SEMAINE 16

ESPACES EUCLIDIENS

EXERCICE 1 :

Soit C une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Un point x de C est dit **extrémal** si

$$\left(x = \frac{y+z}{2} \quad \text{avec} \quad y \in C\ ,\ z \in C\right) \Longrightarrow (y = z = x)\ .$$

Soit E un espace euclidien. On note

$$C = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|\}\ .$$

Montrer que C est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$ et que l'ensemble de ses points extrémaux est exactement le groupe orthogonal $O(E)$.

- -

• La partie C est la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme subordonnée à la norme euclidienne de E, et il est immédiat de vérifier (*grâce à l'inégalité triangulaire*) qu'une boule dans un espace vectoriel normé est toujours convexe.

• Soit $f \in O(E)$, on a alors $f \in C$. Supposons $f = \dfrac{u+v}{2}$ avec $u \in C$, $v \in C$. Pour tout vecteur x non nul de E, on a

$$\|x\| = \|f(x)\| = \frac{1}{2}\,\|u(x)+v(x)\| \leq \frac{1}{2}\,\big(\|u(x)\| + \|v(x)\|\big) \leq \frac{1}{2}\,\big(\|x\| + \|x\|\big) = \|x\|\ .$$

On en déduit $\|u(x)\| + \|v(x)\| = 2\|x\|$ et, chacun des deux termes étant inférieur ou égal à $\|x\|$, cela entraîne $\|u(x)\| = \|v(x)\| = \|x\|$. Enfin, $\|u(x)+v(x)\| = \|u(x)\| + \|v(x)\|$ implique que les vecteurs $u(x)$ et $v(x)$ sont colinéaires et de même sens, donc finalement égaux. Donc $u = v = f$.

• Soit $f \in C$, supposé non orthogonal. Utilisons la décomposition polaire : il existe $\omega \in O(E)$ et $s \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint défini positif tels que $f = \omega s$. L'endomorphisme s est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, soit $M_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Les λ_i sont des réels appartenant à $]0,1]$. Ils ne sont pas tous égaux à 1, sinon on aurait $s = \mathrm{id}_E$ et $f \in O(E)$. Supposons par exemple $\lambda_1 \in]0,1[$. Considérons alors les endomorphismes u et v, de matrices $\mathrm{diag}(1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $\mathrm{diag}(2\lambda_1 - 1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ respectivement dans la base $\mathcal{B}$, puis $g = \omega u$ et $h = \omega v$. Comme $|2\lambda_1 - 1| \leq 1$, les endomorphismes g et h appartiennent à C ; ils sont tous deux distincts de f, et $f = \dfrac{g+h}{2}$, donc f n'est pas un élément extrémal de C.

Rappel sur la décomposition polaire :

Soit f un automorphisme d'un espace euclidien E. Alors il existe un unique couple (ω, s), avec $\omega \in O(E)$ et $s \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint défini positif, tel que $f = \omega s$.

Preuve : Commençons par démontrer que tout endomorphisme auto-adjoint défini positif s admet une unique racine carrée σ auto-adjointe définie positive : en effet, dans une certaine base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de s est $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les λ_i srictement positifs ; l'endomorphisme σ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ est auto-adjoint défini positif et vérifie $\sigma^2 = \sigma^*\sigma = s$, d'où l'existence.

Pour l'unicité, si σ est un endomorphisme auto-adjoint défini positif vérifiant $\sigma^2 = s$, alors σ et s commutent ; les sous-espaces propres E_1, ..., E_m de s associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_m (ici supposées deux à deux distinctes) sont donc stables par σ. Comme l'endomorphisme σ est diagonalisable, sa restriction σ_i au sous-espace E_i l'est aussi : si μ est une valeur propre de σ_i et x un vecteur propre associé, on a $\sigma(x) = \mu x$ d'où $s(x) = \mu^2 x$, mais $s(x) = \lambda_i x$, donc $\mu^2 = \lambda_i$ et $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ puisque σ est positif. La restriction σ_i de σ au sous-espace E_i est donc $\sqrt{\lambda_i}\ \mathrm{id}_{E_i}$, ce qui détermine entièrement σ.

Soit maintenant $f \in \mathrm{GL}(E)$, l'endomorphisme f^*f est auto-adjoint défini positif, donc admet une racine carrée auto-adjointe définie positive s ; il reste à vérifier que $\omega = fs^{-1}$ est orthogonal, ce qui est une pure formalité, d'où l'existence. Enfin, si $f = \omega s$, alors $f^*f = s^2$ donc s est nécessairement la racine carrée auto-adjointe définie positive de f^*f et $\omega = fs^{-1}$, d'où l'unicité.

Démontrons maintenant le résultat suivant :

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Alors il existe au moins un couple (ω, s), avec $\omega \in O(E)$ et $s \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint positif, tel que $f = \omega s$.

Preuve : L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe donc une suite (f_p) d'automorphismes de E qui tend vers f. Pour tout p, soit $f_p = \omega_p s_p$ la décomposition polaire de f_p. Comme $O(E)$ est compact, il existe une suite extraite $(\omega_{\varphi(p)})$ qui converge vers un automorphisme ω de $O(E)$. L'application $\Phi : \begin{cases} \mathrm{GL}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{L}(E) \\ (u, f) & \mapsto u^{-1}f \end{cases}$ étant continue, on a $\lim_{p\to\infty} \omega_{\varphi(p)}^{-1} f_{\varphi(p)} = \omega^{-1}f$ et, en notant $s = \omega^{-1}f$, l'endomorphisme s appartient à l'adhérence de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs, c'est-à-dire est symétrique positif, et $f = \omega s$, ce qu'il fallait prouver.

Remarquons que l'unicité de cette décomposition n'est plus garantie : si, par exemple, $f = 0$, alors $s = 0$ et $\omega \in O(E)$ est quelconque.

EXERCICE 2 :

Soient $A_1, \cdots, A_p$ des matrices symétriques positives d'ordre n. Montrer que

$$\big(\det(A_1 \cdots A_p)\big)^{\frac{1}{p}} \leq \det\left(\frac{A_1 + \cdots + A_p}{p}\right) .$$

Source : RMS (Revue des Mathématiques de l'Enseignement Supérieur), janvier 2000, Éditions Vuibert, solution empruntée à Moubinool OMARJEE

- -

La matrice $S = \dfrac{1}{p}(A_1 + \cdots + A_p)$ est symétrique positive, donc de déterminant positif ou nul. L'inégalité à démontrer est donc triviale si l'une des matrices A_i est de déterminant nul. On peut donc supposer désormais que toutes les matrices A_i sont symétriques définies positives.

Notons $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n. C'est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'inégalité à démontrer se ramène à

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \ln(\det A_i) \leq \ln\left(\det\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} A_i\right)\right)$$

et, pour cela, il suffit de prouver la concavité de l'application $f : \begin{cases} \mathcal{S}_n^{++} & \to \mathbb{R} \\ S & \mapsto \ln(\det S) \end{cases}$.

Soient donc A et B deux matrices symétriques définies positives. Il est possible de les réduire simultanément, c'est-à-dire il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. Rappelons une démonstration de ce résultat important :

Soient A symétrique définie positive et B symétrique (ces hypothèses sont suffisantes). La matrice A admet une racine carrée symétrique définie positive M (si $A = U\Delta U^{-1} = U\Delta\,{}^tU$ avec U orthogonale et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, poser $M = U\delta\, U^{-1} = U\delta\,{}^tU$ avec $\delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$: $A = M^2 = {}^tMM$). La matrice $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$ est alors symétrique (vérification immédiate), donc on peut écrire $C = QD\,{}^tQ$ avec D diagonale et Q orthogonale ; on a alors

$$A = {}^tMM = {}^tMQ\,{}^tQM = {}^tPP \quad \text{et} \qquad B = {}^tMCM = {}^tMQD\,{}^tQM = {}^tPDP$$

en posant $P = {}^tQM$.

Soit alors $t \in [0,1]$. Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les λ_i étant strictement positifs puisque $B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Alors $(1-t)A + tB = {}^tP\Delta P$ avec $\Delta = \mathrm{diag}\big((1-t)+t\lambda_1, \cdots, (1-t)+t\lambda_n\big)$, donc

$$f\big((1-t)A + tB\big) = 2\ln|\det P| + \sum_{i=1}^{n} \ln\big((1-t)+t\lambda_i\big)\ .$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(1-t)f(A) + tf(B) &= (1-t)\ \ln\big(\det({}^tPP)\big) + t\ \ln\big(\det({}^tPDP)\big) \\
&= (1-t)\ (2\ln|\det P|) + t\ \big(2\ln|\det P| + \sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\big) \\
&= 2\ln|\det P| + t\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\ .
\end{aligned}$$

Or, $\lambda_i^t = \lambda_i^{(1-t)0+t1} \leq (1-t)\lambda_i^0 + t\lambda_i^1 = (1-t)+t\lambda_i$ car la fonction $x \mapsto \lambda_i^x$ est convexe, et cela permet de conclure.

EXERCICE 3 :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad a_{ij} \neq 0\ .$$

Soit la matrice $B = (b_{ij})$, avec $b_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$.

On suppose que la matrice B (qui est bien sûr symétrique), est aussi positive.

Montrer qu'il existe une matrice-colonne V (à coefficients tous non nuls) telle que $A = V\,{}^tV$.

- -

La matrice A admet une racine carrée symétrique positive : il existe $P \in O(n)$ et D diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geq 0$, tels que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$; en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $M = P\Delta P^{-1} = P\Delta\,{}^tP$, la matrice M est symétrique positive et $M^2 = {}^tMM = A$.

En notant $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, et en notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a, pour tout (i,j),

$$a_{ij} = (Ae_i|e_j) = ({}^tMMe_i|e_j) = (Me_i|Me_j)\ ,$$

donc, par Cauchy-Schwarz,

$$a_{ij}^2 = (Me_i|Me_j)^2 \leq \|Me_i\|^2 \|Me_j\|^2 = a_{ii}a_{jj}\ .$$

Si B est aussi positive, on a aussi $b_{ij}^2 \leq b_{ii}b_{jj}$, soit $\dfrac{1}{a_{ij}^2} \leq \dfrac{1}{a_{ii}a_{jj}}$.

Finalement, $a_{ij}^2 = a_{ii}a_{jj}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, c'est-à-dire $(Me_i|Me_j)^2 = \|Me_i\|^2\|Me_j\|^2$ (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz), les vecteurs Me_i $(1 \leq i \leq n)$ sont donc tous colinéaires, d'où $\mathrm{rg}(M) \leq 1$ et même $\mathrm{rg}(M) = 1$ puisque $M \neq 0$. Si C est une colonne non nulle de la matrice M alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe λ_i tel que la i-ième colonne de M soit $C_i = \lambda_i C$: en notant L la matrice-ligne $L = (\,\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_n\,)$, on a $M = CL$. Ensuite, $A = {}^tMM = {}^tL({}^tCC)L$, mais ${}^tCC$ est un scalaire strictement positif r (c'est la somme des carrés des éléments de la colonne C), donc $A = r\ {}^tLL$. En posant $V = \sqrt{r}\ {}^tL$, on a bien $A = V\,{}^tV$, donc $A = (v_iv_j)$ en notant $V = {}^t(\,v_1 \quad \cdots \quad v_n\,)$. Les coefficients de A étant non nuls, aucun coefficient de V ne peut être nul.

Réciproquement, si $V = {}^t(\,v_1 \quad \cdots \quad v_n\,)$ *est une matrice-colonne à coefficients tous non nuls, alors la matrice* $A = V\,{}^tV = (a_{ij}) = (v_iv_j)$ *est symétrique positive à coefficients tous non nuls, et la matrice* B *de coefficient générique* $b_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$ *est aussi symétrique positive, puisque* $B = W\,{}^tW$ *avec* $W = {}^t\left(\dfrac{1}{v_1} \quad \cdots \quad \dfrac{1}{v_n}\right)$.

EXERCICE 4 :

On note $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_n^{++}$ le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique A telle que $e^A = S$. On notera $A = \mathrm{Log}\, S$.

2. Soient $S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}$, $S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}$ telles que $S_1S_2 = S_2S_1$. Montrer que

$$\mathrm{Log}(S_1S_2) = \mathrm{Log}(S_1) + \mathrm{Log}(S_2)\ .$$

3. Soit $S \in \mathcal{S}_n$ dont toutes les valeurs propres appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que $I_n + S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et prouver la relation

$$\mathrm{Log}(I_n + S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, S^k\ .$$

- -

1. • Pour l'existence de A, on diagonalise S à l'aide d'une matrice de passage orthogonale : $S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$. On a $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont des réels strictement positifs. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(\ln\lambda_1, \dots, \ln\lambda_n)$ et $A = P\Delta P^{-1}$. Alors, $A = P\Delta\,{}^t\!P$ est symétrique et, par un calcul classique,

$$e^A = e^{P\Delta P^{-1}} = P\,e^{\Delta}\,P^{-1} = PDP^{-1} = S\ .$$

- Pour l'unicité, on procède comme pour démontrer l'unicité de la racine carrée symétrique définie positive d'une matrice du même métal (*utile pour prouver l'unicité de la décomposition polaire d'une matrice inversible, cf. exercice 1*). Si A est une matrice symétrique vérifiant $e^A = S$, alors A et S commutent ; les sous-espaces propres $E_1, \dots, E_m$ de S associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (*ici supposées deux à deux distinctes*) sont donc stables par A (*enfin, par l'endomorphisme a de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé*). Comme l'endomorphisme a est diagonalisable, sa restriction a_i au sous-espace E_i l'est aussi : si μ est une valeur propre de a_i et X un vecteur propre associé, on a $AX = \mu X$ d'où $SX = e^A\,X = e^{\mu}X$, mais $SX = \lambda_i X$, donc $\mu = \ln\lambda_i$; la restriction a_i de a au sous-espace E_i $(1 \le i \le m)$ est donc $a_i = \ln(\lambda_i)\ \mathrm{id}_{E_i}$, ce qui garantit l'unicité de a.

Remarque : Il est immédiat par ailleurs que l'exponentielle d'une matrice symétrique est une matrice symétrique définie positive (si $A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et D diagonale, alors $e^A = P\,e^D\,P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}$). L'application exponentielle réalise donc une bijection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

2. Posons $A_1 = \mathrm{Log}\,S_1$ et $A_2 = \mathrm{Log}\,S_2$. Si A_1 et A_2 commutent, alors $A_1 + A_2$ est symétrique et $e^{A_1+A_2} = e^{A_1}e^{A_2} = S_1S_2$. Prouvons donc que A_1 et A_2 commutent, ce qui nous conduit au

Lemme. Deux endomorphismes symétriques (de E euclidien) qui commutent sont diagonalisables dans une même base orthonormale.

Démonstration du lemme : notons u et v ces deux endomorphismes, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u, notons $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v ; la restriction $\tilde{v}$ de v à $E_\lambda(u)$ est un endomorphisme symétrique (auto-adjoint), donc diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$. Il ne reste plus qu'à construire une base $\mathcal{B}$ de E par concaténation des $\mathcal{B}_\lambda$ pour obtenir une base orthonormale de E dans laquelle u et v sont représentés par des matrices diagonales.

Revenons à la question posée : les matrices symétriques définies positives S_1 et S_2 commutent, donc le produit S_1S_2 est symétrique, et S_1 et S_2 se diagonalisent à l'aide d'une même matrice de passage orthogonale P (on déduit au passage que S_1S_2 est aussi définie positive) ; la construction des “logarithmes” A_1 et A_2 des matrices S_1 et S_2, explicitée dans la question **1.**, montre que ces deux matrices peuvent aussi être diagonalisées grâce à la même matrice de passage P, donc elles commutent, ce qu'il fallait démontrer.

3. La matrice $I+S$ est symétrique et ses valeurs propres sont les $1+\lambda_i$ (où les λ_i sont les valeurs propres de S), elles sont donc toutes strictement positives et $I + S \in \mathcal{S}_n^{++}$.

Posons $S = PDP^{-1} = PD\,{}^t\!P$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathrm{O}(n)$.

Alors $I + S = P(I+D)P^{-1}$; posons $\Delta = \mathrm{diag}\big(\ln(1+\lambda_1), \dots, \ln(1+\lambda_n)\big)$.

Comme $|\lambda_i| < 1$, on a $\ln(1+\lambda_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\lambda_i^k$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc

$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} D^k$, puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(I+S) &= P\Delta P^{-1} = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} D^k\right) P^{-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (PD^kP^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} S^k .
\end{aligned}$$

EXERCICE 5 :

Soit E un espace préhilbertien réel. Une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E est dite **obtusangle** si

$$i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) < 0 .$$

1. Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille obtusangle. Démontrer l'inégalité

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| .$$

2. Dans un espace euclidien de dimension n, montrer qu'une famille obtusangle a au plus $n+1$ éléments.

3. Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer que l'on peut construire une famille $(u_1, \cdots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires de E vérifiant $(u_i|u_j) = -\frac{1}{n}$ pour $i \neq j$.

4. Soit E euclidien de dimension n. Montrer que le seul réel α différent de 1 pour lequel il existe une famille $(u_1, \cdots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires telle que $(u_i|u_j) = \alpha$ pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, est $\alpha = -\frac{1}{n}$.

Source : Jacques CHEVALLET, Algèbre MP/PSI, collection Vuibert Supérieur, ISBN 2-7117-2092-6

- -

1. Posons $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i$. Alors

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j (x_i|x_j) \qquad \text{et} \qquad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i<j} |\lambda_i \lambda_j| (x_i|x_j) ,$$

donc $\|v\|^2 - \|u\|^2 = 2 \sum_{i<j} \big(|\lambda_i\lambda_j| - \lambda_i\lambda_j\big) (x_i|x_j)$ et chaque terme de cette somme est négatif ou nul, donc $\|v\|^2 - \|u\|^2 \leq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Nous allons d'abord démontrer que toute famille obtusangle de cardinal p dans un espace préhilbertien réel E est de rang au moins égal à $p-1$: soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ une telle famille. Si on avait $\operatorname{rg} \mathcal{X} \leq p-2$, alors la sous-famille $(x_1, \cdots, x_{p-1})$ serait liée : il existerait donc $p-1$ réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0_E$. Mais, d'après la question **1.**, une telle relation entraîne $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| x_i = 0_E$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| (x_i|x_p) = 0$. Dans cette dernière somme, tous les termes sont négatifs ou nuls, ils sont donc tous nuls, donc les λ_i sont tous nuls, ce qui est bête.

Dans un espace euclidien E de dimension n, une famille obtusangle est donc de cardinal au plus $n+1$. La question suivante prouvera qu'il existe effectivement des familles obtusangles de cardinal $n+1$ dans E.

3. Procédons par récurrence sur $n = \dim E$.

- pour $n = 1$, c'est immédiat (prendre les deux vecteurs unitaires opposés) ;
- soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie en dimension $n-1$, soit E euclidien de dimension n. Soit x un vecteur unitaire de E, soit $H = (\mathbb{R}x)^\perp$ l'hyperplan orthogonal à x. Par hypothèse, dans H, il existe une famille $(v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs unitaires tels que $(v_i|v_j) = -\dfrac{1}{n-1}$ pour $i \neq j$. Soit, dans E, une famille de vecteurs $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_n, u_{n+1})$ avec $u_{n+1} = x$ et $u_i = \dfrac{v_i + \lambda_i x}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour que la famille $\mathcal{U}$ (dont les vecteurs sont unitaires) vérifie les conditions imposées, il faut et il suffit que

  - pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $\quad (x|u_i) = -\dfrac{1}{n}$, ce qui est réalisé si et seulement si $\lambda_i = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$;
  - pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, $(u_i|u_j) = -\dfrac{1}{n}$ et on vérifie que cette condition est bien réalisée si $\lambda_i = \lambda_j = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

La famille $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_b, u_{n+1})$, avec $u_{n+1} = x$ et $u_i = \dfrac{1}{n}\big(\sqrt{n^2-1}\, v_i - x\big)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, satisfait aux conditions de l'énoncé.

Une famille $(u_1, \cdots, u_{n+1})$ satisfaisant à ces conditions dans un espace euclidien de dimension n est appelée un **simplexe régulier**. *On peut vérifier (c'est facile) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 0_E$ et que, si $i \neq j$, on a $\|u_i - u_j\| = \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}}$.*

4. Soit $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille équiangulaire de vecteurs unitaires (c'est-à-dire telle que les produits scalaires $(u_i|u_j)$ avec $i \neq j$, aient une valeur commune α). Soit G la matrice de Gram de cette famille, à savoir la matrice carrée d'ordre p de coefficient générique $g_{ij} = (u_i|u_j)$. On vérifie facilement que, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, on a $G = {}^tUU$, où $U \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{U}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

On a donc $\mathrm{rg}(\mathcal{U}) = \mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(G)$ puisque les matrices U et ${}^tUU$ (*ou les applications linéaires canoniquement associées*) ont le même noyau. Ici, on a $G = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $\det G = \big(1+(p-1)\alpha\big)(1-\alpha)^{p-1}$. La famille $\mathcal{U}$ est donc libre sauf pour $\alpha = 1$ (auquel cas tous les vecteurs sont égaux) et pour $\alpha = -\dfrac{1}{p-1}$. Pour que $n+1$ tels vecteurs existent en dimension n, la famille doit être liée, donc nécessairement $\alpha = -\dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 6 :

Notations : soit n un entier naturel non nul ; on note

$O(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;

$\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives d'ordre n ;

$\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n ;

si E est un espace euclidien et $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E, on note $G(\mathcal{X})$ la matrice de Gram de la famille $\mathcal{X}$, c'est-à-dire la matrice symétrique d'ordre p, de coefficient générique $g_{ij} = (x_i|x_j)$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une matrice $\Omega \in O(n)$ et d'une matrice $S \in \mathcal{S}_n$ telles que $A = \Omega S$ (*on pourra commencer par supposer A inversible, puis conclure en invoquant la compacité de $O(n)$*).

2. Soit E un espace euclidien, soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit f un endomorphisme de E, de matrice M relativement à la base $\mathcal{B}$. Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si ${}^tM\, G(\mathcal{B})\, M = G(\mathcal{B})$.

3. Soit E un espace euclidien de dimension $2n$, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires, chacun de dimension n. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale échangeant F et G.

Source : Jean-Marie ARNAUDIÈS et Henri FRAYSSE, Algèbre bilinéaire et géométrie, Éditions Dunod, ISBN 2-04-016550-9

- -

1. Lorsque A est inversible, il s'agit de la **décomposition polaire** : la matrice ${}^tAA$ est symétrique définie positive, donc admet une racine carrée S elle aussi dans $\mathcal{S}_n^{++}$ (*évident en diagonalisant ${}^tAA$ en base orthonormale*). En posant $\Omega = AS^{-1}$, il suffit de vérifier que Ω est orthogonale.

Dans le cas où A est inversible, on peut démontrer l'unicité du couple (Ω, S), mais ce n'est pas utile ici, cf. exercice 1.

L'ensemble $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe donc une suite (A_p) de matrices inversibles qui tend vers A. Pour tout p, soit $A_p = \Omega_p S_p$ la décomposition polaire de A_p. Comme $O(n)$ est compact, il existe une suite extraite $(\Omega_{\varphi(p)})$ qui converge vers une matrice Ω de $O(n)$. L'application $\Phi : \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (U, M) & \mapsto U^{-1}M \end{cases}$ étant continue, on a $\lim\limits_{p\to\infty} \Omega_{\varphi(p)}^{-1} A_{\varphi(p)} = \Omega^{-1}A$ et, en notant $S = \Omega^{-1}A$, la matrice S appartient à l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}$, c'est-à-dire à $\mathcal{S}_n^{+}$, et $A = \Omega S$, ce qu'il fallait prouver.

Remarquons que l'unicité de cette décomposition n'est plus garantie : si, par exemple, A est la matrice nulle, alors $S = 0$ et $\Omega \in O(n)$ est quelconque.

2. Manipulons un peu les matrices de Gram : soit E un espace euclidien de dimension n.

- Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E, si $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ est une famille de p vecteurs de E de matrice $F = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ relativement à la base $\mathcal{B}_0$, alors $G(\mathcal{F}) = {}^tFF \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ sont deux bases de E, si $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a $B' := M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = BP$ avec $B = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$, donc
$$G(\mathcal{B}') = {}^tB'B' = {}^t(BP)(BP) = {}^tP\,{}^tBBP = {}^tP\,G(\mathcal{B})\,P$$
(cela sera utile pour la question suivante).
- Si maintenant $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base quelconque de E, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ sont deux vecteurs de E, on a $(x|y) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j (e_i|e_j) = {}^tX\,G(\mathcal{B})\,Y$, en notant $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$ les matrices-colonnes constituées des coordonnées des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$.

De cette dernière remarque, on déduit que, si f est un endomorphisme de E de matrice M relativement à la base $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned} f \in O(E) &\iff \forall (x,y) \in E^2 \quad \big(f(x)|f(y)\big) = (x|y) \\ &\iff \forall (X,Y) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \quad {}^t(MX)\,G(\mathcal{B})\,(MY) = {}^tX\,G(\mathcal{B})\,Y \\ &\iff {}^tM\,G(\mathcal{B})\,M = G(\mathcal{B})\,. \end{aligned}$$

3. Soit E euclidien de dimension $2n$, soient F et G supplémentaires de dimension n. Considérons une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de E obtenue par concaténation d'une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ de F et d'une base orthonormale $\mathcal{B}_2 = (e_{n+1}, \cdots, e_{2n})$ de G. On a alors $G(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I & A \\ {}^tA & I \end{pmatrix}$, en notant $I = I_n$ la matrice-unité d'ordre n et avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficient générique $a_{ij} = (e_i|e_{n+j})$.

D'après la question **1.**, il existe $\Omega \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$ telles que $A = \Omega S$, donc $S = \Omega^{-1}A = {}^t\Omega A$ et aussi $S = {}^tS = {}^tA\Omega$. Posons $P = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Alors $P \in O(2n)$ et

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} {}^t\Omega & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\,.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2)$ la base de E telle que $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (alors $\mathcal{B}'_1 = (e'_1, \cdots, e'_n)$ est encore une base orthonormale de F). On a

$$G(\mathcal{B}') = {}^tP\,G(\mathcal{B})\,P = \begin{pmatrix} {}^t\Omega\Omega & {}^t\Omega A \\ {}^tA\Omega & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & S \\ S & I \end{pmatrix} .$$

Soit maintenant f l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}'}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. De $M^2 = I_{2n}$, on déduit que f est une symétrie. Il est clair que $f(F) = G$ et $f(G) = F$. Enfin,

$${}^tM\,G(\mathcal{B}')\,M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & S \\ S & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & S \\ S & I \end{pmatrix} = G(\mathcal{B}') ,$$

donc $f \in O(E)$ par la question **2.**

EXERCICE 7 :

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E, soit l'endomorphisme $f = pq$.

a. Montrer que les valeurs propres de f appartiennent au segment $[0, 1]$.

b. Montrer que f est diagonalisable. *On pourra introduire l'endomorphisme* $g = pqp$.

- -

a. Un projecteur orthogonal vérifie les propriétés

$$\forall (y,z) \in E^2 \qquad \big(p(y)|p(z)\big) = \big(p(y)|z\big) \; ; \qquad \textbf{(1)}$$

$$\forall y \in E \qquad \|p(y)\| \leq \|y\| \; . \qquad \textbf{(2)}$$

Donc, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ est non nul et si x est un vecteur propre associé, on a

$$\|pq(x)\|^2 = \big(pq(x)|pq(x)\big) = \big(pq(x)|q(x)\big) = \lambda\,\big(x|q(x)\big) = \lambda\,\|q(x)\|^2$$

avec $q(x) \neq 0$, donc $\lambda = \dfrac{\|pq(x)\|^2}{\|q(x)\|^2} \in]0, 1]$. Tenant compte de l'éventuelle valeur propre 0, on a $\mathrm{Sp}(f) \subset [0, 1]$.

b. L'endomorphisme $g = pqp$ est autoadjoint (car $p^* = p$ et $q^* = q$), donc diagonalisable. On a donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(g)} \dim E_\lambda(g) = \dim E$. Nous allons montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(g)$ et que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \quad \dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(g)$, d'où il résultera que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E$ et que f est diagonalisable.

- Soit d'abord λ une valeur propre **non nulle** de g.

  Si $x \in E_\lambda(g)$, alors $pqp(x) = \lambda x$ et, en appliquant p, on a $pqp(x) = \lambda p(x)$, on en déduit $p(x) = x$ (*car* $\lambda \neq 0$), donc $f(x) = pq(x) = pqp(x) = \lambda x$ et $x \in E_\lambda(f)$; on a ainsi l'inclusion $E_\lambda(g) \subset E_\lambda(f)$.

  Si $x \in E_\lambda(f)$, alors $pq(x) = \lambda x$ et, toujours en appliquant p, on a $pq(x) = \lambda p(x)$ donc $p(x) = x$, donc $g(x) = pqp(x) = pq(x) = \lambda x$ et $x \in E_\lambda(g)$, d'où l'autre inclusion.

On a ainsi montré $E_\lambda(f) = E_\lambda(g)$.

- On vérifie facilement que, pour tout endomorphisme u de E, on a $\mathrm{Ker}(u^*u) = \mathrm{Ker}(u)$. On a $pq = (qp)^*$, donc les endomorphismes pq et qp ont le même rang, et $\dim \mathrm{Ker}(pq) = \dim \mathrm{Ker}(qp)$. Mais $\mathrm{Ker}(qp) = \mathrm{Ker}\big((qp)^*(qp)\big) = \mathrm{Ker}(pqp) = \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi, les sous-espaces propres $E_0(f) = \mathrm{Ker}(pq)$ et $E_0(g) = \mathrm{Ker}(pqp)$ ont la même dimension, ce qui achève la démonstration.

EXERCICE 8 :

1. Soit u un endomorphisme autoadjoint positif dans un espace euclidien E. Montrer l'équivalence

$$\forall x \in E \qquad \big(u(x)|x\big) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}\, u\ .$$

2. Soient a et b deux endomorphismes autoadjoints positifs dans un espace euclidien E.

a. Montrer l'existence d'un endomorphisme autoadjoint positif h tel que $h^2 = b$.

b. Montrer que l'endomorphisme $f = ab$ est diagonalisable. *On pourra considérer l'endomorphisme $g = hah$.*

- -

1. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeur propres distinctes et strictement positives de u. On a alors, d'après le théorème spectral, $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{0\leq i\leq m}} E_i$ avec $E_0 = \mathrm{Ker}(u)$ (éventuellement réduit à $\{0\}$) et $E_i = E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\ \mathrm{id}_E)$ pour $i \in [\![1, m]\!]$. Soit $x = x_0 + \sum\limits_{i=1}^m x_i \in E$, alors $u(x) = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i x_i$ et $\big(u(x)|x\big) = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i \|x_i\|^2$; cette dernière somme, dont tous les termes sont positifs, est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, soit **ssi** $\forall i \in [\![1, m]\!] \quad x_i = 0$, donc **ssi** $x \in E_0 = \mathrm{Ker}(u)$.

2.a. Question classique : avec les notations de la question précédente (et en posant $\lambda_0 = 0$), on prend pour h l'endomorphisme coïncidant avec l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$ sur chaque sous-espace E_i. *On peut prouver l'unicité de h, mais ce n'est pas demandé, cf.exercice 1.*

b. On a $f = ab = ah^2 = (ah)h$ et $g = h(ah)$. L'endomorphisme $g = hah$ est autoadjoint, donc diagonalisable, donc $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(g)} \dim E_\lambda(g) = \dim E$. Comme dans l'exercice précédent, nous allons montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres, avec des sous-espaces propres associés de même dimension.

Lemme : Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors toute valeur propre λ non nulle de uv est aussi valeur propre de vu et on a $\dim E_\lambda(vu) = \dim E_\lambda(uv)$.

Démonstration du lemme : si x est un vecteur propre (donc non nul) de uv pour la valeur propre non nulle λ, on a $uv(x) = \lambda x$, d'où $vuv(x) = \lambda v(x)$. Mais $v(x) \neq 0$ (sinon on aurait $uv(x) = 0$ donc $\lambda x = 0$, ce qui est absurde), donc $v(x)$ est un vecteur propre de vu pour la valeur propre λ, ainsi $\lambda \in \mathrm{Sp}(vu)$. On a aussi prouvé que $v\big(E_\lambda(uv)\big) \subset E_\lambda(vu)$, mais *la restriction de v à $E_\lambda(uv)$ est injective donc* $\dim v\big(E_\lambda(uv)\big) = \dim E_\lambda(uv)$. *L'inclusion obtenue ci-dessus montre alors que* $\dim E_\lambda(uv) \leq \dim E_\lambda(vu)$. *Les endomorphismes u et v jouant le même rôle, il y a égalité des dimensions.*

En appliquant le lemme avec $u = ah$ et $v = h$, on voit que toute valeur propre non nulle de $g = hah$ est aussi valeur propre de $f = ab = ah^2$ (et réciproquement), les sous-espaces propres ayant même dimension.

Par ailleurs, on a $\mathrm{Ker}(ah) = \mathrm{Ker}(hah)$: l'inclusion directe est immédiate et, si $x \in \mathrm{Ker}(hah)$, alors $0 = \big(hah(x)|x\big) = \big(ah(x)|h(x)\big)$ donc $h(x) \in \mathrm{Ker}\, a$ d'après la question **1.** et $x \in \mathrm{Ker}(ah)$. Enfin, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(ah^2) \leq \mathrm{rg}(ah)$, donc

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(ah^2) \geq \dim \mathrm{Ker}(ah) = \dim \mathrm{Ker}(hah) = \dim \mathrm{Ker}(g)\ .$$

On a finalement prouvé que $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(f)$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) \geq \dim E$ (inégalité qui est forcément une égalité), et f est diagonalisable.