MP Programme de colle n° 13

Chapitre 9

Séries entières

Cours : tout le chapitre

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes ou délicates)

1.2

Lemme d'Abel : Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors :

pour tout $z \in B(0,r)$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2.1

Théorème 1 : **convergence de la série et continuité de sa somme**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

① Pour tout $z \in \mathbb{C}$: si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument

si $|z| > R$, la série diverge grossièrement.

② Pour tout $r \in]0,R[$: la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathcal{B}_f(0,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant R\}$.

③ La fonction somme $S : z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

3.4

Proposition : **règle de D'Alembert pour les séries entières**

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.

Si la limite $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$

4.1

Proposition 1 : Théorèmes de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons respectifs R_a et R_b.

- Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \ n \geqslant n_0 \Rightarrow \boxed{|a_n| \leqslant |b_n|}$ ou si $\boxed{a_n = o(b_n)}$ ou si $\boxed{a_n = O(b_n)}$, alors $\boxed{R_a \geqslant R_b}$
- Si $\boxed{a_n \sim b_n}$ alors $\boxed{R_a = R_b}$.

4.2

Proposition 2 : Somme, produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Soient $\sum s_n z^n$ (resp. $\sum c_n z^n$) leur somme (resp. produit de Cauchy) de rayons de convergence respectifs R_S et R_P. Alors :

❶ $R_S \geqslant Min(R_a, R_b)$ et $R_P \geqslant Min(R_a, R_b)$

❷ si $R_a \neq R_b$, alors $R_S = Min(R_a, R_b)$

et en tout point z où les séries convergent simultanément, on a :

❸ $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

4.4

Propriété : Série dérivée

$$R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}\right).$$

5.4.a

Proposition 4 :

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, de somme f.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.