# PCSI – $\text{TD}_1$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

## Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $(2\,x-1)\times(3\,x-2)=0$ ,

Réponse

Il suffit de se rappeler qu'un produit est nul si et seulement si un des termes est nul (on dit que $\mathbb{R}$ est intègre) :

$$(2\,x-1)\times(3\,x-2)=0 \Longleftrightarrow 2\,x-1=0 \quad \text{ou} \quad 3\,x-2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}.}$$

2. $(x^2+x)\times(x^2+2\,x-3)=0$,

Réponse

Comme dans le première question, il suffit de déterminer les solutions de :

$$x\times(x+1)=x^2+x=0 \quad \text{et} \quad x^2+2\,x-3=0.$$

Dans le premier cas, on trouve deux solutions : 0 et $-1$ dans le deuxième, en utilisant les formules de résolution classiques, on a :

$$\Delta=b^2-4\,a\times c=2^2-4\times(-3)=16$$

cette équation a donc deux solutions, qui sont :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}=1 \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}=-3$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\boxed{S=\{0,-1,-3,1\}}$$

3. $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

**Réponse**

Posons $y = x^2$. L'équation que l'on cherche à résoudre se réduit à :

$$y^2 + y - 6 = 0$$

on trouve donc comme dans la question précédente $y = -3$ ou $y = 2$ c'est-à-dire

$$x^2 = -3 \quad \text{ou} \quad x^2 = 2$$

le premier cas est bien-sûr impossible, donc :

$$x^4 + x^2 - 6 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}}$$

## Exercice 2 :

Si $a \times c < 0$, combien l'équation :

$$a \times x^2 + b \times x + c = 0$$

a-t-elle de solutions réelles ?

**Réponse**

Il suffit de se rappeler de son cours ; comme :

$$\Delta = b^2 - 4\,a \times c > 0$$

l'équation a deux solutions réelles.

## Exercice 3 :

Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que pour tout réel $x$ :

$$a \times x^2 + b \times x + c \geqslant 0$$

Que peut-on dire de $b^2 - 4\,a \times c$ ?

**Réponse**

Si $\Delta > 0$, alors l'équation :

$$a \times x^2 + b \times x + c = 0$$

admet deux solution réelles distinctes $x_1$ et $x_2$ et la fonction :

$$x \mapsto a \times x^2 + b \times x + c$$

change de signe en chacun de ces points. Comme ce n'est pas le cas, par contraposée :

$$b^2 - 4\,a \times c \leqslant 0.$$

## Exercice 4 :

Déterminer, en fonction du paramètre $m$ le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2 - m \times x + 1 = 0.$$

Réponse

Il s'agit essentiellement d'étudier le signe du discriminant :

$$\Delta = m^2 - 4 = (m-2) \times (m+2)$$

un tableau de signes donne :

| $m$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'équation a donc :

1. une solution si $m = -2$ ou $m = 2$
2. aucune solution si $m \in ]-2, 2[$
3. deux solutions sinon, c'est-à-dire si $m \in ]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

## Exercice 5 :

Quels sont les réels $x_1$ et $x_2$ dont :

1. La somme vaut 4 et le produit $-1$ ?

Réponse

Il s'agit dans les deux cas d'utiliser le résultat suivant (à bien connaître !) : si on cherche $x_1$ et $x_2$ deux réels dont on connaît la somme $s = x_1 + x_2$ et le produit $p = x_1 \times x_2$ alors :

$$(x - x_1) \times (x - x_2) = x^2 - s \times x + p$$

donc $x_1$ et $x_2$ sont les solutions de l'équation :

$$\boxed{x^2 - s \times x + p = 0.}$$

Appliquons. Dans le premier cas, il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$x^2 - 4\,x - 1 = 0$$

et les formules habituelles donnent :

$$\boxed{\{x_1, x_2\} = \left\{2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\right\}.}$$

2. La somme vaut $-1$ et le produit $4$ ?

Réponse

En utilisant la même méthode que la question précédente, il s'agit de résoudre :

$$x^2 + x + 4 = 0$$

on trouve ici :

$$\Delta = -15 < 0$$

l'équation n'a pas de solution réelle ; $\boxed{\text{il n'existe donc pas de tels réels !}}$

## Exercice 6 :

Déterminer les signes des racines de l'équation :

1. $x^2 + 3\sqrt{3} \times x - 1 = 0$,

Réponse

Commençons par vérifier que l'équation admet bien des solutions réelles :

$$\Delta = 31 > 0$$

cette équation admet donc deux solutions réelles, que l'on note : $x_1 < x_2$. Comme dans l'exercice précédent, on constate que :

$$x_1 \times x_2 = -1 < 0.$$

Donc $\boxed{x_1 < 0 \text{ et } x_2 > 0.}$

2. $x^2 + \sqrt{3}\,x + 1 = 0$,

Réponse

Ici, on a :

$$\Delta = -1 < 0$$

l'équation n'a pas de solution ; la question n'a donc pas de sens !

3. $x^2 + 2\,m \times x + m - 1 = 0$ (où $m$ est un paramètre réel).

Réponse

Commençons par montrer que cette équation admet deux solutions réelles :

$$\Delta = 4\,(m^2 - m + 1) = 4\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$$

Notons-les $x_1 < x_2$. Il y a alors trois cas :

(a) si $m - 1 < 0$ c'est-à-dire si $m < 1$ alors $x_1 \times x_2 < 0$ donc $x_1 < 0 < x_2$,

(b) si $m - 1 = 0$ c'est-à-dire $m = 1$ alors il suffit de résoudre : $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$

(c) si $m - 1 > 0$ c'est-à-dire si $m > 1$ alors $x_1 \times x_2 > 0$ donc $x_1$ et $x_2$ sont du même signe et $x_1 + x_2 = -2\,m < 0$ donc $x_1 < x_2 < 0$.

## Exercice 7 :

Déterminer les réels $x$ tels que :

$$|x+3| - |x-1| = |2\,x+1|.$$

Réponse

Il faut revenir à la définition de la valeur absolue. On a, si

$$f(x) = |x+3| - |x-1| - |2\,x+1|$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | $2\,x-3$ | $4\,x+3$ | $1$ | $-2\,x+3$ | |

Il suffit alors de résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur chaque intervalle. On trouve :

1. Si $x \in ]-\infty, -3]$, $2\,x-3=0$ *n'a pas de solution* !
2. si $x \in ]-3, -\frac{1}{2}]$, $4\,x+3=0$ admet une solution : $-\frac{3}{4} \in ]-3, -\frac{1}{2}[$,
3. Si $x \in ]-\frac{1}{2}, 1]$, $1=0$ *n'a pas de solution*,
4. enfin, si $x \in ]1, +\infty]$, $-2\,x+3=0$ admet une solution : $\frac{3}{2} \in ]1, +\infty]$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right\}.}$$

## Exercice :

Résoudre les équations :

1. $\sqrt{x+1} = 3\,x-7$,

Réponse

Commençons par remarquer (ce qui est peut-être le point le plus important de l'exercice) que la racine n'a de sens que pour des nombres positifs. Il s'agit donc de résoudre cette équation pour :

$$x \in [-1, +\infty[.$$

Il faut ensuite faire très attention aux équivalences que l'on écrit :

$$\sqrt{x+1} = 3\,x-7 \iff \begin{cases} x+1 = (3\,x-7)^2 \\ 3\,x-7 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9\,x^2 - 43\,x + 48 = 0 \\ 3\,x-7 \geqslant 0 \end{cases}$$

On trouve alors deux solutions de la première équation :

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = \frac{16}{9}$$

mais seule la première vérifie $3\,x-7 \geqslant 0$. Cette équation admet donc une unique solution :

$$\boxed{S = \{3\}.}$$

2. $\sqrt{|x^2-4|} = 1+x$.

Réponse

Dans cette question, contrairement à la question principale, la présence de la valeur absolue sous la racine nous permet de nous poser la question pour tous réels $x$.

$$\sqrt{|x^2-4|} = 1+x \iff \begin{cases} |x^2-4| = (1+x)^2 \\ 1+x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il y a alors deux cas à traiter :

(a) Si $x^2-4 \geqslant 0$ alors il s'agit de résoudre :

$$x^2-4 = x^2+2\,x+1 \iff x = -\frac{5}{2}$$

mais $1-\frac{5}{2} < 0$, il n'y a donc pas de solutions dans ce cas.

(b) Si $x^2-4 \leqslant 0$ alors il s'agit de résoudre :

$$-x^2+4 = (x+1)^2 \iff 2\,x^2+2\,x-3 = 0 \iff x = -\frac{1+\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

la première solution trouvée ne vérifie pas $x+1 \geqslant 1$ mais la deuxième si et elle vérifie aussi par l'équation dont elle est solution $x^2-4 = -(x+1)^2 \leqslant 0$.

Cette équation admet donc une unique solution :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right\}.}$$