MP*: Groupes et algèbre linéaire.

Coralie Renault

10 décembre 2014

Exercice

$\mathcal{M}(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?$\mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$ est-il un groupe ? $\mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$ est-il un sous groupe de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$?
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note U_n l'ensemble des racines $n$ème de l'unité :

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$$

Montrer que

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} U_n$$

est un groupe multiplicatif.

Exercice

Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^\star, \times)$ sont-ils isomorphes ?
Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak/k \in \mathbb{Z}\}$.
a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.
b)Montrer que pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Déterminer les morphismes du groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

Exercice

Soit Eun $\mathbb{K} - ev$ de dimension finie. Quel est le centre du groupe linéaire $\mathcal{GL}(E)$?

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$$

a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
b) Etablir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\varphi(n)$ le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
a) Montrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe a divisant n vérifiant $H =< \bar{a} >$.
b) Observer que si $d \mid n$ il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre d.
c) Justifier que si $d \mid n$ le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
d) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Exercice

Soit $(G, \star)$ un groupe cyclique à n élément engendré par a.
Pour $r \in \mathbb{N}^\star$, on introduit l'application $f : G \to G$ définie par

$$\forall x \in G, f(x) = x^r$$

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $(G, \star)$.
b) Déterminer le noyau f.
c) Montrer que l'image de f est le sous-groupe engendré par a^d avec $d = \text{pgcd}(n, r)$.
d) Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

Exercice (*Théorème de Lagrange*)

Soit H un sous-groupe d'un groupe $(G, .)$ fini.
a) Montrer que les ensembles $aH = \{ax/x \in H\}$ avec $a \in G$ ont tous le cardinal de H.
b) Montrer que les ensembles aH avec $a \in G$ sont deux à deux confondus ou disjoints.
c) En déduire que le cardinal de H divise celui de G.
d) Application : Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et que cet ordre divise le cardinal de G.

Exercice

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \ldots, P(a_n), P'(a_n))$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice

Montrer que les sous-groupes finis du groupe $(\mathrm{SO}(2), \times)$ des rotations du plan sont cycliques.

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Etablir que

$$\dim \ker(g \circ f) \leqslant \dim \ker g + \dim \ker f$$

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b) Observer que

$$\mathcal{C} = \left\{a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$$

c) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.