PCSI – TD$_4$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

On rappelle que, pour α un réel et $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x^\alpha \overset{\text{Déf}}{=} \exp(\alpha \times \ln(x))$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition maximal :

1. $f_1(x) = (x \times (x-2))^{\frac{1}{3}}$,

Réponse

Une étude de signe donne :

$$\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

2. $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$,

Réponse

La racine de x^2+1 est toujours définie. De plus pour tout réel x :

$$x^2 \leqslant x^2+1 \quad \text{donc} \quad |x| \leqslant \sqrt{x^2+1}$$

on en déduit que :

$$-\sqrt{x^2+1} \leqslant x \leqslant \sqrt{x^2+1}$$

donc en particulier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} \geqslant 0$$

donc :

$$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}.$$

3. $f_3(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$,

Réponse

Il n'y a rien à faire ici ; le cube d'un nombre strictement positif est strictement positif donc :

$$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}.$$

4. $f_4(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,

Réponse

On utilise la définition de la puissance :

$$f_4(x) = \exp\left(x \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Pour que cette fonction soit définie, il faut donc et il suffit que

$$1+\frac{1}{x} > 0 \iff x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$

Donc :

$$\mathcal{D}_{f_4} =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$

5. $f_5(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$,

Réponse

Pour que le numérateur soit défini, il faut que $x \geqslant 0$, ce qui assure alors l'existence du dénominateur. Donc :

$$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}_+.$$

Exercice 2 :

Déterminer l'intersection de la droite passant par les points $A = (0,1)$ et $B = (1,0)$ et de la tangente à la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^2$ au point $(1, f(1))$.

Réponse

Il s'agit d'abord de déterminer deux équations cartésiennes. La première droite passe par $A = (0,1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = (1,-1)$ donc elle a pour équation cartésienne :

$$y = 1 - x.$$

Quand à la deuxième, par définition de la tangente, elle a pour équation cartésienne :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1) = 2\,x - 1.$$

Pour trouver l'intersection de ces deux droites, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 2\,x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Le point d'intersection est donc :

$$\boxed{A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).}$$

Exercice 3 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$f \text{ strictement croissante} \Longleftrightarrow (\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b)).$$

Réponse

Supposons f strictement croissante. Alors f est en particulier croissante donc :

$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$

Pour montrer l'autre implication, montrons sa contraposée, c'est-à-dire :

$$a > b \Longrightarrow f(a) > f(b),$$

mais cette implication n'est rien d'autre que la définition d'une fonction strictement croissante.
Supposons maintenant que

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

alors en particulier la contraposée de l'implication réciproque donne :

$$a > b \Longrightarrow f(a) > f(b),$$

ce qui prouve que f est strictement croissante.

Exercice 4 :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. f est bornée sur I si et seulement si $|f|$ est majorée,

Réponse

C'est vrai ; montrons-le. Si f est bornée alors elle est minorée et majorée donc :

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I, \quad -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M|$$

On en déduit que :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant \max(|m|,|M|)$$

donc $|f|$ est bornée sur I. Réciproquement, si $|f|$ est bornée sur I alors :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M$$

Donc

$$\forall x \in I, \quad -M \leqslant f(x) \leqslant M$$

la fonction f est majorée et minorée, elle est donc bornée.

2. si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Réponse

C'est faux ! Il suffit de prendre :

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qui admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 5 :

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

1. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$,

Réponse

Commençons par remarquer que la réciproque est immédiate. Montrons le sens direct par double inclusion.

(a) Si $x \in A$, alors $1 = \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B$ donc $x \in B$.

(b) Si $x \in B$, alors $1 = \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B$ donc $x \in A$.

2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,

Réponse

Le seul piège ici est d'oublier de montrer certains cas :

(a) Si $x \in A \cap B$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1.$$

(b) si $x \notin A$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times \mathbb{1}_B(x) = 0,$$

(c) enfin, si $x \notin B$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) \times 0 = 0.$$

3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Réponse

C'est la même méthode que dans la question précédente :

(a) si $x \in A \cup B \setminus A \cap B$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 + 0 - 0 \times 1 = 1$$

(b) si $x \in A \cap B$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$$

(c) si $x \notin A \cup B$ alors :

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 + 0 - 0 \times 0 =$$