# Matrices et systèmes linéaires

## I Résolution matricielle des systèmes linéaires

### I.1 Matrices associées à un système linéaire

Un système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues est de la forme

$$(E)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

Sa résolution par la méthode de Gauss conduit à réécrire de nombreuses fois toutes les inconnues. Or, si l'on aligne verticalement les inconnues, seuls les coefficients qui sont devant les inconnues jouent réellement un rôle dans les calculs.

Ainsi, on décide de représenter ce système à l'aide de deux matrices :

– La **matrice des coefficients du système** $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ qui comporte $n$ lignes (autant que d'équations) et $p$ colonnes (autant que d'inconnues) ;
– La **matrice des seconds membres du système**, $B = (b_i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ j=1}}$ qui est une matrice-colonne comportant $n$ lignes.

On fabrique ensuite la **matrice augmentée** $(A \mid B)$ en accolant la matrice-colonne des seconds membres $B$ à la matrice des coefficients $A$.

**On applique alors la méthode du pivot directement sur la matrice $(A \mid B)$.**

*Exercice* **1** ► Résoudre les systèmes suivants en utilisant la présentation matricielle :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=3 \\ -5x-11y=-7 \\ -x+y-2z=-1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x-y+2z=-1 \\ x-2y+3z=-2 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} -x+2y-z+2t=1 \\ 2x-4y-3z+t=1 \\ x-2y-9z+8t=5 \end{array}\right.$$

### I.2 Matrices équivalentes par lignes, matrices échelonnées

**Rappel.** Pour transformer une système linéaire en un autre système qui lui est équivalent, on peut lui appliquer trois types d'opérations élémentaires sur les lignes :

**1)** des **échanges de lignes** $L_i \longleftrightarrow L_j$, où $i \neq j$ ;
**2)** des **multiplications de ligne** $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$, où $\lambda \neq 0$ ;
**3)** des **combinaisons de lignes** $L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$, où $i \neq j$.

Chacune de ces opérations admet une **opération réciproque** qui annule son effet, respectivement : $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda}\, L_i$ et $L_i \leftarrow L_i - \alpha\, L_j$.

Lorsqu'on résout un système matriciellement, on applique ces mêmes opérations à des matrices. Les matrices n'étant pas des affirmations logiques, on ne les reliera pas par le symbole $\Longleftrightarrow$. On introduit à la place une notion d'équivalence propre aux matrices.

**Déf.** • Matrices équivalentes par ligne
Soit $M$ et $M'$ deux matrices de même taille. On dit que **$M$ et $M'$ sont équivalentes par lignes,** et on note $M \underset{L}{\sim} M'$, s'il est possible de transformer $M$ en $M'$ par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

L'idée derrière cette définition est que deux matrices sont équivalentes par lignes ($\underset{L}{\sim}$) si, et seulement si, les systèmes linéaires qu'elles représentent sont équivalents ($\Longleftrightarrow$). Conséquence immédiate :

**Propr.** • Les matrices apparaissant succesivement lors de l'application de la méthode du pivot de Gauss sur une matrice sont toutes équivalentes par lignes.

**Déf.** • Matrices échelonnées, pivots
**1)** On dit qu'**une matrice $M$ est échelonnée** (par lignes) quand elle satisfait aux conditions suivantes :
– Si l'une de ses lignes est nulle, toutes les lignes suivantes le sont également ;
– À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

**2)** Dans chaque ligne non nulle d'une matrice échelonnée, on appelle **pivot** le coefficient non nul le plus à gauche.
**3)** Une matrice augmentée $M = (A \mid B)$ est dite **échelonnée** quand la matrice $A$ est échelonnée.

**Déf.** • Matrice échelonnée réduite

On dit qu'**une matrice $R$ est échelonnée réduite** (par lignes) quand :

**1)** La matrice $R$ est échelonnée ;

**2)** Tous ses pivots sont égaux à 1 ;

**3)** Les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Illustr. ✎

**Idée importante :** Lorsqu'on applique la méthode du pivot de Gauss sur une matrice augmentée $(A\,|\,B)$, la matrice des coefficients $A$ est transformée d'abord en une **matrice échelonnée**, puis en une **matrice échelonnée réduite.** Cette remarque nous conduit au théorème suivant :

**Thm** • **Toute matrice $A$ est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite $R$. Cette matrice $R$ est unique.**

Démo. L'existence de $R$ provient du fait que l'on peut toujours mener l'algorithme du pivot de Gauss à son terme et aboutir à une matrice échelonnée réduite. Cette matrice est équivalente par lignes à la matrice de départ puisqu'on n'a effectué que des opérations élémentaires sur les lignes. L'unicité de $R$, plus délicate à établir, est admise.

***Exercice* 2** ► Échelonner-réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -9 & 8 \end{pmatrix}$ de trois façons différentes en choisissant comme premier pivot chacun des termes de la première colonne. Que constate-t-on ?

### I.3 Nombre de solutions d'un système linéaire

On rappelle que le rang d'un système linéaire était défini comme le nombre de pivots apparaissant dans les système échelonnés équivalents par ligne à ce système.

**Déf.** • Soit $A$ une matrice quelconque. On appelle **rang de $A$** le nombre de pivots de $R$, la matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à $A$.
On le note **$\mathrm{rg}(A)$.**

Rem. ◇ On peut donc déterminer le rang d'une matrice en lui appliquant la méthode du pivot de Gauss. On connait son rang dès que la matrice est échelonnée, car le nombre de pivots ne varie plus ensuite.

**Propr.** • Soit $A$ une matrice de taille $(n, p)$. Alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$.

Démo. Dans une matrice échelonnée, il y a au maximum un pivot par ligne, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$. Même raisonnement pour les colonnes.

**Thm** • Nombre de solutions d'un système linéaire

Soit $(E)$ un système linéaire, $(A\,|\,B)$ la matrice augmentée associée.

**1)** Le système $(E)$ admet soit 0, soit 1, soit une infinité de solutions.

**2)** Notons $(R\,|\,B')$ une matrice augmentée telle que

$$(A\,|\,B) \underset{\mathrm{L}}{\sim} (R\,|\,B') \quad \text{et que} \quad R \text{ est échelonnée.}$$

Alors $(E)$ admet **au moins une solution** si et seulement si $R$ ne présente aucune ligne de la forme $(0 \;\; 0 \dots 0 \,|\, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$.

**3)** $(E)$ admet **au plus une solution** si et seulement si le rang de $A$ est égal au nombre d'inconnues $p$.

***Exercice* 3** ► Reprendre les systèmes linéaires de l'exercice 1. À quel moment sait-on combien ils admettent de solutions ?

# II Opérations élémentaires et produits de matrices

## II.1 Matrices élémentaires

On se place dans une situation où on effectue des opérations élémentaires sur une matrice comportant $n$ lignes.

**Déf.** • Matrices élémentaires d'opérations sur les lignes

Considérons une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice comportant $n$ lignes. La **matrice élémentaire associée à cette opération** est la matrice obtenue en appliquant cette opération à la matrice identité $\mathrm{I}_n$.

Suivant le type d'opération considéré, on distingue trois familles de matrices élémentaires :

**1)** Les **matrices de transposition** sont les matrices associées aux échanges de lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$ où $i \neq j$ ;

**2)** Les **matrices de dilatation** sont les matrices associées aux multiplications de ligne $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$ ou $\lambda \neq 0$ ;

**3)** Les **matrices de transvection** sont les matrices associées aux combinaisons de lignes $L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$ où $i \neq j$.

**Illustration.**

*Exercice* **4** ► Dans le cas où on travaille sur une matrice comportant trois lignes, écrire les matrices élémentaires associées aux opérations élémentaires $L_2 \longleftrightarrow L_3$, $L_1 \leftarrow 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$.

Ces matrices permettent d'interpréter les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice comme un produit de matrices.

**Propr.** • Appliquer une opération élémentaire à la matrice $A$ revient à multiplier la matrice $A$ **à gauche** par la matrice élémentaire associée à l'opération :

Si $A \xrightarrow[\substack{\text{opération}\\ \text{élémentaire}}]{} A'$, alors $A' = E \times A$ où $E$ est la matrice élémentaire associée à l'opération.

Ex. ✻ Quelques exemples sur les notes de cours.

**Propr.** • Inversibilité des matrices élémentaires

Toutes les matrices élémentaires sont inversibles. En outre, l'inverse d'une matrice élémentaire est la matrice associée à l'opération réciproque.

Démo. Soit $E$ la matrice élémentaire associée à une opération élémentaire donnée et $E'$ la matrice associée à l'opération réciproque. Si on part de la matrice $\mathrm{I}_n$, qu'on lui applique l'opération puis l'opération réciproque, on retombe sur $\mathrm{I}_n$. Mais d'après la propriété précédente, on a obtenu $E' E \,\mathrm{I}_n = E' E$. Ainsi $E' E = \mathrm{I}_n$. Si on recommence en appliquant en premier l'opération réciproque, on obtient $E E' = \mathrm{I}_n$.

Ex. ✻ La matrice $E$ associée à $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ est inversible et son inverse est la matrice $E'$ associée à $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ :

$$\text{Si} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad E^{-1} = E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## II.2 Décomposition ER des matrices

Ce principe, combiné au fait que toute matrice $A$ est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite, nous conduit au théorème de décomposition suivant :

**Thm** • Décomposition ER des matrices

Soit $A$ une matrice quelconque.

Alors il existe une matrice $E$, **produit de matrices élémentaires,** et une **unique** matrice $R$, **échelonnée réduite,** telles que

$$\boxed{A = ER.}$$

Démo. Sur les notes de cours, en remontant la chaîne d'équivalences dans la méthode du pivot.

Rem. ◇ **1)** La matrice $R$ obtenue est équivalente par lignes à la matrice $A$.

**2)** La matrice $E$ n'est pas unique en général.

**3)** Les matrices qui interviennent dans ce produit ne sont pas uniques non plus (car la méthode du pivot permet de faire certains choix arbitrairement, ce qui conduit à des suites de matrices élémentaires différentes).

*Exercice* **5** ► Déterminer la décomposition $ER$ de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

## II.3 Généralisation aux opérations sur les colonnes

**Tout ce qui a été entrepris jusqu'ici sur les lignes des matrices peut être adapté aux colonnes :**

- Les **opérations élémentaires sur les colonnes** d'une matrice sont les échanges $C_i \longleftrightarrow C_j$, les multiplications $C_i \leftarrow \lambda C_i$ $(\lambda \neq 0)$ et les combinaisons $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ $(i \neq j)$.
- Deux matrices $M$ et $M'$ sont dites **équivalentes par colonnes** si on peut passer de l'une à l'autre par une succession d'opérations élémentaires sur les colonnes. On note alors $\boldsymbol{M \underset{\mathrm{C}}{\sim} M'}$.
- On obtient les définition de **matrice échelonnée par colonnes** et de **matrice échelonnée réduites par colonnes** en remplaçant partout dans les définitions le mot « ligne » par le mot « colonne ».

- Les **matrices élémentaires associées** aux opérations élémentaires **sur les colonnes** s'obtiennent par le même principe que celles pour les lignes.

**On démontre alors des théorèmes analogues à ceux vus pour les lignes :**

- Toute matrice $A$ est équivalente par colonnes à une unique matrice échelonnée réduite par colonnes $R'$.
- Appliquer une opération élémentaire sur les lignes, c'est multiplier $\boxed{\textbf{à droite}}$ par la matrice élémentaire associée à l'opération.
- Toute matrice $A$ peut s'écrire $\boxed{\boldsymbol{R'E'}}$ où $R'$ est une matrice échelonnée réduite par colonnes (unique) et $E'$ un produit de matrices élémentaires par colonnes.

En revanche, les opérations sur les colonnes d'une matrice ne peuvent pas s'interpréter comme une résolution de système linéaire.

# III Applications aux matrices inversibles

## III.1 Équations matricielles

**Produit d'une matrice quelconque par une matrice-colonne**

Propr.

- Soir $A$ une matrice de taille $(n,p)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de taille $p$.

  Alors la matrice $AX$ est une matrice-colonne qui *combinaison linéaire* des colonnes de $A$ :

$$AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_p A_p \quad \text{où } A_1, A_2, \ldots, A_p \text{ sont les colonnes de } A.$$

***Exercice* 6** ► **1)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer efficacement $AX$.

**2)** Écrire la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 2x-y+z-t \\ x+y-z+3t \\ y-t \end{pmatrix}$ sous forme d'un produit $AX$ où $X$ est une matrice-colonne.

Soit $(E)$ système dont la matrice augmentée est $(A \mid B)$. Si on introduit de plus une matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ contenant les $p$ inconnues, le système $(E)$ est équivalent à une égalité de matrices-colonne :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right. \iff AX = B,}$$

$AX = B$ est une **équation matricielle** à une inconnue, $X$, qui est une matrice-colonne.

Lorsque la matrice $A$ est inversible, l'équation $AX = B$ est particulièrement simple à résoudre.

Propr.

- Matrices inversibles et systèmes linéaires

  Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$, $B$ et $X$ deux matrices-colonne de taille $n$. **On suppose $A$ inversible.** Alors l'équation $AX = B$ admet pour unique solution $X_0 = A^{-1}B$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ainsi, un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues $(E)$ dont la matrice des coefficients $A$ est inversible admet toujours une unique solution (qui est un $n$-uplet). Un tel système s'appelle un **système de Cramer.**

***Exercice* 7** ► Résoudre à l'aide d'une inversion de matrice le système $\begin{cases} 7x - 5y = 4 \\ 9x + 11y = -3 \end{cases}$

## III.2 Caractérisations des matrices inversibles

On rappelle que **seules les matrices carrées ont une chance d'être inversibles...** mais qu'elles ne le sont pas toutes !

Nous allons maintenant établir un théorème offrant de multiples manières de déterminer si une matrice $A$ est inversible ou non. Nous utiliserons pour cela la décomposition $ER$ des matrices et l'inversibilité des matrices élémentaires.

**Thm** • Caractérisations des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée** de taille $n$.

Les propositions suivantes sont toutes équivalentes :

**1)** $A$ est inversible : il existe une matrice $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = \mathrm{I}_n$.

**2)** $A$ est équivalentes par lignes à la matrice $\mathrm{I}_n$.

**3)** $\mathrm{rg}(A) = n$.

**4)** L'équation matricielle $AX = (0)$ n'admet pas d'autre solution que $X_0 = (0)$.

**5)** Pour tout second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation matricielle $AX = B$ admet une unique solution $X_0$.

**6)** Pour tout second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation matricielle $AX = B$ admet au moins une solution $X_0$.

Rem. ◇ La matrice-colonne nulle $X_0 = (0)$ est une solution *évidente* de l'équation matricielle $AX = (0)$.

Démo. ↪ Preuve que $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ puis que $5 \Rightarrow 6$ et enfin $\neg(3) \Rightarrow \neg(6)$ (grâce à la décomposition ER) ; $4 \Rightarrow 3$ se traite par contraposition.

***Exercice* 8** ► Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre réel et $A = \begin{pmatrix} 2m & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$.

Déterminer à quelle condition sur $m$ la matrice $A$ est inversible.

***Exercice* 9** ► Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale ne présente aucun zéro est une matrice inversible.

## III.3 Matrices inversibles à gauche ou à droite

**Déf.** • Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$.

**1)** On dit que **$A$ est inversible à gauche**, quand il existe une matrice $A'$ telle que $A'A = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, $A'$ est appelé **inverse à gauche de $A$.**

**2)** On dit que **$A$ est inversible à droite** quand il existe une matrice $A''$ telle que $AA'' = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, $A''$ est appelé **inverse à droite de $A$.**

On n'a jamais, jusqu'ici, rencontré de matrice qui était inversible à gauche (ou à droite) sans être inversible (des deux côtés). Et pour cause...

**Thm** • **1)** Une matrice carrée $A$ est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche. Dans ce cas, son inverse est son inverse à gauche.

**2)** Même chose à droite.

Démo. ↪ En utilisant les caractérisations 4 et 6 des matrices inversibles.

Rem. ◇ Ce théorème est une bonne nouvelle : pour prouver que $A'$ est l'inverse $A$, il **suffit** de montrer que $AA' = \mathrm{I}_n$ **ou** que $A'A = \mathrm{I}_n$. Jusqu'ici on devait vérifier les deux.

## III.4 Inversion de matrice par la méthode de Gauss-Jordan

Supposons qu'une matrice $A$ soit inversible et qu'on souhaite calculer son inverse. Si on lui applique la méthode de Gauss, on aboutit d'après le théorème de caractérisation des matrices inversibles à la matrice $\mathrm{I}_n$ :

$$A = A_0 \xrightarrow[\mathrm{op}_1]{} A_1 \xrightarrow[\mathrm{op}_2]{} A_2 \xrightarrow[\mathrm{op}_3]{} \cdots \xrightarrow[\mathrm{op}_{k-1}]{} A_{k-1} \xrightarrow[\mathrm{op}_k]{} A_k = \mathrm{I}_n.$$

Or, chaque opération élémentaire se traduit par un produit à gauche par une matrice élémentaire :

$$A_1 = E_1 \times A_0, \quad A_2 = E_2 \times A_1, \quad \ldots \quad A_{k-1} = E_{k-1} \times A_{k-2}, \quad A_k = E_k \times A_{k-1}.$$

Par une récurrence immédiate, on constate que

$$A_k = E_k \times E_{k-1} \times \cdots E_2 \times E_1 \times A_0 \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{I}_n = (E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1) \times A.$$

La matrice $E = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1$ est donc inverse à gauche de $A$. C'est donc l'inverse de $A$. Reste à trouver une méthode pratique pour calculer efficacement ce produit de matrices élémentaires.

Il suffit de partir de la matrice $\mathrm{I}_n$ (au lieu de $A$), et de lui appliquer la même suite d'opérations élémentaires qu'à $A$ :

$$\mathrm{I}_n = B_0 \underbrace{\xrightarrow[\mathrm{op}_1]{} B_1 \xrightarrow[\mathrm{op}_2]{} B_2 \xrightarrow[\mathrm{op}_3]{} \cdots \xrightarrow[\mathrm{op}_{k-1}]{} B_{k-1} \xrightarrow[\mathrm{op}_k]{}}_{\text{mêmes opérations élémentaires que pour la réduction de } A} B_k = A^{-1}.$$

En traduisant ceci à l'aide de produits de matrices comme plus haut, on se convainc vite que $B_k = E = A^{-1}$.

On en déduit un algorithme (relativement) efficace de calcul d'inverse de matrices :

**Thm** • Méthode de Gauss-Jordan pour l'inversion de matrices

Soit $A$ une matrice carrée inversible.

Si on applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice augmentée $(A \mid \mathrm{I}_n)$ de façon à arriver à une matrice $(\mathrm{I}_n \mid A')$, alors $A'$ est l'inverse de la matrice $A$.

***Exercice* 10** ► Montrer que $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible et calculer $N^{-1}$ par la méthode de Gauss-Jordan.