Espaces de Banach

Marc SAGE

13 avril 2006

Table des matières

Les notations sont celles de la feuille sur les evn : "$(s)ev$" pour "(sous-)espace vectoriel" et "*evn*" pour "ev normé". Le corps de base sera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La boule unité ouverte d'un evn sera génériquement notée $\mathbb{B}$, de sorte qu'une boule de centre a et de rayon r s'écrira

$$\mathcal{B}(a, r) = a + r\mathbb{B}.$$

On notera de même $\mathbb{S}$ la sphère unité.

Il semblerait qu'il existe deux types de prononciation pour "Banach". Le nom étant d'origine polonaise, la prononciation correcte est "Banak". Il est cependant de coutume de prononcer "Banar" avec un "r" dur, équivalent du "j" espagnol. À vous de voir...

Les deux premiers exercices sont à prendre comme des rappels de cours. Les vrais choses amusantes dans les Banach commencent avec le théorème de Baire ! On supposera connus les résultats élémentaires sur la précompacité (cf. feuille sur les evn, exercice 5).

1 Deux caractérisations des Banach

Montrer qu'un evn est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Montrer qu'un evn est complet ssi toute suite décroissante de fermés bornés non vides dont le diamètre tend vers 0 *a une intersection non vide.*

Montrer en application qu'une suite décroissante de fonctions réelles continues qui converge simplement vers 0 *sur un segment y converge uniformément.*

Solution proposée.

• Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente dans un complet E. Il est facile de voir que la suite $\left(\sum_{i=0}^n a_i\right)$ est de Cauchy, donc converge.

Soit réciproquement un espace E où toute toute série absolument convergente converge. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans E :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \varphi(n),\ \left(p, q > \varphi(n) \implies \|a_q - a_p\| < \frac{1}{2^n}\right).$$

En posant $\delta_n = a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}$, on voit que la série $\sum \delta_n$ est absolument convergente, donc convergente, *i.e.* $a_{\varphi(n)}$ convergente, ce qui fournit une valeur d'adhérence pour la suite (a_n) ; or, (a_n) est de Cauchy, donc converge vers cette valeur d'adhérence.

• Soient des fermés F_n comme dans l'énoncé. Piochons un a_n dans chaque F_n. En écrivant

$$\|a_q - a_p\| \leq \delta\left(F_{\min\{p,q\}}\right) \longrightarrow 0,$$

on voit que la suite (a_n) est de Cauchy, donc converge vers un point a. Or, la suite $(a_n)_{n \geq k}$ est un suite convergente dans le fermé F_k, ce qui montre que a est dans tous les F_n.

Réciproquement, soit (a_n) une suite de Cauchy dans un espace vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \varphi(n),\ \left(p, q > \varphi(n) \implies \|a_q - a_p\| < \frac{1}{2^n}\right),$$

les fermés $F_n = a_{\varphi(n)} + \frac{1}{2^n}\overline{\mathbb{B}}$ vérifient les hypothèses souhaitées, donc il y a un point a dans tous les F_n, qui est alors limite des a_n puisque

$$p > \varphi(n) \implies \|a - a_p\| \leq \left\|a - a_{\varphi(n)}\right\| + \left\|a_{\varphi(n)} - a_p\right\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

• À ε donné, on introduit les fermés (bornés) $F_n = \{x \in [a, b]\ ;\ f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Par décroissance des f_n, les F_n sont décroissants, et leur intersection est vide par simple convergence des f_n. Par conséquent, $\mathbb{R}$ étant complet, les F_n sont vides à partir d'un certain rang N, ce qui s'écrit

$$\forall n > N,\ \forall x \in [a, b],\ f_n(x) < \varepsilon,$$

ce qui traduit précisément la convergence uniforme des f_n vers 0.

2 Banachn quotients

Soit E un evn et F un sev fermé de E. On notera $\overline{a}$ la classe d'un point a de E modulo F.

Montrer que $\|\overline{x}\| = d(x, F)$ définit une norme sur le quotient ${}^{E}\!/_{F}$, et que si E est un Banach alors ${}^{E}\!/_{F}$ est aussi un Banach.

Solution proposée.

Tout d'abord, $\|\overline{x}\| = d(x, F)$ est bien définie : deux représentants x et y d'une même classe différant d'un $f \in F$, ils vérifient

$$d(y, F) = d(y, F + f) = d(x + f, F + f) = d(x, F).$$

Vérifions ensuite les trois propriétés d'une norme :

- $\|\overline{x}\| = 0 \implies d(x, F) = 0 \implies x \in F$ car F est fermé.
- $\|\lambda\overline{x}\| = \left\|\overline{\lambda x}\right\| = d(\lambda x, F) = d(\lambda x, \lambda F) = |\lambda|\, d(x, F)$ car F est un sev.
- Pour l'inégalité triangulaire, on va être un peu plus fin. Soit x et y dans E et $\varepsilon > 0$. On prend des vecteurs f et g dans F tels que $\begin{cases} \|x - f\| \leq d(x, F) + \varepsilon \\ \|y - g\| \leq d(y, F) + \varepsilon \end{cases}$, et on en déduit

$$\begin{aligned} \|\overline{x} + \overline{y}\| &= d(x + y, F) \leq \|(x + y) - (f + g)\| \leq \|x - f\| + \|y - g\| \\ &= d(x, F) + \varepsilon + d(y, F) + \varepsilon = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\| + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

Supposons maintenant E complet, et soit $(\overline{u_n})$ une suite de Cauchy de ${}^{E}\!/_{F}$. On a donc

$$\forall n,\ \exists\varphi(n),\ p, q \geq \phi(n) \implies \|\overline{u_q} - \overline{u_p}\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Remarquer que l'on peut toujours imposer φ strictement croissante ; on en déduit $\left\|\overline{u_{\phi(n+1)}} - \overline{u_{\phi(n)}}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout n. Soit $f_n \in F$ atteignant cet inf à moins de $\frac{1}{2^n}$, de sorte que

$$\left\|\left(u_{\phi(n+1)} - u_{\phi(n)}\right) - f_n\right\| \leq \left\|\overline{u_{\phi(n+1)}} - \overline{u_{\phi(n)}}\right\| + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

et posons $v_n = u_{\phi(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} f_i$, de façon à ce que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ soit absolument convergente :

$$\sum_{n \geq 0} \|v_{n+1} - v_n\| = \sum_{n \geq 0} \left\|u_{\phi(n+1)} - u_{\phi(n)} - f_n\right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty.$$

Puisque E est complet, la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge simplement, *i.e.* v_n converge dans E vers un x_0. On en déduit

$$\left\|\overline{u_{\phi(n)}} - \overline{x_0}\right\| = d\left(u_{\phi(n)} - x_0, F\right) \leq \left\|\left(u_{\phi(n)} - x_0\right) - \sum_{i=0}^{n-1} f_i\right\| = \|v_n - x_0\|$$

qui tend vers 0, c'est-à-dire $\overline{u_{\phi(n)}}$ converge dans ${}^{E}\!/_{F}$ vers $\overline{x_0}$. On a donc trouvé une valeur d'adhérence $\overline{x_0}$ à la suite $(\overline{u_n})$, et comme $(\overline{u_n})$ est de Cauchy, elle converge vers cette valeur d'adhérence.

Remarque. Il aurait été tentant de raisonner comme suit pour montrer l'inégalité triangulaire : étant donnés x et y dans E, soit f et g dans F tels que $\begin{cases} \|x - f\| = d(x, F) \\ \|y - g\| = d(y, F) \end{cases}$, de sorte que

$$\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|(x + y) - (f + g)\| \leq \|x - f\| + \|y - g\| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|.$$

Ce raisonnement est faux puisqu'il utilise implicitement le fait que la distance à un fermé est atteinte (cf. feuille sur les evn pour un contre exemple).

3 Sur les algèbres complètes

On appelle *idéal maximal* d'un anneau A tout idéal strict de A qui est maximal pour l'inclusion. On rappelle qu'un idéal I de A contient une unité ssi $I = A$.

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre normée complète. Montrer que si $a \in A$ est de norme < 1, alors $1 - a$ est inversible, en déduire que le groupes des unités $A^{\times}$ est ouvert, puis que tout idéal maximal est fermé

Solution proposée.

Soit $a \in A$ de norme $\|a\| < 1$. La série $\sum a^n$ est absolument convergente car $\sum \|a^n\| \leq \sum \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}$, donc convergente, mettons vers S. Mais alors

$$(1-a)\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 - a^{n+1} \longrightarrow 1,$$

d'où $(1-a)\,S = 1$ et pareil de l'autre côté, ce qui prouve que S est l'inverse de $1-a$ et donc que $1 - a \in A^{\times}$.

Soit $u \in A^{\times}$ une unité de A. Par implications réciproques, on a

$$u + \varepsilon \in A^{\times} \iff u^{-1}(1 + u\varepsilon) \in A^{\times} \iff (1 + u\varepsilon) \in A^{\times} \impliedby \|u\varepsilon\| < 1 \impliedby \|\varepsilon\| < \frac{1}{\|u\|},$$

de sorte que la boule $B\left(u, \frac{1}{\|u\|}\right)$ reste dans $A^{\times}$ (cela s'intuite bien dans le plan complexe), d'où $A^{\times}$ ouvert.

Soit I un idéal maximal de A. Considérons son adhérence $\overline{I}$: c'est clairement un idéal de A. Montrons que $\overline{I}$ est un idéal strict de A, ce qui imposera $I = \overline{I}$ par maximalité de I, *i.e.* I fermé. Il s'agit de montrer que $\overline{I}$ ne contient pas d'unité. Or, si u est une unité, on peut trouver d'après ce qui précède une boule autour de u qui reste dans $A^{\times}$, donc qui est disjointe de I, ce qui montre que u n'est pas dans l'adhérence de I, *CQFD*.

4 Distance de Hausdorff et IFS

Soit dans le plan un carré (plein). On le subdivise en neuf sous-carrés de mêmes dimensions et on retire celui du milieu. On recommence le procédé avec chacun des carrés restant. Qu'obtient-on à la fin ? Comment peut-on caractériser cette figure limite, appelée *carré de Sierpinski* ?

On observe que le procédé consiste à prendre la réunion des images d'un carré par huit homothéties de rapport $\frac{1}{3}$ dont les centres sont aux sommets et aux milieux des côtés du carré. Il s'agit donc d'itérer une application de l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts du plan dans lui-même, d'où le nom d'*attracteur d'une famille de contractions* (AFC) ou d'*iterating functions system* (IFS).

Nous allons mettre une metrique sur $\mathcal{K}$ telle que le procédé ci-dessus soit contractant. Le théorème du point fixe de Banach-Picard, modulo la complétude de $\mathcal{K}$, nous donnera alos un unique point fixe pour notre procédé. Voilà comment caractériser notre *carré de Sierpinski* : ce sera l'unique point fixe de notre procédé contractant . Si la figure de départ est un clown, la figure finale sera encore le carré de Sierpinski, quand bien même on aurait envie de la baptiser "clown de Sierpinski".

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides d'un evn E. Pour K et L dans $\mathcal{K}$, on pose

$$\Delta(K, L) = \inf\left\{\varepsilon > 0\ ;\ \left\{\begin{array}{l} K \subset L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \\ L \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \end{array}\right.\right\}.$$

On l'appelle *distance de Hausdorff* : deux compacts seront donc proches (pour la distance de Hausdorff) si l'un reste dans un voisinage proche de l'autre et réciproquement. C'est somme tout plutôt raionnable, surtout si l'on s'arme d'un papier et d'un crayon pour griffonner dans le plan la signification de Δ.

- *Montrer que l'infimum définissant $\Delta(K, L)$ est atteint,* i.e. *que*

$$\forall K, L \in \mathcal{K},\ \ K \subset L + \Delta(K, L)\,\overline{\mathbb{B}},$$

et que Δ est bien une distance sur $\mathcal{K}$.

- *Soit (K_n) une suite de Cauchy décroissante dans $\mathcal{K}$. Montrer que (K_n) converge.*

- *Montrer que $\mathcal{K}$ est complet pour la distance de Haudorff.*
- *Soit $f_1, ..., f_n$ des application contractantes de E. On définit une application f sur $\mathcal{K}$ par*

$$f(K) = f_1(K) \cup ... \cup f_n(K).$$

Montrer que f est contractante pour la distance de Haudorff.

Solution proposée.

• Soient K et L des compacts et (ε_n) une suite strictement décroissante tendant vers $\varepsilon := \Delta(K, L)$, de sorte que $\begin{cases} K \subset L + \varepsilon_n \overline{\mathbb{B}} \\ L \subset K + \varepsilon_n \overline{\mathbb{B}} \end{cases}$ pour tout n. Un élément $k \in K$ s'écrit donc $l_n + \varepsilon_n b_n$ où $b_n \in \overline{\mathbb{B}}$. Quitte à extraire de (l_n) par compacité de L, on peut suppose (l_n) convergente vers un $l \in L$. Pour $\varepsilon > 0$, la suite (b_n) est convergente vers $b := \frac{k-l}{\varepsilon}$, lequel reste dans $\overline{\mathbb{B}}$ par fermeture de ce dernier, d'où $k = l + \varepsilon b \in L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$. Ceci tenant pour tout $k \in K$, on a l'inclusion $K \subset L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$. On en déduit l'autre inclusion par symétrie. Pour $\varepsilon = 0$, $k = l_n + \varepsilon_n b_n$ tend vers $l \in L + 0\overline{\mathbb{B}}$ et le même raisonnement conclut.

Montrons à présent que Δ est une distance.

Si $\Delta(K, L) = 0$, on a par ce qui précède la double-inclusion $K \subset L \subset K$, d'où l'égalité $K = L$.

La symétrie de Δ est évidente.

Pour trois compacts K, L, M, notons $\begin{cases} \varepsilon = \Delta(K, L) \\ \varepsilon' = \Delta(L, M) \end{cases}$. On a alors

$$K \subset L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset M + \varepsilon'\overline{\mathbb{B}} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} = M + (\varepsilon + \varepsilon')\overline{\mathbb{B}}$$

et pareil dans l'autre sens, ce qui montre $\Delta(K, M) \leq \varepsilon + \varepsilon'$ et l'inégalité triangulaire.

• Moralement, la suite décroissante (K_n) doit converger vers son intersection $K := \bigcap K_n$. Montrons cela. Fixons un $\varepsilon > 0$. Il y a un rang N tel que

$$p, q > N \implies \Delta(K_p, K_q) < \varepsilon.$$

Montrons alors que $\Delta(K_n, K) < \varepsilon$ pour $n > N$, ce qui conclura. Puisque l'on a toujours l'inclusion $K \subset K_n \subset K_n + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, il s'agit de prouver que $a \in K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ où a est un élément quelconque de K_n. Avanti !

Pour tout $p > n$, la distance $d(a, K_p) = \|a - a_p\|$ est atteinte en un certain $a_p \in K_p$ puisque ce dernier est compact. Quitte à extraire de la suite (a_p) dans le compact K_0 (les K_n décroissent !), on peut supposer a_p convergente vers un a_∞. Or, à $q > n$ fixé, la suite $(a_p)_{p \geq q}$ reste dans K_q, donc sa limite a_∞ aussi, ce qui montre que a_∞ est dans tous les K_q à partir d'un certain, *i.e.* $a_\infty \in K$.

D'autre part, le premier point affirme que

$$A_n \subset A_p + \Delta(K_n, K_p)\overline{\mathbb{B}} \subset A_p + \varepsilon\overline{\mathbb{B}},$$

donc a s'écrit $a'_p + \varepsilon b$, d'où la majoration

$$\|a - a_p\| = d(a, K_p) \leq \left\|a - a'_p\right\| \leq \varepsilon,$$

ce qui passe à la limite et donne $\|a - a_\infty\| \leq \varepsilon$, d'où $a \in K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, *CQFD.*

• Soit (K_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{K}$. On se ramène au cas précédent en considérant les compacts décroissants $K'_n = \overline{\bigcup_{p \geq n} K_p}$? ? ? ? ? On va montrer que $\Delta(K_n, K'_n) \longrightarrow 0$, de sorte à ramener le problème à la convergence de (K'_n), *i.e.* à prouver que (K'_n) est de Cauchy d'après le point précédent.

Soit $\varepsilon > 0$. Il y a un rang N tel que

$$p, q > N \implies \Delta(K_p, K_q) < \varepsilon.$$

Pour $p \geq n > N$, on a

$$K_p \subset K_n + \Delta(K_n, K_p)\overline{\mathbb{B}} \subset K_n + \varepsilon\overline{\mathbb{B}},$$

d'où, en prenant la réunion sur les $p \geq n$ puis l'adhérence, $K'_n \subset K_n + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$. L'inclusion réciproque étant immédiate (noter que $K_n \subset K'_n$), on peut conclure

$$\forall n > N,\ \Delta(K_n, K'_n) < \varepsilon.$$

On en déduit aisément que (K'_n) est de Cauchy :

$$p, q > N \implies \Delta\left(K'_p, K'_q\right) \leq \Delta\left(K'_p, K_p\right) + \Delta(K_p, K_q) + \Delta\left(K_q, K'_q\right) \leq 3\varepsilon,\ \textit{CQFD.}$$

• Soit $\alpha < 1$ un coefficient commun de contraction des f_i et K, L deux compacts. Il est raisonnable d'espérer

$$\Delta\left(f\left(K\right), f\left(L\right)\right) \leq \alpha \Delta\left(K, L\right).$$

Pour cela, on montre que $f\left(K\right) \subset f\left(L\right) + \alpha\varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ où $\varepsilon := \Delta\left(K, L\right)$. Soit $f_i\left(k\right)$ dans $f\left(K\right)$ avec $k \in K$. Puisque $K \subset L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, on peut écrire $k = l + \varepsilon b$, d'où

$$f_i\left(k\right) = f_i\left(l\right) + \left[f_i\left(k\right) - f_i\left(l\right)\right] \in f\left(L\right) + \alpha\varepsilon\overline{\mathbb{B}}$$

en utilisant le caractère α-contractant de f_i :

$$\left\|f_i\left(k\right) - f_i\left(l\right)\right\| \leq \alpha \left\|k - l\right\| = \alpha \left\|\varepsilon b\right\| \leq \alpha\varepsilon, \textit{ CQFD.}$$

L'autre inclusion $f\left(L\right) \subset f\left(K\right) + \alpha\varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ suivant par symétrie, on a le résultat escompté.

5 Complétion d'un evn

Considérons une suite de Cauchy dans un evn E. Elle a envie de converger (faire un dessin pour visualiser sa définition) mais la "limite morale" n'a pas de raison de rester dans E. L'idée consiste donc à prendre toutes ces limites morales, à les rajouter dans E, ce qui donnera un espace $\mathcal{E}$ dans lequel E sera dense et dont on peut raisonnablement espérer la complétude.

Un limite morale correspondant à une suite de Cauchy, et deux suites de Cauchy donnant la même mimite morale ssi leur différence tend vers 0, il est naturel de considérer l'ev C des suites de Cauchy de E modulo le sev C_0 de C des suites de limite nulle. On pose ainsi $\overline{E} := {}^{C}\!\diagup_{C_0}$ et on notera $\widetilde{u} = \widetilde{(u_n)}$ la classe d'une suite de Cauchy $u = (u_n)$.

• *Montrer que la formule suivante définit une norme sur* $\overline{E}$ *:*

$$\left\|\widetilde{u}\right\| := \lim_{n\infty n} \left\|u_n\right\|.$$

• *Montrer que* E *s'injecte isométriquement dans* $\overline{E}$ *via*

$$\iota : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \overline{E} \\ a & \longmapsto & \widetilde{(a)} \end{array}\right.$$

où (a) *désigne la suite identiquement égale à* a*.*

On identifiera par conséquent l'evn E *avec son image* $\iota\left(E\right)$ *dans* $\overline{E}$*.*

• *Montrer que* E *est dense dans* $\overline{E}$*.*

Cela justifie a posteriori *la notation* $\overline{E}$ *coïncidant avec l'adhérence de* E*.*

• *Montrer que* $\overline{E}$ *est complet. On pourra s'inspirer d'un procédé diagonal.*

Solution proposée.

• La suite (u_n) étant de Cauchy, il en est de même pour $\|u_n\|$, d'où la convergence de $\|u_n\|$. Si maintenant u' est un autre représentant de $\widetilde{u}$, on a

$$\left\|u_n'\right\| \leq \underbrace{\left\|u_n' - u_n\right\|}_{\longrightarrow 0} + \left\|u_n\right\|,$$

d'où par symétrie l'égalité des limites $\lim \|u_n\| = \lim \|u_n'\|$. Ceci montre que $\|\cdot\|$ est bien définie. La condition $\|\widetilde{u}\| = 0$ équivalant à $\lim u_n = 0$, *i.e.* $\widetilde{u} = \widetilde{0}$, il est clair que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\overline{E}$.

• Il est immédiat que ι est une isométrie (donc injective) :

$$\left\|\iota\left(a\right)\right\| = \left\|\widetilde{(a)}\right\| = \lim \left\|a\right\| = \left\|a\right\|.$$

• Soit $\widetilde{u}$ dans $\overline{E}$. Pour l'approcher par des points de E, il est naturel de prendre les $\iota\left(u_n\right)$:

$$\left\|\widetilde{u} - \iota\left(u_n\right)\right\| = \lim_{p\infty} \left\|u_p - u_n\right\| \overset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } (u_n) \text{ est de Cauchy.}$$

• Soit $\left(\widetilde{u^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\overline{E}$. Un dessin montre qu'un procédé diagonal a des chances de fonctionner : on peut espérer que $\left(\widetilde{u^n}\right)$ converge vers $\widetilde{(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}}$. Cependant, à u^n fixé, il n'est pas certain que prendre exactement le n-ième terme suffit à s'approcher assez vite de la limite morale. Pour forcer cette "approche rapide", on pousse n plus loin en le remplaçant par un $\varphi(n)$ assez grand, donné par le fait que les u^n sont de Cauchy :

$$\exists\varphi(n),\ p,q>\varphi(n) \implies \left\|u_p^n-u_q^n\right\|<\frac{1}{n}.$$

On peut même supposer φ strictement croissante, quitte à poser

$$\varphi'(n+1)=\max\left\{\varphi(n+1),\varphi'(n)+1,\right\}$$

(remarquer que cela implique $\varphi\geq\mathrm{Id}$). On voit alors que la suite $U_n:=u_{\varphi(n)}^n$ correspond bien mieux de la limite morale que u_n^n. Nous allons montrer que $\widetilde{u^n}$ converge effectivement vers $\widetilde{U}$.

Il s'agit de montrer que la limite $\lim_{n\infty}\left\|u_n^p-U_n\right\|$ tend vers 0 lorsque p est grand. On commence par découper en deux pour se ramener à exposant/indice fixe :

$$\left\|u_n^p-U_n\right\|=\left\|u_n^p-u_{\varphi(n)}^n\right\|\leq\left\|u_n^p-u_{\varphi(n)}^p\right\|+\left\|u_{\varphi(n)}^p-u_{\varphi(n)}^n\right\|.$$

Le premier terme étant borné par $\frac{1}{p}$ pour $n>\varphi(p)$, son compte sera facile à régler. Il va falloir être plus fin pour s'occuper du second terme.

Soit $\varepsilon>0$. La suite $\left(\widetilde{u^n}\right)$ étant de Cauchy, il y a un rang N au-delà duquel

$$p,q>N \implies \left\|\widetilde{u^p}-\widetilde{u^q}\right\|<\varepsilon.$$

Si l'on prend $n,m>\varphi(p),\varphi(q)$, on aura alors

$$\begin{aligned}\left\|u_n^p-u_n^q\right\| &\leq \left\|u_n^p-u_m^p\right\|+\left\|u_m^p-u_m^q\right\|+\left\|u_m^q-u_n^q\right\|\leq\frac{1}{p}+\left\|u_m^p-u_m^q\right\|+\frac{1}{q}\\ \left\|u_n^p-u_n^q\right\| &\leq \frac{1}{p}+\left\|\widetilde{u^p}-\widetilde{u^q}\right\|+\frac{1}{q}\text{ en prenant la limite en }m,\end{aligned}$$

d'où

$$\forall p,q>N,\ \forall n>\varphi(p),\varphi(q),\ \left\|u_n^p-u_n^q\right\|\leq\varepsilon+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Appliquons cela à $\left\|u_{\varphi(n)}^p-u_{\varphi(n)}^n\right\|$. On fixe $p>N$, puis on prend un $n\geq\varphi(p)$. Étant donné que $\varphi\geq\mathrm{Id}$, les exposants p et n sont $>N$ et l'indice $\varphi(n)$ est supérieur à $\varphi(n)$ et $\varphi(p)$, d'où la majoration

$$\left\|u_{\varphi(n)}^p-u_{\varphi(n)}^n\right\|<\varepsilon+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}.$$

Il en résulte

$$\left\|u_n^p-U_n\right\|\leq\left\|u_n^p-u_{\varphi(n)}^p\right\|+\left\|u_{\varphi(n)}^p-u_{\varphi(n)}^n\right\|<\frac{1}{p}+\left(\varepsilon+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right).$$

On peut toujours rétrospectivement choisir p assez grand pour que $\frac{1}{p}<\varepsilon$, puis n tel que $\frac{1}{n}<\varepsilon$, d'où pour n assez grand

$$\left\|u_n^p-U_n\right\|\leq 4\varepsilon.$$

En prenant la limite en n, il vient

$$\left\|\widetilde{u^p}-\widetilde{U}\right\|\leq 4\varepsilon,$$

et ceci pour tout $p>N$ assez grand, d'où la conclusion.

Remarque. On appelle *complétion* d'un espace E (métrique, normé, ou préhilbertien) tout isométrie $\iota:E\hookrightarrow\overline{E}$ injectant densément E dans un espace $\overline{E}$ complet (appelé *complété* de E). On vient de prouver que tout evn admet une complétion. Le lecteur intéressé pourra adapter la démonstration qui précède pour les métriques, puis en déduire les complétions des evn puis des préhilbertien (cf. cours sur la complétion).

Par ailleurs, on montrera aisémement que les espaces où E s'injecte densément (et de façon isométrique) sont tous isomorphes : envoyer $\lim i(a_n)$ sur $\lim j(a_n)$ si i et j sont les injections considérées. En particulier, ils sont isomorphes au complété $\overline{E}$ construit ci-dessus, donc complets. En d'autres termes, si l'on comble les trous d'un espace, on obtient automatiquement un espace sans trous, *i.e.* un espace où il ne manque rien, *i.e.* un espace complet. La terminolgie prend ici tout son sens.

6 Théorème de Baire et applications amusantes

S*oit E un complet recouvert par un nombre dénombrable de fermés : $E=\bigcup_{n\geq 0} F_n$. Montrer que l'un des F_n est nécessairement d'intérieur non vide.*

On montrera pour cela que, dans un complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (théorème de Baire*).*

En guise d'applications amusantes, montrer que :

• *il n'existe pas de Banach de dimension dénombrable ;*

• *si E est un Banach et u un endomorphisme continu de E ponctuellement nilpotent,* i.e. *tel que*

$$\forall x \in E,\ \exists n_x \in \mathbb{N},\ u^{n_x}(x)=0,$$

alors u est nilpotent.

• *$\mathbb{R}$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable de courbes $\mathcal{C}^1$ (ceci est néanmoins possible pour des courbes $\mathcal{C}^0$, en répétant par exemple la courbe de Peano remplissant un carré) ;*

• *il n'existe pas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; on pourra introduire les ouverts*

$$\Omega_n=\left\{a\in\mathbb{R}\ ;\ \exists\delta>0,\left\{\begin{array}{c}|x-a|<\delta\\|y-a|<\delta\end{array}\right.\implies|f(x)-f(y)|<\frac{1}{n}\right\}$$

et les relier aux points de continuité de f.

Solution proposée.

Soit (ω_n) une suite d'ouverts denses et ω un ouvert quelconque. On veut $\omega\cap\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\omega_n\right)\neq\emptyset$.

ω est ouvert, donc contient une boule ouverte $B_0=a_0+r_0\mathbb{B}$ telle que $\overline{B_0}\subset\omega$. En supposant construites les boules $B_0,...,B_n$ pour $n\geq 0$, on note que $\omega_n\cap B_n$ est un ouvert, non vide car ω_n est dense, donc contient une boule $B_{n+1}=a_{n+1}+r_{n+1}\mathbb{B}$ telle que $\left\{\begin{array}{c}\overline{B_{n+1}}\subset\omega_n\cap B_n\\r_{n+1}<\frac{r_n}{2}\end{array}\right.$. La suite (a_n) est alors de Cauchy, donc converge, mettons vers a.

Montrons que $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\omega_n$. Fixons un $n\in\mathbb{N}$; pour $k>n$ on a

$$a_k\in B_k\subset B_{k-1}\subset ...\subset B_{n+1},$$

d'où, en prenant la limite en k, $a\in\overline{B_{n+1}}\subset\omega_n\cap B_n\subset\omega_n$.

Enfin, puisque la suite (B_n) est décroissante, on a $B_n\subset B_0$ pour tout n, d'où $a\in\overline{B_0}\subset\omega$.

L'énoncé avec les fermés (celui qui sert en pratique) s'obtient par l'absurde en remarquant que le complémentaire d'un fermé d'intérieur vide est un ouvert dense.

• Concernant les hypothétiques Banach de dimension dénombrable, soit E l'un d'eux et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E. Les fermés $F_n:=\mathrm{Vect}(e_0,...,e_n)$ recouvrent E, donc l'un des F_n est d'intérieur non vide, ce qui absurde puisque les F_n sont des sev stricts.

• On introduit les fermés $F_n=\{x\in E\ ;\ u^n(x)=0\}$ qui recouvrent l'espace par hypothèse. Baire nous dit alors que l'un deux est d'intérieur non vide, mettons $a+r\mathbb{B}\subset F_N$. Si α est tel que $u^\alpha(a)=0$, on a alors pour tout x dans la boule unité

$$u^{N+\alpha}(x)=\frac{u^\alpha u^N(a+rx)-u^N u^\alpha(a)}{r}=0,$$

ce qui montre (en dilatant $\mathbb{B}$) que $u^{N+\alpha}$ est identiquement nul.

• Supposons que $\mathbb{R}^2$ soit réunion dénombrable de courbes $\mathcal{C}^1$, mettons $\mathbb{R}^2=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma_n(\mathbb{R})$. En recouvrant $\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k,k+1]$ par des compacts, on peut écrire le complet $\mathbb{R}^2$ comme réunion dénombrable des $\gamma_n([k,k+1])$, lesquels sont compacts comme images continues d'un compact, donc fermés. Baire nous dit alors que l'un d'eux est d'intérieur non vide, disons $\gamma([0,1])$ contenant un carré d'arête a (boule pour la norme infinie). Il est conseillé à ce stade de faire un dessin.

γ devant recouvrir tout un carré, on voit que la "longueur" de γ va être infinie (penser à l'épluchage d'une patate...), ce qui est impossible puisque celle-ci est définie par $\int_0^1|\gamma'|$ qui est bornée (γ' est continue !). Précisons cela.

Maillons notre carré par N^2 petits carrés d'arête $\frac{a}{N}$ et notons c_i leur centres. Il est clair que les c_i sont deux à deux distants d'au moins $\frac{1}{N}$. Puisque tous les c_i sont atteints par γ, on peut écrire $c_i = \gamma(t_i)$ avec $t_1 < t_2 < ... < t_{N^2}$ quitte à renommer les c_i. On alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\gamma'| &\geq \int_{t_1}^{t_{N^2}} |\gamma'| \geq \sum_1^{N^2-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'| \geq \sum_1^{N^2-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma' \right| = \sum_1^{N^2-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \\ &= \sum_1^{N^2-1} |c_{i+1} - c_i| \geq \sum_1^{N^2-N} \frac{a}{N} = a(N-1) \xrightarrow{N\infty} \infty, \textit{ absurde.}\end{aligned}$$

• Suivons les indications de l'énoncé et montrons que l'ensemble des points de continuité est l'intersection des Ω_n (cela s'intuite bien en faisant un dessin pour comprendre qui sont les Ω_n).

Soit a un point de continuité de f et n un entier. Par définition de la continuité, on a

$$\exists \delta > 0, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2n},$$

d'où les implications

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |y-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Ceci montre bien que $a \in \Omega_n$, et ce pour tout n.

Soit réciproquement a dans tous les Ω_n et fixons un $\varepsilon > 0$. Il y a un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, et l'appartenance $a \in \Omega_n$ fournit un $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \implies \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |a-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(a)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ce traduit exactement la continuité de f en a.

Il est facile de voir que Ω_n sont ouverts : pour $a \in \Omega_n$ et δ conséquemment associé, les réels a' à distance $< \frac{\delta}{2}$ de a restent dans Ω_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-a'| < \frac{\delta}{2} \\ |y-a'| < \frac{\delta}{2} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < |x-a'| + |a'-a| < \delta \\ |y-a| < |y-a'| + |a'-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Supposons à présent que f soit continue sur $\mathbb{Q}$ et seulement sur $\mathbb{Q}$. On peut donc écrire $\mathbb{Q} = \bigcap \Omega_n$, ou encore $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \bigcup F_n$ où les F_n sont fermés et d'intérieur vide (puisque $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). En rajoutant les singletons rationnels $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$, on recouvre $\mathbb{R}$ par une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, et ça Baire dit que ce n'est pas du tout possible !

Remarque. Concernant la nilpotence ponctuelle, qui s'exprime au passage comme une interversion de quantificateurs

$$\begin{aligned} \forall x &\in E, \ \exists n_x \in \mathbb{N}, \ u^{n_x}(x) = 0 \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in E, \ u^n(x) = 0, \end{aligned}$$

l'hypothèse de complétude est indispensable. Considérer en effet $\mathbb{R}[X]$ (qui n'est pas complet car de dimension dénombrable) muni de la norme 1 et l'endomorphisme "tapis roulant" $f : \left\{ \begin{array}{l} X^n \longmapsto X^{n-1} \\ 1 \longmapsto 0 \end{array} \right.$, analogue de la dérivation (ce pour avoir de la nilpotence ponctuelle mais pas globale), sauf qu'on ne descend pas les puissances en scalaires afin d'avoir la continuité pour la norme 1 (on a même le caractère 1-lipschitzien) :

$$\|f(P)\| = \|f(\lambda + XQ)\| = \|Q\| = \|P\| - |\lambda| \leq \|P\|.$$

Remarque générale sur Baire. Les énoncés dans des Banach se traduisant par une interversion de quantificateurs, disons

$$\forall x \in E, \ \exists n_x \in \mathbb{N}, \ P(x, n_x) \implies \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in E, \ P(x, n)$$

où P est un proposition ayant pour paramètre un *entier*, sont des candidats typiques à l'application de Baire : on remarque en effet que les parties $\{x \in E \ ; \ P(x,n)\}$ recouvrent tout l'espace, et il suffit qu'elles soient fermées pour trouver une boule ouverte où $P(x,n)$ tiendra avec un n fixé. On a donc une méthode efficace pour relever des énoncés de l'état "vrai ponctuellement" à l'état "vrai au voisinage d'un point", le passage à l'état globlal étant ensuite plus ou moins fastidieux. Le cas de la nilpotence traité ci-dessus est par exemple quasi immédiat, tandis qu'il est beaucoup plus long de montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ponctuellement polynomiale est vraiment polynomiale, au sens où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n_x \in \mathbb{N},\ f^{(n_x)}(x) = 0 \implies \exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 0.$$

De nombreux exemples illustrant cet aspect suivent.

7 Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un Banach, F un evn et (f_i) une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$ supposée ponctuellement bornée, dans le sens où à $x \in E$ fixé l'ensemble $\{f_i(x) \ ; \ i \in I\}$ est borné. Montrer alors que (f_i) est uniformément bornée dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.

En déduire que si (f_n) est une suite d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$ convergeant simplement, alors la limite est continue.

Solution proposée.

On introduit les fermés $F_n = \{x \in E \ ; \ \forall i \in I,\ \|f_i(x)\| \leq n\}$. Les hypothèses impliquent $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, d'où par Baire un F_{n_0} d'intérieur non vide, *i.e.* qui contient une boule $a + r\mathbb{B}$, d'où pour tout vecteur u unitaire $\|f_i(a+ru)\| \leq n_0$, ce qui implique

$$\|f_i(u)\| = \left\| \frac{f_i(a+ru) - f_i(a)}{r} \right\| \leq \frac{n_0 + \sup_{i\in I} f_i(a)}{r}.$$

On a ainsi un majorant de $\|f_i\|$ indépendant de i.

Soit maintenant (f_n) convergeant simplement vers f. À $x \in E$ fixé, la suite $(f_n(x))$ est convergente, donc bornée ; par conséquent, Banach-Steinhaus s'applique :

$$\exists M > 0,\ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n(x)\| \leq M\|x\|,$$

d'où en passant à la limite $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$. En remarquant que f est trivialement linéaire, on obtient ainsi la continuité de f.

Remarque. Le théorème de Banach-Steinauss peut s'énoncer en termes d'inversion de quantificateurs :

$$\begin{aligned} &\forall x \in E,\ \exists M_x > 0,\ \forall i \in I,\ \|f_i(x)\| < M_x\|x\| \\ \implies &\exists M > 0,\ \forall x \in E,\ \forall i \in I,\ \|f_i(x)\| < M\|x\|. \end{aligned}$$

On retiendra la phrase :

une famille simplement bornée est tout simplement bornée !

8 Théorème de l'application ouverte et applications

Soient E et F deux Banach. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjective. On veut montrer que f est ouverte, i.e. *que l'image d'un ouvert par f est un ouvert.*

Notons $\mathbb{B}_E$ et $\mathbb{B}_F$ les boules ouvertes unités de E et F. On raisonne en trois étapes :

- *il y a un $\lambda > 0$ tel que $\lambda\mathbb{B}_F \subset \frac{1}{2}\overline{f(\mathbb{B}_E)}$ (on pourra utiliser Baire),*
- *$\lambda\mathbb{B}_F \subset f(\mathbb{B}_E)$,*
- *f est ouverte.*

En déduire le théorème de Banach : *Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Si f est bijective, alors f^{-1} est continue.*

En déduire le théorème du graphe fermé : *Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. f est continue ssi son graphe est fermé dans $E \times F$.*

En déduire le corollaire suivant : Soit $f : H \longrightarrow H$ un endomorphisme d'un Hilbert H. Si f admet un adjoint f^*, alors f et f^* sont continus.

Démonstration du théorème de l'application ouverte.

• On introduit les fermés $F_n = n\overline{f(\mathbb{B}_E)} = \overline{f(n\mathbb{B}_E)}$ qui recouvrent l'espace F par surjectivité de f, d'où par Baire un F_{n_0} d'intérieur non vide, mettons $a + r\mathbb{B}_F \subset F_{n_0}$. Les F_n étant symétriques et convexes par linéarité de f, on en déduit $r\mathbb{B}_F \subset F_{n_0}$, *i.e.* $r\mathbb{B}_F \subset n_0\overline{f(\mathbb{B}_E)}$, d'où le résultat avec $\lambda = \frac{r}{2n_0}$.

• Soit $y \in \lambda\mathbb{B}_F$, que l'on veut écrire sous la forme $f(x)$ où $x \in \mathbb{B}_E$. On construit par récurrence des x_n tels que

$$\left\{ \begin{array}{c} \|x_n\| < \frac{1}{2^n} \\ \|y - \sum_{i=1}^n f(x_i)\| < \frac{\lambda}{2^n} \end{array} \right. .$$

Puisque $\lambda\mathbb{B}_F \subset \frac{1}{2}\overline{f(\mathbb{B}_E)}$, y peut s'approcher par un élément de $\frac{1}{2}f(\mathbb{B}_E)$ à $\frac{\lambda}{2}$ près, disons $\left\{ \begin{array}{c} \|x_1\| < \frac{1}{2} \\ \|y - f(x_1)\| < \frac{\lambda}{2} \end{array} \right.$. En supposant construits $x_1, ..., x_n$, on note que $y - \sum_{i=1}^n f(x_i)$ est dans $\frac{\lambda}{2^n}\mathbb{B}_F \subset \frac{1}{2^{n+1}}\overline{f(\mathbb{B}_E)}$, donc s'approche par un $f(x_{n+1})$ à $\frac{\lambda}{2^{n+1}}$ près, mettons $\left\{ \begin{array}{c} \|x_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}} \\ \left\|y - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\right\| < \frac{\lambda}{2^{n+1}} \end{array} \right.$. La série $\sum x_n$ est alors absolument convergente dans E, donc convergente vers un $x \in E$ vérifiant

$$\|x\| = \left\|\sum_{n\geq 1} x_n\right\| \leq \sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1\,;$$

on a de plus $f(x) = y$ en utilisant la seconde inégalité et la continuité de f.

• On déduit de $\lambda\mathbb{B}_F \subset f(\mathbb{B}_E)$ que l'image par f d'une boule $a + r\mathbb{B}_E$ contient

$$f(a + r\mathbb{B}_E) = f(a) + rf(\mathbb{B}_E) \supset f(a) + r\lambda\mathbb{B}_F.$$

Soit maintenant un ouvert Ω et $f(a) \in f(\Omega)$. On peut trouver une boule $a + r\mathbb{B} \subset \Omega$, d'où $f(a) + r\lambda\mathbb{B} \subset f(a + r\mathbb{B}) \subset f(\Omega)$, ce qui montre que $f(\Omega)$ est ouverte.

Démonstration du théorème de Banach.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ bijective. f est en particulier surjective, donc ouverte, ce qui signifie précisément en terme d'ouverts que f^{-1} continue.

Démonstration du théorème du graphe fermé.

Si f est continue, il est clair que son graphe G est fermé.

Supposons réciproquement G fermé dans le complet $E \times F$, ce qui force la complétude de G. La première projection $\pi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ (x, f(x)) & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est alors linéaire continue bijective, donc son inverse est continue. Il reste à écrire $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ pour avoir la continuité de f.

Démonstration de la continuité de l'adjoint dans un Hilbert.

Soit $f \in \mathcal{L}(H)$ et $(x_n, f^*(x_n))$ une suite convergente vers (x,y) dans le graphe de f^*. Pour tout a dans H, on a

$$\langle y, a\rangle = \lim \langle f^*(x_n), a\rangle = \lim \langle x_n, f(a)\rangle = \langle x, f(a)\rangle = \langle f^*(x), a\rangle\,,$$

d'où $y = f^*(x)$ et la continuité de f^*.

La continuité de f s'obtient en renversant les rôles de f^* et $f = f^{**}$.

9 Polynômes minimaux d'endomorphismes sur les Banach

Soit E un Banach et u un endomorphisme continu de E admettant ponctuellement un polynôme minimal :

$$\forall x \in E,\ \exists P_x \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}\,, P_x(f)(x) = 0.$$

Le but du problème est de montrer que u admet lui-même un polynôme minimal.

Par principalité de $\mathbb{K}[X]$, l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ P(f)(x) = 0\}$ des polynômes annulant f en x est engendré par un polynôme unitaire μ_x, appelé *polynôme minimal* de f *relatif* à x. On pose$\mathcal{M} = \{\mu_x \ ; \ x \in E\}$.

Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par passage aux diviseurs et par produit de facteurs premiers entre eux. En déduire que, si $\mathcal{M}$ est borné en degré, alors u admet un polynôme minimal.

Conclure en appliquant Baire aux parties $E_n = \{x \in E \ ; \ (x, u(x), ..., u^n(x))$ liée$\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution proposée.

Montrons que $\mathcal{M}$ est stable par passage aux diviseurs. Soit $\mu_x = AB$ dans $\mathcal{M}$. En posant $y = B(u)(x)$, on obtient d'une part

$$A(u)(y) = AB(u)(x) = \mu_x(u)(x) = 0,$$

donc A annule f en y, de sorte que μ_y divise A. On a d'autre part

$$\mu_y B(u)(x) = \mu_y(u)(y) = 0,$$

donc μ_x divise $\mu_y B$, *i.e.* AB divise $\mu_y B$, donc A divise μ_y. Finalement, $A = \mu_y$ est un élément de $\mathcal{M}$.

Montrons que $\mathcal{M}$ est stable par produit de facteurs premiers entre eux. Soit deux vecteurs x et y tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrons que $\mu_x \mu_y = \mu_{x+y}$, ce qui prouvera que le produit $\mu_x \mu_y$ reste dans $\mathcal{M}$. D'une part, on a

$$\mu_x \mu_y(u)(x+y) = \mu_y \mu_x(u)(x) + \mu_x \mu_y(u)(y) = 0 + 0 = 0,$$

ce qui impose $\mu_{x+y} \mid \mu_x \mu_y$. D'autre part, on peut écrire $\mu_{x+y}(u)(x) + \mu_{x+y}(u)(y) = 0$, d'où (en appliquant $\mu_x(u)$)

$$\mu_x \mu_{x+y}(u)(y) = -\mu_x \mu_{x+y}(u)(x) = -\mu_{x+y}\mu_x(u)(x) = 0,$$

ce qui donne $\mu_y \mid \mu_x \mu_{x+y}$. Puisque μ_x et μ_y sont premiers entre eux, on en déduit $\mu_y \mid \mu_{x+y}$, puis par symétrie $\mu_x \mid \mu_{x+y}$, et toujours par primalité relative de μ_x et μ_y on conclut $\mu_x \mu_y \mid \mu_{x+y}$, d'où l'égalité voulue en recollant les deux relations de divisibilité.

Supposons à présent que $\mathcal{M}$ est bornée en degré. On considère naturellement un élément μ de $\mathcal{M}$ de degré maximal. Soit μ_x un autre polynôme minimal. On va montrer que μ_x divise μ, ce qui prouvera que μ est un polynôme minimal pour u.

S'il y a un facteur A irréductible de μ_x qui n'apparaît pas dans μ, *i.e.* $A \wedge \mu = 1$, alors $A\mu$ est dans $\mathcal{M}$ par ce qui précède, ce qui contredit la maximalité de $\deg \mu$. Ainsi, en décomposant $\mu = \prod P_i^{\alpha_i}$ en produit de facteurs irréductibles, μ_x doit être de la forme $\mu_x = \prod P_i^{\beta_i}$. Maintenant, pour tout i, le polynôme $P_i^{\beta_i} \prod_{j \neq i} P_i^{\alpha_i}$ rester dans $\mathcal{M}$ (toujours par ce qui précède), donc est de degré $\leq \deg \mu$, ce qui impose $\beta_i \leq \alpha_i$, et ce pour tout i, d'où $\mu_x \mid \mu$, *CQFD.*

Suivons l'énoncé. Pour appliquer Baire aux E_n, il faut déjà montrer que ceux-ci sont fermés. Soit $\left(x^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \in E_n$ une suite convergente vers un $x \in E$ telle que

$$\forall k, \ \exists \lambda_0^k, ..., \lambda_n^k, \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k u^i\left(x^k\right) = 0 \text{ (condition de liaison).}$$

Quitte à normaliser par le plus grand des λ_i^k en module à k fixé (on peut car les λ_i^k ne sont pas tous nuls), on peut toujours prendre les λ_i^k dans $[0,1]$ et supposer que l'un deux vaut 1 pour tout k. Il y a donc un certain indice i_0 tel que la suite $\left(\lambda_{i_0}^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ prenne une infinité de fois la valeur 1. On extrait la sous-suite correspondante, puis on en extrait par compacité de $[0,1]^{n+1}$ une sous-suite convergeant vers un $\overrightarrow{\lambda}$ (avec $\lambda_{i_0} = 1$), d'où $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u^i(x) = 0$ par continuité de u. Comme $\lambda_{i_0} = 1$ est non nul, la famille $(x, u(x), ..., u^n(x))$ est liée, ce qui montre que la limite x reste dans E_n.

Les hypothèses sur l'existence ponctuelle d'un polynôme minimal se traduisent par $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Baire nous dit alors que l'un des E_n est d'intérieur non vide, disons $a + r\mathbb{B} \subset E_N$. Ainsi, pour tout vecteur x assez petit, $a + x$ est dans E_N, donc il y a un polynôme P_x non nul de degré $\leq N$ tel que $P_x(u)(a+x) = 0$. En particulier, il y a un P_0 non nul de degré $\leq N$ tel que $P_0(u)(a) = 0$. On en déduit, pour tout x dans la boule $r\mathbb{B}$:

$$\underbrace{P_0 P_x}_{\deg \leq 2N}(u)(x) = P_0 P_x(u)(a+x) - P_x P_0(u)(a) = 0 - 0 = 0,$$

ce qui s'écrit $r\mathbb{B} \subset E_{2N}$, d'où $E = E_{2N}$ en dilatant la boule (E_N est un sev !). On vient de montrer que la partie M est bornée en degré, et on peut conclure en appliquant les résultats préliminaires.

Remarque. Le résultat s'énonce encore une fois en termes d'inversion de quantificateurs :

$$\begin{gathered}\forall x \in E,\ \exists P_x \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\ ,\ P_x(u)(x) = 0 \\ \Longrightarrow\ \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\ ,\ \forall x \in E,\ P(u)(x) = 0.\end{gathered}$$

On notera que l'hypothèse de complétude est nécessaire : considérer dans $\mathbb{R}[X]$ un "tapis roulant", qui est continu pour la norme 1, ponctuellement nilpotent, mais n'admet pas de polynôme minimal (considérer X^{d+1} si d est le degré d'un polynôme annulateur non nul).