

# Colle MP 11: Espaces préhilbertiens

December 22, 2019

## Colle 1

Célia (15): bonne connaissance du cours et des méthodes

Kévin (16): Très bien.

**Exercice 1.** Thm spectral

**Exercice 2.** Soit  $u$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$  vérifiant, pour tout  $x \in E$ ,  $u(x), x = 0$ . Mq  $u = 0$ .

**Exercice 3.** Soit  $u : E \longrightarrow E$  tel que, pour tous  $x, y \in E$ , on a  $u(x), y = x, u(y)$ . Démontrer que  $u$  est linéaire.

## Colle 2

Nolwenn (13): oubli du thm spectral.

Lilian (13): assez bien

**Exercice 1.** Caract endo symétrique par sa matrice

**Exercice 2.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique. On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ . Mq  $A = 0$ .

**Exercice 3.** Soient  $u, v$  deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien qui commutent. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On pose  $F = \ker(u - \lambda \text{id})$ . Démontrer que  $F$  et  $F^\perp$  sont stables par  $v$ . Puis démontrer qu'il existe une base orthonormale de  $E$  diagonalisant simultanément  $u$  et  $v$ .

**Exercice 4.** (39) Soit  $f$  endo d'un espace euclidien tq  $(f(x)|x) = 0, \forall x$ . Mq  $\ker f = \text{Im } f^\perp$ .

## Colle 3

Charlotte (11): grosses erreurs dans le polynôme caractéristique. Erreurs de calculs.

Bastien (14): Bien.

**Exercice 1.** Pythagore

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Pour  $f \in L(E)$ , on note  $\rho(f) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ valeur propre de } f\}$ .

On pose également  $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq 1\}$ . Démontrer que si  $f$  est symétrique, alors  $\|f\| = \rho(f)$ .

**Exercice 3.** Soit  $E = C([1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $\int_{-1}^1 fg$ .

Quel est l'orthogonal des fonctions nulles sur  $[-1, 0]$ ? Sont-ils supplémentaires?