Ensembles et applications

I Ensembles

I.1 Notion d'ensemble

Déf. • Ensemble, appartenance

Un **ensemble E** est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets. Ces objets sont appelé les **éléments de E.**

Lorsque a est un élément de E, on dit que **a appartient à E** et on note ceci **$a \in E$.**

Illustr. ✐

Ex. ✻ Sur les notes de cours, divers exemples d'ensembles de nombres ainsi que d'autres types d'ensembles.

Déf. • Petits ensembles

1) Il existe un seul ensemble ne comprenant aucun élément : il s'agit de **l'ensemble vide** qui est noté **$\varnothing$.**

2) Un **singleton** est un ensemble comprenant un seul élément.

3) Un **ensemble fini** est un ensemble comprenant un nombre fini d'éléments ; dans le cas contraire on parle d'**ensemble infini.**

Quand un ensemble est fini, on peut l'écrire en listant ses éléments, séparés par des virgules et encadrés par des accolades :

$E = \{1, 4, 5\}$ est l'ensemble comprenant les trois éléments 1, 4 et 5.

La notation analogue pour les ensembles infinis est l'**écriture en extension.** Par exemple, l'ensemble comprenant tous les carrés d'entiers naturels s'écrit

$$C = \left\{n^2, \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Cette écriture se lit « ensemble des n^2, **où** n appartient à $\mathbb{N}$ » ou encore « ensemble des n^2 **lorsque** n **parcourt** $\mathbb{N}$ ». Si k est un objet quelconque, on aura

$$k \in C \iff \exists\, n \in \mathbb{N},\ k = n^2.$$

Propr. • Égalité d'ensembles

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si ils ont exactement les mêmes éléments, autrement dit, si et seulement si on a :

$$x \in A \iff x \in B.$$

I.2 Notion de partie (ou sous-ensemble)

Déf. • Notion de partie

Soit A et B deux ensembles.

1) On dit que **A est inclus dans B** et on note **$A \subset B$** lorsque tout élément de A est également un élément de B.

2) Lorsque A est inclus dans B, on dit aussi que **A est une partie de B** ou que **A est sous-ensemble de B**.

Illustr. ✐

Attention ❢ Ne pas confondre **$a \in B$,** où a est un objet et B est un ensemble,
et **$A \subset B$,** où A et B sont deux ensembles.

Méthode ✐ Pour démontrer que $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on démontre qu'il se trouve obligatoirement dans B.

***Exercice* 1** ► Montrer que si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Quand on fabrique un ensemble A en partant d'un ensemble E et en ne conservant que les éléments qui vérifient une certaine propriété, on peut écrire ces ensembles **en compréhension** :

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}.$$

La barre oblique (parfois verticale) se lit « **tels que** ». Traduction formelle :

$$x \in \mathbb{R}_+ \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geqslant 0 \end{cases}, \qquad z \in \mathbb{U} \iff \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ |z| = 1. \end{cases}$$

***Exercice* 2** ► Expliciter l'ensemble $\mathscr{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; 6x^3 + x^2 - 10x + 3 = 0\right\}$.

Exercice **3** ► Comparer $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$ et $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ v^2 = u^4\}$.

Propr. • Égalité d'ensembles par double inclusion
Soit A et B deux ensembles. Alors $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Rem. ◇ Quand on utilise cette propriété pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on dit que l'on **procède par double inclusion.**

Exercice **4** ► Montrer que $\{x^2,\ x \in \mathbb{Q}_+\} = \{x^2,\ x \in \mathbb{Q}\}$.

I.3 Opérations sur les ensembles

I.3.1 Réunion

Déf. • Réunion de deux ensembles
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. La **réunion de A et B** est l'ensemble comprenant les éléments qui se trouvent dans l'ensemble A, ou dans l'ensemble B, ou dans les deux à la fois.
On la note $\boldsymbol{A \cup B}$, ce qu'on lit « ***A* union *B*** ».
Formellement, on a

$$A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}$$
$$\text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x \in A \cup B \iff x \in A \ \text{ ou } \ x \in B.$$

Illustr. ✐

Exercice **5** ► Résoudre l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Propr. • Soit A, B et C trois parties de E. Alors on a :
1) $A \cup A = A$, $\quad A \cup E = E \quad$ et $\quad A \cup \varnothing = A$.
2) **La réunion est commutative :** $\quad A \cup B = B \cup A$.
3) **La réunion est associative :** $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4) $A \subset A \cup B \quad$ et $\quad B \subset A \cup B$.
5) $A \subset B \iff A \cup B = B$.

I.3.2 Intersection

Déf. • Intersection de deux ensembles
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
1) L'**intersection de *A* et *B*** est l'ensemble comprenant les éléments qui se trouvent à la fois dans l'ensemble A et dans l'ensemble B. On la note $\boldsymbol{A \cap B}$, ce qu'on lit « ***A* inter *B*** ». Formellement, on a :

$$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}$$
$$\text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x \in A \cap B \iff x \in A \ \text{ et } \ x \in B.$$

2) On dit que **A et B sont des ensembles disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Illustr. ✐

Ex. ✻ **1)** $]-1,1[\, \cap [0,2] =]0,1]$, $\ ]-1,1[\, \cup [0,2] =]-1,2]$.
2) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.

Exercice **6** ► Soit $P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - 2y + z = 1\}$ et $P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y - z = 2\}$.
Déterminer $P_1 \cap P_2$.

Propr. • Soit A, B et C trois parties de E. Alors on a :
1) $A \cap A = A$, $\quad A \cap E = A \quad$ et $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$.
2) **L'intersection est commutative :** $\quad A \cap B = B \cap A$.
3) **L'intersection est associative :** $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4) $A \cap B \subset A \quad$ et $\quad A \cap B \subset B$.
5) $A \cap B = A \iff A \subset B$.
6) **L'intersection se distribue sur la réunion :** $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7) **La réunion se distribue sur l'intersection :** $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

I.3.3 Complémentaire

Déf. • Complémentaire d'une partie
Soit E un ensemble, A une partie de E.
On appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble comprenant tous les éléments de E qui ne se trouvent pas dans A. On le note $\boldsymbol{\complement_E A}$ ou $\boldsymbol{E \setminus A}$, ou encore, lorsque l'ensemble E peut être sous-entendu, $\boldsymbol{\overline{A}}$. Formellement, on a :

$$\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$
$$\text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$

Illustr. ✐

Propr. • Soit A et B deux parties de E. Alors on a :
1) $\overline{\varnothing} = E$, $\quad \overline{E} = \varnothing$.
2) $\overline{(\overline{A})} = A$.
3) $A \cup \overline{A} = E$, $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$.
4) Règles de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

***Exercice* 7** ► Montrer que si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

I.3.4 Différence ensembliste

Déf. • Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.
On appelle **différence ensemblistes de A et B** l'ensemble comprenant tous les éléments de A qui ne se trouvent pas dans B. On le note $\boldsymbol{A \setminus B}$ ou $\boldsymbol{A - B}$, et on le lit « A privé de B ». Formellement,

$$A \setminus B = \{x \in A \,/\, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B.$$

Attention ❢ Attention à ne pas confondre \ (« privé de », pour les différences ensemblistes) et / (« tel que », pour les définitions d'ensembles en compréhension).

***Exercice* 8** ► Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Démontrer que : $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

I.3.5 Produits cartésiens

Déf. • Produit cartésien de deux ensembles
1) Un **couple** est une liste ordonnée de deux éléments. On note (a, b) le couple formé des éléments a et b pris dans cet ordre.
2) Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien de E par F** est l'ensemble comprenant tous les couples formés, dans cet ordre, d'un élément de E et d'un élément de F. On le note $\boldsymbol{E \times F}$, ce qu'on lit « **E croix F** ».

Ex. ✻ **1)** Si $A = \{1, 2, -1\}$ et $B = \{0, 1\}$, alors
$A \times B = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (-1,0), (-1,1)\}$.
2) $A \times \{1\} = \{(1,1), (2,1), (-1,1)\}$,
$A \times \{0\} = (1,0), (2,0), (2,-1)$.
3) $A \times \varnothing = \varnothing$

Quelques manipulations formelles :

$$\begin{aligned}
(a,b) \in E \times F &\iff a \in E \wedge b \in F \\
u \in E \times F &\iff \exists a \in E, \exists b \in F, \; u = (a,b) \\
(a,b) = (c,d) &\iff a = c \wedge b = d \\
(a,b) \neq (c,d) &\iff a \neq c \vee b \neq d
\end{aligned}$$

On généralise maintenant aux produits cartésiens de plusieurs ensembles :

Déf. • Produit cartésien d'un nombre finis d'ensembles
Soit n un entier naturel non nul.
1) Un **n-uplet** est une liste ordonnée $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n éléments.
2) Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles, leur **produit cartésien est l'ensemble $\boldsymbol{E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n}$** comprenant tous les n-uplets d'éléments choisis (dans cet ordre) dans E_1, E_2, …, E_n :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), \; a_1 \in E_1 \wedge a_2 \in E_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in E_n\}.$$

3) L'ensemble $\boldsymbol{E^n}$ est le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

***Exercice* 9** ► Soit $E = \{0, 1\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{0, 3\}$. Déterminer E^2, $E \times F \times G$ et E^3.

I.4 Ensemble des parties

Déf. • Ensemble des parties d'un ensemble
Soit E un ensemble. L'**ensemble des parties de E** est l'ensemble comprenant toutes les parties de E. On le note $\mathscr{P}(E)$.
Ainsi, les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles : ce sont les sous-ensembles A de l'ensemble E :

$$A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E).$$

***Exercice* 10** ► Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble comprenant trois éléments distincts.
1) Décrire complètement l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.
2) Que peut-on dire de a et de $\{a\}$ par rapport à E et à $\mathscr{P}(E)$?
3) Décrire $\mathscr{P}(\{1\})$ puis $\mathscr{P}(\varnothing)$.

II Applications

II.1 Concept d'application

Déf. • Application, ensembles de départ et d'arrivée, images et antécédents

Soit E et F deux ensembles non vides.

1) Une **application (ou fonction) f de E dans F** est un procédé qui permet d'associer à chaque élément $x \in E$ un unique élément de F, que l'on note alors $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f:\ E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

2) E est l'**ensemble de définition (ou de départ) de f** et F est l'**ensemble d'arrivée de f.**

3) Lorsque $t = f(x)$, on dit que **t est <u>l'</u>image de x par f** et que **x est <u>un</u> antécédent de t par f.**

Illustr. ✐

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bien définie, on montre que :

1) tout élément de E admet bien une et une seule image (elle existe bel et bien et elle n'est pas amibiguë) ;

2) cette image se trouve bien dans F.

Ex. ✻ **1)** $\rho:\ \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+,\ z \mapsto |z|$, $\arg:\ \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \arg(z)$.

2) $\tau:\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^{\mathrm{T}}$,

3) $\mathrm{tr}:\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \mathrm{tr}(M)$,

4) Ω étant un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$,
$r:\ \mathscr{P} \to \mathscr{P},\ M \mapsto M'$ image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Propr. • Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales lorsque :

1) Elles ont même ensemble de définition et même ensemble d'arrivée E ;

2) Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = g(x)$.

Déf. • Graphe d'une application

Soit $f : E \to F$. Le **graphe de la fonction f** est l'ensemble comprenant tous les couples $\big(x, f(x)\big)$ pour x variant dans E. C'est une partie de $E \times F$.

II.2 Notions générales liées aux applications

Déf. • Applications particulières

Soit E un ensemble non vide.

1) L'**identité de E** est l'application de E dans E qui associe lui-même à chaque élément x de E. On note cette application Id_E. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E:\ E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x. \end{aligned} \qquad \text{ainsi :} \quad \forall\, x \in E,\ \ \mathrm{Id}_E(x) = x.$$

2) Pour chaque partie A de l'ensemble E, la **fonction indicatrice de A** est l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque élément x de E, associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$. On la note $\mathbb{1}_A$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A:\ E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{ainsi :} \quad \forall\, x \in E,\ \ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Ex. ✻ Avec $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(3) = 1$ et $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(-2) = 0$.

***Exercice* 11** ► Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E.
Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Déf. • Ensembles de fonctions

Soit E et F deux ensembles non vides. L'ensemble comprenant toutes les fonctions de E dans F est noté $\boldsymbol{\mathscr{F}(E,F)}$ ou encore $\boldsymbol{F^E}$.

Ex. ✻ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est autre que l'ensemble des suites réelles.

Déf. • Opérations sur les fonctions

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$, A une partie de E.

1) La **restriction de f à A** est la fonction $f|_A$ de A dans F telle que pour tout $x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$.

2) La **composée de f par g** est l'application, de E dans G, qui à chaque x de l'ensemble E associe $g\big(f(x)\big)$. On la note $\boldsymbol{g \circ f}$.

II.3 Image directe et image réciproque d'une partie

Déf. • Image directe d'une partie

Soit $f : E \to F$, A une partie de E. L'**image directe de A par la fonction f** est l'ensemble comprenant les images de tous les éléments de A par la fonction f. On la note $\boldsymbol{f(A)}$. Formellement, on a

$$f(A) = \{f(x),\ \ x \in A\}$$
$$t \in f(A) \iff \exists\, x \in A,\ t = f(x).$$

Important ✪ Si $B = f(A)$, A est une partie de l'espace de départ de f et B est une partie de l'espace d'arrivée de f.

Méthode ✐ **Pour déterminer $\boldsymbol{f(A)}$:**

1) Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, utiliser le théorème de l'image directe.

2) Sinon procéder par conjecture/démonstration : pour prouver que $t \in f(A)$ il faut réussir à mettre t sous la forme $f(\star)$ où $\star$ est un élément de A.

Déf. • Image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$, B une partie de F. L'**image réciproque de B par la fonction f** est l'ensemble comprenant tous les antécédents des éléments de B par la fonction f . On la note $\boldsymbol{f^{-1}(B)}$. Formellement, on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ /\ f(x) \in B\}$$
$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Important ✪ Si $A = f^{-1}(B)$, B est une partie de l'espace d'arrivée de f et A est une partie de l'espace de départ de f.

Méthode ✐ **Pour déterminer $\boldsymbol{f^{-1}(B)}$,** on résout le problème « $f(x) \in B$ » d'inconnue $x \in E$. L'ensemble des solutions est alors $f^{-1}(B)$.

Exercice **12** ► Soit f la fonction carré, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer $f^{-1}\big(]-1,3]\big)$, $f^{-1}\big(]-3,-2[\big)$ et $f^{-1}\big(\{5\}\big)$.

III Surjections, injections, bijections

III.1 Surjections

Déf. • Application surjective

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \to F$.

On dit que **f est surjective** (ou que **f est une surjection**) si tout élément de l'espace d'arrivée de f admet **au moins un antécédent** par f. Formellement :

$$\forall\, t \in F,\ \exists\, x \in E,\quad t = f(x).$$

Illustr. ✐

Ex. ✻ **1)** Fonctions $x \mapsto x^2$ avec divers ensembles de départ et d'arrivée.

2) Fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z,\ x + y - z)$.

Propr. • Caractérisation des applications surjectives

Soit $f : E \to F$. Alors f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Méthode ✐ Conséquence pratique : pour prouver qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective, on peut essayer de calculer $f(E)$ à l'aide du théorème de l'image directe.

Lorsqu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective, on peut toujours la « rendre surjective » en modifiant son espace d'arrivée : l'application $\tilde{f} : E \to \underline{\boldsymbol{f(E)}}$, $x \mapsto f(x)$ est toujours surjective de manière évidente.

Propr. • La composée de deux surjections est une surjection.

Démo. ✐ Sur les notes de cours.

III.2 Injections

Déf. • Application injective

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \to F$.

On dit que **f est injective** (ou que **f est une injection**) si tout élément de l'espace d'arrivée de f admet **au plus un antécédent** par f.

Illustr. ✐

Ex. ✻ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1 + 3t, 2t)$, $\quad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(r, \theta) \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\quad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Propr. • Caractérisation des applications injectives

Soit $f : E \to F$. Alors f est injective si et seulement si

$$\forall\, (x, x') \in E^2,\quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Démo. ✐ Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Pour traiter la dérivation définie sur l'ensemble $\mathscr{D}$ des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathscr{D}_0 = \{f \in \mathscr{D} \ /\ f(1) = 0\}$.

Méthode ✐ **Pour prouver qu'une application est injective :**

1) pour les fonctions réelles, on peut utiliser la stricte monotonie ;

2) sinon utiliser la caractérisation ci-dessus : supposer que $f(x) = f(x')$ et prouver qu'alors $x = x'$.

Propr. • La composée de deux injections est une injection.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

III.3 Bijections

Déf. • Application bijective

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \to F$.

On dit que $\boldsymbol{f}$ **est bijective** (ou que $\boldsymbol{f}$ **est une bijection**) si f est à la fois une injection et une surjection, autrement dit si tout élément de l'espace d'arrivée de f admet **un et un seul antécédent** par f.

Illustr. ✐

Ex. ✻ **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\sqrt{x}} + x$,

2) $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$ où A est une matrice inversible d'ordre n.

Méthode ✐ **Pour montrer qu'une application est bijective :**

1) Pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, utiliser le théorème de la bijection monotone.

2) Montrer séparément injectivité et surjectivité.

3) Chercher les antécédents d'un élément quelconque t de l'espace d'arrivée de f et constater qu'il y en a toujours un et un seul.

Déf. • Bijection réciproque

Soit $f : E \to F$ une application **bijective.** On appelle **bijection réciproque de** $\boldsymbol{f}$ l'application de F dans E qui, à chaque élément t de F associe son unique antécédent par f. On la note $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Important ✪ Quand f est bijective, $f^{-1}(t)$ désigne donc l'unique antécédent de t par la fonction f.

Attention ❢ Différents sens possibles pour la notation f^{-1}.

Propr. • Propriétés algébriques des bijections réciproques

1) $f^{-1} : F \longrightarrow E$.

2) $\forall x \in E, \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad$ autrement dit : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

3) $\forall t \in F, \quad f\big(f^{-1}(t)\big) = t \quad$ autrement dit : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

4) $\forall x \in E, \ \forall t \in F, \quad f(x) = t \iff x = f^{-1}(t)$.

Démo. ↪ Mêmes preuves que pour les fonctions réelles d'une variable réelle.

Propr. • La composée de deux bijections est une bijection

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.