Limites et continuité

I Notion de limite pour les fonctions Extension des théorèmes vus pour les suites

I.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Pour s'intéresser à la limite d'une fonction f au point a, il n'est pas nécessaire que f soit définie en a, mais il faut qu'elle soit définie au *voisinage de a* au sens suivant.

Déf. • Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$, a un réel (fini) On dit que f **est définie au voisinage de a** lorsque, au choix :

- $\mathscr{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]a, a+\delta[$ (f est définie à droite de a),
- $\mathscr{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]a-\delta, a[$ (f est définie à gauche de a),
- $\mathscr{D}_f$ contient un ensemble de la forme $]a-\delta[\cup]a+\delta[$ (f est définie des deux côtés de a),

δ étant à chaque fois un réel strictement positif.

On dit que f **est définie au voisinage de $+\infty$** quand $\mathscr{D}_f$ contient un intervalle de la forme $[C, +\infty[$.

On dit que f **est définie au voisinage de $-\infty$** quand $\mathscr{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]-\infty, D]$.

***Exercice* 1** ► Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. En quels points est-il pertinent d'étudier sa limite ?

I.2 Définitions des limites de fonction

Déf. • **1)** Limite d'une fonction en un point fini

Soit a et b deux réels (donc finis) et f une fonction définie au voisinage de a.

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ quand
$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad |x-a|\leqslant\delta \implies |f(x)-b|\leqslant\varepsilon.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ quand
$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists \delta>0,\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad |x-a|\leqslant\delta \implies f(x)\geqslant A.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ quand
$\forall B\in\mathbb{R},\ \exists \delta>0,\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad |x-a|\leqslant\delta \implies f(x)\leqslant B.$

2) Limite d'une fonction en $+\infty$

Soit b un réel (donc fini) et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} b$ quand
$\forall \varepsilon>0,\ \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\geqslant C \implies |f(x)-b|\leqslant\varepsilon.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$ quand
$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\geqslant C \implies f(x)\geqslant A.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$ quand
$\forall B\in\mathbb{R},\ \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\geqslant C \implies f(x)\leqslant B.$

3) Limite d'une fonction en $-\infty$

Soit b un réel (donc fini) et f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} b$ quand
$\forall \varepsilon>0,\ \exists D\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\leqslant D \implies |f(x)-b|\leqslant\varepsilon.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$ quand
$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists D\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\leqslant D \implies f(x)\geqslant A.$

► On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$ quand
$\forall B\in\mathbb{R},\ \exists D\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathscr{D}_f,\quad x\leqslant D \implies f(x)\leqslant B.$

Comme pour les suites, la limite, quand elle existe, est unique.

Thm • Unicité de la limite

Soit a, ℓ et ℓ' qui peuvent être des réels ou $\pm\infty$,
f un fonction définie au voisinage de a.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

ℓ est alors appelé **la limite de la fonction f en a** et on écrit, au choix,

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = \ell.$$

Démo. Semblable aux preuves faites pour les suites, en examinant patiemment tous les cas possibles.

Thm • Limite et caractère borné d'une fonction

Soit f une fonction définie au voisinage de a (fini ou infini).

1) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ **fini**, alors f est bornée au voisinage de a.

2) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors f est non majorée au voisinage de a.

3) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors f est non minorée au voisinage de a.

Démo. Là encore, en revenant aux définitions et en examinant les différents cas possibles.

I.3 Lien entre limites de fonctions et limites de suites

On commence par citer un théorème que nous avons déjà utilisé dans le cours sur les suites.

Thm • Théorème de compositions de limites d'une suite et d'une fonction

Soit f une fonction définie au voisinage de a (fini ou infini), ℓ un réel ou $\pm\infty$,
u une suite à termes dans le domaine de la fonction f.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(X) \xrightarrow[X\to a]{} \ell, \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Astuce Ce théorème peut servir à déterminer la limite d'une suite image d'une autre suite par une fonction, mais aussi à prouver qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

***Exercice* 2** ► Soit u suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(2+u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En admettant que cette suite converge, montrer que la limite de cette suite est solution de l'équation $\ln(2+x) = x$.

***Exercice* 3** ► **1)** Démontrer que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

2) Même question pour la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

Le théorème suivant n'est autre que la réciproque du théorème qu'on vient de voir.

Thm • Caractérisation séquentielle d'une limite de fonction

Soit f une fonction définie au voisinage de a (fini ou infini) ℓ un réel ou $\pm\infty$.

Si, pour *toute* suite u, à termes dans $\mathscr{D}_f$ et telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$,
on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$,

alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Démo. La preuve se fait par contraposition. Sur les notes de cours.

Une première application fort utile de ce théorème est de fournir une preuve du théorème de composition de limites pour les fonctions.

Thm • Théorème de composition de limites

Soit f et g deux fonctions définies respectivement au voisinage de a et de b.
On suppose que $g\circ f$ est définie au voisinage de a.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ g(X) \xrightarrow[X\to b]{} \ell, \end{cases} \quad \text{alors} \quad g\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démo. Sur les notes de cours.

La caractérisation séquentielle de la limite va nous permettre d'étendre aux fonctions de nombreux théorèmes vus pour les suites.

I.4 Extension aux fonctions des théorèmes sur les limites de suites

Thm • Théorèmes d'opérations sur les limites finies

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini)
λ, ℓ et ℓ' des réels.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors :

1) $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$,

2) $\lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell$,

3) $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$,

4) $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{\ell}{\ell'}$ lorsque $\ell' \neq 0$ (sinon cf. théorème suivant)

Démo. Faite sur les notes de cours.

Le théorème précédent se généralise aux situations où ℓ ou ℓ' sont infinis et où le quotient tend vers 0, à condition que la conclusion ne soit pas une des *formes indéterminées* suivantes :

$$\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\ell}{0^{\text{(signe inconnu)}}}.$$

Dans ces situations, il faudra utiliser d'autres outils pour étudier les limites.

Théorèmes d'encadrement

Thm • **Théorème d'encadrement** (version théorème des gendarmes)
Soit f, φ et ψ trois fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini), b un réel (fini).
On suppose que :
1) au voisinage de a, $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,
2) $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $\psi(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.
Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ également.

Thm • **Théorème d'encadrement** (version retour en zéro)
Soit f et ε deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini), b un réel (fini).
On suppose que :
1) au voisinage de a, $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon(x)$,
2) $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Thm • **Théorème de comparaison**
Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini).
On suppose que $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a. Alors :
1) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ également.
2) Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ également.

Passage à la limite dans les inégalités

Thm • Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini).
On suppose que :
1) au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent (finies ou infinies).
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

I.5 Limites à droite et à gauche d'un réel a

Déf. • Limites à gauche et à droite
Soit f une fonction définie au voisinage du réel a (donc fini).
1) La **limite à droite de f au point a** est, lorsqu'elle existe, la limite de la fonction f *restreinte à l'intervalle* $]a, +\infty[$. On la note, au choix :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^+} f.$$

2) La **limite à gauche de f au point a** est, lorsqu'elle existe, la limite de la fonction f *restreinte à l'intervalle* $]-\infty, a[$. On la note, au choix :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^-} f.$$

Illustration

***Exercice* 4** ► Déterminer les limites : de $x \mapsto \frac{1}{x}$ à gauche et à droite de 0 ; de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ à gauche et à droite de 2 ; de la fonction f qui suit, à gauche et à droite de 0 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Remarques.
- Que $f(a)$ existe ou non, $f(a)$ n'intervient pas dans l'étude des limites de f à gauche et à droite en a.
- Les limites à droite et à gauche sont des cas particuliers de limites. Tous les résultats vus précédemment (unicité, opérations, théorèmes d'encadrement etc.) restent donc valables.

I.6 Théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone pour les fonctions ressemble fortement à celui des suites lorsqu'on étudie une limite **à gauche** de b (fini ou infini).

Thm • Théorème de la limite monotone (limites à gauche)

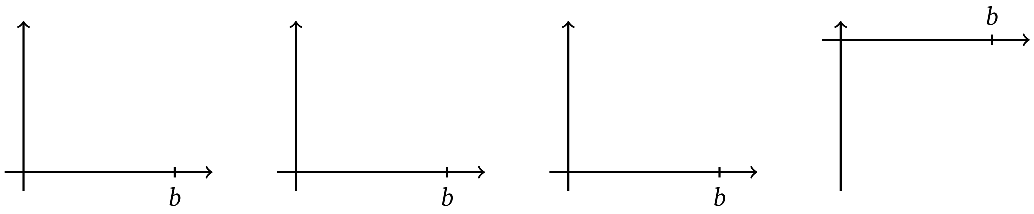
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[*, b[$.

1) Si f est croissante et majorée sur I,
alors f admet une limite à gauche en b qui est finie.

2) Si f est décroissante et minorée sur I,
alors f admet une limite à gauche en b qui est finie.

3) Si f est croissante et non majorée sur I,
alors f a pour limite à gauche $+\infty$ en b.

4) Si f est décroissante et non minorée sur I,
alors f a pour limite à gauche $-\infty$ en b.



Prudence quand on étudie les limites **à droite de a,** les hypothèses changent :

Thm • Théorème de la limite monotone (limites à droite)

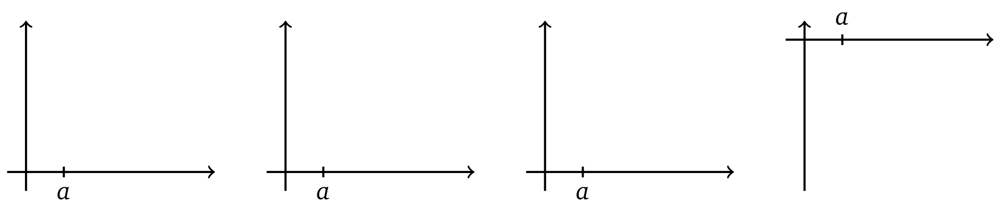
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, *]$.

5) Si f est croissante et **minorée** sur I,
alors f admet une limite à droite en a qui est finie.

6) Si f est décroissante et **majorée** sur I,
alors f admet une limite à droite en a qui est finie.

7) Si f est croissante et **non minorée** sur I,
alors f a pour limite à droite $+\infty$ en a.

8) Si f est décroissante et **non majorée** sur I,
alors f a pour limite à droite $-\infty$ en a.



Démo. ⇝ Dans le cas des limites à droite en $b \in \mathbb{R}$ pour une fonction croissante.

***Exercice* 5** ► Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer qu'en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche et à droite.

2) Prouver que : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

II Fonctions continues

II.1 Continuité en un point

Déf. • Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

1) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue en $\boldsymbol{x_0}$** quand $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue à droite en $\boldsymbol{x_0}$** quand $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

3) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue à gauche en $\boldsymbol{x_0}$** quand $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

La continuité en un point peut s'établir en étudiant les limites de la fonction à gauche et à droite de ce point.

Propr. • Soit f définie sur un intervalle I, x_0 un élément de I qui n'en est pas une borne. Alors f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0. Autrement dit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Démo. ⇝ Consiste à écrire les définitions formelles des limites et à les reformuler.

***Exercice* 6** ► **1)** Étudier la continuité de la fonction partie entière au point $x_0 = 2$.

2) Étudier la continuité en 0 de la fonction g suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ x & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

3) Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$.

Remarques.

- Quand une fonction est définie par plusieurs règles d'association, à la « frontière » entre deux expressions, on étudie **toujours séparément la continuité à droite et à gauche.**
- Quand f est définie au point a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, quand elle existe, est obligatoirement égale à $f(a)$. La seule alternative est que cette limite n'existe pas.

II.2 Continuité sur un intervalle

Déf. • Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=(a,b)$, les bornes $a<b$ pouvant être finies ou infinies, comprises ou non.

On dit que **f est continue sur I** si

1) f est continue en tout point x_0 de $]a,b[$;

2) Si I contient a, alors f est continue à droite en a ;
si I contient b, alors f est continue à gauche en b.

Propr. • Condition suffisante pour la continuité sur un intervalle

Si f est continue en tout point de I, alors f est continue sur I.

Démo. Immédiate puisque si une extrémité est comprise dans I, la continuité en cette extrémité entraîne la continuité à gauche/à droite requise par la définition.

Ex. ✻ **1)** $x\mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$;

2) abs: $x\mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$;

3) E: $x\mapsto \lfloor x\rfloor$ n'est pas continue en 0. Pourtant, elle est continue sur $[0,1[$: elle est continue en chaque point $x_0\in]0,1[$ et *continue à droite* en 0. Le même raisonnement vaut pour tout intervalle de la forme $[n,n+1[$ où $n\in\mathbb{Z}$.

II.3 Opérations sur les fonctions continues

On admettra qu'à l'exception de la fonction partie entière, **toutes les fonctions usuelles** ainsi que toutes les **fonctions constantes, polynomiales ou rationnelles** sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition. La fonction **partie entière** est continue seulement sur les intervalles de la forme $[n,n+1[$ où $n\in\mathbb{Z}$.

On justifie maintenant l'argument « la fonction est continue car elle ne fait intervenir que des fonctions continues sur leurs domaines de définition respectifs ».

Thm • Théorèmes d'opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions définies sur un **<u>même</u>** intervalle I.

1) Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ et fg sont continues sur I ;

2) si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Thm • Composition de fonctions continues

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J, telles que :

1) $f(I)\subset J$ (càd que f est à valeurs dans J).

2) f est continue sur I et g est continue sur J.

Alors $g\circ f$ est continue sur I.

Démo. Découle du théorème de composition de limites.

<u>Attention</u> aux intervalles lorsqu'on compose : ce ne sont pas, en général, les mêmes pour les deux fonctions.

Exercice **7** ► Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

$$x\longmapsto (x+1)\ln(x),\quad x\longmapsto \frac{2x^2+1}{x-3},\quad x\longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\quad \text{et}\quad x\longmapsto \ln(1+x^4).$$

III Théorèmes fondamentaux pour les applications continues

III.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Thm • Théorème <u>des</u> valeurs intermédiaires

Soit $f: I\to\mathbb{R}$, $a<b$ deux points de I.

On suppose que f est continue sur $[a,b]$.

Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=\lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

Illustr.

Rem. ◇ Informellement, si une fonction continue prend deux valeurs $a'=f(a)$ et $b'=f(b)$, elle prend aussi toutes les valeurs intermédiaires entre a' et b'.

Démo. Sur les notes de cours : on construit une solution de l'équation par dichotomie.

Exercice **8** ► Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au point un point fixe.

Le théorème des valeurs intermédiaires peut être reformulé en termes d'image directe d'intervalle.

Thm • **Image directe d'un intervalle par une fonction continue**

L'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Illustr.

Démo. Plan de la démonstration sur les notes de cours ; basé sur la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$ (admise).

Attention Ce théorème dit juste que $f(I)$ est un intervalle, mais pas comment obtenir ses bornes. On sait le faire en revanche lorsque f est strictement monotone (voir ci-dessous !).

III.2 Théorème de la bijection monotone

Thm • **Théorème de la bijection monotone**

Soit f définie sur un intervalle I, continue et strictement monotone. Alors :

1) L'ensemble $f(I)$ est un intervalle donné par le tableau suivant :

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
f **strictement croissante**	$\big[f(a), f(b)\big]$	$\big[f(a), \lim\limits_b f\big[$	$\big]\lim\limits_a f, f(b)\big]$	$\big]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\big[$
f **strictement décroissante**	$\big[f(b), f(a)\big]$	$\big]\lim\limits_b f, f(a)\big]$	$\big[f(b), \lim\limits_a f\big[$	$\big]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f\big[$

2) En notant $J = f(I)$, f est bijective de I dans J.

3) La bijection réciproque f^{-1} de f restreinte à I est continue sur J, strictement monotone de même sens de variation que f et ses limites aux bornes de J sont les bornes de I.

Démo. Sur les notes de cours, dans le cas où $I = [a,b[$ et f strictement croissante.

On rappelle que le théorème de la bijection monotone est équivalent au théorème de la valeur intermédiaire :

Coroll. • **Théorème de la valeur intermédiaire**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Si λ est compris dans l'intervalle J donné dans le tableau ci-dessus, alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle I.

Démo. Résoudre l'équation $f(x) = \lambda$ revient à chercher les antécédents éventuels de λ par l'application f. Or, le théorème de la bijection monotone affirme que f est bijective de I dans J. Puisque $\lambda \in J$, il admet un unique antécédent par f dans l'intervalle I.

III.3 Théorème des bornes

Thm • **Théorème des bornes (de Weierstrass)**

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors f est majorée sur $[a,b]$ et y admet un maximum M,

et f est minorée sur $[a,b]$ et y admet un minimum m.

Démo. Admise en PCSI. La preuve classique fait intervenir le théorème de Bolzano-Weierstrass, au programme en MPSI ; on peut également montrer ce théorème par un raisonnement dichotomique.

Illustr.

Dire que f admet un maximum M signifie que $f(x)$ atteint une valeur maximale M en (au moins) un point $x_{\max}$; le minimum m est atteint en au moins un point $x_{\min}$.

Exercice **9** ► **1)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. Montrer que f est minorée par une constante strictement positive.

2) Étudier la question si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,+\infty[$.

Thm • **Image directe d'un segment par une application continue**

L'image directe d'un segment par une application continue est un segment.

Démo. Sur les notes de cours.