MP: Espace préhilbertien et Topologie.

Coralie Renault

21 février 2015

Exercice

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
c) Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.
d) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle .,.\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
b) On pose

$$V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E/ f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.
c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E/ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice

Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exercice

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\right\}$$

a) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
b) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
c) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
d) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Exercice

Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Exercice

Soit E un espace normé et f une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Soit K une partie compacte de E telle que $f(K) \subset K$.
a) Pour $x \in K$ on considère la suite récurrente (x_n) donnée par

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite (x_n).
b) En déduire que $f(K) = K$.

Exercice

Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E.
Etablir

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$$

(en notant $d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$)

Exercice

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ alors $F = E$.

Exercice

Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ continue, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(u_n) = u_{n+1}$.

Montrer l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\textbf{converge} \;\Leftrightarrow\; \underset{n \mapsto +\infty}{lim} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Exercice

Soit E un evn de dimension $n/geq1$ et A une partie compacte de E. On pose $L_A = \{f \in \mathcal{L}(E), f(A) \subset A\}$.

- Montrer que si A contient une boule ouverte alors L_A est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.
- Caractériser les parties compactes de A telles que L_A soit une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.