PCSI – TD_3

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Déterminer les solutions des équations différentielles :

1. $y'' - 3\,y' + 2\,y = \sin(3\,t)$,

Réponse

Commençons par remarquer que l'équation caractéristique a pour racines 1 et 2, donc que les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_0 = \left\{t \mapsto C \times e^t + D \times e^{2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Cherchons une solution particulière du type $A \times \sin(3\,t) + B \times \cos(3\,t)$. En remplaçant dans l'équation, une telle fonction est solution si et seulement si :

$$(-9\,A + 9\,B + 2\,A) \times \sin(3\,t) + (-9\,B - 9\,A + 2\,B) \times \cos(3\,t) = \sin(3\,t),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -7\,A + 9\,B = 1 \\ -7\,B - 9\,A = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{7}{130} \\ B = \frac{9}{130} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$\boxed{S = \left\{t \mapsto \frac{1}{130} \times (-7\,\sin(3\,t) + 9\,\cos(3\,t)) + C \times e^t + D \times e^{2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. $y'' - 2\,y' + y = e^t + \cos(t)$.

Réponse

Commençons, comme d'habitude, par l'équation homogène. Elle admet pour solutions :

$$S_0 = \left\{t \mapsto (C\,t + D) \times e^t, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, il s'agit d'utiliser le principe de superposition. Commençons par chercher une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2\,y' + y = e^t$$

de la forme $B \times t^2 \times e^t$, puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique. On trouve, en remplaçant dans l'équation différentielle $B = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} \times e^t$ est solution particulière. Passons à l'équation :

$$y'' - 2\,y' + y = e^t$$

dont on cherche une solution particulière du type $A \times \cos(t) + B \times \sin(t)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} -A - 2\,B + A = 1 \\ -B + 2\,A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc la fonction $t \mapsto -\frac{\sin(t)}{2}$ est solution particulière de cette dernière équation différentielle. On en déduit que le solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - 2\,y' + y = e^t + \cos(t)$$

sont :

$$\boxed{S = \left\{ t \mapsto -\frac{\sin(t)}{2} + \left(\frac{t^2}{2} + C\,t + D \right) \times e^t, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 2 :

Soit $\omega > 0$. Déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 \times y = \cos(\omega \times t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Réponse

Rappelons que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Recherchons maintenant une solution particulière de la forme $A \times t \times \cos(\omega \times t) + B \times t \times \sin(\omega \times t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$-2\,A \times \omega \times \sin(\omega \times t) + 2\,B \times \omega \times \cos(\omega \times t) = \cos(\omega \times t)$$

ce qui équivaut à $A = 0$ et $B = \frac{1}{2\,\omega}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{t}{2\,\omega} \times \sin(\omega \times t) + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Cherchons maintenant la solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire, calculons C et D. On trouve :

$$\begin{cases} C = 1 \\ \omega \times D = 0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donc :

$$\boxed{f : t \mapsto \frac{t}{2\,\omega} \times \sin(\omega \times t) + \cos(\omega \times t).}$$

Exercice 3 :

Déterminer, en fonction du paramètre k, les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - 2\,k \times y' + (1 + k^2) \times y = \sin(t).$$

Réponse

Commençons par calculer les solutions de l'équation homogène. L'équation caractéristique :

$$x^2 - 2\,k \times x + (1 + k^2) = 0$$

a pour discriminant $\delta = 4\,k^4 - 4\,(1 + k^2) = -4 < 0$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$S_0 = \left\{t \mapsto e^{k \times t} \times (C \times \cos(t) + D \times \sin(t)), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Recherchons maintenant une solution particulière. Il y a deux cas :

1. Si $k = 0$ alors l'équation différentielle devient $y'' + y = \sin(t)$ dont on cherche une solution particulière du type $A \times t \times \cos(t) + B \times t \times \sin(t)$. On trouve $-\frac{t}{2} \times \cos(t)$ et l'on en déduit l'ensemble de solutions :

$$\boxed{S = \left\{t \mapsto -\frac{t}{2} \times \cos(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. Si $k \neq 0$, il s'agit alors de trouver une solution particulière du type $A \times \cos(t) + B \times \sin(t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{cases} -A - 2\,k \times B + (1 + k^2) \times A = 0 \\ -B + 2, k \times A + (1 + k^2) \times B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,B + k \times A = 0 \\ 2\,A + k \times B = \frac{1}{k} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{k \times (4 + k^2)} \\ B = \frac{1}{4 + k^2} \end{cases}$$

on en déduit l'ensemble de solutions :

$$\boxed{S = \left\{t \mapsto \frac{1}{4 + k^2} \left(\sin(t) + \frac{2\,\cos(t)}{k}\right) + e^{k \times t}\,(C \times \cos(t) + D \times \sin(t)), \ (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + f(-t) = e^t$,

Réponse

Commençons par remarquer que comme f est dérivable et que $f'(t) = e^t - f(-t)$ alors f' aussi. En dérivant l'égalité, on obtient :

$$f''(t) - f'(-t) = e^t \iff f''(t) + f(t) = e^t + e^{-t}$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = e^t + e^{-t}.$$

Un étudiant expérimenté à ce moment du TD découvrira la solution particulière :

$$t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

d'où l'ensemble de solutions :

$$\left\{ t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2} + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

ceci termine l'analyse. Passons à la synthèse. On remarque facilement que s'il existe C et D deux réels tels que :

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + C \times \cos(t) + D \times \sin(t)$$

alors $f'(t) + f(-t) = e^t$. L'ensemble des fonctions solution de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2} + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Effectuons maintenant la synthèse. Une fonction de du type

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + C \times \cos(t) + D \times \sin(t)$$

est solution su problème initial si et seulement si :

$$f'(t) + f(-t) = e^t \iff C = -D$$

L'ensemble de fonctions recherchées est donc :

$$\boxed{S' = \left\{ t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2} + C \times (\cos(t) - \times \sin(t)), \quad C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = f(-t)$.

Réponse

Raisonnons comme dans la question précédente. L'égalité montre que f' est dérivable puis :

$$f''(t) = -f'(-t) = -f(t).$$

La fonction f es donc solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

dont les solutions sont :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Lesquelles de ces fonctions sont-elles effectivement solutions du problème de départ ? En injectant dans l'équation, on trouve que c'est la cas si et seulement si :

$$-C \times \sin(t) + D \times \cos(t) = C \times \cos(-t) + D \times \sin(-t) = C \times \cos(t) - D \times \sin(t) \iff C = D$$

L'ensemble de fonctions recherché est donc :

$$\boxed{S = \{t \mapsto C \times (\cos(t) + \sin(t)), \quad C \in \mathbb{R}\}.}$$