Calcul matriciel

Produits et puissances de matrices

▷ 1 Des produits, tout simplement

Calculer les produits AB et BA lorsque c'est possible :

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0&3&1\end{pmatrix}$.

▷ 2 Calcul efficace de puissances

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^3 en fonction de A.

2) Calculer A^9 et A^{81}.

▷ 3

Soit $U=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer U^2, V^2, UV et VU.

2) Déterminer U^n et V^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3) Soit a et b deux réels et $M=\begin{pmatrix}a+b&a-b\\a-b&a+b\end{pmatrix}$.
Calculer M^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

▷ 4 Puissances de matrices

1) Soit $A=\begin{pmatrix}9&1\\-1&-8\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-6&5\\-2&7\end{pmatrix}$.
A-t-on $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$? Pourquoi ?

2) Soit $N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $A=-2\,\mathrm{I}_3+N$.
Vérifier que $N^3=0$ puis calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Soit $M=\begin{pmatrix}-2&1&3\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) Soit $A=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&-4&4\\-4&-8&-1\\4&-1&-8\end{pmatrix}$.
Calculer A^2 puis $(\mathrm{I}_3+A)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{C}$. Soit $J=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A=x\,\mathrm{I}_n+J$.
Calculer J^p pour tout $p\in\mathbb{N}$ puis A^p.

▷ 5

Soit $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Considérons

$$\mathscr{E}=\left\{x\,I+y\,J,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

1) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par addition et produit de matrices, c'est-à-dire que :

$$\forall\,(A,B)\in\mathscr{E}^2,\quad A+B\in\mathscr{E}\ \text{ et }\ AB\in\mathscr{E}.$$

2) Résoudre les équations d'inconnue $X\in\mathscr{E}$:

$$X^2=I,\quad X^2=0,\quad X^2=X.$$

Matrices inversibles

▷ 6 Des matrices à inverser

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

1) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&-7\\3&-5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&3\\6&-8\end{pmatrix}$;

2) $M_t=\begin{pmatrix}t&2t\\-1&t\end{pmatrix}$ où $t\in\mathbb{R}$ est fixé ;

► 7

Soit $M=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&3&3\end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 et M^3.

2) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$M^3=a\,M^2+b\,M+c\,\mathrm{I}_3.$$

(on pourra raisonner par analyse-synthèse, et dans la phase d'analyse, identifier seulement les coefficients de la première ligne des matrices)

3) En déduire que M est une matrice inversible. Exprimer M^{-1} en fonction de M^2, M et I_3 puis la calculer explicitement.

▷ 8

Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

1) Calculer $(A+\mathrm{I}_3)^3$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}$, calculez A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3) Justifier que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de I_3, A et A^2.

► 9

Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: cela signifie qu'il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $N^k=0$.

1) Factorisez I_n-N^k.

2) En déduire que I_n-N est inversible et donner une expression de son inverse en fontion de I_n et des puissances de N.

► 10 Un ensemble de matrices isomorphe à $\mathbb{C}$

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ et $B=A^{\mathrm{T}}$.

Soit $\mathscr{K}=\left\{sA+tB,\ (s,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1) **a.** Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ? Exprimer ces deux matrices comme combinaison linéaire de A et B.

b. Montrer que $\mathscr{K}$ est stable par multiplication de matrices et que les matrices de $\mathscr{K}$ commutent entre elles.

2) **a.** Montrer le théorème d'identification suivant : si s, t, s' et t' sont quatre réels, alors

$$sA + tB = s'A + t'B \iff \begin{cases} s = s' \\ t = t' \end{cases}$$

b. Montrer qu'il existe $E \in \mathscr{K}$ tel que

$$AE = EA = A \quad \text{et} \quad BE = EB = B.$$

c. Montrer ensuite que pour toute matrice $M \in \mathscr{K}$,

$$ME = EM = M.$$

3) **a.** Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Exprimer le produit $(sA + tB)(tA + sB)$ en fonction de E.

b. En déduire que, pour toute matrice $M \in \mathscr{K}$ non nulle, il existe une matrice $N \in \mathscr{K}$ telle que $MN = NM = E$.

c. Cette matrice est-elle unique ?

4) **a.** Déterminer une matrice $J \in \mathscr{K}$ telle que $J^2 = -E$.

b. Montrer que $\mathscr{K} = \left\{xE + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

5) À toute matrice $M = xE + yJ$ de $\mathscr{K}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ que l'on note $f(M)$.

a. Montrer que pour tout couple $(M,N) \in \mathscr{K}^2$,

$$f(M+N) = f(M) + f(N) \quad \text{et} \quad f(MN) = f(M)f(N).$$

b. Calculer $f(A)$. En déduire les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul sur les coefficients

▷ 11 Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée M, on appelle **trace de M** et on note **tr(M)** la somme des coefficients diagonaux de M.

1) Lorsque $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, exprimer $\operatorname{tr}(M)$ à l'aide d'un signe somme.

2) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

3) Montrer qu'on a également $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

4) Montrer que, si P est inversible et que $B = P^{-1}AP$, alors $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$.

5) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$?

6) Peut-on trouver des matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$? Si oui, les préciser.

► 12 Base canonique et centre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

On introduit les quatre matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) **a.** Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $E_{i,j}$.

b. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
Montrer que A est combinaison linéaire des matrices $E_{i,j}$.

2) Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tous les couples (i,j) et (k,ℓ) possibles.

3) Soit $(k,\ell) \in [\![1,2]\!]^2$ fixé. Que contiennent les matrices $AE_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell}A$? Écrire ces matrices en fonction des matrices $E_{i,j}$.

On considère maintenant que A est fixée de taille 2 et qu'elle vérifie :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

4) En utilisant la question précédente, montrer que les coefficients de A hors de la diagonale sont nuls et que les termes de la diagonale sont tous égaux.

5) Démontrer la réciproque, puis conclure : quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres ?