MP*: Probabilités, Suites et Séries dans un Espace vectoriel normé

Coralie Renault

30 septembre 2014

Exercice

Soit (u_n) définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0,\ \lambda > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$$

Expliciter le n-ième terme u_n de la suite en fonction de n.

Exercice

Soit (u_n) une suite à termes positifs et décroissante. Si la série $\sum u_n$ converge, montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$ lorsque $n \to +\infty$

Exercice

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

Exercice

On considère une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note pour $n \geq 0$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geq 0$.

— Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $n\Delta u_n$ converge vers 0.
— Montrer que la série $\sum(n+1)\Delta^2 u_n$ converge.

Exercice

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{b) } u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \quad \text{c) } u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice

Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = sin(u_n)$$

— Montrer que u_n tend vers 0 puis donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

— Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice

La marque Chocapic offre, dans chacun de ses paquets de céréales, une vignette où figure un département français distribué parmi les n départements. Un collectionneur achète des boîtes une à une afin d'obtenir les vignettes du plus de départements différents possibles.

— Soit X_k le nombre de boîte à acheter pour obtenir k départements différents, où $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ecrire X_k comme une somme de variables géométriques indépendantes; en déduire son espérance et sa variance.

— On fait maintenant tendre n et k vers linfini de manière à ce que $k \sim pn$ pour un rapport $p \in]0, 1[$. Montrer que $\mathbb{P}(|\frac{X_k}{n} - \mathbb{E}[\frac{X_k}{n}]| \geq \epsilon)$ tend vers 0, $\forall \epsilon > 0$. Etudier le comportement de $\mathbb{E}[\frac{X_k}{n}]$ et montrer qu'on peut remplacer ce terme par une constante dans la limite précédente.

Exercice

Vous jouez à pile ou face avec un ami. Il parie pile, lance la pièce et fait pile.Quelle est la probabilitée qu'il soit un tricheur? On peut noter p la proportion de tricheur dans la pop

Exercice

1) Montrer que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions réelles bornées, $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.

2) Trouver des variables aléatoires **non indépendantes** X et Y telles que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Exercice

La convergence d'une suite au sens de Césaro entraîne-t-elle la convergence de la suite?