SEMAINE 9

SÉRIES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 :

Soit γ la **constante d'Euler** : $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$. Démontrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n} = \gamma\cdot\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2\ .$$

- -

La série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est convergente car $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ et la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est décroissante... à partir du rang 3, notons $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ sa somme partielle d'ordre n.

On peut faire apparaître les sommes partielles de la série harmonique en décomposant s_{2n} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = -\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\ . \end{aligned}$$

En posant $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}$, on a donc

$$s_{2n} = H_n\ \ln 2 - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k} = H_n\ \ln 2 + S_n - S_{2n}\ .$$

Le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ est connu (*isn't it ?*), l'exercice sera terminé si l'on trouve un développement asymptotique de S_n à la précision $o(1)$.

Par comparaison avec une intégrale, on obtient déjà $S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$, mais cela ne suffit pas.

Cherchons donc à estimer $S_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$. Pour cela, écrivons $S_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 = \sum_{k=2}^{n}a_k$, avec

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\left[(\ln k)^2 - (\ln(k-1))^2\right] = \frac{\ln k}{k} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\big(\ln k + \ln(k-1)\big) \\ &= \frac{\ln k}{k} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\right)\left(2\ln k + O\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) \\ &= -\frac{\ln k}{2k^2} + o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\ . \end{aligned}$$

De $a_k \sim -\frac{\ln k}{2k^2}$, on déduit que la série de terme général a_k est convergente donc, en posant $l = \sum_{k=2}^{+\infty}a_k$, on a le développement asymptotique $S_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + l + o(1)$, puis

$$s_{2n} = (\ln n + \gamma)(\ln 2) + \frac{1}{2}\big((\ln n)^2 - (\ln(2n)^2)\big) + l - l + o(1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\ln n+\gamma)(\ln 2)+\frac{1}{2}\big((\ln n)^2-(\ln(n)^2+(\ln 2)^2+2\ln 2\cdot\ln n)\big)+o(1)\\
&= \gamma\cdot\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2+o(1)\ .
\end{aligned}
$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}$, on obtient le résultat demandé.

EXERCICE 2 :

1. Soient (A_n) et (B_n) deux suites complexes de limites A et B respectivement. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\,\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}=AB\ .$$

2. Soient $\displaystyle\sum_n a_n$ et $\displaystyle\sum_n b_n$ deux séries de nombres complexes, on note $\displaystyle\sum_n c_n$ leur produit de Cauchy : $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. Montrer que, si les trois séries $\displaystyle\sum_n a_n$, $\displaystyle\sum_n b_n$ et $\displaystyle\sum_n c_n$ sont convergentes, alors on a la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)\ .$$

- -

1. Posons $C_n=\dfrac{1}{n+1}\,\displaystyle\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}$, alors

$$C_n-AB=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(A_kB_{n-k}-AB)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Big[(A_k-A)B_{n-k}+(B_{n-k}-B)A\Big]\ ,$$

donc

$$|C_n-AB|\le|B_{n-k}|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|A_k-A|\right)+|A|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|B_{n-k}-B|\right)\ .$$

Or, d'après Cesaro, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|A_k-A|$ et $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|B_{n-k}-B|=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|B_k-B|$ tendent vers zéro et $|B_{n-k}|$ est majoré puisque la suite (B_n) est convergente, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(C_n-AB)=0$.

2. Pour tout n, posons $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$, $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_k$, $C_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k$ et enfin, pour tout $N\in\mathbb{N}$, posons $\Gamma_N = \sum_{n=0}^{N} C_n$. On a alors

$$\Gamma_N = \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k \Big) = (N+1)c_0 + Nc_1 + \cdots + 2c_{N-1} + c_N = \sum_{n=0}^{N} (N+1-n)c_n \ .$$

On remarque que c'est aussi $\sum_{k=0}^{N} A_k B_{N-k}$, en effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} A_k B_{N-k} &= a_0(b_0 + \cdots + b_{N-1} + b_N) + (a_0 + a_1)(b_0 + \cdots + b_{N-1}) + \cdots\cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_N)b_0 \\
&= (N+1)a_0b_0 + N(a_0b_1 + a_1b_0) + (N-1)(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots\cdots + (a_0b_N + \cdots + a_Nb_0) \\
&= \sum_{n=0}^{N} (N+1-n)c_n = \Gamma_N \ .
\end{aligned}$$

Posons enfin $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Comme $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, du théorème de Cesaro, on déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{n+1} = C$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = C$ mais, d'après la question **1.**, cette dernière expression tend aussi vers AB, donc $C = AB$.

EXERCICE 3 :

Convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} E\big(\log_2(n)\big)$.

- -

Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n} E\big(\log_2(n)\big)$ pour $n \geq 2$.

- Effectuons une sommation par paquets en regroupant les entiers n pour lesquels l'expression $E\big(\log_2(n)\big)$ garde une valeur constante :

  pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $E\big(\log_2(n)\big) = k \iff 2^k \leq n < 2^{k+1}$.

  Posons alors $A_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n = k \cdot \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons la convergence de la série de terme général A_k.

  Pour cela, introduisons encore quelques notations :

  - pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique) :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ (somme partielle de la série harmonique alternée) :

- pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $S_k = H_{2^k-1} = \sum_{p=1}^{2^k-1} \frac{1}{p}$;

- pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $T_k = J_{2^k-1} = \sum_{p=1}^{2^k-1} \frac{(-1)^p}{p}$;

On a alors facilement $S_k + T_k = S_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ (on convient $S_0 = 0$), donc $T_k = S_{k-1} - S_k$, puis

$$A_k = k(T_{k+1} - T_k) = -k(S_{k+1} - 2S_k + S_{k-1}) .$$

Simplifions les sommes partielles : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} A_k &= -\sum_{k=1}^{m} k(S_{k+1} - 2S_k + S_{k-1}) \\
&= -\sum_{k=2}^{m+1} (k-1)S_k + 2\sum_{k=1}^{m} kS_k - \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)S_k \\
&= \sum_{k=2}^{m-1} \big[2k - (k-1) - (k+1)\big] S_k - S_0 - 2S_1 + 2S_1 + 2mS_m - (m-1)S_m - mS_{m+1} \\
&= (m+1)S_m - mS_{m+1} .
\end{aligned}$$

Du développement asymptotique classique : $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$, où γ est la constante d'Euler, on tire

$$S_m = \ln(2^m - 1) + \gamma + O\left(\frac{1}{2^m - 1}\right) = m\ \ln 2 + \gamma + O\left(\frac{1}{2^m}\right) ,$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} A_k &= (m+1)\left[m\ \ln 2 + \gamma + O\left(\frac{1}{2^m}\right)\right] - m\left[(m+1)\ \ln 2 + \gamma + O\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)\right] \\
&= \gamma + O\left(\frac{m}{2^m}\right) = \gamma + o(1) .
\end{aligned}$$

La série de terme général A_k converge donc et $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k = \gamma$.

• La série $\sum_n u_n$ n'étant pas absolument convergente, on ne peut pas affirmer directement que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k$$

(la convergence de la série $\sum_n u_n$ n'étant d'ailleurs pas encore prouvée).

Majorons pour cela les sommes partielles dans les paquets : si $n \geq 2$ est tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\left|\sum_{i=2^m}^{n} u_i\right| = m \left|\sum_{i=2^m}^{n} \frac{(-1)^i}{i}\right| \leq \frac{m}{2^m}$$

(majoration classique d'une somme partielle d'une série alternée par la valeur absolue de son premier terme). Donc (toujours avec $2^m \leq n < 2^{m+1}$), on a $\left|\sum_{i=2}^{n} u_i - \sum_{k=1}^{m-1} A_k\right| \leq \frac{m}{2^m}$. Comme $\lim_{m\to+\infty} \frac{m}{2^m} = 0$, on en déduit la convergence de la série $\sum_n u_n$ et le résultat $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \gamma$: si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un entier M tel que, pour tout $m \geq M$, on ait $\frac{m}{2^m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left|\sum_{k=1}^{m-1} A_k - \gamma\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; pour tout entier n tel que $n \geq 2^M$, on a alors $\left|\sum_{i=2}^{n} u_i - \gamma\right| \leq \varepsilon$.

• Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} E\big(\log_2(n)\big) = \gamma$.

EXERCICE 4 :

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers zéro.

Montrer qu'il existe une suite (ε_n), à valeurs dans$\{-1, 1\}$, telle que la série $\sum_n \varepsilon_n u_n$ soit convergente.

- -

Si $\sum_n u_n$ est convergente, alors c'est gagné avec $\varepsilon_n = 1$.

Supposons $\sum_n u_n$ divergente, donc a fortiori $\sum_n v_n$ est divergente avec $v_n = |u_n|$. Essayons de construire par récurrence une suite (α_n), à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de façon que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$ aient une limite nulle, on aura ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ avec, pour tout n, $\varepsilon_n = \mathrm{sgn}(u_n)\alpha_n$. L'idée pour cela est de toujours “revenir” vers zéro, c'est-à-dire ajouter le terme négatif $-v_n$ à chaque fois que s_n est positif, et le terme positif v_n à chaque fois que s_n est négatif. Allez, on rédige :

Posons d'abord $\alpha_0 = 1$, ainsi $s_0 = v_0 = |u_0| \geq 0$, ce qui amène à poser $\alpha_1 = -1$ et ainsi

$s_1 = v_0 - v_1$, on posera ensuite $\alpha_2 = +1$ si $s_1 < 0$ et $\alpha_2 = -1$ si $s_1 \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, supposons $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ construits (éléments de $\{-1, 1\}$), posons $s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$, puis $\alpha_{n+1} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad s_n < 0 \\ -1 & \text{si} \quad s_n \geq 0 \end{cases}$. Remarquons que, les réels s_n et $\alpha_{n+1} v_{n+1}$ étant de signes contraires, on a $|s_{n+1}| = |s_n + \alpha_{n+1} v_{n+1}| \leq \max\{|s_n|, v_{n+1}\}$. Montrons maintenant que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N un entier tel que $n \geq N \Longrightarrow 0 \leq v_n \leq \varepsilon$. Alors,

(i) : si $|s_N| \leq \varepsilon$, par une récurrence immédiate, on a $|s_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et c'est gagné ;

(ii) : si $s_N > \varepsilon$, la série $\sum_k v_k$ étant divergente, il existe un entier p tel que $\sum_{k=N+1}^{N+p} v_k > s_N - \varepsilon$.

Pour le plus petit de ces entiers p, on aura plus précisément $s_N - \varepsilon < \sum_{k=N+1}^{N+p} v_k \leq s_N$, ce qui amène à poser $\alpha_{N+1} = \cdots = \alpha_{N+p} = -1$ et ainsi $0 \leq s_{N+p} = s_N - \sum_{k=N+1}^{N+p} v_k \leq \varepsilon$, ce qui nous ramène au cas **(i)** ;

(iii) : si $s_N < -\varepsilon$, raisonnement analogue à **(ii)**.

On a ainsi prouvé que, si (u_n) est une suite de limite nulle, mais telle que la série de terme général u_n ne soit pas absolument convergente, on peut trouver une suite de coefficients (ε_n) dans $\{-1, 1\}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n = 0$. Il est alors immédiat que, pour tout réel a donné, on peut aussi trouver une suite $(\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n = a$.