# *Études de fonctions*

## I Plan d'étude d'une fonction

### I.1 Notion de fonction. Domaine de définition.

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un procédé permettant d'associer à certains nombres réels un autre nombre réel. Une telle fonction est, la plupart du temps, donnée par une **règle d'association** de la forme

$$f: \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} \text{expression} \\ \text{dépendant de } x \end{pmatrix}.$$

Dans cette écriture, $f$ est le **nom de la fonction,** et l'« expression dépendant de $x$ » est notée $\boldsymbol{f(x)}$**.**

Par exemple, l'écriture $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2 - 2$ définit la fonction $f$, qui associe à tout réel $x$ le réel $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 - 2$. Le nombre 5 est transformé par la fonction $f$ en $\mathrm{e}^5 + 23$ ; on écrit donc $f(5) = \mathrm{e}^5 + 23$.

Attention ❢ **On ne dit pas « la fonction $f(x)$ » mais « la fonction $f$ ».** Ainsi, on ne peut pas dire « la fonction $x^2 + 1$ ». On dira en revanche « la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ » (ce qui se lit « $x$ donne $x^2 + 1$ »).

Rem. ⋄ Une règle d'association peut être réécrite en choisissant une autre lettre pour la variable. On dit que **la variable est muette.** Ainsi, toutes les écritures suivantes :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2 - 2 \quad \text{et} \quad t \longmapsto \mathrm{e}^t + t^2 - 2 \quad \text{mais aussi (!)} \quad f \longmapsto \mathrm{e}^f + f^2 - 2$$

désignent la **<u>même</u>** fonction.

Il arrive souvent que l'expression $f(x)$ n'existe pas pour toutes les valeurs de $x$. La première étape de l'étude d'une fonction consiste donc à déterminer les réels $x$ pour lesquels $f(x)$ existe.

**Déf.** • Domaine de définition d'une fonction
Le **domaine de définition d'une fonction $f$** est l'ensemble des réels $x$ pour lesquels l'expression $f(x)$ existe. On le note $\mathscr{D}_f$.

***Exercice* 1** ► Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

**1)** $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$, **3)** $u : x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{x-4}}$,

**2)** $g : x \mapsto \sqrt{x^3 - x^2 - 6x}$, **4)** $v : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$.

### I.2 Images et antécédents

**Déf.** • Image et antécédents
Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**1)** Soit $x$ un réel appartenant au domaine de définition de $f$.
**<u>L'</u>image de $x$ par $f$** est le nombre réel $f(x)$.

**2)** Soit $t$ un réel quelconque.
**<u>Un</u> antécédent de $t$ par $f$** est un réel $x$ tel que $f(x) = t$.

**Représentation graphique**

Rem. ⋄ Un réel $x$ admet 0 ou 1 image par une fonction $f$ donnée. Un réel $t$ peut admettre 0, 1, plusieurs, voire une infinité d'antécédents par une fonction $f$.

Méthode ✎ Chercher l'image de $a$ par $f$, c'est *calculer* $f(a)$. Chercher le(s) antécédent(s) de $a$ par $f$, c'est *résoudre l'équation* $f(x) = a$ d'inconnue $x$.

***Exercice* 2** ► Soit $\varphi : x \mapsto 4\sqrt{1 - x^2}$. Est-ce que 2 admet des images par $\varphi$ ? Des antécédents ?

**Déf.** • Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**1)** On dit que **$f$ est définie sur l'intervalle $I$** lorsque $f(x)$ existe pour tout $x$ appartenant à $I$, autrement dit quand

$$\forall x \in I, \ \ x \in \mathscr{D}_f \quad \text{ou encore} \quad I \subset \mathscr{D}_f.$$

**2)** On dit que **$f$ est à valeurs dans l'intervalle $J$** lorsque $f(x)$ appartient à $J$ pour tout réel $x$ appartenant au domaine de définition de $f$ :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \in J.$$

**Représentation graphique :**

Attention **Ne jamais confondre ces deux notions.** La première concerne la variable $x$ de la fonction, la deuxième son image $f(x)$ par la fonction.

*Exercice* **3** ► Quand on dit que « la racine carrée d'un réel est toujours positive », que dit-on concernant la fonction racine carrée ?

*Exercice* **4** ► Proposez plusieurs intervalles sur lesquels la fonction $f : 1-\sqrt{2x-1}$ est définie. Montrez que $f$ est à valeurs dans $]-\infty, 1]$. Est-ce que d'autres intervalles peuvent convenir ?

## I.3 Variations d'une fonction

Une fonction étant donnée, on souhaite savoir sur quels intervalles la fonction $f$ est croissante, décroissante etc. L'outil mathématique le plus couramment utilisé pour répondre à cette question est la **dérivation.**

### I.3.1 Dérivation sur un intervalle ; opérations sur les fonctions

*Nous rappellerons dans le paragraphe I.3.3 ce que signifie pour une fonction « être dérivable en un point » ainsi que l'interprétation graphique associée. Nous nous concentrerons pour l'instant sur l'aspect calculatoire.*

Avant de se lancer dans un calcul de dérivée, il faut se poser la question : **« la fonction est-elle dérivable sur la totalité de son domaine de définition ? »**. La plupart du temps, la réponse sera « oui ». Pour l'instant, nous nous contenterons du principe informel suivant :

Lorsqu'une fonction est fabriquée à partir de fonctions usuelles **autres que la racine carrée, les fonctions puissance $\alpha$ avec $0<\alpha<1$ et la fonction valeur absolue,** cette fonction est dérivable sur la totalité de son domaine de définition.

Ex. ✻ Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{2+\ln(x^2+x-1)}{1-x^2}$ est dérivable sur la totalité de son domaine de définition. En revanche $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x-1}$ pose des problèmes à ce sujet à cause de la racine carrée ; nous verrons plus bas comment les traiter.

Rem. ◇ D'autres fonctions « problématiques » viendront s'ajouter à la racine carrée et aux puissances non entières au cours de cette année, en particulier les fonctions trigonométriques réciproques arc-cosinus et arc-sinus.

Une fois ceci fait, on part de la connaissance des dérivées usuelles et on utilise les formules d'opérations sur les dérivées pour obtenir la dérivée de la fonction. On rappelle les dérivées à connaître :

| Fonction $f$ | $f(x)$ | définie sur | à valeurs dans | non dérivable en | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Puissances entières | $x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | — | $n\,x^{n-1}$ |
| | $\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | — | $-n\,x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| Puissances non entières | $x^\alpha$ ($0<\alpha<1$) | $[0,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | 0 | $\alpha\,x^{\alpha-1}$ |
| | $x^\alpha$ ($\alpha>1$) | $[0,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | — | $\alpha\,x^{\alpha-1}$ |
| | $x^\alpha$ ($\alpha<0$) | $]0,+\infty[$ | $]0,+\infty[$ | — | $\alpha\,x^{\alpha-1}$ |
| Racine carrée | $\sqrt{x}$ | $[0,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | 0 | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| Exponentielle | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $]0,+\infty[$ | — | $e^x$ |
| Logarithme | $\ln(x)$ | $]0,+\infty[$ | $\mathbb{R}$ | — | $\dfrac{1}{x}$ |
| Cosinus | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $[-1,1]$ | — | $-\sin(x)$ |
| Sinus | $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $[-1,1]$ | — | $\cos(x)$ |
| Valeur absolue | $\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}$ | $[0,+\infty[$ | 0 | $-\sin(x)$ |

Astuce ➽ Toutes les fonctions puissances se dérivent à l'aide de la même formule :

$$\frac{\mathrm{d}(x^\alpha)}{\mathrm{d}x} = \alpha\,x^{\alpha-1}.$$

Pour dériver $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, on remarque que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et on utilise la formule précédente en remplaçant $\alpha$ par $-n$.

Pour fabriquer d'autres fonctions que les fonctions usuelles, on combine ces dernières à l'aide d'**opérations sur les fonctions.** Rappelons ces opérations.

**Déf.** • Opérations sur les fonctions

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\lambda$ une constante.

**1)** Le **produit de $f$ par $\lambda$**, noté $\lambda f$, est la fontion $x \mapsto \lambda f(x)$.
Il est défini sur $\mathscr{D}_f$.

**2)** La **somme de $f$ et $g$**, notée $f+g$, est la fonction $x \mapsto f(x)+g(x)$.
Elle est définie sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

**3)** Le **produit de $f$ et $g$**, noté $f\,g$, est la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$.
Il est défini sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

**4)** Le **quotient $f$ par $g$**, noté $\dfrac{f}{g}$, est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Il est défini sur l'ensemble des réels $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $g(x) \neq 0$.

On peut ensuite utiliser les formules d'opérations sur les dérivées :

Thm • Opérations sur les dérivées

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur la totalité de leur domaine de définition, $\lambda$ une constante.
Alors les fonctions $\lambda f$, $f+g$, $f\,g$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur la totalité de leur domaine de définition et on a

$$(\lambda f)' = \lambda f' \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$
$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}.$$

Attention ❢ Le symbole prime ($'$) est réservé aux fonctions. Toutefois, en pratique, on dérive des expressions dépendant d'une variable. On introduit une autre notation utile au calcul :
**Quand la variable s'appelle $x$, on pourra écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$ en remplacement de $f'(x)$.**
Par exemple :
- On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$ **mais pas** $(2x)' = 2x$.
- On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\,\sin(x)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\,\sin(x) + x\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(x)\big) = \sin(x) + x\,\cos(x).$

Évidemment, quand la variable s'appelle $t$, on utilisera $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ etc.

*Exercice* **5** ► Dériver les fonctions suivantes en précisant où elles sont dérivables :

$$f : x \mapsto (3x^2 - x)\,\ln(x), \quad g : x \mapsto \frac{1}{2+\sin(x)}, \quad h : x \mapsto \frac{x-1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On introduit une nouvelle opération sur les fonctions : la **composition.** On dit que l'on compose deux fonctions quand on applique l'une des deux fonctions au résultat fourni par l'autre.

Déf. • Composée de deux fonctions

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **composée de $g$ par $f$** et on note $\boldsymbol{g \circ f}$ (notation qui se lit « $g$ rond $f$ ») la fonction $x \mapsto g\big(f(x)\big)$.
Elle est définie sur l'ensemble des $x \in \mathscr{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathscr{D}_g$.

D'après la définition, on aura donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

**Illustration :**

*Exercice* **6** ► Déterminer le domaine de définition et la règle d'association des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ lorsque :

**1)** $f : x \mapsto 3x$ et $g : t \mapsto \sin(t)$,

**2)** $f : t \mapsto \mathrm{e}^t + 1$ et $g : X \mapsto X^4$,

**3)** $f : x \mapsto \ln(x) - 1$ et $g : r \mapsto \sqrt{r}$.

Voyons comment dériver des fonctions composées dans les cas simples.

Thm • Théorème de dérivation des fonctions composées

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur la totalité de leur domaine de définition.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur la totalité de son domaine de définition et on a

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'.$$

Écrite avec des expressions, cette formule devient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\, g\big(f(x)\big)\Big] = g'\big(f(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big).$$

*Exercice* **7** ► Soit $u$ une fonction dérivable sur son domaine de définition. Dériver les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln\big(u(x)\big), \quad x \mapsto \cos\big(u(x)\big), \quad x \mapsto \big(u(x)\big)^n.$$

*Exercice* **8** ► Dériver les fonctions suivantes :

$$u:\ x \longmapsto \sin\!\left(3x - \tfrac{\pi}{6}\right), \qquad \varphi:\ x \longmapsto \big(2x + \ln(2x+1)\big)^3,$$
$$v:\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}, \qquad \psi:\ t \longmapsto \frac{1}{(t^2-1)^4}.$$

### I.3.2 Détection des points « spéciaux »

Que faire lorsque certaines fonctions intervenant dans le calcul ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition complet ?

**1)** On repère les fonctions $\varphi$ qui ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition complet ;

**2)** On rappelle en quel(s) point(s) $a$ la fonction $\varphi$ n'est pas dérivable ;

**3)** On détermine pour quelle(s) valeur(s) de la variable $x$ l'argument de la fonction $\varphi$ vaut $a$.

Les valeurs de $x$ qu'on obtient ainsi seront appelées de **points « spéciaux ».**

– En un point spécial, **on ne sait pas si la fonction est dérivable ou non.** Pour trancher la question, il faut étudier ces points individuellement (cf. paragraphe suivant).
– En tous les autres points, la fonction est dérivable **de façon certaine.**

***Exercice* 9** ► Déterminer les éventuels points spéciaux des fonctions suivantes :

$$u:\ x\mapsto\sqrt{2x-1},\qquad v:\ x\mapsto\sqrt{x^3-2x^2+x},\qquad w:\ x\mapsto\sqrt{1+x^2}.$$

### I.3.3 Nombre dérivé en un point

Pour savoir si une fonction est dérivable ou non en un point spécial, on revient à la définition de la dérivabilité en un point.

Déf. • Nombre dérivé en un point

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a$ un point de $\mathcal{D}_f$.

**1)** On dit que $f$ **est dérivable en** $a$ lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **finie** lorsque $x$ tend vers $a$.

**2)** Quand c'est le cas, on appelle **nombre dérivé de $f$ en $a$** la limite obtenue. On la note $\boldsymbol{f'(a)}$.

► **Pour étudier un point spécial $a$ :**

**1)** On écrit le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ;

**2)** On effectue le changement de variable :

$$\begin{cases} h=x-a & \text{quand } x\to a \text{ ou } x\to a^+,\\ h=a-x & \text{quand } x\to a^-.\end{cases}$$

**3)** On détermine sa limite quand $h$ tend vers 0 (ou $0^+$), qui est la même que la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand $x$ tend vers $a$.

Cette dernière limite sera *toujours* une forme indéterminée. Il faudra modifier son expression en vue de lever l'indétermination (voir la partie sur le calcul de limites).

***Exercice* 10** ► Déterminer si les fonctions $f:x\mapsto\sqrt{x+2}$ et $g:x\mapsto x\sqrt{x}$ sont dérivables en leurs points spéciaux.

## I.4 Tableau de variations et limites

### I.4.1 Monotonie et signe de la dérivée

► **Étude d'un exemple :** Variations de la fonction $f:x\mapsto\sqrt{\frac{x^2}{x-1}+x}$.

Le sens de variation d'une fonction est très directement lié au signe de sa dérivée, comme on le rappelle dans le théorème suivant.

Thm • Monotonie et signe de la dérivée

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Alors :

**1)** Si $f'=0$ sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.
**2)** Si $f'\geqslant 0$ sur $I$, alors $f$ est croissante sur $I$.
**3)** Si $f'>0$ sur $I$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
**4)** Si $f'\leqslant 0$ sur $I$, alors $f$ est décroissante sur $I$.
**5)** Si $f'<0$ sur $I$, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Les théorèmes permettant d'obtenir la stricte croissance ou la stricte décroissance (ce qui nous intéresse habituellement !) peuvent même être généralisés :

Thm • Si $f$ est une fonction continue sur $I$, que $f$ est dérivable sur $I$ **privé d'un nombre fini de points** et que $f'>0$ sur cet ensemble, alors $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$ **tout entier.** De même, si $f'<0$ sur cet ensemble, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Ce sont ces théorèmes qui permettent de dresser le tableau de variation d'une fonction en étudiant sa dérivée. En pratique :

**1)** On étude la dérivabilité d'une fonction et on calcule sa dérivée ;
**2)** On détermine où la dérivée **s'annule** ;
**3)** On obtient le signe de la dérivée en **calculant une valeur de $f'(x)$ dans chaque intervalle délimité par les annulations.**

Cette façon de faire est légitime dès que la dérivée $f'$ est une fonction continue. Ce sera presque toujours le cas en pratique.

### I.4.2 Étude des limites

Une fois le tableau de variation de la fonction dressé, il convient d'y ajouter les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition :

– Si la borne appartient au domaine de définition, comme la fonction étudiée sera quasiment toujours continue en ce point, il suffit d'indiquer la valeur de la fonction en ce point ;
– Si la borne n'appartient pas au domaine, il faut mener une étude de limite.

Les **théorèmes d'opérations sur les limites** constituent l'outil le plus simple pour déterminer une limite.

Thm • Théorème d'opérations sur les limites

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un même intervalle $I$,
$a$ un point de $I$ ou une borne de $I$ (éventuellement infinie).
On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$.

**1)** Pour la limite de la somme de $f$ et $g$ au point $a$, on a :

| $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $\ell' = +\infty$ | $\ell' = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | | | |
| $\ell = +\infty$ | | | |
| $\ell = -\infty$ | | | |

**2)** Pour la limite du produit de $f$ par $g$ au point $a$, on donne le tableau **pour les fonctions positives** dans un premier temps :

| $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ | $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$ | $\ell' = 0^+$ | $\ell' = +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ | | | |
| $\ell = 0^+$ | | | |
| $\ell = +\infty$ | | | |

**Quand $f$ et $g$ sont de signe quelconque,** le tableau reste valable à condition d'ajuster le signe de la conclusion $+\infty$ à l'aide de la règle des signes.

**3)** Pour la limite du quotient de $f$ par $g$ au point $a$, on donne le tableau **pour les fonctions positives :**

| $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$ | $\ell' = 0^+$ | $\ell' = +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ | | | |
| $\ell = 0^+$ | | | |
| $\ell = +\infty$ | | | |

**Quand $f$ et $g$ sont de signe quelconque,** même remarque pour le produit.

Deux remarques importantes :

- **On n'effectue pas de calculs à l'aide de la notation lim.** Cette notation sert uniquement à énoncer une hypothèse ou une conclusion. Ainsi, les « chaînes de limites » sont à bannir.

  **On n'écrit jamais :** $\lim\limits_{x\to\cdots}(\cdots) = \lim\limits_{x\to\cdots}(\cdots) = \cdots$

  On dispose de la notation $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ qui est synonyme de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Il reste quatre situations où ces théorèmes ne permettent pas de conclure. Ce sont les **formes indéterminées** que l'on note :

$$\text{inf}-\text{inf},\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty}\quad\text{et}\quad \frac{0}{0}.$$

  Il faut dans ce cas tenter de **lever la forme indéterminée** à l'aide de raisonnements plus subtils.

► **Comment lever une forme indéterminée ?** Cela peut être un problème difficile. On dispose pour l'instant de trois outils (nous en verrons d'autres plus tard) :

**1)** **Dans une somme de termes, factoriser par le terme prépondérant.** Adapté en particulier aux polynômes et aux quotients de polynômes... mais pas seulement !

**2)** **Utiliser des limites de croissances comparées.** Ce sont des limites usuelles, à connaître, qui affirment qu'une fonction « l'emporte sur une autre ».
Nous en retiendrons trois :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0\quad\text{et}\quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\ln(x) = 0,$$

où $\alpha$ et $\lambda$ sont deux constantes strictement positives.

**3)** **Utiliser des limites de taux d'accroissements.** Ce sont des conséquences de la définition du nombre dérivé en un point. Les trois qu'on rencontre le plus souvent sont

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\quad\text{et}\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

La première provient de $\exp'(0) = e^0 = 1$,
la deuxième, de $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$
et la dernière, de $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

***Exercice* 11** ► Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4-1}{x^3-3x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3x^3}{2x^2+1}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x+x^2}{x^3+\sqrt{x}}$.

**Exercice 12** ► Déterminer des expressions suivantes :

**1)** $x\,\ln(x)$ en $+\infty/0^+$, **3)** $x\,\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty/-\infty$,

**2)** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$ en $+\infty/0^+$, **4)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)}$ en $0^+/+\infty$ .

**Exercice 13** ► Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x\,\ln(x)+\mathrm{e}^{-x}-x^2}{2x\big(x-\ln(x)\big)}$

**Exercice 14** ► Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin(x)}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x+x^2}$.

Passons maintenant au cas des fonctions composées.

**Thm** • **Théorème de composition de limites**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, $g$ définie sur un intervalle $J$, $a$ un point de $I$ ou une borne de $I$ (éventuellement infinie).

Si on a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \lim\limits_{X\to b} g(X)=\ell'\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big)=\ell'$.

**Exercice 15** ► Terminer le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}+x}$.

**Exercice 16** ► Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.