Suites réelles

I Notion de suite réelle

I.1 Suites réelles, termes d'une suite.

Une suite réelle peut être vue comme une liste infinie de nombres réels (souvent notés u_n), chaque réel étant repéré par sa position dans la liste (son rang, souvent noté n ou k). Plus précisément :

Déf. • **1)** Une **suite réelle** est une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
2) L'image d'un entier $n \in \mathbb{N}$ par la suite u est noté u_n (au lieu de $u(n)$).
Il s'agit du **terme de rang n de la suite u.**
3) La suite u elle-même sera notée $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ voire tout simplement $\boldsymbol{(u_n)}$**.**

Exemple. Soit la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.
Les premiers termes de la suite u sont

$$u_0 = 2^0 = 1, \quad u_1 = 2^1 = 2, \quad u_2 = 2^2 = 4 \quad \text{etc.}$$

La suite u est donc l'objet suivant :

$$u = (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots) = (1, 2, 4, 8, 16, \dots).$$

La suite u sera notée également : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) ou encore $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En revanche, u_n est le nombre réel 2^n. Ce n'est pas une suite.

Il ne faut pas confondre :

– **la suite u,** qui s'écrit souvent (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui contient **tous** les termes de la suite, avec
– $\boldsymbol{u_n}$ qui est le terme d'indice n de la suite u (**un seul** terme donc) et qui est un nombre réel.

Dire que deux suites u et v sont égales signifie que **tous** leurs termes sont égaux. Autrement dit : $u = v \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.

Certaines suites n'ont pas de terme de rang 0 (comme la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$). Il suffit alors de remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$ dans la définition ci-dessus : on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ au lieu de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De manière analogue, certaines suites ne sont définies qu'à partir du rang 2, etc. Les définitions et théorèmes cités dans ce cours s'adaptent de manière immédiate à toutes ces suites.

I.2 Modes de définition d'une suite

Pour introduire une suite réelle u, il y a trois grandes approches possibles :

1) Suite définie de façon explicite
Le terme u_n est exprimé directement en fonction de n.
Ex. ✻ On peut définir des suites u, v et w en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \tfrac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus [\![0,1]\!],\ w_n = \tfrac{n}{\ln(n)}.$$

ou, de manière équivalente : $u = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, $w = \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$.

2) Suite définie par récurrence
Chaque terme de la suite est exprimé en fonction du terme qui le précède (ou de plusieurs termes précédents) dans la suite. Dans ce cas il est nécessaire de donner la valeur du premier terme (ou de quelques premiers termes) de la suite.
► **Suite récurrente d'ordre 1** si u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n.
Ex. ✻ On peut définir une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}.$$

► **Suite récurrente d'ordre 2** si u_{n+2} est exprimé en fonction de u_{n+1} et u_n.
Ex. ✻ On définit une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1}.$$

3) Suite définie de façon implicite
u_n est l'unique solution d'un problème (par exemple une équation) où l'entier n est un paramètre.
Ex. ✻ Pour chaque entier $n \geqslant 1$, appelons u_n l'unique solution dans l'intervalle $]0,1]$ de l'équation $(E_n)\ x - \ln(x) = n$. On définit ainsi une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice **1** ► Déterminer les premiers termes de chacune de ces suites.

Dans les trois cas, il faut s'assurer que la suite est bien définie.

1) Pour les suites explicites, il suffit de justifier que l'expression de u_n est valide pour les rangs proposés.
2) Pour les suites récurrentes, on effectuera souvent des raisonnements par récurrence.
3) Pour les suites implicites, il s'agit de justifier l'existence et l'unicité de la solution au problème indiqué.

Démontrer que : « **la suite u est bien définie** »
revient à démontrer que : « **$\forall n \in \mathbb{N}$, le terme u_n existe** ».

Exercice **2** ► Justifier que les suites introduites dans les exemples sont bien définies.

II Suites récurrentes usuelles

II.1 Suites arithmétiques, suites géométriques : rappels

Déf. • Définition des suites arithmétiques et géométriques
Soit u une suite réelle. On dit que :

1) ***u* est une suite arithmétique** quand il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.}$$

2) ***u* est une suite géométrique** quand il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r\, u_n.}$$

Dans les deux cas, r est appelé **raison de la suite arithmétique / géométrique.**

Pour prouver qu'une suite u est arithmétique, on peut donc montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante ; pour prouver qu'elle est géométrique, on peut montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

Propr. • Forme explicite d'une suite arithmétique ou géométrique

1) Si u est une suite arithmétique de raison r, alors

$$\boxed{\begin{array}{rl} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n = u_0 + n\, r, \\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, & u_{p+q} = u_p + q\, r. \end{array}}$$

2) Si u est une suite géométrique de raison r, alors

$$\boxed{\begin{array}{rl} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n = r^n\, u_0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, & u_{p+q} = u_p \times r^q \end{array}}$$

Démo. ⊶ Ces formules sont démontrées par récurrence sur n ou sur q.

Illustration

II.2 Suites arithmético-géométriques

Déf. • Soit u une suite réelle. On dit que ***u* est une suite arithmético-géométrique** quand il existe deux constantes réelles a et b telles que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\, u_n + b.}$$

Rem. ◇ **1)** Si $a = 0$, u est une suite ______________________
2) Si $a = 1$, u est une suite ______________________
3) Si $b = 0$, u est une suite ______________________

Méthode.
Pour expliciter les termes d'une suite arithmético-géométrique dans le cas **non arithmétique ($a \neq 1$)** :

1) Déterminer la suite constante (λ) qui vérifie la même relation de récurrence que u.
2) Introduire la suite $v = (u_n - \lambda)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer, en soustrayant les relations de récurrence pour u et pour λ, que la suite v est géométrique de raison a.
3) Écrire le terme général de la suite v puis revenir à la suite u.

Exercice **3** ► Expliciter le terme général de la suite u vérifiant $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 1$.

II.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Déf. • Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Soit u une suite réelle. On dit que ***u* est une suite récurrente linéaire d'ordre 2** quand il existe deux constantes a et b telles que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n.}$$

Ex. ✻ La **suite de Fibonacci,** définie par

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, en prenant $a = b = 1$.

On peut déterminer la forme explicite de toute suite récurrente linéaire d'ordre 2 grâce au théorème qui suit.

Thm • Forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Soit a et b deux constantes, u une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n.$$

On résout l'**équation caractéristique $r^2 = a\,r + b$ dans $\mathbb{C}$.** Trois cas sont possibles :

1) Si on trouve deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$:
alors il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\,r_1^n + B\,r_2^n.$$

2) Si on trouve une racine double r_0 :
alors il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r_0^n\,(A + B\,n).$$

3) Si on trouve deux racines complexes conjuguées r_1 et $r_2 = \overline{r_1}$:
on écrit r_1 **sous forme trigonométrique** $r_1 = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et alors :
il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n \big(A\cos(n\theta) + B\,\sin(n\theta)\big).$$

Démo. Ce théorème sera démontré dans le cours d'algèbre linéaire.

Une fois le théorème appliqué, la valeur des constantes A et B est déterminée à l'aide des deux premiers termes de la suite u, qui donnent un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Rem. ◇ Si r est une solution de l'équation caractéristique, la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence. Dans le cas complexe, c'est le cas pour la partie réelle et la partie imaginaire de cette suite :

$$\mathrm{Re}(r^n) = \mathrm{Re}(\rho^n\,\mathrm{e}^{in\theta}) = \rho^n\,\cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(r^n) = \mathrm{Im}(\rho^n\,\mathrm{e}^{in\theta}) = \rho^n\,\sin(n\theta).$$

Pour les suites récurrentes, les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jouent le même rôle que les fonctions exponentielles $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ pour les équations différentielles.

***Exercice* 4** ► Déterminer l'expression du terme général des suites u vérifiant :
1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 0,\ u_1 = 1$.
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1,\ u_1 = 1$.
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ et $u_0 = -1,\ u_1 = 1$.

III Suites et inégalités

III.1 Sens de variation

Déf. • Soit u une suite réelle. On dit que :
1) ***u* est croissante** quand : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$;
décroissante quand : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
2) ***u* est monotone** quand u est croissante ou u est décroissante.
3) ***u* est strictement croissante** quand : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$;
strictement décroissante quand : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$;
4) ***u* est strictement monotone** quand u est strictement croissante ou u est strictement décroissante.

Remarques

– Toutes les notions ci-dessus ont une version « à partir du rang n_0 » si l'on remplace $\forall n \in \mathbb{N}$ par $\forall n \geqslant n_0$.
– **Le quantificateur est très important.** « La suite u est croissante » ne se traduit pas par « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » mais par « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

Méthode. Pour étudier les variations d'une suite u, on peut essayer :

► **d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;**
► si $u_n > 0$ pour tout rang n, de **comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;**
► si $u_{n+1} = f(u_n)$ (définition par récurrence), on peut utiliser la monotonie de f ou bien le signe de $x \mapsto f(x) - x$.
► si $u_n = f(n)$ (définition explicite), on peut **étudier les variations de la fonction f** (qu'on peut dériver etc.).

***Exercice* 5** ► Étudier les variations des suites suivantes :
1) $u = (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $x = \left((3n-10)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sigma = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) La suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$.

Une dernière définition :

Déf. • On dit que **la suite *u* est stationnaire** quand u est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n$.

III.2 Écart entre deux nombres réels

Déf. • Soit a et b deux nombres réels. L'**écart entre a et b** est le nombre réel positif $|b-a|$.

Illustration.

L'écart entre a et b est le même que l'écart entre b et a car

$$|b-a| = |-(b-a)| = |a-b|.$$

Propr. • Soit a un réel fixé et δ un réel positif, x un réel. Alors :

1) $|x-a| \leqslant \delta \iff a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta \iff x \in [a-\delta, a+\delta]$.

2) $|x| \leqslant \delta \iff -\delta \leqslant x \leqslant \delta \iff x \in [-\delta, \delta]$.

3) $|x-a| > \delta \iff x > a+\delta$ **ou** $x < a-\delta$

$\iff x \in]-\infty, a-\delta[\cup]a+\delta, +\infty[$.

4) $|x| > \delta \iff x > \delta$ **ou** $x < -\delta \iff x \in]-\infty, -\delta[\cup]\delta, +\infty[$.

III.3 Suites majorées, minorées, bornées

Déf. • Soit u une suite réelle. On dit que :

1) **u est majorée** quand $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$;

2) **u est minorée** quand $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$;

3) **u est bornée** quand ______________________

Propr. • Soit u une suite réelle. Alors u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

Exercice **6** ► Les suites suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ?

$$\sigma = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad u = (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad v = \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} + \sin(n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice **7** ► On reprend la suite récurrente u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$$

ainsi que sa fonction itératrice $f : x \mapsto 1 + \sqrt{x}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a. (une telle solution est appelée un **point fixe de f**)

2) Soit I l'intervalle $[0, a]$. Montrer que **I est stable par f**, c'est-à-dire que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

3) Montrer par récurrence que tous les termes de la suite u se trouvent dans I. Qu'en déduit-on concernant cette suite ?

IV Limite de suites réelles

IV.1 Suites réelles convergentes

Déf. • Suite réelle convergente

Soit u une suite réelle, a un nombre réel (fini).

On dit que **la suite u converge vers a** et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ quand : quel que soit l'intervalle ouvert I contenant a, tous les termes de la suite u se trouvent dans I à partir d'un certain rang.

Illustr. ✐

Ex. ✻ La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (preuve sur les notes de cours).

Exercice **8** ► On suppose que la suite u converge vers 2.

1) Démontrer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang,

2) Peut-on affirmer que $u_n \leqslant 3$ à partir d'un certain rang ? que $u_n \geqslant 2$?

3) Montrer que $|u_n - 2| \leqslant 10^{-50}$ à partir d'un certain rang.

Déf. • Suites convergentes et divergentes

S'il existe un **réel** a tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on dit que **la suite u est convergente.** Sinon on dit que **la suite u est divergente.**

Ex. ✻ La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ; la suite $\sigma = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (preuve sur les notes de cours).

Une suite donnée ne peut pas converger vers deux réels différents.

Propr. • Unicité de la limite
Soit u une suite réelle, a et a' deux réels.
Si on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a'$, alors $a = a'$.

Démo. Sur les notes de cours.

Déf. • Limite d'une suite convergente
Quand u est une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$, on dit que a est **la limite de la suite u** et on note ceci $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a}$ ou encore $\boldsymbol{\lim(u_n) = a}$.

Attention **Ne pas confondre une suite avec sa limite.**

- La suite contient une infinité de termes, sa limite, quand elle existe, est un réel fixé.
- Il faut être soigneux avec le vocabulaire : on peut dire « la suite u tend vers a » ou « la limite de la suite u est égale à a » **mais surtout pas** « la limite de la suite u tend vers a ».
- La plupart du temps, tous les termes d'une suite sont différents de la limite de la suite.

Propr. • Toute suite réelle convergente est bornée.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ La suite $u = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente car elle n'est pas majorée (de même que les autres suites puissances $u = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$).

IV.2 Suites tendant vers l'infini

Déf. • Suites tendant vers l'infini
Soit u une suite réelle.

1) On dit que **la suite u tend vers $+\infty$** et on note $\boldsymbol{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$ quand : quelque soit l'intervalle I de la forme $[A, +\infty[$, tous les termes de la suite u se trouvent dans I à partir d'un certain rang.
2) Même chose pour « **la suite u tend vers $-\infty$** » mais avec les intervalles $]-\infty, B]$.

Illustration

Propr. • Si la suite u tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.
Si la suite u tend vers $-\infty$, alors elle n'est pas minorée.

Démo. Sur les notes de cours.

Par conséquent, une suite ne peut pas à la fois être convergente et tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. On montre également qu'il est impossible qu'une suite tende simultanément vers $+\infty$ et $-\infty$. On peut donc étendre la notion de limite en préservant l'unicité de la limite.

Déf. • Limites infinies d'une suite
Soit u une suite réelle.

1) Quand $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on dit aussi que **$u$ admet pour limite $+\infty$**, ce qu'on note : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.
2) Quand $u_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} -\infty$, on dit aussi que **$u$ admet pour limite $-\infty$**, ce qu'on note : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

IV.3 Limites usuelles

Propr. • Soit λ une constante réelle. Alors :

1) La suite constante $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ ;
2) La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$;
3) Si $|\lambda| < 1$, $\lambda^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
si $\lambda > 1$, $\lambda^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
si $\lambda < -1$, la suite (λ^n) n'est pas bornée et n'a pas de limite,
si $\lambda = -1$, la suite (λ^n) est bornée et n'a pas de limite.
si $\lambda = 1$, la suite (λ^n) est la suite constante égale à 1.

Démo. 1) et 2) sont évidents en utilisant les définitions. Pour les suites géométriques, le cas $\lambda = -1$ a déjà été vu ; le reste sera démontré plus loin, une fois les outils théoriques mis en place.

V Opérations sur les limites de suites

V.1 Caractérisations alternatives des limites

On peut écrire en langage formel le fait qu'une suite u tende vers une limite ℓ, qu'elle soit finie ou infinie. Ceci nous permettra d'établir plus facilement les théorèmes d'opérations sur les limites.

Propr. • Soit u une suite réelle, a une constante réelle. Alors :

1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon.$

2) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$

3) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant B.$

Démo. ⇝ Sur les notes de cours.

Montrer qu'une suite converge vers a revient à démontrer que l'écart de cette suite avec a tend vers 0 :

Propr. • « Retour en zéro »

Soit u une suite réelle, a un réel. Alors

$$\left[\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \,\right] \iff \left[\, u_n - a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \,\right] \iff \left[\, |u_n - a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \,\right].$$

Démo. ⇝ Sur les notes de cours.

On termine en donnant un sens précis à $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^+$ (respectivement a^-).

Déf. • Soit u une suite réelle, $a \in \mathbb{R}$. On dit que **la suite u tend vers a par valeurs supérieures** et on écrit $\boldsymbol{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^+}$ lorsque :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a, \\ u_n > a \ \text{ à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

On définit $\boldsymbol{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^-}$ de manière analogue, en remplaçant $>$ par $<$.

V.2 Théorèmes d'opérations sur les limites

Thm • Théorèmes d'opérations sur les limites finies

Soit u et v deux suites réelles, a, b, λ, μ quatre réels.

1) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |a|$.

2) Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b, \end{cases}$ alors $\lambda\, u_n + \mu\, v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\, a + \mu\, b$.

3) Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b, \end{cases}$ alors $u_n\, v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\, b$.

4) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$.

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Important ✪ Pour étudier la limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$, on l'écrit $u_n \times \frac{1}{v_n}$ et on combine les deux derniers points.

Démo. ⇝ (en partie, sur les notes de cours)

Thm • Généralisation aux limites infinies

Les théorèmes d'opérations sur les limites restent vrais lorsque les limites a et b sont infinies **à condition que la limite proposée dans la conclusion ait un sens dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.** Les formes indéterminées restantes sont les suivantes :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty),$$
$$\frac{1}{0} \ \text{(signe du dénominateur inconnu)}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0^{\pm}}.$$

Enfin, on peut combiner une limite de suite avec une limite de fonction. Ce théorème sera démontré dans le chapitre traitant des limites de fonctions.

Thm • Théorème de composition de limites

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et u une suite à termes dans $\mathscr{D}_f$,
a et ℓ des nombres réels ou bien $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(X) \xrightarrow[X\to a]{} \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

***Exercice* 9** ► Déterminer la limite de la suite u définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

VI Théorèmes généraux concernant les limites de suites

VI.1 Théorèmes de comparaison

Ces théorèmes permettent d'obtenir d'un seul coup l'existence et la valeur de la limite d'une suite. Leurs hypothèses font intervenir des inégalités entre la suite u étudiées et des suites plus simples, dont on connait la limite.

Thm • Théorème d'encadrement (version 1 : théorème des gendarmes)

Soit u, a et b trois suites réelles, ℓ un nombre réel (fini). On suppose que :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$;

2) a et b convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors u est convergente également, et sa limite est aussi ℓ.

Thm • Théorème d'encadrement (version 2 : retour en 0)

Soit u et α deux suites réelles, ℓ un réel. On suppose que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$;

2) $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démo. Sur les notes de cours

Exercice **10** ► Déterminer la limite de la suite S définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Thm • Théorèmes de comparaison

Soit u et v deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

1) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$;

2) Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **11** ► Soit q un réel tel que $q > 1$.

1) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q^n \geqslant 1 + n(q-1)$.

2) En déduire la limite de q^n quand n tend vers $+\infty$.

Remarque. Ces théorèmes fonctionnent aussi si les inégalités ne sont vraies *qu'à partir d'un certain rang.*

VI.2 Théorèmes de limite monotone

Ces théorèmes établissent que les suites monotones admettent toutes une limite. En revanche, ils ne donnent pas la valeur de la limite dans les cas de convergence.

Thm • Théorème de la limite monotone

Soit u une suite réelle.

1) Si la suite u est croissante et majorée, alors elle est convergente.

2) Si la suite u est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Démo. Ce théorème est lié aux propriétés fondamentales de l'ensemble des nombres réels. Dans le cadre de ce cours, nous le considérerons comme un **axiome**, c'est-à-dire comme une propriété fondamentale que l'on admet sans démonstration.

Attention La limite de la suite n'a aucune raison d'être le majorant ou le minorant de l'hypothèse !

Exercice **12** ► Démontrer que la suite récurrente u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$ est convergente.

Exercice **13** ► Démontrer que la suite u dont le n^{e} terme est la solution de l'équation $x - \ln(x) = n$ dans l'intervalle $]0,1]$ est convergente.

Thm • Théorème de la limite monotone pour les suites non majorées

Soit u une suite réelle.

1) Si u est croissante et non majorée, alors $\lim(u_n) = +\infty$;

2) Si u est décroissante et non majorée, alors $\lim(u_n) = -\infty$.

Démo. Se fait en revenant à la définition des limites.

Attention Ce n'est pas parce qu'on échoue à prouver qu'une suite est majorée qu'elle est forcément non majorée.

Remarque. Ces théorèmes fonctionnent aussi quand les suites ne sont monotones *qu'à partir d'un certain rang.*

VI.3 Passage à la limite dans les inégalités

Les théorèmes de limite monotone garantissent l'existence d'une limite mais ne disent rien sur la limite en question. Pour obtenir des informations sur cette limite (trouver un intervalle qui la contient, voire trouver leur valeur), on *passe à la limite dans les inégalités.*

Attention ! Il est interdit de passer à la limite dans des inégalités avant d'avoir prouvé l'existence de toutes les limites.

Thm • Passage à la limite dans les inégalités

Soit u et v deux suites réelles, ℓ et ℓ' deux réels ou bien $\pm\infty$. On suppose que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$,

2) la suite u tend vers ℓ, fini ou infini et v tend vers ℓ' fini ou infini.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Attention **Ce théorème ne fonctionne pas avec des inégalités strictes.**
Contre-exemple : les suites $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{n+1}$. Ces inégalités strictes ne passent pas à la limite : sinon on obtiendrait $\lim(0) < \lim\left(\frac{1}{n+1}\right)$, et on prouverait que $0 < 0$!

Astuce Quand on passe à la limite dans des inégalités, **toutes les inégalités deviennent larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$ exclusivement)**.

Démo. Sur les notes de cours.

Remarque. Ce théorème reste vrai si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang. Il peut également être appliqué à trois suites (ou même davantage !) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Exercice **14** ► (On reprend la suite récurrente étudiée tout au long du cours et on rappelle que sa fonction itératrice f admet un unique point fixe a).
Montrer que $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant a$, et plus généralement que $u_p \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant a$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice **15** ► Dans quel intervalle se trouve la limite de la suite définie implicitement dans le paragraphe précédent ? Trouver ensuite cette limite.

VI.4 Suites adjacentes

Déf. • Suites adjacentes
On dit de deux suites u et v qu'elles sont adjacentes si
1) u est croissante, v est décroissante, et
2) $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice **16** ► Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Propr. • Si les suites u et v sont adjacentes, alors tout terme de la suite u est inférieur à tout terme de la suite v : $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \ u_p \leqslant v_q$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Thm • Théorème des suites adjacentes
Deux suites adjacentes sont toujours convergentes. De plus elles convergent vers la même limite.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Rem. ◇ La limite commune est encadrée par les termes des deux suites :
$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \ u_{n_0} \leqslant \ell \leqslant v_{n_0}$.
Ceci se démontre facilement en passant à la limite dans l'encadrement : $\forall n \geqslant n_0, \ u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant v_{n_0}$.

Exercice **17** ► Montrer que la suite u de l'exercice précédent est convergente. Proposer des encadrements de sa limite.

VII Suites extraites

On dit qu'une suite v est *extraite* d'une suite u si les termes de v ont été obtenus en ne conservant que certains termes de la suite u sans changer leur ordre. Plus précisément, on pose la définition suivante :

Déf. • Suite extraite
Soit u une suite réelle. On dit que **la suite v est une suite extraite de la suite u** quand il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Ex. ✻ **1)** Les suites $v = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de u (en posant respectivement $\varphi : n \mapsto n+1$ et $\psi : n \mapsto n+2$).
2) Les suites $v = (u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite u (en posant respectivement $\varphi : p \mapsto 2p$ et $\psi : p \mapsto 2p+1$). Elles comprennent les termes de rang pair (resp. de rang impair) de la suite u.

La propriété essentielle à retenir concernant les suites extraites est la suivante :

Thm • Limite d'une suite extraite
Si une suite réelle u tend vers une limite ℓ (finie ou infinie), alors toutes les suites extraites de u tendent également vers ℓ.

Démo. ☞ On démontre d'abord le lemme suivant : si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n) \geqslant n$. La propriété s'obtient ensuite facilement en revenant aux définitions formelles des limites, en traitant séparément les limites finies et les limites infinies.

Exercice **18** ► Montrer que la suite récurrente u étudiée tout au long du cours converge vers le point fixe a de l'itératrice f.

Les suites extraites sont souvent utilisées pour prouver simplement qu'une suite n'a pas de limite.

Coroll. • Suites extraites pour prouver l'absence de limite
Soit u une suite réelle. Si u admet deux suites extraites v et w qui ont des limites différentes, alors u n'admet pas de limite.

Démo. ☞ Par l'absurde : si u admettait une limite ℓ, d'après le théorème précédent v et w tendraient toutes les deux vers ℓ ce qui contredit le fait qu'elles aient des limites différentes.

Exercice **19** ► À l'aide de suites extraites, montrer que la suite $\sigma = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

VIII Suites complexes

Déf. • Une **suite complexe** est une application $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On notera comme pour les suites réelles $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même parfois $z = (z_n)$.

Ex. ✻ $(z_n) = (2n - 3n^2\, i)_{n\in\mathbb{N}}, \ (z_n) = \big((1+i)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ (z_n) = \big(e^{in\pi/3}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

À chaque **suite complexe** z sont associées **trois suites réelles :**

1) sa **partie réelle** $u = \big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{z\in\mathbb{N}}$;

2) sa **partie imaginaire** $v = \big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{z\in\mathbb{N}}$;

3) son **module** $\rho = \big(|z_n|\big)_{z\in\mathbb{N}}$.

Déf. • Soit z une suite complexe, $a \in \mathbb{C}$. On dit que **z converge vers a** si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad |z_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

Si un tel a existe, on dit que **la suite z est convergente** et que a est la limite de la suite z. Sinon on dit que **la suite z est divergente.**

Attention ❢ $|\cdot|$ désigne ici le module des nombres complexes et non la valeur absolue des nombres réels.

Rem. ◇ **1)** Une suite complexe ne peut pas tendre vers $\pm\infty$.

2) Comme dans le cas réel, la limite, lorsqu'elle existe, est unique. La preuve se fait comme dans le cas réel car elle repose sur l'inégalité triangulaire, qui est vraie pour le module comme elle l'était pour la valeur absolue.

Propr. • Caractérisation de la limite par partie réelle et partie imaginaire

Soit z une suite complexe, u et v les suites réelles partie réelle et partie imaginaire de z, de sorte que : $\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = u_n + i\, v_n$. Alors :

$$\big[\text{ La suite } z \text{ est convergente }\big] \iff \big[\text{ Les suites } u \text{ et } v \text{ sont convergentes. }\big]$$

En cas de convergence, leur limites vérifient

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \Big(\lim_{n\to+\infty} u_n\Big) + i \Big(\lim_{n\to+\infty} v_n\Big).$$

Démo. ↪ La preuve utilise le fait que $|\mathrm{Re}(z_n - a)| \leqslant |z_n - a|$ et $|\mathrm{Im}(z_n - a)| \leqslant |z_n - a|$.

Ex. ✻ **1)** On a $\frac{n}{2n+1} + \frac{n^2-1}{n^2+n}\, i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} + i$ car la partie réelle tend vers $\frac{1}{2}$ et la partie imaginaire vers 1.

2) La suite $(1 + n\, i)_{n\geqslant 0}$ est divergente car sa partie imaginaire est divergente.

Utiliser le vocabulaire lié aux inégalités est délicat avec les suites complexes car **il n'y a pas d'inégalités entre les nombres complexes.** Ainsi les notions de suites croissantes et décroissantes disparaissent. En revanche on a vu qu'une suite réelle était bornée quand sa valeur absolue était majorée. En remplaçant la valeur absolue par le module, on donne un sens aux suites complexes bornées :

Déf. • Suite complexe bornée

Soit z une suite complexe. On dit que **la suite z est bornée** lorsque son module est une suite (réelle) majorée, autrement dit lorsque :

$$\exists\, K \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| \leqslant K.$$

Ex. ✻ La suite $z = \big(\mathrm{e}^{in\pi/5}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car son module vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \big|\mathrm{e}^{in\pi/5}\big| = 1 \leqslant 1.$$

Propr. • Toute suite complexe convergente est bornée.

Démo. ↪ En utilisant l'inégalité triangulaire pour le module.

Thm • Opérations sur les suites complexes convergentes

Soit z et z' deux suites complexes, a, b, λ, μ quatre nombres complexes.

1) Si $\ z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $\mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a)$, $\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a)$, $\ |z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |a|$.

2) Si $\begin{cases} z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ z'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b, \end{cases}$ alors $\ \lambda\, z_n + \mu\, z'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\, a + \mu\, b$.

3) Si $\begin{cases} z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ z'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b, \end{cases}$ alors $\ z_n\, z'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\, b$.

4) Si $\ z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ **et que $\underline{a \neq 0}$,** alors $\ \frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$.

Rem. ◇ Au dénominateur, on ne peut plus parler de limites nulles par valeurs inférieures/supérieures car il n'y a pas d'inégalités entre nombres complexes.

Propr. • Suites géométriques complexes

Soit q un nombre complexe non réel.

1) Si $|q| < 1$, alors la suite (q^n) tend vers 0 (donc elle est bornée).

2) Si $|q| = 1$, alors la suite (q^n) est bornée mais n'a pas de limite.

3) Si $|q| > 1$, alors la suite (q^n) n'est pas bornée et n'a pas de limite.

Ex. ✻ **1)** Si $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{1}{2^n}\, \mathrm{e}^{in\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) $(1+i)^n$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$, et

$$|(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{donc cette suite n'est pas bornée.}$$

3) La suite $u = (i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $(1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ \ldots)$. Elle est périodique de période 4. Les suites extraites (u_{4n}) et (u_{4n+1}) ont pour limites respectives 1 et i, donc la suite u n'a pas de limite.
Plus généralement, aucune suite $(\mathrm{e}^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, n'admet de limite.