SEMAINE 22
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
CONIQUES, QUADRIQUES

EXERCICE 1 :

Intégrer le système différentiel

$$\textbf{(S)}\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -y + x(x^2+y^2)\ \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \\ y' &=& x + y(x^2+y^2)\ \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \end{array}\right. .$$

Comportement des courbes intégrales au voisinage de l'origine ?

- -

Le système **(S)** peut s'écrire sous la forme $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& f(x,y) \\ y' &=& g(x,y)\end{array}\right.$, les fonctions f et g étant de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Il semble assez naturel ici d'utiliser les coordonnées polaires. Si (x,y) est une solution de **(S)** définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, le théorème de relèvement permet de poser $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& r(t)\ \cos\theta(t) \\ y(t) &=& r(t)\ \sin\theta(t)\end{array}\right.$, les fonctions $r : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$.

Plus généralement, si $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -y + x\,u(r) \\ y' &=& x + y\,u(r)\end{array}\right.$ se ramène à $\left\{\begin{array}{l} r'\ \cos\theta - \ r\ \theta'\sin\theta = -r\ \sin\theta\ +\ r\,u(r)\ \cos\theta \\ r'\ \sin\theta + \ r\ \theta'\cos\theta\ =\ r\ \cos\theta\ +\ r\,u(r)\ \sin\theta\end{array}\right.$, c'est-à-dire à $\left\{\begin{array}{rcl} r'(t) &=& r(t)\,u\big(r(t)\big) \\ \theta'(t) &=& 1\end{array}\right.$. Cela s'intègre alors en $\theta = t$ (à une translation près du "temps" : les courbes intégrales sont donc parcourues à "vitesse angulaire" constante) et il reste à intégrer l'équation différentielle autonome $r' = r\,u(r)$.

▷ Si $r_0 > 0$ vérifie $u(r_0) = 0$, on a une solution définie par $\left\{\begin{array}{rcl} r(t) &=& r_0 \\ \theta(t) &=& t + C\end{array}\right.$: le cercle de centre O et de rayon r_0 est une courbe intégrale.

▷ Si $u(r) \neq 0$, on écrit $\dfrac{\mathrm{d}r}{r\,u(r)} = \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta$ et on intègre...

Dans le cas qui nous intéresse, $u(r) = r^2\ \sin\dfrac{1}{r^2}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le cercle $\mathcal{C}_k$ de centre O et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ est une courbe intégrale. Sinon, on intègre $\dfrac{\mathrm{d}r}{r^3\ \sin\dfrac{1}{r^2}} = \mathrm{d}t$. En posant $r = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$, puis $v = \cos s$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}r}{r^3\ \sin\dfrac{1}{r^2}} &= -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{\sin s} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin s\,\mathrm{d}s}{\cos^2 s - 1} \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2-1} = -\frac{1}{4}\ \ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right| = -\frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{1-\cos s}{1+\cos s}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ \ln\left|\tan\frac{s}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ \ln\left|\tan\frac{1}{2r^2}\right|\ . \end{aligned}$$

Finalement, $-\dfrac{1}{2}\ \ln\left|\tan\dfrac{1}{2r^2}\right| = \theta + C$ ou $\ln\left|C'\ \tan\dfrac{1}{2r^2}\right| = -2\theta$, puis $\tan\dfrac{1}{2r^2} = \lambda\, e^{-2\theta}$ et finalement l'équation polaire des courbes intégrales (autres que les cercles $\mathcal{C}_k$) est

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\ \arctan(\lambda\, e^{-2\theta}) + 2k\pi}} \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}^*\ .$$

Étudions rapidement ces courbes intégrales :

- ▷ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto r(t)$ (ou $\theta \mapsto r(\theta)$) est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $\left]\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right[$;
- ▷ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda < 0$, la fonction $t \mapsto r(t)$ (ou $\theta \mapsto r(\theta)$) est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme décroissant de $\mathbb{R}$ vers $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{(2k-1)\pi}}\right[$;
- ▷ pour $k = 0$ et $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto r(t)$ (ou $\theta \mapsto r(\theta)$) est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme décroissant de $\mathbb{R}$ vers $\left]\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, +\infty\right[$.

Les cercles $\mathcal{C}_{2k}$ sont donc des cycles limites attracteurs, alors que $\mathcal{C}_{2k+1}$ sont des cycles limites répulseurs.

EXERCICE 2 :

Soient a et b deux réels avec $0 < b < a$.

Pour $\lambda < a$ et $\lambda \neq b$, caractériser la courbe C_λ d'équation

$$(C_\lambda)\ : \qquad \frac{x^2}{b-\lambda} + \frac{y^2}{a-\lambda} = 1\ .$$

Montrer que, par tout point du plan en dehors des axes, il passe deux courbes C_{λ_1} et C_{λ_2} se coupant orthogonalement.

- -

▷ si $\lambda < b$, alors C_λ est une ellipse de centre O, d'axe focal Oy.

▷ si $b < \lambda < a$, alors C_λ est une hyperbole de centre O, d'axe focal Oy.

La distance focale $c = \sqrt{a-b}$ est constante, les foyers F et F' sont fixes, de coordonnées $(0, c)$ et $(0, -c)$. Il s'agit donc d'une famille de **coniques homofocales**.

La normale à C_λ au point de coordonnées (x, y) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\left(\dfrac{x}{b-\lambda}, \dfrac{y}{a-\lambda}\right)$, gradient (au facteur 2 près) de l'application $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{b-\lambda} + \dfrac{y^2}{a-\lambda} - 1$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan avec $xy \neq 0$. Les paramètres λ tels que $M \in C_\lambda$ sont donnés par l'équation

$$(a-\lambda)\,x^2+(b-\lambda)\,y^2-(a-\lambda)(b-\lambda)=0\ ,$$

soit

(E)
$$\lambda^2-(a+b-x^2-y^2)\lambda+ab-ax^2-by^2=0\ .$$

C'est une équation du second degré de discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+b-x^2-y^2)^2-4ab+4ax^2+4by^2\\ &= (a-b+x^2-y^2)^2+4x^2y^2>0\ .\end{aligned}$$

Cette équation admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1<\lambda_2$. En notant $P(\lambda)$ le premier membre de **(E)**, on a

$$P(a)=(a-b)y^2>0 \quad \text{et} \qquad P(b)=(b-a)x^2<0\ ,$$

donc $\lambda_1<b<\lambda_2<a$. Il y a donc exactement deux courbes C_λ passant par M (une ellipse et une hyperbole).

Par ailleurs, si deux courbes $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ ($\lambda_1\neq\lambda_2$) se coupent en $M(x,y)$, alors on a

$$\frac{x^2}{b-\lambda_1}+\frac{y^2}{a-\lambda_1}=\frac{x^2}{b-\lambda_1}+\frac{y^2}{a-\lambda_1}\ ,$$

soit

$$\frac{x^2}{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)}+\frac{y^2}{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}=0\ ,$$

ce qui exprime l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ normaux à $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ respectivement au point M.

Les deux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ se coupant en M sont une ellipse et une hyperbole. La tangente en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$, et la tangente à l'hyperbole est la bissectrice intérieure de cet angle.

EXERCICE 3 :

Dans l'espace euclidien orienté E de dimension trois, on donne une droite D et un plan P, supposés sécants. Soit k un réel strictement positif. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M de E vérifiant la relation

$$d(M,D)^2+d(M,P)^2=k^2\ .$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une quadrique, et préciser sa nature.

- -

Choisissons un repère orthonormal $\mathcal{R}=(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ avec O point d'intersection de D et P, les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dirigeant P, le vecteur $\overrightarrow{i}$ dirigeant la projection orthogonale de D sur P (dans le cas particulier où la droite D est perpendiculaire au plan P, cette dernière condition n'a plus lieu d'être). Le plan P a alors pour équation $z=0$ et, en notant α ($0<\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$)

une mesure de l'angle de la droite D avec le plan P, un vecteur unitaire dirigeant D est $\overrightarrow{u}\,(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$.

Soit M un point de E, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$. On a alors $d(M, P) = |z|$ et $d(M, D) = \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u}\|$. Or,

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = (y\ \sin\alpha)\,\overrightarrow{i} + (z\ \cos\alpha - x\ \sin\alpha)\,\overrightarrow{j} - (y\ \cos\alpha)\,\overrightarrow{k}\ ,$$

donc $d(M, D)^2 = x^2\ \sin^2\alpha + y^2 + z^2\ \cos^2\alpha - 2xz\ \cos\alpha\ \sin\alpha$. L'ensemble $\mathcal{S}$ admet donc pour équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$:

$$x^2\ \sin^2\alpha + y^2 + (1 + \cos^2\alpha)z^2 - 2xz\ \cos\alpha\ \sin\alpha - k^2 = 0\ .$$

On reconnaît l'équation d'une quadrique de centre O, la matrice de la forme quadratique associée est $M = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & 0 & -\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha\sin\alpha & 0 & 1 + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$.

Recherchons ses valeurs propres :

$$\chi_M(X) = (1 - X)(X^2 - 2X + \sin^2\alpha) = (1 - X)(1 + \cos\alpha - X)(1 - \cos\alpha - X)\ .$$

Les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \cos\alpha$, $\lambda_3 = 1 + \cos\alpha$ sont toutes trois strictement positives, donc $\mathcal{S}$ est un ellipsoïde de centre O.

Recherchons maintenant ses axes :

▷ si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $D \perp P$, l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$ est : $x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$, et il s'agit d'une sphère de centre O ;

▷ sinon, les trois valeurs propres sont distinctes et les sous-espaces propres associés sont :

- pour la valeur propre $\lambda_1 = 0$: l'axe $OX = Oy$;
- pour la valeur propre $\lambda_2 = 1 - \cos\alpha$: la droite $OY = \Delta$ d'équations $\begin{cases} y\ =\ 0 \\ z\ =\ x\ \tan\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$;
- pour la valeur propre $\lambda_3 = 1 + \cos\alpha$, la droite $OZ = \Delta'$ d'équations $\begin{cases} y\ =\ 0 \\ z\ =\ x\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$.

Dans le plan xOz, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à P contenant D, les axes Δ et Δ' sont les bissectrices de D et de Ox. L'équation réduite de $\mathcal{S}$ est

$$X^2 + (1 - \cos\alpha)\,Y^2 + (1 + \cos\alpha)\,Z^2 = k^2\ .$$

EXERCICE 4 :

1. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Démontrer l'équivalence entre les assertions

(1) : $\quad \operatorname{tr} u = 0$;

(2) : $\quad$ il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a ses coefficients diagonaux tous nuls.

2. Dans l'espace euclidien E de dimension trois, rapporté à un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, soit l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ .$$

Déterminer l'ensemble des points de E par lesquels on peut mener trois plans tangents à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ deux à deux perpendiculaires.

- -

1. L'implication **(2)** $\Longrightarrow$ **(1)** étant immédiate, intéressons-nous tout de suite à sa réciproque.

Il s'agit de montrer que, si $\operatorname{tr}u=0$, on peut trouver une base orthonormale de E constituée de vecteurs q-isotropes, si q est la forme quadratique définie par $q(x)=\big(u(x)|x\big)$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormale de E diagonalisant u, notons $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ les valeurs propres associées, on a ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$. Soit le vecteur $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}e_i$, on a $u(\varepsilon)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$, donc $q(\varepsilon)=\big(u(\varepsilon)|\varepsilon\big)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$, ce vecteur est q-isotrope.

Ceci permet bien sûr d'amorcer une récurrence sur $n=\dim E$. L'initialisation $(n=1)$ étant immédiate, supposons l'implication **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)** vraie en dimension $n-1$ $(n\geq 2)$ et reprenons les notations ci-dessus dans un espace euclidien de dimension n. Le vecteur ε étant q-isotrope, considérons l'hyperplan $H=(\mathbb{R}\varepsilon)^{\perp}$. Notons p le projecteur orthogonal sur H, soit v l'endomorphisme de H induit par $p\circ u$; on vérifie immédiatement que v est auto-adjoint (puisque p est lui-même auto-adjoint), que $\big(v(x)|x\big)=\big(u(x)|x\big)$ pour tout x de H. Si $(e'_2,\cdots,e'_n)$ est une base orthonormale de H, alors $(\varepsilon,e'_2,\cdots,e'_n)$ est une base orthonormale de E et

$$0=\operatorname{tr}u=\big(u(\varepsilon)|\varepsilon\big)+\sum_{i=2}^{n}\big(u(e'_i)|e'_i\big)=\sum_{i=2}^{n}\big(v(e'_i)|e'_i\big)=\operatorname{tr}v\ ,$$

ainsi l'hypothèse de récurrence peut s'appliquer à l'endomorphisme auto-adjoint v de l'espace euclidien H et il existe $(e''_2,\cdots,e''_n)$ base orthonormale de H dans laquelle v est représenté par une matrice de diagonale nulle ; la base orthonormale $(\varepsilon,e''_2,\cdots,e''_n)$ de E répond alors à la question.

2. Soit $M_1(x_1,y_1,z_1)$ un point de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, le plan $\mathcal{T}_1$ tangent à $\mathcal{E}$ en M_1 admet pour équation

$$\frac{x_1}{a^2}(x-x_1)+\frac{y_1}{b^2}(y-y_1)+\frac{z_1}{c^2}(z-z_1)=0\ ,\qquad\text{soit}\qquad\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0\ .$$

Reprenons le problème “à l'envers” : si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point extérieur à l'ellipsoïde, un plan $\mathcal{P}$ passant par M_0 a une équation de la forme

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0\ ,$$

et il est tangent à $\mathcal{E}$ s'il se confond avec un plan $\mathcal{T}_1$ ci-dessus, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $M_1(x_1,y_1,z_1)\in\mathcal{E}$ tel que les équations de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{T}_1$ sont proportionnelles :

$$\frac{x_1}{a^2\alpha}=\frac{y_1}{b^2\beta}=\frac{z_1}{c^2\gamma}=\frac{1}{\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0}$$

(*le dénominateur de la dernière expression ne peut être nul car aucun plan tangent à $\mathcal{E}$ ne passe par l'origine*). On en tire alors les coordonnées du présumé point de contact M_1 :

$$x_1 = \frac{a^2\alpha}{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0} \ ; \quad y_1 = \frac{b^2\beta}{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0} \ ; \quad z_1 = \frac{c^2\gamma}{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0} \ .$$

et il reste à exprimer que ce point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ appartient à $\mathcal{E}$, ce qui donne la condition

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)^2$$

(on a obtenu l'**équation tangentielle** de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients α, β, γ, δ pour que le plan d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$ soit tangent à $\mathcal{E}$: cette condition est $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - \delta^2 = 0$). Cette équation tangentielle, homogène de degré deux en les variables α, β, γ, donne les vecteurs normaux aux plans issus de M_0 et tangents à $\mathcal{E}$. On peut la voir comme l'équation, dans le repère $(M_0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ d'un cône du second degré de sommet M_0. On cherche alors une condition nécessaire et suffisante pour que ce cône admette trois génératrices deux à deux orthogonales. Or, les génératrices du cône en question sont dirigées par les vecteurs isotropes de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} q(\alpha, \beta, \gamma) &= (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 \\ &= (x_0^2 - a^2)\alpha^2 + (y_0^2 - b^2)\beta^2 + (z_0^2 - c^2)\gamma^2 + 2x_0y_0\alpha\beta + 2y_0z_0\beta\gamma + 2z_0x_0\gamma\alpha \ . \end{aligned}$$

La matrice de cette forme quadratique q est $A = \begin{pmatrix} x_0^2 - a^2 & x_0y_0 & x_0z_0 \\ x_0y_0 & y_0^2 - b^2 & y_0z_0 \\ x_0z_0 & y_0z_0 & z_0^2 - c^2 \end{pmatrix}$. La condition nécessaire et suffisante pour que cette forme q admette trois vecteurs isotropes deux à deux orthogonaux est $\mathrm{tr}(A) = 0$, c'est-à-dire

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ .$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante sur M_0 pour que l'on puisse mener de ce point trois plans tangents à $\mathcal{E}$ deux à deux perpendiculaires ; c'est l'équation d'une sphère de centre O (**sphère orthoptique** de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$).