MP*: Equations différentiels ordinaires.

Coralie Renault

10 mars 2015

Exercice

Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice

Théorème de Floquet

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution générale de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Exercice

Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice

1)Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$E : y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0$$

Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

2) Soient y_1 et y deux solutions linéaires indépendantes de l'équation différentielle $y" + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont des fonctions réelles continues sur un intervalle I. Montrer que les zéros de y_1 sont isolés et qu'entre deux zéros consécutifs dey_1 il y a un unique zéro de y_2.

Exercice

On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - \mathrm{e}^x y = 0$$

a) Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}$. Etudier la convexité de y^2.
En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0,1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0,1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.
c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle

$$E : y'' - \mathrm{e}^x y = f(x)$$

admet une unique solution y telle que

$$y(0) = y(1) = 0$$

Exercice

P124

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ continue. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tq $\forall x \geq 0$, $xf(x) \leq c + \int_0^x f(t)dt$. Montrer que f est bornée.
- Soit $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 solution de $y" + ty = 0$. Montrer que g est bornée.

Exercice

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice

Exercice

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice

Bessel