

Colle MP 12 : Séries entières

4 juin 2022

<https://www.youtube.com/watch?v=b0XCLR3Wric&t=1239s>

Colle 1

Jawed (14) : Assez bien.

Laura (15) : Bien. Se souvient de la démo de $\sin(n) \not\rightarrow 0$.

Exercice 1. Lemme d'Abel.

Exercice 2. Rayon de CV de $\sum \sin(n)z^n$?

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon R. Quel est le rayon de CV de $\sum a_n^2 z^n$?

Exercice 4. Mq si une série entière est nulle sur un voisinage de 0, elle est identiquement nulle.

Colle 2

Achille (12) : confusions et erreurs multiples dans la formule du produit de Cauchy

Exercice 1. Règle de D'Alembert.

Exercice 2. DSE et rayon de CV de $\ln(1+x-2x^2)$?

Exercice 3. Rayon et calcul de $\sum \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4. Soit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.
— Calculer $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en mq $xS(x)^2 = S(x) - 1$.
— En déduire $a_n, \forall n$.

Exercice 5. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$ est développable en série entière sur un voisinage de 0 et trouver son rayon de convergence.

Aide : montrer que f vérifie l'ED $(1 - t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$.

Colle 3

Julien (15) : Petite erreur de calcul. Bien sinon.

Exercice 1. Règle de D'Alembert.

Exercice 2. DSE et rayon de CV de $\ln(1 + x - 2x^2)$?

Exercice 3. Rayon et calcul de $\sum \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4. Soit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.
— Calculer $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en mq $XS(x)^2 = S(x) - 1$.
— En déduire $a_n, \forall n$.

Exercice 5. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$ est développable en série entière sur un voisinage de 0 et trouver son rayon de convergence.

Aide : montrer que f vérifie l'ED $(1 - t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$.

Colle 4

Alex (10) : ne connaît pas bien la démo. Manque de pratique.

Pauline (14) : ne pense pas à utiliser la propriété fondamentale de \ln . Un peu lent dans les calculs mais bien sinon.

Exercice 1. Règle de d'Alembert.

Exercice 2. DSE de $\ln(1 + x - 2x^2)$?.

Exercice 3. Quels sont les z pour lesquels $\sum \frac{z^n}{n}$ converge ?

Exercice 4. Soit B_n le nombre de partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Calculer B_1, B_2, B_3 .

2. Mq

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

3. Soit $S_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. Mq $B_n = S_n$.

4. Montrer que $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ a un rayon de CV infini, et calculer sa somme.