Topologie et normes.

Coralie Renault

12 décembre 2014

Exercice

Soient $f_1, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.
A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

Exercice

Soit $\sigma : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une application bijective.
a) Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

b) Même question pour

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$$

Exercice

On note $E = \mathcal{C}^1\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.
a) Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme sur E.
b) Pour $f \in E$, on pose

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On vérifie aisément que N' est une norme sur E. Montrer qu'elle est équivalente à N.
c) Les normes N et N' sont elles équivalentes à $\|\,.\,\|_\infty$?

Exercice

Soient l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
b) Montrer que N_2 est dominée par N_1.
c) En exploitant l'identité

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

montrer que N_1 est dominée par N_2.

Exercice

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Etudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$

c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^\star$.
Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n} ?$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice

On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.
a) Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable.
c) L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?