Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (2ème partie)

I Fonctions trigonométriques et hyperboliques

I.1 Fonctions cosinus et sinus

- Domaine de définition. Fonctions à valeurs dans $[-1,1]$, donc bornées.
  Régularité et dérivée.
- Périodicité, parité/imparité.
  Conséquences pour l'étude et les représentations graphiques.
- Tableau de variation sur $[0,\pi]$, tracé de la courbe.
- Absence de limite en $\pm\infty$ (admis).

I.2 Fonction tangente

- Domaine de définition et représentation sur l'axe réel.
  C'est une réunion d'une infinité d'intervalles.
  Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, non bornée.
- Régularité et dérivée (démonstration).
- Périodicité, imparité et conséquences.
- Tableau de variation sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, limites, tracé de la courbe.
- Absence de limite en $\pm\infty$ (admis).

I.3 Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

- Rappel des formules d'Euler + définition par analogie.
- Signe, relation fonctionnelle, à valeurs dans...
- dérivabilité et dérivées.
- parité/imparité et conséquences.
- Tableau de variation sur $\mathbb{R}$, limites.
- Branches infinies : limites de $f(x)/x$, courbes asymptotes l'une de l'autre et position relative en $+\infty$.
- Tracé des courbes.

II Fonctions bijectives

II.1 Image directe d'un intervalle

Déf. • Image directe d'un intervalle
Soit f une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$, I un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$.
On appelle **image directe de I par f** l'ensemble comprenant toutes les images des éléments x de I par la fonction f. On la note $\boldsymbol{f(I)}$.
Formellement : $f(I)=\{f(x),\ x\in I\}$.

Graphiquement :

Exercice **1** ► Déterminer graphiquement l'image directe des intervalles $I_1=\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$ et $I_2=\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right[$ par la fonction cosinus.

Thm • Théorème de l'image directe
Soit $f:\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que
1) I est un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$,
2) f est continue sur I,
3) f est strictement monotone sur I.
Alors $f(I)$ est aussi un intervalle, et ses bornes sont les limites de f au bornes de I ; une borne incluse dans I devient une borne incluse dans $f(I)$ et vice versa.

Rem. ◇ Quand f n'est pas strictement monotone sur I, on écrit I comme réunion d'intervalles sur chacun dequels f est strictement monotone, puis on utilise que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

Exercice **2** ► Montrer les conjectures faites dans l'exercice précédent. Déterminer également $\cos(]-\pi,\pi])$, $\operatorname{sh}(]-\infty,0[)$ et $\operatorname{sh}(\mathbb{R})$.

II.2 Fonctions bijectives de I dans J

Déf. • Fonctions bijectives de I dans J

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$,
I un intervalle tel que $I \subset \mathscr{D}_f$ et J un intervalle quelconque.

On dit que f **est bijective de I dans J** quand :

1) l'image de tout élément de I par la fonction f se trouve dans J :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in J,$$

2) tout élément de J admet un unique antécédent dans I par la fonction f :

$$\forall t \in J, \exists ! x \in I, \quad f(x) = t.$$

Graphiquement :

Pour montrer qu'une fonction est bijective, on dispose de deux méthodes :

a) Utiliser le théorème de la bijection monotone

Thm • Théorème de la bijection monotone

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors f est bijective de I dans $J = f(I)$.

Exercice **3** ► Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \mathrm{e}^x$ est bijective de $I = \mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on précisera.

Exercice **4** ► Étudier la bijectivité des fonctions ln, exp, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$.

b) En s'appuyant sur la définition :

1) On fait une conjecture sur les intervalles I et J qui vont convenir,

2) On démontre que $\forall x \in I, \ f(x) \in J$,

3) On prend $t \in J$ fixé et on résout l'équation $f(x) = t$ d'inconnue $x \in I$. On doit trouver une unique solution.

Exercice **5** ► Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$ est bijective de $I =]2, +\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera.

II.3 Bijection réciproque

Déf. • Bijection réciproque

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$, I et J deux intervalles.

On suppose que f est bijective de I dans J.

1) Pour chaque $t \in J$, on note $f^{-1}(t)$ l'unique antécédent de t par la fonction f qui se trouve dans I.

2) On définit ainsi une fonction $f^{-1} : \begin{array}{l} J \longrightarrow I \\ t \longmapsto f^{-1}(t) \end{array}$ qu'on appelle la **bijection réciproque de f (sous-entendu : « de f restreinte à I »).**

Schéma explicatif

Exercice **6** ► Préciser la bijection réciproque de $f : x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$ restreinte à $]2, +\infty[$.

Exercice **7** ► Déterminer la bijection réciproque de exp et de ln.

Propr. • Propriétés algébriques des bijections réciproques

Soit f bijective de I dans J, f^{-1} sa bijection réciproque,
x et t deux réels quelconques. Alors :

1) f^{-1} est bijective de J dans I.

2) La bijection réciproque de f^{-1} est f.

3) $\forall x \in I, \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

4) $\forall t \in J, \quad f\big(f^{-1}(t)\big) = t$.

5) $\begin{cases} f(x) = t \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(t) \\ t \in J \end{cases}$

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Courbe représentative d'une bijection réciproque

Les courbes représentatives d'une bijection f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démo. Sur les notes de cours.

Représentation graphique

Exercice 8 ► Tracer la courbe de la fonction racine cubique.

II.4 Propriétés analytiques des bijections réciproques

Thm • Soit f continue et strictement monotone sur l'intervalle I. On note $J = f(I)$, de sorte que f est bijective de I dans J.
Alors :
1) f^{-1} est continue sur J,
2) f^{-1} est également strictement monotone, de même sens de variation que f,
3) Les limites de f^{-1} aux bornes de J sont les bornes de l'intervalle I.

Exercice 9 ► Que dit le théorème précédent sur ln et exp ?

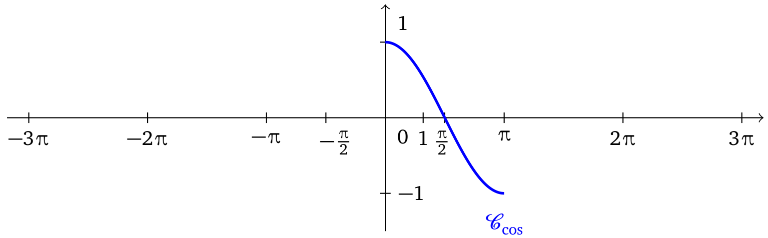
Thm • Dérivation des bijections réciproques
Soit f bijective de I dans J, f^{-1} sa bijection réciproque.
On suppose que f est dérivable sur I. Alors :
1) Soit $x \in I$ quelconque. Alors $f'(x) = 0 \iff f^{-1}$ n'est pas dérivable en $f(x)$.
En cas de non-dérivabilité, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale en $f(x)$.
2) En tout point $t \in J$ où f^{-1} est dérivable, on a

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(t)}.$$

Exercice 10 ► Soit $f : x \mapsto 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.
1) Étudier f et tracer l'allure de la courbe de f.
2) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on précisera.
3) Tracer l'allure de la courbe de f^{-1}.
4) Étudier les propriétés de f^{-1} en appliquant les théorèmes.

III Fonctions trigonométriques réciproques

III.1 Fonction arc-cosinus



Propr. • La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

Démo. Sur les notes de cours.

Déf. • Fonction arc-cosinus
On appelle **fonction arc-cosinus** et on note **arccos** la bijection réciproque de cos restreinte à $[0, \pi]$.

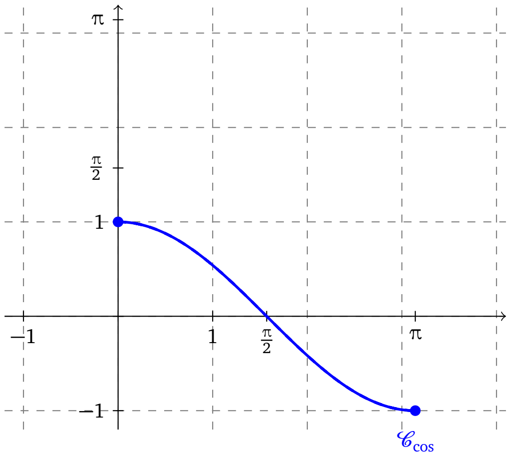
Attention ! On n'utilise pas la notation $\cos^{-1}$ car la fonction cosinus est bijective au départ d'autres intervalles que $[0, \pi]$ (par exemple $[-\pi, 0]$) ce qui pourrait être source d'ambiguïtés.

Schéma cosinus / arc-cosinus

Valeurs remarquables de la fonction arc-cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	**arccos(t)**
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	t

Courbes de cosinus et d'arc-cosinus



Propr. • Propriétés algébriques de la fonction arc-cosinus

Soit x et t deux réels quelconques.

1) arccos est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$.

2) $\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos\big(\cos(x)\big) = x$.

3) $\forall t \in [-1,1], \quad \cos\big(\arccos(t)\big) = t$.

4) $\begin{cases} \cos(x) = t \\ \quad x \in [0,\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \arccos(t) \\ t \in [-1,1] \end{cases}$

Attention ❢ Les intervalles jouent un rôle crucial ! Les propriétés ne sont pas vraies lorsque x et t ne sont pas dans l'intervalle indiqué : soit l'un des deux membres n'existe pas, soit les deux membres ont des valeurs différentes.

***Exercice* 11** ► Calculer, si c'est possible, les nombres suivants :

1) $\cos\big(\arccos(0)\big)$, $\cos\big(\arccos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)\big)$, $\cos\big(\arccos(-2)\big)$.

2) $\arccos\big(\cos\big(\frac{\pi}{3}\big)\big)$, $\arccos\big(\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big)\big)$, $\arccos\big(\cos\big(\frac{7\pi}{2}\big)\big)$.

***Exercice* 12** ► Résoudre dans $[0,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{2}{3}$.

Propr. • Pour tout $t \in [-1,1]$, $\sin\big(\arccos(t)\big) = \sqrt{1-t^2}$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours **(à savoir refaire).**

Propr. • Régularité d'arc-cosinus

1) La fonction arccos est continue sur son domaine de définition $[-1,1]$.

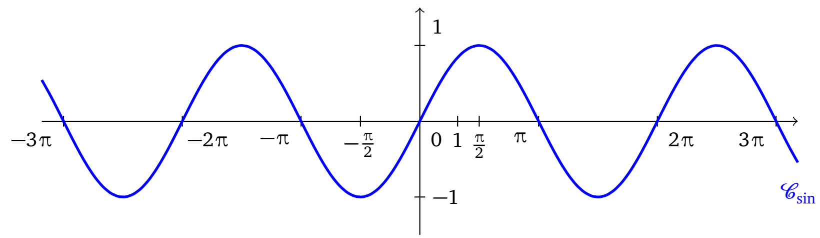
2) Elle est dérivable sur son domaine de définition **sauf en -1 et en 1.**
En ces points la courbe admet des tangentes verticales.

3) Enfin, $\quad \forall t \in]-1,1[, \quad \arccos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

III.2 Fonction arc-sinus

L'étude est similaire pour la fonction sinus. Seul l'intervalle de départ de la fonction sinus change.



Propr. • La fonction sinus est bijective de $\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$ dans $[-1,1]$.

Déf. • Fonction arc-sinus

On appelle **fonction arc-sinus** et on note **arcsin** la bijection réciproque de sin restreinte à $\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$.

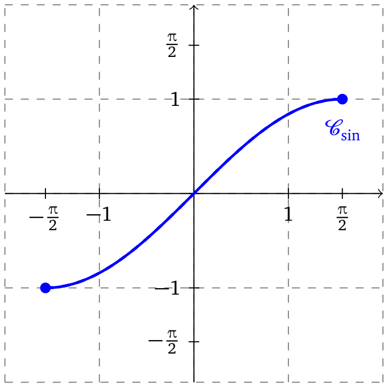
Attention ❢ On n'utilise pas non plus la notation $\sin^{-1}$!

Schéma sinus / arc-sinus

Valeurs remarquables de la fonction arc-sinus

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	**arcsin(t)**
sin(x)	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	t

Courbes de sinus et d'arc-sinus



Propr. • Propriétés algébriques de la fonction arc-sinus

Soit x et t deux réels quelconques.

1) arcsin est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin\big(\sin(x)\big) = x$.

3) $\forall t \in [-1,1], \quad \sin\big(\arcsin(t)\big) = t$.

4) $\left\{\begin{array}{l} \sin(x) = t \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \arcsin(t) \\ t \in [-1,1] \end{array}\right.$

***Exercice* 13** ► Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, $\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$.

Propr. • Pour tout $t \in [-1,1]$, $\cos\big(\arcsin(t)\big) = \sqrt{1-t^2}$.

Propr. • Régularité d'arc-sinus

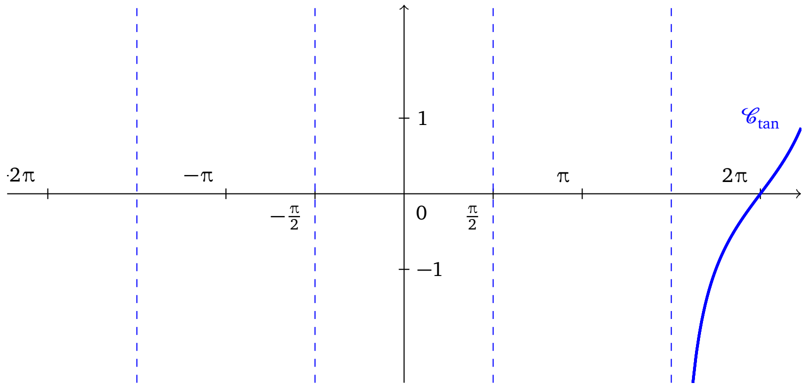
1) La fonction arcsin est continue sur son domaine de définition $[-1,1]$.

2) Elle est dérivable sur son domaine de définition **sauf en -1 et en 1.**
En ces points la courbe admet des tangentes verticales.

3) Enfin, $\quad \forall t \in]-1,1[, \ \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

III.3 Fonction arc-tangente

On étudie de même tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Propr. • La fonction tangente est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

Déf. • Fonction arc-tangente

On appelle fonction arc-tangente et on note arctan la bijection réciproque de tan restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

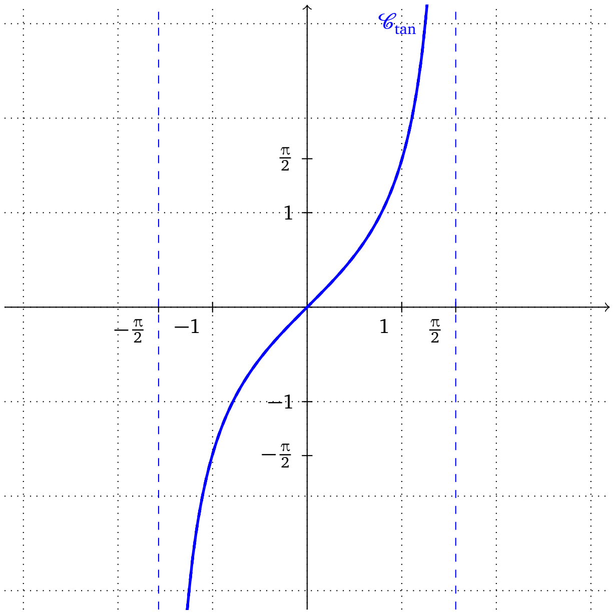
Attention ❢ On n'utilise pas non plus la notation $\tan^{-1}$!

Schéma tangente / arc-tangente

Valeurs remarquables de la fonction arc-tangente

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\arctan(t)$
$\tan(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	t

Courbes de tangente et d'arc-tangente



Propr. • Propriétés algébriques de la fonction arc-sinus

Soit x et t deux réels quelconques.

1) arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan\big(\tan(x)\big) = x$.

3) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tan\big(\arctan(t)\big) = t$.

4) $\begin{cases} \tan(x) = t \\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \arctan(t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

***Exercice* 14** ► Montrer que, pour tout $t \in]0,+\infty[, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Qu'obtient-on lorsque $t \in]-\infty, 0[$?

Propr. • Régularité d'arc-tangente

1) La fonction arctan est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$.

2) Elle est dérivable sur son domaine de définition.

3) Enfin, $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \; \tan'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.