Chapitre 9

Séries entières

1. Définitions

1.0. Introduction

Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ z \to a_n z^n \end{cases}$.

On parle alors (abus d'écriture) de la série entière $\sum a_n z^n$.

1.1. Définition : série entière

Définition 1 : **série entière complexe, réelle**

On appelle série entière de la variable complexe z la série de fonctions

$$\boxed{\sum a_n z^n} \quad \text{où } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

On appelle série entière de la variable réelle t la série de fonctions

$$\boxed{\sum a_n t^n} \quad \text{où } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

- La théorie est faite pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais est facilement adaptable à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- On se restreindra à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lorsqu'il s'agira d'évoquer la dérivabilité.

1.2. Lemme d'Abel

Lemme d'Abel : Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors :

pour tout $z \in B(0,r)$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge absolument.

- Démonstration **1**.
- Exemple : si $\sum a_n {z_0}^n$ converge, alors :

  pour tout $z \in \mathbb{C} / |z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

- Ainsi : comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge,

  $\sum \frac{z^n}{n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C} / |z| < 1$

- L'idée : on a donc intérêt à trouver un r optimal …

  "le plus grand" ? mais existe-t-il ?

1.3. Définitions

Définition 1 : **une première définition du rayon de convergenc**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ et soit $A = \{r \in \mathbb{R}_+ \,/\, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal :

- $R = Sup(A)$ si A est majoré
- $R = +\infty$ sinon.

On pourra le noter $R\left(\sum a_n z^n\right)$

Définition 2 : **disque de convergence et cercle d'incertitude**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R.

Le **disque ouvert de convergence** est l'ensemble $\boxed{\mathcal{B}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R\}}$

et le **cercle d'incertitude** est l'ensemble $\boxed{\mathcal{C}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = R\}}$.

- Ces dénominations seront justifiées a posteriori (§ 2).
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: l'**intervalle ouvert de convergence** est $\boxed{\mathcal{B}(0,R) =]-R,R[}$

Propriété : Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ (où $\lambda \in \mathbb{R}^*$)

ont même rayon de convergence

- Démonstration **2**.

2. Le théorème fondamental

2.1. Le théorème fondamental

Théorème 1 : **convergence de la série et continuité de sa somme**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

① Pour tout $z \in \mathbb{C}$: si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument

si $|z| > R$, la série diverge grossièrement.

② Pour tout $r \in]0,R[$: la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathcal{B}_f(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leqslant R\}$.

③ La fonction somme $S : z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

- Démonstration **3**.
- Attention : il est possible que S soit définie pour certains $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = R$ (voire pour tous).

2.2. Un bilan

- Convergence absolue dans le disque ouvert de convergence.
- Continuité de la fonction somme sur ce disque ouvert.
- Convergence normale dans tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.
- Divergence à l'extérieur du disque fermé de convergence.
- Incertitude sur le cercle d'incertitude.

3. Méthodes pratiques

3.1. Détermination du rayon de convergence

Définition 1-bis : **diverses définitions du rayon de convergenc**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

- $R = Sup(\{r \in \mathbb{R}_+ / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\})$
- $R = Sup(\{r \in \mathbb{R}_+ / a_n r^n \to 0\})$
- $R = Sup(\{|z| ; z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum a_n z^n \text{ converge}\})$

- Les *Sup* sont à comprendre ici dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en convenant que si une partie A non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée, alors $Sup(A) = +\infty$.
- Démonstration **4**.

3.2. Enfin des exemples **5**. ☺

1	$\sum z^n$	4	$\sum \frac{z^n}{n!}$
2	$\sum \frac{z^n}{n^2}$	5	$\sum n^n z^n$
3	$\sum \frac{z^n}{n}$	6	$\sum \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) z^n$

3.3. Bilan : les arguments les plus souvent utilisés

- On veut par exemple montrer que $R = 1$.

Argument	Conclusion		Argument
Pour $r > 1$: $a_n r^n \to +\infty$	$R \leqslant 1$	$R \geqslant 1$	Pour $r < 1$: $a_n r^n \to 0$
Pour $\lvert z\rvert > 1$: $\sum a_n z^n$ DV			Pour $\lvert z\rvert < 1$: $\sum a_n z^n$ CV
$r \leftarrow 1$: $\sum a_n$ DV			$r \leftarrow 1$: $\sum a_n$ CV

3.4. Règle de D'Alembert.

Proposition : **règle de D'Alembert pour les séries entières**

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.

Si la limite $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$

avec les conventions : $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

- Démonstration **6**.
- Attention la limite peut ne pas exister : le rayon lui existe toujours !
- On peut dans les cas plus délicats utiliser la "règle de D'Alembert pour les séries" : notamment pour les séries "lacunaires"
- Exemple 7 **6 bis**.

$$\boxed{\sum \frac{z^{2n}}{n}}$$ (BIEN RETENIR COMMENT RÉDIGER)

3.5. Compléments bons à savoir (exercices)

- Si une série de fonctions converge uniformément sur une partie A, alors elle converge aussi uniformément sur $\overline{A}$. Et donc en particulier :
- Si une série entière converge uniformément sur $\mathcal{B}(0, R)$, alors elle converge aussi uniformément donc simplement sur $\mathcal{B}_f(0, r)$.
- Conséquence : si la série diverge en un point du cercle d'incertitude, inutile d'espérer une convergence uniforme sur $\mathcal{B}(0, r)$!

4. Comparaison et propriétés algébriques

4.1. Comparaison

Proposition 1 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons respectifs R_a et R_b.

- Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant n_0 \Rightarrow \boxed{|a_n| \leqslant |b_n|}$ ou si $\boxed{a_n = o(b_n)}$ ou si $\boxed{a_n = O(b_n)}$, alors $\boxed{R_a \geqslant R_b}$
- Si $\boxed{a_n \sim b_n}$ alors $\boxed{R_a = R_b}$.

- Démonstrations **7**.
- Exemples : **8**.
  - Exemple 7 : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $R\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant 1$ (utile ☺)
  - Exemple 8 : $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$ (utiliser la **formule de Stirling**)

4.2. Somme et produit de Cauchy

Introduction **9** : conformément à ce qui a été défini pour les séries de fonctions

⇨ la somme de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\boxed{\sum (a_n + b_n) z^n}$

⇨ le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est (après calculs) la série entière $\boxed{\sum c_n z^n}$ où $\boxed{c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i}$

> Proposition 2 :
>
> Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
>
> Soient $\sum s_n z^n$ (resp. $\sum c_n z^n$) leur somme (resp. produit de Cauchy) de rayons de convergence respectifs R_S et R_P. Alors :
>
> ❶ $R_S \geqslant Min(R_a, R_b)$ et $R_P \geqslant Min(R_a, R_b)$
>
> ❷ si $R_a \neq R_b$, alors $R_S = Min(R_a, R_b)$
>
> et en tout point z où les séries convergent simultanément, on a :
>
> ❸ $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

- Autrement dit :

❸ $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n}$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n}$

- Démonstrations **10**.
- Attention : il est possible que $R_P > Min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$, et il est possible, si $R_a = R_b$, que $R_S > Min(R_a, R_b)$.
- Exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

4.3. Un exemple : l'exponentielle complexe

Définition : $\forall z \in \mathbb{C}$: $\boxed{\exp(z) \overset{déf}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$.

- On a vu en exemple 4 qu'on a bien : $R\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = +\infty$.
- Par le théorème fondamental, cette fonction est continue sur $\mathbb{C}$
- Propriété : $\boxed{\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')}$
    - Démo. **11**. (on utilise ici la **formule du binôme**)
- On démontre exactement de la même manière que :

  $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \, / \, MN = NM$: $\boxed{\exp(M + N) = \exp(M) \times \exp(N)}$

  La formule du binôme exige effectivement que M et N commutent !

4.4. Série dérivée

Définition

On appelle "série dérivée" de la série entière $\sum a_n z^n$ la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Il ne s'agit ici que d'une **définition formelle** : le procédé est identique à celui vu en M.P.S.I. pour la définition formelle du polynôme dérivé.

Propriété : $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}\right)$.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{12}}$.

5. Cas des séries entières réelles

5.1. Intégration terme à terme

Proposition 1 :

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, de somme S.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \quad [a,b] \subset]-R,R[$.

Alors la série $\sum a_n \left(\int_a^b t^n dt\right)$ converge et $\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b t^n dt\right)$.

- ou encore $\boxed{\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b t^n dt\right)}$
- On peut donc "intégrer terme à terme" sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$
- Démonstration $\boxed{\mathbf{13}}$.

5.2. Primitivation terme à terme

Proposition 2 :

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, de somme S.

Alors les primitives de S sur $]-R,R[$ s'écrivent : $t \to k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$.

- ou encore $\boxed{\operatorname{Prim}_0\left(t \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Prim}_0(t \to a_n t^n)}$
- On peut donc "primitiver terme à terme" sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ (en n'oubliant pas au besoin la constante).
- Démonstration $\boxed{\mathbf{14}}$.
- Exercice traité n° 1 : $\boxed{\mathbf{15}}$.

ꕥ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ ꕥ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln\ 2$ ꕥ

5.3. Dérivation terme à terme

Proposition 3 :

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, de somme S.

Alors $S \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{R})$ et les dérivées successives de S s'obtiennent par "dérivation terme à terme".

- Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-R,R[$: $\boxed{S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k a_n t^{n-k}}$.
- En particulier : $\boxed{S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n}$.
- Démonstration **16**.
- Exercice traité n° 2 : **17**.

  Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ et formule $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^{n-k} = \frac{1}{(1-t)^{k+1}}$ (CCP 96 et 111)

5.4. Coefficients d'une série entière réelle

a) Valeur des coefficients

Proposition 4 :

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, de somme f.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

- Ainsi : $\forall t \in]-R,R[$: $\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n}$.

  on obtient ainsi le "développement en **série de Taylor**" de la fonction f.
- Démonstration **18**.
- Exercice traité n° 3 : **19**.

  Calcul de $\operatorname{Arc\,tan}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Corollaire : unicité des développements en série entière

Proposition 5 :

Soient deux séries entières réelles $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ de rayons non nuls.

S'il existe un voisinage de 0 sur lequel les fonctions $t \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $t \to \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ coïncident, alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = b_n$.

- Démonstration **20**.
- Intérêt : on pourra utiliser l'argument d'"unicité du D.S.E." notamment dans les équations différentielles.

6. Fonctions développables en séries entières

6.1. Définition

<u>Définition</u> : **fonction développable en série entière (D.S.E.)**

Une fonction f définie sur un voisinage V de 0 est dite développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que $\forall z \in V \ : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

6.2. Quelques propriétés en bref des fonctions D.S.E.

<u>P1</u> Soit f D.S.E : si elle est paire (resp.impaire), son D.S.E. ne contiendra que des puissance paires (resp. impaires).

<u>P2</u> Si f et g sont D.S.E, alors $f+g$, αf et $f \times g$ sont D.S.E.

avec $\boxed{R(f+g) \geqslant \text{Min}(R(f), R(g))}$, (égalité si $R(f) \neq R(g)$)

$\boxed{R(\alpha f) = R(f)}$ (si $\alpha \neq 0$) et $\boxed{R(f \times g) \geqslant \text{Min}(R(f), R(g))}$

<u>P3</u> Si f est D.S.E. à valeurs réelles, alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$; ses dérivées successives sont D.S.E et les D.S.E s'obtiennent par dérivation terme à terme ; toute primitive F de f est D.S.E et son D.S.E. s'obtient en ajoutant $F(0)$ à la primitivation terme à terme du D.S.E de f.

De plus, si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

6.3. Exemple de D.S.E. complexes

$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$	$\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

- Voir § 3.2 (exemples 1 et 4) et § 4.3.

6.4. Exemple de D.S.E. réels **21** : **ils sont à connaître <u>impérativement</u> !**

I. de rayon $\boxed{R = +\infty}$, issus de $\exp t = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}$	
$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$	$\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$	$\text{sh}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

II. de rayon $\boxed{R = 1}$, issus de $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$	
$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$	$\dfrac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$
$\text{Arctan}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$	$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{t^n}{n}$

III. de rayon $\boxed{R = 1}$: $(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$

6.5. A propos des séries de Taylor

- **Toute fonction réelle D.S.E est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ (d'après § 5.3)
- **La réciproque est fausse** : si $f \in \mathcal{C}^\infty \ \forall t \in]-r,r[,\mathbb{R}$, on peut définir sa

"série de Taylor" $\sum \frac{f^{\,n}(0)}{n!} t^n$ mais le rayon de convergence peut être nul.

et même si $R \neq 0$, il n'est pas sûr que $\forall t \in]-R,R[\ : \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$!

- Contre-exemple classique (exercice)

  Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$:

  on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$ et donc la série de Taylor est nulle !

☯