Chapitre 3
Réduction des endomorphismes

1. Pour bien débuter

1.1. Matrices d'endomorphisme

a) Endomorphisme d'un K-espace vectoriel

- **Endomorphisme** d'un espace vectoriel E : application linéaire de E dans E.
- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\boxed{\mathcal{L}(E)}$
- $\boxed{(\mathcal{L}(E),+,\circ,.) \text{ est une algèbre}}$ non commutative avec des diviseurs de zéro.
- Son groupe des inversibles est le **groupe linéaire** $\boxed{(GL(E),\circ)}$: c'est le groupe des automorphismes de E (i.e. des endomorphismes bijectifs)

b) Matrice d'un endomorphisme dans une base de E

- Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base d'un K-espace vectoriel E et si $u \in \mathcal{L}(E)$, la **matrice de u dans la base** $\mathcal{B}$ est la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(K)$ notée $\boxed{M_{\mathcal{B}}(u)}$ définie par : $\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!] \ : \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i}$
- Soient $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E.

  Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$ (on écrit $X = M_{\mathcal{B}}(x)$).

  Alors $\boxed{[y = u(x)] \Leftrightarrow [Y = A \times X]}$, égalité matricielle qui se traduit par les n égalités $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] \ : \ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}$

c) Isomorphisme canonique

- L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(K) \\ \quad u \ \to \ M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

d) Endomorphisme canoniquement associé à une matrice

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_j)_j$ la base canonique de K^n. L'endomorphisme canoniquement associé à A est $u \in \mathcal{L}(K^n)$ tel que $M = M_{\mathcal{C}}(u)$

e) Théorème du rang, isomorphisme dans le cas où les e.v. sont de même dimension finie, image d'une base, automorphisme (cf. cours de MPSI)

1.2. Matrice de passage

- Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e_1',e_2',\dots,e_n')$ sont deux bases de E, la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice P notée $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur e_j' dans la base $\mathcal{B}$.
  Ainsi $\boxed{Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$. Alors $\boxed{P\in GL_n(K)}$ et $\boxed{P^{-1}=Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$
- Soit $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\in E$ avec $X=M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X'=M_{\mathcal{B}'}(x)$, alors $\boxed{X=P\times X'}$
- Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ avec $M=M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M'=M_{\mathcal{B}'}(u)$, alors $M'=P^{-1}MP$

1.3. Matrices semblables

- Deux matrices $M\in\mathcal{M}_n(K)$ et $M'\in\mathcal{M}_n(K)$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice $P\in GL_n(K)$ telle que $M'=P^{-1}MP$.
  Ce qui revient à écrire que M et M' représentent le même endomorphisme u dans deux bases (distinctes ou non).
- Deux matrices semblables ont même **déterminant** et même **trace** **1**.
  On peut ainsi définir, si $M=M_{\mathcal{B}}(f)$: $dét(u)=dét(M)$ et $tr(u)=tr(M)$
- Pour rappel $\boxed{dét(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}}$ et $\boxed{tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}}$.

1.4. Sous-espace stable

a) Définition

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est stable par u (ou que u stabilise F) si $u(F)\subset F$.

b) Endomorphisme induit

- Si un sous-espace vectoriel F est stable par $u\in\mathcal{L}(E)$, on peut alors définir :

$$u_{|F}\in\mathcal{L}(F)\quad\text{défini par } u_{|F}(x)=u(x).$$

  $u_{|F}$ s'appelle $\boxed{\text{l'endomorphisme induit de } u \text{ sur F}}$.

c) Matrice dans une base de E adaptée à F

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, il admet un supplémentaire G ($F\oplus G=E$) ; on obtient alors une base $\mathcal{B}$ de E en concaténant deux bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de F et G. Si F est stable par un endomorphisme u, sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ sera alors une **matrice-blocs** : $\boxed{M=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}}$

  où $A=M_{\mathcal{B}_1}(u_{|F})\in\mathcal{M}_p(K)$, $C\in\mathcal{M}_{n-p}(K)$, $p=\dim(F)$ **2**.
- On rappelle à ce sujet qu'on a alors $\boxed{dét(M)=dét(A)\times dét(C)}$
- Si de plus G est aussi stable par u, alors $M=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$

- On peut généraliser pour $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$, où chaque E_i est stable par u, alors M sera une matrice-blocs $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$

d) Exemple fondamental

- Soit a un vecteur non nul de E. Alors

$$\boxed{[Vect(a) \text{ est stable par } u] \Leftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{K} / u(a) = \lambda a]}$$

On dit alors que a est un **vecteur propre**, que λ est une **valeur propre** de u.

Ces notions essentielles seront reprises au § 3.

e) Propriété

Si deux endomorphismes u et v commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Démo **3**.

2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices

2.1. Définition

Définition 1 : **polynômes d'endomorphisme, de matrice**

Soit $P \in K[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- L'évaluation de P en u est définie par $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$
- L'évaluation de P en A est définie par $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$

Avec les conventions $u^0 = Id_E$ et $M^0 = I_n$.

- Exemple : pour $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$,

$$P(u) = u^2 - Id_E = (u - Id_E) \circ (u + Id_E)$$
$$P(M) = M^2 - I_n = (M - I_n)(M + I_n)$$

- Propriété : $\boxed{\text{Si } A = M_{\mathcal{B}}(u), \text{ alors } P(A) = M_{\mathcal{B}}(P(u))}$ **4**.

2.2. Morphismes fondamentaux

Théorème : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

Les applications $\Phi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \to P(u) \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{M}_n(K) \\ P \to P(M) \end{cases}$ sont des morphismes d'algèbres.

- On a notamment $\boxed{PQ(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)}$
- Démonstration **5**. (pour Ψ : $\Psi = \varphi \circ \Phi$ où φ est défini en § 1.1.e)
- **Attention** : pour $x \in E$, l'écriture $P(u)(x)$ a un sens car $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ mais l'écriture $P(u(x))$ n'a aucun sens.

- Conséquence 1 : $\mathrm{Im}(\Phi)$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{L}(E)$ notée $\boxed{K[u]}$

  $\mathrm{Im}(\Psi)$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{M}_n(K)$ notée $\boxed{K[M]}$
- Conséquence 2 : $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un idéal de $K[X]$ donc il existe un polynôme P tel que $\mathrm{Ker}(\Phi) = (P)$ (de même pour Ψ) ↙

2.3. Idéal annulateur et polynômes annulateurs

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(K)$).

- **polynôme annulateur** de u (resp. A) :

  tout polynôme P tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(A) = 0_n$)
- **idéal annulateur** de u (resp. A) :

  l'ensemble $\mathcal{I}_u$ (resp. $\mathcal{I}_A$) des polynômes annulateurs de u (resp. A)

- Justification : $\boxed{\mathcal{I}_u = Ker(\Phi)}$ est bien un idéal de $K[X]$ **6**.
- Exemples :
  - Homothétie : $h = \lambda Id_E$ a pour polynôme annulateur $X - \lambda$
  - Matrice scalaire :

    $A = diag(a, a, ..., a) = aI_n$ a pour polynôme annulateur : $X - a$
  - Projecteur : $p^2 = p$ donc p a pour polynôme annulateur $X^2 - X$
  - Symétrie : $s^2 = Id_E$ donc s a pour polynôme annulateur $X^2 - 1$
- Exercice : Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ défini par $D(f) = f'$. Montrer que le seul polynôme annulateur de D est le polynôme nul. **7**.

2.4. Polynôme minimal (cas où dim(E) est finie)

a) Propriété préliminaire

Lemme fondamental : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul.

Variante matricielle :

toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ admet un polynôme annulateur non nul.

- Démonstration **8**.
- Ainsi l'idéal annulateur $\mathcal{I}_u$ est non nul et donc :

  $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire noté } \mu_u \text{ tel que } \mathcal{I}_u = (\mu_u)}$
- De même l'idéal annulateur $\mathcal{I}_A$ est non nul et donc :

  $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire noté } \mu_A \text{ tel que } \mathcal{I}_A = (\mu_A)}$ ↙

b) Définition

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

on appelle **polynôme minimal** de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(K)$) l'unique polynôme unitaire générateur noté μ_u (resp. μ_A) de l'idéal $\mathcal{I}_u$ (resp. $\mathcal{I}_A$)

- Conséquences : **9**.
  - $\boxed{\text{Tout polynôme annulateur est multiple du polynôme minimal.}}$
  - Le polynôme minimal est l'unique polynôme annulateur de degré minimal.
  - En particulier : $\boxed{\mu_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$ $\boxed{\mu_A(A) = 0_n}$
  - $\boxed{d^\circ(\mu_u) \geqslant 1}$, $\boxed{d^\circ(\mu_A) \geqslant 1}$
- Exemples : **10**.
  - Homothétie : $h = \lambda Id_E$ a pour polynôme minimal $\boxed{X - \lambda}$
  - Matrice scalaire : $A = diag(a, a, \dots, a) = aI_n \dots$ polynôme minimal : $\boxed{X - a}$
  - $\boxed{\text{Toute matrice non scalaire a un polynôme minimal de degré } n \geqslant 2}$
  - Projecteur : polynôme annulateur $\boxed{X^2 - X = X(X-1)}$

    polynôme minimal : $\boxed{X}$ $(\leftrightarrow p = 0_{\mathcal{L}\ E})$, $\boxed{X-1}$ $(\leftrightarrow p = Id_E)$,

    $\boxed{X(X-1)}$ $(\leftrightarrow p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$
  - Symétrie : polynôme annulateur : $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

    polynôme minimal : $\boxed{X-1}$ $(\leftrightarrow s = Id_E)$, $\boxed{X+1}$ $(\leftrightarrow s = -Id_E)$

    $\boxed{X(X-1)}$ $(\leftrightarrow s \notin \{-Id_E, Id_E\}$
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 3A$ … polynôme minimal $\boxed{X(X-3)}$

c) Polynôme minimal d'un endomorphisme et de sa matrice

<u>Propriété</u> : Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors :

- Les polynômes annulateurs de u sont les polynômes annulateurs de A.
- Les idéaux annulateurs $\mathcal{I}_u$ et $\mathcal{I}_A$ sont égaux
- Les polynômes minimaux μ_u et μ_A sont égaux.

Démo **11**.

<u>Corollaire</u> :

deux matrices semblables ont le même polynôme minimal

Démo **12**.

d) Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

<u>Propriété</u> : Si un sous-espace vectoriel F est stable par u, alors le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ divise le polynôme minimal de u.

Démo **13**.

e) Base de $K[u]$

<u>Propriété</u> : Soit $d = d^\circ(\mu_u)$.

La famille $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{d-1})$ est une base de $K[u]$.

Démo **14**.

- Traduction matricielle : $(I_n, A, A^2, \dots, A^{d-1})$ est une base de $K[A]$.
- Conséquence : $\dim(K[u]) = d$, $\dim(K[A]) = d$.

2.5. Application ; calcul des puissances d'une matrice (méthode 1).

- Méthode : on effectue la division euclidienne de X^k par le polynôme μ_A : $\boxed{X^k = \mu_A \times Q + R}$ et on évalue en A : $\boxed{A^k = R(A)}$ **15**.
- Exemple : polynôme minimal et puissances de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.6. Exemple fondamental : matrice compagnon

- Tout polynôme $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est polynôme minimal d'au moins une matrice, sa **matrice compagnon** définie par : $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}$
- Démonstration **16**.

2.7. Décomposition des noyaux

Lemme de décomposition des noyaux :

Soit $(P_i)_{i=1..r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux.

Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, alors $\boxed{\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))}$

Théorème de décomposition des noyaux :

Soit $(P_i)_{i=1..r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux.

Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ est annulateur de u, alors $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))}$

- Démonstrations **17**.

3. Eléments propres

3.1. Définitions

a) Valeurs propres, vecteurs propres, spectre

Définitions : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

❖ $\lambda \in \mathbb{K}$ est **une valeur propre** de u si $\boxed{\exists x \in E \setminus \{0_E\} \,/\, u(x) = \lambda x}$

❖ $x \in E$ est **un vecteur propre** de u si $\boxed{x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in K \,/\, u(x) = \lambda x}$

❖ Le **spectre** de u, noté $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.

- Si x est vecteur propre, la valeur propre qui lui est associée est unique
- Si λ est valeur propre, si x est un vecteur propre associé à λ, il n'est pas unique puisque tout vecteur $\alpha.x$ $(\alpha \in \mathbb{K}^*)$ est aussi vecteur propre.

b) Exemples : quelques astuces…

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&5&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

- A : somme de chaque ligne $\Rightarrow 2\in Sp(A)$; vecteur propre $x=(1,1,1)$
- B : somme de chaque colonne $\Rightarrow 4\in Sp(B)$ **18**.
- C : lecture de la 2^{nde} colonne $\Rightarrow 5\in Sp(C)$; vecteur propre $e_2=(0,1,0)$

  lecture du rang : $rg(C)<3\Rightarrow 0\in Sp(C)$; vecteur propre $(1,0,-1)$

c) Sous-espace propre

Propriété préliminaire :

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.

Alors : $[\lambda$ est valeur propre de $u]\Leftrightarrow[(u-\lambda Id_E)\notin GL(E)]$:

Démo **19**.

- Plus généralement :
  - il peut être pratique de poser pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $E_\lambda=\mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)$
  - dans ce cas, on pourra écrire $[\lambda\in Sp_{\mathbb{K}}(u)]\Leftrightarrow[E_\lambda\neq\{0_E\}]$
- Noter que $[0\in Sp_{\mathbb{K}}(u)]\Leftrightarrow[Ker(u)\neq\{0_E\}]\Leftrightarrow[u\notin GL(E)]$

Définitions : Soit $\lambda\in Sp_{\mathbb{K}}\ u$.

❖ Le **sous-espace propre** associé à λ est $\boxed{E_\lambda=\mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)}$

- Comme $\lambda\in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, nécessairement $E_\lambda\neq\{0_E\}$
- $\boxed{E_\lambda \text{ est l'ensemble des vecteurs propres associés à } \lambda}$ (avec en plus 0_E)
- Démonstration : **20**.

3.2. Propriétés

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$

1. Toute somme d'une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
2. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
3. Si $\dim(E)=n$, alors $\boxed{\mathrm{card}(Sp_{\mathbb{K}}(u))\leqslant n}$
4. Si $v\in\mathcal{L}(E)$ et si u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

- Démonstrations : **21**.

3.3. Valeurs propres et polynôme minimal

a) Une propriété importante

Propriété : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

- Si $u(x) = \lambda x$, alors $\boxed{[P(u)](x) = P(\lambda).x}$
- Si $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, alors $P(\lambda) \in Sp_{\mathbb{K}}(P(u))$

- Démonstrations : **22**.

b) Un théorème essentiel

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}\ E$.

- Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.
- Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.

- Démonstrations : **23**.
- Autrement dit : si P est annulateur de u et le polynôme minimal

$\boxed{Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset Rac_{\mathbb{K}}(P)}$ et $\boxed{Sp_{\mathbb{K}}(u) = Rac_{\mathbb{K}}(\mu_u)}$

c) Exemples **24** :

- Homothétie : $h = \lambda Id_E$ $\quad \mu_{h_\lambda} = X - \lambda$ $\quad Sp_{\mathbb{K}}(h_\lambda) = \{\lambda\}$
- Projecteur $p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$ $\quad \mu_p = X(X-1)$ $\quad Sp_{\mathbb{K}}(p) = \{0,1\}$
- Symétrie $s \notin \{Id_E, -Id_E\}$ $\quad \mu_s = (X+1)(X-1)$ $\quad Sp_{\mathbb{K}}(s) = \{-1,1\}$

3.4. Cas des matrices

a) Principe : on a vu en préambule que

- A toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est canoniquement associé un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et que $[y = u(x)] \Leftrightarrow [Y = A \times X]$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- On identifie couramment la matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}\ K$ et le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$
- On a alors $[u(x) = \lambda x] \Leftrightarrow [A.X = \lambda.X] \Leftrightarrow [(A - \lambda I_n)X = 0]$; dans cet esprit :

b) Définitions

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

- ❖ $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de A si $\boxed{\exists X \in K^n \setminus \{0_{K^n}\} \,/\, AX = \lambda X}$
- ❖ $X \in K^n$ est un **vecteur propre** de A si $\boxed{X \neq 0_{\mathbb{K}^n} \text{ et } \exists \lambda \in K \,/\, AX = \lambda X}$
- ❖ Le **spectre** de A, noté $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A.
- ❖ Le **sous-espace propre** de A associé à λ est $\boxed{E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)}$

- On retrouve alors toutes les propriétés du § 3.en remplaçant $u \in \mathcal{L}(E)$ par $A \in \mathcal{M}_n(K)$
- Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme dans des bases distinctes (ou non), elles auront donc même spectre et mêmes sous-espaces propres (on a vu qu'elles ont aussi même polynôme minimal)

c) Exemple : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

- $\mu_A = X(X-3)$ $\quad Sp(A)=\{0,3\}$
- B vérifie $B^3=0_3$ mais $B^2\neq 0_3$: $\mu_B = X^3$ et $Sp(B)=\{0\}$

  B est une **matrice nilpotente** d'**indice** 3 (cf. § 6.4)
- $C+I=A$, $rg(A)=1$ donc

  $-1\in Sp(C)$ et $\dim(E_{-1})=\dim(Ker(C+I))=2$

  De plus (somme de chaque ligne) $2\in Sp(C)$ et $u=(1,1,1)\in E_2$

  E_{-1} et E_2 sont en somme directe donc $\dim(E_2)=1$ et $E_2=\mathrm{Vect}(u)$

d) Changement de corps

> Propriété :
>
> Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $Sp_{\mathbb{R}}(A)\subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$

- Démonstration **25**.
- Exemple : matrice triangulaire où l'inclusion est stricte **26**

  $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$; $Sp_{\mathbb{R}}(A)=\varnothing$; $Sp_{\mathbb{C}}(A)=\{i,-i\}$ (obtenu par χ_A ☑)

4. Polynôme caractéristique

4.1. Définitions

Intro : $\lambda\in Sp(A)\Leftrightarrow \dim(E_\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow A-\lambda I\notin GL_n(K)\Leftrightarrow \text{dét}(\lambda I-A)=0$

a) Polynôme caractéristique d'une matrice

> Définition : **polynôme caractéristique d'une matrice** $A\in\mathcal{M}_n(K)$.
>
> On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A=\text{dét}(XI_n-A)$

- Justification du caractère polynomial **27**. ☑

> Propriétés : ✩ χ_A est un polynôme $\boxed{\text{unitaire}}$ de $\boxed{\text{degré } n}$: $\chi_A = X^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_iX^i$
>
> ✩ $\boxed{a_{n-1}=-\mathrm{tr}(A)}$ et $\boxed{a_0=(-1)^n\,\text{dét}(A)}$.
>
> ✩ Ainsi $\boxed{\chi_A = X^n-\mathrm{tr}(A)X^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\text{dét}(A)}$

- Exemples **28**.
  - Matrice triangulaire $\boxed{\chi_A=\prod_{i=1}^{n}(X-t_{i,i})}$
  - Matrice compagnon de P : $\boxed{\chi_A=\mu_A=P}$ **29**.

> Propriétés :
>
> ❖ Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
>
> ❖ $\chi_{{}^tA}=\chi_A$

- Démonstration **30**.

b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition : **polynôme caractéristique d'un endomorphisme** $u \in \mathcal{L}(E)$**.**

On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque ou encore $\boxed{\chi_u = \text{dét}(XId_E - u)}$.

- Justification de l'indépendance de la base choisie **31**.

Propriétés

❖ χ_u est un polynôme $\boxed{\text{unitaire}}$ de $\boxed{\text{degré } n}$: $\chi_u = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

❖ $\boxed{a_{n-1} = -\text{tr}(u)}$ et $\boxed{a_0 = (-1)^n \text{dét}(u)}$.

❖ Ainsi $\boxed{\chi_u = X^n - \text{tr}(u) X^n + \ldots + (-1)^n \text{dét}(u)}$

❖ $\chi_u(\lambda) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\lambda Id_E - u)$

- Remarque : notion d'invariants
- Exemples **32**.
  - Homothétie de rapport a (matrice scalaire) : $\chi_h = (X-a)^n$
  - Projecteur : $\chi_p = (X-1)^p X^q$ où $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$
  - Symétrie : $\chi_s = (X-1)^p (X+1)^q$ où $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$
  - Endomorphisme de rang 1 : $\chi_u = X^{n-1}(X - \text{tr}(u))$

c) Cas d'un endomorphisme induit

Proposition : **polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit**

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilise un sous-espace vectoriel F, alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$.

- Démonstration **33**. ↙

Corollaire : Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et que u stabilise chaque E_i, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} \chi_{u_{|E_i}}$

4.2. Polynôme caractéristique et valeurs propres

a) Racines du polynôme caractéristique

Théorème : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(K)$

Les valeurs propres de u (resp. A) sont les racines de son polynôme caractéristique : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \text{Rac}(\chi_u)$ (resp. $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \text{Rac}(\chi_A)$.

- Démonstration **34**. ↙

Corollaire : un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres, autrement dit : $\boxed{card(Sp(u)) \leqslant n}$

b) Ordre de multiplicité

Définition : On appelle **ordre multiplicité** d'une valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de son polynôme caractéristique.

- Exemple : si le polynôme caractéristique est scindé : $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$

$$\boxed{\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(u) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}}$$

Pour retenir : c'est ce qu'on obtient pour une matrice diagonale dans la diagonale de laquelle chaque λ_i apparaît m_i fois **35**.

c) Dimension du sous-espace propre et ordre de multiplicité

Théorème : Si λ est valeur propre d'ordre m, alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m$

- Démonstration **36**.
- Exemple : si λ est valeur propre d'ordre 1, alors $\dim(E_\lambda) = 1$

4.3. Polynôme caractéristique et polynôme minimal

Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est annulateur de u.

- Démonstration admise
- Ainsi $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et de même pour une matrice : $\chi_A(A) = 0_n$

Corollaire de Cayley-Hamilton

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique : $\boxed{\mu_A \mid \chi_A}$.

- Démonstration **37**.
- $\boxed{\text{Si } \chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} \text{ alors } \mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!] : \alpha_i \leqslant m_i$

- Exercice : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si $\chi_A = (X-1)^2(X^2+X+1)$ ....

4.4. Exemple traité 1 : $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

- Calcul de χ_A et détermination de $Sp(A)$.
- Détermination des sous-espaces propres de A.
- Détermination de μ_A.

5. Endomorphismes diagonalisables

5.1. Définitions

Définitions ☼ Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

☼ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

- Ainsi [A est diagonalisable] $\Leftrightarrow$ [$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / P^{-1}AP$ est diagonale]
- Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$: $\boxed{[A \text{ est diagonalisable}] \Leftrightarrow [u \text{ est diagonalisable}]}$

Propriété : La diagonale de la matrice diagonale est alors constituée des valeurs propres, chacune ayant pour occurrence son ordre de multiplicité.

- Démonstration **38**.

5.2. Caractérisation de la diagonalisabilité

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ E possède une base de vecteurs propres.

$\Leftrightarrow$ E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) = n \quad \text{où } r = \text{card}(Sp(u))$$

$$\Leftrightarrow \chi_u \text{ est scindé et } \forall i \in [\![1, r]\!] : \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$$

(m_i ordre de multiplicité de λ_i)

- Démonstration **39**.
- Conséquence : u n'est pas diagonalisable si et seulement si

  χ_u n'est pas scindé ou χ_u est scindé mais $\exists i \in [\![1, r]\!] : \dim(E_{\lambda_i}) < m_i$

Corollaire : Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

- Démonstration **40**.
- Exemples
  - Suite du § 4.4 : $\dim(E_5) = 1 < 2 = m_5$ $\boxed{\rightarrow}$ A n'est pas diagonalisable.
  - Exemple traité 2 : $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
    - Calcul de χ_B et détermination de $Sp(B)$: χ_B est scindé.
    - Détermination des dimensions des sous-espaces propres de B.
    - Conclusion : $\forall i \in [\![1, r]\!] : \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$ $\boxed{\rightarrow}$ B est diagonalisable.
    - Ecriture de la matrice Δ diagonale semblable à B.
    - Base de vecteurs propres, détermination dde $P / \Delta = P^{-1}BP$.
    - Détermination de μ_B ; nature de l'endomorphisme associé b.
    - Calcul de B^n : méthode n°2

5.3. Caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme minimal

a) Décomposition en projections

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$ où $r = card(Sp(u))$ et soit p_i la projection de E sur E_{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ .Alors $\boxed{P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) p_i}$

- Démonstration **41**.
- Il vient $\boxed{Id_E = \sum_{i=1}^{r} p_i}$! et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\boxed{u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i}$

b) Diagonalisabilité et polynôme minimal

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

- Démonstrations **42**.
- Exemples (suite des § 4.4 et § 5.2) **43**.
  - $\chi_A = (X-5)^2(X+1)$ mais $\dim(E_5) = 1$ $\Rightarrow$ $\mu_A = (X-5)^2(X+1)$
  - $\chi_B = (X-1)^2(X+1)$ et $\dim(E_1) = 2$ $\Rightarrow$ $\mu_B = (X-1)(X+1)$

    Ainsi comme μ_B est annulateur, $B^2 = I$ donc B est la matrice de la symétrie sur $F = \mathrm{Ker}(B - I)$ de direction $G = \mathrm{Ker}(B+I)$

6. Endomorphismes trigonalisables

6.1. Définitions

Définitions

- ❖ Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure
- ❖ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

- Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, il est alors clair que

$$\boxed{[A \text{ est trigonalisable}] \Leftrightarrow [u \text{ est trigonalisable}]}$$

Propriété : La diagonale de la matrice triangulaire est alors constituée des valeurs propres, chacune ayant pour occurrence son ordre de multiplicité.

- Démonstration **44**.

6.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est trigonalisable

$\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé

$\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme annulateur scindé

$\Leftrightarrow \mu_u$ est scindé

- Démonstration **45**.

Corollaire :

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est trigonalisable.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable.

6.3. Exemples

- Exemple 1 (suite du § 4.4) **46**.

- A est trigonalisable (non diagonalisable), semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . \\ 0 & 5 & . \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- On peut améliorer par le lemme des noyaux en $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & . \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ …

- et même obtenir : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan H.P.)

- Méthode pour trouver la bonne base pour la dernière matrice :
    - $u \in E_1$, $v \in E_5$: détermination des sous-espaces propres…
    - w vérifie (cf. troisème colonne) : $Aw = v + 5w$

- Exemple traité 3 **47**.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: C est la matrice de la permutation $\gamma = (1,2,3)$

- $\chi_C = X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) = (X-1)(X-j)(X-j^2)$
- dans $\mathbb{C}$, χ_C est scindé à racines simples

  $\boxed{\rightarrow}$ C est $\mathbb{C}$-diagonalisable et $\mu_C = \chi_C$
- dans $\mathbb{R}$, χ_C n'est pas scindé

  $\boxed{\rightarrow}$ C n'est pas $\mathbb{R}$-trigonalisable et $\mu_C = \chi_C$
- généralisation : matrice de la permutation $\gamma = (1,2,\dots,n)$ de $\mathfrak{S}_n$.

6.4. Un bilan : situations possibles et exemples

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
μ_u	non scindé	Scindé avec au moins une racine d'ordre $\geqslant 2$	Scindé à racines simples	
u	Non trigonalisable	trigonalisable non diagonalisable	diagonalisable	
χ_u	non scindé	Scindé avec au moins une racine d'ordre $\geqslant 2$		Scindé à racines simples
		$\exists i \in [\![1,r]\!] /$ $\dim(E_{\lambda_i}) < m_i$	$\forall i \in [\![1,r]\!] :$ $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$	

	Ex. 3 ($\mathbb{R}$)	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3 ($\mathbb{C}$)
μ	$X^3 - 1$	$(X-5)^2(X+1)$	$(X-1)(X+1)$	$X^3 - 1$
χ	$X^3 - 1$	$(X-5)^2(X+1)$	$(X-1)^2(X+1)$	$X^3 - 1$

7. Cas particuliers

7.1. Endomorphismes nilpotents

Définitions

- ❖ $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- ❖ $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0_n$
- ❖ L'indice de nilpotence de u est alors $q = \mathrm{Min}(\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\})$
- ❖ L'indice de nilpotence de A est $q = \mathrm{Min}(\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, A^k = 0_n\})$

- Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, il est alors clair que

$$\boxed{[A \text{ est nilpotente d'indice } q] \Leftrightarrow [u \text{ est nilpotente d'indice } q]}$$

Propriétés : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

- $[u$ est nilpotent$]$ $\Leftrightarrow [\chi_u = X^n]$

  $\Leftrightarrow [u$ est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre$]$
- $[u$ est nilpotente d'indice $q] \Leftrightarrow [\mu_u = X^q]$
- L''indice de nilpotence est nécessairement inférieur ou égal à n.

- Démonstrations **48**.
- Ainsi toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaiure à diagonale nulle.

- Exemple : $\boxed{\mathbf{49}}$.

la matrice $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre n.

Justification 1 : $J^2=\dots$, $J^3=\dots$, … $J^{n-1}=\dots$, $J^n=0_n$

Argument sans calcul : elle est trigonalisable (!) et $\chi_u = X^n$.

7.2. Endomorphismes à polynôme minimal scindé

a) Décomposition de E

Théorème

Si $u\in\mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur scindé $P=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$,

alors E est une somme directe $E=\bigoplus_{i=1}^{r}F_i$ où sur chaque F_i, $u_{|F_i}=h_{\lambda_i}+n_i$

avec h_{λ_i} : homothétie de rapport λ_i et n_i : endomorphisme nilpotent.

- Par le corollaire des noyaux, on prend : $F_i = Ker\ (u-\lambda_i Id_E)^{\beta_i}$
- Démonstration $\boxed{\mathbf{50}}$.
- Pratiquement : on a intérêt à choisir $P=\mu_A$ s'il est connu, sinon $P=\chi_A$

b) Traduction matricielle

Théorème

Si un polynôme scindé $P=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ annule $A\in\mathcal{M}_n(K)$,

alors A est semblable à une matrice blocs $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$

où chaque bloc est du type $A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$

où m_i est l'ordre de multiplicité de λ_i.

- A_i est donc triangulaire supérieure avec éléments diagonaux tous égaux.
- Démonstration $\boxed{\mathbf{51}}$.
- Ceci permet donc de trigonaliser toute matrice connaissant χ_A scindé
- Exemple traité n°1 : $\mu_A=(X-5)^2(X+1)$, forme trigonalisée…