Trigonométrie

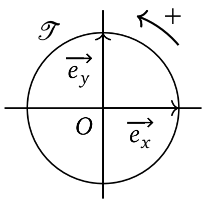
Dans tout ce cours, le plan est muni d'un **repère orthonormé direct** $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. **Rappel :** Le fait que le repère soit direct signifie que le sens de rotation du vecteur $\overrightarrow{e_x}$ vers le vecteur $\overrightarrow{e_y}$ est, par convention, considéré comme le sens positif. On dit que c'est le **sens trigonométrique**.

I Angles orientés

I.1 Mesure d'un angle orienté

Déf. • Cercle trigonométrique

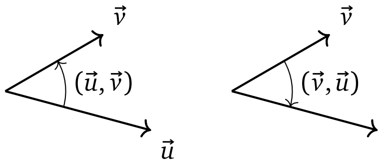
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est noté $\mathscr{T}$.



Le fait que le repère soit direct fait que le cercle trigonométrique est orienté « de $\overrightarrow{e_x}$ vers $\overrightarrow{e_y}$ », c'est-à-dire que **le sens positif de parcours est le sens trigonométrique** (sens anti-horaire).

Déf. • Angle orienté

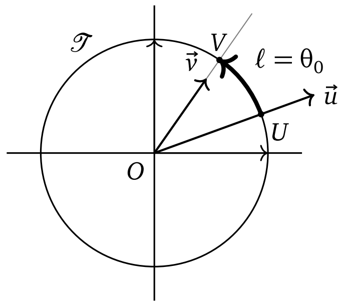
Un **angle orienté** est un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs **non nuls.**



Les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ sontPour deux angles différents. **L'ordre des vecteurs dans un angle orienté est donc important.**

cela, les angles orientés sont représentés par un arc de cercle muni d'une flèche.

Pour mesurer un angle $(\vec{u}, \vec{v})$



1) On place les deux vecteurs en l'origine O.
2) Ils dirigent deux demi-droites qui coupent le cercle trigonométrique $\mathscr{T}$ aux points U et V.
3) Une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est la la longueur algébrique ℓ de l'arc de cercle UV. **Notons-la θ_0.**

Les mesures d'angles obtenues par ce procédé sont exprimées en radians. Les mesures en degrés sont proportionnelles, avec par convention 180° pour π radians.

Exemples : Angles droits Vecteurs colinéaires

On constate que la mesure d'un angle d'un angle n'est pas unique, car pour aller de U à V, on peut parcourir le cercle dans deux sens mais aussi faire des tours supplémentaires de cercle (de périmètre 2π).

Propr. •
1) Si l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ admet pour mesure θ_0, ses autres mesures sont les nombres $\theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
2) Chaque angle orienté a donc une infinité de mesures.
3) Parmi ces mesures, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$: c'est la **mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.**

Exercice **1** ► Quelle est la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{3\pi}{2}$? $\frac{5\pi}{6}$? $-\frac{7\pi}{5}$?

Quand un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ admet pour mesure θ_0, on écrira

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta_0 \ [2\pi], \quad \text{qui se lit : « } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est congru à } \theta_0 \text{ modulo } 2\pi \text{ ».}$$

Cela signifie les mesures de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les nombres réels θ_0 à qui on ajoute un multiple de 2π.

Propr. • Calcul sur les congruences

Soit $\theta, \varphi, \theta', \varphi', \psi$ des réels quelconques, α un réel strictement positif.

1) Si $\theta \equiv \varphi\ [\alpha]$, alors $\theta + \psi \equiv \varphi + \psi\ [\alpha]$.

2) Si $\begin{cases} \theta \equiv \varphi\ [\alpha] \\ \theta' \equiv \varphi'\ [\alpha], \end{cases}$ alors $\theta + \theta' \equiv \varphi + \varphi'\ [\alpha]$.

3) Si $\theta \equiv \varphi\ [\alpha]$ et $\lambda > 0$, alors $\lambda\,\theta \equiv \lambda\,\varphi\ [\lambda\,\alpha]$.

I.2 Relation de Chasles pour les angles et conséquences

Propr. • Relation de Chasles pour les angles

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors :

$$(\vec{u}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})\ [2\pi].$$

Ce résultat provient de l'additivité des longueurs algébriques intervenant dans les mesures d'angles.

Illustration.

Propr. • Calcul sur les mesures d'angles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors :

1) $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$,

2) $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$,

3) Si $\lambda > 0$, alors $(\lambda\,\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \lambda\,\vec{v})\ [2\pi]$.

Illustrations.

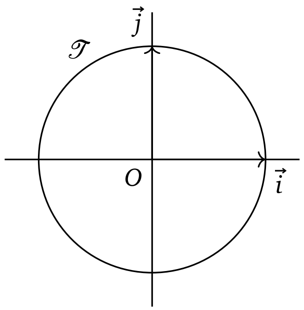
II Définition des fonctions trigonométriques

II.1 Cosinus et sinus

Déf. • Cosinus et sinus d'un réel

Soit θ un réel quelconque. On place sur le cercle trigonométrique l'unique point M_θ tel que l'angle $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM_\theta})$ mesure θ radians.

On appelle $\cos(\theta)$ l'abscisse du point M_θ et $\sin(\theta)$ l'ordonnée du point M_θ.



Un cosinus se lit donc sur l'axe des abscisses, un sinus sur l'axe des ordonnées, après avoir reporté l'angle dans un cercle trigonométrique (de rayon 1).

Propr. • **1)** On a : $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

2) $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$.

3) **Valeurs remarquables :**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$k\pi$
$\cos(\theta)$							
$\sin(\theta)$							

II.2 Tangente

Déf. • Tangente d'une nombre réel

Soit θ un nombre réel quelconque.

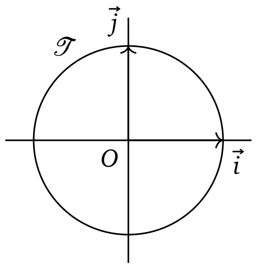
Si $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on définit la **tangente de θ** par : $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Rem. ◇ La condition vient de $\cos(\theta) = 0 \iff M_\theta = J$ ou $M_\theta = J'$

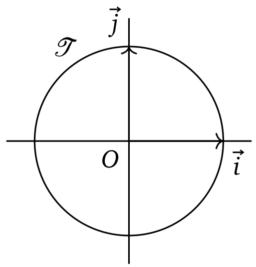
$$\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

Une tangente se lit sur la tangente au cercle trigonométrique au point I.



Cas où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



Cas où $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Propr. • **1)** Pour tout $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\quad 1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$.

2)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$k\pi$
$\tan(\theta)$							

III Angles associés et équations trigonométriques

III.1 Formules d'angles associés

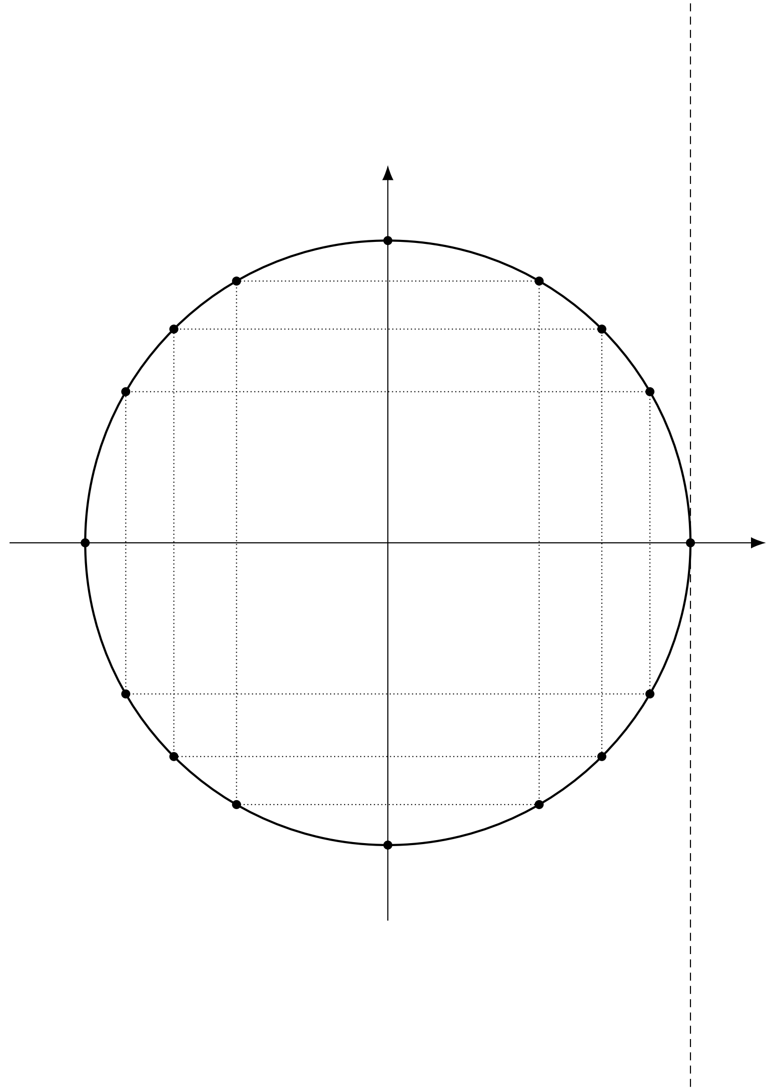
Les formules suivantes sont à connaître ou à retrouver rapidement à l'aide d'un dessin (voir ci-contre) :

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$
$$\tan(\theta + 2\pi) = \tan(\theta) \qquad \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \qquad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

Interprétations pour les fonctions trigonométriques

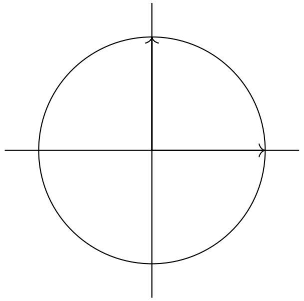
- La fonction cosinus est paire et 2π-périodique,
- La fonction sinus est impaire et 2π-périodique,
- La fonction trangente est impaire et π-périodique,

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\theta) \qquad \cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$$
$$\sin(\pi - \theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) \qquad \tan(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(\theta)} \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$



Exercice **2** ► Quelques proriétés géométriques des courbes peut-on tirer des autres relations d'angles associées ?

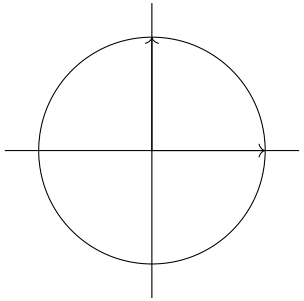
III.2 Équations trigonométriques fondamentales



$$\cos(\theta)=\cos(\varphi) \iff \theta\equiv\varphi\ [2\pi] \text{ ou } \theta\equiv-\varphi\ [2\pi].$$

$$\cos(\theta)=0 \iff \theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

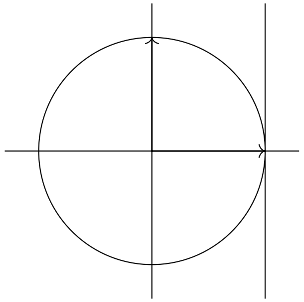
$$\cos(\theta)=1 \iff \theta\equiv 0\ [2\pi]$$



$$\sin(\theta)=\sin(\varphi) \iff \theta\equiv\varphi\ [2\pi] \text{ ou } \theta\equiv\pi-\varphi\ [2\pi].$$

$$\sin(\theta)=0 \iff \theta\equiv 0\ [\pi]$$

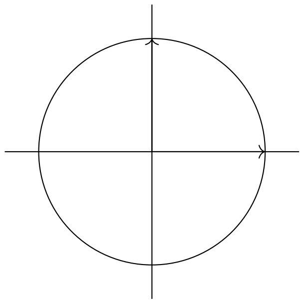
$$\sin(\theta)=1 \iff \theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$



$$\tan(\theta)=\tan(\varphi) \iff \theta\equiv\varphi\ [\pi]$$

$$\tan(\theta)=0 \iff \theta\equiv 0\ [\pi]$$

$$\tan(\theta) \text{ non défini} \iff \theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$



$$\begin{cases}\cos(\theta)=\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)=\sin(\varphi)\end{cases} \iff \theta\equiv 0\ [2pi].$$

III.3 Exemples de résolution

***Exercice* 3** ► Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
2) $\sin(2x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,
3) $\cos(x)=\sin(2x)$,
4) $\cos(x)\geqslant-\frac{1}{2}$,
5) $\tan(x)\leqslant 1$.

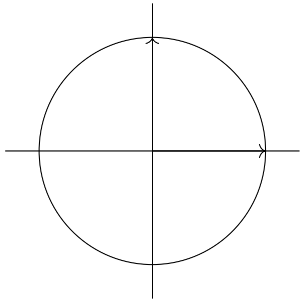
III.4 Et quand le deuxième membre n'est pas une valeur remarquable ?

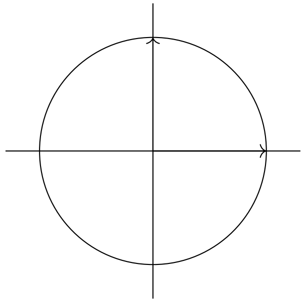
Thm • Théorème définissant arc-cosinus, arc-sinus et arc-tangente

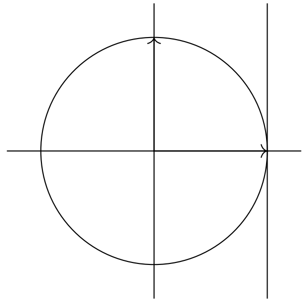
1) Soit $t\in[-1,1]$. Il existe, dans l'intervalle $[0,\pi]$, un unique nombre dont le cosinus vaut t. On l'appelle **arc-cosinus de t** et on le note **arccos(t).**

2) Soit $t\in[-1,1]$. Il existe, dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, un unique nombre dont le sinus vaut t. On l'appelle **arc-sinus de t** et on le note **arcsin(t).**

3) Soit $t\in\mathbb{R}$. Il existe, dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, un unique nombre dont la tangente vaut t. On l'appelle **arc-tangente de t** et on le note **arctan(t).**







Remarque. Ce théorème se démontre à l'aide du théorème de la valeur intermédiaire : il provient de la stricte monotonie des fonctions trigonométriques sur chaque intervalle où on cherche la solution de l'équation.

***Exercice* 4** ► Résolution de l'équation $\cos(x)=\frac{3}{5}$.

IV Formules d'addition et conséquences

Dans tout ce paragraphe, a et b désigne deux réels quelconques (sauf mention contraire).

IV.1 Formules d'addition pour sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)
\end{aligned}$$

Démo. En plaçant le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle $a+b$ et en calculant les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ de deux manières différentes. Pour les deux autres formules, angles associés.

IV.2 Formules d'addition pour tangente

Soit a et b deux réels non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Si $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Si $a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Démo. En partant des formules d'addition pour cosinus et sinus puis en divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$.

IV.3 Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\
&= 2\cos^2(a) - 1\\
&= 1 - 2\sin^2(a)
\end{aligned}
\qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Les <u>trois</u> formules pour le cosinus doivent être bien connues. Elles permettent de linéariser $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$.

Démo. On applique les formules d'addition avec $b=a$.

IV.4 Formules de linéarisation

Le but des formules de linéarisation est de transformer un produit de cosinus/sinus en une somme.

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)\\
\sin(a)\sin(b) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)\\
\sin(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\big).
\end{aligned}$$

Démo. Se retrouvent en combinant les formules d'addition.

Ces formules s'avèrent utiles, par exemple, pour le calcul intégral.

***Exercice* 5** ► Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$.

IV.5 Formules de factorisation

Inversement, les formules de factorisation permettent de transformer une somme en produit.

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Démo. On introduit $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. Ainsi $p = a+b$ et $q = a-b$. Il suffit d'appliquer les formules d'addition pour conclure.

On peut ainsi déterminer amplitude et phase d'une superposition de deux sinusoïdes de même fréquence et de même amplitude.

***Exercice* 6** ► Factoriser $f(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

V Coordonnées polaires

V.1 Coordonnées polaires

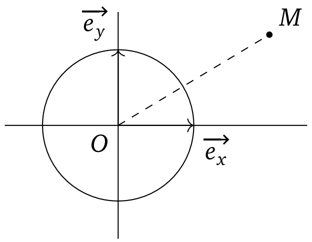
Les coordonnées polaires $[r:\theta]$ sont une approche alternative aux coordonnées cartésiennes (x,y) pour repérer un point dans le plan.

Déf. • On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
Soit M un point distinct de l'origine. On appelle :

1) **rayon polaire de M** la distance $r = OM$,

2) **angle polaire de M** toute mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM})$,

3) **coordonnées polaires de M** tout couple $[r : \theta]$ (noté entre crochets).



L'angle polaire θ de M n'est pas unique : comme c'est une mesure d'angle, il est défini modulo 2π.

L'origine O a pour rayon polaire $r = 0$ mais n'a pas d'angle polaire (l'angle $(\overrightarrow{e_x}, \vec{0})$ n'existe pas).

Exercice **7** ► Déterminer les coordonnées polaires des points A, B, C, D de coordonnées cartésiennes $(1, -1)$, $(0, 2)$, $(-3, 0)$ et $(2, 0)$.

Exercice **8** ► Placer dans le plan les points de coordonnées polaires $[2 : -\frac{\pi}{3}]$, $[\frac{1}{2} : \frac{3\pi}{4}]$ et $[2 : \frac{5\pi}{3}]$.

V.2 Conversions entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

La conversion des coordonnées polaires vers les coordonnées cartésiennes est assez simple. Les coordonnées cartésiennes sont données par les deux formules suivantes.

Propr. • Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires $[r : \theta]$. Alors

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Démo. ⇝ On introduit le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$ et on détermine ses coordonnées cartésiennes en fonction de θ, puis on en déduit les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{OM}$, donc du point M.

Exercice **9** ► Si M a pour coordonnées polaires $[3 : \frac{5\pi}{6}]$, quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

Dans l'autre sens (coordonnées cartésiennes vers coordonnées polaires), la conversion est un peu plus délicate.

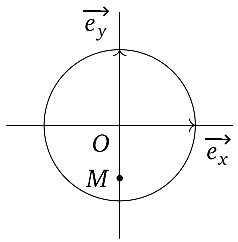
1) Le rayon polaire est donné par la formule : $\boldsymbol{r = OM = \sqrt{x^2+y^2}}$.

2) Pour l'angle polaire θ :

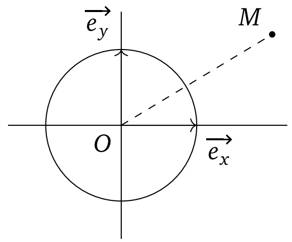
a. Si M est sur l'axe des ordonnées, on peut prendre $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ suivant la position de M.

b. Sinon, on utilise les formules du passage polaire → cartésien pour obtenir $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. On peut parfois deviner une valeur de θ qui convient. Sinon...

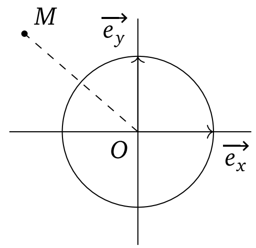
c. On a $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$. On en déduit que $\theta \equiv \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ **mais modulo π seulement.** Pour obtenir une congruence modulo 2π, on regarde dans quel quadrant se trouve le point M et on ajoute π si nécessaire.



Quand $x = 0$, on a $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.



Quand $x > 0$, on a $\theta \equiv \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ [2\pi]$.



Quand $x < 0$, on a $\theta \equiv \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\ [2\pi]$.

Exercice **10** ► Déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes (x, y) lorsque :

1) $x = -2$ et $y = -2\sqrt{3}$,

2) $x = 3$ et $y = -4$,

3) $x = -1$ et $y = 2$.

V.3 Calcul d'amplitude et de phase

But. On souhaite écrire une combinaison linéaire de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

$$x = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$$

sous une forme faisant apparaître une amplitude r et un déphasage φ :

$$x = r\cos(\theta - \varphi).$$

Méthode.

1) On considère le point M de coordonnées cartésiennes (a, b) et on détermine ses coordonnées polaires $[r : \varphi]$.

2) On a donc $a = r\cos(\varphi)$ et $b = r\sin(\varphi)$, que l'on remplace dans l'expression.

3) On factorise par r et on utilise la formule d'addition pour le cosinus.

Exemples.
On traite sur les notes de cours :

1) $\frac{1}{2}\cos(\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$,

2) $-2\cos(\theta)+2\sin(\theta)$,

3) $2\cos(\theta)-3\sin(\theta)$.