Colles de mathématiques en PCSI 5

31 janvier et 7 février 2012

Programme

Limite, continuité, règles de comparaison (révision du programme précédent). Dérivabilité. Fonctions k fois dérivables, fonctions de classes $\mathcal{C}^k$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, opérations, théorème de Rolle et accroissements finis. Formule Taylor intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange. Fonctions convexes.

Exercice n° 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, croissante, et telle que l'application $\left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{f(x)}{x} \right\}$ soit décroissante. Prouver que f est continue.

Exercice n° 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+1) + f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ et f décroissante. Prouver que f a une limite en $+\infty$ et donner un équivalent de f.

Exercice n° 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^{n-1} \ln(1+x)$. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition et que l'on a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f_n^{(n)}(x) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Exercice n° 4

[Recollement $\mathcal{C}^\infty$ de polynômes] Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} P(x) & \text{si } x < 0 \\ Q(x) & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Prouver que : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow P = Q$. Donner un contre-exemple lorsqu'on suppose seulement que P et Q sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice n° 5

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Discuter l'équivalence suivante :

$$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell \in \mathbb{R} \iff f'(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0\,.$$

Exercice n° 6

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}.$$

Exercice n° 7

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux points de I et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Prouver qu'il existe $c_1 < c_2 < c_3$ tels que $f(c_2) = 0$ et $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Exercice n° 8

[Rolle en cascade] Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $n+1$ fois dérivable sur $[a,b[$, $n \geqslant 1$. On suppose $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$. Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Exercice n° 9

[Théorème de Darboux] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Prouver que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice n° 10

1. Montrer qu'au voisinage de 0,

$$-\frac{x^2}{2} - 3x^4 \leqslant \ln\cos x \leqslant -\frac{x^2}{2}\,.$$

2. En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\,.$$

Exercice n° 11

[Règle de l'Hôpital] Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $[a,b]$. Montrer que $\exists c \in]a,b[:\ (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$. En déduire la *règle de l'Hôpital* :

Proposition 1. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues en x_0, dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ et telles que $\forall xb \in I \setminus \{x_0\}$ on a $g'(x) \neq 0$. Montrer que :*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell\,.$$

Applications 1. En déduire les limites en 0 de : $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$...

Exercice n° 12

Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Prouver que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$.

Exercice n° 13

Étude de la foncion définie par :

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la série de Taylor converge normalement coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Taylor sur un voisinage du point considéré ?

Exercice n° 14

[Inégalité de Jensen] Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $f :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$g\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leqslant \int_0^1 g \circ f(t)dt\,.$$

On pourra approcher les intégrales par des sommes de Riemann.

Exercice n° 15

1. En utilisant la convexité de la fonction $x \in]0,\infty[\mapsto x\ln x$, prouver que si x, y, a, b sont des réels strictement positifs, alors

$$x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}\,.$$

2. En utilisant la convexité de $x \in]1,\infty[\mapsto -\ln(\ln x)$, prouver que si $x, y > 1$, alors

$$\ln\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}\,.$$

Exercice n° 16

[Inégalité de Hölder] On se donne $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soient $a, b \geqslant 0$. Prouver que $ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. *On pourra utiliser la concavité de* ln.

2. Soient $n \geqslant 1$ et $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$ des réels strictement positifs. Prouver que :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Pour cela, on pourra poser $\alpha_i = \dfrac{a_i}{(\sum_{i=1}^n {a_i}^p)^{\frac{1}{p}}}$ et $\beta_i = \dfrac{b_i}{(\sum_{i=1}^n {b_i}^q)^{\frac{1}{q}}}$.

Exercice n° 17

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $x < y < z$ trois éléments de I. On note

$$p_{xy} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,, \quad p_{yz} = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}\,, \quad p_{zx} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\,.$$

Prouver que $p_{xy} \leqslant p_{xz} \leqslant p_{yz}$. (Un dessin est fortement recommandé !) En déduire, en utilisant la monotonie de la fonction « taux d'accroissement en un point de I » que f admet en tout point de I des dérivées à gauche et à droite et que l'on sait les comparer. Expliquer pourquoi f est nécessairement continue.

Exercice n° 18

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Définissons $\varphi\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = f(x) + f(1-x)\,.$$

Prouver que φ est décroissante.

Exercice n° 19

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Prouver que

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

Exercice n° 20

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est minorée sur I.