MP*: Matrices semblables, sous espaces stables, valeurs propres, polynomes caractéristiques

Coralie Renault

12 janvier 2015

Exercice

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = af + bg$$

Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I = 0$.
Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice (*Endomorphisme cyclique*)

Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$.
On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.
a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.

Exercice

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Etablir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

Exercice

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ convergeant en $+\infty$.
Soit T l'endomorphisme de E donné par

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, T(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.

Exercice

Soit E l'espace des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.
Pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
b) Préciser noyau et image de M.
c) Calculer M^n.

Exercice

Soit $E = \mathcal{C}([0,1]\,,\mathbb{R})$. Si $f \in E$ on pose

$$T(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Vérifier que T est un endomorphisme de E.
b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice

Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice

Déterminer les matrices A à coefficients complexes dont la classe de similitude est bornée.