1 FONCTIONS sin, cos ET tan

1

1) Que vaut $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$? En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$, $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\tan \dfrac{\pi}{12}$.

2) Calculer $\tan \dfrac{\pi}{8}$, $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$.

---

2 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: **1)** $\cos x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $\sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **3)** $|\tan x| \leqslant 1$.

---

3 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|\sin(nx)\big| \leqslant n\,|\sin x|.$$

---

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\sin x + \sin(2x) = 0$. **2)** $\tan(2x) = 3\tan x$.

3) $2\sin x + \sin(3x) = 0$. **4)** $3\tan x = 2\cos x$.

5) $\cos x = 1 + \sqrt{3}\sin x$.

6) $\sin x + \cos x = 1 + \tan x$.

7) $\sin x + 2\cos(4x) = \sqrt{3}\cos x$.

---

5 Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{2^k} \sin \frac{3\pi}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

6 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \qquad (n{-}1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

---

7 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln\left(\tan \dfrac{x\pi}{2}\right)$.

---

8 Étudier chacune des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$.

2) *** $x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$.

*** On pourra utiliser la relation : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$, vraie pour tous $p, q \in \mathbb{R}$ et sur laquelle nous reviendrons au chapitre « Nombres complexes ».

9

1) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan x > x$.

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

---

10 On veut montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^2}{\pi}.$$

1) Montrer le résultat sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) En déduire sans nouvelle étude de fonction que le résultat vaut sur $[0, \pi]$.

---

11 Soient $s, c \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fait quatre hypothèses :

$$s' = c, \qquad c' = -s, \qquad s(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad c(0) = 1.$$

1) On fixe $x, y \in \mathbb{R}$. Grâce à la fonction :

$$t \longmapsto s(t+x)c(t+y) - c(t+x)s(t+y),$$

montrer que : $s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$.

2) En déduire que s est impaire et c paire.

3) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

4) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1.$$

---

12 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que : $f'' + f \geqslant 0$. Montrer, grâce à la fonction $t \longmapsto f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

13

1) Étudier la fonction $x \longmapsto \cos^3 x + \sin^3 x$.

2) Résoudre l'équation : $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

14

1) **a)** Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2^n}}.$$

b) Que vaut : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x},$$

limite qu'on note aussi : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

2) On repart de **1)a)** : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2^n}}$ pour tous $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Composer par le logarithme, puis dériver.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$

3) ◷◷◷ Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\tan x}.$$

---

15 ◷◷◷ Si on note C_2 la fonction $x \longmapsto 2x^2 - 1$ et S_2 la fonction $x \longmapsto 2x$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = C_2(\cos\theta)$$

et $$\sin(2\theta) = 2\cos\theta \sin\theta = S_2(\cos\theta)\sin\theta.$$

Plus généralement, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales C_n et S_n telles que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(n\theta) = C_n(\cos\theta)$

et $$\sin(n\theta) = S_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

---

16 ◷◷◷

1) Etudier les variations de la fonction $x \longmapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les variations de $x \longmapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3 \leqslant 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

---

17 ◷◷◷ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \sin\left(2^k x\right).$$

1) Montrer, après avoir exprimé $P_1(x)$ en fonction de $\cos x$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|P_1(x)\right| \leqslant \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sin^2 x \sin(2x)\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(x)^2 = \sin^2 x \sin(2x) P_{n-1}(4x) P_n(2x).$$

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|P_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

---

2 FONCTIONS Arcsin, Arccos ET Arctan

18 ◷ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1-\tan x}}{\operatorname{Arcsin}(4x)}$.

---

19 ◷ Simplifier : **1)** $\operatorname{Arccos} \cos \frac{8\pi}{3}$.

2) $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{17\pi}{6}$. **3)** $\operatorname{Arctan} \tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

4) $\operatorname{Arcsin} \cos \frac{7\pi}{4}$. **5)** $\operatorname{Arccos} \sin \frac{17\pi}{5}$.

---

20 ◷ Tracer le graphe des fonctions :

1) $x \longmapsto \operatorname{Arctan} \tan x$. **2)** $x \longmapsto \operatorname{Arccos} \cos x$.

3) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} \sin x$.

---

21 ◷ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\operatorname{Arctan} x \geqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

---

22 ◷ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$f(x) = \cos\left(\alpha \operatorname{Arccos} x\right).$$

Simplifier : $\left(1-x^2\right)f''(x) - xf'(x) + \alpha^2 f(x)$ pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

---

23 ◷◷ Étudier chacune des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$. **2)** $x \longmapsto x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x-1}$.

---

24 ◷◷

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos \operatorname{Arctan} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin \operatorname{Arctan} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2) Simplifier de même les expression suivantes — où x est un réel :

a) $\sin\left(2 \operatorname{Arccos} x\right)$. **b)** $\sin\left(2 \operatorname{Arctan} x\right)$.

c) $\tan\left(\operatorname{Arccos} x\right)$. **d)** $\cos\left(3 \operatorname{Arccos} x\right)$.

3) Résoudre l'équation : $\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin} x$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

---

25 ◷◷ Simplifier les expressions suivantes — où x est un réel :

1) $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos} x$. **2)** $\operatorname{Arctan} \frac{1+x}{1-x}$.

3) $\operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **4)** $\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5) $\operatorname{Arccos} \operatorname{th} x + 2 \operatorname{Arctan} e^x$.

6) $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

7) $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2x^2} + \operatorname{Arctan} \frac{x-1}{x} - \operatorname{Arctan} \frac{x}{x+1}$.

8) ◷◷◷ $\operatorname{Arctan} e^x - \operatorname{Arctan} \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

26

1) Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{3}$.

2) Montrer l'égalité : $2\,\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4} = \text{Arccos}\,\dfrac{1}{8}$.

3) Calculer : $\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{5} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{8}$.

4)

a) Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$ pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right[+ \dfrac{\pi}{4}\,\mathbb{Z}$.

b) En déduire la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239}.$$

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π — on sait en effet calculer assez facilement les arctangentes comme nous le verrons plus tard. Le résultat de la question **1)** est appelé quant à lui une *formule du type de Machin*. Il en existe beaucoup d'autres, par exemple : $\dfrac{\pi}{4} = 2\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{3} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{7}$.

27

1) Simplifier : $\text{Arctan}\,\text{sh}\,x + \text{Arccos}\,\text{th}\,x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre l'équation : $\text{th}\,x = \dfrac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire l'égalité :

$$\text{Arctan}\,\frac{5}{12} + \text{Arccos}\,\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

---

28 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x — dans un domaine à préciser :

1) $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arccos}\,x$.

2) $\text{Arcsin}\,\tan x = x$.

3) $\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

4) $\text{Arctan}\,\dfrac{x-1}{x-2} + \text{Arctan}\,\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$.

5) $\text{Arcsin}(x+1) - \text{Arcsin}\,x = \dfrac{\pi}{6}$.

29

1) Simplifier : $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}\,k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\,\frac{1}{k^2+k+1}$.

---

30 On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n \quad (\textit{identité de Cassini}).$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n}} = \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n+1}} + \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

3) En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2k+1}}.$$
