Sommes doubles

Exercice 1 [02073] [correction]
A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, calculer :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 \quad \text{b) } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij \quad \text{c) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$$

Exercice 2 [02074] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $C_n = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} (p+q)$ en remarquant

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(i^2+2ij+j^2\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=n\sum_{i=1}^{n}i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij+n\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

b) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n}j\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}i\frac{n+i+1}{2}(n-i)=\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}$$

c) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 2 : [énoncé]

Après réorganisation des termes

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}p+q=2C_n+2\sum_{p=1}^{n}p$$

Or

$$2\sum_{p=1}^{n}p=n(n+1)$$

et

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}p+q=n^2(n+1)$$

d'où

$$C_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$