SEMAINE 10

INTÉGRALE SUR UN SEGMENT. FONCTIONS INTÉGRABLES

EXERCICE 1 :

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. Pour tout entier naturel non nul n et toute partie A de $[0,1]$, on note $N(A,n)$ le nombre d'indices $k \in [\![1,n]\!]$ tels que $x_k \in A$.

On dit que la suite x est **équirépartie** si, pour tous réels a et b vérifiant $0 \leq a < b \leq 1$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N\big(]a,b[,n\big)}{n} = b - a\ .$$
Montrer que la suite x est équirépartie si et seulement si, pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (c.p.m.), on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f\ . \qquad \textbf{(*)}$$

- -

Remarquons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute partie A de $[0,1]$, on a $N(A,n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_A(x_k)$, où χ_A est la fonction caractéristique de A.

Pour tout entier naturel non nul n et toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, posons $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

• Supposons la relation **(*)** vraie pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$; avec $f = \chi_{]a,b[}$ (fonction en escalier), on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{N\big(]a,b[,n\big)}{n} = \int_0^1 \chi_{]a,b[} = b - a\ ,$$
d'où la propriété d'équirépartition.

• Réciproquement, supposons la suite équirépartie.
Soit d'abord $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ en escalier, soit $(0 = a_0, a_1, \cdots, a_m = 1)$ une subdivision de $[0,1]$ subordonnée à f, soit λ_j la valeur (constante) de f sur $]a_j, a_{j+1}[$ $\ (0 \leq j \leq m-1)$. On a alors
$$\int_0^1 f = \sum_{j=0}^{m-1} (a_{j+1} - a_j)\,\lambda_j$$
et, comme $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j\, \chi_{]a_j,a_{j+1}[} + \sum_{j=0}^{m} f(a_j)\,\chi_{\{a_j\}}$, on a
$$S_n(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j\, \frac{N\big(]a_j,a_{j+1}[,n\big)}{n} + \sum_{j=0}^{m} f(a_j)\,\frac{N\big(\{a_j\},n\big)}{n}\ .$$
Or, par hypothèse, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N\big(]a_j,a_{j+1}[,n\big)}{n} = a_{j+1} - a_j$ pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$.

Il reste à prouver que, pour tout $a \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N\big(\{a\},n\big)}{n} = 0$. Pour cela, il suffit de constater que, si $a \in\,]0,1[$,
$$N\big(\{a\},n\big) = N\big(]0,1[,n\big) - N\big(]0,a[,n\big) - N\big(]a,1[,n\big)$$
et, pour $a = 0$ et $a = 1$,

$$0 \leq N\big(\{0\},n\big) + N\big(\{1\},n\big) = n - N\big(]0,1[,n\big)\ .$$

Soit maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. On sait que f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[0,1]$. Donc, si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. D'après ce qui précède, on peut trouver un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\left|S_n(g) - \displaystyle\int_0^1 g\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Or, pour tout n,

$$\left|S_n(f) - \int_0^1 f\right| \leq |S_n(f) - S_n(g)| + \left|S_n(g) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 g - \int_0^1 f\right|\ .$$

De $\|f - g\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, on déduit que $\left|\displaystyle\int_0^1 g - \int_0^1 f\right| \leq \displaystyle\int_0^1 |g - f| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ et

$$|S_n(f) - S_n(g)| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - g(x_k)\big)\right| \leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}\ ,$$

donc, pour $n \geq N$, on a $\left|S_n(f) - \displaystyle\int_0^1 f\right| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f$.

EXERCICE 2 :

Soit f une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ vers lui-même.

a. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} = a\,f(a)$.

On commencera par traiter le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans le cas général, on montrera la dérivabilité de la fonction $\varphi : a \mapsto \displaystyle\int_0^{f(a)} f^{-1} - a\,f(a)$.

b. Montrer que, pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\displaystyle\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} \geq ab$.

- -

a. Si f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, une simple dérivation par rapport à la variable a permet de conclure.

Dans le cas général, essayons aussi de dériver par rapport à la variable a. Le terme $\displaystyle\int_0^a f$ est dérivable, de dérivée $f(a)$. Les termes $\displaystyle\int_0^{f(a)} f^{-1}$ et $af(a)$, pris séparément, ne sont pas, en général, dérivables, mais étudions leur différence $\varphi(a)$ (*cf.* énoncé) et formons un taux d'accroissement.

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_{f(a)}^{f(a+h)} f^{-1} - (a+h)\,f(a+h) + a\,f(a)\ .$$

Pour $h > 0$, il est facile d'écrire un encadrement de l'intégrale :

$$a\,\big(f(a+h) - f(a)\big) \leq \int_{f(a)}^{f(a+h)} f^{-1} \leq (a+h)\,\big(f(a+h) - f(a)\big)\ ,$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$-f(a+h) \leq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \leq -f(a)\ , \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = -f(a)$$

car f est continue au point a. On obtient de même, pour $h < 0$,

$$-f(a) \leq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \leq -f(a+h)\ , \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = -f(a).$$

Finalement, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $-f$, donc la fonction $g\ :\ a \mapsto \displaystyle\int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} - a\ f(a)$ est dérivable, de dérivée nulle. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+$, et $g(0) = 0$, ce qui répond à la question.

b. Fixons $a \geq 0$. Pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, posons $\psi(b) = \displaystyle\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} - ab$. La fonction ψ est dérivable, de dérivée $\psi'(b) = f^{-1}(b) - a$. La croissance stricte des fonctions f et f^{-1} permet d'affirmer que

$$\psi'(b) > 0 \iff b > f(a)\ .$$

On en déduit sans peine que $\psi(b)$ est minimal lorsque $b = f(a)$ et sa valeur est alors $\psi\big(f(a)\big) = g(a) = 0$ d'après le **a.**, ce qui prouve l'inégalité à démontrer.

EXERCICE 3 :

Pour tout $f \in \mathcal{E} = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et tout réel non nul p, on pose $\mu_p(f) = \left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$: **moyenne d'ordre** p de la fonction $|f|$ sur $[a,b]$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \mu_p(f)$.

2. Montrer que, si $f \in \mathcal{E} = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{p\to 0} \mu_p(f) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln|f(x)|\ dx\right)\ .$$

- -

1. Si $f = 0$, alors $\mu_p(f) = 0$ pour tout p. Excluons désormais ce cas.

Soit $M = \displaystyle\max_{[a,b]} |f| > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par continuité, il existe un segment $[\alpha,\beta]$ de longueur non nulle sur lequel $|f| \geq (1-\varepsilon)M$.

Alors, pour tout $p > 0$,

$$\int_a^b |f|^p \geq (\beta-\alpha)\cdot(1-\varepsilon)^p\, M^p\ , \quad \text{d'où} \quad \mu_p(f) \geq \left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}} (1-\varepsilon)\, M\ .$$

Or, $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}} = 1$, donc

$$\exists P \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall p \in \mathbb{R} \qquad p \geq P \Longrightarrow \mu_p(f) \geq (1-\varepsilon)^2\, M\ .$$

Pour $p \geq P$, on a alors $(1-\varepsilon)^2\, M \leq \mu_p(f) \leq M$. On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} \mu_p(f) = M = \max_{[a,b]} |f| = N_\infty(f)\ .$$

b. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{p\to 0} \mu_p(f) = e^J$, où $J = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi$, avec $\varphi = \ln|f|$. La fonction $|f|$ est continue et strictement positive sur le segment $[a,b]$, donc φ est bornée sur $[a,b]$: $|\varphi(x)| \leq k$ sur $[a,b]$. La fonction $u \mapsto \dfrac{e^u-1-u}{u^2}$ étant prolongeable par continuité en zéro, il existe un réel positif M tel que $\forall y \in \varphi\big([a,b]\big) \quad \left|\dfrac{e^y-1-y}{y^2}\right| \leq M.$

Alors, pour $|p| \leq 1$, on a

$$\left|\big(\mu_p(f)\big)^p - 1 - p\,J\right| = \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b (e^{p\varphi}-1-p\,\varphi)\right| \leq \frac{M\,p^2}{b-a}\left(\int_a^b \varphi^2\right) \leq Mk^2p^2\ .$$

On peut donc écrire $\mu_p(f)^p = e^{p\,\ln\mu_p(f)} = 1 + Jp + O(p^2)$, d'où $p\,\ln\mu_p(f) = Jp + O(p^2)$, donc $\lim\limits_{p\to 0} \ln\mu_p(f) = J$ et enfin $\lim\limits_{p\to 0} \mu_p(f) = e^J$, ce qu'il fallait démontrer.

Le nombre $\mu_0(f) = \lim\limits_{p\to 0} \mu_p(f)$ *est la* **moyenne géométrique** *de* $|f|$ *sur* $[a,b]$.

EXERCICE 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) \geq m$, où m est un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe une constante C "universelle" (c'est-à-dire indépendante de m et de la fonction f) telle que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \leq \frac{C}{\sqrt{m}}\ .$$

On pourra commencer par prouver que f *admet un minimum en un point* t_0 *et on majorera* $\left|\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} e^{if(t)}\,dt\right|$ *indépendamment du réel* t_1.

Source : Antoine CHAMBERT-LOIR, Stéfane FERMIGIER, Vincent MAILLOT, Exercices de mathématiques pour l'Agrégation, Analyse 1, Éditions Masson, ISBN 2-225-84692-8

- -

Soit a un réel. D'après le théorème des accroissements finis, on a, pour tout réel t,

$$f'(t) = f'(a) + (t-a)\, f''(c)\ , \qquad \text{avec} \quad c \in [t,a] \text{ ou } [a,t]\ .$$

Donc,

- pour $t \geq a$, on a $f'(t) \geq f'(a) + m(t-a)$;
- pour $t \leq a$, on a $f'(t) \leq f'(a) + m(t-a)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{-\infty} f' = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$. Comme f' est continue et strictement croissante, il existe un unique point t_0 tel que $f'(t_0) = 0$ et il est clair que c'est le minimum global de la fonction f.

Quitte à translater f, on peut supposer que $t_0 = 0$ et chercher à majorer $\left| \displaystyle\int_0^a e^{if(t)}\, dt \right|$ indépendamment du réel a.

- Supposons $a > 0$. Posons $I = \displaystyle\int_0^a e^{if(t)}\, dt$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\varepsilon e^{if(t)}\, dt + \int_\varepsilon^a e^{if(t)}\, dt \\ &= \int_0^\varepsilon e^{if(t)}\, dt + \int_\varepsilon^a \frac{1}{i\, f'(t)} \left(i\, f'(t)\, e^{if(t)} \right) dt \\ &= \int_0^\varepsilon e^{if(t)}\, dt + \frac{e^{if(a)}}{i\, f'(a)} - \frac{e^{if(\varepsilon)}}{i\, f'(\varepsilon)} - i \int_\varepsilon^a e^{if(t)}\, \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\, dt\ . \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \geq a$, on a bien sûr $|I| \leq \displaystyle\int_0^a |e^{if(t)}|\, dt = a \leq \varepsilon$ et, si $\varepsilon > a$, on a

$$\begin{aligned} |I| &\leq \varepsilon + \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(\varepsilon)} + \int_\varepsilon^a \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\, dt \\ &= \varepsilon + \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(\varepsilon)} - \left[\frac{1}{f'(t)} \right]_\varepsilon^a = \varepsilon + \frac{2}{f'(\varepsilon)}\ . \end{aligned}$$

On a donc $|I| \leq \varepsilon + \dfrac{2}{f'(\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais $f'(\varepsilon) \geq m\varepsilon$, donc $\forall \varepsilon > 0 \quad |I| \leq \varepsilon + \dfrac{2}{m\varepsilon}$, puis $|I| \leq \min\limits_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon + \dfrac{2}{m\varepsilon} \right)$. Recherchons donc ce minimum : une petite étude de fonction, laissée au lecteur, montre qu'il est atteint pour $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2}{m}}$ et vaut $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$. On a ainsi obtenu la majoration

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \qquad \left| \int_0^a e^{if(t)}\, dt \right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\ .$$

- Si $a < 0$, on applique ce qui précède à la fonction $g : t \mapsto g(t) = f(-t)$ qui vérifie aussi $g'' \geq m$ et $g'(0) = 0$, donc

$$\left|\int_0^a e^{if(t)}\,dt\right| = \left|\int_0^{-a} e^{ig(u)}\,du\right| \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\ .$$

• Pour tous a et b réels, on a alors

$$\left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \le \left|\int_0^a e^{if(t)}\,dt\right| + \left|\int_0^b e^{if(t)}\,dt\right| \le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\ ,$$

d'où le résultat demandé avec $C = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 5 :

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que les fonctions f' et $g : t \mapsto tf(t)$ soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

b. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que f est de carré intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 \le 2\ \left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_{\mathbb{R}} g^2\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

c. Étudier les cas d'égalité.

- -

a. Une fonction f appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si les fonctions f' et $g : t \mapsto tf(t)$ (qui dépendent linéairement de f) appartiennent à l'espace vectoriel $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b. L'inégalité $f(t)^2 \le g(t)^2$, vraie pour $|t| \ge 1$, montre que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Posons $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'^2$ et $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g^2$. La fonction $t \mapsto t\,f(t)\,f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de carré intégrable et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$(f'|g) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,dt\right| \le \sqrt{IJ} = N_2(f')\cdot N_2(g)\ . \qquad \textbf{(*)}$$

Or, une intégration par parties montre que, pour tous réels A et B,

$$\int_A^B f(t)^2\,dt = \big[t\,f(t)^2\big]_A^B - 2\int_A^B t\,f(t)\,f'(t)\,dt\ . \qquad \textbf{(**)}$$

Les fonctions f^2 et $t \mapsto t\,f(t)\,f'(t)$ étant intégrables sur $\mathbb{R}$, l'expression $t\,f(t)^2$ admet une limite finie l lorsque t tend vers $+\infty$. Si on avait $l \ne 0$, alors $g(t)^2 = t^2\,f(t)^2$ aurait une limite infinie en $+\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de g^2 sur $\mathbb{R}$.
On a donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\,f(t)^2 = 0$ et, de même, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} t\,f(t)^2 = 0$.

De **(**)**, on déduit alors que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2 = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,dt$, d'où, en vertu de **(*)**, l'inégalité demandée.

c. L'égalité a lieu si et seulement s'il y a égalité ci-dessus dans **(*)** (Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire si et seulement si les fonctions f' et g sont liées, donc si $f' = 0$ (f constante) ou si f est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\lambda x' + tx = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

(t : variable, x : fonction inconnue).
Les fonctions constantes autres que la fonction nulle sont à exclure. Les solutions de **(E)** sont les fonctions de la forme $t \mapsto C \cdot e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}$ ($C \in \mathbb{R}$). On ne conservera que les valeurs strictement positives de λ (sinon, la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{E}$). On obtient donc les fonctions

$$f : t \mapsto C \cdot e^{-\alpha t^2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}_+^* \ , \ C \in \mathbb{R}) \ .$$

EXERCICE 6 :

Dans cet exercice, on admettra le lemme suivant (**théorème de Hardy**) : *si* $\sum_n u_n$ *est une série convergente à termes positifs, alors la série de terme général* $v_n = \sqrt[n]{u_0 u_1 \cdots u_{n-1}}$ *est convergente.*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. On suppose que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. On définit enfin g par

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \frac{x}{F(x)} \ .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = F(n+1) - F(n)$. Démontrer l'inégalité $\dfrac{1}{a_n} \le \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{f(t)}$.

Conséquence pour la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$?

2. Montrer que la série $\sum_n g(n)$ est convergente.

3. En déduire que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4. S'il reste du temps... démontrer le théorème de Hardy : *pour cela, on pourra écrire* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{(n+1)^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k} \, u_k \right)$.

Source : Jean-Marie ARNAUDIÈS, L'intégrale de Lebesgue sur la droite, Éditions Vuibert, ISBN 2-7117-8904-7

- -

1. On a $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ (a_n est strictement positif) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$a_n \left(\int_n^{n+1} \frac{dt}{f(t)} \right) = \left(\int_n^{n+1} f(t)\,dt \right) \left(\int_n^{n+1} \frac{dt}{f(t)} \right) \geq \left(\int_n^{n+1} dt \right)^2 = 1\ ,$$

d'où l'inégalité voulue. La fonction $\dfrac{1}{f}$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$, la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{f(t)}$ converge, il en est donc de même de la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$.

2. On a $F(x) > 0$ pour $x > 0$, donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue en zéro. Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{g(n)} = \frac{F(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \geq \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right)^{\frac{1}{n}}\ ,$$

donc $g(n) \leq \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} \right)^{\frac{1}{n}}$ et, d'après le théorème de Hardy, la série de terme général $g(n)$ est convergente.

3. La fonction g étant à valeurs positives, l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+$ équivaut à la convergence de la série de terme général $c_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,dt$. Or, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et, si on prouve que sa dérivée g' est intégrable sur $[1, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_n c_n$ sera de même nature que la série $\displaystyle\sum_n g(n)$, donc convergente (*eh oui, c'est un théorème au programme!*).

On a $g'(x) = \dfrac{1}{F(x)} - \dfrac{x\,f(x)}{F(x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} > 0$. Pour tout réel x strictement positif, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_0^x \frac{dt}{f(t)} \right) \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \geq \left(\int_0^x dt \right)^2 = x^2\ ,$$

d'où $F(x) \geq \dfrac{x^2}{I}$. On a donc $\dfrac{1}{F(x)} \leq \dfrac{I}{x^2}$ et la fonction $\dfrac{1}{F}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, une intégration par parties (écrite ici sur des intégrales indéfinies) donne $\displaystyle\int \frac{x\,f(x)}{F(x)^2}\,dx = -\frac{x}{F(x)} + \int \frac{dx}{F(x)}$; on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{F(x)} = 0$ et la fonction $\dfrac{1}{F}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en résulte que la fonction $x \mapsto \dfrac{x\,f(x)}{F(x)^2}$ (à valeurs positives) est intégrable sur $[1, +\infty[$. On a ainsi prouvé l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction g', c.q.f.d.

4. On vérifie l'égalité proposée par l'énoncé. On a donc

$$\Big(\prod_{k=0}^{n-1} u_k\Big)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k}\,u_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n(n+1)}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k}\,u_k$$

par l'inégalité arithmético-géométrique. Posons alors $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k}\,u_k$ et $v_n = \Big(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k\Big)^{\frac{1}{n}}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &\leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\,w_n = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)w_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{w_{n-1}}{n}\\ &= \sum_{n=2}^{N}\frac{w_n - w_{n-1}}{n} + w_1 - \frac{w_N}{N+1}\\ &\leq \sum_{n=2}^{N}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n u_{n-1} + 2u_0 \leq e\sum_{n=0}^{N-1} u_n\ .\end{aligned}$$

car $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la convergence de $\sum_n u_n$ entraîne la convergence de $\sum_n v_n$, et on a, plus précisément, la majoration $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n \leq e\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (**inégalité de Carleman**).