Polynômes

Degré et coefficients des polynômes

▹ 1 Calcul de coefficients

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe.
Déterminer les coefficients des polynômes :

$$(X^2+1)P, \quad XP'-P, \quad P(X+1), \quad P^2.$$

▹ 2 Étude d'une suite de polynômes

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2X P_{n+1} - P_n.$$

1) Calculer P_2 et P_3.

2) Déterminer le degré de P_n (conjecture puis démonstration).

3) Déterminer la parité de P_n en fonction de n.
(le polynôme P_n est-il une fonction paire ? impaire ?)

4) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

► 3 Une autre

Considérons une suite de polynômes vérifiant

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = (2n+1)P_n.$$

Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

► 4 Équations dont l'inconnue est un polynôme

Il est de bon ton de raisonner par analyse-synthèse ; dans la phase d'analyse on essaie d'obtenir des informations sur le degré des polynômes solutions.

1) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\big(P(X)\big)^2 = 9X^4 - 6X^3 + 25X^2 - 8X + 16.$$

2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P'^2 = 4P.$$

3) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$(X^2+1)P'' - 6P = 0.$$

4) Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Division euclidienne

▹ 5 Pratique de la division euclidienne

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B lorsque :

1) $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$;

2) $A = 4X^5 + X^4 - 8X^3 + X^2 + 2X - 2$ et $B = X^2 + 2$;

3) $A = X^2 - 3iX - 5(1+i)$ et $B = X - 1 + i$;

4) $A = 2X + 1$ et $B = 3X^2 + 2X + 1$;

5) $A = X^5 + 1$ et $B = X^2 - 1$.

► 6 Évaluation astucieuse

Soit $P = 2X^4 - 4X^3 - 7X - 14$.

1) Déterminer un polynôme Q à coefficients **entiers**, de degré 2, tel que $Q(1+\sqrt{3}) = 0$.

2) Effectuer la division euclidienne de P par Q.
En déduire $P(1+\sqrt{3})$.

► 7 Divisons euclidiennes plus abstraites

1) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X^n+1)^2$ par $(X+1)^2$ (indication : s'inspirer du **1)** et *dériver*).

3) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\varphi + \sin\varphi\, X)^n$ par X^2+1 (indication : s'inspirer du **1)** et *travailler dans* $\mathbb{C}$).

Racines d'un polynôme

► 8 Racines et divisibilité

1) Trouver $m \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $2X^5 - 3mX + 1$ admette 2 comme racine.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$ (facile) et déterminer le quotient (plus piquant).

3) Soit $\theta \in [0, \pi]$. Montrer que le polynôme

$$\sin(\theta)X^n - \sin(n\theta)X + \sin\big((n-1)\theta\big)$$

est divisible par $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ (les complexes sont nos amis).

► 9 Celui qui avait une infinité de racines

♠ Montrer que les seuls polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $P(X) = P(X+1)$ sont les polynômes constants.

Ordre de multiplicité des racines

▷ 10 Entraînement de base

1) Soit $P = X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.
Quel est l'ordre de multiplicité de la racine -1 ?
Déterminer la décomposition primaire de P dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Déterminer a et b pour que $P = aX^3 + bX^2 + X + 1$ admette 1 comme racine double.
Déterminer dans ce cas la factorisation primaire de P.

3) Trouver m pour que $P = X^3 + mX + 2$ admette une racine double.
Donner la décomposition primaire de P.

4) Soit un entier $n \geqslant 4$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 pour le polynôme

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^n - X + 1$ n'admet que des racines simples.

6) Même question pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

admet une unique racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 3.

► 11

On pose $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

2) Démontrer que dans ce cas : $P = (X-1)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.

► 12 ♠ Poser le problème correctement

1) Déterminer tous les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q(1) = 2$ et $Q'(1) = 1$.

2) Déterminer tous les polynômes P tels que -1 et 2 soient racines de P et que $P + 4$ soit divisible par $(X-1)^2$.

► 13 Incursion en analyse

Soit P un polynôme *réel* de degré $n \geqslant 2$.

1) On suppose d'abord que P admet n racines distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes et qu'il est scindé sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose maintenant que P est scindé et admet exactement p racines distinctes $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ d'ordres respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

a. Déterminer $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

b. Montrer que α_k est racine d'ordre $n_k - 1$ de P'.

c. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Décomposition primaire de polynômes

▷ 14 Entraînement de base

Déterminer les décompositions primaires dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes suivants :

1) $(X^3 - 1)(2X^3 - 2X^2 + 2X - 2)$

2) $2X^4 + X^2 + 1$

3) $X^4 - 25$

4) $X^4 + 16$

5) $X^3 - 1 + i$

6) $4\sqrt{2}X^5 + 1$

7) $X^8 + X^4 + 1$

8) $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$.

► 15

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $P = X^4 + 4X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 2$.

1) Déterminer α et β pour que -1 soit racine de P d'ordre supérieur ou égal à 2.

2) Pour ces valeurs, décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

▷ 16 Relations entre coefficients et racines

On considère le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5. \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de la somme $\sigma = x + y$ et du produit $\mu = xy$ de tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solution du système (S).

2) Résoudre (S).

► 17 ♠ Un produit de sinus

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P_n(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}.$$

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2, \prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-ik\pi/n} = (-i)^{n-1}$.

3) À l'aide des formules d'Euler et des questions précédentes, déterminer une expression simple de

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big).$$

► 18 ♠♠ Un produit de cotangentes

Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

2) En déduire que : $\prod\limits_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\Big(\frac{k\pi}{2p+1}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.