PSI — *Programme de colle n^{o}2* — *2022/2023*

Semaine du 29 au 30 septembre

Rev An 0 :
- Logique des rédactions mathématiques
- Récurrences
- Binôme de Newton, somme des termes d'une suite géométrique
- Méthodes de calculs (usage des $\sum$, $\prod$, sommes téléscopiques…)

Rev An 1 : Fonctions
- arctan, partie entière. Limites, croissances comparées, équivalents, DL
- $f \neq f(x)$: par ex « $\forall x$, f est croissante » n'a pas de sens…
- Allure locale de la courbe représentative de f à partir d'un DL

Rev An 1 : Fonctions convexes
- Segment, Partie convexe : Exemples
- Définition de fonction convexe, Inégalité de Jensen
- Croissance des pentes des cordes, thm des trois pentes
- Cas des fonctions $\mathscr{C}^2$
- Position de la courbe par rapport aux cordes, aux tangentes
- Exemples d'inégalité obtenues par convexité : exp, $x \longmapsto \ln(1+x)$, majoration et minoration du sin

Révisions sur les suites
- Convergence des suites $(-1)^n$, $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$
- Sommes de Riemann, Théorème de Césaro (réciproque fausse) : moyennes…
- Thm des gendarmes, à ne pas confondre avec le passage à la limite.
- Suites adjacentes, suites extraites
- Suites équivalentes ; utilisation pour la convergence des suites : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ par exemple.
- Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ $(*)$: Exemple d'équivalent dans le cas non contractant par Césaro
- Suites implicites (définies comme racine d'une équation…) : Exemple de DA.

An 1 : Série réelle et complexe - Compléments
- Formule de Stirling
- Vocabulaire, exemples, dont série géométrique.
- Absolue convergence, elle implique la convergence.
- Règle de d'Alembert. Exemples, dont série exponentielle.
- Série alternée ; Condition suffisante de convergence. Majoration du reste.
- DA si le TSSA ne s'applique pas.
- Comparaison série intégrale ; Exemples des séries de Riemann, de $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(*)$

  Application à la recherche d'un équivalent de la somme ou du reste.
- Majoration du reste : 3 cas à connaître…
- Lien suite/série : la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ est de même nature que la suite (a_n).
- Attention : Pas de Produit de Cauchy de deux séries…

Alg1 : Espace vectoriel :
- famille **finie** libre, liée, génératrice d'un sous espace vectoriel ; Base.
- Somme, somme directe de p sous espaces vectoriels.
- Cas de la dimension finie : dimension, base adaptée, formule de Grassman.
- Supplémentaire, existence en dimension finie.
- Rang d'une famille.

Alg2 : Application linéaire :
- Restriction, réciproque, image d'une famille génératrice, liée, libre…
- Théorème du rang.
- Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
- "Algèbre" $\mathcal{L}(E)$, "groupe" linéaire (vocabulaires !)
- Projecteur/projection, symétrie/involution : cours et exemples…

Alg3 : Compléments sur les matrices

- Matrice associée à une famille, à une application linéaire
- Produit de matrices.
- Matrices carrées, matrices symétriques et antisymétriques, matrices inversibles.
- Binôme de Newton, formule $A^n - B^n$.
- Matrices de changement de base.
- Rang d'une matrice. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Opérations élémentaires sur les matrices, application aux systèmes, au calcul du rang.

Questions de cours :

* Position relatives des trois moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de n réels de $\mathbb{R}_+^*$.
* $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$
* $u_0 \in [0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$: étude de la suite, de $\sum u_n^3$, équivalent de u_n par Césaro
* $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$: étude de la suite, de $\sum(-1)^n/u_n$, équivalent de u_n par Césaro
* DA de la suite définie par $\forall n \geqslant 1$, u_n est l'unique racine dans $]n\pi, n\pi + \pi/2[$ de l'équation $\tan(x) = x$
* Exemple d'allure locale de la courbe à partir d'un DL
* Combinaison linéaire de séries CV, CVA, d'une série CV et d'une série DV...
* $u_n = O(v_n)$ où $\sum v_n$ CVA $\Longrightarrow \sum u_n$ CVA.
* Série géométrique : CV, Somme, Reste...
* Comparaison série intégrale : Série de Riemann, $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$
* Thm de d'Alembert (∗)
* Série exponentielle
* TSSA (∗)
* Nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$
* Nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
* DA de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+k)$, de (u_n) définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$
* Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (2 méthodes...)
* $L_2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum u_n^2 \text{ converge}\}$ est un espace vectoriel.
* $\{f \in \mathscr{C}^\infty / f'' - f = 0\}$ est un espace vectoriel (par trois méthodes différentes)
* Espaces en somme directe : diverses caractérisations, cas de plus de 2 sous espaces...
* Formule de Grassmann
* Espaces supplémentaires : diverses caractérisations
* Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{u}_\alpha) = \mathbb{R}^2$, où $\vec{u}_\alpha = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. (*)
* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
* Thm du rang (cas général, puis application à la version classique...)
* Projecteurs et projections
* Symétries et involutions
* Projection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$
* Rang d'une application linéaire
* Produit des matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
* Applications linéaires canoniquement associées à $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
* Définition de la trace d'une matrice, **d'un endomorphisme.**
* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
* Pour un projecteur p, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

(∗) : Lorsqu'un dessin s'impose, celui-ci DOIT être réalisé...