Convergence dominée

Exercice 1 [00921] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \,\mathrm{d}x$ (b) $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$

Exercice 2 [03800] [Correction]
Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} \,\mathrm{d}x$$

Exercice 3 [00746] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \,\mathrm{d}x$ (b) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$ (c) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

Exercice 4 [01771] [Correction]
Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} \,\mathrm{d}t$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 5 [00926] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 [00927] [Correction]
Établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 [02568] [Correction]
Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 8 [03294] [Correction]
Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \,\mathrm{d}x$$

Exercice 9 [03807] [Correction]
Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 10 [02567] [Correction]
Soit $f : [0\,; +\infty[\to \mathbb{C}$ continue.
On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite finie ℓ.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) \,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 [02435] [Correction]
Étudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) \,\mathrm{d}t$$

où $f : [0\,; 1] \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 12 [00150] [Correction]
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 13 [00924] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{n f(x)}{1 + n^2 x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 14 [03650] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 intégrable ainsi que sa dérivée.

(a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

(b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 15 [04079] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Exercice 16 [00922] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 17 [00923] [Correction]
Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 18 [02982] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$$

Exercice 19 [00925] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [02862] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 21 [03159] [Correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

(a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t$$

(b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 [03362] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0\,;1\right[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}$$

(a) Montrer que f_n est intégrable sur $\left]0\,;1\right[$. On pose

$$J_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Montrer que
$$J_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 [02392] [Correction]
Soit f une application réelle de classe C^1 sur $[a\,;b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions telle que
$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}$$

(a) Déterminer la limite simple de (f_n).

(b) Établir l'égalité suivante :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Montrer que
$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\ln 2}{n} f(1)$$

Exercice 24 [02517] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a\,;b]$.
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)$$

Exercice 25 [03013] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$$
Indice : utiliser une suite de fonctions judicieuse.

Exercice 26 [04143] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de
$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 27 [04158] [Correction]

(a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.

(b) Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a\,;b]$ vérifiant :
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i)$$

Exercice 28 [04159] [Correction]
Soit a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par
$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, notée $M(a,b)$.

(b) On pose
$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
Montrer
$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b)$$
On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$.

(c) Montrer
$$T(a,b) = \frac{\pi}{M(a,b)}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

(a) Sur $[0\,;\pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CVS} 0$ $|\tan^n x| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0\,;\pi/4[$ donc

$$u_n \to \int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
De plus $\left|\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\right| \leq \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc

$$v_n \to \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$$

Exercice 2 : [énoncé]
En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

Exercice 3 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

(a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0\,;+\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \text{ car } |\sin x| \leq |x|$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \to 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x \to 0$$

Aussi

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2 \quad [\pi]$.
De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1\,;+\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x \to \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

puis $u_n \to 0$.

(b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1\,;+\infty[$.
Ainsi $u_n \to 1$.

(c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

donc $u_n \to 0$.
On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt + t^2}$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \to 1$.
Quand $t \to +\infty$; $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t \in]0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$, $f_n(t) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
De plus, pour $t \le \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \le |u|$,

$$|f_n(t)| \le \frac{nt}{nt + t^2} \le 1$$

et pour $t \ge \pi/2$,

$$|f_n(t)| \le \frac{1}{nt + t^2} \le \frac{1}{t^2}$$

Ainsi $|f_n| \le \varphi$ avec

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;\pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2\,;+\infty[\end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \to \int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 5 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi \mod 2\pi$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} |\sin^n t| \,\mathrm{d}t$$

On a

$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t} \sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \ne \pi/2 \mod \pi \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \le \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 6 : [énoncé]
Les fonctions données par

$$f_n(t) = \left(1 + t^2/n\right)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x \ln(1 + t^2/x)$$

définie sur $[1\,;+\infty[$.
En étudiant le signe de φ'', on démontre φ' est croissante. Or $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$ et donc φ' est négative.
La fonction φ est donc décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(t)| \le \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \le \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1 + t^2}$$

La fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1 + t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.
Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = 0$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$. Étant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \to +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t$$

Posons alors

$$f_n\colon t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f\colon t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : [énoncé]
f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \to \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.
Quand $x \to +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Par suite f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = nf_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \to +\infty$, $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$.
De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée,

$$u_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns)\,\mathrm{d}s$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \to \ell$$

Exercice 11 : [énoncé]
Considérons la suite des fonctions $u_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ déterminée par $u_n(t) = f(t^n)$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et par continuité de f

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t) \underset{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0\,;1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction u continue par morceaux.
Enfin, la fonction f étant continue sur un segment, elle y bornée ce qui permet d'introduire

$$M = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$$

Puisque

$$\forall t \in [0\,;1], |u_n(t)| \leq M$$

avec $t \mapsto M$ intégrable sur $[0\,;1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

Exercice 13 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

$$|f_n(u)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.

Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} xf'(xt)\,\mathrm{d}t$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1}\, xf'(xt)\,\mathrm{d}t$.
Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.
La fonction limite simple est continue par morceaux.
Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq xf'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.
Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \left|f'(u)\right|\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u\in[0;A]}\left|f'(u)\right|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0\,;A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t = x(k+1)\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{5A}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{5AM}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 15 : [énoncé]
Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - t^2/n\right)^n & \text{si } t \in [0\,;\sqrt{n}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $t \in [0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $t > \sqrt{n}$ et

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-t^2}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

et ce que $t \in [0\,;\sqrt{n}]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 : [énoncé]
Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 + x/n)^n & \text{si } x \in [0\,;n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in [0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $x \geq n$ et

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - 2x\right) \to \mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$$

et ce que $x \in [0\,;n]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\, n \underset{u=1-x/n}{=} n\int_0^1 \sqrt{1 - u^n}\,\mathrm{d}u$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^n}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \sim n$$

Exercice 18 : [énoncé]
Posons $f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0\,;n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n\,;+\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, quand $n \to +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln\left(1 - x^2/2n^2 + \mathrm{o}(1/n^2)\right)\right) \to \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f: x \mapsto e^{-x^2/2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi: [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0\,;1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0\,;n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq e^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n\,;+\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \underset{u=nt}{=} \int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n}\,du = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du$$

avec

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1+u/n} & \text{si } u \in [0\,;n] \\ 0 & \text{si } u \in]n\,;+\infty[\end{cases}$$

La suite de fonctions continues (f_n) converge simplement vers la fonction continue f et $|f_n| \leq |f| = \varphi$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ indépendant de n.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(u)\,du$$

Exercice 20 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right| \leq \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \to -\infty$$

car $\ln(1+x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \to 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\,dx = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n: [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)$$

Pour $t \in [0\,;h/\delta[$, on a $f_n(t) \to 1$.
Pour $t \in]h/\delta\,;1]$, on a $f_n(t) \to 0$.
Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta\,;1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t \in [0\,;1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n \to \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{h/\delta} 1\,dt = \frac{h}{\delta}$$

(b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)dt \leq \frac{1}{n}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)dt$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right) \mathrm{d}t \le \frac{S_n}{n} \le I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)\right) \mathrm{d}t$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta} n$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Considérons la fonction

$$\varphi \colon x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

La fonction φ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$ et quand $x \to 1^-$,

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} \frac{\ln x}{x-1} \to \frac{1}{2}$$

Puisque φ se prolonge par continuité en 0 et en 1, φ est intégrable sur $]0\,;1[$.
Or

$$|f_n(x)| = x^{2n} |\varphi(x)| \le |\varphi(x)|$$

donc, par domination, la fonction f_n est elle aussi intégrable sur $]0\,;1[$.

(b) La suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable φ donc par convergence dominée

$$J_n \to 0$$

(c) On a

$$J_k - J_{k+1} = -\int_0^1 x^{2k+1} \ln(x) \,\mathrm{d}x$$

Réalisons une intégration par parties

$$-\int_\varepsilon^a x^{2k+1} \ln(x) \,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2} \ln x\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a x^{2k+1} \,\mathrm{d}x$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$ et $a \to 1^-$, on obtient

$$J_k - J_{k+1} = \frac{1}{(2k+2)^2}$$

et donc

$$J_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} (J_k - J_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$$

Enfin par translation d'indice

$$J_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a\,;1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in\,]1\,;b] \end{cases}$$

(b) Sachant $|f_n(x)| \le |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a\,;b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n} \ln(1 + t^n) f(t)\right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1 + t^n) f'(t) \,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n} \ln(1 + t^n) f(t)\right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1 + a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1 + a^n) \to 0$.
D'autre part

$$\left|\frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1 + t^n) f'(t) \,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{n} \left\|f'\right\|_\infty \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1 + u) \le u$.
Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) \,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]
L'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
est bien définie.
Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe C^1
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$$
avec
$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na;nb]}$$
h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec
$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}g(0)$$
Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na\,;nb]$, $\left|u^2/2n^4\right| \leq 1/2 < 1$,
$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{2n^4\ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2} = \varphi(u)$$
et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na\,;nb]$.
La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Exercice 25 : [énoncé]
L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,dt$ est définie car la fonction $t \mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ puisque
$$\sqrt{t}\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \text{ et } t^2\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, e^{-t} est la limite de
$$u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\chi_{[0;n]}(t)$$
Le $n-1$ de l'exposant n'est pas usuel et peut très bien être remplacé par un n. Néanmoins pour alléger les calculs à venir, le $n-1$ est préférable...

On a
$$\ln(t)u_n(t) \to \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$
et
$$|\ln(t)u_n(t)| \leq \mathrm{e}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$
donc par convergence domine
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
On a
$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$$
avec
$$\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$
et par intégration par parties
$$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \left[\ln(u)(1-(1-u)^n)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$$
On notera qu'on a choisi $(1-(1-u)^n)$ pour primitive de $n(1-u)^{n-1}$ car celle-ci s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales convergentes.
Enfin
$$\int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1\frac{v^n-1}{v-1} = -\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}v^k\,\mathrm{d}v$$
puis
$$\int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + \mathrm{o}(1)$$
Finalement
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$$

Exercice 26 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = t^{n+1}$, on obtient
$$(n+1)I_n = \int_0^1 f\left(u^{1/(n+1)}\right)\mathrm{d}u$$
Posons $f_n(u) = f\left(u^{1/(n+1)}\right)$ avec $u \in [0\,;1]$ et réunissons les hypothèses d'application du théorème de convergence dominée :

(1) Pour tout $u \in [0\,;1]$, on peut affirmer par continuité de f et composition de limites

$$f_n(u) = f\left(u^{1/(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_\infty(u) = \begin{cases} f(0) & \text{si } u = 0 \\ f(1) & \text{si } u \in \left]0\,;1\right] \end{cases}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction f_∞ décrite ci-dessus.

(2) Les fonctions f_n et la fonction f_∞ sont continues par morceaux.

(3) La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$\forall u \in [0\,;1], |f_n(u)| = \left|f\left(u^{1/(n+1)}\right)\right| \le M = \varphi(t)$$

La fonction constante φ est évidemment intégrable sur le segment $[0\,;1]$.

Par le théorème convergence dominée, on obtient

$$(n+1)I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f_\infty(u)\,\mathrm{d}u = f(1)$$

Sachant $f(1) \ne 0$, cette limite finie non nulle est aussi un équivalent et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et n'est nulle sur aucun sous-intervalle non réduit à un point (l'ensemble des zéros est d'intérieur vide).

(b) L'application $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une bijection continue strictement croissante de $[a\,;b]$ vers $[0\,;L]$ avec L l'intégrale de f sur $[a\,;b]$. Les x_i sont alors déterminés par

$$x_i = F^{-1}\left(\frac{iL}{n}\right)$$

(c) On peut écrire

$$\frac{L}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrons par application du théorème de convergence dominée

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

On écrit

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$h_n(x) = g(x_i)f(x) \text{ pour } x \in [x_{i-1}\,;x_i[\ (x_i \text{ est fonction de } n)$$

Les fonctions g et h étant continues sur un segment, on peut les borner et il est facile d'acquérir l'hypothèse de domination. Le plus difficile est d'obtenir la convergence simple. . .

Soit $x \in [a\,;b]$.

Si $f(x) = 0$ alors $h_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Si $f(x) \ne 0$ alors, il existe $m > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in [a\,;b],\ |y - x| \le \alpha \implies f(y) \ge m$$

Pour l'indice i tel que $x \in [x_{i-1}\,;x_i[$, on a (selon que l'intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$ est de longueur supérieure ou inférieure à α)

$$\frac{1}{n}L = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \ge m\min(x_i - x_{i-1}, \alpha)$$

On en déduit $x_i - x_{i-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $x_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et, par continuité de g, $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Par application du théorème de convergence dominée, on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Exercice 28 : [énoncé]

Sans perte de généralités, on suppose $a \le b$.

(a) Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes positifs. Par l'inégalité $2xy \le x^2 + y^2$, on obtient $a_{n+1} \le b_{n+1}$. On en déduit la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n). Ces suites sont monotones et bornées donc convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites. Par passage à la limite de la relation définissant a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, on obtient

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}$$

On en déduit $\ell = \ell'$.

(b) L'intégrale définissant $T(a,b)$ est convergente car

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$$

La fonction de changement de variable $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Après calculs

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

Par parité de la fonction intégrée

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b)$$

(c) On a

$$T(a_{n+1}, b_{n+1}) = T(a_n, b_n)$$

et donc

$$T(a_n, b_n) = T(a,b)$$

Par convergence dominée avec la fonction de domination

$$\varphi(u) = \frac{1}{a^2+u^2}$$

on obtient

$$T(a_n,b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{M(a,b)^2+u^2} = \frac{1}{M(a,b)}\left[\arctan\frac{u}{M(a,b)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{M(a,b)}$$