TD agreg n°2

Coralie Renault

5 octobre 2016

Exercice 1

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finies et $\varphi\colon E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Établir que φ est différentiable et calculer sa différentielle φ.

Exercice 2

1. *Soit $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.*
   Justifier que f est différentiable et déterminer la différentielle de f en tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.
2. *Soit $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = tr(M^3)$.*
   Justifier que f est différentiable et calculer la différentielle de f en tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. *Justifier que l'application $\det\colon \_M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable.*
2. *Calculer sa différentielle en I_n puis en toute matrice M inversible.*
3. *En introduisant la comatrice de M, exprimer la différentielle de l'application $\det$ en tout $M \in \_M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 4

1. *Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ et que si $X \in SL_n(\mathbb{R})$ alors le plan tangent en X est l'ensemble des matrices H telles que $Tr(X^{-1}J) = 0$.*
2. *Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales de tailles n est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et que si $X \in O_n(\mathbb{R})$ alors le plan tangent en X est l'ensemble des matrices H telles que ${}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H$.*

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$f(M) = \Big(tr\big(M\big), tr\big(M^2\big), \ldots, tr\big(M^n\big)\Big)$$

1. *Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in M_n(\mathbb{R})$.*
2. *Comparer le rang de $f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.*
3. *Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 6 (***Surjectivité de l'exponentielle***)

On veut démontrer le théorème suivant

Théorème 1

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = exp(P(A))$. En particulier l'application exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.

1. *Montrer que exp réalise un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^\times, .)$*
2. *Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 et un voisinage ouvert V de l'identité tel que exp réalise un difféomorphisme de V_0 dans V.*
3. *Montrer que $exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[A]^\times$.*
4. *Montrer que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.*
5. *Conclure.*
6. *Le résultat est-il vrai sur $\mathbb{R}$?*