Études de fonctions

Entraînement

▷ 1 Dérivées de fonctions rationnelles

Calculer les dérivées de fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto 2x^4$,

2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$,

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x-5}$,

4) $f_4 : x \mapsto (2x^2+3x+1)^3$,

5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{x-1}{(x^2+2)^2}$,

6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{(2x+1)^p}{(x-1)^q}$,

où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

▷ 2 D'autres dérivées

Étudier le domaine de définition, la dérivabilité de f et calculer f' pour les fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto e^{x^2-x}$

2) $f : x \mapsto (\cos x - 1)^5$

3) $f : x \mapsto \ln(x^2-5x+8)$

4) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x-2}$

5) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$

6) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$

7) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln x}$

8) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$.

▷ 3

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, déterminer où elles sont dérivables et les dériver :

1) $x \mapsto x^{\pi}$

2) $x \mapsto 2^x$

3) $x \mapsto x^x$

4) $x \mapsto (x^2-x-1)^{5/4}$,

5) $\alpha \mapsto 2^{3-\alpha^2}$,

6) $t \mapsto (1-t^2)^{1-e^2/2}$,

7) $x \mapsto (1-x^2)^{4-\ln(x)}$.

► 4 Croissances comparées

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7-2x^5+\sqrt{x}}{x^3-2}$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(x^7+\ln x+1)$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x^2}$,

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x}}$,

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x-x+1)$,

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^5 \ln(x^2)$,

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}-(\ln x)^2$,

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x\cdot x^x}$.

► 5

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+x^{3/4}}{1-3x}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminez les asymptotes à la courbe de f.

► 6

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x}$.

1) Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique dont vous préciserez l'équation.

2) Étudiez la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote. Quelle est l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$?

3) Menez l'étude au voisinage de $-\infty$.

Études globales de fonctions

► 7 Plan d'étude d'une fonction

Mener l'étude complète des fonctions suivantes :

1) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-3t-4}$,

2) $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$,

3) $x \mapsto x+2-2\sqrt{x+1}$,

4) $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+4}$.

► 8

Mener l'étude complète des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto (x-1)e^x+1$,

2) $u \mapsto \dfrac{1}{u^{2/3}}-\dfrac{1}{u^{3/2}}$,

3) $t \mapsto (t+1)\ln(t+1)-t$,

4) $u \mapsto \dfrac{u}{1+e^u}$.

► 9

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{2x+1}}$.

Équations et inégalités

▷ 10

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3\ln(x) - x^2 + 5x$ pour tout $x > 0$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer le nombre de solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$.

► 11

Déterminer combien les équations suivantes, d'inconnue x réelle, ont de solutions. Proposer des encadrements de ces solutions.

1) $x^3-6x^2+2x+1=0$,

2) $x\,e^x = 1$,

3) $x = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

4) $x\ln(x+1) = 2$.

► 12

Soit $g: x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de g et dresser son tableau de variation.

2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \alpha$, pour $\alpha = 1{,}2$ puis $\alpha = 1$ et enfin $\alpha = \frac{1}{2}$ (on donne $e^{1/e} \simeq 1{,}44$).

► 13

Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$,

2) $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) \leqslant \sqrt{x}$,

3) $\forall x > -1, \quad \frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,

4) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x) \leqslant x$,

5) $\forall t \in [0, \pi], \quad \sin^2(t) \leqslant \frac{4}{\pi^2} t(\pi - t)$,

6) $\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \ln\big(1 + \cos(x)\big) \leqslant \ln(2) - \frac{x^2}{4}$.

► 14 Inéquations et équations à l'aide de fonctions

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

2) Résoudre l'équation $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Équations et inéquations algébriques

► 15 Avec exponentielles, logarithmes...

Déterminer l'ensemble de définition des équations suivantes, d'inconnue x, puis déterminer leur ensemble $\mathscr{S}$ des solutions.

1) $e^{x-3} = e^{4x+3}$,

2) $e^{2x} + 4e^x - 12 = 0$,

3) $e^{3x} - 2e^{2x} = 0$,

4) $\ln(2x+1) - 3 = 0$,

5) $\ln(x+1) = \ln(3x+5)$,

6) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$,

7) $2^{x+1} = 3^{2x-3}$,

8) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

► 16

Mêmes questions pour les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} - 3e^x > 0$,

2) $(4\ln(x) + 2)(x-1) < 0$,

3) $\ln^2(x) \geqslant \ln(x)$,

4) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2 - 1)$,

5) $5^{x+1} \leqslant 5^{2x+3}$

6) $(e-2)^x > 10$

7) $e^{\frac{1}{x-1}} = e^{2x+1}$,

8) $\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geqslant 0$.

► 17

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

► 18

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le domaine de définition des équations et inéquations suivantes plus les résoudre :

1) $|2x-5| = \left|x^2 - 4\right|$

2) $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$

3) $\sqrt{|x-3|} \leqslant x - 1$

4) $\sqrt{x-1} \geqslant x - 7$.

5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 2$.

Études de fonctions et géométrie

▷ 19

Tracez l'allure de la courbe de chaque fonction suivante. Vous partirez d'une courbe de fonction usuelle à laquelle vous appliquerez les transformations géométriques appropriées de manière à tracer la courbe de la fonction demandée.

1) $x \mapsto \ln(x) + 2$

2) $x \mapsto 2 - e^x$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{2} x^2$

4) $x \mapsto (x+2)^3$

5) $x \mapsto \sqrt{x-1}$

6) $x \mapsto \dfrac{1}{1+2x}$

7) $x \mapsto 2\ln(1-x)$

8) $x \mapsto 1 - \left|\dfrac{x}{2} - 1\right|$

9) $x \mapsto \sqrt{1-2x} - 1$

10) $x \mapsto 2e^{x/3}$

► 20

Déterminer toutes les droites se trouvant au-dessus de la courbe représentative de la fonction ln.

► 21 Étude de tangentes à la courbe

On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Montrer que le point A de coordonnées $(1, 0)$ est l'unique point de $\mathscr{C}$ dont la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

► 22 Tangente commune à deux courbes usuelles

Soit $\mathscr{L}$ la courbe de la fonction ln et $\mathscr{E}$ la courbe de la fonction exponentielle. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Donnez une équation de la tangente à $\mathscr{E}$ au point d'abscisse a et une équation de la tangente à $\mathscr{L}$ au point d'abscisse λ.

2) Déterminer λ en fonction de a pour que ces deux tangentes soient parallèles.

3) Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ces deux tangentes soient confondues.

On introduit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1} e^x$.

4) Montrez que l'équation $f(x) = 1$ d'inconnue $x \neq -1$ admet exactement deux solutions.

5) Combien les courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$ ont-elles de tangentes communes ?

► 23 Constructions sur une parabole

Soit Γ la parabole d'équation $y = x^2$, A le point de coordonnées $(1, 0)$.

1) Déterminez le point de Γ qui est le plus proche de $B(0, 1)$.

2) Soit M le point de Γ d'abscisse $t \in \mathbb{R}^*$. La tangente en M à Γ couple l'axe (Ox) en P. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur t pour que P appartienne au segment $[OA]$.

3) En supposant être dans les conditions de la question précédente, la tangente en M à Γ coupe aussi la droite d'équation $x = 1$ au point Q. Déterminez le point M tel que l'aire du triangle APQ soit maximale.