

1 APPLICATIONS LINÉAIRES DÉFINIES EXPLICITEMENT

- 1) ☹ Pourquoi les applications suivantes **NE** sont-elles PAS linéaires ?
- 1) $\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' - P^2. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy. \end{cases}$

- 2) ☹ Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

- 1) ☹
- a) $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y).$
- b) $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z).$
- c) $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x + y + z, y - 2z).$
- 2) ☹☹
- a) $P \mapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
- b) $P \mapsto P - XP' - P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.
- c) $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

- 3) ☹ Montrer que l'application :
- $$(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$$
- est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et déterminer sa réciproque.

- 4) ☹ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls.
- On pose : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Déterminer SANS CALCUL une base de $\text{Im } A$ et une équation de $\text{Ker } A$ — par simple contemplation de A .

- 5) ☹
- 1) Montrer que l'application $P \mapsto (P(0), P')$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$.
- 2) En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

- 6) ☹☹ Montrer que $P \mapsto P(X) + P(X + 1)$ est un automorphisme :
- 1) de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 2) de $\mathbb{R}[X]$.

- 7) On note Δ l'endomorphisme $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.
- 1) ☹ Déterminer $\text{Ker } \Delta$.
- 2) ☹☹ Déterminer $\text{Im } \Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) ☹☹ Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

- 8) ☹☹ Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

- 1) Déterminer l'image et le noyau de l'application $(f, g) \mapsto f + g$ de $F \times G$ dans E .
- 2) Redémontrer ainsi la formule de Grassmann.

- 9) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$B_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

- 1) ☹ Montrer grâce à la formule du binôme que X^i est combinaison linéaire de B_0, \dots, B_n pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Qu'en déduit-on ?
- 2) ☹☹ On reprend l'exercice indépendamment de la question 1). Montrer par récurrence sur n que la famille (B_0, \dots, B_n) est libre.
- 3) ☹☹ Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k.$$

Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 10) ☹☹☹ Montrer que les \mathbb{K} -espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sont isomorphes.

2 APPLICATIONS LINÉAIRES ABSTRAITES

- 11) ☹ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^k$, puis $\text{Im } f$ et $\text{Im } f^k$.

- 12) ☹ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'alors $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .

- 13) ☹ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$ si et seulement si : $\text{Im } (gf) = \text{Im } g$.

- 14) ☹ Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- 1) a) Exprimer la proposition : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$ en termes de noyau et d'image.
- b) Quelle relation en déduit-on entre $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$ si E, F et G sont de dimension finie ?
- 2) Montrer que : $f(\text{Ker } (g \circ f)) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

- 15) ☹☹ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que :

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

2) Montrer que :

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

3) On suppose à présent E de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

$$(i) \quad E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

$$(ii) \quad \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f. \quad (iii) \quad \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

16 $\odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel. À quelle condition nécessaire et suffisante l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est-il commutatif ?

17 $\odot \odot$ Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'inégalité :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

18 $\odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker } u = \text{Im } u \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \dim E = 2 \text{rg}(u).$$

19 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) $\odot \odot$ On suppose f nilpotent, i.e. qu'une certaine puissance de f est nulle. On note alors p le plus petit entier naturel non nul pour lequel $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, appelé l'indice de nilpotence de f .
 - a) Écrire avec des quantificateurs les propositions : $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et : $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) Montrer que la famille :

$$(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$$

est libre pour un certain $x \in E$.

c) En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2) $\odot \odot \odot$

a) On suppose que pour tout $x \in E$:

$$\exists p \in \mathbb{N}^* / f^p(x) = 0_E.$$

Montrer qu'alors f est nilpotent.

b) Trouver un contre-exemple au résultat a) dans le cas où E est de dimension infinie.

20 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\odot \odot$ Si : $f^2 = 3f - 2\text{Id}_E$, montrer que :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E).$$

2) $\odot \odot$ Si : $f^3 = \text{Id}_E$, montrer que :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E).$$

21 $\odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $fg = h$, $gh = f$ et $hf = g$.

- 1) Montrer que f , g et h ont même noyau K et même image I .
- 2) Montrer que : $f^5 = f$.
- 3) En déduire que : $E = K \oplus I$.

22 $\odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$: $f^2 = \lambda f$.

23 Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1) $\odot \odot$ Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g.$$

2) $\odot \odot \odot$ Montrer que si on suppose seulement $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ de dimension finie, alors $\text{Ker}(g \circ f)$ l'est aussi avec la même inégalité.

24 $\odot \odot$ Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$\dim \text{Ker}(u+v) \leq \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v).$$

25 $\odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $fg - gf = \text{Id}_E$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f g^n - g^n f = n g^{n-1}.$$

2) Montrer que la famille $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

26 $\odot \odot \odot$ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} / h(x) = \lambda x$. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall x \in E, h(x) = \lambda x$, i.e. que h est une homothétie.

27 $\odot \odot \odot$ Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F . À quelle condition nécessaire et suffisante simple K et I sont-ils respectivement le noyau et l'image d'une même application linéaire de E dans F ?

28 $\odot \odot \odot$ Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Montrer que f est la somme de r applications linéaires de rang 1 de E dans F .

29 ⌚⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On veut montrer l'équivalence suivante :

- (i) $\text{Ker } f = \text{Im } f$.
- (ii) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\exists g \in \mathcal{L}(E) / fg + gf = \text{Id}_E$.

- 1) Montrer l'implication (ii) \implies (i).
- 2) On suppose à présent que : $\text{Ker } f = \text{Im } f$.
 - a) Montrer que : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) Pourquoi peut-on se donner un supplémentaire I de $\text{Ker } f$ dans E ?
 - c) On note p la projection sur $\text{Ker } f$ parallèlement à I et on pose : $g = f|_I^{-1} \circ p$. Conclure.

30 ⌚⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \text{Ker } u$ et une forme linéaire λ de E tels que pour tout $x \in E$: $u(x) = \lambda(x)a$.

3 CALCUL MATRICIEL

31 ⌚ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le rang des matrices suivantes :

- 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.
- 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.
- 4) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

32 ⌚⌚ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ les sous-espaces vectoriels :

$$\text{Vect}((\lambda, \lambda, 1)) \quad \text{et} \quad \text{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$$

sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

33 ⌚⌚ On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

34 1) ⌚ Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tXX = 0 \implies X = 0.$$

2) ⌚⌚ En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM).$$

3) ⌚ Généraliser au cas où $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

35 ⌚⌚ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose A inversible.

1) Compléter le calcul par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ \cdots & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0_{n,q} \\ 0_{p,n} & D - BA^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ 0_{q,n} & I_q \end{pmatrix}.$$

2) En déduire une égalité intéressante de rangs.

36 ⌚⌚ On travaille dans cet exercice avec le corps de base \mathbb{C} . Pour tout $X = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on appelle *conjugué de X* le vecteur : $\bar{X} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n . On note \bar{F} l'ensemble des conjugués des éléments de F . Montrer que \bar{F} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n et que : $\dim \bar{F} = \dim F$.

2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{rg}(\bar{M}) = \text{rg}(M).$$

3) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ — mais donc : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On suppose que : $A^3 = -A$. Afin de montrer que A n'est pas inversible, on suppose par l'absurde qu'elle l'est.

a) Montrer l'égalité :

$$\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(A - iI_3) \oplus \text{Ker}(A + iI_3).$$

b) Conclure.

37 ⌚⌚ Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A et B le sont. Que vaut son inverse dans ce cas ?

38 ⌚⌚ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A + B = AB$.

- 1) Montrer que $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inversibles.
- 2) Montrer que A et B commutent.

39 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) ⌚ Montrer que si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.
- 2) ⌚⌚⌚ Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $AB - \lambda I_n$ est inversible si et seulement si $BA - \lambda I_n$ l'est.

4 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

40 ⌚ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

41 ⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

5 PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

42 ⌚ On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Redémontrer l'égalité : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ en exhibant une certaine symétrie.

43 ⌚ On note φ l'application :
 $(x, y, z) \mapsto (-3x + 4y - 6z, -12x + 16y - 24z, -6x + 8y - 12z).$

- 1) De quelle matrice φ est-elle l'application linéaire canoniquement associée ? En déduire que φ est un projecteur de \mathbb{R}^3 .
- 2) Caractériser φ géométriquement.

44 ⌚ On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , puis montrer que : $\mathbb{R}^4 = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A$.

45 ⌚⌚ 1) Montrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2 + X + 1),$$

puis déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\text{Vect}(X^2 + X + 1)$.

2) On pose : $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$

et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, puis déterminer une expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

46 ⌚⌚ Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$ — que l'on caractérisera géométriquement.

47 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . On suppose que : $pq = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et on pose : $r = p + q - qp$. Montrer que r est la projection sur $\text{Im } p \oplus \text{Im } q$ de direction $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

48 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . On suppose que p et q commutent. Montrer que pq est le projecteur de E sur $\text{Im } p \cap \text{Im } q$ de direction $\text{Ker } p + \text{Ker } q$.

49 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E .

- 1) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si : $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 2) Montrer que, dans ce cas, $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$ sont en somme directe et que $p + q$ est le projecteur de E sur $\text{Im } p + \text{Im } q$ de direction $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

50 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . Montrer que : $\text{Ker } p = \text{Ker } q$ si et seulement si : $p = pq$ et $q = qp$.

51 ⌚⌚⌚ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E .

- 1) Montrer que la relation \preccurlyeq sur $\mathcal{P}(E)$ définie pour tous $p, q \in \mathcal{P}(E)$ par :

$$p \preccurlyeq q \iff pq = qp = p$$

est une relation d'ordre.

- 2) Montrer que pour tous $p, q \in \mathcal{P}(E)$, si p et q commutent : $\inf\{p, q\} = pq$.

6 SOMMES D'UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

52 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $f_i f_j = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts et que : $f_1 + \dots + f_n = \text{Id}_E$.

- 1) Montrer que f_1, \dots, f_n sont des projecteurs.

2) Montrer que : $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$.

53 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels : $E = \sum_{i=1}^p F_i$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels G_1, \dots, G_p de E pour lesquels :

$$G_1 \subset F_1, \dots, G_p \subset F_p \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^p G_i.$$

54 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) ⌚⌚ Montrer que pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, si : $f(x) = \lambda x$, alors :

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

- 2) ⌚⌚ Montrer que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts, les sous-espaces vectoriels :

$$\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}_E), \dots, \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$$

sont en somme directe. On pourra convoquer certains polynômes de Lagrange.

55



Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On note \mathcal{S} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E . Soit $d : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ une application. On suppose que : $d(E) = \dim E$ et que pour tous $F, F' \in \mathcal{S}$:

$$F \cap F' = \{0_E\} \implies d(F + F') = d(F) + d(F').$$

Montrer que pour tout $F \in \mathcal{S}$: $d(F) = \dim F$.