MP Programme de colle n° 15

Cours :

Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

3. 5 Inégalité de Markov

4. Variance, écart-type

Chapitre 11

Fonctions vectorielles

1. Dérivée en un point
2. Opérations sur les fonctions dérivables
3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
4. Intégration sur un segment

Les démos à connaître du chapitre 10

3.5

Proposition **Inégalité de Markov**

Si X est une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance finie, alors : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}}$

4.1.b

Propriété 2 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si deux variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, la variable aléatoire XY est d'espérance finie et $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$.

4.2.b

Propriété 2 Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Alors : $[\sigma(X) = 0] \Leftrightarrow [X$ est presque sûrement constante$]$.

4.3

Loi de X	Notation	$X(\Omega)$	Définition de la loi	Espérance	Variance
binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	np	npq
géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=n)=pq^{n-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ

4.4

Théorème **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

Alors $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}}$

Les démos à connaître du chapitre 11

2.2

Proposition 2 :

Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable en a et $L \in \mathcal{L}(F,G)$

où F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $L \circ f$ est dérivable en a et $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$

2.3

Proposition 4 :

Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire

où F, G et H sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$, dérivables toutes deux en a.

Alors l'application $B(f,g) : I \to H$ définie par $t \to B(f(t), g(t))$ est dérivable en a et $\boxed{B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))}$.

2.5

Proposition 5 : Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable en a et $g : J \to F$ une fonction dérivable en $b = f(a)$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a))$.

3.3

Proposition 6 : **formule de Leibniz**

Si $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})^2$ alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ et $\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$.