

Nombres complexes

Forme algébrique et forme trigonométrique

► 1

Représenter dans le plan complexe les points d'affixe respectives :

$$1+i, \quad -1-i, \quad 5, \quad -3, \quad 3i, \quad 4-4i, \quad 3+3i.$$

Sans calcul, par des considérations géométriques, donner un argument de chacun de ces nombres.

► 2

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

- 1) $|z| = 4$, 4) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$,
- 2) $\operatorname{Re}(z) = -2$, 5) $\arg(z) \equiv -\frac{2\pi}{3} [\pi]$
- 3) $\operatorname{Im}(z) = 1$, 6) $\arg(z) \equiv \pi [\frac{\pi}{4}]$.

► 3

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 2i - 1 + 3i, & z_6 &= (2+i)^3, \\ z_2 &= 12 - 3i - 4(-5 + 8i), & z_7 &= \frac{1}{1+i}, \\ z_3 &= (2+i)(3-2i), & z_8 &= \frac{1+2i}{1-2i}, \\ z_4 &= (4-3i)^2, & z_9 &= \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3+i}, \\ z_5 &= (1+i)(2-3i)(1+i), & z_{10} &= \frac{(1+i\sqrt{3})^{31}}{(1-i)^{18}} \end{aligned}$$

► 4

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

- 1) Mettre ces deux nombres sous forme trigonométrique.
- 2) En déduire la forme algébrique de $z_1 z_2$, $\overline{z_1} z_2^2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

► 5

On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3, \quad z_1 z_2 z_3, \quad z_3^4, \quad \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{1}{z_3}, \quad \overline{z_3} z_1 z_2.$$

► 6

Dans chacun des cas suivants, écrire z_k sous forme trigonométrique en déduire sa forme algébrique. Mêmes questions pour \bar{z}_k et $\frac{1}{z_k}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{6}{1+i}, & z_4 &= -4e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ z_2 &= (1+i\sqrt{3})^4, & z_5 &= (2\sqrt{3}+2i)^5 e^{-i\frac{\pi}{3}}, \\ z_3 &= 3ie^{i\frac{\pi}{3}}, & z_6 &= \frac{(2+2i)^6}{(1-i)^4} e^{i\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$

► 7

Exprimer un argument de chacun des complexes suivants à l'aide d'un arc-tangente :

$$z_1 = 2+i, \quad z_2 = -3-i, \quad z_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{5}i, \quad z_4 = \sqrt{3} - 2i.$$

► 8

Soit $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$. Même question pour $z^n \in i\mathbb{R}$.

► 9

On se propose de résoudre l'équation : $\bar{z} = jz^2$ où $z \in \mathbb{C}$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer le module de toute solution de l'équation. Résoudre l'équation.

► 10

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes, d'inconnue z :

- 1) $2\bar{z} = i - 1$, 5) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$,
- 2) $i\bar{z} - \bar{z} + 2 - i = 0$, 6) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$,
- 3) $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$, 7) $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$,
- 4) $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = i$, 8) $4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0$.

► 11

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Préciser à quelles conditions les expressions suivantes existent, puis déterminer leurs modules et arguments :

- 1) $\cos(a) - i \sin(a)$, 4) $\frac{1 + e^{in\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$, 7) $\frac{e^{ia} + e^{ib}}{e^{ia} - e^{ib}}$.
- 2) $\sin(a) - i \cos(a)$, 5) $1 + ie^{-ia}$,
- 3) $e^{ia} - 1$, 6) $\frac{1 + i \tan(a)}{1 - i \tan(a)}$,

► 12

Soit M un point du plan d'affixe z .

- 1) Déterminer les points M tels que $z + \bar{z} = |z|$.
- 2) Déterminer les points M tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient même module.

► 13

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.

Applications à la trigonométrie

► 14

Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

- 1) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z .
- 2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► 15 Linéarisation

Soit x un nombre réel. Linéariser $(\cos x)^2 \sin(2x)$ et $\cos^4(x) \sin^3(x)$.

► 16 Développements

Soit x un réel quelconque.

- 1) a. Développer $(\cos(x) + i \sin(x))^6$ à l'aide de l'identité remarquable.
b. En déduire l'expression de $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(6x)$ en fonction de $\sin(x)$.
- 2) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Équations d'inconnue complexe, deuxième degré.

► 17

Factoriser dans \mathbb{C} les expressions suivantes :

- | | |
|-----------------|--|
| 1) $x^2 - 5$, | 4) $x^2 + a$ où $a \in \mathbb{R}$, |
| 2) $x^2 + 1$, | 5) $x^2 + a$ où $a \in \mathbb{C}^*$, |
| 3) $2x^2 + 5$, | 6) $x^2 + 2x + i$. |

► 18

- 1) Montrer que l'équation $(E) : z^4 + z^3 + 6z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.
- 2) En factorisant, résoudre l'équation (E) .

► 19 Calcul de racines carrées

- 1) Calculer les racines carrées complexes de $-8 + 6i$ sous forme algébrique.
- 2) Pour les nombres complexes suivants :
 $-8i, -1 + i, \sqrt{3} + i$,
a. calculer les racines carrées complexes sous forme trigonométrique ;
b. les représenter dans le plan complexe ;
c. calculer les racines carrées complexes sous forme algébrique ;
- 3) Déduire de la question précédente les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► 20

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 - i = 0$, (oui, c'est moche)
- 2) $z^4 + z^2 + 1 = 0$,
- 3) ♦♦ θ étant un paramètre pris dans $]0, \pi[$,
 $z^4 + 2z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + (1 + \cos \theta)^2 = 0$.

► 21

Déterminer tous les couples (u, v) de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} uv = \frac{1}{2}, \\ u + 2v = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Donner les couples solutions sous forme trigonométrique.

Racines n -ièmes complexes et résolution d'équations

► 22 Calcul de racines n -ièmes complexes

- 1) Déterminer les racines quatrièmes complexes de $e^{i\pi/3}$. Représenter leurs images dans le plan complexe.
- 2) Faire de même pour les racines sixièmes complexes de -8 .

► 23 Racines cinquièmes de l'unité

- 1) Déterminer les racines cinquièmes de l'unité et les représenter sur un dessin.
- 2) Indépendamment de la question précédente, montrer que :
 $(E) \quad z^5 - 1 = 0 \iff z = 1 \text{ ou } z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$.
- 3) Soit $u = z + \frac{1}{z}$. Développer u^2 et exprimer $z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ en fonction de u et u^2 .
- 4) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.
- 5) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

► 24

On souhaite trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$(E) \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

- 1) Que devient le premier membre quand on le multiplie par $(x - 1)$?
- 2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ci-dessus. Combien a-t-on trouvé de solutions ? Comparer au degré de l'équation (E) .
- 3) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les solutions complexes de l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1 = 0.$$

- 4) Même question pour l'équation $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = 0$.

► 25

On résoudra les équations suivantes à l'aide de changements d'inconnues.

- 1) Résoudre $\left(\frac{z+1}{iz+1}\right)^4 = 1$.
- 2) ♦ Résoudre $\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Résoudre $(z-1)^n = (z+1)^n$.

Applications à la géométrie

► 26

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j) .

- 1) Soit D le point de coordonnées $(\sqrt{3}, 3)$. Quelle est son affixe z_D ?
- 2) Soit A, B, C d'affixes respectives

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = -\sqrt{3} - i, \quad z_C = 2i.$$

- a. Calculer les modules des affixes de tous les points, puis placer les points dans le repère.
 - b. Quelles conclusions géométriques peut-on tirer de l'observation des modules ?
 - c. Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$?
- 3) Déterminer l'affixe du point E pour que $ABEC$ soit un parallélogramme.

► 27

Soit A, B, C, D, M, G des points du plan, muni d'un repère orthonormé direct, d'affixes respectives a, b, c, d, z et g . On suppose A, B et C distincts.

Exprimer à l'aide des complexes les conditions suivantes :

- 1) M est le milieu de $[AB]$,
- 2) Le triangle ABC est rectangle en A (puis isocèle en A , rectangle isocèle en A , équilatéral)
- 3) G est le centre de gravité du triangle ABC .

► 28

Déterminer la nature des transformations du plan qui correspondent aux applications complexes :

- | | |
|----------------------------|--|
| 1) $z \mapsto z + i$, | 4) $z \mapsto \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}z$, |
| 2) $z \mapsto z - 1 + i$, | 5) $z \mapsto \sqrt{3}z$, |
| 3) $z \mapsto iz$, | 6) $z \mapsto -z$. |

► 29

Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = \sqrt{2}i$.

- 1) Déterminer la nature du triangle OAB .
- 2) Soit O_1, A_1 et B_1 les images respectives de O, A et B par la translation de vecteur \vec{v} d'affixe $-2 + 3i$. Déterminer l'affixe des points O_1, A_1, B_1 .
- 3) Soit O_2, A_2 et B_2 les images respectives de O, A et B par l'homothétie de centre O et de rapport 3. Calculer la distance A_2B_2 .

► 30

Soit $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, A et B les points associés respectivement à z_A et z_B dans le plan complexe. On appelle C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

- 1) Calculer l'affixe z_C de C .
- 2) Prouver que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ est un imaginaire pur. Calculer le module de ce quotient.
- 3) En déduire la nature du triangle ABC .

► 31

Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble M des points du plan dont l'affixe z vérifie :

- 1) $|z - 2i| = |z + 2|$;
- 2) $|iz - 1| = |z + 2|$.

► 32 Égalité du parallélogramme

- 1) Montrer que, pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

- 2) En déduire que dans un parallélogramme $ABCD$:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

► 33 Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus)

À l'aide des nombres complexes, montrer que dans tout triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\vec{AB}, \vec{AC}).$$