MP Programme de colle n° 8

Chapitre 5

Séries et familles sommables

Exercices : tout le chapitre

Donner si possible un exercice sur les séries et un exercice sur les familles sommables

Cours :

3. Notion de dénombrabilité
4. Familles sommables

Bien connaître :

- Le théorème de sommation par paquets pour des réels positifs (4.1.d)
- Le théorème de Fubini pour les suites doubles de réels positifs (4.3.a)

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

3

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont dénombrables.

4.1.b

Propriété :

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs avec $(v_i)_{i\in I}$ sommable.

Si $\forall i \in I :\ u_i \leqslant v_i$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} v_i$

4.1.c

Propriété :

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs.

Alors la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable $\sum\limits_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} u_i + \sum\limits_{i\in I} v_i$

4.3.a

Théorème de Fubini pour les familles doubles de réels positifs

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

Alors $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si on a conjointement :

- ❖ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (fixé), la série $\sum_m a_{m,n}$ converge
- ❖ la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge

Dans ce cas : $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$

4.4.b

Théorème sur les produits de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes absolument convergentes.

Alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergent

et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$