Dérivabilité

Nombre dérivé, théorèmes opératoires. Sens de variation d'une fonction.

▷ 1

1) Déterminer la limite de $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-1}$ quand x tend vers 1.

2) Même question pour $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$.

▷ 2 Ultra classique

On considère l'application $f: \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x>0,\;\; f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$

1) Démontrer que f est prolongeable par continuité en une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$. *On notera g ce prolongement.*

2) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Quelle est la valeur de $g'(0)$?

► 3

Soit f définie sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$ par

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\ln\big(1-|x|\big).$$

1) Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0. On note g son prolongement par continuité.

2) g est-elle dérivable en 0 ?

3) g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$?

4) Traiter la question 3 sans utiliser la question 2.

▷ 4 Dérivation d'une bijection réciproque

Soit $f: x\mapsto x\,|x|$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa fonction dérivée f'.

2) Montrer que f est bijective et étudier la dérivabilité de sa bijection réciproque f^{-1}.

► 5 Étude de fonction

On considère la fonction $f: x\mapsto x^{\frac{1}{1+\ln(x)}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) **a.** Étudier la continuité de f.

b. Montrer que $f\big|_{]0,1/\mathrm{e}[}$ admet un prolongement par continuité en 0, que l'on notera f_0. f_0 admet-elle un prolongement par continuité en $1/\mathrm{e}$?

c. Montrer que $f\big|_{]1/\mathrm{e},+\infty[}$ admet un prolongement par continuité en $1/\mathrm{e}$, que l'on notera f_1.

3) Étudier la dérivabilité de f ainsi que celle de f_0 en 0 et celle de f_1 en $1/\mathrm{e}$.

4) Étudier les variations de f et tracer son tableau de variations. Tracer la courbe représentative de f.

► 6 Plus simple qu'il n'y parait

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f: I\to\mathbb{R}$ une application. On suppose qu'il existe $\alpha>1$ tel que

$$\forall (x,y)\in I^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|^{\alpha}.$$

Montrer que f est constante sur I.

► 7 ♠ Une équation fonctionnelle classique

On cherche toutes les fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E)\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)\times f(y).$$

1) Soit f vérifiant (E). On considère temporairement x fixé et on introduit $g: t\mapsto f(x+t)$. En dérivant g de deux manières, montrer que f vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.

2) Résoudre cette équation.

3) En déduire que les fonctions satisfaisant (E) sont les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ ainsi que la fonction nulle.

Dérivées successives

► 8 Entraînement au calcul

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs domaine de définition, puis calculer leur dérivée n-ième pour tout $n\in\mathbb{N}$:

1) $f:\; x\mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$;

2) $g:\; x\mapsto \ln(x)$;

3) $h:\; x\mapsto x^2\ln(x)$;

4) $\varphi:\; x\mapsto (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x}$;

► 9

Étudier précisément la régularité de la fonction

$$h:\; x\longmapsto \sqrt{-x^3+4x^2-5x+2}.$$

► 10 Utilisation d'une fonction complexe

Soit $f:\; x\longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\sin(x)$.

1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Écrire f comme la partie imaginaire d'une fonction $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

3) En déduire l'expression de la dérivée d'ordre n de f pour tout $n\in\mathbb{N}$.

▹ 11 Dérivées de fonctions paires, impaires, périodiques

Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1) Montrer que si f est paire, alors f' est impaire et vice-versa.

2) Montrer que si f est paire, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}$ a la parité de k.

3) Montrer que si f est T-périodique, alors f' l'est également. Que penser de la réciproque ?

► 12 Dérivées n-ièmes d'une fonction composée

On considère la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Justifier sans calcul que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

3) En procédant par récurrence sur $\mathbb{R}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-1/x}.$$

On ne cherchera pas à déterminer P_n mais on constatera en cours de preuve que ces polynômes vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x).$$

4) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

5) ♠ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$.

6) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

▹ 13 Prouver des inégalités

1) À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 < \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \mathrm{e}^x.$$

2) Montrer que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad 0 \leqslant \ln\big(\ln(x+1)\big) - \ln\big(\ln x\big) \leqslant \frac{1}{x \ln x}.$$

► 14 Qualité d'une valeur approchée

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 10 000 et 10 001, majorer **sans calculatrice** l'erreur que l'on commet en considérant que $\sqrt{10\,001} \simeq 100$. Vérifier ensuite sur une machine.

▹ 15

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(a) = f(c) = f(b)$.
Montrer que f'' s'annule en un point $d \in]a,b[$.

► 16 Application à l'étude asymptotique de séries

1) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

2) En déduire un **encadrement** de $\frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$ faisant intervenir $\ln$ aux deux extrémités de l'encadrement.

3) En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis la limite de (S_n).

4) Déterminer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

5) Pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ fixé, justifier l'existence et donner la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

► 17 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$. Le théorème des accroissements finis permet d'affirmer que :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

Nous allons étendre cette formule à l'ordre 2 en montrant que

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Pour ce faire, on introduit l'application Φ définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - K\frac{(x-a)^2}{2}$$

où K est une constante choisie pour que $\Phi(a) = \Phi(b)$.

1) **a.** Justifier qu'une telle constante K existe.
(il n'est pas nécessaire de la calculer)

b. Montrer que Φ' s'annule en un point de $]a,b[$ puis que Φ'' s'annule en un point de $]a,b[$.

c. En déduire le résultat annoncé ci-dessus.

2) On suppose de plus que $f'(a) = 0$.
On introduit également $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

a. Expliquer pourquoi M est bien définie.

b. Établir que $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{M}{2}(b-a)^2$.

▹ 18

Soit f la fonction définie sur $]-3,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3+x}$.

1) Étudier les variations de f et montrer que f est contractante sur $[0,+\infty[$.

2) Déterminer les éventuels points fixes de f.

3) Soit u une suite récurrente vérifiant

$$u_0 > -3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite u est bien définie et qu'elle converge vers une valeur ℓ que l'on précisera. Proposer un majorant de $|u_n - \ell|$.

4) Dans le cas où $u_0 = -1$, déterminer un rang $n \in \mathbb{N}$ à partir duquel u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.