Chapitre 16
Variables aléatoires

1. Variables aléatoires discrètes

1.1. Définitions

- Définition : notamme,nt avec la condition $\forall x \in X \ \Omega \ : X^{-1} \ x \ \in \mathcal{T}$
- Propriété : $\forall A \in \mathcal{P} \ X \ \Omega \ \ : X^{-1} \ A \ \in \mathcal{T}$ Démonstration
- Notations : $X \in A$, $X = x$, $X \geqslant a$

1.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

a) Définition 1 $P_X : \begin{cases} \mathcal{P} \ X \ \Omega & \to \quad 0,1 \\ \quad A & \to P \ X \in A \end{cases}$

- Propriété : P_X est une probabilité sur $X \ \Omega \ , \mathcal{P} \ X \ \Omega$ Démonstration
- Il suffit de déterminer $p_i = P \ X = x_i$ si $X \ \Omega \ = \ x_i ; i \in I$.
- Condition pour que la famille $p_i \ _{i \in I}$ définisse une loi de probabilité.

b) Définition 2 $P_X : \begin{cases} X \ \Omega & \to \quad 0,1 \\ \quad x & \to P \ X = x \end{cases}$

c) Exercices traités

1.3. Variables aléatoires de même loi

- Définition, relation d'aquivalence induite.
- Notations

1.4. Image d'une variable aléatoire par une fonction

- Proposition : $u \ X$ est une variable aléatoire Démonstration

2. Lois de probabilité discrètes usuelles

Pour chaque loi :

- ❖ justification du caractère « loi de probabilité »
- ❖ modèle usuel, exemple

2.1. Lois finies

a) Loi uniforme $\boxed{\mathcal{U} \ n}$

b) Loi de Bernoulli $\boxed{\mathcal{B} \ p}$

c) Loi binomiale $\boxed{\mathcal{B} \ n, p}$

d) Loi hypergéométrique $\boxed{\mathcal{H} \ N, n, p}$ (elle n'est pas au programme de MP)

2.2. Lois discrètes infinies

a) Loi géométrique $\boxed{\mathcal{G}\ \ p}$

- Proposition caractérisation comme **loi sans mémoire** Démonstration

$$\forall\ \ n,k\ \ \in \mathbb{N}^2\ :\ P_{X>n}\ \ X=n+k\ \ =P\ \ X=k$$

b) Loi de Poisson $\boxed{\mathcal{P}\ \ \lambda}$

- Théorème **approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson** Démonstration

3. Espérance

3.1. Définitions

3.2. Formule de transfert

a) Le théorème

- Formule $\boxed{E\ \ X\ \ =\sum_{x\in X\ \ \Omega}\ \ f\ \ x\ \ \cdot P\ \ X=x}$ à connaître

b) Exemples

3.3. Propriétés

a) Linéarité

- Variable aléatoire centrée associée à X

b) Positivité (améliorée)

c) Croissance

3.4. Espérances des lois usuelles

- Elles sont à connaître. Démonstration

3.5. Inégalité de Markov

- $\boxed{P\ \ X\geqslant a\ \ \leqslant \dfrac{E\ \ X}{a}}$ Démonstration

4. Variance, écart-type

4.1. Moments

a) Définition : moment d'ordre r

b) Propriétés des moments d'ordre 2

Propriété 1 Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

- Démonstration

Propriété 2 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si deux variables aléatoires X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, la variable aléatoire XY est d'espérance finie et $E\ \ XY\ \ ^2\leqslant E\ \ X^2\ \ E\ \ Y^2$.

- Démonstration

4.2. Variance, écart-type

a) Définition

b) Propriétés de la variance

c) Exemple

4.3. Variances des lois uxuelles

- Ces résultats sont à connaître. Démonstration

4.4. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration

5. Couple et famille de variables aléatoires

5.1. Couple de variables aléatoires

a) Définition

b) Lois conjointes

- Défintion

Propriété La loi conjointe de X et Y est entièrement déterminée par la famille $\left(p_{i,j}\right)_{i,j} \in [0,1]^{I\times J}$ où $p_{i,j} = P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$.

- Démonstration
- Exemples

c) Lois marginales

- Définition
- Elles sont données par les formules respectives:

$$\forall i \in I : p_i = P(X = x_i) = \sum_{j\in J} p_{i,j} = \sum_{j\in J} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$
$$\forall j \in J : q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} p_{i,j} = \sum_{i\in I} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

- Démonstration
- Exemples

d) Lois conditionnelles

- Définitions
- Liens entre lois conditionnelles, loi conjointe et lois marginales.

$$P\left((X = x) \cap (Y = y)\right) = P(X = x) \times P_{(X=x)}(Y = y)$$
$$P(X = x) = \sum_{y\in X(\Omega)} P(Y = y) \times P_{(Y=y)}(X = x)$$

- Exemples

5.2. Indépendance des variables aléatoires

a) Couple de variable aléatoire indépendantes

- Définition
- Caractérisation Démonstration
- Conséquence : connaissance de la loi conjointe par les lois marginales
- Proposition : si X et Y sont indépendantes,

  alors $f\ \ X$ et $g\ \ Y$ sont indépendantes. Démonstration

b) Indépendance d'une famille de variables aléatoires

- Définition.
- Caractérisation.

> Théorème (lemme des coalitions)
>
> Soit un vecteur aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et $m \in \ 1, n-1\ $.
>
> Soit $f : \prod_{k=1}^{m} X_k\ \ \Omega \ \to E$ et $g : \prod_{k=m+1}^{n} X_k\ \ \Omega \ \to E$.
>
> Si les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes,
>
> alors $f\ \ X_1, \ldots, X_m$ et $g\ \ X_{m+1}, \ldots, X_n\ \ g\ \ Y$ sont indépendantes.

- Démonstration admise

c) Indépendance et espérance

> Théorème
>
> Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finies, alors XY est d'espérance finie égale à $E\ \ XY\ \ = E\ \ X\ \ \times E(Y)$
>
> Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes d'espérance finie, alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ est d'espérance finie et $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E\ \ X_k$.

- Démonstration admise

d) Epreuves répétées indépendantes

- Principe, exemples

5.3. Covariance

a) Définitions et diverse écriture

$$\operatorname{cov}\ \ X, Y\ \ = E\ \ \ X - E\ \ X\ \ \ \ Y - E\ \ Y$$

$$\operatorname{cov}\ \ X, Y\ \ = E\ \ XY\ \ - E\ \ X\ \ E\ \ Y$$

$$E(XY) = \sum_{x, y\ \in X\ \ \Omega\ \times Y \Omega} xyP\ \ \ X = x\ \ \cap\ \ Y = y$$

b) Propriétés immédiates

- Variance et covariance
- Cas où X et Y sont indépendantes ;

c) Exemple

d) Propriétés

> Propriété 1 Sur l'espace des variables aléatoires possédant des moments d'ordre 2, la covariance est une forme bilinéaire, symétrique et positive.

- Démonstration
- Attention ! ce n'est pas un produit scalaire.

> Propriété 2 $\left|\text{cov}\ X,Y\right| \leqslant \sigma\ \ X\ \ \sigma\ \ Y$

- Démonstration

e) Variance d'une somme finie de variables aléatoires

> Théorème Soient X, Y, $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes possédant des moments d'ordre 2.
>
> - $V\ \ X+Y\ = V\ \ X\ + V\ \ Y\ + 2\,\text{cov}\ \ X,Y)$
> - $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\ \ X_i\ + 2 \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \text{cov}\ \ X_i, Y_j)$

- Démonstration
- Exemple

f) Cas des variables indépendantes (bilan)

> Théorème 1 Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :
>
> - $\text{cov}\ \ X,Y\ = 0$
> - $V\ \ X+Y\ = V\ \ X\ + V\ \ Y$

- Démonstration

> Théorème 2 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors :
>
> $$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\ \ X_i$$

- Démonstration

5.4. Loi faible des grands nombres

> Théorème
>
> Soit $\ X_n\ _{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, d'espérance m et admettant un moment d'ordre 2.
>
> Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

- Démonstration

6. Fonctions génératrices

6.1. Définition

<u>Propriété préliminaire</u> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit la série entière $\sum P(X=n)\,t^n$.

- Son rayon de convergence vérifie $R \geqslant 1$.
- Elle converge normalement sur $[-1,1]$.
- Sa somme G_X est continue sur $]-R,R[$, et si $R=1$, sur $[-1,1]$.

- Démonstration

<u>Définition</u> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction génératrice de X est définie : $\boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n}$

6.2. Exemples : fonctions génératrices des lois usuelles

- Formules et démonstrations
- L'étudiant doit savoir calculer ces fonctions génératrices.

6.3. Utilisation de la fonction génératrice pour calculer les moments

a) Calcul de l'espérance

<u>Théorème</u> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

- X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1.
- Dans ce cas : $\boxed{E(X) = G_X'(1)}$.

b) Calcul de la variance

<u>Théorème</u> Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

- X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
- Dans ce cas : $\boxed{V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2}$.

6.4. Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes

- Théorème : notamment $\boxed{G_{X+Y} = G_X \times G_Y}$ Démonstration
- Généralisation à n variables aléatoires indépendantes.
- Exemples.