,\dots,X_n)$, Z admet n lois marginales.
2. A l'aide de la loi conjointe, on peut retrouver les lois marginales, grâce à la formule des probabilités totales :
   Le contraire est faux, l'idée étant que 'lon ne sait pas comment dépendent des deux variables X et Y.

Proposition 6.6 (*De la conjointe aux marginales*)

Pour tout réel x, $f_X(x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} f_{(X,Y)}(x,y)$*. Autrement dit,*

$$P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P\big(X=x,Y=y\big).$$

7 Variance, Covariance

§ 1. ***L'espace*** $\mathscr{L}^2$**.–** On s'intéresse ici à une classe plus restreinte de variables aléatoires .

Définition 7.1 (*Moments*)

Soit X *unevariable aléatoire réelle, et* k *est un entier positif. On appelle*

- $k-$*ième* **moment** *de* X *le réel* $m_k=E(X^k)$ *(lorsqu'il existe évidemment).*
- $k-$*ième* **moment centré** *le réel* $E\Big(\big(X-E(X)\big)^k\Big)=\mu_k$.

Nous noterons $\mathscr{L}^2$ *l'ensemble des variables aléatoires réelles qui admettent un moment d'ordre* 2 *fini.*

Propriétés 7.2 ($\mathscr{L}^2\longleftrightarrow\mathscr{L}^1$)

1. *Si* X *admet un moment d'ordre* 2*, elle est d'espérance finie, i.e* $\mathscr{L}^2(\Omega)\subset\mathscr{L}^1(\Omega)$
2. **Cauchy-Schwarz :** *Si* X *et* Y *admettent toutes deux un moment d'ordre* 2*, alors* XY *est d'espérance finie, et*

$$E(XY)^2\leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

⚠ : On ne confondra pas $E(X^2)$ et $E(X)^2$.

Propriétés 7.3 (*de* $\mathscr{L}^2$)

$\mathscr{L}^2$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}^1$.

§ 2. ***La variance*.–** C'est une mesure de la dispersion.

Définition 7.4 (*Variance, Ecart-type*)

Soit $X\in\mathscr{L}^2$*. On appelle*

- **variance** *son deuxième moment centré* $\mathrm{var}(X)=E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big)$.
- **écart-type** *le réel* $\sigma_X=\sqrt{\mathrm{var}(X)}$.
- *Si* $X\in\mathscr{L}^2$*, elle est dite* **centrée** *si son espérance est nulle, et* **réduite** *si sa variance vaut* 1.
  Si $\sigma_X>0$*, alors la variable aléatoire* $\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}$ *est centrée réduite.*

Les deux moments les plus utilisés sont l'espérance m_1 et le deuxième moment centré que l'on appelle variance. Ces deux quantités sont de grossières mesures de la dispersion de X : $E(X)$ est la valeur moyenne de X et σ_X^2 mesure la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Remarques :

Si $X \in \mathscr{L}^2$, d'après le théorème de transfert,

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\boxed{\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 P(X = x_i).}$
- Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, $\boxed{\sigma_X^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - EX)^2 P(X = x_i).}$

Lemme 1

Si $X \in \mathscr{L}^2$, alors

1. *$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*
2. *Pour tous réels a et b, $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$.*

La première est parfois appelée formule de Leibniz, et la seconde traduit l'invariance de σ_X par translation, et l'homogénéité de σ_X.

Théorème 7.5 (*Inégalité de Bienaymé-Chebychev*)

Si $X \in \mathscr{L}^2$, alors pour tout réel $a > 0$,

$$P\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

On peut en particulier montrer qu'une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 est presque-sûrement contante $\Longleftrightarrow$ elle est de variance nulle.

§ 3. *Espérance et Variance des lois usuelles.–*

1. **Une variable Aléatoire suivant une loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$ est définie par $X = 1$ a pour probabilité p et $X = 0$ a pour probabilité q. Alors

$$\boxed{E(X) = p \text{ et } \text{Var}(X) = pq}.$$

2. **Une variable Aléatoire suivant une loi uniforme** est définie par $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$. Alors $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2} \text{ et } \text{Var}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}}$.

3. **Une variable Aléatoire suivant une loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$ est définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = pq^{n-1}$. Alors,

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}}$$

4. **Une variable Aléatoire suivant une loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ est définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$. Alors,

$$\boxed{E(X) = \lambda \text{ et } \text{Var}(X) = \lambda}.$$

5. **Une variable Aléatoire suivant une loi Binomiale** $\mathscr{B}(n, p)$ est définie par $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Alors

$$\boxed{E(X) = np \text{ et } \text{Var}(X) = npq}.$$

6. Lorsque la variable aléatoire est à valeurs positives, on peut obtenir une espérance infinie. C'est le cas d'une variable dite de Pareto, i.e telle que $X(\omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $j \in \mathbb{N}^*, P(X = j) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha+1) j^{\alpha+1}}$, lorsque $0 < \alpha \leqslant 1$.

§ 4. *Covariance.–*

Dans le cas où les variables ne sont pas indépendantes, la variance d'une somme fait apparaitre un terme correctif.

Définition 7.6

Soient $X, Y \in \mathscr{L}^2$. Il résulte de l'inégalité de Schwarz que la variable $\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)$ est d'espérance finie. On appelle

1. ***covariance** de X et Y le réel*

$$\text{cov}(X, Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big).$$

2. ***Coefficient de corrélation** entre X et Y le réel $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, si leurs variances ne sont pas nulles évidemment.*
3. *On dira que X et Y sont **décorrélées** lorsque leur covariance est nulle, i.e lorsque $E(XY) = E(X)E(Y)$. Nous avons déjà vu que c'est le cas lorsque X et Y sont indépendantes.*

La proposition suivante permet de calculer la variance d'une somme de variables aléatoires, et de calculer plus simplement la covariance.

Proposition 7.7

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors

1. $cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.
2. $var\,(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y)$.
3. $var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} var(X_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i, X_j)$.

Le coefficient de corrélation est une mesure de la dépendance de X par rapport à Y :

Proposition 7.8

Soient X et $Y \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Alors

1. $\boxed{|\rho(X,Y)| \leqslant 1}$.
2. *L'égalité $|\rho(X,Y)| = 1$ est satisfaite si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $P(Y = aX+b) = 1$.*

Propriétés 7.9

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors,

1. *Si X et Y sont indépendantes, alors $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$.*
2. *Si $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes, alors*
$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$
3. *Si $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, alors*
$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\,var(X_1).$$

ANNEXE

A Les définitions

Cette liste de définitions vous permet d'en avoir une énumération condensée, bien pratique pour les réciter.

- une tribu $\mathscr{A}$,
- une probabilité P,
- l'indépendance de deux événements A et B,
- l'indépendance d'une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$,
- une probabilité conditionnelle $P(A|B)$,
- une variable aléatoire discrète,
- des lois de Bernoulli, uniforme, binômiale, géométrique, de Poisson,
- l'espérance d'une variable aléatoire X,
- un couple (X,Y) de variables aléatoires indépendantes,
- la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y,
- les lois marginales d'une variable aléatoire $Z : \omega \to \mathbb{R}^n$,
- la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$,
- $\mathscr{L}^1$ et $\mathscr{L}^2$,
- la variance $\mathrm{Var}(X)$ et l'écart-type σ_X d'une variable aléatoire réelle X,
- la covariance $\mathrm{cov}(X,Y)$ de deux variables aléatoires X, Y et leur coefficient de corrélation.

B Les preuves à connaitre...

- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire Binomiale de loi $B(n,p)$.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire géométrique de loi $\mathcal{G}(\alpha)$.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'un variable aléatoire de Poisson de loi $\mathscr{P}(\lambda)$.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'un variable aléatoire uniforme.
- La somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.
- La proposition 7.2.
- Le lemme 1.
- Les deux premiers points de la propositon 7.7.