Espaces vectoriels normés

Marc SAGE

13 avril 2006

Table des matières

On abrégera "(sous-)espace vectoriel" en "$(s)ev$" et "ev normé" en *evn*.

Dans tout ce qui suit, les evn sont sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un *espace de Banach* (ou tout simplement un *Banach*) est un evn complet.

La boule unité ouverte d'un evn sera génériquement notée $\mathbb{B}$, de sorte qu'une boule de centre a et de rayon r s'écrira

$$\mathcal{B}(a, r) = a + r\mathbb{B}.$$

On notera de même $\mathbb{S}$ la sphère unité. L'intérêt de ces notations est de s'habituer à visualiser des sommes de parties d'un evn. Le lecteur essaiera de voir (par exemple dans le plan complexe ou dans l'espace) pourquoi on a les relations

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha\mathbb{B} + \beta\mathbb{B} = (\alpha + \beta)\,\mathbb{B} \\ \mathbb{S} + \mathbb{B} = 2\mathbb{B} \setminus \{0\} = \bigcup_{0<r<2} r\mathbb{S} \\ 2\mathbb{S} + \mathbb{B} = 3\mathbb{B} \setminus \overline{\mathbb{B}} = \bigcup_{1<r<3} r\mathbb{S} \end{array} \right. .$$

Les (cinq) premiers exercices sont des applications directes du cours, le genre de petites choses dont on a souvent besoin et qu'on retrouve au besoin, mais qu'il vaut mieux avoir dans un coin de sa tête.

On retiendra le critère "précompact + complet = compact" du sixième exercice.

Le dernier exercice, bien au-dessus des autres, montre un théorème de point fixe à l'aide de méthode avancées ; il vaut donc plus le voir comme un mini-problème.

1 Sommes de fermés et d'ouverts

- *Montrer que la somme d'un ouvert avec n'importe quoi reste ouverte.*
- *Montrer que la somme d'un fermé et d'un compact est fermée.*
- *Contre-exemple pour la somme de deux fermés ?*

Solution proposée.

• Soit Ω un ouvert et A une partie quelconque. Ω est une réunion de boules ouvertes $\bigcup_{\omega\in\Omega} (\omega + r_\omega\mathbb{B})$ et A est réunion de ses singletons $\{a\}$; on a donc

$$\Omega + A = \bigcup_{\omega\in\Omega} (\omega + r_\omega\mathbb{B}) + \bigcup_{a\in A} \{a\} = \bigcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ a\in A}} (a + \omega + r_\omega\mathbb{B}),$$

qui est une réunion de boules ouvertes, donc ouvert, *CQFD*.

• Soient F un fermé et K un compact. Soit $(f_n + k_n)$ une suite convergente de $F + K$. Appelons l la limite. On extrait de (k_n) une sous-suite $\left(k_{\varphi(n)}\right)$ convergente vers un $k \in K$, donc la suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l - k$, qui doit rester dans le fermé F, d'où $l = (l - k) + k \in F + K$. Ceci montre que $F + K$ est fermé.

• Pour deux fermés, le résultat devient faux. Considérons les fermés $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. Leur somme est dense car $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc vaudrait $\mathbb{R}$ si elle était fermée. Or, $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dénombrable et pas $\mathbb{R}$.

2 Un sev strict est d'intérieur vide

Montrer qu'un sev strict F d'un evn E est d'intérieur vide.

Solution proposée.

Si ce n'était pas le cas, F contiendrait une boule $x_0 + r_0\mathbb{B}$. Puisque F est stable par translation, la boule $r_0\mathbb{B} = (x_0 + r_0\mathbb{B}) - x_0$ est dans F, et comme F est stable par dilatation, F contient toutes les boules $\lambda r_0\mathbb{B}$, donc F contient tout l'espace, ce qui est contraire aux hypothèses.

3 Un critère de continuité pour les formes linéaires

Soit φ une forme linéaire sur un evn E. Montrer que φ est continue ssi $\operatorname{Ker}\varphi$ *est fermé. En déduire qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.*

Solution proposée.

Le noyau de φ peut toujours d'écrire comme image réciproque du fermé $\{0\}$, donc est fermé si φ est continue.

Réciproquement, supposons que φ ne soit pas continue. Il revient au même (par linéarité) de dire que φ n'est pas continue en 0, *i.e.*

$$(\exists\varepsilon_0 > 0)\,(\forall\delta > 0)\,(\exists x \in E)\,(\|x\| < \delta \text{ et } |\varphi(x)| > \varepsilon_0)\,.$$

Pour $\delta = \frac{1}{n}$, on obtient une suite (x_n) tel que $\|x_n\| < \frac{1}{n}$ (donc $x_n \longrightarrow 0$) et $|\varphi(x_n)|$ minorée par $\varepsilon_0 > 0$. On va exhiber une suite dans $\operatorname{Ker}\varphi$, en posant $y_n = \frac{a}{\varphi(a)} - \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$ où $a = x_1 \notin \operatorname{Ker}\varphi$; y_n est bien définie car $|\varphi(x_n)| > 0$ est non nul. De plus, $\frac{1}{\varphi(x_n)}$ est bornée par $\frac{1}{\varepsilon_0}$, donc $\frac{x_n}{\varphi(x_n)} \longrightarrow 0$. Ainsi, $y_n \longrightarrow \frac{a}{\varphi(a)}$ qui doit rester dans le noyau par hypothèse de fermeture, ce qui est manifestement impossible vu que $\varphi\left(\frac{a}{\varphi(a)}\right) = 1$.

Soit à présent $H = \operatorname{Ker}\varphi$ un hyperplan. Si φ est continue, H est fermé par ce qui précède. Dans le cas contraire, on dispose comme précédemment d'une suite $(x_n) \longrightarrow 0$ telle que $|\varphi(x_n)|$ soit minorée par un $\varepsilon_0 > 0$, ce qui permet d'approcher tout point a de E par une suite de H en considérant $a - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x_n)} x_n$, d'où la densité de H. Il reste à remarquer que H ne peut être à la fois dense et fermé, sinon il vaudrait l'espace tout entier.

Remarque. Ce critère de continuité est à *retenir* : il ne mange pas de pain, il est simple à démontrer, et cela fait toujours plaisir aux examinateurs de voir que les candidats ont un peu de culture...

4 Distance à un fermé

Soit F un fermé d'un evn E.

• *Montrer que l'application "distance à F" est* 1*-lipschitzienne (donc continue).*

• *Montrer que la distance d'un point a à F est toujours atteinte en dimension finie.*

• *Montrer que l'assertion précédente tombe en défaut en dimension infinie en considérerant l'espace E des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$ *normé par* $\|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1$*, le fermé F des applications s'annulant en* 0 *et la fonction α constamment égale à* 1*.*

Solution proposée.

• Soit a et b deux points de E. Pour tout f de F, on a

$$d(a,F) \leq \|a-f\| \leq \|a-b\| + \|b-f\|\,,$$

d'où (en prenant l'infimum sur les $f \in F$)

$$d(a,F) \leq \|a-b\| + d(b,F)\,.$$

Un argument de symétrie permet de conclure.

• Soit d la distance de notre point a à notre fermé F. L'idée est de se ramener à $d = 0$ puisque cette dernière égalité caractérise l'appartenance à notre fermé. Posons pour cela $F' = F + d\mathbb{S}$, fermé comme somme d'un fermé et d'un compact ($\mathbb{S}$ est un fermé borné et E est de dimension finie), et montrons que la distance de a à F' vaut zéro. Cela donnera un $f \in F$ et un $s \in \mathbb{S}$ tel que $a = f + ds$, d'où $\left\|\overrightarrow{af}\right\| = \|s\| = d$, *CQFD*. Par définition de d, il y a une suite (f_n) dans F telle que $\left\|\overrightarrow{af_n}\right\| \longrightarrow d$. Le cas $d = 0$ étant trivial, on supposera $d > 0$. On peut alors normaliser $\overrightarrow{af_n}$, de sorte que (faire un dessin pour visualiser la ligne qui suit)

$$\left\|\overrightarrow{af_n} - d\frac{\overrightarrow{af_n}}{\left\|\overrightarrow{af_n}\right\|}\right\| = \underbrace{\left\|\overrightarrow{af_n}\right\|}_{\text{bornée car converge}} \left|1 - \frac{d}{\left\|\overrightarrow{af_n}\right\|}\right| \longrightarrow 0, \ \textit{CQFD}.$$

• Montrons que $d(\alpha, F) = 1$ n'est pas atteinte. En approchant α par une application de F affine par morceaux

$$f_n(x) = \begin{cases} nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases},$$

on voit que

$$\|\alpha - f_n\| = 1 + \int_0^1 |\alpha - f_n| = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1, \text{ d'où } d(\alpha, F) \leq 1.$$

Cependant, pour un $f \in F$, la condition $f(0) = 0$ donne un voisinage de 0 où $f < 1$, mettons $f \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, \varepsilon]$, ce qui implique

$$\|f - \alpha\| \geq \|f - \alpha\|_\infty + \int_0^\varepsilon |f - \alpha| \geq |f - \alpha|(0) + \frac{\varepsilon}{2} > 1.$$

La distance $d(\alpha, F)$ vaut donc 1 mais n'est jamais atteinte.

Remarque. Les espaces fonctionnels, archetypes des evn de dimension infinie, fourmillent de contre-exemples à de nombreuses propriétés. Il faut donc toujours commencer par regarder ce qui se passe dans $C^0([0,1])$ avant de chercher ailleures des choses compliquées...

5 Convergence de polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre normée et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\begin{cases} P_k \longrightarrow P \text{ dans } \mathbb{K}_n[X] \\ x_k \longrightarrow x \text{ dans } A \end{cases} \implies P_k(x_k) \longrightarrow P(x) \text{ dans } A.$$

Solution proposée.

On commence par ramener le problème à des choses plus simples en écrivant

$$\begin{aligned} \|P_k(x_k) - P(x)\| &= \|P_k(x_k) - P(x_k) + P(x_k) - P(x)\| \\ &\leq \underbrace{\|P_k(x_k) - P(x_k)\|}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\|P(x_k) - P(x)\|}_{\text{terme 2}}. \end{aligned}$$

Le problème sera réglé si l'on montre que chacun des termes 1 et 2 tend vers 0.

Le terme 2 peut être réglé immédiatement en invoquant la continuité de la fonction polynomiale $a \longmapsto P(a)$.

Quand au terme 1, notons

$$P_k - P = \sum_{i=0}^n \mu_i^{(k)} X^i,$$

de sorte que le réel $M_k := \max_{i=0,\dots,n} \left|\mu_i^{(k)}\right|$ tend vers 0 lorsque $k \longrightarrow \infty$. En notant $\mu > 1$ un majorant de la suite convergente (x_k), on a alors

$$\begin{aligned} \|P_k(x_k) - P(x_k)\| &= \|[P_k - P](x_k)\| = \left\|\sum_{i=0}^n \mu_i^{(k)} x_k^i\right\| \leq \sum_{i=0}^n \left|\mu_i^{(k)}\right| \left\|x_k^i\right\| \leq \sum_{i=0}^n M_k \|x_k\|^i \\ &\leq M_k \sum_{i=0}^n \mu^i \overset{\text{car } \mu>1}{\leq} M_k \sum_{i=0}^n \mu^n = M_k \; n \; \mu^n \overset{k\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

6 Précompacité et procédé diagonal

Une partie d'un evn est dite *précompacte* si on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'un précompact complet est compact.

Solution proposée.

Soit K un précompact complet. Soit (x_n) une suite de K, dont on veut trouver une valeur d'adhérence. Si (x_n) stationne, il n'y a rien à faire ; dans le cas contraire, quitte à extraire, on peut supposer (x_n) injective.

En recouvrant K par un nombre fini de boules de rayon 1, l'un de ces boules $a_0 + \mathbb{B}$ contient une infinité de terme x_n, d'où une sous-suite $\left(x_{\varphi_0(n)}\right)$ dans $a_0 + \mathbb{B}$. On recouvre ensuite par des boules de rayon $\frac{1}{2}$, et l'une d'elles contient une infinité de termes $x_{\varphi_0(n)}$, d'où une sous-suite $\left(x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}\right)$ dans une boule $a_1 + \frac{1}{2}\mathbb{B}$. On construit ainsi de proche en proche des sous-suites $\left(x_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}\right)$ dans une boule $a_k + \frac{1}{2^k}\mathbb{B}$. Il est fortement conseillé de faire un dessin pour comprendre ce que l'on fait...

Effectuons un *procédé diagonal*, en posant $\psi(n) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$. On vérifie aisément que ψ est une extractrice et que à k fixé la suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n \geq k}$ est extraite de $\left(x_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}\right)$. On a donc $x_{\psi(n)} \in a_k + \frac{1}{2^k}\mathbb{B}$ pour $n \geq k$, d'où

$$\forall p, q > k, \ \left\|x_{\psi(q)} - x_{\psi(p)}\right\| < \frac{1}{2^k},$$

ce qui montre que $x_{\psi(n)}$ est de Cauchy, donc converge par complétude de K. Cela fournit une valeur d'adhérence à la suite (x_n), *CQFD*.

Remarque. Retenir la méthode du procédé diagonal : lorsque l'on dispose d'une suite de suites, disons $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$, il est souvent judicieux de considérer la suite diagonale $(u_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ afin de recouper les propriétés à l'infini des suites $(u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$.

7 Théorème de Riesz

Montrer que l'on ne peut pas recouvrir la boule unité fermée d'un evn de dimension infinie par un nombre fini de boules unités ouvertes.

En déduire que la boule unité fermée d'un evn E est compacte ssi E est de dimension finie (théorème de Riesz*).*

Solution proposée.

Raisonnons par l'absurde et écrivons $\overline{\mathbb{B}} \subset \bigcup_{i=1}^n (\omega_i + \mathbb{B})$. Regardons l'ev V engendré par les ω_i. E étant de dimension infinie, il y un point a de E hors de V. Montrons que la distance de a à V est atteinte. On introduit pour cela l'application "distance au point a" définie sur V :

$$\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \|a - v\| \end{array} \right. .$$

δ est minorée, donc a un infimum $d(a, V)$, qui est > 0 sinon a serait dans V puisque ce dernier est fermé. Comme de plus $\delta(v) \geq \|v\| - \|a\|$, on peut se placer sur une boule $r\mathbb{B}$ avec la certitude qu'en dehors on ait $\delta > \inf \delta + 1$ (prendre $r > \|a\| + \inf \delta + 1$) Sur cette boule, qui est compacte car fermée bornée dans V (qui est de dimension finie !), δ atteint son infimum car est continue, mettons $\|\overrightarrow{v_0 a}\| = \min \delta$. Le vecteur $\frac{\overrightarrow{v_0 a}}{\|\overrightarrow{v_0 a}\|}$ étant dans la boule unité de E, il est dans une $\omega_i + \mathbb{B}$, disons $\left\| \frac{\overrightarrow{v_0 a}}{\|\overrightarrow{v_0 a}\|} - \omega_i \right\| < 1$, mais on en déduit alors

$$\left\| a - \underbrace{\left(v_0 + \|\overrightarrow{v_0 a}\| \, \omega_i\right)}_{\in V} \right\| = \|\overrightarrow{v_0 a} + \|\overrightarrow{v_0 a}\| \, \omega_i\| < \|\overrightarrow{v_0 a}\| = \inf_V \delta = \inf_{v \in V} \|a - v\| , \textit{ absurde.}$$

Soit maintenant E un evn de dimension infinie et supposons que sa boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ est compacte. En la recouvrant par $\overline{\mathbb{B}} \subset \bigcup_{b \in B} (b + \mathbb{B})$, on peut en extraire un recouvrement fini $\overline{\mathbb{B}} \subset \bigcup_{i=1}^n (b_i + \mathbb{B})$, ce qui est évidemment absurde au vu de ce que l'on vient d'établir. La boule unité fermée étant par ailleurs un fermé bornée, elle est toujours compacte en dimension finie, ce qui conclut la démonstration du théorème de Riesz.

8 Un amuse-gueule

Soit P un polynôme arbitraire de $\mathbb{K}[X]$. Exhiber une norme sur $\mathbb{K}[X]$ pour laquelle la suite (X^n) tende vers P.

Solution proposée.
On veut une norme pour laquelle $\|X^n - P\|$ soit arbitrairement petit pour n grand. Il serait agréable d'imposer (par exemple)

$$\|X^n - P\| = \frac{1}{n} \;;$$

mais a-t-on le droit de le faire ? Pour n assez grand, les $X^n - P$ sont libres (ils sont tous de degrés différents pour $n > \deg P$) ; en s'inspirant de la définition d'un endomorphisme en fixant l'image d'une base (après tout, une norme est presque linéaire...), on définit une norme sur $\operatorname{Vect}_{n>\deg P}\{X^n - P\}$ par

$$\left\| \sum_{n>\deg P} \lambda_n (X^n - P) \right\| = \sum_{n>\deg P} \frac{|\lambda_n|}{n}.$$

Il est aisé de vérifier les propriétés d'une norme.

Pour prolonger cette norme à $\mathbb{K}[X]$ tout entier, on complète la famille précédente en une base de $\mathbb{K}[X]$ et on envoie les éléments rajoutés sur n'importe quoi de positif (0 fera l'affaire). Si l'on ne souhaite pas avoir recours à Zorn pour compléter une famille libre en dimension infinie, on peut considérer la famille

$$\left(1, X, X^2, ..., X^{\deg P}, X^{\deg P+1} - P, X^{\deg P+2} - P, ...\right).$$

9 Quand le crochet de Lie vaut l'identité

Soit f et g deux endomorphismes d'un evn tels que

$$[f, g] := fg - gf = \mathrm{Id}\,.$$

Montrer qu'ils ne peuvent être tout deux continus. On pourra calculer $[f, g^n]$.

Solution proposée.
On intuite pour des petites valeurs de n que $[f, g^n] = ng^{n-1}$. Montrons cela par récurrence. Pour $n = 1$: c'est l'hypothèse. Ensuite, on compose par g à droite dans l'hypothèse de récurrence :

$$[f, g^n] = ng^{n-1} \implies fg^{n+1} - g^n fg = ng^n,$$

et puisque $fg = \mathrm{Id} + gf$, on obtient

$$\left[f, g^{n+1}\right] = fg^{n+1} - g^n gf = fg^{n+1} - g^n fg + g^n [f, g] = ng^n + g^n \,\mathrm{Id}\,, \textit{ CQFD.}$$

Ce fait étant établi, prenons les normes :

$$n \left\|g^{n-1}\right\| = \|fg^n - g^n f\| \leq \left\|fg^{n-1}g\right\| + \left\|fgg^{n-1}\right\| \leq 2 \|f\| \|g\| \left\|g^{n-1}\right\|.$$

Si $g^{n-1} \neq 0$ pour tout n, on doit avoir $\|f\| \geq \frac{n}{2\|g\|} \longrightarrow \infty$, *absurde.* Dans le cas contraire, g est nilpotent, mettons d'indice p, mais alors $0 = [f, g^p] = pg^{p-1} \neq 0$, *absurde.*

Remarque. Si E était de dimension finie, le résultat sera trivial en prenant la trace de $fg - gf = \mathrm{Id}$.

10 Théorème de Markov-Kakutani

On appelle *corps convexe* d'un evn tout convexe compact non vide.

Soit K un corps convexe d'un evn et f une application affine continue de K dans K. En considérant la moyenne des itérés d'un point arbitraire, montrer que f admet un point fixe.

Généraliser à une famille finie d'applications affines de K dans K commutant deux à deux, puis à une famille (commutative) non nécessairement finie.

Solution proposée.

Soit a un point K. On regarde comme suggéré l'isobarycentre

$$a_n = \frac{1}{n}\left(a + f(a) + f^2(a) + ... + f^{n-1}(a)\right),$$

qui reste dans K par convexité de ce dernier. K étant de plus compact, on extrait naturellement une sous-suite $a_{\varphi(n)}$ convergente vers un a_∞. Par linéarité de f, on a

$$f(a_n) - a_n = \frac{f^n(a) - a}{n}.$$

Or, K étant borné (car compact), la suite $f^n(a)$ est bornée, ce qui donne en prenant la limite ci-dessus $f(a_\infty) = a_\infty$ par continuité de f, d'où le point fixe recherché.

Dans le cas d'une famille finie $f_1, ..., f_n$, on introduit l'ensemble K' des points fixes par les $f_1, ..., f_{n-1}$. K' est non vide par hypothèse de récurrence, convexe par linéarité des f_i et stable par f_n car tout le monde commute. f_n admet donc un point fixe dans $K' \subset K$, d'où un point fixe pour tout le monde dans K.

Si maintenant $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de cardinal quelconque, on se ramène au cas fini par compacité en raisonnant par l'absurde. En effet, l'ensemble $\operatorname{Fix} f_i$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\operatorname{Id} - f_i$, donc si l'intersection des $\operatorname{Fix} f_i$ était vide, on pourrait en extraire une intersection finie vide, *absurde* par ce ce précède.

11 Compacité et injectivité

Soit f une application continue d'un evn E dans lui-même, injective sur un compact K, et localement injective sur K :

$$\forall k \in K,\ \exists r,\ f \text{ injective sur } k + r\mathbb{B}.$$

Montrer qu'il y a un ouvert contenant K où f est injective.

Solution proposée.

Raisonnons par l'absurde. Pour tout entier n, l'ouvert $K + \frac{1}{n}\mathbb{B}$ doit donc contenir deux points distincts x_n et y_n ayant même image par f. Pour se ramener à des points de K, on remarque que la distance à x_n est continue sur le compact K, donc atteint son infimum en un $X_n \in K$, lequel est alors à distance moindre de $\frac{1}{n}$ de x_n vu que ce dernier est dans $K + \frac{1}{n}\mathbb{B}$. Il y a de même un $Y_n \in K$ tel que $\left\|\overrightarrow{y_n Y_n}\right\| < \frac{1}{n}$. On peut alors, par compacité de K^2, extraire de (X_n, Y_n) une sous-suite $\left(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)}\right)$ convergente vers un $(x_\infty, y_\infty) \in K^2$, de sorte que $\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers cette limite. En utilisant la continuité de f, il vient

$$f(x_\infty) = \lim f\left(x_{\varphi(n)}\right) = \lim f\left(y_{\varphi(n)}\right) = f(y_\infty),$$

d'où $x_\infty = y_\infty$ par injectivité de f sur K. Il reste à invoquer l'injectivité locale autour de cette valeur commune pour aboutir à une contradiction, vu que tout voisinage de $x_\infty = y_\infty$ contient une infinité de termes $x_{\varphi(n)}$ et $y_{\varphi(n)}$.

12 De l'art de bien couper un espace en deux

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et H un hyperplan associée à une forme linéaire φ non nulle. Montrer que $E \backslash H$ n'est pas connexe par arcs ssi φ est continue.

On pourra montrer en lemme que, si une partie de E est coincée entre un convexe et l'adhérence de ce convexe, alors cette partie est connexe par arcs.

Solution proposée.

Commenons par montrer le lemme. Soit C notre convexe et X la partie coincée : $C \subset X \subset \overline{C}$.

Soit x un point de X. x est dans l'adhérence de C, donc s'approche par une suite (c_n). Puisque C est convexe, tous les segments $[c_n c_{n+1}]$ restent dans C, ce qui fournit une ligne brisée $c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow ...$ qui a l'air de terminer en x. Si c'était vraiment le cas, *i.e.* si on avait un chemin de c_0 à x, étant donné un autre point $x' = \lim c'_n$ dans X, on relierait x' à c'_0 de la même façon, puis c'_0 à c_0 par convexité de C, d'où un chemin de x à x' et la connexité par arcs de X.

Essayons de décrire plus formellement notre ligne brisée, le problème se posant évidemment autour de x. Commençons par prendre la ligne brisée avec notre main par un bout, disons c_0, et suspendons-là verticalement en laissant faire la gravité. On obtient une corde verticale avec un nœud à l'emplacement de chaque c_n :

$$\begin{array}{c} c_0 \\ | \\ c_1 \\ | \\ c_2 \\ \vdots \end{array}$$

Quitte à extraire de (c_n) une suite $\left(c_{\varphi(n)}\right)$ telle que $\left\|c_{\varphi(n+1)} - c_{\varphi(n)}\right\| < \frac{1}{2^n}$, on peut supposer que la longueur $l = \sum \|\overrightarrow{c_n c_{n+1}}\|$ de la corde est finie – et donc que son autre bout est x ! On peut de plus supposer que les nœuds sont tous distincts, quitte à extraire une sous-suite injective – si ce n'est pas faisable, cela signifie que (c_n) stationne, *i.e.* vaut constamment x à partir d'un certain rang, d'où $x \in C$ et le problème est résolu.

Il est alors naturel de définir notre ligne brisée γ comme suit : posons $l_n = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{c_{i-1} c_i}\|$ la longueur le corde jusqu'au nœud c_n, de sorte que la corde $[0, L]$ se partitionne en sous-cordes $[l_n, l_{n+1}]$ sur-lesquelles notre ligne brisée γ est en fait droite (il faut rajouter le singleton L correspond au bout x), et définissons

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, L] & \longrightarrow & E \\ \lambda \in [l_n, l_{n+1}] & \longmapsto & \frac{l_{n+1} - \lambda}{l_{n+1} - l_n} c_n + \frac{\lambda - l_n}{l_{n+1} - l_n} c_{n+1} \\ L & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

γ étant affine sur chaque $[l_n, l_{n+1}]$ et se recollant bien en les l_n (on s'est arrangé pour avoir $\gamma(l_n) = c_n$), elle est continue sur $[0, L[$. Pour le point L (*i.e.* pour atteindre x), on le fait à la main. Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un rang N, on sait que $\overrightarrow{c_n x}$ sera de norme $< \varepsilon$ pour $n > N$. Pour λ plus grand que l_N, mettons $\lambda \in [l_n, l_{n+1}]$ avec $n > N$, on aura alors (en notant t un poids pour alléger)

$$\begin{aligned} \|\gamma(\lambda) - x\| &= \|t c_n + (1-t) c_{n+1} - x\| = \|t(c_n - x) + (1-t)(c_{n+1} - x)\| \\ &\leq t \|\overrightarrow{c_n x}\| + (1-t) \|\overrightarrow{c_{n+1} x}\| \leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela conclut de montrer la continuité de γ et par conséquent la connexité par arcs de X.

Revenons à notre problème. L'idée et de partionner $E \backslash H$ en deux demi-espaces selon le signe de φ, disons

$$\left\{ \begin{array}{l} E^+ = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \\ E^- = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_-^*\right) \end{array} \right. .$$

Si φ est continue, E^+ et E^- sont deux ouverts disjoints non vides (φ est non nulle !) partionnant $E \backslash H$, donc $E \backslash H$ n'est pas connexe, donc ne saurait être connexe par arcs. Notre intuition est confortée : un plan coupe très nettement l'espace usuel en deux bouts.

Dans le cas contraire, $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est dense, et là notre intuition se perd – pas étonnant, vu qu'on est en dimension infinie (sinon φ sera continue). On va appliquer le lemme à la partie $E \backslash H$ coincée entre le E^+ et $\overline{E^+}$. Il est aisé de vérifier que E^+ est convexe, et la densité de H pemet d'obtenir celle de E^+ : étant donné un point $a \in E$, il y a une suite (h_n) dans H qui tend vers $e^+ - a$ où e^+ est pris quelconque dans E^+, de sorte que $e^+ - h_n$ est une suite de E^+ qui tend vers a. On en déduit $E^+ \subset E \backslash H \subset E = \overline{E^+}$ et on applique le lemme pour conclure.

13 Normes invariantes par symétrie

Soit E un evn munie d'une base finie $(e_1, ..., e_n)$ telle que, en notant s_i la symétrie par rapport à l'hyperplan $\bigoplus_{j\neq i} \mathbb{K}e_j$ parallèlement à $\mathbb{K}e_i$, la norme sur E est invariante par les s_i.

• *Montrer que la norme croît lorsque l'on s'éloigne de l'origine selon les e_i, au sens où*

$$(\forall i,\ |\lambda_i| \leq |\mu_i|) \implies \left\|\sum \lambda_i e_i\right\| \leq \left\|\sum \mu_i e_i\right\|.$$

• *On identifie la sphère unité de E avec la partie de $\mathbb{K}^n$ correspondante. Déterminer*

$$\inf_{\overrightarrow{\lambda}\in\mathbb{S}} \left\|\sum \frac{e_i^*}{\lambda_i}\right\|.$$

On pourra perturber un vecteur maximisant le produit de ses coordonnées.

Solution proposée.

• Les hypothèses géométriques se traduisant formellement par

$$\forall \overrightarrow{\lambda} \in \mathbb{K}^n,\ \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n |\lambda_i|\, e_i\right\|,$$

on nous demande essentiellement de montrer

$$(\forall i,\ 0 \leq \lambda_i \leq \mu_i) \implies \left\|\sum \lambda_i e_i\right\| \leq \left\|\sum \mu_i e_i\right\|.$$

Si cela est vrai, en ne faisant varier qu'une coordonnée, l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \lambda & \longmapsto & \left\|\lambda e_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j e_j\right\| \end{cases}$$

doit décroître sur $\mathbb{R}^-$ et croître sur $\mathbb{R}^+$, et il est clair que l'on a réciproque en raisonnant coordonnée par coordonnée. Or, on a là une fonction qui a le bon goût d'être à la fois paire (par hypothèse sur les e_i) et convexe (car $\|\cdot\|$ est convexe), donc qui varie comme souhaité. Ploum.

• Observer dans un premier temps que, à $\overrightarrow{\lambda} \in \mathbb{S}$ fixé, on a toujours l'inégalité

$$\left\|\sum \frac{e_i^*}{\lambda_i}\right\| \geq \left|\left[\sum \frac{e_i^*}{\lambda_i}\right]\left(\overrightarrow{\lambda}\right)\right| = \left|\sum \frac{\lambda_i}{\lambda_i}\right| = n.$$

Nous allons montrer que ce minorant est en fait atteint.

Suivons l'indication de l'énoncé en considérant l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{\lambda} & \longmapsto & \prod |\lambda_i| \end{cases},$$

continue sur le compact $\mathbb{S}$ (on est en dimension finie) donc atteignant son *supremum* en un vecteur u unitaire. Quitte à symétriser u, on peut toujours supposer que ses coordonnées sont positives, et même strictement vu que

$$\pi(u) \geq \pi\left(\sum \frac{e_i}{\|\sum e_j\|}\right) = \frac{1}{\|\sum e_j\|^n} > 0.$$

Nous allons montrer que u réalise l'égalité $\left\|\sum \frac{e_i^*}{u_i}\right\| = n$. Il s'agit évidemment de montrer la seconde inégalité $\left\|\sum \frac{e_i^*}{u_i}\right\| \leq n$, *i.e.*

$$\forall \overrightarrow{\lambda} \in \mathbb{S},\ \sum \frac{\lambda_i}{u_i} \leq n.$$

L'énoncé nous invite à perturber u : on le fait selon la direction d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{\lambda}$ fixé en posant $u_\varepsilon = u + \varepsilon\lambda$. Par définition de u, on a

$$\pi\left(\frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|}\right) \leq \pi(u).$$

Quitte à prendre $\varepsilon > 0$ assez petit, les coordonnées de u_ε restent positives, d'où

$$\begin{aligned}
\prod \frac{u_i + \varepsilon\lambda_i}{\|u_\varepsilon\|} &\leq \prod u_i \\
\prod \left(1 + \frac{\lambda_i}{u_i}\varepsilon\right) &\leq \|u_\varepsilon\|^n \\
1 + \varepsilon \sum \frac{\lambda_i}{u_i} + o(\varepsilon) &\leq (\|u\| + |\varepsilon| \|\lambda\|)^n \\
&= (1+\varepsilon)^n \\
&= 1 + n\varepsilon + o(\varepsilon) \\
\sum \frac{\lambda_i}{u_i} + o(\varepsilon) &\leq n + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Le résultat tombe en faisant tendre ε vers 0.

14 Point extrémaux et théorème de Kakutani (non commutatif)

Soit C un convexe d'un evn. On appelle *point extrémal* de C tout point $e \in C$ qui n'est dans l'intérieur d'aucun segement de C :

$$e \in [ab] \subset C \implies e = a \text{ ou } b.$$

On notera $\operatorname{Extr} C$ l'ensemble des points extrémaux de C.

On rappelle qu'un *corps convexe* est un compact convexe non vide.

Le théorème de *Krein-Milman* affirme qu'en dimension finie tout corps convexe est enveloppe convexe de ses points extrémaux ; en particulier, un corps convexe admet un point extrémal (énoncé qui nécessite l'axiome du choix en dimension infinie).

Le théorème de *Carathéodory* permet de montrer qu'en dimension finie l'enveloppe convexe d'un compacte est compacte.

Préliminaires.

• *Soit C un corps convexe d'un evn et $c \in C$. Montrer que c est extrémal ssi*

$$\forall a, b \in C,\ c = \frac{a+b}{2} \implies a = b = c.$$

• *Soit $f : C \longrightarrow C$ une application affine injective. Montrer que $f^{-1}(\operatorname{Extr} C) \subset \operatorname{Extr} C$.*

• *Soit C un convexe et K une partie non vide. Montrer l'implication*

$$C \subset \operatorname{Conv} K \implies \operatorname{Extr}(C) \subset K.$$

Théorème de Kakutani.

Soit K un corps convexe d'un evn de dimension finie et G un groupe d'applications affines de K dans K. On suppose que G est équicontinu *:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall g \in G,\ (\|u - v\| < \delta \implies \|g(u) - g(v)\| < \varepsilon)$$

(noter l'interversion des quantificateurs $\forall g$ et $\exists \delta$ par comparaison à un goupe d'applications continues). On veut montrer que K admet un point fixe par tous les éléments de G.

a) *Montrer qu'il existe C_0 un corps convexe G-stable et minimal pour ces propriétés (utiliser le lemme de Zorn).*

b) *Montrer que $K_0 := \overline{\operatorname{Extr}(C_0)}$ est le plus petit compact non vide G-stable dans C_0. On va montrer par la suite que K_0 est réduit à un seul élément.*

c) *Pour $x, y \in K_0$, prouver l'existence d'une suite $(g_n) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim g_n(x) = \lim g_n(y)$.*

d) *Conclure $\#K_0 \leq 1$.*

Solution proposée.

• Soit $e \in \operatorname{Extr} C$ et $a, b \in C$ tels que $e = \frac{a+b}{2}$. Par définition d'un point extrémal, on doit avoir $\frac{a+b}{2} = a$ ou b, ce qui impose dans les deux cas $a = b$ et $e = a = b$.

Supposons réciproquement que $c \in C$ vérifie la propriété

$$\forall a, b \in C,\ c = \frac{a+b}{2} \implies a = b = c$$

et montrons que c est extrémal. Si c est sur un segment $[ab]$, mettons $c = \lambda a + \mu b$ avec $\lambda + \mu = 1$ et $0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1$ (par symétrie de λ et μ), en considérant le symétrique

$$b' = (2\lambda)\, a + (2\mu - 1)\, b$$

de b par rapport à b (faire un dessin !), on a $c = \frac{b+b'}{2}$. Or, les conditions $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1 \\ \lambda + \mu = 1 \end{array} \right.$ imposent l'encadrement

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \leq \mu \leq 1,$$

ce qui montre que b' est bien sur le segment $[ab]$ et donc dans C. En appliquant l'hypothèse, il vient $c = b$, *CQFD*.

• Soit c un antécédent d'un point extrémal e. Pour montrer que c est extrémal, utilisons le critère ci-dessus. Si $c = \frac{a+b}{2}$, alors $e = f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ car f préserve le barycentre, donc $e = f(a) = f(b)$ par extrémalité de e et $a = b$ par injectivité de f, ce qui impose $c = a = b$ comme souhaité.

• Soit $e \in \operatorname{Extr}(C)$. e est en particulier un point de $C \subset \operatorname{Conv} K$, donc un barycentre de points de K, mettons $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$. Posons $\mu = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i$ et ramenous-nous à un barycentre à deux points

$$e = \lambda_1 k_1 + \mu \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} k_i.$$

Le caractère extrémal de e impose ou bien $e = k_1$, ou bien $e = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} k_i$, et une récurrence immédiate sur n montre que $e \in K$.

a) On considère l'ensemble $\mathcal{K}$ des corps convexe G-stables de K ordoné par l'inclusion inverse. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{K}$. L'intersection de $\mathcal{C}$ est clairement convexe comme intersection de convexes, et c'est une intersection de fermés dans le compact K donc un compact. Si cette intersection était vide, on en extrairait par compacité une intersection vide finie, mais ceci est impossible car une suite décroissante de compacts non vides est d'intersection non vide. Ceci montre que l'intersection de $\mathcal{C}$ est un corps convexe, donc un élément de $\mathcal{K}$; comme de plus cet élément minore $\mathcal{C}$, on peut appliquer le lemme de Zorn : $\mathcal{K}$ admet un élément maximal C_0 pour l'ordre inverse $\supset$.

b) K_0 est non vide par Krein-Milman et compact car fermé dans C_0. De plus, d'après les préliminaires, pour tout $g \in G$ on a $g(\operatorname{Extr}(C_0)) \subset \operatorname{Extr}(C_0)$, d'où $G(\operatorname{Extr}(C_0)) \subset \operatorname{Extr}(C_0)$ et $G(K_0) \subset K_0$ par continuité. K_0 est donc bien un compact non vide G-stable de C_0.

Si maintenant $K' \subset K_0$ est un autre compact non vide G-stable de C_0, alors $\operatorname{Conv} K'$ est un convexe non vide, compact comme enveloppe convexe d'un compact (on est en dimension finie !) et G-stable car les application affines conservent le barycentre ; $\operatorname{Conv} K'$ est donc un corps convexe inclus dans $\operatorname{Conv} C_0 = C_0$, et la minimalité de C_0 impose l'égalité $C_0 = \operatorname{Conv} K'$, d'où $\operatorname{Extr}(C_0) \subset K'$ (cf. préliminaires) et $K_0 \subset K'$ en prenant l'adhérence. K_0 est donc bien le *plus petit* compact non vide G-stable de C_0.

c) Soient $x, y \in K_0$. $\overline{G\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ est un compact (fermé dans K) non vide G-stable et inclus dans C_0 (le milieu $\frac{x+y}{2}$ est dans C_0 qui est G-stable et fermé), donc contient $K_0 \supset \operatorname{Extr}(C_0)$. Pour $e \in \operatorname{Extr}(C_0)$, on peut donc trouver une suites $g_n\left(\frac{x+y}{2}\right) \longrightarrow e$, et en extrayant $\left(g_{\varphi(n)}(x), g_{\varphi(n)}(y)\right) \longrightarrow (u, v)$, on obtient $\frac{u+v}{2} = e$, d'où $u = v$ car e est extrémal.

d) Soit $\varepsilon > 0 : \exists \delta,\ \forall g \in G,\ (\|u - v\| < \delta \implies \|g(u) - g(v)\| < \varepsilon)$. Pour n assez grand, on a $\|g_n(x) - g_n(y)\| < \delta$, et on applique ce qui précède à $g_n^{-1} \in G$ pour obtenir $\|x - y\| < \varepsilon$. Ceci tenant pour tout $\varepsilon > 0$, on doit avoir $x = y$. K_0 est ainsi réduit à un seul élément a (on a déjà dit qu'il était non vide), et comme il est G-stable, a est fixe par tous les éléments de G, *CQFD*.

Remarque. Le théorème de Kakutatni permet de trivialiser un problème intéressant, à savoir que les groupes orthogonaux sont les sous-groupes compacts maximaux de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Cela revient à montrer qu'un sous-groupe compact G de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans un groupe orthgonal . Le problème revient à trouver une matrice S définie positive telle que

$$\forall g \in G,\ gSg^* = S.$$

En cherchant un tel S dans l'enveloppe convexe des gg^* où g décrit G, laquelle est en fait un corps convexe K (enveloppe convexe d'un compact), le problème revient à cherche un point de K fixe par les applications $\widehat{g} : S \mapsto gSg^*$. On montre aisément que $\{\widehat{g}\}_{g\in G}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}\left(\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)\right)$, donc borné, donc équicontinu, et on peut appliquer Kakutani pour conclure.

Kakutani permet également de montre l'existence d'une *mesure de Harr* sur les groupes compacts. Qu'est-ce qu'une mesure de Harr ? Pour les groupes finis, il est souvent judieux de considérer la moyenne d'une application réelle définie sur G définie par

$$\int f\left(g\right) dg := \sum_{g\in G} \frac{1}{|G|} f\left(g\right).$$

L'intêret de cette moyenne est qu'elle est invariante par translation, au sens où

$$\forall h \in G, \int f\left(gh\right) dg = \int f\left(g\right) dg,$$

ce qui permet par exemple de montrer que tout groupe fini d'applications affines stabilisant un convexe admet un point fixe sur ce convexe (considérer l'isobarycentre des images d'un point quelconque). Une mesure de Harr sur un groupe G est une mesure sur G invariante par translation, ce qui permet de définir une moyenne comme ci-dessus sur les groupes compacts – dont font bien sûr partie les groupes finis – et d'en utiliser les propriétés avantageuses.