Colles de mathématiques en PCSI 5

20 - 27 septembre et 4 octobre 2011

Exercice n° 1

[TVI] Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Prouver que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1] \mid f(x) = x$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Prouver que f admet un point fixe.

Solution. Dans les deux cas, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g = f - \mathrm{Id}$. Dans le premier cas, on constate simplement que $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes opposés. Dans le deuxième cas, on prouve que $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. $\square$

Exercice n° 2

1. Exprimer en fonction de $n \geqslant 1$: $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. Prouver que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. En développant $(k+1)^4 - k^4$, déduire de ce qui précède une expression de
$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$
4. Expliquer comment on peut calculer $\sum k^p$, $p \geqslant 1$, dans le cas général.

Exercice n° 3

Soit E un ensemble. À toute partie $A \subset E$, on fait correspondre une fonction $f_A \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ définie comme suit :

$$\forall x \in E,\ f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Nous venons ainsi de définir une application $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0,1\})$, qui à toute partie A associe $\Phi(A) = f_A$.

Prouver que Φ ainsi construite est une bijection. (Indication : pour la surjectivité, si on se donne une fonction $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$, considérer $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$.)

Application : supposons que l'ensemble E soit fini.

1. Rappeler le cardinal de $\mathcal{F}(\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,n\})$.

2. En déduire directement le nombre de parties de E.

Solution. Prouvons l'injectivité : soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $\Phi(A) = \Phi(B)$. On a donc $f_A = f_B$. Vérifions que $A = B$ par double inclusion. Prenons $x \in A$. Alors par définition de f_A, $f_A(x) = 1$. Mais comme $f_A = f_B$, $f_B(x) = 1$, ce qui signifie $x \in B$. On a donc $\forall x \in E$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, *i.e.* $A \subset B$. On prouve de même $B \subset A$, et finalement $A = B$.

Prouvons la surjectivité : soit $f \in \mathcal{F}(E,\{0,1\})$ une fonction *quelconque*. Nous allons prouver qu'il existe un $A \subset E$ tel que $f = f_A$. Il suffit (et il faut en fait ...) de prendre le sous ensemble de E formé des x tels que $f(x) = 1$: posons $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\}$. On vérifie alors directement que $f = f_A = \Phi(A)$. On vient donc de prouver

$$\forall f \in \mathcal{F}(E,\{0,1\}),\ \exists A \in \mathcal{P}(E) \mid f = \Phi(A).$$

Application :

1. $\operatorname{Card} \mathcal{F}(\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,n\}) = n^p$. C'est du dénombrement élémentaire : pour déterminer une fonction, il faut choisir l'image de 1, l'image de 2, ... , et l'image de p. Et pour chacune d'entre-elles, il y a n choix. D'où $\underbrace{n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$ fonctions.

2. On sait que s'il existe une bijection entre deux ensembles finis, alors ces deux ensembles ont même nombre d'éléments. En combinant ce qui précède, on voit que $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$.

□

Exercice n° 4

Soient $a, b > 0$. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}).$$

Exercice n° 5

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ trois applications.

1. Montrer que si $f \circ h \circ g$ est injective et si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont surjectives, alors f, g et h sont bijectives.

2. Montrer que si $f \circ h \circ g$ est surjective et si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives, alors f, g et h sont bijectives.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et si f est surjective, alors g est injective.

4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective, alors f est surjective.

Exercice n° 6

Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to G$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Définissons

$$\begin{array}{rrl} h : & E \to & F \times G \\ & x \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array}$$

Si f ou g est injective, vérifier que h est injective. A-t-on : (f et g surjectives) $\Rightarrow h$ surjective ?

Exercice n° 7

[Noyau de Dirichlet] Vérifier pour $x \in \mathbb{R}$, soit directement, soit en effectuant une récurrence, et en donnant un sens au membre de droite que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Indication : pour la récurrence, on pourra dans un premier temps prouver la formule de trigonométrie

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b.$$

Solution.

1. **Calcul direct :** Comme très souvent pour ce genre de sommes, on fait le calcul avec des exponentielles complexes grâce aux formules d'Euler. On écarte tout d'abord le cas où $\cos x = 1$, c'est à dire $x = 0[2\pi]$ (la somme vaut alors $2n+1$).

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \\ &= \mathrm{e}^{-inx}\frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{ix}-1}, \qquad \text{car } \mathrm{e}^{ix} \neq 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})x} - \mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2i\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

   On notera que le membre de droite de l'énonce, défini sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier et que la valeur en les points singuliers n'est autre que $2n+1$.

2. **Récurrence :** La formule donnée en indication se prouve directement en développant les sinus. Au passage, c'est ainsi qu'on démontre la formule d'addition des sinus :

$$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}).$$

   (Poser $a+b=p$ et $a-b=q$.) Si vous avez un trou sur cette formule mais si vous vous souvenez de l'idée pour la prouver, cela ne vous prendra pas plus d'une minute pour la retrouver.
   Initialisation : Prouvons la propriété au rang $n=1$. Celle-ci est équivalente à

$$\begin{aligned} & 1 + 2\cos x = \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\ \iff \quad & \sin\frac{x}{2} + 2\cos x \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2} \end{aligned}$$

   On reconnaît l'identité de l'indication avec $a = \frac{x}{2}$ et $b = x$.
   Hérédité : Il nous faut transformer

$$\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(\frac{x}{2})} + 2\cos(n+1)x = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right] + 2\cos[(n+1)x]\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

   Ne considérons plus que le numérateur :
   $\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right] + 2\cos[(n+1)x]\sin(\frac{x}{2}) = \sin\left[(n+1+\frac{1}{2})x\right]$, puisque $\sin(a+b) - \sin(b-a) = 2\sin(a)\cos(b)$. Ce qui achève la récurrence.

$\square$

Exercice n° 8

Soient E un ensemble et $A, B \subset E$ deux parties de E. Définissons l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que :

1. f soit injective.
2. f soit surjective.
3. f soit bijective.

Exercice n° 9

Soit E un ensemble non vide et $a \in E$. Définissons

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \begin{cases} X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \\ X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \end{cases}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. On suppose que E est fini et on note $\mathcal{P}^0(E)$ l'ensemble des parties de cardinal pair de E. En considérant $\overline{f}\big|_{\mathcal{P}^0(E)}$, prouver qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
3. Calculer alors $\operatorname{Card}\mathcal{P}^0(E)$ et $\operatorname{Card}\mathcal{P}^1(E) := \{$ parties de cardinal impair $\}$. En deduire
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Exercice n° 10

Soit E un ensemble. On rappelle que la différence symétrique entre deux parties A et B de E se définit par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Soit E' un autre ensemble et soit $f : E \to E'$ une application.

1. Montrer que $f^{-1}(A' \Delta B') = f^{-1}(A') \Delta f^{-1}(B')$ pour tous $A', B' \in \mathcal{P}(E')$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$.

Exercice n° 11

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ dérivables et telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice n° 12

1. Que valent $\cos(\arccos x)$ et $\arccos(\cos x)$?

2. Simplifier $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$.

3. Étudier $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice n° 13

Donner la valeur pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ de

1. $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\arctan\left(\dfrac{x-\frac{1}{x}}{2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice n° 14

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad-bc>0$, et posons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{I}m(z) > 0\}$. On définit une application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien définie, c'est à dire que son expression a un sens en tout point de $\mathbb{H}$ et qu'elle est bien à valeur dans $\mathbb{H}$.

2. Vérifier que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

Exercice n° 15

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{I}m(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.

Prouver que l'application $f : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$ est bien définie.