# MP*: Algèbre linéaire, anneau $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, anneaux de polynômes, algèbre

Coralie Renault

8 janvier 2015

**Exercice**

Soit $A$ une sous algèbre de $\mathbb{R}[X]$ engendrée par $X^2$ et $X^3$. Montrer que $A$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice**

a) Pour $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ avec $a \wedge n = 1$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1 \quad [n]$.

b) Pour $p$ premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$, montrer que $p$ divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

c) Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. On suppose que $a^{n-1} = 1 \quad [n]$. On suppose que pour tout $x$ divisant $n-1$ et différent de $n-1$, on a $a^x \neq 1 \quad [n]$. Montrer que $n$ est premier.

**Exercice**

Soit $\mathbb{K}$ une algèbre intègre sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 2$. On assimile $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}.1$ où $1$ est l'élément de $\mathbb{K}$ neutre pour le produit.
a) Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible.
b) Soit $a$ un élément de $\mathbb{K}$ non situé dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre tandis que le famille $(1, a, a^2)$ est liée.
c) Montrer l'existence de $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$.
d) Montrer que si $\mathbb{K}$ est commutative alors $\mathbb{K}$ est isomorphisme à $\mathbb{C}$.

**Exercice**

Déterminer les morphismes de groupes entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

**Exercice**

— Trouver les polynomes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'existent $p$,$q$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $(P')^q$ divise$P^q$.

**Exercice**

Soit $p$ un nombre premier supérieur à 3.
a) Quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ?
b) On suppose $p = 1 \quad [4]$. En calculant de deux façons $(p-1)!$, justifier que $-1$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
c) On suppose $p = 3 \quad [4]$. Montrer que $-1$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Exercice**

Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

**Exercice (*Matrices de permutation*)**

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note

$$P(\sigma) = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

appelée matrice de permutation associée à $\sigma$.
a) Montrer que

$$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2, P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma)P(\sigma')$$

b) En déduire que $E = \{P(\sigma) / \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
c) Vérifier que

$$^t(P(\sigma)) = P(\sigma^{-1})$$

**Exercice**

- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ii} = 0$ pour tout i et $a_{ij} \in \pm 1$ pour $i \neq j$. Si n est pair, montrer que A est inversible.
- On dispose de $2n+1$ cailloux, $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ caillouxpeut se partager en deux paquets de n cailloux de meme masse totale.Montrer que tout les cailloux ont la meme masse.

**Exercice**

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Donner le rang de $M$ et la dimension de son noyau.
b) Préciser noyau et image de $M$.
c) Calculer $M^n$.

**Exercice**

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P \equiv 1 (\mod (X-1)^3) \text{ et } P \equiv -1 (\mod (X+1)^3)$$

**Exercice**

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts.
On note $F_j$ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P$$

Montrer que $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^\star$.

**Exercice**

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ tel que $\forall x \in E \diagdown 0$ , on a $(x, u(x))$ qui est une famille liée.
Que dire de u ?