Nombres complexes

Les nombres complexes sont des nombres plus généraux que les nombres réels qui répondent toutefois aux mêmes règles de calcul algébrique qu'eux. Chaque nombre peut complexe peut être représenté de diverses manières :

– sous forme **littérale :** le nombre complexe z,
– sous forme **algébrique :** $a+\mathrm{i}\,b$, où a et b sont deux réels,
– sous forme **trigonométrique :** $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$,
– sous forme **géométrique :** un point M ou un vecteur $\vec{u}$ du plan.

Ces quatre représentations ont toutes leur intérêt. Il est courant que l'une des formes soit plus adaptée que les autres pour résoudre un problème donné.

I Forme algébrique d'un nombre complexe

I.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Déf. • L'**ensemble des nombres complexes** est un ensemble :
– comprenant tous les nombres réels,
– comprenant un élément non réel i, appelé **unité imaginaire,**
– où tout élément z peut s'écrire, de façon unique,

$$z=a+\mathrm{i}\,b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans l'écriture ci-dessus, a est la **partie réelle du nombre complexe z** et b est sa **partie imaginaire.** L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Ainsi, les nombres réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle s'écrivent $\mathrm{i}\,b$, où b est un réel. On les appelle des **imaginaires purs.** Ils forment l'ensemble noté **$\mathrm{i}\,\mathbb{R}$.**

Déf. • Quand $z=a+\mathrm{i}\,b$ où a et b sont deux réels, on dit que l'écriture $a+\mathrm{i}\,b$ est la **forme algébrique de z.** La partie réelle de z est notée **$\mathrm{Re}(z)$,** sa partie imaginaire est notée **$\mathrm{Im}(z)$.**

Attention ❢ La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre *réel* : elle ne contient pas le nombre i !

La définition des nombres complexes affirme que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique. On en tire le théorème qui suit.

Thm • Théorème d'identification algébrique
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

I.2 Opérations sur les nombres complexes

On *définit* l'addition et la multiplication de deux nombres complexes ainsi :

Déf. • Soit $z=a+\mathrm{i}\,b$ et $z'=c+\mathrm{i}\,d$ deux nombres complexes, a, b, c, d étant des réels. On définit leur **somme** et leur **produit** par

$$z+z'=(a+c)+\mathrm{i}(b+d),$$
$$z\times z'=(a\,c-b\,d)+\mathrm{i}(a\,d+b\,c).$$

On constate que ces opérations prolongent l'addition et la multiplication des réels (quand z et z' sont réels, on a $z=a$ et $z'=c$ et on a bien $z+z'=a+c$ et $z\times z'=a\,c$). Mieux, on peut démontrer (si l'on est patient) que **toutes les règles de calcul algébrique vues pour les réels restent valables pour les complexes.** Cela concerne la gestion des parenthèses, les règles de développement et de factorisation, l'utilisation d'exposants entiers et les identités remarquables, l'existence d'une soustraction et d'une division. La seule véritable nouveauté est la suivante :

Propr. • On a $\mathrm{i}^2=-1$.
Plus précisément, les solutions de l'équation $z^2=-1$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, sont les nombres i et $-$i.

Démo. ⇝ En calculant la forme algébrique de z^2 et en identifiant partie réelle et partie imaginaire.

$\mathbb{C}$ apporte deux nombres dont le carré est égal à -1, qui n'existaient pas dans $\mathbb{R}$ du fait de la règle des signes. i permet maintenant de factoriser des expressions qui n'étaient pas factorisables dans $\mathbb{R}$.

Propr. • Soit a et b deux nombres réels. Alors : $a^2+b^2=(a-\mathrm{i}\,b)(a+\mathrm{i}\,b)$.

Démo. ⇝ $a^2+b^2=a^2-(-1)\,b^2=a^2-\mathrm{i}^2\,b^2=a^2-(\mathrm{i}\,b)^2=(a-\mathrm{i}\,b)(a+\mathrm{i}\,b)$.

Deux conséquences importantes de cette égalité remarquable :

1) Les équations du deuxième degré à discriminant strictement négatif admettent désormais deux solutions complexes.

2) On peut déterminer la forme algébrique de l'inverse et du quotient.
Si $z=a+\mathrm{i}\,b\neq 0$ et $z'=c+\mathrm{i}\,d$, alors

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+\mathrm{i}\,b}=\frac{a-\mathrm{i}\,b}{(a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b)}=\frac{a-\mathrm{i}\,b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\,\frac{b}{a^2+b^2}$$
$$\frac{z'}{z}=\frac{c+\mathrm{i}\,d}{a+\mathrm{i}\,b}=\frac{(c+\mathrm{i}\,d)(a-\mathrm{i}\,b)}{(a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b)}=\frac{(a\,c+b\,d)+\mathrm{i}(a\,d-b\,c)}{a^2+b^2}=\frac{a\,c+b\,d}{a^2+b^2}+\mathrm{i}\,\frac{a\,d-b\,c}{a^2+b^2}$$

***Exercice* 1** ► Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+7=0$.

Attention ! **Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas d'ordre entre les nombres.**

- Les symboles $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ et $>$ n'ont pas de sens entre deux nombres complexes,
- Un nombre complexe non réel n'est ni positif, ni négatif.
- Un nombre complexe non réel ne peut pas apparaître dans un tableau de signe ou un tableau de variation.

I.3 Le plan complexe

Rappel Si l'on munit une droite D d'un point origine O et d'un vecteur unité $\vec{e}$, à chaque point M de la droite correspond un nombre réel x et inversement :

La correspondance entre nombres et points se généralise aux nombres complexes, à la différence notable que les points varieront dans le plan.

On suppose à partir de maintenant que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Déf. • À tout nombre complexe z de forme algébrique $a + \mathrm{i}\,b$, on associe le point M de coordonnées cartésiennes (a, b) et le vecteur $\vec{u}$ de mêmes coordonnées.
On dit alors que **M est le point associé à z** et que **$\vec{u}$ est le vecteur associé z**.
Inversement, on dit que **z est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{u}$.**

Illustration.

Notation ✐ On note la plupart du temps z_M l'affixe du point M. Il arrive que l'on écrive $M(z)$ pour indiquer que z est l'affixe du point M.

Rem. ◇ z est réel si et seulement si le point M associé se trouve sur l'axe des abscisses : cet axe est appelé l'**axe réel.** De même z est imaginaire pur si et seulement si M est sur l'axe des ordonnées, qui est appelé l'**axe des imaginaires purs.** Dans ce contexte, le plan est appelé le **plan complexe.**

Un nombre complexe est entièrement déterminé par sa partie réelle et sa partie imaginaire, de même que les points et les vecteurs sont déterminés par leurs coordonnées cartésiennes. Identifier un nombre complexe revient donc à identifier les objets géométriques associés.

Thm • Théorème d'identification géométrique
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs points associés (resp. leurs vecteurs associés) sont confondus.

Addition et soustraction de nombres complexes s'interprètent géométriquement, ainsi que le produit d'un complexe par un réel.

Propr. • Soit z et z' deux nombres complexes,
A et B les points associés à ces complexes,
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs associés. Alors :

1) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$,
2) Pour tout réel k, le vecteur $k\,\vec{u}$ a pour affixe $k\,z$,
3) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = z' - z$.

Illustrations.

Rem. ◇ En revanche, le produit de deux nombres complexes quelconques n'est pas aussi simple à interpréter.

***Exercice* 2** ► Soit A et B deux points du plan d'affixes z_A et z_B. Montrer que le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

I.4 Conjugué d'un nombre complexe

Déf. • Conjugué d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $a + \mathrm{i}\,b$. On appelle **conjugué de z** et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - \mathrm{i}\,b$.

Illustration.

Le point M' associé au nombre complexe $\bar{z}$ est le symétrique du point M, associé à z, par rapport à l'axe réel.

Quelques propriétés de base de la conjugaison...

Propr. • Pour tout nombre complexe z :

1) $\overline{(\bar{z})} = z$.

2) Calcul de la partie réelle et de la partie imaginaire

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Propr. • Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \bar{z} = z \\ z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \bar{z} = -z. \end{aligned}$$

La conjugaison se comporte bien avec toutes les opérations.

Propr. • Compatibilité de la conjugaison avec les opérations

Pour tous nombres complexes z et z' :

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z-z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

2) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$.

3) Si de plus $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\bar{z}}$.

II Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Nous avons vu que les nombres complexes sont associés aux points du plan complexe. À la *forme algébrique* du complexe z (partie réelle, partie imaginaire) répondent les *coordonnées cartésiennes* du point M (abscisse, ordonnée).

Dans le cours de trigonométrie, nous avons rappelé que les points pouvaient également être repérés à l'aide de leurs *coordonnées polaires* (rayon polaire, angle polaire). Leurs analogues complexes sont le module et les arguments, qui constituent la *forme trigonométrique* d'un nombre complexe.

II.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Déf. • Soit z un nombre complexe non nul, M son point associé. On appelle :

1) **module de z** la distance OM,

2) **argument de z** toute mesure (en radians) de l'angle $(\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$.

On note $|z|$ le module de z et $\arg(z)$ un argument quelconque de z.

Illustration.

Module et argument de z constituent donc un **couple de coordonnées polaires** du point M associé à z.

Rem. ◇ **1)** Un nombre complexe admet une infinité d'arguments, qui sont congrus entre eux modulo 2π. En pratique, on ne doit pas parler de l'argument d'un complexe mais d'**un** argument. Les arguments sont toujours calculés à l'aide de congruences modulo 2π.

2) Quand $z = 0$, le point M est en l'origine du repère. La distance OM vaut 0, et on décide que 0 a pour module 0. En revanche l'angle $(\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$ n'existe pas donc 0 n'a pas d'argument.

3) Si $\vec{u}$ est le vecteur associé à z, le module de z est $\|\vec{u}\|$, norme du vecteur $\vec{u}$, et un argument de z est une mesure de l'angle $(\vec{e}_x, \vec{u})$.

***Exercice* 3** ► Déterminer le module et un argument des nombres complexes

$$z_1 = 3 - 3\,\mathrm{i}, \quad z_2 = -4, \quad z_3 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}, \quad z_4 = 1.$$

On retiendra la petite propriété suivante :

Propr. • Soit z un nombre complexe non nul. Alors

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0 \ [\pi] \quad \text{et} \quad z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi].$$

Comme un point peut être localisé à l'aide de ses coordonnées polaires, on en déduit un nouveau théorème d'identification :

Thm • Théorème d'identification trigonométrique

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont des modules égaux et des arguments congrus modulo 2π.

Le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes nous permet de calculer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe à l'aide de son module et d'un de ses arguments. Si $|z| = r$ et que $\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$, alors

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = r\cos(\theta) \\ \mathrm{Im}(z) = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Inversement, une écriture habilement factorisée de la forme algébrique permet d'obtenir module et argument :

Thm • Soit z un nombre complexe non nul, r et θ deux réels.
Alors : $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$ si et seulement si

$$z = r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) \quad \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Une telle écriture de z est appelée la **forme trigonométrique de z.**

***Exercice* 4** ► Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + 4\mathrm{i}$.

II.2 Propriétés du module

Propr. • Module d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\,b$.
Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Démo. ➾ Il suffit d'utiliser la formule de calcul de distance dans un repère orthonormé (voir les notes de cours).

Rem. ◇ La notation est la même que pour la valeur absolue d'un nombre réel. Cela ne pose pas de problème car si $z = a \in \mathbb{R}$, le module de z (vu comme nombre complexe) est égal à $\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$, valeur absolue du réel a.

Propr. • Signe et nullité du module
Soit z un nombre complexe. Alors :
1) $|z|$ est un réel positif ;
2) Un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul.

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

Propr. • Expression du module à l'aide du conjugué
Pour tout nombre complexe z :
1) Le nombre complexe $z \times \overline{z}$ est en fait un réel positif,
2) $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

On arrive à une idée importante, qui reviendra par la suite : **la forme trigonométrique se comporte bien avec les opérations multiplicatives.**

Propr. • Module du conjugué, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance
Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :
1) $|\bar{z}| = |z|$
2) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
3) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
4) Si $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ (reste valable pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ si de plus $z \neq 0$).

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

À l'aide du module, on peut démontrer très élégamment le théorème du produit nul pour les nombres complexes, essentiel à la résolution d'équations.

Propr. • Intégrité du produit de complexes
Soit z et z' deux nombres complexes.
Alors $z \times z' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

Voyons maintenant quelques inégalités portant sur les modules (il n'y a **pas d'inégalités entre nombres complexes,** mais entre leurs modules, qui sont des réels, cela ne pose aucun problème).

Propr. • Parties réelles, imaginaires et module
Soit z un nombre complexe.
1) On a $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$;
2) On a $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

Propr. • Inégalité triangulaire
Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :
1) On a toujours $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
2) $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z = 0$ ou $\exists \lambda \geqslant 0,\ z' = \lambda z$.

Illustr. ✐

Rem. ◇ Le cas d'égalité correspond aux situations où les vecteurs associés à z et z' sont **colinéaires et de même sens.**

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

II.3 Propriétés des arguments

On commence par une constatation simple, de nature géométrique.

Propr. • Argument du conjugué
Soit z un nombre complexe non nul. Alors : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Illustration.

On montre maintenant que l'argument transforme les produits en sommes.

Thm • Argument d'un produit
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi].$$

Démo. À l'aide des formules d'addition.

Coroll. • Conséquences de l'argument d'un produit
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors :
1) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
2) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$.

Démo. Sur les notes de cours.

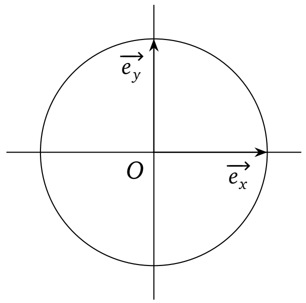
On retrouve l'idée que **la forme trigonométrique est particulièrement adaptée aux opérations multiplicatives.**

II.4 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Jusque là, l'exponentielle est fonction agissant sur les *nombres réels* x et produisant des *nombres réels strictement positifs* e^x. On décide de donner un sens à l'écriture $e^{i\theta}$, $i\theta$ étant un imaginaire pur.

Déf. • Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $\mathbf{e^{i\theta}}$ par : $\mathbf{e^{i\theta}} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Exemples



$$e^{i0} = 1$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{i2\pi} = 1$$
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Forme algébrique et forme trigonométrique de $e^{i\theta}$ sont claires :

Propr. • Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \cos(\theta), \\ \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \sin(\theta), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left|e^{i\theta}\right| = 1, \\ \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta\ [2\pi]. \end{cases}$$

Voyons maintenant pourquoi on a choisi cette écriture exponentielle : la notation $e^{i\theta}$, comme l'exponentielle réelle, transforme les sommes en produits.

Propr. • **Propriétés calculatoires de la notation $\mathbf{e^{i\theta}}$**
Soit θ et θ' deux nombres réels, n un nombre entier relatif. Alors :

1) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ **3)** $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$,
2) $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$, **4)** $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$.

Démo. On montre que les deux membres de chaque égalité ont le même module et des arguments congrus modulo 2π en utilisant les propriétés calculatoires des modules et des arguments.

Attention On perd toutefois la propriété que « toute exponentielle est un réel strictement positif » : $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 et n'a donc pas de signe.

Tout nombre de la forme $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1. Nous allons constater que la réciproque est vraie.

Déf. • On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\right\} = \left\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Propos. • Soit $z \in \mathbb{C}$, M son image dans le plan complexe.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $z \in \mathbb{U}$,
2) $|z| = 1$,
3) Le point M se trouve sur le cercle trigonométrique,
4) z peut s'écrire $e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle représentation des nombres complexes, voisine de la forme trigonométrique.

Propr. • Forme exponentielle d'un nombre complexe
Soit z un nombre complexe non nul, r et θ deux réels. Alors :

$$z = r\,e^{i\theta} \ \underline{\textbf{où } r > 0} \iff \begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

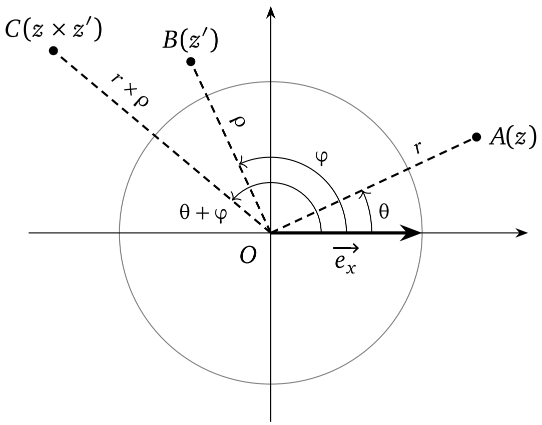
Dans ces conditions, l'écriture $r\,e^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle de z.**

En pratique, **on préférera désormais la forme exponentielle à la forme trigonométrique** car elle est plus pratique pour effectuer les opérations multiplicatives.

Exercice **5** ► Soit n un entier naturel quelconque. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe

$$z = \frac{(1+i)^n}{\sqrt{3} - i}.$$

Interprétation graphique du produit de nombres complexes



Si z et z' ont pour formes exponentielles

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z' = \rho\,e^{i\varphi},$$

alors le produit $z \times z'$ a pour forme trigonométrique

$$z \times z' = (r \times \rho)\,e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Sur le schéma, on a placé les points A, B et C associés respectivement aux nombres complexes z, z' et $z \times z'$.

II.5 Applications à la trigonométrie

La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, écrite sans exponentielle, donne la formule suivante :

Propr. • Formule de Moivre
Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$: $\quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Exercice **6** ► En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Quelles formules de trigonométrie élémentaire auraient permis d'arriver à ce résultat ?

D'autres problèmes trigonométriques peuvent être traités efficacement en exploitant les liens entre $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ rappelés ici :

Propr. • Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad$ et $\quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$.
2) Formules d'Euler : $\quad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

<u>Pour linéariser des expressions trigonométriques :</u>

1) Utiliser les formules d'Euler pour remplacer tous les sinus et les cosinus par des écritures exponentielles.
2) Tout développer : pour être efficace, regrouper les dénominateurs en tête de calcul, utiliser les égalités remarquables et développer en ordonnant les termes.
3) Apparier les expressions conjuguées $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$ à l'aide des formules d'Euler « réciproques » :

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin(\varphi).$$

Exercice **7** ► Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^5(\theta)$ et $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$.

<u>Pour factoriser $\pm 1 \pm e^{i\theta}$:</u>

1) Factoriser par $e^{i\theta/2}$ (astuce de « l'arc moitié »),
2) Utiliser une formule d'Euler pour regrouper les termes,
3) S'il reste $\pm i$ en facteur, l'écrire $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ et le regrouper avec $e^{i\theta}$.

Exercice **8** ► **1)** Appliquer la méthode ci-dessus pour factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.
2) Déterminer le module et un argument de $e^{i\frac{3\pi}{5}} - 1$.

II.6 Exponentielle complexe

Les écritures e^x et $e^{i\theta}$ ont toutes les deux un sens pour x et θ des réels, et ces deux écritures transforment les sommes en produit. Nous allons prolonger l'exponentielle une dernière fois et donner un sens à l'écriture e^z pour **tout nombre complexe z.**

Déf. • Soit z un nombre complexe quelconque, de forme algébrique $z = x + i\,y$.
On définit l'**exponentielle complexe de z** par

$$\mathbf{e^z} = e^{x+iy} = e^x\,e^{iy}.$$

Le nombre e^z peut également être noté **exp(z).**

Ex. ✻ Si $z = \ln(3) - i\,\frac{\pi}{4}$, alors $e^z = \exp\big(\ln(3) - i\,\frac{\pi}{4}\big) = e^{\ln(3)}\,e^{-i\pi/4} = 3(1-i)$.

Puisque e^x est un réel strictement positif, la définition de e^z donne ce nombre complexe directement sous sa forme trigonométrique. Par conséquent, son module et son argument sont évidents :

Propr. • Soit x et y deux nombres **réels.** Alors :

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \quad \text{et} \quad \arg(e^{x+iy}) \equiv y \ \ [2\pi].$$

L'exponentielle complexe vérifie la propriété fondamentale des exponentielles :

Propr. • Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Démo. ⤳ Ces deux nombres sont égaux car ils ont même module et même argument d'après la propriété précédente : détails sur les note de cours.

De cette propriété fondamentale, on tire les mêmes conséquences que pour l'exponentielle réelle :

Coroll. • Soit z et z' deux nombres complexes, n un entier relatif. Alors :

$$e^{-z} = 1/e^z, \quad e^{z-z'} = e^z/e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{nz} = (e^z)^n.$$

Exercice **9** ► Déterminer tous les nombres complexes z tels que $e^z = \sqrt{3} - i$.

III Résolution d'équations algébriques

III.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Déf. • Soit u un nombre complexe quelconque. <u>Une</u> **racine carrée complexe de u** est un nombre complexe z tel que $z^2 = u$.

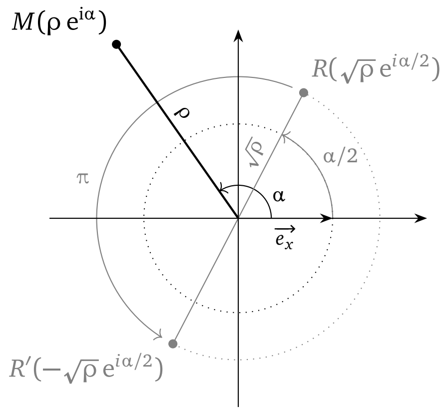
Ainsi, quand on cherche les racines carrées complexes d'un nombre complexe u, on cherche à résoudre l'équation $z^2 = u$.

Quand la forme trigonométrique de u est donnée ou simple à trouver :
on résout l'équation $z^2 = u$ d'inconnue z en cherchant z sous forme trigonométrique et en identifiant modules et arguments **<u>modulo 2π.</u>**

Exercice **10** ► Déterminer les racines carrées complexes de $u = 2\,e^{i\pi/5}$.

Thm • Nombre de racines carrées complexes
Soit u un nombre complexe.
1) Si $u \neq 0$, alors u admet exactement deux racines carrées complexes dont l'une est l'opposée de l'autre ;
2) si $u = 0$, sa seule racine carrée complexe est 0.

Représentation graphique des racines carrées complexes de $u = \rho\,e^{i\alpha}$



On ne privilégie aucune racine carrée complexe par rapport à l'autre, ce qui explique qu'il n'y ait pas de notation pour les racines carrées complexes. **Il est <u>strictement interdit</u> d'écrire $\sqrt{z}$ lorsque z est un nombre complexe quelconque !** La notation $\sqrt{\cdot}$ ne peut être appliquée qu'à un nombre réel positif.

Pour rechercher les racines carrées complexes sous forme algébrique :

1) On pose $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels,
2) On calcule z^2 pour obtenir sa partie réelle et sa partie imaginaire,
3) On écrit que $z^2 = u$ si et seulement si z^2 et u ont même partie réelle, même partie imaginaire **<u>et même module</u>** (astuce qui va rendre les calculs bien plus agréables).

Exercice **11** ► Déterminer les racines carrées complexes de $u = -5 - 12i$.

III.2 Résolution d'équations du deuxième degré à coefficients complexes

Le formulaire vu au lycée pour résoudre les équations du deuxième degré et factoriser les polynômes du deuxième degré se généralise au cas où les coefficients sont complexes. La seule distinction est qu'il faut ici extraire une racine carée **complexe** du discriminant.

Thm • Soit a, b et c trois coefficients **complexes** tels que $a \neq 0$, ainsi que l'équation

$$(E) \quad a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{C}.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de P.

∗ **1**

∗ **1er cas : si $\Delta \neq 0$,** on détermine δ une racine carrée complexe de Δ. (E) admet deux solutions complexes distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

et le polynôme du deuxième degré se factorise ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}, \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\Big(x - \frac{-b+\delta}{2a}\Big)\Big(x - \frac{-b-\delta}{2a}\Big).$$

∗ **2e cas : si $\Delta = 0$,** (E) admet une solution « double » $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et le polynôme du deuxième degré se factorise :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}, \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2.$$

Exercice **12** ► Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$: $x^2 + i\,x + 1 + 3i = 0$.

Les relations entre coefficients et racines restent les mêmes.

Thm • Relations entre coefficients et racines

1) Soit a, b, c trois coefficients complexes tels que $a \neq 0$. Alors les zéros x_1 et x_2 du polynôme $a\,x^2 + b\,x + c$ vérifient :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

2) Soit S et P deux nombres complexes quelconques, u et v deux inconnues complexes. Alors :

$$\begin{cases} u + v = S \\ u \times v = P \end{cases} \iff \begin{array}{c} u \text{ et } v \text{ sont les racines} \\ \text{du polynôme } x^2 - S\,x + P. \end{array}$$

Exercice **13** ► Chercher deux nombres complexes dont la somme vaut $3i$ et le produit vaut 10.

III.3 Racines n-ièmes complexes

Déf. • Soit u un nombre complexe quelconque, n un entier strictement positif. **Une racine n-ième complexe de u** est un nombre complexe z tel que $z^n = u$.

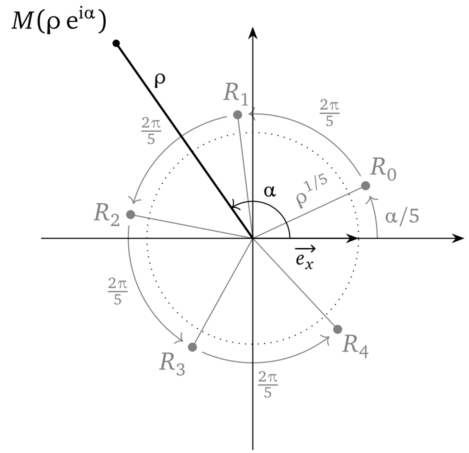
Rem. ◇ Pour $n = 2$, on parle de racines **carrées,** pour $n = 3$, de racines **cubiques,** pour $n = 4$, de racines **quatrièmes** etc.

Attention **Il n'y a pas de notation pour désigner les racines n-ièmes complexes d'un nombre. Il est interdit d'écrire $\sqrt[n]{u}$ ou $u^{1/n}$.** Ces notations sont réservées aux cas où u est un réel positif.

Chercher les racines n-ièmes d'un complexe u revient à résoudre l'équation $z^n = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Il n'existe pas de méthode générale pour obtenir z sous forme algébrique. En revanche, sous forme trigonométrique, la méthode est semblable à celle pour les racines carées.

Exercice **14** ► Déterminer les racines cubiques complexes de $u = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Représentation graphique des racines n-ièmes complexes de $u = \rho\, e^{i\alpha}$



Pour le cas $n = 5$: La première racine cinquième du nombre complexe sous sa forme trigonométrique

$$u = \rho\, e^{i\alpha}$$

est donnée par :

$$r_0 = \rho^{1/5}\, e^{i\alpha/5}.$$

Les autres racines cinquièmes de u s'obtiennent en la multipliant par les puissances de $\omega = e^{i2\pi/5}$. Ce sont les

$$r_k = r_0\, \omega^k$$

pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

Déf. • Racines n-ièmes de l'unité

Soit n un entier strictement positif.

1) Une **racine n-ième de l'unité** est une racine n-ième complexe du nombre 1.

2) On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}.$$

Les racines n-ièmes de l'unité se déterminent, sous forme trigonométrique, comme n'importe quelles racines n-ièmes (fait sur les notes de cours). On retiendra le résultat :

Thm • Liste des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

Il y en a exactement n distinctes.

On a donc par conséquent $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

Représentation graphique des racines n-ièmes de l'unité

- Cas où $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$: traités sur les notes de cours
- En règle générale, les points associés aux racines n-ièmes de l'unité sont les sommets du polygône régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité, dont un des sommets a pour affixe 1.

IV Utilisation des nombres complexes en géométrie

Dans toute cette partie, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \mathrm{i}, æ)$. Sauf indication contraire, l'affixe d'un point M est noté z_M et l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $z_{\vec{u}}$.

IV.1 Affixe d'un vecteur. Liens entre distances et modules.

On commence par rappeler deux propriétés utiles :

Propr. • **1)** Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même affixe.

2) Étant donné deux points du plan A et B, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Exercice **15** ► Soit P, Q et R trois points d'affixes $z_P = \sqrt{3} + i$, $z_Q = \sqrt{3} - i$ et $z_R = -2i$.

1) Placer les points précisément dans le plan complexe.

2) Montrer que $OPQR$ est un parallélogramme.

On rappelle que le module d'un complexe représente la distance de l'origine au point qui lui est associé, ainsi que la norme du vecteur qui lui est associé. Plus généralement :

Propr. • Distance entre deux points sous forme de module

Soit A et B deux points du plan. La distance de A à B est donnée par : $AB = |z_B - z_A|$.

Démo. La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc le module de son affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Exercice **16** ► (suite de l'exercice précédent)

3) Montrer que $OPQR$ est un losange.

Si Ω est un point du plan et que r est un réel positif, le cercle (resp. le disque) de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M tels que la distance ΩM est égale (resp. est inférieure) à r.

Ceci motive les définitions suivantes :

Déf. • Cercle et disques

Soit ω un nombre complexe quelconque et r un réel positif.

1) Le **cercle de centre ω et de rayon r** est l'ensemble des nombres complexes z qui vérifient $|z - \omega| = r$.

2) Le **disque de centre ω et de rayon r** est l'ensemble des nombres complexes z qui vérifient $|z - \omega| \leqslant r$.

Ex. ✻ Le cercle de centre 0 (zéro) est de rayon 1 n'est autre que l'ensemble $\mathbb{U}$.

L'intérêt de cette généralisation est le suivant : si M est un point quelconque du plan, il se trouve sur le cercle de centre Ω et de rayon r si et seulement si son affixe z_M se trouve sur le cercle de centre z_Ω (affixe de Ω) et de même rayon. La même chose vaut pour les disques.

IV.2 Liens entre arguments et mesures d'angles

Rappel : si z est l'affixe du point M (resp. du vecteur $\vec{u}$), son argument est une mesure de l'angle orienté $(\mathrm{i}, \overrightarrow{OM})$ (resp. de l'angle $(\mathrm{i}, \vec{u})$). On peut exprimer plus généralement la mesure de n'importe quel angle sous forme d'argument d'un nombre complexe.

Propr. • Mesure d'un angle orienté sous forme d'argument

Soit A, B, C, D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Alors : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Exercice **17** ► (suite de l'exercice précédent)

4) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$.

Coroll. • Caractérisation du parallélisme, de l'orthogonalité et de l'alignement

Mêmes hypothèses sur les points A, B, C, D.

1) (AB) est perpendiculaire à (CD) si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

2) (AB) est parallèle à (CD) si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

En supposant que $A \neq B$ et $A \neq C$:

3) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Exercice **18** ► (suite de l'exercice précédent)

5) Démontrer d'une autre façon que $OPQR$ est un losange.

IV.3 Transformations du plan et leur forme complexe

IV.3.1 Notion de transformation du plan

Une **transformation du plan** est un procédé qui transforme chaque point M du plan en un autre point M' du plan. Une transformation du plan est donc une fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont tous les deux l'ensemble $\mathscr{P}$ des points du plan :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' = \Phi(M). \end{aligned}$$

Comme pour les fonctions réelles, on peut parler d'image ou d'antécédent(s) d'un point par une transformation Φ.

Un exemple de transformation est **la symétrie d'axe (Ox).** Elle transforme chaque point M en son image M' qui a la même abscisse que le point M et l'ordonnée opposée.

Les transformations peuvent être décrites à l'aide des nombres complexes. Notons z l'affixe du point M et z' celui du point M'. M' sera l'image de M par la symétrie d'axe (Ox) si et seulement si on a la relation $z' = \overline{z}$.

Pour cette raison, on dit que la **forme complexe de la symétrie d'axe (Ox) est la fonction :** $\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z}. \end{aligned}$

IV.3.2 Translations

Déf. • Translation de vecteur $\vec{u}$

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

La **translation de vecteur $\vec{u}$** est la transformation du plan qui associe à chaque point M le point M' vérifiant : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Illustration

Propr. • Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a,

M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z'.

Alors M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si

$$z' = z + a.$$

La forme complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est donc l'application

$$z \longmapsto z' = z + a.$$

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

IV.3.3 Homothéties planes

Déf. • Homothétie de centre Ω et de rapport k

Soit Ω un point du plan,

k un nombre réel non nul.

L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** est la transformation du plan qui associe à chaque point M le point M' vérifiant :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

Illustration

Exercice **19** ► Prendre un point Ω quelconque et tracer l'image d'un triangle ABC par les homothéties de centre Ω et de rapports respectifs 2, $\frac{1}{2}$, -1, 1.

On retiendra : l'homothétie de centre Ω et...

- ... de rapport -1 est la symétrie de centre Ω ;
- ... de rapport 1 est l'identité du plan.

Une homothétie de centre Ω laisse le point Ω invariant.

Propr. • Soit Ω un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$,
k un réel non nul,
M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z'.

Alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

La forme complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est donc l'application

$$z \longmapsto z' = \omega + k(z - \omega).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **20** ► Soit A et B deux points d'affixes 2 et $1+i$. On appelle h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 3, h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{4}$.

1) Déterminer l'image du point M d'affixe i par la transformation h_1 puis par la transformation $h_2 \circ h_1$.

2) Même question pour le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ quelconque.

3) Prouver que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport k.

IV.3.4 Rotations planes

Déf. • **Rotation de centre Ω et d'angle θ**

Soit Ω un point du plan,
θ un nombre réel.

La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est la transformation du plan qui associe à chaque point M distinct de Ω le point M' vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]. \end{cases}$$

et qui laisse le point Ω invariant.

Illustration

On retiendra : la rotation de centre Ω et...

- ... d'angle 0 est l'identité du plan ;
- ... d'angle π est la symétrie de centre Ω.

Propr. • Soit Ω un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$,
θ un réel,
M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z'.

Alors M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ si et seulement si

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

La forme complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est donc l'application

$$z \longmapsto z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **21** ► Soit A et B deux points d'affixes 2 et $1+i$. On construit le point C tel que le triangle ABC soit un triangle équilatéral direct. Déterminer l'affixe du point C.