Calcul de primitives

Exercice 1 [01960] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int te^{t^2}\,\mathrm{d}t$ (b) $\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ (c) $\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$

Exercice 2 [00279] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \cos t \sin t\,\mathrm{d}t$ (b) $\int \tan t\,\mathrm{d}t$ (c) $\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 [00280] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ (b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ (c) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 [01962] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1}$ (b) $\int \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t$ (c) $\int t \sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) On reconnaît une forme $u'\mathrm{e}^u$

$$\int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} + C^{te}.$$

(b) On reconnaît une forme $u'u$

$$\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}.$$

(c) On reconnaît une forme u'/u

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln|\ln t| + C^{te}.$$

Exercice 2 : [énoncé]

(a) C'est une forme $u'u$ donc

$$\int \cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 t + C^{te}.$$

(b) C'est une forme u'/u donc

$$\int \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos t| + C^{te}.$$

(c) On se ramène à une forme $u'u^2$ via $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \int \cos t - \int \cos t\sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C^{te}.$$

Exercice 3 : [énoncé]

Dans chaque cas on reconnaît une forme $u'f(u)$

(a) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C^{te}$ sur $]-\infty\,;-1[$ ou $]-1\,;+\infty[$.

(b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan t^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1} = \frac{1}{\mathrm{i}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\int \frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1} = \arctan t - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln(t^2+1) + C^{te}.$$

(b) On observe

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et

$$\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + C^{te}$$

donc

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos t + \sin t) + C^{te}.$$

(c) On observe

$$\int t\sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int t\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et par intégration par parties

$$\int t\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{t+\mathrm{i}(1-t)}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + C^{te}$$

donc

$$\int t\sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(t\sin t + (1-t)\cos t) + C^{te}.$$