Théorème des accroissements finis

Exercice 1 [01386] [Correction]
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 2 [01382] [Correction]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;a+2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in \left]a\,;a+2h\right[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

On pourra introduire $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice 3 [01384] [Correction]
À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 4 [00267] [Correction]
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 5 [01385] [Correction]
Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

Exercice 6 [00727] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

(a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$?

(b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
($\Longleftarrow$) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.
($\Longrightarrow$) Si f est k lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq k$.
À la limite quand $y \to x$ on obtient $\left|f'(x)\right| \leq k$. Par suite f' est bornée.

Exercice 2 : [énoncé]
La fonctionφ proposée est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;a+h]$.

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre a et $a+h$, il existe$b \in]a\,;a+h[$ tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b+h) - f'(b)).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à f' entre b et $b+h$, il existe $c \in]b\,;b+h[\in]a\,;a+2h[$ tel que

$$f'(b+h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 3 : [énoncé]
Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{1/x}$ entre x et $x+1$:
il existe $c_x \in]x\,;x+1[$ tel que

$$(x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\mathrm{e}^{1/x} = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}(x+1-x) = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}.$$

Quand $x \to +\infty$, $c_x \to +\infty$ car $c_x \geq x$.
Par suite

$$\left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}} \to 1$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1.$$

Exercice 4 : [énoncé]
En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1-\ln c}{c^2}c^{1/c}$$

avec $c \in]n\,;n+1[$.
Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \to 1$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 5 : [énoncé]
On applique le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ entre x et $x+1$.
Il existe $c \in]x\,;x+1[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or $x < c < x+1$ donne

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

puis l'encadrement voulu.

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$

donne

$$\ln\frac{kn+1}{n+1} \leq \sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} \leq \ln k.$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} = \ln k.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Posons $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|f''(x)\right| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général

$$x_n = n\frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers $+\infty$ et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0.$$

Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\left|f(x_{n+1}) - f(x_n)\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in \left]x_n\,;x_{n+1}\right[$ tel que

$$\left|f'(c_n)\right|(x_{n+1} - x_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$\left|f'(c_n)\right| \leq \varepsilon.$$

Puisque f'' est bornée par M, la fonction f' est M-lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u) - f'(c_n)\right| \leq M|u - c_n| \leq \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n\,;x_{n+1}], \left|f'(u))\right| \leq \varepsilon + \left|f'(c_n)\right| \leq 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \geq A, \left|f'(u)\right| \leq 2\varepsilon.$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}.$$

On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.