Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1 [01803] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 2 [01800] [correction]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3 [01806] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 4 [01807] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5 [01801] [correction]
Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 6 [01804] [correction]
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 7 [01809] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $|f| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ ou $f \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$.

Exercice 8 [01802] [correction]
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $p,q \in \mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$p.f(a) + q.f(b) = (p+q).f(c)$$

Exercice 9 [01805] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\alpha \in [0, 1-1/n]$ tel que

$$f(\alpha + 1/n) = f(\alpha)$$

Exercice 10 [01808] [correction]
Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition :
Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.
Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :

$$\exists (x_1,y_1) \in I^2, x_1 < y_1 \text{ et } f(x_1) \geqslant f(y_1) \text{ et } \exists (x_2,y_2) \in I^2, x_2 < y_2 \text{ et } f(x_2) \leqslant f(y_2)$$

Montrer que la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure.

Exercice 11 [03350] [correction]
Montrer la surjectivité de l'application

$$z \in \mathbb{C} \mapsto z\exp(z) \in \mathbb{C}$$

Exercice 12 [03719] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
a) Montrer que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors f admet un point fixe.
b) Montrer que si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors f admet un point fixe.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Puisque $\lim_{-\infty} f = -1$, f prend des valeurs négatives, puisque $\lim_{+\infty} f = 1$, f prend des valeurs positives.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre celles-ci, f s'annule.

Exercice 2 : [énoncé]
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est une valeur d'annulation de φ.
φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Exercice 3 : [énoncé]
Unicité : Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. g est strictement décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.
Existence : Par l'absurde, puisque g est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.
Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ alors $f(x) > x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f$.
Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ alors $f(x) < x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 4 : [énoncé]
Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ convient.
Sinon, considérons

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Puisque $f(0) > 0$, par opérations sur les limites $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$.
De plus $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.
Puisque g est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $g(\alpha) = 1$ d'où $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue.
Par l'absurde : Si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.
Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entière. Absurde.

Exercice 6 : [énoncé]
Posons $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x)/g(x)$$

φ est continue et

$$\forall x \in I, |\varphi(x)| = 1$$

Montrons que φ est constante égale à 1 ou -1 ce qui permet de conclure.
Par l'absurde, si φ n'est pas constante égale à 1 ni à -1 alors il existe $a, b \in I$ tel que $\varphi(a) = 1 \geqslant 0$ et $\varphi(b) = -1 \leqslant 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule. Absurde.

Exercice 7 : [énoncé]
Pour a assez grand, $|f(x)| \geqslant 1$ sur $[a, +\infty[$ donc f ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.
Etant continue, f est alors de signe constant sur $[a, +\infty[$ et la relation $f = \pm |f|$ permet alors de conclure.

Exercice 8 : [énoncé]
Si $p = q = 0$, n'importe quel c fait l'affaire.
Sinon posons

$$y = \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$$

Si $f(a) \leqslant f(b)$ alors

$$f(a) = \frac{pf(a) + qf(a)}{p+q} \leqslant y \leqslant \frac{pf(b) + qf(b)}{p+q} = f(b)$$

Si $f(b) \leqslant f(a)$ alors, comme ci-dessus $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$.
Dans les deux cas, y est une valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Exercice 9 : [énoncé]
Posons $\varphi : [0, 1 - 1/n] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$$

La fonction φ est continue.
Si φ est de signe strictement constant alors

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)/n) - f(k/n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k/n)$$

ne peut être nul.
Puisque φ prend une valeur positive et une valeur négative, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Exercice 10 : [énoncé]
La fonction φ est continue, $\varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leqslant 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule en un certain t.
Posons $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ et $y_0 = (1-t)y_1 + ty_2$.
$\varphi(t) = 0$ donne $f(x_0) = f(y_0)$ or $x_0 < y_0$ donc f n'est pas injective. Absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
Notons f l'application étudiée. Pour $z = \rho\mathrm{e}^{i\alpha}$, on a

$$f(z) = \rho\mathrm{e}^{\rho\cos\alpha}\mathrm{e}^{i(\alpha+\rho\sin\alpha)}$$

Soit $Z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \geqslant 0$.
Si $r = 0$ alors $Z = 0 = f(0)$.
Si $r > 0$, pour que $z = \rho\mathrm{e}^{i\alpha}$ vérifie $f(z) = Z$, il suffit de trouver (ρ, α) solution du système

$$\begin{cases} \rho\mathrm{e}^{\rho\cos\alpha} = r \\ \alpha + \rho\sin\alpha = \theta \end{cases}$$

Nous alors chercher un couple (ρ, α) solution avec $\rho > 0$ et $\alpha \in]0, \pi[$.
Quitte à considérer un nouvel argument θ pour le complexe Z, nous supposons $\theta > \pi$.
On a alors

$$\begin{cases} \rho\mathrm{e}^{\rho\cos\alpha} = r \\ \alpha + \rho\sin\alpha = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) = r \\ \rho = \dfrac{\theta - \alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

avec

$$g(\alpha) = \frac{\theta - \alpha}{\sin\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\theta-\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha}$$

La fonction g est définie et continue sur $]0, \pi[$.
Quand $\alpha \to 0^+$, $g(\alpha) \to +\infty$ et quand $\alpha \to \pi^-$, $g(\alpha) \to 0^+$.
Par suite, il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $g(\alpha) = r$ et alors, pour $\rho = \frac{\theta-\alpha}{\sin\alpha}$, on obtient

$$f(\rho\mathrm{e}^{i\alpha}) = r\mathrm{e}^{i\theta} = Z$$

Finalement f est surjective.

Exercice 12 : [énoncé]
Dans les deux études, on introduit $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ définie et continue sur $[a, b]$.
L'objectif est de montrer que φ s'annule
a) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors $f(a) \in [a, b]$ et donc $\varphi(a) = f(a) - a \geqslant 0$.
De même $\varphi(b) \leqslant 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'alors φ s'annule.
b) Si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = a$. On a alors $\varphi(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0$.
De même en introduisant β tel que $f(\beta) = b$, on a $\varphi(\beta) \geqslant 0$ et l'on peut à nouveau affirmer que la fonction continue φ s'annule.