Nombres réels et complexes

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02093] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 2 [02095] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.

(b) Calculer $f(0)$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.

(d) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.

(e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 3 [02472] [Correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 4 [03668] [Correction]
(Irrationalité de e^r *pour* $r \in \mathbb{Q}^*$*)*

(a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

(b) Établir la même propriété en $x = a/b$

(c) On pose $r = a/b$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^r P_n(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $I_n \to 0$.

(d) En supposant $\mathrm{e}^r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 5 [04972] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est un nombre irrationnel.

Les nombres réels

Exercice 6 [02099] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y);$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y);$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

(a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

(b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.

(c) Démontrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.

(d) Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 [03404] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n.$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = 1$.

Inégalités

Exercice 8 [03643] [Correction]
Soient $x, y \in [0\,;1]$. Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1.$$

Exercice 9 [03224] [Correction]
Montrer
$$\forall u, v \geq 0, 1+\sqrt{uv} \leq \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}.$$

Exercice 10 [01733] [Correction]
Déterminer tous les couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leq M(x+y).$$

Exercice 11 [03640] [Correction]
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Exercice 12 [04017] [Correction]
Montrer que
$$\forall x, y \in [0\,;1], \min\{xy, (1-x)(1-y)\} \leq \frac{1}{4}.$$

Partie entière

Exercice 13 [02102] [Correction]
Montrer
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$

Exercice 14 [02104] [Correction]
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 15 [02105] [Correction]
Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Établir
$$\operatorname{Card}([a\,;b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor.$$

Exercice 16 [02106] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que
$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1.$$

(b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Les nombres complexes

Exercice 17 [02029] [Correction]
Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\sin(k\theta).$$

Exercice 18 [03107] [Correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z \in B$ alors $1-z+z^2 \in B$ et $1+z+z^2 \in B$.
Déterminer B.

Exercice 19 [03651] [Correction]
Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer
$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le plan complexe

Exercice 20 [02027] [Correction]

(a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.

(b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 21 [03040] [Correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 22 [02050] [Correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|.$$

Exercice 23 [03880] [Correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2.$$

Module et argument

Exercice 24 [02030] [Correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Exercice 25 [02031] [Correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda.z.$$

Exercice 26 [02032] [Correction]
Établir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \le |z + z'| + |z - z'|.$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 27 [00055] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \le 1.$$

Exercice 28 [03642] [Correction]

(a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

(b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \le 1$ et $|z_2| \le 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \le \sqrt{2}.$$

Exercice 29 [03249] [Correction]
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 30 [02052] [Correction]
Résoudre l'équation $|z + 1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Racines de l'unité

Exercice 31 [02037] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n-ème de l'unité.
Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|.$$

Exercice 32 [03353] [Correction]
Soient $n \ge 3$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p.$$

(b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}.$$

Exercice 33 [02038] [Correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 34 [02039] [Correction]
Simplifier :

(a) $j(j+1)$ (b) $\frac{j}{j^2+1}$ (c) $\frac{j+1}{j-1}$

Exercice 35 [02040] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 36 [02043] [Correction]
Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Exercice 37 [02044] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2\mathrm{i}\pi/n)$.

(a) Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell.$$

(b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

(c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 38 [02531] [Correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Équations algébriques

Exercice 39 [02045] [Correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ? Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 40 [02046] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$

(b) $z^4 - (5 - 14\mathrm{i})z^2 - 2(12 + 5\mathrm{i}) = 0$.

Exercice 41 [02047] [Correction]

(a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12\mathrm{i}$.

(b) Résoudre l'équation $z^3 - (1+2\mathrm{i})z^2 + 3(1+\mathrm{i})z - 10(1+\mathrm{i}) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.

(c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 42 [02048] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + \mathrm{i} \\ xy = 2 - \mathrm{i}. \end{cases}$$

Exponentielle complexe

Exercice 43 [02051] [Correction]
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exponentielles imaginaires

Exercice 44 [02034] [Correction]
Simplifier $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$ pour $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$.

Exercice 45 [02035] [Correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.
On a alors $2q^2 = p^2$.
p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.
Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) La relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.

(b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.

(c) Pour $y = -x$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.

(d) Par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x).$$
Pour $n \in \mathbb{Z}^-, n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x).$$

(e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$$
or
$$a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$$
donc
$$f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$$
puis
$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax.$$

Exercice 3 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
```
evalf(x);
```
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
```
expand(x^3);
```
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme
$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$
Simplifions ce terme
```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);
```
On obtient
$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$
Développons selon $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```
donne 9261. Enfin
```
ifactor(9261);
```
permet de conclure que
$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}.$$
Ainsi x est solution de l'équation
$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x.$$
En factorisant le polynôme sous-jacent
```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```
on obtient
$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0.$$
Puisque $3x^2 + 4x + 3 > 0$, on peut conclure
$$x = 4/3.$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0.$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0.$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}.$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}.$$

(b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

(c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^r t^n(bt-a)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n!} r^{n+1}(br+a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(d) Par intégration par parties

$$I_n = \left[P_n(t)\mathrm{e}^t\right]_0^r - \int_0^r P_n'(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m P_n^{(m)}(t)\mathrm{e}^t\right]_0^r.$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\left(P_n^{(m)}(r)p - P_n^m(0)q\right) \in \mathbb{Z}.$$

Or sur $[0\,;r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\mathrm{e}^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.
Ainsi $qI_n \to 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.
Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*} \setminus \{1\}$.

Exercice 5 : [énoncé]

On exprime $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ comme solution d'une équation « simple ».
En développant [1] le premier membre de l'équation $\left(x - \sqrt{2}\right)^3 = 3$, on obtient

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3.$$

En réordonnant les membres de cette équation, on écrit

$$\left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2} = x^3 + 6x - 3 \quad \text{puis} \quad \sqrt{2} = \frac{x^3 + 6x - 3}{3x^2 + 2}.$$

Par opérations dans $\mathbb{Q}$, si x est un nombre rationnel, $\sqrt{2}$ est aussi un nombre rationnel. C'est absurde.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x).$$

Comme f est non nulle, on a $f(1) = 1$.
$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$ donc $f(-1) = -1$.

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = n$.
De plus

$$f(-n) = f((-1) \times n) = f(-1) \times f(n) = -f(n) = -n$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x.$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(p) \times f(\frac{1}{q}).$$

Or $f(p) = p$ et

$$1 = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = f(q) \times f(\frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$$

donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Par suite $f(x) = x$.

1. On emploie la formule $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(c)
$$\forall x \geq 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geq 0.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors
$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x) \geq f(x).$$

Ainsi f est croissante.

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}.$$

Comme f est croissante :
$$f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n}) \leq f(x) < f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n})$$

puis
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq f(x) < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}.$$

À la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient $x \leq f(x) \leq x$ *i.e.* $f(x) = x$.
Finalement, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 : [énoncé]
On a
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 0$$

et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient
$$\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 1.$$

Exercice 8 : [énoncé]
Sachant $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$, on a
$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leq 0.$$

Exercice 9 : [énoncé]
Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir
$$\left(1 + \sqrt{uv}\right)^2 \leq (1+u)(1+v)$$

soit encore
$$2\sqrt{uv} \leq u + v$$

ce qui découle de la propriété
$$\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geq 0.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Soit (α, β) solution. Considérons
$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x + y}$$

sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On a
$$f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$

f bornée implique $\alpha + \beta = 1$.
Inversement, supposons $\alpha + \beta = 1$.
Si $y \geq x$ alors
$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x + y} \leq \frac{y}{x + y}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leq 1.$$

Si $x \geq y$ alors idem.

Exercice 11 : [énoncé]
Étudions la différence
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} n x_k y_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k y_\ell\right)$$

ce qui donne encore
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (x_k y_k - x_k y_\ell).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k(y_k - y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n} x_k(y_k-y_\ell) + \sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k(y_k - y_\ell)$$

car lorsque $k=\ell$ le terme $x_k(y_k-y_\ell)$ est nul.
Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k(y_k-y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n} x_\ell(y_\ell - y_k)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{1\leq \ell<k\leq n}(x_k - x_\ell)(y_k-y_\ell).$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.
Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Exercice 12 : [énoncé]
Commençons par résoudre le min. On a

$$xy \leq (1-x)(1-y) \iff x+y\leq 1.$$

Cas $x+y\leq 1$:

$$\min\left\{xy,(1-x)(1-y)\right\} = xy \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Cas $x+y>1$:

$$\min\left\{xy,(1-x)(1-y)\right\} = (1-x)(1-y) < (1-x)x \leq 1/4.$$

Exercice 13 : [énoncé]
Si $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1/2$ et $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1/2$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &= \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor\end{aligned}$$

puis relation voulue.
Si $\lfloor x\rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1/2$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &\leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor + 1 \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor\end{aligned}$$

puis la relation voulue.
Si $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1/2$ et $\lfloor y\rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$: c'est analogue.
Si $\lfloor x\rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &\leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor + 1 \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor + 1\end{aligned}$$

puis la relation voulue.
Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons $m=\lfloor nx\rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m=nq+r$ avec $0\leq r\leq n-1$.
On a $nq+r\leq nx<nq+r+1$ donc pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}$:

$$q+\frac{k+r}{n} \leq x+\frac{k}{n} < q+\frac{k+r+1}{n}.$$

Si $k+r<n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q$ et si $k+r\geq n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q+1$.
Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = nq+r = m = \lfloor nx\rfloor.$$

Exercice 15 : [énoncé]
Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a\,;b] \cap \mathbb{Z} = \left\{\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor a \rfloor + 2, \dots, \lfloor b \rfloor\right\}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor\,.$$

Or

$$\lfloor 1 - a \rfloor = 1 + \lfloor -a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$$

car $a \notin \mathbb{Z}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor\,.$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a\,;b] \cap \mathbb{Z} = \left\{a, a+1, \dots, \lfloor b \rfloor\right\}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - a + 1 = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

car $1 - a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1.$$

Récurrence établie.

(b) $a_n - 1 \leq b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leq (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

$$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1.$$

C'est un entier impair.

Exercice 17 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}} \cos^n \frac{\theta}{2}.$$

Ainsi

$$C_n = 2^n \cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n \sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
On observe que $B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = 1 - z + z^2 \text{ et } g(z) = 1 + z + z^2.$$

On remarque

$$\left|f(z) - \mathrm{i}\right| = |z + \mathrm{i}| \left|z - (1+\mathrm{i})\right|, \left|f(z) + \mathrm{i}\right| = |z - \mathrm{i}| \left|z - (1-\mathrm{i})\right|.$$

$$\left|g(z) - \mathrm{i}\right| = |z - \mathrm{i}|\,|z + 1 + \mathrm{i}| \text{ et } \left|g(z) + \mathrm{i}\right| = |z + \mathrm{i}|\,|z + 1 - \mathrm{i}|\,.$$

Soient $a \in B$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \begin{cases} f(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) \leq 0 \\ g(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) > 0. \end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n = \left|z_n^2 + 1\right| = |z_n - \mathrm{i}|\,|z_n + \mathrm{i}|\,.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) \leq 0$ alors

$$u_{n+1} = \left|f(z_n) - \mathrm{i}\right|\left|f(z_n) + \mathrm{i}\right| = u_n\left|z_n - (1+\mathrm{i})\right|\left|z_n - (1-\mathrm{i})\right|.$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $\left|z_n - (1+\mathrm{i})\right|$ et $\left|z_n - (1-\mathrm{i})\right|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2}u_n.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) > 0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0 \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0 = 0$ puis $a = \pm\mathrm{i}$. Ainsi $B \subset \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.
Sachant $B \neq \emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-\mathrm{i}$ et inversement, on peut conclure

$$B = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}\,.$$

Exercice 19 : [énoncé]
Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u = \overline{u}$.
On a alors

$$(z-a)^2 = (z-a)\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{a}}\right) = \frac{(z-a)(\overline{a} - \overline{z})}{\overline{a}\overline{z}} = -a\frac{|z-a|^2}{\overline{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \frac{|z-a|^2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda \overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.
Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) = 0 \iff x(x-1) + y(y-1) = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

(b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega' \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 21 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z \neq 1$. Il existe $\theta \in \left]0\,;2\pi\right[$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a alors
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\frac{\mathrm{i}}{2\sin\theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}.$$
Quand θ parcourt $\left]0\,;2\pi\right[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\cot(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x = 1/2$.

Exercice 22 : [énoncé]
Soit $M(z)$ solution avec $z = a + \mathrm{i}b$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a \geq 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.
Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs
$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Inversement : ok.

Exercice 23 : [énoncé]
En multipliant les trois complexes t, u, v par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}_+$ auquel cas $t = a$.
En écrivant $u = x + \mathrm{i}y$ et $v = x' + \mathrm{i}y'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne
$$\begin{cases} x' = -(a+x) \\ y' = -y \end{cases}$$
et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x+a)^2 + y^2 = c^2. \end{cases}$$
Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,
$$|b - c| \leq a \leq b + c.$$
On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 24 : [énoncé]
$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0\,;\pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geq 0$.
On a $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ donc
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
avec $2\theta \in [0\,;\pi]$ donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 25 : [énoncé]
($\Longleftarrow$) ok
($\Longrightarrow$) Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1 + x| = 1 + |x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.
Écrivons $x = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
$$|1+x|^2 = (a+1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$
et
$$\left(1 + |x|\right)^2 = (1 + \sqrt{a^2+b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$
$|1 + x| = 1 + |x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2+b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geq 0$.
Par suite $x \in \mathbb{R}_+$ et on conclut.

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$|z|+|z'| = \frac{1}{2}\left|(z-z')+(z+z')\right| + \frac{1}{2}\left|(z'-z)+(z'+z)\right| \leq |z+z'|+|z-z'|\,.$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z-z'=0$ (*i.e.* $z=z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'}\in\mathbb{R}_+$ et $\frac{z+z'}{z'-z}\in\mathbb{R}_+$ ce qui se résume à $z'=-z$.

Exercice 27 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z\neq 1/\overline{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1 \iff |z-a|^2\leq \left|1-\overline{a}z\right|^2.$$

Sachant $|x+y|^2=|x|^2+2\operatorname{Re}(\overline{x}y)+|y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1 \iff \left(|a|^2-1\right)\left(|z|^2-1\right)\geq 0.$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) En développant

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+|z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.

(b) On a

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\leq 4$$

donc parmi les quantités $|z_1+z_2|$ et $|z_1-z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit $z\in\mathbb{C}$.
Si $z\in\mathbb{R}_-$ alors $f(z)=0$.
Sinon, on peut écrire $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\left]-\pi\,;\pi\right[$ et alors

$$f(z)=r\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

Puisque $\cos(\theta/2)\geq 0$

$$\left|f(z)\right|=r\cos\frac{\theta}{2}\text{ et }\arg f(z)=\frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z)\in\left\{Z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Re}Z>0\right\}.$$

Inversement, soit $Z\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}Z>0$.
On peut écrire $Z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $R>0$ et $\alpha\in\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Pour

$$z=\frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=Z.$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 30 : [énoncé]
$|z+1|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}(z)+1$ et $(|z|+1)^2=|z|^2+2\,|z|+1$ donc
$|z+1|=|z|+1 \iff \operatorname{Re}(z)=|z| \iff z\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 31 : [énoncé]
Notons $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k-1|=2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|.$$

Alors

$$\sum_{z\in U_n}|z-1|=\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=2\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)$$
$$=4\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}\right)=2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=2\cot\frac{\pi}{2n}.$$

Exercice 32 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}.$$

(a) Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0.$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-ik\pi/n} \frac{1}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1} \cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}.$$

On peut aussi lier le calcul au précédent en écrivant

$$\frac{1}{1-\omega_i} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega_i^p + \frac{\omega_i^n}{1-\omega_i}.$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$$

Exercice 33 : [énoncé]
On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega - 1}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
(a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1.$$

(b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1.$$

(c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1.$$

Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = -\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}.$$

Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{-\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}.$$

Puisque la fonction cot est injective sur $]0\,;\pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 36 : [énoncé]
On a
$$1 + A + B = 0, AB = 2 \text{ et } \operatorname{Im}(A) > 0$$
donc
$$A = \overline{B} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a
$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k).$$
Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.

(b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.

(c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,
$$1 - \omega^k = -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} 2\mathrm{i} \sin\frac{k\pi}{n}$$
et
$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = \mathrm{i}^{n-1}$$
donc
$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$
puis la relation proposée.

Exercice 38 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient
$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$
Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation
$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$
et donc
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$
Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc
$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$
puis
$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$
et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geq 0$.

Exercice 39 : [énoncé]
$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.
Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) $\mathcal{S} = \{1, -1 + 2\mathrm{i}\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{-1 + \mathrm{i}, -3 + 2\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, 3 - 2\mathrm{i}\}$.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) $\pm(3 - 2\mathrm{i})$

(b) $a = -2\mathrm{i}, b = -1 + 3i$ et $c = 2 + \mathrm{i}$

(c) $|c - b| = |c - a| = \sqrt{13}$ et $|b - a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 42 : [énoncé]
Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation
$$z^2 - (1 + \mathrm{i})z + (2 - \mathrm{i}) = 0.$$
On obtient l'ensemble solution
$$\mathcal{S} = \big\{(1 + 2\mathrm{i}, -\mathrm{i}), (-\mathrm{i}, 1 + 2\mathrm{i})\big\}.$$

Exercice 43 : [énoncé]
Posons $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned} e^z = Z &\iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = |Z|\, e^{i\theta} \\ &\iff e^{\operatorname{Re} z} = |Z| \text{ et } e^{i \operatorname{Im} z} = e^{i\theta} \\ &\iff z = \ln \rho + \ i\theta + 2ik\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 44 : [énoncé]
En factorisant $e^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin \theta/2}{\cos \theta/2} = i \tan \frac{\theta}{2}.$$

Exercice 45 : [énoncé]
On peut factoriser

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2\cos\frac{\theta-\theta'}{2} e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.