Dénombrement

Opérations ensemblistes

▹ 1 Chiens et chats

Au sein de 76 familles, dont les seuls animaux de compagnie sont des chiens et des chats :

- 33 familles n'ont aucun animal,
- 7 familles ont un chien et un chat,
- 46 familles n'ont pas de chat.

Sachant que chaque famille a au plus un chien et au plus un chat, déterminer le nombre de familles :

1) qui ont un chien seulement, **3)** qui ont un chat seulement.

2) qui ont exactement un animal,

► 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de triplets (a, b, c) d'entiers de $[\![0, n]\!]$ tels que $abc \neq 0$?

► 3

Dans l'ensemble $[\![1, 1000]\!]$, combien y a-t-il d'entiers :
1) Divisibles par 2 ? par 7 ? **2)** Divisibles par 2 ou par 7 ?

► 4 Formule du crible pour trois ensembles

1) Soit A, B et C trois parties d'un ensemble fini E.
Démontrez que

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \ & \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ & - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) \\ & - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2) Dans une entreprise, il y a 800 employés dont 300 hommes, 352 intérimaires et 424 personnes mariées. 188 sont des hommes intérimaires, 166 des hommes mariés, 208 sont des personnes intérimaires et mariées et 144 sont des hommes mariés et intérimaires. Combien y a-t-il de femmes célibataires non intérimaires ?

► 5

Combien y a-t-il de carrés dans un quadrillage de n cases sur n ? (on supposera les sommets aux intersections du quadrillage et les côtés inclus dans le quadrillage).

▹ 6

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que

$$\mathrm{Card}(A) = 31, \quad \mathrm{Card}(B) = 24, \quad \mathrm{Card}(C) = 17,$$
$$\mathrm{Card}(A \cap C) = 12, \quad \mathrm{Card}(B \cap C) = 9, \quad \mathrm{Card}(A \cap B \cap C) = 4,$$
$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 38.$$

Calculer $\mathrm{Card}(A \cap B)$.

▹ 7

Soit E un ensemble fini, A, B et C trois parties de E deux à deux disjointes. On suppose que $\mathrm{Card}(E) = 400$,

$$\mathrm{Card}(A) = 10, \quad \mathrm{Card}(B) = 20, \quad \mathrm{Card}(C) = 30.$$

Calculer $\mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Principe multiplicatif
Listes, arrangements et combinaisons

▹ 8

Soit a, b, c, d quatre éléments distincts et $E = \{a, b, c, d\}$.

1) Déterminer le nombre de combinaisons de deux éléments de E, le nombre de 2-listes d'éléments de E, le nombre de 2-listes sans répétitions.

2) Les lister toutes.

3) Même question pour les permutations de E.

▹ 9

On dispose de 4 billes de couleurs différentes : rouge, bleu, vert et jaune. Combien y a-t-il de manière de les disposer sur un support comportant 9 positions (une boule au maximum par position) ?

► 10

Dans une course hippique, 15 chevaux sont partants. Combien y a-t-il de tiercés possibles ?

► 11

Sur un cercle, on place n points distincts (où $n \geqslant 2$). Combien peut-on tracer de cordes, c'est-à-dire de segments reliant deux de ces points ?

► 12

Sur un baladeur numérique, un album a été chargé. Il comporte 6 morceaux. Quand on le lit en mode aléatoire, les morceaux sont tous lus une et une seule fois, l'ordre étant choisi au hasard.
Combien y a-t-il d'enchaînements possibles ?

► 13

Combien y a-t-il d'anagrammes (sans se préoccuper de leur signification) du mot « SCIENCE » ?

▹ 14

Une configuration est une suite de six symboles ∘ ou ×.

1) Combien y a-t-il de configurations possibles ?

2) Combien y a-t-il de configurations comportant exactement 2 × ?

3) Combien y a-t-il de configurations comportant le même symbole aux deux extrémités ?

▹ 15

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4, 5, 6 rouges et les autres sont vertes. On tire successivement et avec remise 5 boules. Déterminez le nombre de résultats :

1) sans contrainte particulière,

2) pour lesquels les cinq boules sont de la même couleur,

3) pour lesquels les quatre couleurs sont représentées,

4) pour lesquels la boule 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

► 16 Incontournable poker

Dans un jeu standard de 32 cartes (8 valeurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as / 4 couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle), on extrait une main de 5 cartes, c'est-à-dire 5 cartes distinctes du jeu sans que l'ordre du choix intervienne. Combien y a-t-il de mains :

1) au total ?

2) comportant deux carreaux et trois piques ?

3) comportant cinq carreaux ou cinq piques ?

4) sans aucun carreau ?

5) contenant les 4 as ?

6) comportant au moins un roi ?

7) comprenant 2 rois et 3 piques ?

8) qui sont des *fulls* (trois cartes de même valeur plus deux cartes de même valeur) ?

9) qui sont des *brelans* (trois cartes de même valeur plus deux cartes de deux autres valeurs) ?

► 17

En France, les nouvelles plaques d'immatriculation comportent deux lettres, puis trois chiffres, puis deux lettres. Par exemple : AZ-497-EF.

1) Donner une première estimation du nombre de possibilités.

2) Plus précisément, les lettres I, O et U sont interdites, ainsi que la séquence 000 au milieu, la séquence SS à gauche et à droite et la séquence WW à gauche seulement. Combien reste-t-il de possibilités ?

► 18

Une urne contient 10 boules, chacune repérée par un numéro, dont 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire au hasard successivement et sans remise 4 boules de l'urne.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Combien y a-t-il de tirages dont toutes les boules sont blanches ?

3) Combien y a-t-il de tirages comportant au plus une boule noire ?

4) Combien y a-t-il de tirages comportant exactement 2 boules blanches ?

Prolongements

► 19

On souhaite ranger sur une étagère de bibliothèque 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique et 3 livres de chimie. Tous les livres sont différents. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1) si les livres doivent être regroupés par matière ?

2) si seuls les livres de mathématiques doivent être regroupés ?

► 20

Soit n et k deux entiers naturels tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1) On tire simultanément k boules de l'urne.

- **a.** Combien y a-t-il de tirages au total ?
- **b.** Soit $p \in [\![k,n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels p est le plus grand numéro tiré ?

2) On tire successivement et sans remise k boules de l'urne.

- **a.** En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 1 ?

3) On tire successivement et avec remise k boules de l'urne.

- **a.** En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de tirages durant lesquels 2 numéros exactement sont apparus ?

► 21

3 enfants et 4 adultes vont au cinéma et prennent place dans une rangée de 7 places.

1) Combien y a-t-il de dispositions possibles sachant que chaque enfant doit être entouré de deux adultes ?

2) ♠ Même question s'il y a 3 enfants, 6 adultes et 9 places dans la rangée.

► 22 Les tiroirs à chaussettes

On souhaite répartir 15 paires de chaussettes, toutes identiques, dans plusieurs tiroirs.

1) Combien y a-t-il de manières de répartir les chaussettes dans deux tiroirs ?

2) Même question pour 3 tiroirs ?

3) ♠ Même question pour 4 tiroirs ?

► 23

On répartit 6 boules indistinguables dans 3 sacs numérotés, chaque sac pouvant contenir de 0 à 6 boules. Déterminer le nombre de répartitions :

1) telles que le sac 1 soit vide,

2) telles que seul le sac 1 soit vide,

3) telles qu'un et un seul sac soit vide,

4) sans contrainte particulière,

5) telles qu'au moins un sac soit vide.

► 24 Décompte d'ensembles

Soit E un ensemble comportant n éléments.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(A)$.

2) Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que E est la réunion disjointe de A et B.

3) Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \cap B = \varnothing$.

4) Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \subset B$.

► 25

Soit A et B deux parties disjointes de E telles que $A \cup B = E$. On note p et q les cardinaux de A et de B.

Soit $n \in [\![0, p+q]\!]$. En dénombrant de deux manières les parties de E à n éléments, justifiez la formule

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$