Morphismes additifs réels

Marc SAGE

26 semptebre 2005

Table des matières

Résumé

On s'intéresse ici au fonctions additives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* aux

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1 Les morphismes additifs sur $\mathbb{Q}$ sont linéaires

Montrons qu'une telle fonction est nécessairement linéaire sur $\mathbb{Q}$.

En faisant $y = 0$, on a $f(0) = 0$, puis en faisant $y = -x$ on obtient

$$f \text{ impaire.}$$

Maintenant, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = f\left(\underbrace{1 + ... + 1}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{f(1) + ... + f(1)}_{n \text{ fois}} = nf(1),$$

d'où (par imparité)

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ f(q) = f(1)\, q.$$

On écrit ensuite (pour $q \in \mathbb{N}^*$)

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}}_{q \text{ fois}}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right),$$

d'où (par imparité)

$$\forall q \in \mathbb{Z}^*,\ f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}$$

On a finalement pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{f(1)}{q} = f(1)\frac{p}{q},$$

d'où

$$f_{|\mathbb{Q}} = f(1) \underset{\mathbb{Q}}{\mathrm{Id}}.$$

2 Les morphismes additifs croissants sur $\mathbb{R}$ sont linéaires

Si l'on suppose de plus f croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est forcément linéaire sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet, supposons que $f \neq f(1)\,\mathrm{Id}$, mettons il existe un réel x tel que

$$f(x) > f(1)\, x.$$

Si $f(1) = 0$, alors pour tout rationnel $q > x$ on a

$$0 = f(1)\, q = f(q) \overset{f \text{ croissante}}{\geq} f(x) > f(1)\, x = 0,$$

absurde.

Si $f(1) \neq 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un rationnel tel que

$$x < q < \frac{f(x)}{f(1)},$$

d'où (par croissance)

$$f(x) \leq f(q) = f(1)\, q < f(1)\frac{f(x)}{f(1)} = f(x),$$

absurde.

3 Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité

On cherche maintenant tous les morphismes de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* les

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

vérifiant

$$\left\{\begin{array}{c}\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)\\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ f(xy)=f(x)\,f(y)\\ f(1)=1\end{array}\right. .$$

Un tel morphisme est nécessairement croissant. En effet, soit $x\leq y$, mettons

$$y=x+\varepsilon \text{ où } \varepsilon\geq 0.$$

On écrita alors

$$f(y)=f(x+\varepsilon)=f(x)+f\left(\sqrt{\varepsilon}^2\right)=f(x)+f\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2\geq f(x),$$

et donc, par ce qui précède,

$$f=f(1)\,\mathrm{Id}=\mathrm{Id}.$$

4 Résoudre $f(x)+f\left(y^2\right)=kf\left(x+y^2\right)$

Soit $k\in\mathbb{R}$. On cherche les $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$f(x)+f(y)^2=kf\left(x+y^2\right).$$

Si $k\neq 1$, en faisant $y=0$, on obtient successivement

$$f(x)+f(0)^2=kf(x)\implies f(0)^2=(k-1)\,f(x)\implies f\equiv\frac{f(0)^2}{(k-1)},$$

puis (en imposant $x=0$)

$$f(0)=\frac{f(0)^2}{k-1}\implies f(0)=0 \text{ ou } (k-1)\implies f\equiv 0 \text{ ou } k-1.$$

Si $k=1$, alors f est croissante :

$$x\leq y\implies y=x+\varepsilon^2\implies f(y)=f(x)+f(\varepsilon)^2\implies f(y)\geq f(x).$$

D'autre part, faire $y=0$ donne

$$f(0)=0,$$

faire $x=0$ donne

$$f\left(y^2\right)=f(y)^2,$$

puis on peut écrire

$$f(x)=f\left(x-y^2+y^2\right)=f\left(x-y^2\right)+f(y)^2,$$

d'où

$$f\left(x-y^2\right)=f(x)-f(y)^2.$$

On a donc

$$f\left(x\pm y^2\right)=f(x)\pm f(y)^2=f(x)\pm f\left(y^2\right),$$

ce qui signifie que f est additive. On en déduit

$$f=f(1)\,\mathrm{Id}.$$

5 Morphismes additifs et "inversifs"

Trouver tous les applications $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{c}\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)\\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)\neq 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}\\ f(1)=1\end{array}\right. .$$

L'idée est de combiner les conditions additives et inversives : pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{xy}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x+y)}{f(x)f(y)},$$

puis pour $y=1-x$ (avec x quelconque différent de 1 et 0), on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) &= \frac{1}{f(x)f(1-x)} \Longrightarrow \frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f(x)-f(x)^2}\\ &\Longrightarrow f(x)-f(x)^2=f(x)-f\left(x^2\right) \Longrightarrow f\left(x^2\right)=f(x)^2, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x=0$ ou 1, d'où la croissance de f. Puisque f est additive, il résulte que f est linéaire, et l'hypotèse $f(1)=1$ impose $f=\mathrm{Id}$, qui est bien solution au problème.