Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (2ème partie)

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

► 1

Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction

$$f:\ x \longmapsto \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

1) Étudier la parité et la périodicité de la fonction f. Qu'en déduit-on quant à sa courbe ? Où suffit-il de l'étudier ?

2) Mener l'étude et tracer l'allure de la courbe de f.

► 2

On souhaite tracer l'allure de la courbe de

$$\varphi:\ x \longmapsto \frac{1}{1+\tan(\pi x)}.$$

1) Déterminer soigneusement le domaine de définition de φ.

2) Étudier la parité et la périodicité de cette fonction. Qu'en déduit-on quant à sa courbe ? Où suffit-il de l'étudier ?

3) Mener l'étude et tracer l'allure de sa courbe.

► 3

On souhaite étudier la fonction

$$f:\ x \longmapsto \cos^5(x) + \sin^5(x).$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = -f(x)$. En déduire que la courbe de f est invariante par une transformation géométrique que l'on précisera.

2) Justifier qu'il suffira d'étudier f sur $[0,\pi]$. Indiquer comment reconstituer la courbe complète.

3) Calculer la dérivée de f et la factoriser au maximum (il ne doit plus y avoir de puissances sur les fonctions trigonométriques).

4) Étudier f sur $[0,\pi]$ et tracer l'allure de sa courbe sur $[-2\pi, 2\pi]$.

► 4

1) Dresser le tableau de variation de la fonction

$$f:\ x \longmapsto \sqrt{\pi^2 - x^2}.$$

2) On admet que la courbe de f admet des tangentes verticales en ses points spéciaux. Étudier la fonction

$$g:\ x \longmapsto \tan\sqrt{\pi^2 - x^2}$$

en vue de tracer sa courbe représentative.

3) ♠ Démontrer que la courbe de g admet en π une tangente verticale. (on pourra poser $h = \pi - x$ de sorte que $x \to \pi^-$ revient à $h \to 0^+$)

► 5

Résoudre les équations suivantes :

1) $5\,\mathrm{ch}(x) - 3\,\mathrm{sh}(x) = 4$.

2) $3\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) = 1$.

► 6

Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ \mathrm{sh}(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

▷ 7 Formules d'addition hyperboliques

Soit a et b deux réels. Montrer les formules d'addition :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$
$$\text{et} \quad \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a).$$

Quelles autres formules analogues aux formules de trigonométrie peut-on en tirer ?

Fonctions bijectives

▷ 8 Images directes

On introduit la fonction $p: x \mapsto (x+1)^2 - 2$.
Déterminer $p([0,3])$, $p(]-3,0[)$, $p(\mathbb{R}_+^*)$ et $p(\mathbb{R})$.
(On effectuera d'abord des conjectures à l'aide de représentations graphiques puis on démontrera chaque résultat soigneusement.)

▷ 9 Fonction bijective et sa réciproque

Soit $\varphi:\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 12x$.

1) Montrez que φ est bijective de $I = \mathbb{R}$ dans un intervalle J que vous préciserez.

2) Que peut-on dire, sans calculs supplémentaire, de la fonction réciproque ψ qui lui est associée ?

3) Déterminez l'expression de cette fonction réciproque. (vous pourrez utiliser la fonction racine cubique, $u \mapsto \sqrt[3]{u}$, qui est la fonction réciproque de la fonction cube)

▷ 10

Déterminez des intervalles I et J de sorte que ch soit bijective de I dans J.

► 11 Bijection et bijection réciproque

Soit f l'application définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 1 - f(x)$.
En déduire que la courbe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.

3) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera.
Tracer l'allure des courbes de f et de sa bijection réciproque g.

4) Démontrer que, pour tout t pertinent, $e^{g(t)} = \frac{t}{1-t}$.

5) Montrer que g est dérivable sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée (l'expression finale n'utilisera pas $g(t)$).

► 12

On note $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

1) Montrer que f est bijective de I dans un intervalle à préciser.

2) Expliciter la bijection réciproque de f.

3) Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant I par $J = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

► 13 Argument cosinus-hyperbolique

1) Démontrer que la fonction ch est bijective de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera.

On appelle **argument-cosinus-hyperbolique** et on note **argch** la bijection réciproque de ch restreinte à $[0, +\infty[$.

2) Préciser les intervalles de départ et d'arrivée d'argch.
♠ Déterminer l'expression explicite d'$\text{argch}(t)$.
(on trouvera : $\text{argch}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$)

3) En utilisant la relation liant ch^2 à sh^2, montrer que

$$\forall t \in \mathscr{D}_{\text{argch}}, \quad \text{sh}\big(\text{argch}(t)\big) = \sqrt{t^2-1}.$$

4) Étudier la dérivabilité d'argch et calculer sa dérivée de façon explicite en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques.

5) Retrouver ce résultat en dérivant l'expression trouvée à la question 2.

Réciproques des fonctions trigonométriques

▹ 14 Quelques valeurs particulières

1) Calculer : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\arctan(-\sqrt{3})$.

2) Calculer : $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$,
$\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$, $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

▹ 15 Dans un sens et dans l'autre

1) Soit $\varphi : x \mapsto \cos\big(\arccos(x)\big)$. Déterminer le domaine de définition de φ. Simplifier l'expression de $\varphi(x)$ et tracer la courbe représentative de φ.

2) Soit $\psi : x \mapsto \arccos\big(\cos(x)\big)$.
 a. Déterminer le domaine de définition de ψ.
 b. Donner un intervalle I sur lequel l'expression de ψ se simplifie de manière immédiate et préciser cette expression.
 c. Étudier la périodicité et la parité de ψ.
 d. Tracer la courbe représentative de ψ.

► 16 Interaction des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques

Après avoir déterminé leur domaine d'existence, exprimer sans fonction trigonométrique :

1) $\tan\big(\arcsin(x)\big)$, $\quad\tan\big(\arccos(x)\big)$;

2) $\sin\big(2\arctan(x)\big)$, $\quad\cos\big(2\arctan(x)\big)$;

3) $\sin\big(\arctan(x)\big)$, $\quad\cos\big(\arctan(x)\big)$;

4) $\tan\big(2\arcsin(x)\big)$, $\quad\tan\big(2\arccos(x)\big)$;

5) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right)$, $\quad\sin\big(3\arcsin(x)\big)$.

▹ 17

Montrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\begin{cases} \arcsin(-x) = -\arcsin(x) \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x), \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$.

► 18 Une propriété d'arc-tangente à connaître

1) Soit $x \neq 0$. Simplifier $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ en étudiant la dérivée de f (attention piège !).

2) Retrouver ce résultat sans calcul de dérivée.

► 19 En dérivant

On souhaite établir que

$$\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$$

pour des réels x dans un intervalle I que l'on va déterminer. Pour cela, on introduit la fonction auxiliaire

$$\varphi : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

1) Déterminer le domaine de définition I de φ.

2) Montrer que φ est dérivable sur I sauf peut-être en 0 et en 1. φ est-elle continue sur I ?

3) Calculer φ' et conclure.

► 20 ♠ Équations avec fonctions trigonométries réciproques

Déterminer l'ensemble de définition de ces équations puis les résoudre soigneusement :

1) $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$,

2) $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$,

3) $\arcsin(x) = 2\arctan(x)$,

4) $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

► 21 Études de fonctions

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, étude des variations et des limites) :

1) $f : x \mapsto \arccos(1-2x^2)$,

2) $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$,

3) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\, e^{\arcsin(x)}$,

4) $f : x \mapsto (x-1)^2 \arctan x$,

5) $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$.