Propriétés des nombres réels

I Ensembles usuels de nombres

Il n'est pas aisé de donner un sens précis à la notion de nombre réel. Nous retiendrons simplement l'idée suivante.

On considère d une droite munie de deux points distincts O et I. **Les nombres réels sont des objets mathématiques permettant de représenter la position de tout point de la droite d.** Plus précisément, la distance OI est l'unité de référence. Si M est un point de d, le réel x associé au point M représente :

- La distance OM lorsque M et I sont du même côté par rapport à O ;
- L'opposé de la distance OM lorsque M et I sont de part et d'autre de O.

x et y étant deux nombres réels, on dit que $\boldsymbol{x \leqslant y}$ lorsque les points correspondants M et N sont ou bien confondus, ou bien disposés sur la droite d dans le même sens que O et I.

Parmi les nombres réels, on distingue certains types de nombres particuliers :

- Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- Un **entier relatif** est un nombre entier de signe quelconque. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.
- Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire $\frac{p}{10^n}$ où p est un entier relatif et n un entier naturel. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Illustr. ✐ Représentation des différents ensembles de nombres sur la droite réel (cf. notes de cours)

Propr. • Forme irréductible d'un nombre rationnel

Tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ peut s'écrire de façon unique $x = \frac{p}{q}$ où :

- p est un entier relatif ;
- q est un entier naturel non nul ;
- $|p|$ et q n'ont aucun diviseur commun supérieur à 2.

Cette écriture est appelée **forme irréductible de x.**

Méthode ✐ Quand un rationnel x n'est pas sous forme irréductible, on peut obtenir cette somme en déplaçant le signe moins éventuel sur le numérateur et en divisant numérateur et dénominateur par leur pgcd.

Propr. • On a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Toutes ces inclusions sont strictes car :

- -1 se trouve dans $\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{N}$;
- $\frac{1}{10}$ se trouve dans $\mathbb{D}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$;
- $\frac{1}{3}$ se trouve dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{D}$;
- $\sqrt{2}$ se trouve dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

II Partie entière et valeurs approchées d'un réel

II.1 Partie entière

Déf. • Partie entière

Soit x un nombre réel. La **partie entière de x** est le plus grand entier relatif (relatifs) qui est inférieur ou égal à x.

Illustr. ✐

Rem. ◇ On peut rencontrer d'autres notations pour partie entière de x : $\mathrm{E}[x]$, $[x]$...

Ex. ✻ $\lfloor 2{,}12 \rfloor =$, $\lfloor 7 \rfloor =$, $\lfloor -1{,}02 \rfloor =$, $\lfloor -5 \rfloor =$.

Propr. • Propriétés caractéristiques de la partie entière

Soit x un nombre réel. Alors :

1) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$;

2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$;

3) Si n est un nombre <u>entier</u> tel que $n \leqslant x < n+1$, alors $n = \lfloor x \rfloor$.

Démo. ✐ (sur les notes de cours)

Attention ! La partie entière se comporte plutôt mal avec les opérations.

Ex. ✻ Contre-exemples avec partie entière de l'opposé, d'une somme, d'un produit de deux réels, du produit par un entier.

On peut voir “partie entière” comme une fonction $\mathrm{E}\colon x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Sa courbe représentative a l'allure suivante :

On remarque en particulier que

II.2 Valeurs approchées d'un nombre réel

Il arrive souvent qu'un nombre réel a^* intéressant (parce qu'il est solution d'une équation, parce que c'est une limite de suite...) ne puisse s'exprimer simplement à l'aide des opérations usuelles. Pour le décrire, on a recours à ses *valeurs approchées a,* qui seront quant à elles de nombres « simples » (rationnels voire décimaux).

Déf. • Valeurs approchées d'un réel

Soit a^* et a deux nombres réels, p un réel strictement positif. On dit que

1) ***a* est une valeur approchée de a^* à la précision *p*** si $|a - a^*| \leqslant p$;

2) ***a* est une valeur approchée de a^* <u>par défaut</u> à la précision *p*** si $a \leqslant a^* \leqslant a + p$;

3) ***a* est une valeur approchée de a^* <u>par excès</u> à la précision *p*** si $a - p \leqslant a^* \leqslant a$.

Ex. ✻ **1)** 3 est une valeur approchée de π à près par ,
3,14 est une valeur approchée de π à près par ,
3,1416 est une valeur approchée de π à près par ,
3,4 est une valeur approchée de π à près par .

2) $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$ sont des valeurs approchées de x à 1 près (respectivement par défaut et par excès).

Important ✪ **1)** Il faut **<u>toujours</u>** donner la précision d'une valeur approchée.

2) Le nombre $|a - a^*|$ est l'**erreur commise en approchant a^* à l'aide de a.** Cette erreur est majorée par la précision.

3) Plus la précision est proche de 0, meilleure est la qualité de l'approximation.

***Exercice* 1** ► **1)** Déterminer une approximation a de $\frac{1}{10}$ par défaut à $\frac{1}{2^8}$ près qui s'écrive $k\,2^{-8}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Est-elle unique ? Écrire a en base 2.

2) Recommencer à la précision $\frac{1}{2^{16}}$ près. Que remarque-t-on ?

Idée à retenir : quand une suite réelle est convergente, les termes de la suite fournissent des valeurs approchées de la limite ; plus le rang du terme est élevé, meilleure est la précision de l'approximation.

Déf. • Approximations décimales

Une **approximation décimale d'un réel a_0** est une approximation de a_0 où

- le nombre a approchant a_0 est un nombre décimal ;
- la précision p est de la forme 10^{-n} où $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 2** ► Déterminer des approximations décimales de $\frac{22}{7}$ à 10^{-7} près.

Propr. • Valeurs décimales approchées par excès et par défaut

Soit a_0 un réel quelconque, n un entier naturel.

1) Le nombre $10^{-n}\lfloor 10^n a_0 \rfloor$ est une valeur approchée décimale de a_0 par défaut à la précision 10^{-n} ;

2) Le nombre $10^{-n}\left(\lfloor 10^n a_0 \rfloor + 1\right)$ est une valeur approchée décimale de a_0 par excès à la précision 10^{-n}.

Démo. ✐ (sur les notes de cours)

III Ensembles de nombres et inégalités

Dans ce paragraphe, on étudie des *parties de* $\mathbb{R}$, autrement dit des sous-ensembles A de $\mathbb{R}$. Ce sont des ensembles dont les éléments sont des nombres réels.

III.1 Majorants, minorants d'un ensemble

Déf. • Majorants et minorants d'un ensemble

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux nombres réels.

1) On dit que **M est un majorant de l'ensemble A** quand M est plus grand que tous les éléments de A :

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M.$$

2) On dit que **m est un minorant de l'ensemble A** quand m est plus petit que tous les éléments de A :

$$\forall x \in A, \quad x \geqslant m.$$

Exercice **3** ► Dire si les ensembles suivants admettent des majorants ou des minorants :

$$[-1,2], \quad [2,+\infty[, \quad [-1,2[, \quad A=\{2,5,-1,3\},$$
$$B=\left\{\tfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}, \quad C=\left\{1+\tfrac{t}{2}-t\cos(t),\ \ t\in[0,2\pi]\right\}.$$

Remarque. Majorants et minorants, quand ils existent, ne sont pas uniques. On dit donc $\boxed{\textbf{un}}$ majorant et non **le** majorant.

Déf. • Parties minorées, majorées, bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1) On dit que **A est un ensemble majoré** quand A admet un majorant.

2) On dit que **A est un ensemble minoré** quand A admet un minorant.

3) On dit que **A est un ensemble borné** quand A admet un majorant et un minorant.

Propr. • Utilisation de valeurs absolues

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$A \text{ est un ensemble borné} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists K \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ \ |x| \leqslant K.$$

Démo. ⟿ Immédiate : exercice.

III.2 Maximum et minimum d'un ensemble

Déf. • Maximum et minimum d'un ensemble

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels.

1) On dit que M est le maximum de A quand M est un élément de A qui est plus grand que tous les autres :

$$\begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, \quad x \leqslant M. \end{cases}$$

Quand il existe, le maximum de A est noté $\mathrm{Max}(A)$.

2) On dit que m est le minimum de A quand m est un élément de A qui est plus petit que tous les autres :

$$\begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, \quad x \geqslant m. \end{cases}$$

Quand il existe, le minimum de A est noté $\mathrm{Min}(A)$.

Exercice **4** ► Reprendre les exemples de l'exercice précédent, sauf C, et dire s'ils ont un maximum et un minimum.

Un maximum est en particulier un majorant, et un minimum est un minorant.

On dit **le** maximum (ou minimum) d'un ensemble car quand il existe, il est unique (démonstration sur les notes de cours).

Tous les ensembles n'ont pas de minimum et de maximum, mais certains types d'ensembles en ont toujours.

Thm • Parties admettant un minimum / un maximum

1) Toute partie finie et non vide de $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.

2) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

3) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum,
toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Démo. ⟿ Le premier point peut se montrer par récurrence sur le cardinal de la partie. Le deuxième point est un axiome de l'ensemble $\mathbb{N}$: on ne cherchera pas à le démontrer. Le dernier peut se démontrer en utilisant les deux précédents.

Illustration.

III.3 Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble

Déf. • Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux nombres réels.

1) On dit que **M est la borne supérieure de A** quand M est le plus petit majorant de A.
Quand elle existe, la borne supérieure de A est notée **sup(A).**

2) On dit que **m est la borne inférieure de A** quand m est le plus grand minorant de A.
Quand elle existe, la borne inférieure de A est notée **inf(A).**

Attention ! Toutes les parties n'admettent pas de borne supérieure ou inférieure.

Exercice **5** ► Étudier les bornes supérieures et inférieures des ensembles $[0,1]$, $[0,1[$, $[2,+\infty[$ et $B=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Propr. • Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1) La borne supérieure (resp. inférieure) de A, lorsqu'elle existe, est unique.

2) Si A admet un maximum (resp. un minimum), ce maximum est aussi la borne supérieure (resp. inférieure) de A.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Caractérisation formelle des bornes supérieures et inférieures

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux nombres réels. Alors :

1) M est la borne supérieure de A si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x\in A, \quad x\leqslant M, \\ \forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A, \quad M-\varepsilon<x. \end{cases}$$

2) m est la borne inférieure de A si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x\in A, \quad x\geqslant m, \\ \forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A, x<M+\varepsilon. \end{cases}$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **6** ► En utilisant cette caractérisation, démontrer que $\inf\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=0$.

Comme pour les maximums et minimums, certaines parties de $\mathbb{R}$ admettent toujours une borne supérieure. C'est l'objet du théorème suivant.

Thm • Théorème de la borne supérieure

1) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

2) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démo. Ce théorème peut se démontrer en construisant deux suites adjacentes, l'une dont aucun terme n'est un majorant de A et l'autre dont tous les termes en sont. On les construit par récurrence en procédant par dichotomie. On démontre ensuite que la limite commune à ces deux suites est bien la borne supérieure de A.
Ce théorème s'appuie donc sur le théorème des suites adjacentes, qui reposent lui-même sur le théorème de la limite monotone. En fait ces deux théorèmes se déduisent l'un de l'autre : on aurait pu admettre le théorème de la borne supérieure et l'utiliser pour prouver le théorème de la limite monotone.

Le théorème de la borne supérieure ne serait pas vrai si l'on ne travaillait qu'avec les nombres de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres rationnels. Or il se trouve qu'il est à la source de toute l'analyse : c'est grâce à lui qu'on justifie l'existence des nombres $\sqrt{2}$, π ou e, que le théorème des valeurs intermédiaires est vrai etc.

Exercice **7** ► Justifier que $C=\left\{1-\frac{t}{2}-t\cos(t),\ t\in[0,2\pi]\right\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.