Intégration

Marc SAGE

17 mars 2006

Table des matières

1 Intégrales de Wallis

Calculer $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$ *et en donner un équivalent.*

Solution proposée.

On commence par obtenir une formule de récurrence en intégrant par parties : (la flèche indique le sens de dérivation)

$$\downarrow \begin{array}{cc} \sin^{n-1} & \sin \\ (n-1)\cos\times\sin^{n-2} & -\cos \end{array} \uparrow .$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n &= \left[-\sin^{n-1}\times\cos\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\times\cos^2 \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\times\left(1-\sin^2\right) \\ I_n &= (n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right) \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

Sachant que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on trouve, selon la parité de n, et en complétant les factorielles :

$$\left\{ \begin{array}{c} I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot 1}{2n(2n-2)...4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-3)...3} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!} \end{array} \right. .$$

En utilisant la notation $n!! = n(n-2)(n-4)...$, on peut abréger en

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1+(-1)^n}{2}}.$$

Pour obtenir l'équivalent, on observe déjà que la suite (I_n) est décroissante, d'où $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$; comme de plus $I_{2n+1} \sim I_{2n-1}$, on a $I_{n+1} \sim I_n$, indépendamment de la parité de n. En introduisant le produit $I_{2n}I_{2n+1}$ (qui se simplifie bien), on trouve

$$I_{2n+1} \sim I_{2n} \sim \sqrt{I_{2n}I_{2n+1}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}}{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}},$$

ce qui se résume en l'unique formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque. La connaissance des intégrales de Wallis aide à trouver un équivalent de la factorielle. Il s'agit de la *formule de Stirling*, démontrée dans la feuille sur les DLs :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2 Dérivabilité et sommes de Riemann

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, dérivable en* 0*, et telle que* $f(0) = 0$*. On se donne un réel* $\alpha > 0$*. Étudier la limite de la suite*

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right).$$

Solution proposée.

f étant dérivable en 0, on peut écrire $f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right) = f(0) + \frac{1}{n+i\alpha} f'(0) + o\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right)$. Or, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il y a par définition du $o(\cdot)$ un n au-delà duquel

$$\sum_{i=1}^{n} \left| o\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right)\right| < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i\alpha}\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\varepsilon = \varepsilon,$$

ce qui permet de négliger la somme mettant en jeu le $o(\cdot)$. Par ailleurs, la somme du milieu met en jeu des sommes de Riemann :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}\alpha} \xrightarrow{n\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x\alpha} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Il en résulte

$$\lim_{n\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right) = f'(0) + \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

3 Intégration, convexité, géométrie...

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue. Montrer que*

$$\sqrt{1+\left(\int_0^1 f\right)^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+f^2} \leq 1 + \int_0^1 f,$$

préciser les cas d'égalité et donner une interprétation géométrique.

Solution proposée.

L'inégalité de droite est immédiate en écrivant

$$\int_0^1 \sqrt{1+f^2} \leq \int_0^1 (1+f) = 1 + \int_0^1 f$$

(noter que l'on a utilisé $f \geq 0$).

Pour celle de gauche, on peut la réécrire sous la forme

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f \text{ où } \varphi(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

On va donc utiliser Jensen (inégalité de convexité). Vérifions que φ est convexe. La dérivée $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ varie comme son carré $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ qui est bien croissant, d'où le résultat.

On a égalité à droite ssi $\sqrt{1+f^2} = 1+f$, *i.e.* ssi $f \equiv 0$. À gauche, puisque φ est strictement convexe, on a égalité ssi f est constante.

Concernant l'interprétation géométrique, l'idée est de voir le $\int \sqrt{1+f^2}$ comme

$$\int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{dx^2+dy^2} = \int ds = L$$

la longueur du graphe d'une certaine fonction $y(x)$. On pose $F(x) = \int_0^x f$ une primitive de f. Les inégalités à montrer se mettent sous la forme

$$\sqrt{1+F(1)^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+(F')^2} \leq 1 + F(1).$$

L'inégalité de gauche nous dit maintenant que le plus court chemin de l'origine au point $(1, F(1))$ est la ligne droite, ce qui fournit au passage le cas d'égalité F linéaire $\implies$ f constante. L'inégalité de droite se voit en remarquant que F croît par positivité de f, et donc la longueur de son graphe ne saurait dépasser celle du chemin $(0,0) \longrightarrow (0, F(1)) \longrightarrow (1, F(1))$.

4 Intégration contre un polynôme

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b f(x)\, x^p dx = 0$ pour tout p dans $\{0,...,n\}$. Montrer que f a au moins $n+1$ zéros.

Solution proposée.
Par linéarité, l'hypothèse peut se réécrire $\int fP = 0$ pour tout polynôme de degré $\leq n$. Si f s'annule au plus n fois, on peut considérer les zéros $\xi_1, ..., \xi_m$ où f change de signe, avec $0 \leq m \leq n$. Mais alors la fonction $f(x) \prod_{i=1}^m (x - \xi_i)$ est de signe constant, d'intégrale nulle, donc est nulle partout : *contradiction.*

5 Étude d'une somme

Déterminer la limite de la somme $\sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \sin \frac{i}{n^2}$.

Solution proposée.
On sent que pour n grand le terme $\sin \frac{i}{n^2}$ va se rapprocher rapidement de $\frac{i}{n^2}$, ce qui permettra d'écrire

$$\sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \sin \frac{i}{n^2} \simeq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \sin \frac{i}{n} \right) \longrightarrow \int_0^1 \mathrm{Id} \times \sin = \sin 1 - \cos 1.$$

Formalisons cela, en se rappelant que $\sin x = x + o\left(x^2\right)$ autour de 0 :

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \sin \frac{i}{n^2} - \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \sin \frac{i}{n} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \left| \sin \frac{i}{n^2} - \frac{i}{n^2} \right| \leq \sum_{i=1}^n o\left(\frac{i^2}{n^4} \right) = o\left(\frac{1}{n} \right) \longrightarrow 0.$$

6 Une inégalité avec des carrés

Soit f $\mathcal{C}^1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2 \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_a^b f'^2$$

et préciser le cas d'égalité.

Solution proposée.
Une inégalité, des intégrales, des carrés... Le nom de Cauchy-Schwarz doit venir sans même y penser. Il y a plusieurs façons de démarrer, nous en proposons une qui aboutit rapidement

On part de l'idée suivante : pour aller du terme de gauche au terme de droite, il faut faire apparaître du f' à partir de f ; on fait par conséquent apparaître f comme une primitive de f' :

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b \left(\int_a^x f' \right)^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x 1 \int_a^x f'^2 \right) dx \leq \int_a^b \left((x-a) \int_a^b f'^2 \right) dx = \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_a^b f'^2.$$

Pour le cas d'égalité, la seconde inégalité impose $f' = 0$ sur $[x,b]$ pour tout $x \in [a,b]$, *i.e.* $f' = 0 \iff f \equiv f(a) = 0$.

7 Une idée à retenir en théorie des nombres

Montrer que pour tous réels $a_0, ..., a_n$ on a

$$\sum_{i,j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geq 0.$$

Solution proposée.

L'idée est de remplacer l'inverse $\frac{1}{n}$ par une intégrale $\int_0^1 x^{n-1} dx$. L'intérêt est double : les opérations algébriques (en particulier la somme) passent mal à l'inverse tandis que les polynômes, ça on connaît, et par ailleurs cette manipulation va permettre de découpler les indices i et j dans $\frac{1}{i+j+1}$ afin de scinder la sommation sur i, j en un produit de deux sommes :

$$\sum_{i,j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j \int_0^1 x^{i+j} dx = \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n} a_i x^i a_j x^j dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)^2 dx \geq 0.$$

8 Inégalité de Hardy

Soit (u_n) une suite réelle de carré sommable, i.e. *telle que $\sum_{n \geq 0} u_n^2 < \infty$. Montrer que*

$$\sum_{p,q \geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{n \geq 0} u_n^2.$$

On pourra utiliser une paramétrisation polaire pour l'intégrale d'une fonction sur $[-1, 1]$.

Solution proposée.

Afin de donner un sens à la somme $\sum_{p,q \geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$, on commence par borner les indices p et q, mettons $\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$. Ensuite, on procède comme dans l'exercice précédent :

$$\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1} = \sum_{p,q=0}^{n} u_p u_q \int_0^1 x^{p+q} dx = \int_0^1 \sum_{p,q=0}^{n} (u_p x^p)(u_q x^q) dx = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n} u_p x^p \right)^2 dx = \int_0^1 P^2$$

où P désigne le polynôme à coefficients réels $\sum_{i=0}^{n} u_i X^i$. On suit alors l'indication de l'énoncé :

$$\int_0^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i} \int_0^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) d\left(e^{i\theta}\right) = -i \int_1^{-1} f = i \int_{-1}^{1} f.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P^2 &\leq \int_{-1}^{1} P^2 = \left| \int_{-1}^{1} P^2 \right| = \left| \frac{1}{i} \int_0^{\pi} P^2\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) \overline{P\left(e^{i\theta}\right)} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) P\left(\overline{e^{i\theta}}\right) d\theta = \int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{n} u_p e^{ip\theta} \sum_{q=0}^{n} u_q e^{-iq\theta} d\theta = \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^{n} u_p u_q \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)\theta} d\theta}_{=2\pi\delta_p^q} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} u_p^2 2\pi = \pi \sum_{p=0}^{n} u_p^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers ∞.

Remarquer que les mêmes calculs en remplaçant u_n par $|u_n|$ donnent la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_p u_q}{p+q+1} \right)_{p,q \geq 0}$, ce qui permet de regrouper comme on le souhaite et justifie *a posteriori* le passage à la limite.

9 Intégrale géométrique d'une fonction

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^+$. Étudier la limite $\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a}$ lorsque α tend vers 0.

Solution proposée.
On pense immédiatement aux moyennes d'ordre α définies pour un nombre fini de réels positifs $x_1,...,x_n$ par

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}{n}}.$$

On sait que ces moyennes, les x_i étant fixés, tendent vers $\sqrt[n]{x_1...x_n}$ quand $\alpha\longrightarrow 0$. On va combiner ces résultats avec l'approximation d'une intégrale par ses sommes de Riemann pour intuiter notre limite, en intervertissant sans justifier les deux limites ci-après :

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a} &= \lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\infty}\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha}=\lim_{n\infty}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha}\\ &= \lim_{n\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)}=\lim_{n\infty}e^{\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que $\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a}$ tend bien vers $e^{\int_0^1\ln f}$ quand $\alpha\longrightarrow 0$.

Essayons de reprendre la preuve de $\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}{n}}\longrightarrow\sqrt[n]{x_1...x_n}$. L'idée était de faire un DL en α :

$$\frac{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}{n}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\alpha}{n}=\sum_{i=1}^n\frac{1+\alpha\ln x_i+o(\alpha)}{n}=1+\alpha\sum_{i=1}^n\frac{\ln x_i}{n}+o(\alpha),$$

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}{n}}=e^{\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\sum_{i=1}^n\frac{\ln x_i}{n}+o(\alpha)\right)}=e^{\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\sum_{i=1}^n\frac{\ln x_i}{n}+o(\alpha)\right)}=e^{\sum_{i=1}^n\frac{\ln x_i}{n}+o(1)}\longrightarrow\sqrt[n]{x_1...x_n}.$$

Essayons de calquer cela sur l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^a &= \int_0^1 f(t)^a\,dt\overset{?}{=}\int_0^1\left[1+\alpha\ln f(t)+o(\alpha)\right]dt=1+\alpha\int_0^1\ln f+o(\alpha),\\ \sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a} &= e^{\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\int_0^1\ln f+o(\alpha)\right)}=e^{\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\int_0^1\ln f+o(\alpha)\right)}=e^{\int_0^1\ln f+o(1)}\longrightarrow e^{\int_0^1\ln f}.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que $f(t)^a-1+\alpha\ln f(t)^a$ est bien un $o(\alpha)$, uniformément en $t\in[0,1]$. Pour cela, fixons un $\varepsilon>0$: d'une part $e^x-1-x=o(x)$, donc il y a un $\delta>0$ tel que $|x|<\delta\implies|e^x-1-x|<\varepsilon|x|$, d'autre part $\ln f$ est continue sur $[0,1]$ donc bornée, disons par M ; ainsi, pour $|\alpha|<\frac{\delta}{M}$, on a $|\alpha\ln f(t)|<\delta$ pour tout t dans $[0,1]$, d'où

$$\left|e^{\alpha\ln f(t)}-1-\alpha\ln f(t)\right|<\varepsilon|\alpha\ln f(t)|\leq\varepsilon\alpha M,\ \textit{CQFD.}$$

Si l'on connaît les théorèmes de dérivation sous le signe intégral, on peut donner une solution immédiate. Posons $F(\alpha)=\int_0^1 f^\alpha$. Tout est continu sous le signe $\int$, et on peut dériver en α : $F'(\alpha)=\int_0^1 f^\alpha\ln f$. On en déduit

$$\sqrt[a]{F(\alpha)}=e^{\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}}=e^{\frac{\ln\left(1+\alpha F'(0)+o(\alpha)\right)}{\alpha}}=e^{F'(0)+o(1)}\overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}e^{F'(0)}=e^{\int_0^1\ln f}.$$

10 Intégrale contre une oscillation rapide

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue par morceaux et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ T-péridique. Déterminer la limite

$$\lim_{n\infty}\int_0^1 f(t)\,\varphi(nt)\,dt.$$

Solution proposée.

Commençons par intuiter la limite. Quand n est grand, la période de $\varphi(n\cdot)$ tend vers 0, de sorte que $\varphi(n\cdot)$ est presque constante (le même motif se répète sur des bandes de largeur $\frac{T}{n}$), mettons $\varphi \simeq \lambda$. Pour calculer λ, il suffit d'écrire $\int_0^T \varphi \simeq \int_0^T \lambda$, d'où $\lambda \simeq \frac{1}{T}\int_0^T \varphi$. La limite demandée vaut donc (en agitant un peu les mains...)

$$\lim_{n\infty} \int_0^1 \varphi(n\cdot) f \simeq \frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f.$$

Pour montrer cela, on va se ramener à des bandes de largeur $\frac{T}{n}$ sur lesquelles φ aura le même comportement.

Observons avant toute chose que, φ étant continue sur $[0,T]$, elle y admet un majorant M, qui est aussi un majorant sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

Montrons le résultat pour $f = \chi_{[a,b]}$ une fonction caractéristique. On en déduira par linéarité le résultat sur les fonctions en escalier, puis on approchera f par de telles fonctions pour conclure.

Regardons le cas $f = \chi_{[a,b]}$:

$$\int_0^1 f(t)\varphi(nt)\,dt = \int_a^b \varphi(n\cdot).$$

Découpons $[a,b]$ en tranches $[a_i, a_{i+1}]$ de largeur $\frac{T}{n}$, mettons $a_i = a + \frac{iT}{n}$ pour tout $i = 0, ..., N$ tel que $a_i < b$; noter que $N = \left\lfloor \frac{n}{T}(b-a)\right\rfloor$. En faisant une translation de $\frac{T}{n}$, on voit que l'intégrale de $\varphi(n\cdot)$ est constante sur chacune des tranches $[a_i, a_{i+1}]$ et vaut par conséquent $\int_a^{a+\frac{T}{n}} \varphi(n\cdot)$; un changement de variable $u = nt$ (dilatation) donne alors

$$\int_a^{a+\frac{T}{n}} \varphi(nt)\,dt = \int_{na}^{na+T} \varphi(u)\frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int_0^T \varphi.$$

Il en résulte

$$\int_a^b \varphi(n\cdot) = N\int_a^{a+\frac{T}{n}} \varphi(n\cdot) + \int_{a_N}^b \varphi(n\cdot) = \frac{N}{n}\int_0^T \varphi + \int_{a_N}^b \varphi(n\cdot).$$

Le second terme peut être borné par $|b - a_N|\, M \leq \frac{MT}{n}$ et donc tend vers 0. Quand au premier terme, en écrivant $N = \frac{n}{T}(b-a) - \nu$ où ν est une partie fractionnaire (en particulier bornée par 1), on a

$$\frac{N}{n} = \frac{(b-a)}{T} - \frac{\nu}{n} \longrightarrow \frac{1}{T}\int f, \textit{ CQFD.}$$

Soit maitenant $\varepsilon > 0$ et f^* une fonction en escalier approchant f à $\frac{\varepsilon}{M}$ près. Regardons la différence entre ce qui se passe pour f et ce qui se passe pour f^* :

$$\left|\int_0^1 \varphi(n\cdot) f - \int_0^1 \varphi(n\cdot) f^*\right| \leq \int_0^1 |\varphi(n\cdot)|\,|f - f^*| \leq \int_0^1 M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Or, d'après ce qui précède, on a $\int_0^1 \varphi(n\cdot) f^* \longrightarrow \frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f^*$, qui vaut aussi $\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f$ à $M\varepsilon$ près :

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f^* - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi| \int_0^1 |f^* - f| \leq \frac{1}{T}\int_0^T M \int_0^1 \varepsilon = M\varepsilon.$$

Il reste à découper en trois bouts selon les résultats connus pour conclure :

$$\left|\int_0^1 \varphi(n\cdot) f - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f\right| \leq$$

$$\underbrace{\left|\int_0^1 \varphi(n\cdot) f - \int_0^1 \varphi(n\cdot) f^*\right|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\left|\int_0^1 \varphi(n\cdot) f^* - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f^*\right|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \int_0^1 f^* - \int_0^1 \varphi(n\cdot) f^*\right|}_{\leq M\varepsilon}.$$

11 Une inégalité

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles C^1 sur un segment $[a,b]$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall f \in E,\ \forall x \in [a,b]\,,\ \left| f(x)^2 - f(a)^2 \right| \leq C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

Démonstration.

L'énoncé peut faire peur, mais il s'agit juste de montrer une inégalité avec des carrés. Partons du membre de droite en complétant les carrés, ceci pour faire apparaitre un carré que l'on sait majorer (par 0...) et du ff' que l'on sait intégrer :

$$C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2 = \int_a^b \left(\sqrt{C} f - \sqrt{\varepsilon} f' \right)^2 + \sqrt{C\varepsilon} \int_a^b 2ff' \geq \sqrt{C\varepsilon} \left(f(b)^2 - f(a)^2 \right).$$

On obtient presque ce que l'on veut ; affinons un peu notre démarche. Vu le terme $\sqrt{C\varepsilon}$, il est raisonnable de prendre $C = \frac{1}{\varepsilon}$. De plus, il nous faudra découper l'intrégrale sur $[a,x]$ et $[x,b]$ si l'on souhaite faire apparaître un $f(x)^2$. Enfin, on remarque que le choix du signe de ce qui complète le carré est arbitraire. Ces remarques étant faites, en prenant α et β des signes à choisir, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2 &= \int_a^x \left(\sqrt{C} f - \alpha \sqrt{\varepsilon} f' \right)^2 + \alpha \int_a^x 2ff' + \int_x^b \left(\sqrt{C} f - \beta \sqrt{\varepsilon} f' \right)^2 + \beta \int_a^x 2ff' \\ &\geq \alpha \left(f(x)^2 - f(a)^2 \right) + \beta \left(f(b)^2 - f(x)^2 \right). \end{aligned}$$

On choisit alors α du signe de $f(x)^2 - f(a)^2$, et β de signe contraire à $f(b)^2 - f(x)^2$. La majoration voulue en découle.

L'exercice suivant apparaît déjà dans la convexité, mais il est tellement formateur...

12 Un joli problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable et $n \geq 1$ un entier. Montrer que

$$0 \leq \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \leq \frac{f'(n) - f'(0)}{8}.$$

Solution proposée.

Avant tout chose, essayons de comprendre les termes de l'énoncé. Celui du milieu n'est pas joli, il y a des effets de bords dûs aux $\frac{1}{2}$. On le réécrit de manière plus homogène en répartissant le $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ chez tout le monde :

$$\begin{aligned} & \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} \\ = & \frac{f(0)}{2} + \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} \right) + ... + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n-1)}{2} \right) + \frac{f(n)}{2} \\ = & \left(\frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2} \right) + ... + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n)}{2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant qu'on est parti, écrivons tout sous forme d'un signe somme :

$$\begin{aligned} & 0 \overset{?}{\leq} \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \overset{?}{\leq} \frac{f'(n) - f'(0)}{8} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f(i-1) + f(i)}{2} - \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(i-1) + f(i)}{2} - \int_{i-1}^i f \right) \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8}. \end{aligned}$$

Le problème sera donc résolu si l'on montre chacune des égalités

$$0 \overset{?}{\leq} \frac{f(i-1)+f(i)}{2} - \int_{i-1}^{i} f \overset{?}{\leq} \frac{f'(i)-f'(i-1)}{8},$$

ce qui revient à faire $n=1$. Remarquer qu'en fait le problème est *équivalent* au cas $n=1$, puisque l'énoncé doit être vrai pour $n=1$.

Ceci étant dit, passons aux interprétations géométriques. Posons A et B les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$, C le point d'intersection des tangentes en 0 et 1.

Le terme du milieu représente l'aire de la lunulle comprise entre la corde $[AB]$ et le graphe de f, qui est ≥ 0 par hypothèse de convexité, d'où l'inégalité de gauche.

Pour comprendre le $\frac{1}{8}$ à droite, on ne sait pas vraiment comment faire...

Cherchons alors à simplifier notre problème. Si l'énoncé est vrai (et il l'est...), il doit être valable pour une fonction convexe ayant mêmes dérivées que f en 0 et en 1 et qui colle les tangentes en 0 et 1 aussi près que l'on veut. En d'autres termes, il nous *faut* montrer que l'aire du triangle ABC est majorée par $\frac{f'(1)-f'(0)}{8}$ (et cela sera suffisant). À ce stade, le problème ne met plus en jeu que deux paramètres, les pentes $f'(0)$ et $f'(1)$, et un collégien pourrait terminer l'exercice en calculant des équations de droites et des aires de triangles.

Toutefois, nous sommes plus aguerris que les collégiens, et las de moults calculs longs et pénibles, nous allons grandement simplifier cette dernière étape. Remarquons en effet que l'inégalité à montrer

$$\frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_{0}^{1} f \overset{?}{\leq} \frac{f'(1)-f'(0)}{8}$$

est invariante par translation $f \longmapsto f+\lambda$, par ajout de pente $f \longmapsto f+\mu \,\mathrm{Id}$, et par dilatation $f \longmapsto \nu f$. On peut donc imposer $f(0)=0$ par translation, $f'(0)=0$ par ajout de pente, et $f(1)=1$ par dilation (si $f(1)=0$, $f \equiv 0$ et l'inégalité est triviale). Il est maintenant aisé de mener les calculs, après ces *trois* simplifications effectuées.

Notons $\alpha = f'(1)$ l'unique paramètre restant. Le point C se situe sur l'axe des abscisses ; pour trouver sa position, on écrit

$$y_B - y_C = \alpha(x_B - x_C) \implies 1 = \alpha(1-x_c) \implies x_C = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Noter bien que $\alpha \geq 1$ car la pente de la tangente en B doit dépasser celle de la corde AB. On veut donc

$$\mathcal{A}(ABC) \overset{?}{\leq} \frac{f'(1)-f'(0)}{8} \iff \frac{1}{2}x_C \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{8} \iff 1 - \frac{1}{\alpha} \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{4} \iff \alpha^2 - 4\alpha + 4 \overset{?}{\geq} 0 \iff (\alpha-2)^2 \overset{?}{\geq} 0,$$

ce qui est clair (on a même le cas d'égalité $\alpha = 2$).

Remarque. Il apparaît sur ce problème que les nombreuses simplifications ($n=1$, choix de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$) nous ont grandement simplifié les calculs.