Topologie et normes.

Coralie Renault

1er février 2015

Exercice

La fonction suivante a-t-elle une limite en (0,0) ?
$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \mapsto \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$

Exercice

La fonction suivante a-t-elle une limite en (0,0) ?
$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \mapsto\mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Exercice

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$ est-elle continue ?

Exercice

Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues.
A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
a) Justifier l'existence de

$$a = \inf \{x \in H/x > 0\}$$

b) On suppose $a > 0$. Etablir $a \in H$ puis $H = a\mathbb{Z}$.
c) On suppose $a = 0$. Etablir que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de l'espace des suites sommables normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

b) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ ?}$$

Exercice

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.
a) Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme sur E.
b) Pour $f \in E$, on pose

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On vérifie aisément que N' est une norme sur E. Montrer qu'elle est équivalente à N.
c) Les normes N et N' sont elles équivalentes à $\|\,.\,\|_\infty$?

Exercice

Soient l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
b) Montrer que les normes sont équivalentes.

Exercice

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\| \,.\, \|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\| \,.\, \|_x$ et $\| \,.\, \|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ normé par $\| \,.\, \|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Exercice

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \,.\, \|_\infty$.
Montrons que l'application $u : f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ est un endomorphisme continu de E.

Exercice

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéire non nulle. Montrer que f est continue ssi son noyau est fermé.

Exercice

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f alors a est un minimum global.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que f est sous-additive i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

Exercice

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.