SEMAINE 12

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

EXERCICE 1 :

1. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto 2x(1-x)$. Montrer que la suite de fonctions (φ^n), où $\varphi^n = \varphi\circ\varphi\circ\cdots\circ\varphi$ représente l'itérée n-ième de φ, converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers la fonction constante $\frac{1}{2}$.

2. Soit I un segment inclus dans $]0,1[$. Montrer que toute fonction f continue de I vers $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynômes à coefficients entiers relatifs.

On pourra commencer par traiter le cas où f est constante sur I.

Source : Antoine CHAMBERT-LOIR, Stéfane FERMIGIER, Vincent MAILLOT, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, ISBN 2-225-84692-8

- -

1. Soit K un compact inclus dans $]0,1[$. Alors il existe α avec $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ tel que $K \subset [\alpha, 1-\alpha]$. Pour tout entier naturel n, on a alors $\varphi^n(K) \subset \varphi^n([\alpha, 1-\alpha])$.

Une étude rapide de φ (*faire un dessin*) montre la symétrie $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et le fait que, sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (qui est stable par φ), l'application φ est continue et strictement croissante. On en déduit que $\varphi([\alpha, 1-\alpha]) = \left[\varphi(\alpha), \dfrac{1}{2}\right]$ puis, par une récurrence immédiate, $\varphi^n([\alpha, 1-\alpha]) = \left[\varphi^n(\alpha), \dfrac{1}{2}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, la suite $\big(\varphi^n(\alpha)\big)$, à valeurs dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, est croissante (car, sur cet intervalle, stable par φ, on a $\varphi(x) \geq x$), majorée donc convergente, et il est alors immédiat que sa limite est $\dfrac{1}{2}$.

De $\varphi^n(K) \subset \left[\varphi^n(\alpha), \dfrac{1}{2}\right]$ avec $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi^n(\alpha) = \frac{1}{2}$, on déduit que la suite de fonctions (φ^n) converge uniformément sur K vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$.

2. • Montrons d'abord le résultat dans le cas où f est constante ($f = C$) sur I :

▷ si $C = \dfrac{1}{2}$, c'est la question **1.** puisque les fonctions φ^n sont des polynômes à coefficients entiers relatifs ;

▷ on en déduit le résultat pour $C = \dfrac{1}{2^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence sur p en utilisant le résultat suivant :

si $(f_n) \to f$ uniformément, $(g_n) \to g$ uniformément, et si les fonctions f_n et g_n sont uniformément bornées, alors $(f_n g_n) \to fg$ uniformément (démonstration évidente) ;

▷ on en déduit alors le résultat lorsque C est un nombre dyadique, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{q}{2^p}$ avec $q \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

▷ on montre enfin que c'est vrai pour C réel quelconque, puisque les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$. *Pour tout entier naturel p, on peut encadrer le réel C entre ses valeurs approchées dyadiques à 2^{-p} près par défaut et par excès, qui sont les nombres $u_p = 2^{-p}\, E(2^p\, C)$ et $v_p = u_p + 2^{-p}$.*

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On sait (théorème de Weierstrass) qu'on peut approcher f uniformément sur I par des fonctions polynômes (à coefficients réels!) : si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $\|f - P\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ (où $\|\cdot\|_\infty$ représente la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$). Notons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$. Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, soit $Q_k \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $\|Q_k - a_k\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2(d+1)}$ et posons $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} Q_k(x) x^k$. La fonction Q est polynomiale à coefficients entiers relatifs et, de $|x| \leq 1$ pour tout $x \in I$, on déduit par l'inégalité triangulaire que $\|f - Q\|_\infty \leq \varepsilon$.

Le résultat reste vrai, par translation, sur tout segment de $\mathbb{R}$ ne rencontrant pas $\mathbf{Z}$. Il est faux sur un segment I rencontrant $\mathbf{Z}$ car, si $k \in I \cap \mathbf{Z}$, si (R_n) est une suite d'éléments de $\mathbf{Z}[X]$ convergeant uniformément vers f sur I, alors $f(k) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(k)$ est nécessairement un entier relatif car les $R_n(k)$ sont tous des entiers relatifs.

EXERCICE 2 :

Méthode de Laplace

On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe $\mathcal{C}^2$, ayant en 0 un maximum global strict, et telle que $f''(0) < 0$.

a. Démontrer que

$$\exists a > 0 \quad \forall x \in [-1, 1] \qquad f(x) \leq f(0) \cdot e^{-ax^2}\ .$$

b. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\big(f(0)\big)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}}$$

(*on pourra poser* $u = x\sqrt{n}$).

c. Donner un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, des expressions

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,dt \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos t}\,dt\ .$$

- -

a. Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a

$$f(x) \leq f(0) \cdot e^{-ax^2} \iff \ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) \leq -ax^2 \iff a \leq -\frac{1}{x^2}\ \ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)\ .$$

Or, la fonction $\varphi : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}\ \ln\left(\dfrac{f(x)}{f(0)}\right)$ est continue et à valeurs strictement positives sur chacun des intervalles $[-1,0[$ et $]0,1]$. Du développement limité

$$\frac{f(x)}{f(0)} = 1 + \frac{f''(0)}{2f(0)}\ x^2 + o(x^2)\ ,$$

on déduit que $\ln\left(\dfrac{f(x)}{f(0)}\right) = \dfrac{f''(0)}{2f(0)}\ x^2 + o(x^2)$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -\dfrac{f''(0)}{2f(0)} > 0$. La fonction φ, ainsi prolongée, est continue et strictement positive sur le segment $[-1,1]$, donc admet un minimum strictement positif m. Pour répondre à la question, on peut choisir $a = m$.

b. Posons $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n\ dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\ du$. Considérons alors

$$J_n = \frac{\sqrt{n}}{\big(f(0)\big)^n}\ I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n\ du = \int_{\mathbb{R}} g_n$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n \quad \text{si} \quad u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]\ , \qquad g_n(u) = 0 \quad \text{sinon}\ .$$

Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, on a $g_n(u) = e^{h_n(u)}$, où

$$h_n(u) = n \cdot \ln\left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)\ .$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^*$ fixé, le développement limité de f à l'ordre deux en zéro permet d'écrire, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)} = 1 + \frac{f''(0)}{2f(0)} \cdot \frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ ,$$

d'où $\ln\left(\dfrac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f''(0)}{2f(0)} \cdot \dfrac{u^2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \exp\left(\dfrac{f''(0)}{2f(0)}\ u^2\right)$. Enfin, la majoration de la question **a.** donne $g_n(u) \leq e^{-au^2}$, la fonction $u \mapsto e^{-au^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{f''(0)}{2f(0)} u^2\right)\ du = \sqrt{2\pi \frac{f(0)}{|f''(0)|}}$$

en utilisant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}$. Cela fournit bien l'équivalent demandé pour I_n.

Remarque. Le lecteur vérifiera sans peine que, sous les mêmes hypothèses, on a

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^n \, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\big(f(0)\big)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}} .$$

c. Dans l'intégrale $g(x)$, poser $t = \dfrac{\pi}{2}(1-u)$: on obtient $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \Big(\cos\frac{\pi u}{2}\Big)^x \, du$. On applique la méthode de Laplace avec $f(u) = \cos\dfrac{\pi u}{2}$ et cela donne $g(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ (lorsque x est un entier naturel, on reconnaît les intégrales de Wallis).

De la même façon, on obtient $h(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\, e^x$.

EXERCICE 3 :

Définitions :

a. Soit $\mathcal{A}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel non nul n. On appelle **probabilité de l'évènement** $\mathcal{A}(n)$ le nombre, s'il existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \,\mathrm{Card}\,\big\{k \in [\![1,n]\!] \mid \mathcal{A}(k) \text{ est vrai}\big\} .$$

b. Une suite (x_n) de réels est dite **équirépartie modulo** 1 si, pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b \leq 1$, la probabilité de l'évènement $x_n - E(x_n) \in [a, b[$ est égale à $b - a$.

Énoncé :

1. Soit (x_n) une suite réelle telle que, pour tout entier relatif m non nul, on ait

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i2\pi m x_k} = o(n) \quad \text{lorsque } n \to +\infty .$$

Montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.

2. Soit d un entier, $d \in [\![1,9]\!]$.

Quelle est la probabilité pour que l'écriture décimale du nombre 2^n commence par le chiffre d ?

Source : Antoine CHAMBERT-LOIR, Stéfane FERMIGIER, Vincent MAILLOT, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, ISBN 2-225-84692-8

- -

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue par morceaux et 1-périodique, et pour tout entier naturel n non nul, posons $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

L'hypothèse est que, pour tout $m \in \mathbf{Z}^*$, en notant $e_m : x \mapsto e^{2i\pi m x}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(e_m) = 0 = \int_{[0,1]} e_m \ .$$

Par linéarité, et comme $S_n(e_0) = 1 = \displaystyle\int_{[0,1]} e_0$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_{[0,1]} f$ pour toute fonction $f \in \mathrm{Vect}\{e_m \ ; \ m \in \mathbf{Z}\}$, c'est-à-dire pour tout polynôme trigonométrique 1-périodique.

Soit alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 1-périodique. Le théorème de Weierstrass trigonométrique permet d'approcher g uniformément par des polynômes trigonométriques 1-périodiques : si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver $f \in \mathrm{Vect}\{e_m \ ; \ m \in \mathbf{Z}\}$ tel que $\|g - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$; on a alors $|S_n(g) - S_n(f)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left|\displaystyle\int_{[0,1]} g - \int_{[0,1]} f\right| \leq \displaystyle\int_{[0,1]} |g - f| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$; soit N un entier tel que $\left|S_n(f) - \displaystyle\int_{[0,1]} f\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire, on a alors $\left|S_n(g) - \displaystyle\int_{[0,1]} g\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(g) = \int_{[0,1]} g$ pour toute fonction continue et 1-périodique.

Soient a et b avec $0 < a < b < 1$, soit χ la fonction 1-périodique coïncidant sur $[0,1]$ avec la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b[$. Pour tout ε avec $0 < \varepsilon < \min\left\{a, 1-b, \dfrac{b-a}{2}\right\}$, soient φ_ε et ψ_ε les fonctions 1-périodiques et continues définies comme suit sur l'intervalle $[0,1]$:

- la fonction φ_ε est nulle sur $[0, a]$ et sur $[b, 1]$, vaut 1 sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, et est affine sur chacun des intervalles $[a, a+\varepsilon]$ et $[b-\varepsilon, b]$;
- la fonction ψ_ε est nulle sur $[0, a-\varepsilon]$ et sur $[b+\varepsilon, 1]$, vaut 1 sur $[a, b]$, et est affine sur chacun des intervalles $[a-\varepsilon, a]$ et $[b, b+\varepsilon]$

(*faire un dessin !!*).

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varphi_\varepsilon \leq \chi \leq \psi_\varepsilon$, donc $S_n(\varphi_\varepsilon) \leq S_n(\chi) \leq S_n(\psi_\varepsilon)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit par ailleurs N un entier tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$\left|S_n(\varphi_\varepsilon) - \int_{[0,1]} \varphi_\varepsilon\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|S_n(\psi_\varepsilon) - \int_{[0,1]} \psi_\varepsilon\right| \leq \varepsilon \ .$$

Comme $\displaystyle\int_{[0,1]} \varphi_\varepsilon = \int_{[0,1]} \chi - \varepsilon$ et $\displaystyle\int_{[0,1]} \psi_\varepsilon = \int_{[0,1]} \chi + \varepsilon$, pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|S_n(\varphi_\varepsilon) - \int_{[0,1]} \chi\right| \leq 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \left|S_n(\psi_\varepsilon) - \int_{[0,1]} \chi\right| \leq 2\varepsilon \ .$$

On a donc les inégalités

$$\left(\int_{[0,1]}\chi\right)-2\varepsilon\le S_n(\varphi_\varepsilon)\le S_n(\chi)\le S_n(\psi_\varepsilon)\le\left(\int_{[0,1]}\chi\right)+2\varepsilon\ ,$$

d'où $\left|S_n(\chi)-\displaystyle\int_{[0,1]}\chi\right|\le 2\varepsilon$ pour $n\ge N$, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(\chi)=\int_{[0,1]}\chi=b-a$, ce qui prouve que la suite (x_n) est équirépartie modulo 1 (*je laisse le lecteur méticuleux examiner les cas* $a=0$ *ou* $b=1$).

La condition donnée par l'énoncé comme condition suffisante d'équirépartition modulo 1 est aussi une condition nécessaire : c'est le **critère de Weyl**.

2. L'écriture décimale du nombre 2^n commence par le chiffre d si et seulement si

$$\exists p\in\mathbb{N}\qquad d\cdot 10^p\le 2^n<(d+1)\cdot 10^p\ ,$$

c'est-à-dire si et seulement si (en notant log le logarithme décimal)

$$\exists p\in\mathbb{N}\qquad p+\log(d)\le\log(2^n)<p+\log(d+1)$$

ou encore si et seulement si $\log(d)\le\log(2^n)-E\big(\log(2^n)\big)<\log(d+1)$. Or, la suite (x_n), avec $x_n=\log(2^n)=n\,\log(2)=n\,\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ est équirépartie modulo 1 car elle vérifie le critère de Weyl :

le nombre $a=\log 2=\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ est irrationnel car, si on avait $a=\dfrac{p}{q}$, cela entraînerait $2^q=10^p$, soit $2^{q-p}=5^p$ ce qui est absurde, alors, pour tout $m\in\mathbf{Z}^*$, la suite (s_n) définie par $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi m x_k}=e^{2i\pi ma}\,\frac{1-e^{2i\pi mna}}{1-e^{2i\pi ma}}$ est bornée, donc est "$o(n)$".

La probabilité pour que l'écriture décimale de 2^n commence par le chiffre d est donc $p=\log(d+1)-\log(d)=\log\left(1+\dfrac{1}{d}\right)$. C'est la **loi de Benford**.

EXERCICE 4 :

Une fonction continue partout et dérivable nulle part

Soit g la fonction 1-périodique vérifiant

$$\forall x\in\left[-\frac12,\frac12\right]\qquad g(x)=|x|\ .$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction g_n par

$$g_n(x)=10^{-n}\,g(10^n\,x)\ .$$

Montrer que la fonction $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}g_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est dérivable en aucun point.

Pour prouver la non-dérivabilité de f en un point x, on étudiera des taux d'accroissement $\delta_n = \dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$, avec $h_n = \varepsilon_n\, 10^{-n}$ où $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$.

- -

• Remarquons que

$$g(x) = d(x,\mathbf{Z}) = \left| E\left(x+\frac{1}{2}\right) - x \right| .$$

La fonction g est continue et bornée : $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{2}$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g_n(x) \leq \dfrac{1}{2}\, 10^{-n}$. Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et la série $\sum g_n$ converge normalement, ce qui assure la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction somme f.

• Soit x un réel.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction g_k est 10^{-k}-périodique. Si $h_n = \varepsilon_n\, 10^{-n}$ avec $\varepsilon_n = \pm 1$, on a donc $g_k(x+h_n) = g_k(x)$ pour tout $k \geq n$. Donc

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{1}{h_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \big[g_k(x+h_n) - g_k(x)\big] = \frac{1}{h_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big[g_k(x+h_n) - g_k(x)\big] \\
&= \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n-1} 10^{n-k} \big[g(10^k\, x + \varepsilon_n\, 10^{k-n}) - g(10^k\, x)\big] .
\end{aligned}$$

Soit m_n l'unique entier relatif tel que $10^{n-1}\, x$ appartienne à l'intervalle $I_n = \left[\dfrac{m_n}{2}, \dfrac{m_n+1}{2}\right[$. Alors l'un au moins des deux nombres $10^{n-1}\, x - \dfrac{1}{10}$ et $10^{n-1}\, x + \dfrac{1}{10}$ appartient aussi à l'intervalle I_n (la différence entre ces deux nombres vaut $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{2}$). Fixons alors $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ de façon que $10^{n-1}\, x + \dfrac{\varepsilon_n}{10} \in I_n$. Alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les nombres $10^k\, x$ et $10^k\, x + \varepsilon_n 10^{k-n}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\dfrac{m_n}{2 \times 10^{n-1-k}}, \dfrac{m_n+1}{2 \times 10^{n-1-k}}\right[$, qui est inclus dans un intervalle de la forme $\left[\dfrac{p}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right[$ avec $p \in \mathbf{Z}$. Or, dans un tel intervalle, la fonction g est affine de pente 1 ou -1, donc

$$10^{n-k}\, \big[g(10^k\, x + \varepsilon_n\, 10^{k-n}) - g(10^k\, x)\big] \in \{-1,1\}$$

et δ_n, somme de n entiers appartenant à $\{-1,1\}$, est un entier relatif de même parité que n.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ et la suite de terme général $\delta_n = \dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ ne peut pas converger, ce qui contredit la dérivabilité de la fonction f au point x.

EXERCICE 5 :

Soit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, où

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \ .$$

On note f la fonction somme de cette série.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, qu'elle est impaire, 1-périodique et qu'elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbf{Z} \qquad 2f(2x) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \ . \qquad (*)$$

b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

c. En considérant le maximum de $|g|$ sur $[0,1]$, montrer que g est nulle sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right) \ .$$

- -

a. La convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$ est immédiate.

Chacune des fonctions f_n est impaire, donc f est impaire.

Il est commode de noter que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$. En notant alors S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$, on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$, d'où

$$S_n(x+1) = S_n(x) + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n} \ ,$$

donc f est 1-périodique (faire tendre n vers $+\infty$).

Pour prouver **(*)**, remarquer de même que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbf{Z} \qquad 2\, S_{2n}(2x) = S_n(x) + S_n\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x + n + \frac{1}{2}} \ .$$

b. Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Sur $[a, 1-a]$, pour $n \geq 1$, la majoration $|f_n(x)| = -f_n(x) \leq \dfrac{2}{n^2 - (1-a)^2}$ prouve que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, 1-a]$. Les fonctions f_n étant continues sur cet intervalle, il en est de même de f, qui est donc continue sur $]0,1[$, et donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$ par périodicité. La fonction $x \mapsto \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est aussi définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, donc g aussi.

Au voisinage de zéro, on a $\pi \operatorname{cotan} \pi x = \dfrac{1}{x} + O(x)$. De plus,

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} \ ,$$

cette dernière série de fonctions convergeant normalement sur tout intervalle $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$ grâce à la majoration

$$\left| \frac{1}{x^2 - n^2} \right| = \frac{1}{n^2 - x^2} \leq \frac{1}{n^2 - (1-\alpha)^2} \ .$$

On en déduit (continuité de la somme en zéro) :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3} x + o(x) = \frac{1}{x} + O(x)$$

au voisinage de 0, donc $g(x) = O(x)$ en zéro ; elle est donc prolongeable par continuité en zéro, avec $g(0) = 0$. Etant 1-périodique, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction $x \mapsto \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est impaire, 1-périodique et vérifie la propriété **(*)** (vérification facile). Il en est donc de même de la fonction g. Mais g est continue sur $[0,1]$, donc $|g|$ admet un maximum M sur ce segment, atteint en un point x_0. La relation **(*)** donne alors

$$2M = 2|g(x_0)| = \left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) + g\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right| \leq \left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| + \left| g\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right| \leq 2M \ .$$

Il en résulte que $\left| g\left(\dfrac{x_0}{2}\right) \right| = M$, puis, par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \right| = M$. La continuité de g en zéro donne alors $M = |g(0)| = 0$. La fonction g est nulle sur $[0,1]$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$ tout entier. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \qquad \pi \operatorname{cotan} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \ .$$

d. Il suffit de dériver terme à terme, ce qui est autorisé par la convergence normale de la série des dérivées sur tout intervalle $[a, 1-a]$ avec $0 < a < \dfrac{1}{2}$, puis par la périodicité.

EXERCICE 6 :

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée, avec $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice, f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, dt\ .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$. Montrer que, pour tout réel α strictement positif, c_n est négligeable devant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le développement asymptotique de a_n :

$$a_n = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\, f^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}\right)\ .$$

Pour cela, on appliquera l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$ et on en déduira une estimation de $b_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$.

- -

1. Soit $M = \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f|$ (on a $M > 0$) ; l'existence de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ résulte de l'équivalence $\left|\dfrac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\right| \sim \dfrac{|f(0)|}{\sqrt{t}}$ en zéro et de la majoration $\left|\dfrac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq M\, \dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$ qui garantit l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

En posant $nt = u^2$, on obtient $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, f\left(\frac{u^2}{n}\right) du$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u^2}\, f\left(\dfrac{u^2}{n}\right) = e^{-u^2}\, f(0)$ et la majoration $\left|e^{-u^2}\, f\left(\dfrac{u^2}{n}\right)\right| \leq M\, e^{-u^2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, f\left(\frac{u^2}{n}\right)\, du = f(0) \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, f(0)\ ,$$

ce qui conduit immédiatement à la conclusion $a_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\, f(0)$.

2. Avec $M = \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f|$, on obtient sans difficulté la majoration

$$|c_n| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, dt\right| \leq \frac{M}{n}\, e^{-n}\ ,$$

donc c_n est négligeable devant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.

3. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$:

$$\forall t \in [0,1] \qquad \left| f(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k \right| \leq \frac{M_{p+1}}{(p+1)!}\, t^{p+1}$$

avec $M_k = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f^{(k)}(t)|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on multiplie par $\dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$ et on intègre :

$$\left| b_n - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, J_k(n) \right| \leq \frac{M_{p+1}}{(p+1)!}\, J_{p+1}(n)\ ,$$

en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $J_k(n) = \displaystyle\int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}}\, e^{-nt}\, dt$.

La majoration $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-\frac{1}{2}}\, e^{-nt}\, dt \leq e^{-(n-1)} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{k-\frac{1}{2}}\, dt$ montre que, pour obtenir un développement asymptotique à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}\right)$, les intégrales $J_k(n)$ peuvent être remplacées par les intégrales $I_k(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-\frac{1}{2}}\, e^{-nt}\, dt$, la différence étant “négligeable” à la précision demandée, c'est-à-dire dans l'échelle de comparaison des $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Un calcul simple, par récurrence sur k, montre que

$$I_k(n) = \frac{2}{n^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} u^{2k}\, e^{-u^2}\, du = \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}}\, \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}\, \sqrt{\pi}\ ,$$

d'où le développement demandé pour b_n, puisque le “reste” est de l'ordre de $J_{p+1}(n)$ ou de $I_{p+1}(n)$, négligeable devant $\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Enfin, $c_n = a_n - b_n$ étant aussi négligeable devant $\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ (question **2.**), on trouve le même développement asymptotique pour a_n.