SEMAINE 7

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, PARTIES CONVEXES

EXERCICE 1 :

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme N_∞ :

$$N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| .$$

Soit $g \in E$. Pour toute fonction f de E, on pose $N_g(f) = N_\infty(fg)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction g pour que N_g soit une norme sur E.

2. Dans ce cas, à quelle condition sur g les normes N_g et N_∞ sont-elles équivalentes ?

- -

Dans tout l'exercice, on notera $Z_g = \{x \in [0,1] \mid g(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de g.

1. L' axiome $N_g(\lambda f) = |\lambda| N_g(f)$ et l'inégalité triangulaire sont toujours vérifiés. Le seul problème vient de l'axiome de séparation $N_g(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$.

- Si $\overset{\circ}{Z_g} \neq \emptyset$ (il existe un intervalle non trivial sur lequel g est la fonction nulle), alors N_g n'est pas une norme : en effet, soit $a \in \overset{\circ}{Z_g}$, on peut supposer $a \notin \{0,1\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset Z_g$; on peut trouver une fonction f de E différente de la fonction nulle mais qui est nulle en dehors du segment $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ (considérer une fonction continue qui fait un "pic" en a), on a alors $f \neq 0$ mais $fg = 0$, donc $N_g(f) = N_\infty(fg) = 0$, ce qui contredit l'axiome de séparation.
- Si $\overset{\circ}{Z_g} = \emptyset$, montrons que N_g est une norme. Si $f \in E$ vérifie $N_g(f) = 0$, alors $fg = 0$ donc f est nulle en tout point de $[0,1] \setminus Z_g$. Mais $[0,1] \setminus Z_g$ est dense dans $[0,1]$ et f est continue sur $[0,1]$, donc f est la fonction nulle (tout point de $(0,1]$ est limite d'une suite de points où la fonction f est nulle).

En conclusion, N_g est une norme sur E si et seulement si $\overset{\circ}{Z_g} = \emptyset$.

2. • Si la fonction g ne s'annule pas sur $[0,1]$, alors il existe deux réels strictement positifs m et M tels que

$$\forall x \in [0,1] \qquad m \leq |g(x)| \leq M .$$

On a alors $m \cdot N_\infty(f) \leq N_g(f) \leq M \cdot N_\infty(f)$ pour tout $f \in E$ et les normes N_∞ et N_g sont équivalentes.

- Si la fonction g s'annule en au moins un point a de $[0,1]$ (*on suppose a différent de* 0 *et de* 1 *pour rédiger ce qui suit, mais il est facile d'adapter la démonstration...*) , donnons-nous $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ ($\alpha < \min\{a, 1-a\}$) tel que

$$\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha] \qquad |g(x)| \leq \varepsilon .$$

Soit f une fonction nulle en dehors de l'intervalle $[a-\alpha, a+\alpha]$, affine sur chacun des intervalles $[a-\alpha, a]$ et $[a, a+\alpha]$, prenant la valeur 1 au point a. On a alors $N_\infty(f) = 1$ et $N_g(f) = N_\infty(fg) \leq \varepsilon$. Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, les normes N_g et N_∞ ne sont pas équivalentes.

En conclusion, les normes N_g et N_∞ sont équivalentes si et seulement si la fonction g ne s'annule pas.

EXERCICE 2 :

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans cet espace.

2. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme normalisé de degré p. Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé D de centre 0 et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max\limits_{0\leq i\leq p-1} |a_i|$.

3. En déduire que l'ensemble des polynômes de degré p normalisés et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Quelle est l'adhérence, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables ?

- -

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On peut la trigonaliser : $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les coefficients diagonaux de la matrice T (valeurs propres de A). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la matrice $D_n = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{p}{n}\right)$. Alors, pour n assez grand, les $\lambda_i + \frac{i}{n}$ $(1 \leq i \leq p)$ sont distincts : en effet, l'égalité $\lambda_i + \frac{i}{n} = \lambda_j + \frac{j}{n}$ avec $i \neq j$ ne peut se produire si $\lambda_i = \lambda_j$ et entraîne $n \leq \frac{p-1}{|\lambda_i - \lambda_j|}$ si $\lambda_i \neq \lambda_j$. Pour n assez grand, la matrice $T + D_n$ est donc diagonalisable, donc aussi la matrice $A_n = P(T + D_n)P^{-1}$ et, comme $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 0$, on a $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Il faut montrer que $|z| \leq 1$ ou $|z| \leq pM$. Si on suppose $|z| > 1$, alors, de $z^p = -(a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_0)$, on déduit $|z^p| \leq |a_{p-1}|\,|z^{p-1}| + \cdots + |a_0| \leq pM|z|^{p-1}$ puisque $|z^k| \leq |z^{p-1}|$ pour $k \leq p-1$, donc $|z| \leq pM$.

3. Soit (P_n) une suite de polynômes normalisés de degré p scindés sur $\mathbb{R}$, notons

$$P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)} .$$

Sur l'espace $\mathbb{R}_p[X]$, de dimension finie, les normes sont toutes équivalentes, choisissons par exemple la norme N définie par $N(P) = \max\limits_{0\leq i\leq p} |a_i|$ si $P = \sum_{i=0}^{p} a_iX^i$. La convergence de la suite (P_n) vers un certain polynôme $P = \sum_{i=0}^{p} a_iX^i$ équivaut à la condition : $\lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.

Supposons donc la suite (P_n) convergente vers $P = \sum_{i=0}^{p} a_iX^i$ dans $\mathbb{R}_p[X]$. On a donc $a_p = 1$ et le polynôme P est normalisé. Par ailleurs, les p suites $\left(a_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, donc sont bornées (et ont bien sûr une borne commune) : soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|a_i^{(n)}| \leq M$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$ et pour tout entier n. Les zéros complexes des polynômes P_n sont alors tous dans le disque fermé D défini dans la question **2.** Pour tout entier naturel n, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme P_n pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités. La suite (Z_n) est à valeurs dans le compact $[-R,R]^p$ de $\mathbb{R}^p$, donc admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z=(z_1,\cdots,z_p)$: $z_i=\lim\limits_{n\to\infty} z_i^{(\varphi(n))}$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

Pour tout n, le polynôme P_n se factorise en $P_n=\prod\limits_{i=1}^{p}(X-z_i^{(n)})$. En passant à la limite (les coefficients d'un polynôme sont fonctions continues des racines puisque ce sont les fonctions symétriques élémentaires de ces racines), on obtient, dans $\mathbb{R}[X]$,

$$P=\lim_{n\to\infty} P_{\varphi(n)}=\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)\ ,$$

donc le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.

On a ainsi prouvé que l'ensemble des polynômes normalisés de degré p et scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Réponse : c'est l'ensemble des matrices trigonalisables. En effet,

- si une matrice $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, on peut l'approcher par des matrices diagonalisables en reprenant le raisonnement de la question **1.**
- si $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est limite d'une suite (A_n) de matrices diagonalisables, les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice dépendant continûment de ses coefficients, on a $\chi_A=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}$; comme chaque χ_{A_n} est scindé sur $\mathbb{R}$ et normalisé de degré p (*bon, au signe près...*), le polynôme χ_A l'est aussi d'après la question **3.**, donc A est trigonalisable.

EXERCICE 3 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u\in\mathcal{L}(E)$, soit N une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}$.

- -

1. Si N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathcal{L}(E)$, elles sont équivalentes : $cN_1\leq N_2\leq c'N_2$ avec $0<c<c'$. Si on obtient $\lim\limits_{n\to\infty}\big(N_1(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}=l\in\mathbb{R}_+$, alors, des inégalités

$$c^{\frac{1}{n}}\big(N_1(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}\leq\big(N_2(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}\leq c'^{\frac{1}{n}}\big(N_1(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}\ ,$$

il résulte aussi $\lim\limits_{n\to\infty}\big(N_2(u^n)\big)^{\frac{1}{n}}=l$. Il suffit donc de faire le calcul pour une norme N (en espérant trouver une limite), choisissons désormais pour N la norme subordonnée à une certaine norme $\|\cdot\|$ sur E.

2. Soit λ une valeur propre de u, soit $x\in E$ un vecteur propre associé. On a alors $u^n(x)=\lambda^n x$, donc $\dfrac{\|u^n(x)\|}{\|x\|}=|\lambda|^n$ et $N(u^n)\geq|\lambda|^n$ pour tout n . On en déduit que, pour tout n

entier naturel, $\big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} \geq \rho(u)$, où $\rho(u) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$ (**rayon spectral** de u).

3. Supposons u diagonalisable, soit $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de diagonalisation, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les valeur propres associées. Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d$, alors

$$\|u^n(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^n |x_i|\ \|e_i\| \leq M\ \big(\rho(u)\big)^n \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|\right) ,$$

avec $M = \max\limits_{1\leq i\leq d} \|e_i\|$. Les normes sur E étant équivalentes, et $x = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i e_i \mapsto \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|$ en étant une, il existe une constante M' telle que

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u^n(x)\| \leq M'\ \big(\rho(u)\big)^n\ \|x\| ,$$

donc $N(u^n) \leq M'\ \big(\rho(u)\big)^n$ pour tout n et, d'après la minoration obtenue en **2.**, on a

$$\rho(u) \leq \big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} \leq {M'}^{\frac{1}{n}} \rho(u) , \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} = \rho(u) .$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque, utilisons la décomposition de Dunford $u = \delta + \nu$, avec δ diagonalisable et ν nilpotent qui commutent. Soit r l'indice de nilpotence de ν ($\nu^{r-1} \neq 0$ et $\nu^r = 0$). Pour $n > r$, on a $u^n = \sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k \delta^{n-k}\nu^k = \delta^{n-r} \sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k \delta^{r-k}\nu^k$, donc

$$\begin{aligned} N(u^n) &\leq N(\delta^{n-r}) \sum_{k=0}^{r} C_n^k\, N(\delta^{r-k}\nu^k) \\ &\leq \alpha \left(\sum_{k=0}^{r} C_n^k\right) N(\delta^{n-r}) \leq \alpha\,(r+1)\,n^r\,N(\delta^{n-r}) \end{aligned}$$

en posant $\alpha = \max\{N(\delta^{r-k}\nu^k)\ ;\ 0 \leq k \leq r\}$. *On a utilisé le fait que la norme N vérifie $N(uv) \leq N(u)\,N(v)$ pour tous endomorphismes u et v, et on a majoré (grossièrement) $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ par n^r pour $k \leq r$.*

Or, d'après **3.**, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \big(N(\delta^{n-r})\big)^{\frac{1}{n-r}} = \rho(\delta) = \rho(u)$ car u et δ ont les mêmes valeurs propres, donc

$$\big(N(\delta^{n-r})\big)^{\frac{1}{n}} = \left[\big(N(\delta^{n-r})\big)^{\frac{1}{n-r}}\right]^{1-\frac{r}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho(u) .$$

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \big[\alpha\,(r+1)\,n^r\,N(\delta^{n-r})\big]^{\frac{1}{n}} = \rho(u)$ et l'encadrement

$$\rho(u) \leq \big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \big[\alpha\,(r+1)\,n^r\,N(\delta^{n-r})\big]^{\frac{1}{n}}$$

permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \big(N(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} = \rho(u)$.

EXERCICE 4 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application telle que

• $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \iff x = O_E$;

• $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;

• l'ensemble $B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Montrer que N est une norme sur E.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit K une partie de E. Montrer l'équivalence entre les assertions **(1)** et **(2)** ci-dessous :

(1) : K est compact, convexe, symétrique par rapport à 0_E, et 0_E est intérieur à K ;

(2) : il existe une norme N sur E pour laquelle K est la boule unité fermée :

$$K = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}\ .$$

Source : François ROUVIÈRE, Petit guide de calcul différentiel, Éditions Cassini, ISBN 2-84225-008-7

- -

1. Il suffit de prouver l'inégalité triangulaire $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. Si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, c'est évident. Sinon, considérons les vecteurs unitaires associés, c'est-à-dire $u = \dfrac{x}{N(x)} \in B$ et $v = \dfrac{y}{N(y)} \in B$ et posons $w = \dfrac{x+y}{N(x)+N(y)}$. Alors $w \in B$ car B est convexe et

$$w = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\, u + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\, v\ ,$$

donc $N(w) \leq 1$, soit $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

2. Tout d'abord, l'espace E étant de dimension finie, il admet une unique topologie d'espace vectoriel normé, les notions de "compact" et d'"intérieur" mentionnées dans l'assertion **(1)** ont donc un sens intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du choix d'une norme, ce qui rassure.

• Montrons **(2)** $\Longrightarrow$ **(1)** :

Si $K = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$, où N est une norme sur E, alors

▷ $K = N^{-1}\big([0,1]\big)$ est fermé borné donc compact (*dimension finie*),

▷ K est convexe grâce à l'inégalité triangulaire : si $x \in K$, $y \in K$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, alors

$$N(\lambda x + \mu y) \leq N(\lambda x) + N(\mu y) = \lambda N(x) + \mu N(y) \leq \lambda + \mu = 1\ ,$$

donc $\lambda x + \mu y \in K$;

▷ K est symétrique par rapport à 0_E car $N(-x) = N(x)$;

▷ $\overset{\circ}{K} = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$ est un voisinage de 0_E inclus dans K, et 0_E est intérieur à K.

- Montrons **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)** :

  Pour tout $x \in E$, posons $I(x) = \{k \in \mathbb{R}_+^* \mid kx \in K\}$.

  $\triangleright$ si $x = 0_E$, alors $I(0_E) = \mathbb{R}_+^*$ et on pose $N(0_E) = 0$;

  $\triangleright$ si $x \neq 0_E$, alors

  - $I(x)$ est non vide car 0_E est intérieur à K donc, si $\|\cdot\|$ représente une quelconque norme sur E, K contient une boule fermée de centre 0_E et de rayon $r > 0$ pour cette norme et $\dfrac{r}{\|x\|} \in I(x)$ puisque $\dfrac{r}{\|x\|}x \in K$:

  - $I(x)$ est majoré, sinon K ne serait pas borné donc pas compact.

  Posons alors $N(x) = \dfrac{1}{\sup I(x)} \in \mathbb{R}_+^*$.

  Remarquons que, de la convexité de K et de $0_E \in K$, il résulte que $I(x)$ est un intervalle qui est soit $\left]0, \dfrac{1}{N(x)}\right[$, soit $\left]0, \dfrac{1}{N(x)}\right]$. Mais $I(x)$ est un fermé relatif de $\mathbb{R}_+^*$ car c'est l'image réciproque de K par l'application continue $\mathbb{R}_+^* \to E$, $k \mapsto kx$. Finalement, $I(x) = \left]0, \dfrac{1}{N(x)}\right]$.

  On a bien alors $K = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ puisque

  $$N(x) \leq 1 \iff \sup I(x) \geq 1 \iff 1 \in I(x) \iff x \in K\ .$$

  L'application N ainsi définie va de E vers $\mathbb{R}_+$ et vérifie l'axiome de séparation $N(x) = 0 \iff x = 0_E$.

  Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$:

  - c'est évident si $x = 0_E$ ou $\lambda = 0$;

  - si $x \neq 0_E$ et $\lambda > 0$, cela résulte de $k \in I(\lambda x) \iff \lambda k \in I(x)$;

  - si $x \neq 0_E$ et $\lambda < 0$, cela résulte de la symétrie de K par rapport à 0_E.

  Enfin, l'inégalité triangulaire résulte de la question **1.**

EXERCICE 5 :

1. Soient $x_1, \ldots, x_k$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, avec $k > n+1$. Montrer l'existence de réels $a_1, \ldots, a_k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0\ . \tag{*}$$

2. Théorème de Carathéodory. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}(A)$ l'**enveloppe convexe** de A ("plus petit" convexe contenant A : c'est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des familles finies de points de A). Montrer que tout point de $\mathcal{E}(A)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de A.

3. Théorème de Helly. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des parties convexes de $\mathbb{R}^n$, avec $k > n+1$. On suppose que toute sous-famille de $n+1$ parties choisies parmi $A_1, \ldots, A_k$ a une intersection non vide.

Démontrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$.

Source : Marcel BERGER, Géométrie 2, Éditions Nathan, ISBN 209 191 731-1.

- -

1. L'application $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ définie par $F(a_1, \ldots, a_k) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \ , \ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)$ est linéaire et ne peut être injective, compte tenu des dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

2. Soit x un élément de $\mathcal{E}(A)$. On peut écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, les x_i appartenant à A, les λ_i étant des réels positifs ou nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ (x est barycentre à coefficients positifs d'une famille de k points de A).

Supposons $k > n+1$ et prouvons que x est barycentre à coefficients positifs d'une sous-famille stricte de $(x_1, \ldots, x_k)$, ce qui achévera la démonstration.

Soient a_1, …, a_k des réels non tous nuls vérifiant **(*)**, l'un au moins des a_i est strictement positif. Posons alors

$$C = \min\left\{\frac{\lambda_i}{a_i} \ ; \ i \in [\![1, k]\!] \ , \ a_i > 0\right\} \ .$$

De $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$, on déduit que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - C a_i) x_i$. On vérifie que les coefficients $\lambda_i - C a_i$ sont positifs ou nuls et que leur somme vaut 1 (conséquence de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$) ; mais l'un au moins de ces coefficients est nul, ce qui prouve que x est barycentre à coefficients positifs de $k-1$ points de A.

Conséquence. Si A est compact, alors $\mathcal{E}(A)$ est compact : en effet, l'ensemble

$$K = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathcal{E}(A)$ est l'image du compact $K \times A^{n+1}$ par l'application continue

$$\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}), x_1, \ldots, x_{n+1}\big) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \ .$$

3. Montrons d'abord le résultat suivant : si $k > n+1$, si A_1, A_2, …, A_k sont des convexes de $\mathbb{R}^n$ tels que $k-1$ quelconques d'entre eux aient une intersection non vide, alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$.

Pour cela, choisissons un $x_i \in \displaystyle\bigcap_{j \neq i} A_j$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Soient a_1, ..., a_k des réels non tous nuls vérifiant **(*)**. Posons

$$I = \{i \in [\![1, k]\!] \mid a_i \geq 0\} \quad \text{et} \qquad J = [\![1, k]\!] \setminus I = \{j \in [\![1, k]\!] \mid a_j < 0\} \ .$$

On a $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i x_i = -\sum_{j \in J} a_j x_j$. Posons $s = \displaystyle\sum_{i \in I} a_i = -\sum_{j \in J} a_j$ (on a $s > 0$).

Soit enfin $x = \dfrac{1}{s} \displaystyle\sum_{i \in I} a_i x_i = \dfrac{1}{s} \sum_{j \in J} (-a_j) x_j$.

Alors x est barycentre à coefficients positifs des x_i, $i \in I$. Or, si on fixe un indice $j \in J$, alors $\forall i \in I \quad x_i \in A_j$; comme A_j est convexe, on en déduit que $x \in A_j$ et ceci pour tout $j \in J$.

De même, x est barycentre à coefficients positifs des x_j, $j \in J$. Or, si on fixe un indice $i \in I$, alors $\forall j \in J \quad x_j \in A_i$; comme A_i est convexe, on en déduit que $x \in A_i$ et ceci pour tout $i \in I$.

Finalement, $x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i$.

Soit maintenant $k > n+1$ et soient A_1, ..., A_k des parties convexes de $\mathbb{R}^n$ tels que toute sous-famille de $n+1$ parties ait une intersection non vide. On en déduit que toute sous-famille de $n+2$ parties a une intersection non vide, puis toute sous-famille de $n+3$ parties... Bref, par une récurrence finie, on montre que la famille $(A_1, \ldots, A_k)$ a une intersection non vide.

EXERCICE 6 :

Soit E un espace euclidien, soit A une partie de E. On dit qu'un hyperplan affine H est un **hyperplan d'appui** de A si $H \cap A \neq \emptyset$ et si la partie A est entièrement contenue dans l'un des deux demi-espaces fermés délimités par H.

Dans la suite de l'exercice, C est un convexe fermé non vide de E.

1. Soit $a \in E \setminus C$. Montrer qu'il existe un unique point x de C tel que $\|x - a\| = d(a, C)$ (le point x est appelé le **projeté de** a **sur** C). Montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de C passant par x.

2. Soit x un point de la frontière du convexe C. Montrer que, par le point x, il passe au moins un hyperplan d'appui.

Source : Marcel BERGER, Géométrie 2, Éditions Nathan, ISBN 209 191 731-1.

- -

1. • Posons $\delta = d(a, C) = \inf\limits_{c \in C} \|c - a\|$. Il existe alors $c \in C$ tel que $\|c - a\| \leq \delta + 1$. En notant B la boule fermée de centre a et de rayon $\delta + 1$, il est clair que $\delta = \inf\limits_{c \in C} \|c - a\| = \inf\limits_{c \in C \cap B} \|c - a\|$. Comme $C \cap B$ est fermé borné, c'est un compact, donc cette borne inférieure est atteinte (*comme la tarte*), ce qui prouve l'existence d'un élément x de C tel que $d(a, C) = \|x - a\|$.

- Supposons que deux points distincts x et y de C réalisent ce minimum : $\|x-a\| = \|y-a\| = \delta$. Posons $z = \dfrac{x+y}{2}$. Comme C est convexe, on a $z \in C$, mais

$$\|z-a\| = \left\|\frac{x+y}{2} - a\right\| = \frac{1}{2}\,\big\|(x-a)+(y-a)\big\| < \frac{1}{2}\big(\|x-a\| + \|y-a\|\big) = \delta$$

(l'inégalité est stricte car le cas d'égalité signifierait que les vecteurs $\overrightarrow{ax} = x-a$ et $\overrightarrow{ay} = y-a$ sont colinéaires et de même sens, donc égaux puisqu'ils ont la même norme, donc que $x = y$), on a ainsi obtenu une absurdité. Cela prouve l'unicité du "projeté de a sur le convexe fermé C". Ce projeté x appartient bien sûr à la frontière de C.

- Montrons que $\forall c \in C \quad (x-a|x-c) \le 0$. En effet, si $c \in C$, le segment $[x,c]$ est inclus dans C, donc $\forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)x + \lambda c \in C$, donc

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad \big\|(1-\lambda)x + \lambda c - a\big\|^2 \ge \|x-a\|^2 = \delta^2$$

ou encore

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad \big\|(1-\lambda)(x-a) + \lambda(c-a)\big\|^2 \ge \|x-a\|^2 = \delta^2$$

(*bref, on prend a comme origine*). En développant, on obtient

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda^2\|c-a\|^2 + \lambda(\lambda-2)\|x-a\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\,(x-a|c-a) \ge 0\ .$$

Notons $f(\lambda)$ le premier membre de l'inégalité ci-dessus, la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable (c'est un polynôme du second degré), on a $f(0) = 0$ et $f(\lambda) \ge 0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$, donc $f'(0) \ge 0$, ce qui donne

$$-2\|x-a\|^2 + 2(x-a|c-a) \ge 0\ , \qquad \text{ou encore} \quad (x-a|c-x) \ge 0\ .$$

Notons alors H l'hyperplan affine passant par x et de vecteur normal $\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{ax} = x-a$. Les deux demi-espaces fermés délimités par cet hyperplan sont

$$E_+ = \{c \in E \mid (\overrightarrow{xc}|\overrightarrow{xa}) \ge 0\} = \{c \in E \mid (c-x|a-x) \ge 0\} \quad \text{et} \quad E_- = \{c \in E \mid (c-x|a-x) \le 0\}$$

(le premier contenant le point a). On a prouvé que $C \subset E_-$, donc H est un hyperplan d'appui de C.

2. Soit $x \in \mathrm{Fr}(C)$ (frontière de C), alors $x \notin \overset{\circ}{C}$, donc x appartient à l'adhérence du complémentaire $E \setminus C$; il existe donc une suite (a_n) de points de $E \setminus C$ convergeant vers x. Notons x_n le projeté du point a_n sur le convexe C et posons $\overrightarrow{\nu_n} = \dfrac{\overrightarrow{a_n x_n}}{\|\overrightarrow{a_n x_n}\|} = \dfrac{x_n - a_n}{\|x_n - a_n\|}$. Pour tout entier naturel n, l'hyperplan H_n passant par x_n et de vecteur normal $\overrightarrow{\nu_n}$ est un hyperplan d'appui de C, donc

$$\forall c \in C \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\overrightarrow{x_n c} \mid \overrightarrow{\nu_n}) = (c - x_n \mid \overrightarrow{\nu_n}) \ge 0\ . \qquad \textbf{(*)}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ car $\|x_n - x\| \le \|x_n - a_n\| + \|a_n - x\|$ et $\lim_{n\to+\infty} \|a_n - x\| = 0$ et $\|x_n - a_n\| = d(a_n, C) \le \|a_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $(\overrightarrow{\nu_n})$, à valeurs dans la sphère unité (compacte) admet une valeur d'adhérence $\overrightarrow{\nu} = \lim_{n\to+\infty} \overrightarrow{\nu_{\varphi(n)}}$. En passant à la limite dans **(*)** suivant l'extraction φ, on obtient

$$\forall c \in C \qquad (\overrightarrow{xc} \mid \overrightarrow{\nu}) = (c - x \mid \overrightarrow{\nu}) \ge 0\ ,$$

donc l'hyperplan H passant par x et de vecteur normal $\overrightarrow{\nu}$ est un hyperplan d'appui de C passant par x.