SEMAINE 19

FONCTIONS de PLUSIEURS VARIABLES

EXERCICE 1 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Résoudre, dans $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$(E_\alpha) \ : \qquad r^2\, u''(r) + r\, u'(r) - \alpha^2\, u(r) = 0$$

(*on pourra chercher des solutions de la forme* $u(r) = r^m$, *avec* $m \in \mathbb{R}$).

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ (considérée comme fonction de deux variables réelles).

On dit que f est **harmonique** lorsque son **laplacien** Δf est nul, soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées polaires : en posant $g(r,\theta) = f(re^{i\theta})$, on a, pour $r > 0$,

$$\Delta f(re^{i\theta}) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\ .$$

2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$, harmonique. Montrer qu'il existe des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, complexes, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \overline{z}^{\,n}\ .$$

3. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

4. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Source : article d'Éric VAN DER OORD, Fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^2$*, RMS (Revue de Mathématiques Spéciales), janvier 1995*

- -

1. On sait que l'ensemble des solutions de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un plan vectoriel. La fonction $r \mapsto r^m$ est solution de (E_α) si et seulement si $m^2 - \alpha^2 = 0$, d'où la discussion :

- si $\alpha > 0$, on a trouvé deux solutions linéairement indépendantes, donc

$$(E_\alpha) \iff u(r) = A\, r^\alpha + B\, r^{-\alpha}\ , \qquad (A,B) \in \mathbb{C}^2\ .$$

- si $\alpha = 0$, $(E_0) \iff r\,u''(r) + u'(r) = 0 \iff u'(r) = \dfrac{A}{r} \iff u(r) = A\,\ln r + B$.

(E_α) *est une équation d'Euler ; on peut aussi la résoudre sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en utilisant le changement de variable* $r = e^t$.

2. Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, posons $c_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$. Le nombre $c_n(r)$ est le n-ième coefficient de Fourier de la fonction $g_r : \theta \mapsto g(r,\theta) = f(r\,e^{i\theta})$.

Comme f est harmonique, on a (le caractère $\mathcal{C}^2$ de la fonction g sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ permet de dériver sous le signe intégrale), pour $r > 0$:

$$\begin{aligned}
r^2\, c_n''(r) + r\, c_n'(r) &= \frac{r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right] e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_r''(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = n^2\, c_n(r)
\end{aligned}$$

(en intégrant deux fois par parties).

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la fonction c_n, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifie l'équation différentielle (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme elle est bornée au voisinage de zéro, on a

$$\begin{cases} c_0(r) &= a_0 \qquad \text{(constante)} \\ c_n(r) &= a_n\, r^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \\ c_{-n}(r) &= b_n\, r^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, la fonction g_r, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$, est somme de sa série de Fourier, donc

$$f(r\, e^{i\theta}) = g(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n r^n e^{-in\theta} ,$$

soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \overline{z}^{\,n} .$$

3. Si $|f(z)| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, alors, de la définition des $c_n(r)$, on déduit $|c_n(r)| \leq M$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbf{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \qquad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{et} \quad |b_n| \leq \frac{M}{r^n} .$$

Comme $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{M}{r^n} = 0$, on déduit $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc f est constante.

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Alors la fonction polynomiale $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est harmonique. En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^n) = \frac{\partial}{\partial x}\big((x+iy)^n\big) = n(x+iy)^{n-1} = n\, z^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(z^n) = in\, z^{n-1} ,$$

donc

$$\Delta(z^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(z^n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(z^n) = n(n-1)\, z^{n-2} - n(n-1)\, z^{n-2} = 0 ,$$

donc $\Delta P = 0$.

Supposons que P n'admette pas de racine dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction $\dfrac{1}{P}$ est harmonique sur $\mathbb{C}$. En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P}\right) = -\frac{1}{P^2}\frac{\partial P}{\partial x} , \quad \text{puis} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{2}{P^3}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{P^2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

et

$$\Delta\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{2}{P^3}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{P^2}\,\Delta P .$$

Or, $\Delta P = 0$ et le calcul fait ci-dessus montre que $\dfrac{\partial P}{\partial x} = P'(z)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = iP'(z)$, donc $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = 0$.

Si P n'a pas de zéro, la fonction $\dfrac{1}{P}$ est harmonique et bornée sur $\mathbb{C}$ (car $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$), donc est constante, et P est un polynôme constant.

EXERCICE 2 : Solution (intégrale de Poisson) du problème de Dirichlet

On identifiera $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{U}$ est le cercle unité, D le disque unité ouvert, $\overline{D}$ le disque unité fermé.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et de laplacien nul, c'est-à-dire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $r \in [0, 1[$, on pose

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\, e^{int} \ .$$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer qu'il existe une unique application $F : \overline{D} \to \mathbb{R}$, continue sur $\overline{D}$, harmonique sur D et coïncidant avec f sur $\mathcal{U}$. On vérifiera, pour $r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la relation

$$F(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(e^{it})\, \mathrm{d}t \ . \qquad \textbf{(*)}$$

- -

• Pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, calculons

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\, e^{int} = \frac{1}{1 - r\, e^{it}} + \frac{r\, e^{-it}}{1 - r\, e^{-it}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\, \cos t + r^2} \ .$$

La famille de fonctions $\left(\dfrac{1}{2\pi} P_r\right)$, appelée **noyau de Poisson**, est une approximation de l'unité 2π-périodique lorsque $r \to 1^-$ (*cf.* semaine 13, exercice 4), c'est-à-dire que

▷ les fonctions P_r sont à valeurs positives ou nulles ;

▷ pour tout $r \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, \mathrm{d}t = 2\pi$ car la série de fonctions converge normalement sur $[-\pi, \pi]$;

▷ pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, la famille de fonctions (P_r) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$ lorsque $r \to 1^-$. Sur ces intervalles, on a effectivement

$$0 \leq P_r(t) \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\, \cos\alpha + r^2} \ , \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\, \cos\alpha + r^2} = 0 \ .$$

• Considérons la fonction $F_0 : \overline{D} \to \mathbb{R}$ définie par $F_0 = f$ sur $\mathcal{U}$ et, si $z = re^{i\theta} \in D$, alors $F_0(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(e^{it})\, \mathrm{d}t$.

• La fonction F_0 est continue en tout point de $\mathcal{U}$: en effet, soit $z_0 = e^{i\theta_0} \in \mathcal{U}$. Si $r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$\delta = F_0(r\,e^{i\theta}) - F_0(z_0) = F_0(r\,e^{i\theta}) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\left(f(e^{it}) - f(e^{i\theta_0})\right)\mathrm{d}t\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue sur $\mathcal{U}$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|\theta_0 - t| \le \eta \Longrightarrow |f(e^{it}) - f(e^{i\theta_0})| \le \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Alors, le nombre δ ci-dessus étant défini par une intégrale sur $[-\pi, \pi]$ ou sur $[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$,

$$\begin{aligned} |\delta| &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{|\theta_0 - t|\le\eta} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{|\theta_0 - t|\ge\eta} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{|\theta_0 - t|\ge\eta} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Or, si $|\theta - \theta_0| \le \dfrac{\eta}{2}$, on a $|\theta_0 - t| \ge \eta \Longrightarrow |\theta - t| \ge |\theta_0 - t| - |\theta - \theta_0| \ge \dfrac{\eta}{2}$, donc $\big(P_r(\theta - t)\big)$ converge uniformément vers 0 lorsque $r \to 1^-$ pour $|\theta_0 - t| \ge \eta$, et $\displaystyle\lim_{r\to 1^-}\int_{|\theta_0 - t|\ge\eta} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t = 0$. On peut donc trouver $r_0 < 1$ tel que

$$r_0 \le r < 1 \Longrightarrow \int_{|\theta_0 - t|\ge\eta} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\pi}{\|f\|_\infty}\,\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

et on a ainsi $|\delta| \le \varepsilon$ dès que $\begin{cases} |\theta - \theta_0| \le \dfrac{\eta}{2} \\ r_0 \le r < 1 \end{cases}$. Cela prouve que, pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, on a $\displaystyle\lim_{z\to z_0, |z|<1} F_0(z) = f(z_0) = F_0(z_0)$. La continuité de f sur $\mathcal{U}$ achève de prouver que F_0 est continue sur $\mathcal{U}$.

• La fonction F_0 est harmonique sur D : si $z = r\,e^{i\theta} \in D$, on a

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\,e^{in(\theta - t)}\,f(e^{it})\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,f(e^{it})\,\mathrm{d}t\right) r^{|n|}\,e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,r^{|n|}\,e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\,\overline{z}^{\,n}\right)\ , \end{aligned}$$

les c_n étant les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $t \mapsto f(e^{it})$ (l'interversion série-intégrale est justifiée par la convergence normale de la série de fonctions sur $[-\pi, \pi]$). La fonction F_0 est donc somme de deux séries entières (en z et en $\overline{z}$ respectivement) de rayon de convergence au moins égal à 1 car $|c_n| \le 2\pi\|f\|_\infty$, ce qui permet de dériver terme à terme dans D par rapport à chacune des deux variables x et y (*pour employer des arguments plus conformes au programme, on peut vérifier que*

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}\,(z^n)=\begin{cases} i^l\,\dfrac{n!}{(n-k-l)!}\,z^{n-k-l} & \text{si}\quad k+l\leq n\\ \quad 0 & \text{si}\quad k+l>n\end{cases}$$

et un calcul semblable pour $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}\,(\overline{z}^{\,n})$*, ce qui entraîne la convergence normale sur tout compact de* D *de toutes les séries dérivées, donc* F_0 *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* D *et on peut dériver terme à terme*). En particulier,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z^n)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big((x+iy)^n\big)=n(n-1)(x+iy)^{n-2}=n(n-1)z^{n-2}=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(z^n)$$

et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\overline{z}^{\,n})=n(n-1)\overline{z}^{\,n-2}=-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{z}^{\,n})$, donc $\Delta F_0=0$: F_0 est harmonique sur D.

- La fonction F_0 est l'unique solution du problème posé (appelé **problème de Dirichlet**) : il suffit pour cela de montrer que, si une fonction $g:\overline{D}\to\mathbb{R}$ est continue sur $\overline{D}$, harmonique sur D et nulle sur $\mathcal{U}$, alors $g=0$.

Soit donc $g:\overline{D}\to\mathbb{R}$ vérifiant ces hypothèses, et soit $\varepsilon>0$. Pour tout $z\in\overline{D}$, posons $g_\varepsilon(z)=g(z)+\varepsilon x^2=g(z)+\varepsilon\,\mathrm{Re}(z)^2$. On a alors $\Delta g_\varepsilon=2\varepsilon>0$ sur D, la fonction g_ε ne peut alors admettre de maximum local en aucun point de D (en un tel point, les dérivées secondes partielles de g_ε seraient nécessairement négatives ou nulles, donc $\Delta g_\varepsilon\leq 0$, ce qui est contradictoire). Comme g_ε atteint un maximum sur le compact $\overline{D}$, celui est atteint en un point de $\mathcal{U}$, d'où $\forall z\in\overline{D}\quad g_\varepsilon(z)\leq\varepsilon$ et, a fortiori, $\forall z\in\overline{D}\quad g(z)\leq\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a $g(z)\leq 0$ sur $\overline{D}$. Le même raisonnement appliqué à $-g$ donne finalement $g=0$ sur $\overline{D}$.

EXERCICE 3 :

Soit E un espace euclidien. Soit F un fermé non vide de E. Pour tout $x\in E$, on pose

$$f(x)=d(x,F)\ .$$

1. Montrer que

$$\forall x\in E\quad\exists y\in F\qquad f(x)=\|x-y\|\ .$$

2. Soit x un point de $E\setminus F$. On suppose que f est différentiable au point x.

Montrer que le point y de la question **1.** est unique (*on essaiera d'exprimer le vecteur* $\mathrm{grad}\,f(x)$ *à l'aide de* x *et* y).

- -

1. Soit $x\in E$. L'application $g:\begin{cases}F\ \to\ \mathbb{R}_+\\ y\ \mapsto\ \|y-x\|\end{cases}$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur F. Soit $d=d(x,F)$. Alors $d=\inf\limits_F g=\inf\limits_K g$, où K est le compact $F\cap\overline{B}(x,d+1)$, donc cette borne est atteinte.

2. L'application f est 1-lipschitzienne : en effet, soient x_1 et x_2 deux points de $E \setminus F$, soient y_1 et y_2 dans F tels que $f(x_1) = \|x_1 - y_1\|$ et $f(x_2) = \|x_2 - y_2\|$. On a alors

$$f(x_1) - f(x_2) = \|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\| \leq \|x_1 - y_2\| - \|x_2 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

et la même majoration pour $f(x_2) - f(x_1)$.

Il en résulte que, en tout point x où f est différentiable, on a $\|\operatorname{grad} f(x)\| \leq 1$. En effet, posons $u = \operatorname{grad} f(x)$. On a, pour tout $h \in E$,

$$\mathrm{d}f(x)(h) = (u|h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} ,$$

mais $|f(x+th) - f(x)| \leq t\,\|h\|$, donc $|(u|h)| \leq \|h\|$ pour tout h et, en particulier, $|(u|u)| = \|u\|^2 \leq \|u\|$, d'où $\|u\| \leq 1$.

Soit $x \in E \setminus F$, soit $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,F) = \|x-y\|$. Alors, pour tout point z du segment $[x,y]$, on a $f(z) = d(z,F) = \|z-y\|$: en effet, posons $z = x + t(y-x) = (1-t)x + ty$ avec $t \in [0,1]$; alors $\|y-x\| = \|y-z\| + \|z-x\|$, donc $f(z) = d(z,F) \leq \|z-y\| = f(x) - \|z-x\|$, soit $f(x) - f(z) \geq \|z-x\|$ mais, f étant 1-lipschitzienne, c'est une égalité, donc $f(z) = \|z-y\| = f(x) - \|z-x\|$.

Soit $x \in E \setminus F$ un point où f est supposée différentiable, soit y un point de F tel que $d(x,F) = \|y-x\|$, soit $u = \operatorname{grad} f(x)$. Avec $h = \overrightarrow{xy} = y - x$, on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(x+th) - f(x) = -\|t\,h\| = -t\,\|y-x\|$$

car le point $x + th$ appartient au segment $[x,y]$. Donc, en faisant tendre h vers 0^+, on obtient $\mathrm{d}f(x)(h) = (u|h) = (u|y-x) = -\|y-x\|$, ou encore $(u|x-y) = \|x-y\|$ ce qui, avec $\|u\| \leq 1$ et $x - y \neq 0$, entraîne que $\|u\| = 1$, puis que les vecteurs u et $x-y$ sont positivement liés (égalité dans Cauchy-Schwarz), donc

$$u = \operatorname{grad} f(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|} = \frac{x-y}{f(x)} .$$

En particulier, cela détermine entièrement le point y, d'où l'unicité de ce dernier.

EXERCICE 4 :

L'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire une norme telle que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B (*considérer par exemple la norme subordonnée à une quelconque norme sur* $\mathbb{R}^n$).

1. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer que la matrice $I - A$ est inversible, et donner une expression de $(I-A)^{-1}$.

2. En déduire que $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de E.

3. On note f l'application $M \mapsto M^{-1}$ de U dans U. Montrer que f est différentiable sur U et exprimer $\mathrm{d}f(M)$ pour $M \in U$.

Source : François ROUVIÈRE, Petit guide de calcul différentiel, Éditions Cassini, ISBN 2-84225-008-7

- -

1. De $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, on déduit que la série de terme général A^k est absolument convergente $\left(\sum_k \|A^k\|\right.$ converge), donc convergente puisque E, de dimension finie, est complet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité

$$(I - A) \cdot \sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1} .$$

En passant à la limite (*continuité de l'application bilinéaire* $(A, B) \mapsto AB$), on obtient

$$(I - A) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = I ,$$

donc $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

2. On vient de prouver que $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contient la boule ouverte de centre I et de rayon 1. Plus généralement, soit A une matrice inversible ; alors $A + H = A\big(I - (-A^{-1}H)\big)$ est inversible dès que $\|A^{-1}H\| < 1$ et cette condition est réalisée dès que $\|H\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Si $A \in U$, alors U contient la boule ouverte de centre A et de rayon $\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. L'ensemble U est donc un ouvert de E.

3. Étudions d'abord le cas $M = I$. Si H est une matrice telle que $\|H\| < 1$, alors

$$f(I + H) = (I + H)^{-1} = I - H + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k H^k .$$

Or, $\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k H^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|H\|^k = \dfrac{\|H\|^2}{1 - \|H\|} = O(\|H\|^2)$ lorsque $\|H\|$ tend vers zéro. On a donc $f(I + H) = I - H + o(\|H\|)$, ce qui signifie que la fonction f est différentiable au point I avec $\mathrm{d}f(I)(H) = -H$, c'est-à-dire $\mathrm{d}f(I) = -\,\mathrm{id}_E$.

Soit $M \in U$ quelconque. On a, pour tout H tel que $\|H\| < \dfrac{1}{\|M^{-1}\|}$,

$$\begin{aligned} f(M + H) &= (M + H)^{-1} = \big(M(I + M^{-1}H)\big)^{-1} = (I + M^{-1}H)^{-1}\, M^{-1} \\ &= \big(I - M^{-1}H + o(\|H\|)\big)\, M^{-1} = f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|) , \end{aligned}$$

donc f est différentiable au point M avec

$$\forall H \in E \qquad \mathrm{d}f(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1} .$$

EXERCICE 5 :

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : U \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** si

$$\forall (x,y) \in U^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\, f(x) + t\, f(y) \ .$$

1. On suppose f différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in U^2 \qquad f(y) - f(x) \geq \mathrm{d}f(x)(y-x) \ . \qquad \textbf{(*)}$$

2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout point x de U, la matrice **hessienne** $H(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$ est positive.

Source : François ROUVIÈRE, Petit guide de calcul différentiel, Éditions Cassini, ISBN 2-84225-008-7

- -

1. Supposons f convexe. Soient $x \in U$, $y \in U$. Pour tout $t \in [0,1]$, posons

$$\psi(t) = (1-t)\, f(x) + t\, f(y) - f\big((1-t)x + ty\big) \ .$$

Par hypothèse, on a $\psi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme $\psi(0) = 0$ et que la fonction ψ est dérivable sur $[0,1]$, on en déduit que $\psi'(0) \geq 0$. En tout point $t \in [0,1]$, on a

$$\psi'(t) = f(y) - f(x) - \mathrm{d}f\big((1-t)x + ty\big)(y-x) \ ,$$

donc $\psi'(0) = f(y) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(y-x) \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, supposons **(*)** vérifiée. Fixons $(x,y) \in U^2$ et considérons l'application $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0,1] \qquad \varphi(t) = f\big((1-t)x + ty\big) = f\big(x + t(y-x)\big) \ .$$

Il suffit de montrer que φ est convexe car

$$\forall t \in [0,1] \qquad f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\, f(x) + t\, f(y) \iff \varphi(t) \leq (1-t)\, \varphi(0) + t\, \varphi(1) \ .$$

Nous allons montrer pour cela que φ' est croissante. L'application φ est dérivable sur $[0,1]$ avec $\varphi'(t) = \mathrm{d}f\big(x + t(y-x)\big)(y-x)$. Si $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, l'inégalité **(*)** appliquée à $z_1 = x + t_1(y-x)$ et $z_2 = x + t_2(y-x)$ donne

$$f\big(x + t_2(y-x)\big) - f\big(x + t_1(y-x)\big) \geq \mathrm{d}f\big(x + t_1(y-x)\big)\big((t_2 - t_1)(y-x)\big) \ ;$$

$$f\big(x + t_1(y-x)\big) - f\big(x + t_2(y-x)\big) \geq \mathrm{d}f\big(x + t_2(y-x)\big)\big((t_1 - t_2)(y-x)\big) \ .$$

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$(t_2 - t_1)\Big[\mathrm{d}f\big(x + t_2(y-x)\big)(y-x) - \mathrm{d}f\big(x + t_1(y-x)\big)(y-x)\Big] \geq 0 \ ,$$

soit $\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1)$. Ainsi, φ est dérivable et φ' est croissante sur $[0,1]$, donc φ est convexe, ce qu'il fallait démontrer.

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors, pour tout $(x,y) \in U^2$ fixé, l'application φ utilisée ci-dessus est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f\big(x+t(y-x)\big)(y-x) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x+t(y-x)\big)\ ;$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_i-x_i)(y_j-x_j)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\big(x+t(y-x)\big)\\ &= {}^{t}(Y-X)\cdot H\big(x+t(y-x)\big)\cdot(Y-X)\ .\end{aligned}$$

Si la matrice hessienne H (qui est symétrique d'après le théorème de Schwarz) est positive en tout point, alors $\varphi''(t) \geq 0$, donc φ est convexe, donc f est convexe (*cf.* question **1.**).

Si f est convexe sur U alors, pour tout couple $(x,y) \in U^2$ donné, l'application φ est convexe, donc notamment $\varphi''(0) \geq 0$, donc ${}^{t}(Y-X)\cdot H(x)\cdot(Y-X) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout Y (ou y) de U, la matrice symétrique $H(x)$ est positive (*l'ensemble U étant ouvert, le vecteur $\overrightarrow{xy} = Y-X$ peut prendre toutes les directions dans l'espace*).