Chapitre 8
Espaces préhilbertiens réels

1. Espaces préhilbertiens réels (rappels de M.P.S.I.)

1.1. Produit scalaire

Définitions 1 : **produit scalaire, espace préhilbertien réel**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- ❖ On appelle produit scalaire toute forme bilinéaire ①, symétrique ② définie positive ④+③.
- ❖ On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- ❖ On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien de dimension finie.

- Ainsi un produit scalaire est une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que
  1. $\forall (x,y) \in E^2 :\ \ \Phi(x,.)$ et $\Phi(.,y)$ sont linéaires
  2. $\forall (x,y) \in E^2 :\ \ \Phi(x,y) = \Phi(y,x)$
  3. $\forall x \in E :\ \ \Phi(x,x) \geqslant 0$
  4. $\forall x \in E :\ \ [\Phi(x,x) = 0] \Rightarrow [x = 0_E]$
- On justifiera toujours avec particulièrement d'attention le caractère ④.
- On note, à la place de $\Phi(x,y)$: $\boxed{(x \mid y)}$ ou $\boxed{< x \mid y >}$ ou $x \cdot y$

1.2. Norme euclidienne

a) Définition

Définition 2 : dans un espace préhilbertien réel, la **norme euclidienne** d'un vecteur x est le réel positif $\boxed{\| x \|_2 = \sqrt{\Phi(x,x)}}$.

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le notera aussi ici : $\| x \|$
- On verra a posteriori (§ e) que c'est bien une norme.

b) Propriétés algébriques des normes euclidiennes

Propriété 1 : **un calcul à faire sans hésiter**

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)}$$

Propriété 2 : **identités de polarisation**

$$\boxed{(x \mid y) = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]}$$

$$\boxed{(x \mid y) = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

$$\boxed{(x \mid y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

Propriété 3 : **propriété du parallélogramme**

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

- Interprétation géométrique des deux dernières **1**.
- Savoir les retrouver de tête…
- Remarque : l'égalité du parallélogramme permet par exemple de tester si une norme est euclidienne.

  Ainsi dans $\mathbb{R}^2$, les normes $\| \, \|_1$ et $\| \, \|_\infty$ ne sont pas euclidiennes **2**.

c) Inégalité de **Cauchy-Schwarz**

Théorème 1 : $\forall (x,y) \in E^2$: $\boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|}$ ou $\boxed{(x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2 \times \|y\|^2}$

L'égalité est réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires

i.e. $\boxed{x = 0_E \textbf{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ y = \lambda x}$

- Démonstration à connaître **3**.
- Se souvenir du démarrage : $F(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 = \dots$
- Exemples : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ $\qquad (ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

d) Inégalité de **Minkowski**, dite aussi **triangulaire**

Théorème 2 : $\forall (x,y) \in E^2$: $\boxed{\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$

L'égalité est réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens

i.e. $\boxed{x = 0_E \textbf{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ / \ y = \lambda x}$

- Démonstration en exercice (élever au carré…)

e) Bilan

Propriété : $\| \, \|_2$ définit bien un norme.

- Démonstration en exercice. Réviser au passage la définition d'une norme.

1.3. Exemples

a) Produit scalaire canonique dans $\boxed{\mathbb{R}^n}$: $\boxed{(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$ $\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}$

… ainsi nommé car, pour ce produit scalaire, la base canonique est orthonormée.

b) Sur $\boxed{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}$: **4**

$$\boxed{(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt} \qquad \boxed{\|f\|_2 = \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{1/2}}$$

c) Sur $\boxed{\ell^2(\mathbb{R})} = \ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum {u_n}^2$ converge : **5**

$$\boxed{(u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n} \qquad \boxed{\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2\right)^{1/2}}$$

On utilise deux inégalités souvent utiles (à retrouver de tête) :

$$\boxed{|\, a \times b \,| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)}$$

d) Exercice : sur $\mathbb{R}_n[X]$: on définit $N(P) = \left(\sum_{i=0}^{n} P(i)^2\right)^{1/2}$.

Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ **6**

1.4. Orthogonalité

a) Définitions

Définitions 3 : **orthogonalité**

Soit E un espace préhilbertien réel.

- Vecteurs orthogonaux : $x, y \in E$ tels que $(x \mid y) = 0$
- Famille orthogonale : $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ telle que $\forall i \neq j : (x_i \mid x_j) = 0$
- Famille orthonormale : $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ telle que $\forall i, j : (x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$
- Sous-espace vectoriels orthogonaux : F et G tels que

$$\forall (x,y) \in F \times G : (x \mid y) = 0$$

b) Propriétés

Propriété 1 : toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

- Démonstration **7**.
- Conséquence : $\boxed{\text{Toute famille orthonormale est libre.}}$

Propriété 2 : **Théorème de Pythagore**

Si la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$ est orthogonale, alors $\boxed{\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2}$

- Démonstration **8**.
- La réciproque n'est vraie que pour $p = 2$.

c) Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

Théorème : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- ❑ $\forall i \in [\![1,n]\!] : x_i = (e_i \mid x)$; ainsi $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x).\, e_i$.
- ❑ $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; ainsi $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)(e_i \mid y)$
- ❑ $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$; ainsi $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2}$
- ❑ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$; ainsi $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid f(e_i))$

d) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définitions 4 : **orthogonal d'un sous-espace vectoriel F**

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

L'orthogonal de F est défini par $\boxed{F^{\perp} = \{x \in E \,/\, \forall y \in F : (x \mid y) = 0\}}$

- Plus généralement on peut définir l'orthogonal de X pour $X \in \mathcal{P}(E)$.

Propriétés :

- ❑ $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à F.
- ❑ $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$
- ❑ Si $F_1 \subset F_2$ alors $F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$
- ❑ Si G est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à F alors $G \subset F^{\perp}$

  Ainsi $F^{\perp}$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E orthogonal à F.
- ❑ $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$
- ❑ La somme $F + F^{\perp}$ est une somme directe
- ❑ Si $F = Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, alors $[x \in F^{\perp}] \Leftrightarrow [\forall j \in [\![1,p]\!] : (x \mid e_j) = 0]$

- Démonstration en exercice **9**.
- On n'a pas forcément $F = (F^{\perp})^{\perp}$ ni $F \oplus F^{\perp} = E$

  … mais ceci est vrai si E est de dimension finie (cf. MPSI)

  … ou même seulement si F est de dimension finie (§ 2)

2. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

2.1. Le résultat fondamental

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie p de E.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors :

- ❑ $F \oplus F^{\perp} = E$: $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.
- ❑ $F = (F^{\perp})^{\perp}$
- ❑ On peut définir le projecteur orthogonal p_F de E sur F et

$$\forall x \in E : \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x).e_i$$

- ❑ $\forall x \in E : d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$.
- ❑ $\forall x \in E : p_F(x)$ est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$

Conséquence (optimisation) : $\forall x \in E, \forall y \in F \setminus \{p_F(x)\} : d(x, p_F(x)) < d(x, y)$

- Démonstration **10**.
- Exemple : si $F = Vect(a)$ avec a unitaire : $\boxed{p_F(x) = (a \mid x).\, a}$
- Rappelons quelques propriétés issues de celles des projecteurs :

Projecteurs orthogonaux
❖ $\forall x \in E : \quad \exists!(y, z) \in F \times F^{\perp} \ / \ x = y + z$ et alors : $\quad p_F(x) = y \quad$ et $\quad p_{F^{\perp}}(x) = z$
❖ $\forall x \in E : \boxed{[y = p_F(x)] \Leftrightarrow [y \in F \text{ et } (x - y) \in F^{\perp}]}$
❖ p_F est un **projecteur** i.e. $\boxed{p_F \in \mathcal{L}(E) \text{ et } p_F \circ p_F = p_F}$
❖ $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E \quad$ et $\quad p_F \circ p_{F^{\perp}} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

2.2. Exercice traité : optimisation

Une recherche de minimum

Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (a, b) & \to \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt \end{cases}$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer

2.3. Inégalité de Bessel

Théorème : Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de E. Alors :

$$\boxed{\forall x \in E : \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2}$$

- Démonstration **11** ; la démonstration montre par ailleurs que,

si $F = Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p)$: $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 + d(x, F)^2}$

2.4. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème : Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille libre de l'espace préhilbertien E.

Alors il existe une et une seule famille orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] : \begin{cases} Vect(e_1, \ldots, e_k) = Vect(u_1, \ldots, u_k) \\ (e_k \mid u_k) > 0 \end{cases}.$$

$(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ s'appelle l'orthonormalisée de Schmidt de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$

- Rappel de l'algorithme de construction **12**.
- Retenir que $\boxed{f_k = u_k - p_{k-1}(u_k) = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k \mid e_i).\, e_i}$ puis $\boxed{e_k = \dfrac{f_k}{\|f_k\|}}$
- De plus la famille et son orthonormalisée ont même orientation.

2.5. Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

a) Suites totales

Définition : On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments dun espace vectoriel E est une **suite totale** de E si $\overline{Vect((e_i)_{i \in \mathbb{N}})} = E$

- Autrement dit : le sous-espace engendré par $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dense dans E.
- Traduction : $\boxed{\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 : \exists p \in \mathbb{N}, \exists y \in Vect(e_0, e_1, \ldots, e_p) \ / \ \|x - y\| \leqslant \varepsilon}$

  ou $\boxed{\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 : \exists\ p \in \mathbb{N}, \exists\ (a_0, a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1} \ / \ \left\| x - \sum_{i=0}^{p} a_i e_i \right\| \leqslant \varepsilon}$
- Justification **13**. Exemple : $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite totale de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

b) Le résultat fondamental

Théorème : Soient $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'un espace préhilbertien E et pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n le projeté orthogonal de E sur $Vect(e_0, e_1, \ldots, e_n)$. Alors $\forall x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

- Démonstration **14**.
- Conséquence (Bessel) $\boxed{\text{la série } \sum (e_i \mid x)^2 \text{ converge et a pour somme } \|x\|^2}$

2.6. Exemples de suites totales de polynômes orthogonaux **15**

a) Sur $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt$

polynômes de Legendre définis par $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ : \ L_n = \dfrac{1}{2^n n!} \left[(X^2 - 1)^n \right]^{(n)}}$

b) Sur $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f \mid g >= \int_{-1}^{1} \dfrac{f(t) g(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt$

polynômes de Tchebychev définis par $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ : \ T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos(x))}$

c) Exercice : la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ est-elle orthogonale ?

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien E

3.1. Matrice orthogonale

- On rappelle que les trois propriétés équivalentes suivantes permettent de définir une matrice orthogonale :

> Théorème : **caractérisations d'une matrice orthogonale et définition**
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
>
> $$\boxed{[{}^tA \times A = I_n] \Leftrightarrow [A \times {}^tA = I_n] \Leftrightarrow [A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = {}^tA]}$$
>
> On appelle **matrice orthogonale** toute matrice vérifiant l'une de ces trois propriétés.

- Démonstration **16**.

Reconnaissance visuelle : les **vecteurs colonnes** de la matrice A constituent une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

3.2. Isométrie ou automorphisme orthogonal

a) Définition, caractérisations

> Théorème : **caractérisations d'une isométrie et définition**
>
> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
>
> Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> ❖ Conservation du produit scalaire :
>
> $$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 : \ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)}$$
>
> ❖ Conservation de la norme :
>
> $$\boxed{\forall x \in E : \left\| u(x) \right\| = \left\| x \right\|}$$
>
> ❖ Conservation du caractère orthonormé d'une base :
>
> l'image d'une base orthonormée de E est une base orthonormée
>
> ❖ A est une matrice orthogonale :
>
> Tout endomorphisme de E vérifiant l'une de ces quatre propriétés est appelé **isométrie vectorielle** ou **automorphisme ortghogonal**.

- Démonstration **17**.

b) Exemple : symétrie orthogonale

> Propriété 1 : toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

> Propriété 2 : **caractérisation d'une symétrie orthogonale par sa matrice**
>
> Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :
>
> $$\boxed{[u \text{ est une symétrie orthogonale}] \Leftrightarrow [A \text{ est symétrique et orthogonale}]}.$$

- Démonstrations **18**.

3.3. Groupe orthogonal

Proposition 1 : Soit $O(E)$ l''ensemble des isométries vectorielles de E.
$(O(E),\circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$ appelé **groupe orthogonal de E**.

- Démonstration **19**.

Proposition 2 : Soit $O(n)$ l''ensemble des matrices orthogonales $n\times n$.
$(O(n),\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$ appelé **groupe orthogonal d'ordre n** .

- Démonstration **20**.

Proposition 3 : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace euclidien E.
L'application $\Phi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} O(E) \to O(n) \\ u \quad \to M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ définit un **isomorphisme** de groupes.

- Démonstration **21**.

Proposition 4 : **déterminant** d'une isométrie, d'une matrice orthogonale.
Le déterminant d'une isométrie (d'une matrice orthogonale) vaut 1 ou -1.
Si $dét(u)=1$, l'isométrie est dite **directe**.

- Démonstration **22**.

3.4. Groupe spécial orthogonal

Proposition 5 :
Soient $SO(E)=\{u\in O(E)\,/\,dét(u)=1\}$ et $SO(n)=\{A\in O(n)\,/\,dét(A)=1\}$

- $(SO(E),\circ)$ est un groupe, sous-groupe de $(O(E),\circ)$.
- $(SO(n),\times)$ est un groupe, sous-groupe de $(O(n),\times)$.
- $\tilde{\Phi}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} SO(E) \to SO(n) \\ u \quad \to M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ définit un **isomorphisme** de groupes.

- Démonstration **23**. Bilan récapitulatif : ↙

$$\begin{array}{ccccccc} \{Id_E\} & \lhd & SO(E) & \lhd & O(E) & \lhd & GL(E) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \{I_n\} & \lhd & SO(n) & \lhd & O(n) & \lhd & GL_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

$\lhd$ *signifie* : sous-groupe de

$\updownarrow$ *signifie* : isomorphe à

3.5. Théorème de stabilité

Proposition : Si $u\in O(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

- Démonstration **24**.

3.6. Spectre d'une matrice orthogonale, d'une isométrie

> Proposition : Si $A \in O(n)$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1,1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset U$
> où U est l'ensemble des nombres complexes de module 1.
> De plus $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \overline{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$

- Démonstration **25**.
- Ainsi les seules valeurs propres réelles potentielles sont 1 et -1.
  les valeurs propres complexes ont toutes pour module 1.

3.7. En dimension 2 (rappels de M.P.S.I.) **26**.

$O(E_2)$	
$O(E_2)$	$O(E_2) - SO(E_2)$
rotations r_θ d'angle θ	réflexion d'axe Δ_α
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$
$SO(2)$	$O(2) - SO(2)$
$O(2)$	
$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ $\chi_A = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$	$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-1,1\}$ $\chi_A = X^2 - 1$

- Les matrices sont du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
- Les premières ont pour déterminant 1 : matrices de rotation.
- Les secondes pour déterminant -1 : ce sont des matrices de symétries orthogonales, qu'on reconnaît au caractère symétrique de la matrice !

Bon à savoir : Δ_α a pour angle polaire α

3.8. Théorème de réduction

> Théorème :
>
> Si $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée de E pour laquelle
>
> $$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} (p,q,s) \in \mathbb{N}^3 \,/\, p + q + 2s = n \\ \forall i \in [\![1, s]\!] : \theta_i \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} \\ R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \end{array},$$

- Démonstration **27**. Illustration en § 3.9 ↙

3.9. En dimension 3

a) Analyse préalable : étude de $O(E_3)$; il résulte de cette étude que

b) Isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3

> Proposition :
>
> Dans un espace euclidien de dimension 3, toute isométrie vectorielle directe a dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ bien choisie une matrice du type : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ où $\alpha \in [0, 2\pi[$.
>
> u est ainsi la **rotation** d'axe orienté $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$ et d'angle α .

- Démonstration **28**.
- Cas particuliers : cas où cette matrice est symétrique **29**.

c) Structure générale de $O(E_3)$ (H.P.) : schéma.

d) Algorithmes : **30**.

- détermination de la nature d'une isométrie donnée par sa matrice
- détermination de ses éléments caractéristiques

4. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

4.1. Définition et première propriété

a) Définition

> Définition : On dit qu'un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si
> $$\forall (x, y) \in E^2 : (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

- On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.
  - C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ ★ exercice

b) Noyau et Image sont supplémentaires orthogonaux

> Propriété : Si s est un endomorphisme symétrique, alors $E = \mathrm{Ker}(s) \underset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(s)$

- Démonstration **31**.
- En particulier : $\mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Im}(s)^{\perp}$

4.2. Exemples : projecteurs orthogonaux, involutions orthogonales

> Propriétés :
>
> ① Les seuls projecteurs symétriques sont les projecteurs orthogonaux.
>
> ② Les seules involutions symétriques sont les symétries orthogonales.

- démonstration **32**.

4.3. Lien avec les matrices symétriques

Théorème : Soient $\mathcal{B}$ une base orthonomée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

[u est un endomorphisme symétrique] $\Leftrightarrow$ [A est une matrice symétrique].

- Démonstration **33**.
- On rappelle à ce sujet que : $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})}$

et que : $\boxed{\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\dim(A_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}}$ Démo **34**.

4.4. Théorème de stabilité

Proposition : Si s est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par s, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par s.

- Démonstration **35**.

4.5. Réduction : théorèmes spectraux

a) Lemmes fondamentaux

Lemme 1 : Si s est un endomorphisme symétrique, alors le polynôme caractéristique de s est scindé dans $\mathbb{R}$. En particulier : $\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(s) = Sp_{\mathbb{C}}(s)}$

autrement dit : toutes les valeurs propres de s (dans $\mathbb{C}$) sont réelles.

- Démonstration **36**.

Lemme 2 : Si s est un endomorphisme symétrique, alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

- Démonstration **37**.

b) Théorème spectral pour les endomorphisme symétriques

Théorème spectral : Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. On dit aussi qu'il est "**orthodiagonalisable**".

- Autrement dit :

il existe une base orthonomée $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(s)$ est diagonale.

- Démonstration **38**. On a ainsi : $\boxed{E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in Sp(s)}} E_\lambda}$

c) Théorème spectral pour les matrices symétriques

Théorème spectral pour les matrices :

$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \exists P \in O(n) \; / \; P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

- Démonstration **39**. ☺ Intérêt : $P^{-1} = {}^tP$! Ainsi à retenir :

Toute matrice symétrique est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

- On a aussi $\Delta = P^{-1}AP = {}^tPAP$.

d) Stratégie pour la diagonalisation d'une matrice symétrique de taille 3

- Si χ_A admet trois valeurs propres distinctes λ, μ et ν :
  - déterminer $u \in E_\lambda$ et $v \in E_\mu$
  - calculer alors $w = u \wedge v$: $w \in E_\nu$
- Si χ_A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ :
  - commencer par la valeur propre double :

    E_μ est un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ car $rg(A - \mu I) = 1$
  - ainsi $u = (a, b, c) \in E_\lambda$ car $E_\lambda \perp E_\mu$
  - choisir $v \in E_\mu$
  - calculer alors $w = u \wedge v$: $w \in E_\mu$

Remarque : la base (u, v, w) est alors nécessairement orthogonale
on peut alors la normaliser
la matrice de passage P sera alors orthogonale et donc $P^{-1} = {}^tP$

Exemple traité : **40**.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

☺