MP*: Espace préhilbertien réel. Endomorphismes des espaces euclidiens?

Coralie Renault

1er mars 2015

Exercice

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
b) Etudier la parité des polynômes P_n.
c) Prouver que pour chaque $n \geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Exercice

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt$$

- Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $deg(P_n) = n$, pour tout n.
- Montrer que P_n possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$.
- On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait :

$$\int_{0}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

Exercice

Soit S l'espace des matrices symétriques réelles de taille n et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\inf_{M=(m_{ij})\in S} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Exercice

Evaluer :

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \exp(-x)(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx$$

Exercice

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle. Montrer que f est une rotation ssi

$$\forall u, v \in E^2 \; f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v)$$

Exercice (*Formule de Parseval*)

On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale d'un espace préhilbertien E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$$

Exercice

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A \mid P \rangle \;?$$

Exercice

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etudier f.

Exercice

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Caractériser f

Exercice

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a) Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$, a-t-on $A \in \mathcal{O}(3)$?
b) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle ., .\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
b) On pose

$$V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E / f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.
c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E / f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t$$