Programme de colle n°8

Semaine du 21 au 25 novembre

An 5 : Espace vectoriel normé
- Norme. Exemples dans $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$
- Distance associée : elle conserve la distance par translation
- Normes équivalentes, exemples.
- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
- Boules, sphère. Ensemble borné. Union, intersection.
- Suite, convergence, limite. Toute suite convergente est bornée.
- $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \|u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.
- Combinaison linéaire et produit de suites convergentes...
- Suite extraite. Propriétés.
- Lien entre convergence et norme.
- Suite et convergence en dimension finie : non dépendance à la norme...
- Application pour les matrices : Si $A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$, alors $A_k^T \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A^T$ et si $B_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} B$, alors $A_kB_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} AB$

An 6 : Suite de fonctions
- Introduction de la notion de convergence simple.
- Exemples et insuffisance de cette notion
- Convergence uniforme
- CVU $\Rightarrow$ CVS
- Méthode : Etude du tableau de variations de $t \longmapsto |f_n(t)-f(t)|$ pour établir la CVU.
- Méthodes simplifiantes : majoration de $|f_n(t)-f(t)|$ pour établir la CVU, $\|f_n-f\|_\infty \geqslant |f_n(t_n)-f(t_n)|$ pour prouver qu'il n'y a pas CVU.
- Si f_n CVU vers f et g_n CVU vers g, alors $\lambda f_n + \mu g_n$ CVU vers $\lambda f + \mu g$.
- Passage à la limite uniforme de la bornitude, de la continuité, de l'intégrale sur un segment.
- Non passage de la dérivabilité par CVU...
- Conditions permettant le passage de la dérivabilité.

Alg 8 : Eléments propres
- Sous espace stable par un endomorphisme.
- Eléments propres d'un endomorphisme.
- Propriétés usuelles.
- Si P est annulateur de u (ou M), $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$: exemple des projecteurs, symétries, nilpotent.
- Somme de sous espaces propres ; Famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes 2 à 2.
- En dimension n, au plus n valeurs propres distinctes.
- Eléments propres d'une matrice carrée.
- En dimension finie : Polynôme caractéristique (définition, coeff)
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Réciproque fausse.
- Lien avec les valeurs propres : $\mathrm{Sp}(u) = \{\text{racines de } \chi_u\}$

  Remarque : Rien sur les multiplicités des valeurs propres...

Questions de cours : Les preuves font partie de la question de cours…

* Toute suite convergente est bornée
* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \|u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.
* Combinaison linéaire de suites CV
* Si $\vec{u}_n$ CV vers $\vec{\ell}$ et v_n CV vers ℓ', alors $\lambda\vec{u}_n + \mu\vec{v}_n$ CV vers $\lambda\vec{\ell} + \mu\vec{\ell'}$.
* Produit d'une suite scalaire et d'une suite vectorielle convergentes.
* Cas d'une algèbre : Produit de suites vectorielles convergentes…
* Convergence et norme : Si $N \leqslant k.N'$, alors … Application : Cas des normes équivalentes.
* Lien entre $\|.\|_\infty$ et N_1 dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$: Elles ne sont pas équivalentes, mais il y a une inégalité…
* CVU entraîne CVS
* Passage à la limite uniforme de la bornitude d'une suite de fonctions
* Une droite est stable par u ssi elle est dirigée par un vecteur propre.
* 0 est valeur propre ssi u n'est pas injective. Les vecteurs propres associés à des VP non nulles sont à chercher dans $\mathrm{Im}(u)$.
* Si P est annulateur de u (ou M), $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$.
* Exemple de spectres : projecteurs, symétries, nilpotent.
* Somme de sous espaces propres
* Famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes 2 à 2 : En dimension n, au plus n valeurs propres distinctes.
* $\mathrm{Sp}(u) = \{\text{racines de } \chi_u\}$
* Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Réciproque fausse.
* Admis : Coefficients de χ_u… Cas en dimension 2.