Sur la modélisation du comportement des pucerons

Coralie Renault

5 septembre 2013

On va s'intéresser :

- Au contexte et à la modélisation.

On va s'intéresser :

- Au contexte et à la modélisation.
- Aux résultats obtenus sur l'équation sans le terme de convection.

On va s'intéresser :

- Au contexte et à la modélisation.
- Aux résultats obtenus sur l'équation sans le terme de convection.
- A l'équation sans le terme de diffusion.

On va s'intéresser :

- Au contexte et à la modélisation.
- Aux résultats obtenus sur l'équation sans le terme de convection.
- A l'équation sans le terme de diffusion.
- Au système total.

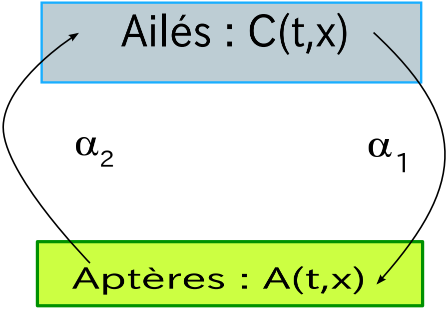
On va s'intéresser :

- Au contexte et à la modélisation.
- Aux résultats obtenus sur l'équation sans le terme de convection.
- A l'équation sans le terme de diffusion.
- Au système total.
- Aux améliorations possibles

Le domaine étudié est la France. On se place dans un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ qui est borné. Les frontières de ce domaine seront notés Γ_1 et Γ_2 avec :

- Γ_1 représente les frontières marines
- Γ_2 représente les frontières terrestres ainsi que les frontières avec des plaines et des montagnes.
- Les frontières vérifient : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

- Deux types de pucerons : les aptères et les ailés.
- La reproduction asexuée. Les petits produits seront des clones de la mère.



On va donc considérer :

- La densité des pucerons ailés : $C(t, x) \in \mathbb{R}$

On va donc considérer :

- La densité des pucerons ailés : $C(t, x) \in \mathbb{R}$
- La densité des pucerons aptères : $A(t, x) \in \mathbb{R}$

On va donc considérer :

- La densité des pucerons ailés : $C(t,x) \in \mathbb{R}$
- La densité des pucerons aptères : $A(t,x) \in \mathbb{R}$
- Le taux d'accroissement des pucerons aptères : $r(t,x) \in \mathbb{R}$ tel que $-1 \leq r(t,x) \leq 1$

On va donc considérer :

- La densité des pucerons ailés : $C(t,x) \in \mathbb{R}$
- La densité des pucerons aptères : $A(t,x) \in \mathbb{R}$
- Le taux d'accroissement des pucerons aptères : $r(t,x) \in \mathbb{R}$ tel que $-1 \leq r(t,x) \leq 1$
- Le coefficient d'envol des pucerons : α_2 tel que $0 \leq \alpha_2(t,x,A(t,x)) \leq 1$

On va donc considérer :

- La densité des pucerons ailés : $C(t,x) \in \mathbb{R}$
- La densité des pucerons aptères : $A(t,x) \in \mathbb{R}$
- Le taux d'accroissement des pucerons aptères : $r(t,x) \in \mathbb{R}$ tel que $-1 \leq r(t,x) \leq 1$
- Le coefficient d'envol des pucerons : α_2 tel que $0 \leq \alpha_2(t,x,A(t,x)) \leq 1$
- Le coefficient de dépôt des pucerons :α_1 tel que $0 \leq \alpha_1(t,x) \leq 1$

- Si le vent est supérieur à 2km/h les pucerons ne contrôlent plus leurs vols.
  Le terme de convection est donc $v(t, x)\nabla_x C$ où $v(t, x) \in \mathbb{R}^2$ représente le vent.
- Le terme de diffusion apparaît lorsque le vent est inférieur à 2 km/h et que les pucerons peuvent se diriger comme ils le souhaitent.
  Le terme de diffusion est donc noté $div(d(t, x).\nabla_x C)$

. Dans notre modélisation, on supposera que la convection et la diffusion ne peuvent pas avoir lieu en même temps , on introduit :

- $\lambda_v = 0$ si $v(t, x) \geq 2$ km/h
- $\lambda_v = 1$ sinon

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + (1-\lambda_v) v \nabla_x C & = & \lambda_v \mathsf{div}(d \nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(A) A \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r - \alpha_2(A))A + \alpha_1 C \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} C(0,x) & = & C_0(x) & \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(t,x) & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma_1 \\ A(t,x) & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma_1 \\ \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma_2 \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma_2 \end{cases}$$

Pour simplifier on a finalement considéré :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{cases}$$

Les hypothèses que nous utiliserons dans toute la suite seront :

- d est une fonction qui est strictement positive et qui est bornée :

$$d_{inf} \leq d(t,x) \leq d_{max} \text{ , } \forall t \in]0,T[\text{ , } \forall x \in \Omega$$

Les hypothèses que nous utiliserons dans toute la suite seront :

- d est une fonction qui est strictement positive et qui est bornée :

$$d_{inf} \leq d(t,x) \leq d_{max} \ , \forall t \in]0,T[\ , \forall x \in \Omega$$

- $d \in \mathcal{C}(\overline{(\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega})})$

Les hypothèses que nous utiliserons dans toute la suite seront :

- d est une fonction qui est strictement positive et qui est bornée :

$$d_{inf} \leq d(t,x) \leq d_{max} \text{ , } \forall t \in]0,T[\text{ , } \forall x \in \Omega$$

- $d \in \mathcal{C}(\overline{(\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega})})$
- Pour tout $R > 0$, $\exists K_{\alpha_2}(R) > 0$ tel que pour $0 \leq |\xi|, |\widehat{\xi}| \leq R$, on a :

$$\forall t \in]0,T[, \forall x \in \Omega, \ |\alpha_2(t,x,\xi) - \alpha_2(t,x,\widehat{\xi})| \leq K_{\alpha_2}(R)|\xi - \widehat{\xi}|$$

Les hypothèses que nous utiliserons dans toute la suite seront :

- d est une fonction qui est strictement positive et qui est bornée :

$$d_{inf} \leq d(t,x) \leq d_{max} \text{ , } \forall t \in]0,T[\text{ , } \forall x \in \Omega$$

- $d \in \mathcal{C}(\overline{(\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega})})$
- Pour tout $R > 0$, $\exists K_{\alpha_2}(R) > 0$ tel que pour $0 \leq |\xi|, |\widehat{\xi}| \leq R$, on a :

$$\forall t \in]0,T[, \forall x \in \Omega, \ |\alpha_2(t,x,\xi) - \alpha_2(t,x,\widehat{\xi})| \leq K_{\alpha_2}(R)|\xi - \widehat{\xi}|$$

- De plus les données initiales seront positives et bornées ie

$$\begin{cases} C_0(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega \text{ et } C_0 \in L^\infty(\Omega) \\ A_0(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega \text{ et } A_0 \in L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Si $\lambda_v = 1$, on commence par considérer un problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} & = & div(d\nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r - \alpha_2(\widehat{A}))A + \alpha_1 \widehat{C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C(0,x) & = & C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array} \right.$$

On supposera que :

- $\widehat{A} \in L^2((0,T) \times \Omega)$

Si $\lambda_v = 1$, on commence par considérer un problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} & = & div(d\nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r - \alpha_2(\widehat{A}))A + \alpha_1 \widehat{C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C(0,x) & = & C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array} \right.$$

On supposera que :

- $\widehat{A} \in L^2((0,T) \times \Omega)$
- $\widehat{C} \in L^2((0,T) \times \Omega)$

Si $\lambda_v = 1$, on commence par considérer un problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} & = & div(d\nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r - \alpha_2(\widehat{A}))A + \alpha_1 \widehat{C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C(0,x) & = & C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array} \right.$$

On supposera que :

- $\widehat{A} \in L^2((0,T) \times \Omega)$
- $\widehat{C} \in L^2((0,T) \times \Omega)$
- $\exists \widehat{A}^* \in L^\infty(0,T)$ tel que $0 \leq \widehat{A}(t,x) \leq \widehat{A}^*(t)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$

Si $\lambda_v = 1$, on commence par considérer un problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} & = & div(d\nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r - \alpha_2(\widehat{A}))A + \alpha_1 \widehat{C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C(0,x) & = & C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array} \right.$$

On supposera que :

- $\widehat{A} \in L^2((0,T) \times \Omega)$
- $\widehat{C} \in L^2((0,T) \times \Omega)$
- $\exists \widehat{A}^* \in L^\infty(0,T)$ tel que $0 \leq \widehat{A}(t,x) \leq \widehat{A}^*(t)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$
- $\exists \widehat{C}^* \in L^\infty(0,T)$ tel que $0 \leq \widehat{C}(t,x) \leq \widehat{C}^*(t)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$

On veut résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} & = & \lambda_v \mathrm{div}(d\nabla_x C) - & \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ C(0,x) & = & C_0(x) & \forall x \in \Omega \\ \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array}\right. \quad (2)$$

Définition

On pose : $\delta(x) = \min(\mathrm{dis}(x,\Gamma),1)$
on définit donc l'espace et la norme suivante :

$$\Xi^1(\Omega) = \left\{ v | v \in L^2(\Omega),\ \delta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1,2 \right\}$$

$$||.||_{\Xi^1(\Omega)} = \left(|v|^2 + \sum_{i=1}^{2} |\delta \frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut donc définir son dual :

Définition

$$\Xi^{-1}(\Omega) = (\Xi^1(\Omega))'$$

Remarque

On peut noter que $H^1(\Omega) \subset \Xi^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *et donc on a* $L^2(\Omega) \subset \Xi^{-1}(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$

Nous allons définir :

$$a(t; C, w) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} d(t,x) \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \alpha_1(t,x) C w \right) dx$$

Théorème

On considère l'équation différentielle (2) *muni de ses conditions initiales et de bords. Si* $f = \alpha_2(t, x, \widehat{A}(t,x))\widehat{A}(t,x) \in L^2(0,T;\Xi^{-1}(\Omega))$ *alors il existe un unique* $C \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *tel que :*

$$\int_0^T a(t;C(t),w(t))\,\mathrm{dt} - \int_0^T \left[C(t), \tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{dt} =$$
$$\int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle\,\mathrm{dt} + [C_0, w(0)]$$

$\forall w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$*avec* $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))')$ *et* $w(T) = 0$

On veut résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r-\alpha_2(\widehat{A}(t,x))A & +\alpha_1\widehat{C} \\ A(0,x) & = & A_0(x) & \forall x\in\Omega \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x)\in[0,T]\times\Gamma \end{array}\right. \tag{3}$$

On a :

$$A(t,x)=\lambda(t)\exp\left(\int_0^t r(s,x)-\alpha_2(s,x,\widehat{A}(s,x))\,\mathrm{d}s\right)$$
$$+A_0(x)\exp\left(\int_0^t r(s,x)-\alpha_2(s,x,\widehat{A}(s,x))\,\mathrm{d}s\right)$$

avec :

$$\lambda(t)=\int_0^t \widehat{C}(\tau,x)\alpha_1(\tau,x)\exp(\int_0^\tau -r(s,x)+\alpha_2(s,x,\widehat{A}(s,x))\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau$$

Théorème

L'équation 3 admet une unique solution faible $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$ *tel que* $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2((0,T)\times\Omega)$ *c'est-à-dire vérifie :*

$$\int_0^T\int_\Omega A(t,x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \alpha_1(t,x)\widehat{C}(t,x)w(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_\Omega A_0(x)w(0,x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^T\int_\Omega [r(t,x) - \alpha_2(t,x,\widehat{A}(t,x))]A(t,x)w(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0$$

$\forall w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *tel que* $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$ *et* $w(T) = 0$

Pour démontrer l'existence, on utilise :

Proposition

Avec les hypothèses faites sur les fonctions A_0, $\widehat{C}$ et α_2 on a les résultats suivants :

$$A \in L^2((0,T) \times \Omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \in L^2((0,T) \times \Omega)$$

Puis on montre que A vérifie bien l'équation.
Pour montrer l'unicité, on utilise Gronwall.

On introduit un problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}t} & = & \|\alpha_2\|_\infty \|\widehat{A}(t,.)\|_\infty \\ C^*(0) & = & \|C_0\|_\infty \end{array} \right.$$

Cette équation différentielle possède une solution C^* tel que $C^*(t) \in L^\infty(0,T)$

Soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}(h(t,x).\nabla_x u) + \mu(t,x).u & = & f(t,x) \\ u(0,x) & = & u_0(x) \\ (h(t,x).\nabla_x u(t,x)).n(x) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

avec les hypothèses :

- $u_0 \in L^2(\Omega)$ et à valeurs positives ou nulles
- $\mu \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ et est à valeurs positives ou nulles
- $f \in L^2((0,T) \times \Omega) \cap L^\infty((0,T) \times \Omega)$ et à valeurs positives ou nulles
- h vérifie les mêmes conditions que d.

Proposition

Si :

- $f_1(t,x) \geq f_2(t,x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$
- $u_{01}(x) \geq u_{02}(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$
- $\mu_2(t,x) \geq \mu_1(t,x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$

Alors les solutions du système 4 sont telles que $u_1 \geq u_2 \geq 0$ $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0,T[$.

On déduit de la proposition le corollaire suivant :

Corollaire

$$0 \leq C(t,x) \leq C^*(t) \ \forall x \in \Omega \ \textit{et} \ \forall t \in]0,T[$$

D'après les résultats précédents, A est positive. On a après calculs :

$$0 \leq A(t,x) \leq A^*(t)$$

Avec :

$$A^*(t) = \frac{\|\widehat{C}^*\|_2 \|\alpha_1\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} \exp(2t + \|\alpha_2\|_\infty t) + \|A_0\|_\infty \exp(t)$$

On souhaite montrer que l'application :

$$\phi : X \longrightarrow X \text{ définie par } \phi(\widehat{A}, \widehat{C}) = (A, C)$$

où :

$X = \{(C, A) \in L^2((0, T) \times \Omega)^2, 0 \leq C(t, x) \leq C^*(t)$ et $0 \leq A(t, x) \leq A^*(t)$ dans $(0, T) \times \Omega\}$

et où A et C sont solutions de notre premier système auxiliaire, est strictement contractante.

Lemme

Il existe deux constantes k_1 et k_2 dépendant uniquement de $\|A^*\|_\infty$, $\|\alpha_2\|_\infty$, $\|\alpha_1\|_\infty$ et $\|\widehat{A_1}^*\|_\infty$ telles que pour $t \in (0, T)$, on ait :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\|(C_1 - C - 2)(t, .)\|^2_{2,\Omega} + \|(A_1 - A_2)(t, .)\|^2_{2,\Omega}\right) \\
&\leq k_1 \left(\|(C_1 - C_2)(t, .)\|^2_{2,\Omega} + \|(A_1 - A_2)(t, .)\|^2_{2,\Omega}\right) \\
&+ k_2 \left(\|(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(t, .)\|^2_{2,\Omega} + \|(\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2)(t, .)\|^2_{2,\Omega}\right)
\end{aligned}$$

Démonstration.

On a en reprenant l'expression de A, en multipliant par $(A_1 - A_2)$ des deux côtés de l'équation et en intégrant sur Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (A_1 - A_2)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \alpha_2(\widehat{A}_2(t,x))(A_2 - A_1)^2\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_\Omega [\alpha_1(\widehat{C_1} - \widehat{C_2}) + A_1(\alpha_2(\widehat{A}_2(t,x)) - \alpha_2(\widehat{A}_1(t,x))](A_1 - A_2)\,\mathrm{d}x$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (A_1 - A_2)^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \alpha_1(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(A_1 - A_2)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega A_1(\alpha_2(\widehat{A}_2(t,x)) - \alpha_2(\widehat{A}_1(t,x))(A_1 - A_2)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

Démonstration.

On passe au valeurs absolue, on majore A_1 et on utilise $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega (A_1 - A_2)^2 \,\mathrm{d}x \leq \|\alpha_1\|_\infty (\|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t,.)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t,.)\|$$
$$+A^*(t)(\|(A_1 - A_2)(t,.)\|_2^2 + \|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t,.)\|_2^2)$$

Puis on majore par $\|A^*\|_\infty$.
Par des calculs du même genre on arrive à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega (C_1 - C_2)^2 \,\mathrm{d}x \leq (\|\widehat{A_1}^*\|_\infty + \|\alpha_2\|_\infty)\|(C_1 - C_2)(t,.)\|_2^2$$
$$+(K_{\alpha_2}\|\widehat{A_1}^*\|_\infty + \|\alpha_2\|_\infty)\|(\widehat{A_2} - \widehat{A_1})(t,.)\|_2^2$$

$\square$

Lemme

L'application ϕ est strictement contractante sur $L^2((0,\tau^*)\times\Omega)^2 \cap X$ avec τ^* petit, ie il existe $\rho(\tau^*) < 1$ tel que :

$$(\|(C_1 - C_2)(t,.)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t,.)\|_2^2) \leq \rho(\tau^*)(\|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t,.)\|_2^2 + \|(\widehat{A_1} - \widehat{A_2})(t,.)\|_2^2)$$

Démonstration.

Si $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ et y est solution de :

$$\begin{cases} y'(t) & \leq & k_1 y(t) + k_2 z(t), \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

alors on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \int_0^t \exp(k_1(t-s)) z(s)\,\mathrm{d}s \qquad \square$$

Démonstration.

si on a z qui est une fonction croissante on peut donc tirer l'inégalité :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \left(\int_0^t \exp(k_1(t-s)) \, \mathrm{d}s \right) z(t) \leq \frac{k_2}{k_1} \exp(k_1 t - 1) z(t)$$

on va donc poser :

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \|(C_1 - C_2)(t,.)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t,.)\|_2^2 \\ z(t) & = & \|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t,.)\|_2^2 + \|(\widehat{A_1} - \widehat{A_2})(t,.)\|_2^2 \end{array}$$

on obtient la relation souhaitée avec $\rho(t) = \frac{k_1}{k_2} \exp(k_1 t - 1)$ inférieur à 1 si t petit. On peut donc majorer $\frac{k_1}{k_2} \exp(k_1 t - 1)$ par $\frac{k_1}{k_2} \exp(k_1 \tau^* - 1)$.

On intègre l'inégalité par rapport au temps.
ϕ est donc contractante sur $L^2((0,\tau^*)\times\Omega)^2\cap X$ qui est complet donc d'après le théorème de Picard, il existe un point fixe.
Par convergence dominée on montre que le point fixe est solution faible de notre problème.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + v(t,x)\nabla_x C & = & -\alpha_1(t,x)C + \alpha_2(A(t,x))A \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} & = & (r(t,x) - \alpha_2(A(t,x))A + \alpha_1(t,x)C \end{array}\right.$$

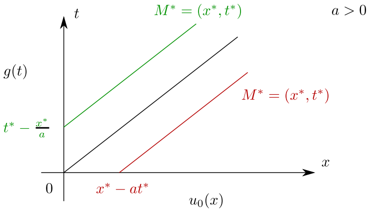
$$\left\{\begin{array}{rcll} C(0,x) & = & C_0(x) & \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) & \forall x \in \Omega \end{array}\right.$$

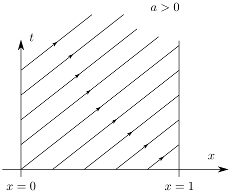
$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array}\right.$$

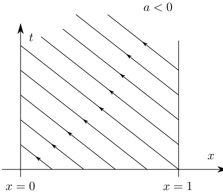
On a finalement abandonné l'idée de résoudre cette équation aux dérivées partielles. En effet, le fait de se placer sur un domaine borné en espace a rendu la résolution difficile. De plus, il semble que le problème soit mal posé à cause des conditions de bords. On peut regarder ce qui se passe en dimension 1.

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} & = & 0 & x > 0 & t > 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x), & x \geq 0, & . \end{cases}$$







On souhaite résoudre de la même manière que précédemment, en considérant le problème auxiliaire. On s'intéresse donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + (1-\lambda_v) v \nabla_x C = \lambda_v \mathrm{div}(d \nabla_x C) - \alpha_1 C + \alpha_2(\widehat{A})\widehat{A} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = (r - \alpha_2(\widehat{A}) A + \alpha_1 \widehat{C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} C(0,x) & = & C_0(x) & \forall x \in \Omega \\ A(0,x) & = & A_0(x) & \forall x \in \Omega \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} & = & 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Gamma \end{array} \right.$$

- L'équation en A se traite de la même manière que précédemment.
- L'équation en C : Nouvelle hypothèse :

$$d_{min} > max(\frac{\|v_1\|_\infty^2}{2}, \frac{\|v_2\|_\infty^2}{2})$$

On pose :

$$a(t,C,w) = \int_\Omega \sum_{i=1}^2 d(t,x) \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega (v(t,x).\nabla_x Cw + \alpha_1(t,x) Cw)\, dx$$

Théorème

On considère l'équation différentielle (5) *muni de ses conditions initiales et de bords.*
Si $f = \alpha_2(t,x,\widehat{A}(t,x))\widehat{A}(t,x) \in L^2(0,T;\Xi^{-1}(\Omega))$ *alors il existe un unique* $C \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *telle que :*

$$\int_0^T a(t;C(t),w(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^T \left[C(t),\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^T \langle f(t),w(t)\rangle\,\mathrm{d}t + [C_0,w(0)]$$

$\forall w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$*avec* $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))')$ *et* $w(T) = 0$

Démonstration.

Il faut vérifier deux conditions sur a, en notant $V = H^1(\Omega)$:

- **condition n°1**

$$\begin{cases} \forall u, v \in V, \text{ la fonction} t \longmapsto a(t; u, v) \text{ est mesurable} \\ et \\ |a(t; u, v)| \leq c\|u\|\|v\|, \text{ où } c = Cst, \ \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

- **condition n°2**

$$\begin{cases} \text{(coercivité uniforme sur V)}, \exists \lambda \\ a(t; v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \ \alpha > 0, \ \forall v \in V, \ \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

□

Démonstration.

or :

- Pour la condition 1 :
  a est mesurable et continue : on utilise Cauchy-Schwarz pour le montrer.
- Pour la condition 2 :
  On utilise l'hypothèse sur d_{min} pour montrer qu'on peut trouver λ qui convient.

Ces hypothèses permettent de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution faible. (Voir [Lions]) □

Les points qui manquent sont :

- Trouver une manière de contrôler C par une fonction de t qui est bornée.
- A partir de cette fonction, finir la méthode de point fixe pour l'équation de réaction-diffusion-convection.
- Essayer de résoudre l'équation avec des hypothèses moins lourdes sur d

- *Modélisation spatio-temporelle de la multiplication de puceron des épis de blé à la surface de la France* de Mamadou Ciss
- *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol1* par J.L. Lions etE. Magenes
- *Numerical Approximation Hyperbolic Systems of Conservation Laws* par E. Godlewski et P-A Raviart
- *A multi-structured epidemic problem with direct and indirect transmission in heterogeneous environnements* de S.Madec et Cédric Wolf
- *Modélisation et analyse mathématiques de la propagation d'un microparasite dans une population structurée en environnement hétérogène* de Cédric Wolf