Chapitre 5
Espaces vectoriels normés

1. Normes

1.1. Norme, espace vectoriel normé

- Définition : norme, espace vectoriel normé
- Propriété (seconde inégalité triangulaire)

1.2. Exemples de normes

1.3. Distance associée

a) Définition

b) Distance associée à une norme

c) Distance d'un point à une partie

1.4. Boules

a) Boules ouvertes, fermées

b) Propriéte : convexité des boules

c) Exemples

1.5. Parties bornées, fonctions bornées

1.6. Normes équivalentes

a) Définition

b) Importance de cette notion

c) Exemples

2. Suites dans un espace vectoriel normé

2.1. Convergence, divergence

a) Définition

b) Exemples

c) Propriétés algébriques

d) Cas des espaces produits

2.2. Suites extraites

a) Définition

b) Rappel des propriétés vues en MPSI

c) Valeurs d'adhérence

3. Eléments de topologie

3.1. Voisinages, ouverts, fermés

a) Définitions et exemples

b) Propriétés

- Union et intersection d'ouverts et de fermés — Démonstration
- Exemples et contre-exemples

c) Caractérisation séquentielle des fermés

- Théorème — Démonstration
- Exemples

d) Ouverts et fermés relatifs de A

3.2. Intérieur, adhérence, frontière

a) Adhérence

- Définitions : point adhérent, adhérence d'une partie A.
- Exemples
- Théorème : caractérisation séquentielle — Démonstration
- Exemple : borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

b) Intérieur

- Définition : point intérieur, intérieur d'une partie A.
- Exemples

c) Propriétés de l'adhérence et de l'intérieur

d) Frontière

- Définition, exemple.

e) Parties denses

- Définition.
- Exemples
  - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ — Démonstration
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ — Démonstration
  - Autres exemples

4. Etude locale des applications

4.1. Limite en un point, continuité

a) Définition

- La limite, si elle existe est unique — Démonstration.
- Si $a \in A$, la limite si elle n'existe ne peut être que $f(a)$: on dit alors que f est continue en a

b) Prolongement par continuité

c) Cas des espaces produits

d) Extensions de la notion de limite

4.2. Théorème de caractérisation séquentielle

Démonstration

4.3. Opérations algébriques

4.4. Continuité sur une partie A

a) Définition

b) Structures algébriques de $\mathcal{C}(A, F)$, de $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$.

c) Continuité et densité :

Théorème : fonctions continues égales sur une partie dense — Démonstration

d) Continuité et topologie

Théorème : image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue

4.5. Uniforme continuité

a) Un exemple : applications k-lipschitziennes

b) Applications uniformément continues

Définition, exemples et contre-exemples.

4.6. Applications linéaires continues

a) Théorème fondamental : caractérisation des applications linéaires continues

Démonstration

b) Exemples

c) Cas des applications bilinéaires : théorème (condition suffisante)

Démonstration

5. Compacité

5.1. Introduction(rappels)

Théorème de Bolzano-Weierstarss

Démonstration dans $\mathbb{C}$, le théorème étant admis dans $\mathbb{R}$

5.2. Définition et premiers exemples

Définition : **partie compacte**

- Exemple : dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie : toute partie fermée et bornée est compacte

5.3. Propriétés

- Théorème : Tout compact est fermé et borné. Démonstration
- Propriété 1 : Une partie fermée d'un compact est compacte Démonstration
- Propriété 2 : Soient A compacte et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Alors :

  $$\left[(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right] \Leftrightarrow \left[(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une et une seule valeur d'adhérence}\right]$$
- Propriété 3 : Tout produit (cartésien) fini de compacts est compact

5.4. Compacité et continuité

a) Image d'un compact par une fonction continue Démonstration

b) Corollaire : toute fonction à valeurs réelles continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

- Plus particulièrement :

  l'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment

c) Application : optimisation et problèmes de distances

d) Théorème de Heine Démonstration

- Application : sommes de Riemann

6. Parties connexes par arcs

6.1. Introduction : rappels de MPSI

- **Théorème des valeurs intermédiaires**
- **Image d'un intervalle par une fonction réelle continue**

6.2. Définitions

a) Définition 1 : **arc, chemin**

b) Définition 2 : **partie connexe par arcs**

6.3. Exemples

a) Partie convexe : toute partie convexe est connexe par arcs Démonstration

b) Couronne

c) Partie étoilée :

- Définition

- Propriété : toute partie étoilée est connexe par arcs Démonstration

d) Composante connexe par arcs d'une partie X de E

6.4. Connexité par arcs et continuité

Théorème : image d'une partie connexe par arcs par une application continue

Démonstration

6.5. Etude du cas réel

a) Connexité par arcs et intervalles

b) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

c) Applications

7. Espaces vectoriels normés de dimension finie

7.1. Equivalence des normes

- **Théorème de Riesz**
- Importance de ce théorème

7.2. Parties compactes d'un espace normé de dimension finie

- Application immédiate des propriétés vues au §5.3 :
  - parties compactes d'un espace normé de dimension finie
  - les suites convergentes d'un espace normé de dimension finie sont les suites bornées n'ayant qu'une valeur d'adhérence

7.3. Sous-espaces de dimension finie

Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

7.4. Continuité des applications linéaires

a) Théorème fondamental Démonstration

b) Généralisation à la multilinéarité

- Théorème : Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-e.v.n. de dimension finie.

  Alors toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est continue.

  Démonstration