Théorie des ensembles et des applications

Logique

Exercice 1 [01481] [Correction]
Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

(a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$

(b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$

(c) $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$

(d) $x \geq 0 \implies x \geq 2$.

Exercice 2 [01482] [Correction]
Étant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :

(a) P ou $(Q$ et $R) \sim (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$

(b) non$(P \implies Q) \sim P$ et non(Q).

Exercice 3 [01483] [Correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Exercice 4 [01484] [Correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une.
Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

Usage des quantificateurs

Exercice 5 [01485] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

(a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$

(b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$

(c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$

(d) $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

(e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exercice 6 [01486] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(a) la fonction f s'annule

(b) la fonction f est la fonction nulle

(c) f n'est pas une fonction constante

(d) f ne prend jamais deux fois la même valeur

(e) la fonction f présente un minimum

(f) f prend des valeurs arbitrairement grandes

(g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 7 [01487] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :

(a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$

(b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$

(c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$

(d) $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

(e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$

(f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 8 [01488] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

(b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$?

Exercice 9 [01489] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère les assertions suivantes :

$$P \sim « \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 », Q \sim « \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 »$$

et

$$R \sim « \ (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \ »$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

(a) $P \implies Q$
(b) $Q \implies P$
(c) $Q \implies R$
(d) $\text{non}(R) \implies Q$
(e) $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$
(f) $\text{non}(P) \implies \text{non}(R)$?

Exercice 10 [01490] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.
(b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.

Raisonnements

Exercice 11 [03947] [Correction]
Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 12 [03946] [Correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 13 [02054] [Correction]
Soient $\mathcal{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 14 [03945] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \implies a = 0$$

Raisonnements par récurrence

Exercice 15 [02057] [Correction]
Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Exercice 16 [01274] [Correction]

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 1/x \in \mathbb{Z}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$$

(b) Déterminer un réel x non entier vérifiant la propriété $x + 1/x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17 [02058] [Correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 18 [02059] [Correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1!3!\ldots(2n+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}$$

Exercice 19 [02060] [Correction]
Le raisonnement suivant est erroné :
Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :
$\mathcal{P}(n) = n$ points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Considérons alors $n+1$ points deux à deux distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
(HR) Les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$.
(HR) Les points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}'$.
Or $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent les deux points distincts A_2 et A_n, donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Par suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur la droite $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Récurrence établie.
Où est l'erreur ?

Exercice 20 [02061] [Correction]
On se propose d'établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1)$$

en procédant de deux manières :

(a) 1ère méthode : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \mid n\}$.
Montrer que A admet un plus grand élément p et que pour celui-ci on peut écrire $n = 2^p(2q + 1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.

(b) 2ème méthode : Procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$

Sous-ensemble, appartenance, inclusion

Exercice 21 [01491] [Correction]
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(a) $a \in E$
(b) $a \subset E$
(c) $\{a\} \subset E$
(d) $\emptyset \in E$
(e) $\emptyset \subset E$
(f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 22 [01492] [Correction]
Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

(a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

(b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.

(c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.

(d) Décrire en compréhension l'ensemble $]0 ; 1]$.

(e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 23 [01493] [Correction]
Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Opérations sur les parties d'un ensemble

Exercice 24 [01494] [Correction]
Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Établir

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercice 25 [01495] [Correction]
Étant donné A et B deux parties de E, justifier

$$\complement_E A \setminus \complement_E B = B \setminus A$$

Exercice 26 [01496] [Correction]
Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

(a) $A \subset B \iff A \cup B = B$.

(b) $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.

(c) $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$

(d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$

Exercice 27 [01497] [Correction]
Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Montrer

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exercice 28 [01498] [Correction]
Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :

(a) $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$

(b) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$

(c) $A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 29 [01499] [Correction]
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 30 [01500] [Correction]
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Fonctions indicatrices

Exercice 31 [02200] [Correction]
Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de la partie A dans E, l'application $1_A : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions caractéristiques ?

(a) $\min(1_A, 1_B)$
(b) $\max(1_A, 1_B)$
(c) $1_A.1_B$
(d) $1 - 1_A$
(e) $1_A + 1_B - 1_A.1_B$
(f) $(1_A - 1_B)^2$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 32 [01501] [Correction]
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

(a) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
(b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 33 [01502] [Correction]
Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \to \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ définie par

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}.$$

(a) Justifier que l'application f est bien définie.
(b) Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une bijection dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 34 [01503] [Correction]
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 35 [01504] [Correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

(a) $g \circ f$ injective $\implies$ f injective.
(b) $g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective
(c) $g \circ f$ injective et f surjective $\implies$ g injective.
(d) $g \circ f$ surjective et g injective $\implies$ f surjective.

Exercice 36 [01505] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$
Établir que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 37 [01506] [Correction]
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 38 [01507] [Correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f et g sont bijectives

Exercice 39 [01508] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$.
On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 40 [01509] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$.
On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 41 [01511] [Correction]
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

Montrer que :

(a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$

(b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Image directe, image réciproque d'une partie

Exercice 42 [01512] [Correction]
Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1 ; 4]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 [01513] [Correction]
Soit $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \text{ et } f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

(b) Montrer

$$\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \text{ et } f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Exercice 44 [01514] [Correction]
Soit $f : E \to F$ une application.
Établir

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Exercice 45 [01515] [Correction]
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si, et seulement si,

$$\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Exercice 46 [01516] [Correction]
Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

(a) f est injective $\iff \forall A \in \wp(E), A = f^{-1}(f(A))$.

(b) f est surjective $\iff \forall B \in \wp(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 47 [01517] [Correction]
Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
f est bijective si, et seulement si,

$$\forall A \in \wp(E), f(C_E A) = C_F f(A)$$

Exercice 48 [01510] [Correction]
Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $[0\,;1[$

(b) $]3\,;4[\cup]4\,;5[$

(c) $\{4\}$

(d) $]-\infty\,;0[\cup[2\,;+\infty[$ (et il n'y a pas d'erreurs !)

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	v	v	f	f	f	f
Q	v	v	f	f	v	v	f	f
R	v	f	v	f	v	f	v	f
	v	v	v	v	v	f	f	f

(b) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	f	f
Q	v	f	v	f
	f	v	f	f

Exercice 3 : [énoncé]
On compare deux paquets de trois billes.
Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus.
Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes.
Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se situe l'intrus.
Dans ce celui-ci, on compare deux billes.
Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intrus.
Sinon, l'intrus est la troisième.

Exercice 4 : [énoncé]
L'exercice serait facile à résoudre en deux pesées si l'on savait si la bille différente était plus lourde ou plus légère que les autres. Ignorant ce fait, l'exercice devient d'autant plus croustillant...
Notons 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.
On commence par comparer 2 lots constituées de 1,2,3 et de 4,5,6.
Si ceux-ci ont même masse alors l'intrus figure parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intrus.
Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intrus se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que le premier lot est plus lourd que le second. Comparons maintenant les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.
Si celles-ci ont même masse commune, l'intrus se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6.
Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5.
Si l'intrus est plus lourd que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Si l'intrus est plus léger que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5.
Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cet intrus.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) la fonction f est constante

(b) la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais n'y est pas forcée de s'y annuler)

(c) la fonction f prend toute valeur réelle

(d) la fonction f est croissante

(e) la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $\exists x\in I, f(x)=0$

(b) $\forall x\in I, f(x)=0$

(c) $\exists x,y\in I, f(x)\neq f(y)$

(d) $\forall x,y\in I, x\neq y\implies f(x)\neq f(y)$ ou encore
$\forall x,y\in I, f(x)=f(y)\implies x=y$

(e) $\exists a\in I,\forall x\in I, f(x)\geq f(a)$

(f) $\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in I, f(x)>M$

(g) $\forall x,y\in I, f(x)=0$ et $f(y)=0\implies x=y$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $\exists x \in I, f(x) = 0$

(b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$

(c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$

(d) $\exists x, y \in I, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$

(e) $\exists x, y \in I, f(x) = f(y)$ et $x \neq y$

(f) $\exists x \in I, f(x) > 0$ et $x > 0$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) la première assertion est vérifiée par toute application, la seconde signifie f constante.

(b) la première assertion signifie que f prend toute valeur dans $\mathbb{R}$, la seconde est absurde.

(c) la première est toujours vérifiée, la seconde signifie que f est majorée.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) d) e) sont les assertions exactes (d) car f est continue...

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Supposons $\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $|a| \leq 0$ donc $a = 0$.

(b) Par contraposée, montrons : $a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.
Supposons $a \neq 0$. Pour $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$ ce qui détermine un ε convenable.

Exercice 11 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si par l'absurde $y = x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors

$$\sqrt{2} = y - x \in \mathbb{Q}$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par disjonction de cas :
Cas n pair : on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = p(n^2+1) \in \mathbb{N}$$

Cas n impair : on peut écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = n\left(2p^2+2p+1\right) \in \mathbb{N}$$

Dans les deux cas la propriété est vraie.

Exercice 13 : [énoncé]
Par l'absurde. Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, considérons $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$.
Comme $x \in \mathcal{P}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$.
Comme $x \in \mathcal{I}$, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\ell + 1$.
Par suite $2k = 2\ell + 1$ puis $1/2 = k - \ell \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde
Une erreur de raisonnement classique est de décrire x comme un nombre pair et impair en choisissant le même entier k.

Exercice 14 : [énoncé]
Par contraposée. Supposons $a \neq 0$. On a alors $|a| > 0$ et pour $\varepsilon = |a|/2$, on observe $|a| > \varepsilon$.
Ainsi

$$a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$$

Exercice 15 : [énoncé]
Par récurrence double.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n+1$ (avec $n \geq 0$).

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \underset{HR}{=} 3.2^{n+1} + 3 - 2.2^n - 2 = 2^{n+2} + 1$$

Récurrence établie

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Par récurrence double.
La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (par hypothèse)
Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
On remarque que

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

on en déduit que

$$\left(x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\in\mathbb{Z}$$

Récurrence établie.

(b) Il suffit de choisir x solution de l'équation $x^2-px+1=0$ avec p un entier.
Pour $p=3$, $\Delta=5$ et

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

convient

Exercice 17 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\geq 2$.
Pour $n=2$ ok.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 2$.

$$1+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\underset{HR}{\geq}\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\underset{?}{\geq}\frac{3(n+1)}{2n+3}$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{3(n+1)}{2n+3}=\frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)}\geq 0$$

Récurrence établie.

Exercice 18 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\geq 1$.
Pour $n=1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.

$$1!3!\cdots(2n+1)!(2n+3)!\underset{HR}{\geq}((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!\underset{?}{\geq}((n+2)!)^{n+2}$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!}{((n+2)!)^{n+2}}=\frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}}=\frac{(n+2)(n+3)\dots(2n+3)}{(n+2)(n+2)\dots(n+2)}\geq 1$$

Récurrence établie.

Exercice 19 : [énoncé]
À l'avant dernière ligne, pour que A_2 et A_n soient distincts, il est nécessaire que $n\geq 3$.
L'hérédité de la récurrence ne s'enchaîne alors plus avec l'initialisation.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $m=0\in A$ et majorée car

$$2^m\mid n\implies 2^m\leq n\implies m\leq\log_2 n$$

donc A possède un plus grand élément p.
Puisque $p\in A$, $2^p\mid n$ ce qui permet d'écrire $n=2^pk$.
Puisque $p+1\notin A$, $2\nmid k$ et donc k est impair de la forme $2q+1$ avec $q\in\mathbb{N}$.

(b) Pour $n=1$: $p=q=0$ conviennent.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n\geq 1$.
Si $n+1$ est impair alors l'écriture est directement obtenue avec $p=0$ et $n+1=2q+1$.
Si $n+1$ est pair alors on peut écrire $n+1=2k$ avec $1\leq k\leq n$.
Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $k=2^p(2q+1)$ puis $n+1=2^{p+1}(2q+1)$.
Récurrence établie.

Exercice 21 : [énoncé]
On peut écrire : a), c), e).

Exercice 22 : [énoncé]

(a) $\{1,3,5,7,\dots\}=\{n\in\mathbb{N}\mid\exists k\in\mathbb{N},n=2k+1\}=\{2k+1\mid k\in\mathbb{N}\}$.

(b) $\{1,10,100,1000,\dots\}=\{x\in\mathbb{R}\mid\exists k\in\mathbb{N},x=10^k\}=\{10^k\mid k\in\mathbb{N}\}$.

(c) $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*\}$.

(d) $]0\,;1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x\leq 1\}$.

(e) $\{y\in\mathbb{R}\mid\exists x\in\mathbb{R},y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

(f) $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=y\}$.

Exercice 23 : [énoncé]
$\mathcal{P}(\{a\})=\{\emptyset,\{a\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\right\}$.

Exercice 24 : [énoncé]
$A \setminus (B \cap C) = A \cap C_E(B \cap C) = (A \cap C_E B) \cup (A \cap C_E C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Exercice 25 : [énoncé]
Puisque la privation correspond à l'intersection avec le complémentaire

$$\complement_E A \setminus \complement_E B = \complement_E A \cap \complement_E \complement_E B = B \cap \complement_E A = B \setminus A$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$.
Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
($\Longleftarrow$) Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.

(b) ($\Longrightarrow$) Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
($\Longleftarrow$) Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.

(c) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cap C$.
On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.
($\Longleftarrow$) Supposons $B \subset A \subset C$. $A \cup B = A = A \cap C$.

(d) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
Soit $x \in B$.
Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors sachant $x \in A \cup B$ on a $x \in A \cup C$, or $x \notin A$ donc $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et de manière symétrique $C \subset B$ d'où l'égalité.
($\Longleftarrow$) Si $B = C$ alors clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B &\iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A) \\ &\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \notin A) \\ &\quad\ \text{et } (x \notin B \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin A) \\ &\iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

d'où l'égalité des ensembles.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Si $A \Delta B = A \Delta C$ alors pour tout $x \in B$:
Si $x \in A$ alors $x \notin A \Delta B$ et donc $x \notin A \Delta C$ et puisque $x \in A$, $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors $x \in A \Delta B$ et donc $x \in A \Delta C$ et puisque $x \notin A$, $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et un raisonnement symétrique donne $C \subset B$ puis l'égalité.
Réciproque immédiate.

(b) $A \setminus B = A \iff A \cap C_E B = A \iff A \subset C_E B$ or $A \subset C_E B \iff B \subset C_E A$ et donc $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

(c) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ donc
$A \Delta B = A \cap B \implies A \cap B = \emptyset = A \cup B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 29 : [énoncé]
Si $A \not\subset B$ il est clair que l'équation n'a pas de solutions. $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $A \subset B$ alors $A \cup X = B \implies X \subset B$ et $B \setminus A \subset X$. Inversement ok
Ainsi $\mathcal{S} = \{X \in \wp(E) \mid B \setminus A \subset X \subset B\}$

Exercice 30 : [énoncé]
Si $B \not\subset A$ alors l'équation n'a pas de solution.
Si $B \subset A$. Soit X une solution de l'équation.
On a $X = (A \cap X) \cup (\bar{A} \cap X) = B \cup C$ avec $C = \bar{A} \cap X \subset \bar{A}$.
Inversement, pour $X = B \cup C$ avec $C \subset \bar{A}$, $A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B$.
Ainsi $\mathcal{S} = \left\{X = B \cup C \mid C \subset \bar{A}\right\} = \left\{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \bar{A}\right\}$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) $A \cap B$

(b) $A \cup B$

(c) $A \cap B$

(d) $C_E A$ complémentaire de A dans E.

(e) $A \cup B$

(f) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Exercice 32 : [énoncé]

(a) On a

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline f(k) & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array} \text{ et } \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline g(k) & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \end{array}$$

f est injective car $2k = 2k' \implies k = k'$ mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises.
g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit prennent même valeur par g.

(b) D'une part

$$(g \circ f)(k) = k$$

donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
D'autre part

$$(f \circ g)(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f$ est bijective. $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ car le dénominateur ne s'y annule pas.

$$f(x) = \frac{a}{c} \iff (ax+b)c = a(cx-a) \iff a^2 + bc = 0$$

qui est exclu, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$.

(b) Par calculs

$$(f \circ f)(x) = \dots = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$$

Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{a/c\}}$, f est une involution, c'est donc une bijection et $f^{-1} = f$.

Exercice 34 : [énoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si n est pair alors $f(n) = n/2 \in \mathbb{Z}^+$ et si n est impair alors $f(n) = -(n+1)/2 \in \mathbb{Z}^{-*}$.
Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$.
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Supposons $f(n) = f(n')$.
Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.
Si n et n' sont pairs alors $n/2 = n'/2$ donc $n = n'$.
Si n et n' sont impairs alors $-(n+1)/2 = -(n'+1)/2$ donc $n = n'$.
Ainsi f est injective.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Si $m \geq 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Ainsi f est surjective.
Finalement f est bijective.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Supposons $g \circ f$ injective.
Soient $x, x' \in E$. Si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ injective, donc $x = x'$.
Ainsi f injective.

(b) Supposons $g \circ f$ surjective.
Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Pour $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$. Ainsi g surjective.

(c) Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.
Par a), on a f injective et donc f bijective. Introduisons f^{-1}.
$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective par composition d'applications injectives.

(d) Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.
Par b), on a g surjective donc g bijective. Introduisons g^{-1}.
$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est surjective par composition d'applications surjectives.

Exercice 36 : [énoncé]

Supposons $h \circ g \circ f$ injective et $g \circ f \circ h$ ainsi que $f \circ h \circ g$ surjectives.
Puisque $(h \circ g) \circ f$ est injective, on a f injective.
Puisque $f \circ (h \circ g)$ est surjective, on a f surjective.
Par suite f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
Par composition $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective et par suite g est injective.
D'autre part $g \circ f \circ h$ est surjective et donc g aussi. Finalement g est bijective.
Par composition $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective et $h = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective donc h est bijective.

Exercice 37 : [énoncé]

Supposons f injective.
Soit $y \in E$. On a $f((f \circ f)(y)) = f(y)$, or f est injective donc $(f \circ f)(y) = y$.
Pour $x = f(y) \in E$ on a $f(x) = f(f(y)) = y$. Finalement f est surjective.
Supposons f surjective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est surjective, $f \circ f$ l'est aussi et donc $\exists a, a' \in E$ tels que $x = (f \circ f)(a)$ et $x' = (f \circ f)(a')$.
La relation $f(x) = f(x')$ donne alors $(f \circ f \circ f)(a) = (f \circ f \circ f)(a')$ d'où $f(a) = f(a')$ puis $x = f(f(a)) = f(f(a')) = x'$.
Finalement, la fonction$f$ est injective.

Exercice 38 : [énoncé]
Par l'exercice précédent, $f \circ g \circ f$ bijective implique f injective et f surjective.
Ainsi f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective par composition d'applications bijectives.

Exercice 39 : [énoncé]
$\forall x \in E$ on a $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ i.e. $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$ donc $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi $f_1 = f_2$.

Exercice 40 : [énoncé]
$\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors $g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$ donc $g_1 = g_2$.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Supposons f injective. $f(E) = (A, B) = f(A \cup B)$ donc $E = A \cup B$.
Supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.
Si $f(X) = f(Y)$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$ donc
$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$.
Ainsi f est injective.

(b) Supposons f surjective. L'élément $(A, \emptyset)$ possède un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a $A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$.
Supposons $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Pour $X = A' \cup B'$, on a
$f(X) = ((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) = (A', B')$ car $A' \cap A = A'$, $B' \cap A = \emptyset$.

Exercice 42 : [énoncé]
$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et $f^{-1}([-1\,;4]) = [-2\,;2]$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Soit $y \in f(A \cup A')$. Il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$.
Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$. Sinon, $x \in A'$ et $y \in f(A')$. Dans les deux cas $y \in f(A) \cup f(A')$.
Inversement, soit $y \in f(A) \cup f(A')$. Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Or $x \in A \subset A \cup A'$ donc $y \in f(A \cup A')$. De même si $y \in f(A')$.
Par double inclusion, l'égalité.
Soit $y \in f(A \cap A')$. Il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $x \in A \cap A'$, on a $x \in A$ donc $y \in f(A)$. De même $y \in f(A')$ donc $y \in f(A) \cap f(A')$.

(b) Soit $x \in E$.
$x \in f^{-1}(B \cup B') \iff f(x) \in B \cup B' \iff f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$
$\iff x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B') \iff x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
D'où la première égalité. La seconde égalité s'établit par la même démonstration, en changeant union en intersection et « et » en « ou ».

Exercice 44 : [énoncé]
Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$ i.e. $y \in B$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 45 : [énoncé]
Supposons f injective.
Soient $A, A' \in \wp(E)$. On sait déjà $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Il existe $x \in A$ et $x' \in A'$ tel que $y = f(x) = f(x')$.
Or f est injective donc $x = x' \in A \cap A'$ puis $y \in f(A \cap A')$.
Inversement supposons $\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
Soient $x, x' \in E$. Supposons $f(x) = f(x')$.
Pour $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$ on a $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') = \{f(x)\} \neq \emptyset$ donc $A \cap A' \neq \emptyset$ puis $x = x'$.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) ($\implies$) Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Pour $x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est injective, $x = x'$ et donc $x \in A$. Ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$ puis l'égalité.
($\impliedby$) Supposons $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$. Soient $x, x' \in A$.
Si $f(x) = f(x')$. Considérons $A = \{x\}$. On a $f(A) = \{f(x)\}$ donc $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$ d'où $x = x'$.
Ainsi f injective.

(b) ($\implies$) Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
On sait déjà $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Puisque $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi
$B \subset f(f^{-1}(B))$ puis l'égalité.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
Soit $y \in F$. Pour $B = \{y\}$, on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Par suite f est surjective.

Exercice 47 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(C_E A)$, il existe $x \in C_E A$ tel que $y = f(x)$.
Pour tout $y' \in f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $y' = f(x')$, or $x' \in A$ et $x \notin A$ donc $x \neq x'$ et f étant injective $y = f(x) \neq f(x') = y'$. Par suite $y \in C_F f(A)$. Ainsi $f(C_E A) \subset C_F f(A)$.
Inversement. Soit $y \in C_F f(A)$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $y \notin f(A)$ donc $x \notin A$ *i.e.* $x \in C_E A$ puis $y = f(x) \in f(C_E A)$. Ainsi $C_F f(A) \subset f(C_E A)$.
$(\Longleftarrow)$ Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$.
Si $x \neq x'$ alors pour $A = \{x\}$ on a $x' \in C_E A$ puis $f(x') \in f(C_E A) = C_F f(A) = C_F \{f(x)\}$ *i.e.* $f(x) \neq f(x')$.
Montrons que f est surjective.
Pour $A = E$ on a $\operatorname{Im} f = f(E) = C_F(C_F f(E)) = C_F(f(C_E E)) = C_F f(\emptyset) = C_F \emptyset = F$.
Finalement f est bijective.

Exercice 48 : [énoncé]
Puisque f est surjective, les A_i sont non vides.
Si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ alors pour $x \in A_i \cap A_j$ on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$ donc $i = j$.
Par contraposée : $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient $x \in E$ et $i = f(x)$. On a $x \in A_i$. Ainsi $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ puis l'égalité.