Suites réelles et complexes

► 1

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1) $(u_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ **4)** $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n+(-1)^n}\right)_{n\geqslant 2}$

2) $(v_n) = (2^n - n)_{n\in\mathbb{N}}$ **5)** $(y_n) = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^{-n}\right)_{n\geqslant 0}$

3) $(w_n) = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geqslant 1}$ **6)** $(z_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$

Suites récurrentes

▹ 2

On considère la suite u définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1.$$

1) Préciser la fonction itératrice associée à cette suite. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite et faire des conjectures quant à son comportement.

2) Exprimer le terme u_n en fonction de n.

3) Démontrer les conjectures.

4) Comment est modifié le comportement de la suite si l'on change son terme initial ?

► 3 Conjecture et démonstration

Pour les suites ci-dessous, calculer quelques termes de la suite, conjecturer l'expression explicite de la suite puis la démontrer :

1) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$;

2) $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

3) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{\exp(u_n)}{2}\right)$.

4) ♠$u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.

► 4

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}. \end{cases}$

1) Montrer que la suite u est bien définie et que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 3$.

2) Montrer que la suite u est croissante.

3) Montrer que la suite u est convergente.

4) Dans quel intervalle se trouve la limite ℓ de la suite u ?

5) Justifier soigneusement que ℓ est solution de l'équation $x = \sqrt{x+6}$.

6) Résoudre cette équation puis conclure quant à la valeur de ℓ.

► 5

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n). \end{cases}$

On introduit la fonction $f : x \mapsto 2 + \ln(x)$.

1) Tracer l'allure de la courbe f. S'en servir pour représenter les premiers termes de la suite u et conjecturer son comportement (monotonie, limite).

2) Montrer que l'intervalle $[1,4]$ est stable par f, c'est-à-dire que : $\forall x \in [1,4],\ f(x) \in [1,4]$.

3) En déduire que la suite u est bien définie et à valeurs dans $[1,4]$.

4) Prouver la monotonie de la suite u conjecturée plus haut.

5) Montrer que u est convergente et proposer un encadrement de sa limite ℓ.

6) Montrer soigneusement que ℓ est solution de l'équation $x = 2 + \ln(x)$.

7) Justifier que cette équation admet exactement deux solutions. Déterminer, en justifiant soigneusement, laquelle est la limite de la suite u.

► 6

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n. \end{cases}$

1) On conjecture que la suite u est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$. Expliquer comment.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3$.

3) Montrer que la suite u est strictement croissante.

4) Pour prouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on procède par l'absurde : on suppose que la suite u est majorée. Montrer que sous cette hypothèse, la suite u convergerait vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie une équation que l'on précisera. En déduire une contradiction et conclure.

► 7 Où on parvient à trouver l'expression explicite

Soit v la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n}$ pour tout entier naturel n.

1) Tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x}$. À l'aide de cette courbe, construire les premiers termes de la suite v.

2) Justifier que la suite v est bien définie.

3) Montrer que la suite u définie par $u_n = \frac{1}{v_n}$ est une suite arithmétique.

4) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis la limite de la suite v.

Suites définies implicitement

► 8

Pour tout entier naturel n non nul, on introduit l'équation

$$(E_n) \quad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \text{d'inconnue } x \in [0,+\infty[$$

ainsi que les applications $f_n :\ x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation (E_n) admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à expliciter).

Cette unique solution sera notée dorénavant u_n, ce qui définit en faisant varier n une suite $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2) Justifier que $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [0,1]$.

3) Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ f_n(u_{n+1}) \geqslant 0$. En déduire que la suite u est croissante.

4) Justifier que la suite u est convergente.

5) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$. En déduire que la limite ℓ de la suite u vérifie $\ell^2+2\ell-1=0$, puis la valeur de ℓ.

► 9

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n l'unique solution de l'équation

$$(E_n) \quad nx+\ln(x)=0, \quad \text{d'inconnue } x>0$$

et on introduit la fonction $f_n\colon\ x \mapsto nx+\ln(x)$.

1) Montrer que la suite u est bien définie.

2) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

3) Déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$ et en déduire le sens de variation de la suite u.

4) Justifier que la suite u est convergente. Montrer alors qu'elle tend vers 0 (on pourra raisonner par l'absurde).

Étude de convergence et de limite

► 10 Opérations sur les limites de suites

Déterminer la limite de la suite u lorsque

1) $u_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+3$,

2) $u_n=\dfrac{4}{3-2^n}$,

3) $u_n=\left(\frac{e}{3}\right)^n-\ln(n)$,

4) $u_n=\dfrac{1}{n+e^n}$,

5) $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$,

6) $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+2}$,

7) $u_n=\dfrac{5^n-2^n}{5^n+3^n}$,

8) $u_n=\dfrac{e^n+1}{e^n-1}$.

► 11 Utilisation des théorèmes de comparaison

Étudier la limite des suites u vérifiant :

1) $2-\dfrac{1}{n}\leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n^2+3}{n^2-2}$,

2) $|u_n-\sqrt{2}|\leqslant 3\,.\,(0{,}2)^n$,

3) $u_n=|\cos(n)-n|$,

4) $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\sin(n)$,

5) $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

6) $u_n=\dfrac{e^{-n\cos^2(n)}}{n+1}$,

7) $u_n=\left(\frac{1}{2}\sin(n^2+1)\right)^n$,

8) ♠ $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.

► 12 Convergence logarithmique

Soit α un réel et u une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists k \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant k\,|u_n-\alpha|.$$

1) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \leqslant k^n\,|u_0-\alpha|$.

2) En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite.

► 13 Sélectionner la bonne technique

Prouver la convergence des suites u suivantes et donner un encadrement de leur limite :

1) $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k}$,

2) $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+(-1)^n}$ $(n\geqslant 2)$,

3) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$,

4) $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}e^{-\sqrt{k}}$.

5) $u_n=\dfrac{3n^2-1}{2-n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}$.

(pour le 3), majorer la somme à l'aide $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$)

► 14 Série exponentielle

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

1) Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $k!\geqslant 2^{k-1}$.

2) Démontrer que la suite S est convergente et donner un encadrement de sa limite.

(en fait, vous verrez plus tard que la suite S converge vers e)

► 15 ♠ Casse-tête

Soit u et v deux suites réelles à termes dans $[0,1]$ et vérifiant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n v_n=1$.

Prouver que les suites u et v convergent vers 1.

► 16 Penser au logarithme !

1) On définit : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2^{1/2^k}$. Déterminer la limite de la suite u.

2) **a.** Prouver que : $\forall x\in\,]-1,+\infty[,\ \ln(1+x)\leqslant x$.

b. Prouver la convergence de la suite u définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\prod_{k=1}^{n}(1+e^{-k}).$$

Suites adjacentes, suites extraites.

► 17

Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Qu'en conclut-on ?

1) $u_n=3-\dfrac{1}{n^2}$ et $v_n=3+\dfrac{1}{n^3}$.

2) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.

3) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{3n^2}$

(on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la limite de ces suites).

4) ♠ $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k\,k!}\right)$ et $v_n=u_n\left(1+\dfrac{1}{n\,n!}\right)$.

► 18

Étudier la limite éventuelle de la suite $s = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

► 19

Soit $\alpha \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z_n = \alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite z est divergente. (Indication : on pourra voir z comme une suite récurrente et raisonner par l'absurde)

► 20

Soit deux suites réelles a et b vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2\, a_n\, b_n}{a_n + b_n}.$$

On suppose en outre que $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$.

1) Justifier que ces deux suites sont bien définies.

2) Montrer qu'à partir du rang 1, $a_n \geqslant b_n$ puis que les suites a et b sont monotones à partir du rang 1.

3) Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune ℓ.

4) ♠ Déterminer la valeur de cette limite.

► 21 ♠ Suite des tangentes des nombres entiers

1) En admettant que π est irrationnel, justifier que la suite $t = \big(\tan(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Prouver que cette suite est divergente.
(Procéder par l'absurde et regarder la suite extraite $\big(\tan(n+1)\big)$.)

Plus théorique

▹ 22 Vrai/faux

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier à l'aide d'une preuve ou d'un contre-exemple.

1) Toute suite croissante et décroissante est stationnaire.

2) Toute suite non minorée est divergente.

3) Toute suite strictement décroissante et minorée par 1 tend vers 1.

4) Toute suite tendant vers $+\infty$ est non majorée.

5) Toute suite tendant vers $+\infty$ est minorée.

6) Toute suite tendant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

7) Toute suite tendant vers -1 est négative à partir d'un certain rang.

8) Toute suite croissante admet une limite.

9) Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

10) Si une suite strictement positive est convergente, sa limite est strictement positive.

11) Si la suite u est convergente, alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

12) Si u est une suite convergente dont aucun terme n'est nul, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

13) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell$.

14) Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée.

15) Si les suites $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes, alors la suite u est croissante.

▹ 23 Un peu de logique !

Soit u et v deux suites réelles. Montrer que si u converge et v diverge, alors la suite $u + v$ diverge.

► 24

Soit u et v deux suites réelles.

1) Montrer que si u est bornée et que $\lim v = 0$, alors $\lim uv = 0$.

2) Montrer que si u est bornée et que $\lim v = +\infty$, alors $\lim(u + v) = +\infty$.

► 25

Démontrer le théorème de limites infinies par comparaison.

► 26 ♠ Opérations sur les limites

En utilisant notamment les définition des limites :

1) montrer que la somme de deux suites tendant vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.

2) montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite tendant vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.

► 27 ♠ Convergence d'une suite à valeurs entières

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que u converge si et seulement elle est stationnaire.

► 28 ♠ Raisonnement plus fins sur les suites extraites

1) Soit u une suite réelle croissante. Prouver que si u admet une suite extraite convergente, alors u est convergente.

2) Soit u une suite réelle ou complexe telle que ses trois suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que la suite u est convergente.

► 29 ♠ Comparaison à une suite géométrique

Soit u une suite de termes strictement positifs telle que le rapport $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tende vers $q \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1) On se place dans le cas où $q < 1$.

- **a.** Montrer qu'il existe une constante $r \in\,]q, 1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$.
- **b.** En déduire que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant u_{n_0}\, r^{n-n_0}$.
- **c.** En déduire que la suite u tend vers une limite que l'on précisera.

2) En vous inspirant de l'approche de la question précédente, montrer que si $q > 1$, la suite u tend vers $+\infty$.

3) Trouver des exemples de suites u conduisant à $q = 1$ et dont la limite est 0, 1, $+\infty$, ou n'importe quelle constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

4) Application. Utiliser ce qui précède pour déterminer la limite de la suite u définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n!}{n^n}.$$