SEMAINE 5
SUITES RÉELLES - TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

EXERCICE 1 :

1. Soit $u = (u_n)$ une suite réelle bornée telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de u est un segment de $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ une fonction continue, soit $u = (u_n)$ une suite définie par $u_0 \in [\alpha, \beta]$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que la suite (u_n) converge.

- -

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \{u_p\ ;\ p \geq n\}$. On a

$$l \in A \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \cap U_n \neq \emptyset \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad l \in \overline{U_n}\ .$$

Donc l'ensemble $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, A est borné (évident) et A est non vide (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Il reste à montrer que A est un intervalle.

Soient a et b deux éléments de A avec $a < b$. Soit $c \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min\{c-a, b-c\}$. On a alors $a < c - \varepsilon < c < c + \varepsilon < b$.

Montrons que, pour tout entier N, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, ce qui prouvera que $c \in A$: comme a et b sont valeurs d'adhérence de u, il existe des suites extraites de u convergeant vers a et b respectivement. Plus précisément, on peut construire deux applications φ et ψ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telles que

$$\varphi(0) < \psi(0) < \varphi(1) < \psi(1) < \ldots < \varphi(k) < \psi(k) < \varphi(k+1) < \psi(k+1) < \ldots$$

avec $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = a$ et $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\psi(k)} = b$.

Il existe un entier K_1 tel que, pour $k \geq K_1$, on ait $u_{\varphi(k)} < c - \varepsilon$ et $u_{\psi(k)} > c + \varepsilon$. Par ailleurs, il existe un entier N tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Soit enfin K_2 un entier tel que $\varphi(K_2) > N$ (possible car $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(k) = +\infty$). En posant $K = \max\{K_1, K_2\}$, on a, pour tout $k \geq K$,

- $u_{\varphi(k)} < c - \varepsilon$,
- $u_{\psi(k)} > c + \varepsilon$,
- $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \in [\![\varphi(k), \psi(k) - 1]\!]$.

Il existe donc au moins un entier n dans l'intervalle $[\![\varphi(k)+1, \psi(k)-1]\!]$ tel que $u_n \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$: il suffit de considérer $n = \min\{m > \varphi(k) \mid u_m > c - \varepsilon\}$. L'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ est donc infini, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve que c est valeur d'adhérence de la suite u.

2. Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u (on a $A \subset [\alpha, \beta]$), soit $c \in A$, soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de limite c. De $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)+1} = c$ mais, la fonction f étant continue au point c,

$$\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to\infty} f\big(u_{\varphi(n)}\big) = f(c)\ ,$$

donc $f(c) = c$.

Moralité : les valeurs d'adhérence de la suite u sont toutes des points fixes de la fonction f.

Si la suite u admettait deux valeurs d'adhérence distinctes a et b avec $a < b$, alors tout point intermédiaire entre a et b serait aussi valeur d'adhérence de u (question **a.**), donc serait un point fixe de f ; la suite u prendrait alors nécessairement des valeurs dans l'intervalle $]a, b[$ (disons $\exists n \in \mathbb{N} \quad u_n = c \in]a, b[$), mézalor la suite u serait stationnaire de valeur c, ce qui est bien sûr contradictoire.

La suite u admet donc une seule valeur d'adhérence ce qui, pour une suite à valeurs dans un compact, signifie qu'elle converge.

EXERCICE 2 :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite u est **dense modulo** 1 si l'ensemble $\{u_n - E(u_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

1. Soit x un réel irrationnel. Montrer que la suite u définie par $u_n = nx$ est dense modulo 1.

2. Montrer que l'écriture décimale du nombre 2^n $(n \in \mathbb{N})$ peut commencer par une séquence de chiffres arbitraire.

Source : article de Bruno LANGLOIS, Écriture décimale des termes de certaines suites d'entiers, paru dans la RMS (Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur, éditions Vuibert) numéro 3-4, de novembre/décembre 1999.

- -

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $v_n = nx - E(nx)$ est un irrationnel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et appartient donc à l'un des intervalles $\left]\dfrac{j}{N}, \dfrac{j+1}{N}\right[$ $\quad(0 \le j \le N-1)$. Comme il y a une infinité de nombres v_n (tous distincts puisque x est irrationnel) dans un nombre fini d'intervalles (*c'est le principe des tiroirs*), on peut en trouver deux dans un même intervalle, donc il existe deux entiers p et q (avec $p < q$ par exemple, notons $q = p+k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$) tels que $0 < |v_q - v_p| < \dfrac{1}{N}$. Posons $\alpha = v_q - v_p = v_{p+k} - v_p$. On a alors $kx = \alpha + K$, où K est un entier relatif.

- $\triangleright$ Supposons $\alpha > 0$. Pour tout n entier naturel, on a $nkx = n\alpha + nK$ donc, tant que $n\alpha < 1$, c'est-à-dire pour $n \le M = E\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, on a $v_{nk} = nkx - E(nkx) = n\alpha$. Les nombres v_{nk} $(0 \le n \le M)$ "remplissent donc l'intervalle $[0, 1]$ à α près", c'est-à-dire : pour tout réel a appartenant à $[0, 1]$, on peut trouver un nombre v_{nk} vérifiant $|v_{nk} - a| \le \alpha$.
- $\triangleright$ Supposons $\alpha < 0$. Dans ce cas, pour $1 \le n \le E\left(\dfrac{1}{|\alpha|}\right)$, on a $v_{nk} = 1 - n|\alpha|$ et ces nombres remplissent encore l'intervalle $[0, 1]$ à $|\alpha|$ près.

Dans les deux cas (puisque $|\alpha| \le \dfrac{1}{N}$), les nombres v_n remplissent l'intervalle $[0, 1]$ à $\dfrac{1}{N}$ près. L'entier N étant arbitraire, on a prouvé que l'ensemble $\{v_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

2. Notons log le logarithme décimal.

Soit a un entier naturel non nul, d'écriture décimale $a = [a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0]$. L'écriture décimale du nombre 2^n "commence par a" s'il existe un entier naturel k tel que

$$a \cdot 10^k \leq 2^n < (a+1) \cdot 10^k \ ,$$

c'est-à-dire

$$k + \log(a) \leq \log(2^n) < k + \log(a+1) \qquad (k \in \mathbb{N}) \ ,$$

c'est-à-dire si et seulement si $\log(a) \leq n\log(2) < \log(a+1)$ modulo 1. *Pour être précis, cette condition signifie*

$$\log(a) - E\big(\log(a)\big) \leq n\log 2 - E(n\log 2) < \log(a+1) - E\big(\log(a+1)\big)$$

sauf dans le cas particulier où $a+1$ est une puissance de 10, où le dernier membre (qui vaut alors 0) doit être remplacé par 1.

Le nombre $x = \log 2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$ est irrationnel (si on avait $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, alors on aurait $5^p = 2^{q-p}$, ce qui est impossible). La suite de terme général $u_n = n\log 2$ est donc dense modulo 1, ce qui entraîne qu'il existe au moins un entier naturel n tel que $u_n \in [\log(a), \log(a+1)[$ modulo 1, ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 3 :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite u est **dense modulo** 1 si l'ensemble $\{u_n - E(u_n) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

On définit la suite $\Delta u = v$ par $v_n = (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$, puis la suite $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

1. Soit v une suite réelle telle que $\begin{cases} \lim\limits_n v_n & = \ +\infty \\ \lim\limits_n (\Delta v)_n & = \ 0 \end{cases}$. Montrer que v est dense modulo 1.

2. Soit u une suite réelle telle que $\begin{cases} \lim\limits_n (\Delta u)_n & = \ +\infty \\ \lim\limits_n (\Delta^2 u)_n & = \ 0 \end{cases}$. Montrer que u est dense modulo 1.

3. Montrer que l'écriture décimale du nombre $n!$ peut commencer par une séquence de chiffres arbitraire.

4. Même question pour l'écriture décimale de n^n.

Source : article de Bruno LANGLOIS, Écriture décimale des termes de certaines suites d'entiers, paru dans la RMS (Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur, éditions Vuibert) numéro 3-4, de novembre/décembre 1999.

- -

1. Soit $\varepsilon > 0$, soit n_0 un entier tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |(\Delta v)_n| < \varepsilon$, soit $N = E(v_{n_0}) + 1$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que $v_{n_1} > N + 1$. Alors, lorsque n décrit l'intervalle entier $[\![n_0, n_1]\!]$, le nombre v_n s'approche de tout réel à ε près modulo 1.

Précisons pour ceux qui aiment les rédactions détaillées : supposons en fait $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$. Soit $a \in [0,1]$, soit le réel $x = N + a$; on a alors $v_{n_0} < x$ et $v_{n_1} > x$, soit n le plus grand entier appartenant à l'intervalle $[\![n_0, n_1 - 1]\!]$ pour lequel $v_n < x$ (il est clair que cela a un sens). On a $v_n < x \leq v_{n+1}$ et $(\Delta v)_n = v_{n+1} - v_n < \varepsilon$, donc $|v_n - x| < \varepsilon$ et $|v_{n+1} - x| < \varepsilon$, donc l'un au moins des deux nombres $|v_n - E(v_n) - a|$ et $|v_{n+1} - E(v_{n+1}) - a|$ est inférieur à ε (*les deux la plupart du temps, sauf lorsqu'un entier vient malencontreusement s'intercaler entre v_n et x, ou entre x et v_{n+1}*).

Ainsi, les suites $(\sqrt{n})$ ou $(\ln n)$ sont denses modulo 1.

2. *Indication éventuelle : montrer que, pour tout entier $m > 4$, il existe un entier n_0 tel que l'on ait $\dfrac{1}{m} \leq (\Delta u)_{n_0+k} \leq \dfrac{4}{m}$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$.*

D'après ce qui précède, la suite $v = \Delta u$ est dense modulo 1 : si on se donne un entier $m > 4$, il existe un entier n_0 tel que l'on ait $\dfrac{2}{m} < (\Delta u)_{n_0} < \dfrac{3}{m}$ modulo 1 et tel que $|(\Delta^2 u)_n| < \dfrac{1}{m^2}$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, on a l'encadrement de $(\Delta u)_{n_0+k}$:

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{m} - m\,\frac{1}{m^2} < (\Delta u)_{n_0+k} = (\Delta u)_{n_0} + \sum_{p=0}^{k-1} (\Delta^2 u)_{n_0+p} < \frac{3}{m} + m\,\frac{1}{m^2} = \frac{4}{m}\ .$$

Pour n variant de n_0 à $n_0 + m$, la suite u fait des "pas" compris entre $\dfrac{1}{m}$ et $\dfrac{4}{m}$ modulo 1 ; comme il y a m pas plus grands que $\dfrac{1}{m}$, u_n a balayé tout le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ("la droite réelle modulo 1") à $\dfrac{4}{m}$ près : cette fois, les amateurs de rédactions détaillées se débrouilleront tous seuls! La suite u est donc dense modulo 1.

Par exemple, les suites $(n\sqrt{n})$, ou (S_n) avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, sont denses modulo 1.

3. Si (X_n) est une suite d'entiers naturels non nuls, le fait que l'écriture décimale de l'entier X_n "puisse commencer par une séquence arbitraire" équivaut à la densité modulo 1 de la suite $u_n = \log(X_n)$. Montrons au moins que cette condition est suffisante, ce qui est utilisé ici.

Si $u_n = \log(X_n)$ est dense modulo 1, et si a est un entier naturel, il existe un entier naturel n tel que $\log(a) \leq u_n < \log(a+1)$ modulo 1, ce qui signifie que

$$k + \log(a) \leq u_n < k + \log(a+1) \qquad \text{pour un certain entier naturel} \quad k\ ,$$

c'est-à-dire $a \cdot 10^k \leq X_n < (a+1) \cdot 10^k$, donc l'écriture décimale du nombre X_n "commence par a".

Pour $X_n = n!$, on a $u_n = \log(n!) = \sum_{k=2}^{n} \log k$; alors $(\Delta u)_n = \log(n+1) \to +\infty$, puis $(\Delta^2 u)_n = \log\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \to 0$, donc u est dense modulo 1, ce qu'il fallait prouver.

4. Avec $X_n = n^n$, on a $u_n = \log(X_n) = n \log n$, alors $(\Delta u)_n = \log(n+1) + n \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to +\infty$ et $(\Delta^2 u)_n = \log\left[\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\right] \to \log\left(\dfrac{1}{e}\, e\right) = 0$, donc u est dense modulo 1.

EXERCICE 4 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **semi-continue inférieurement** (en abrégé s.c.i.) si on a

$$\forall x_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon\ .$$

a. Donner des exemples de fonctions s.c.i.

b. Montrer que toute fonction s.c.i. sur un segment de $\mathbb{R}$ admet un minimum.

- -

a.

b. Soit f une fonction s.c.i. sur le segment $I = [a, b]$.

- Montrons d'abord que f est minorée sur I.

  Si ce n'était pas le cas, on pourrait construire une suite (x_n) de points de $[a, b]$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. On peut en extraire une sous-suite $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$, convergeant vers un point y de I. Mais cela est absurde car (en prenant la définition de "s.c.i." avec $x_0 = y$ et $\varepsilon = 1$), il existe un voisinage de y dans lequel $f(x) \geq f(y) - 1$. Les $x_{\varphi(n)}$ étant dans ce voisinage pour n assez grand, on a une contradiction.

- Montrons maintenant que la borne inférieure est atteinte : soit $m = \inf\limits_{x \in I} f(x)$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in I$ tel que **(*)** $m \leq f(x_n) \leq m + \dfrac{1}{n}$. De (x_n), on extrait encore une sous-suite $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$, convergeant vers un $y \in I$. Des inégalités **(*)**, on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = m$.

  Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe alors un $\alpha > 0$ tel que

  $$\forall x \in I \qquad |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq f(y) - \varepsilon\ .$$

  Comme (y_n) converge vers y, il existe un rang N à partir duquel $f(y_n) \geq f(y) - \varepsilon$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = m$, par passage à la limite, on déduit $m \geq f(y) - \varepsilon$.

  Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a $m \geq f(y)$, donc $f(y) = m$ et la borne inférieure est atteinte.

EXERCICE 5 :

Soit $x \in\,]0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) d'entiers naturels, croissante avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$, telle que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_n} .$$

Décrire un algorithme de calcul des u_n.

2. Montrer que x est rationnel si et seulement si la suite (u_n) est stationnaire.

3. Le nombre $e^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Source : Daniel DUVERNEY, Théorie des nombres, Éditions Dunod, ISBN 2-10-004102-9

- -

1. • **Unicité :** Supposons l'existence d'une telle suite (u_n). On a alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \frac{1}{u_0 u_1 u_2} + \cdots = \frac{1}{u_0}\left(1 + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 u_2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{u_0}\left(1 + \frac{1}{u_1}\big(1 + \frac{1}{u_2}(1 + \cdots)\big)\right) , \end{aligned}$$

ce que l'on va essayer d'écrire plus rigoureusement. Posons donc $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_n u_{n+1} \cdots u_{n+k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la série définissant x_n est évidemment convergente), on a alors $x_0 = x$ et, pour tout entier naturel n, on a $x_n = \dfrac{1}{u_n}(1 + x_{n+1})$, soit encore $x_{n+1} = u_n x_n - 1$ ou $u_n = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. La suite (u_n) étant croissante, on a

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+1+k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_n u_{n+1} \cdots u_{n+k}} = x_n ,$$

donc la suite (x_n) est décroissante ; on en déduit l'encadrement $\dfrac{1}{x_n} < u_n \leq \dfrac{1}{x_n} + 1$. Comme u_n est un entier, on a donc $u_n = 1 + E\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.

On a ainsi prouvé (sous réserve d'existence) l'unicité de la suite (u_n), et l'algorithme de calcul est le suivant : poser $x_0 = x$ puis, pour tout entier naturel n, poser $u_n = 1 + E\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ et $x_{n+1} = u_n x_n - 1$.

• **Existence :** Réciproquement, considérons les u_n construits par cet algorithme. On a $u_0 = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 2$, donc $\dfrac{1}{x_0} < u_0 \leq \dfrac{1}{x_0} + 1$ d'où $1 < u_0 x_0 \leq 1 + x_0$. Il en résulte $0 < x_1 = u_0 x_0 - 1 \leq x_0$ puis, de la même façon, $0 < x_2 \leq x_1$. Par une récurrence immédiate, la suite (x_n) est décroissante à valeurs strictement positives. De $u_n = 1 + E\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$, on déduit que la suite (u_n) est croissante et ses termes sont tous des entiers naturels au moins égaux à 2.

Il reste à montrer que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_n}$. La convergence de la série résulte immédiatement de $u_n \geq 2$. On montre facilement que

$$x = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_n} + \frac{x_{n+1}}{u_0 u_1 \cdots u_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a $0 < x_{n+1} \leq x_0$ et $u_0 u_1 \cdots u_n \geq 2^n$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{u_0 u_1 \cdots u_n} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

L'écriture du nombre x sous la forme $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_n}$ est son **développement en série de Engel**. *Avec $u_n = n + 2$ par exemple, le lecteur obtiendra le développement en série de Engel du nombre $e - 2$.*

2. • Si la suite (u_n) est stationnaire (constante à partir du rang N), alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_{N-1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_N^k} \right) \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_{N-2}} + \frac{1}{u_0 u_1 \cdots u_{N-1}} \cdot \frac{u_N}{u_N - 1} \end{aligned}$$

et le nombre x est rationnel.

• Réciproquement, supposons x rationnel : $x = x_0 = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_0}{b_0}$ avec a et b entiers naturels non nuls. Alors $u_0 = E\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1 = q_0 + 1$ avec $q_0 = b_0 \text{ div } a_0$ (quotient dans la division euclidienne : $b_0 = a_0 q_0 + r_0$, avec $0 \leq r_0 < a_0$). Ensuite,

$$x_1 = u_0 x_0 - 1 = (q_0 + 1)\frac{a_0}{b_0} - 1 = \frac{q_0 a_0 + a_0 - b_0}{b_0} = \frac{a_0 - r_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_0}$$

avec $a_1 \in \mathbb{N}$ et $1 \leq a_1 \leq a_0$. On réitère : $x_2 = \dfrac{a_1 - r_1}{b_0}$ avec $r_1 = b_0 \bmod a_1$ (reste dans la division euclidienne), donc $x_2 = \dfrac{a_2}{b_0}$ avec $a_2 \in \mathbb{N}$ et $1 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$.

Par une récurrence immédiate, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{a_n}{b_0}$ et (a_n) est une suite décroissante d'entiers naturels, elle est donc stationnaire. La suite (x_n) est donc aussi stationnaire, et il en est de même de (u_n) puisque $u_n = 1 + E\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.

3. Partons du développement en série entière

$$\operatorname{ch}\sqrt{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

$$= \quad 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 15} + \cdots + \frac{1}{6 \times 15 \times \cdots \times n(2n-1)} + \cdots$$

puisque $\dfrac{2^n}{(2n)!} = \dfrac{2^{n-1}}{\big(2(n-1)\big)!} \times \dfrac{1}{n(2n-1)}$. Le nombre $x = \operatorname{ch}\sqrt{2} - 2 \in]0,1]$ admet donc un développement en série de Engel non stationnaire avec $u_n = (n+2)(2n+3)$ (*il faut décaler les indices de deux unités pour retrouver les notations de l'énoncé*), il est donc irrationnel.

Si $e^{\sqrt{2}}$ était rationnel, alors $\operatorname{ch}\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ le serait aussi, donc $e^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 6 :

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que :

- soit $G = \{0\}$,
- soit $G = m\,\mathbf{Z}$ avec $m = \min(G \cap \mathbb{R}_+^*)$,
- soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

Que dire des sous-groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$?

2. Soit l'ensemble $G = \{x + y\sqrt{2}\ ;\ (x,y) \in \mathbf{Z}^2\ ,\ x^2 - 2y^2 = 1\}$.

Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ et que $\min(G \cap]1, +\infty[) = 3 + 2\sqrt{2}$. En déduire une explicitation des éléments du groupe G.

3. On note S l'ensemble des points à coordonnées positives entières sur l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$, c'est-à-dire

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}\ .$$

Montrer que l'on peut écrire $S = \{(x_n, y_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, où (x_n) et (y_n) sont deux suites strictement croissantes d'entiers naturels. Expliciter x_n et y_n.

Source : E. RAMIS, Claude DESCHAMPS, Jacques ODOUX, Analyse 1, Éditions Masson, ISBN 2-225-80098-7

- -

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, supposons $G \neq \{0\}$. Alors l'ensemble $E = G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, soit m sa borne inférieure.

- Si $m = 0$, montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Si u et v sont deux réels tels que $u < v$, alors il existe $g \in G$ vérifiant $0 < g < v - u$, mais alors $g\,\mathbf{Z} \subset G$; comme $g\,\mathbf{Z}$ rencontre le segment $[u, v]$, on a prouvé que G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Si $m > 0$, commençons par montrer que $m \in G$: si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver au moins un élément g de G dans l'intervalle $]m, 2m[$ (puisque $2m$ n'est pas un minorant de $E = G \cap \mathbb{R}_+^*$), puis un élément h de G dans $]m, g[$ (puisque g n'est pas un minorant de E) ; alors on a $g - h \in G$ et $0 < g - h < m$, ce qui est absurde.

  Puisque $m \in G$, on a $m\,\mathbf{Z} \subset G$. Inversement, soit $g \in G$, soit $k = E\left(\dfrac{g}{m}\right)$, alors $km \in G$ et

$km \leq g < (k+1)m$, donc $g - km \in G$ avec $0 \leq g - km < m$, ce qui prouve que $g - km = 0$ donc $g \in m\,\mathbf{Z}$. On a donc $G = m\,\mathbf{Z}$.

L'application $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un isomorphisme de groupes, et c'est aussi un homéomorphisme. On en déduit que, si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, alors

- soit $G = \{1\}$,

- soit $G = a^{\mathbf{Z}} = \{a^k\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}$ avec $a = \min(G \cap\,]1, +\infty[)$,

- soit G est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soient $z = x + y\sqrt{2}$ et $z' = x' + y'\sqrt{2}$ deux éléments de G ; alors $zz' = x'' + y''\sqrt{2}$ avec $\begin{cases} x'' = xx' + 2yy' \\ y'' = xy' + yx' \end{cases}$ (ce sont des entiers relatifs) et

$$x''^2 - 2y''^2 = (xx' + 2yy')^2 - 2(xy' + yx')^2 = (x^2 - 2y^2)(x'^2 - 2y'^2) = 1\ ,$$

donc $zz' \in G$. Par ailleurs, $1 \in G$ et, si $z = x + y\sqrt{2} \in G$, alors $\dfrac{1}{z} = x - y\sqrt{2} \in G$.

L'ensemble G est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

On note que $z \in G \iff -z \in G$, il suffit donc de déterminer l'ensemble $H = G \cap \mathbb{R}_+^*$, qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Posons enfin $E = G \cap\,]1, +\infty[= H \cap\,]1, +\infty[$. On a effectivement $3 + 2\sqrt{2} \in E$, montrons que c'est le plus petit élément de E.

Si $z = x + y\sqrt{2} \in E$, on a $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, $x + y\sqrt{2} > 1$ et $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$.

- on ne peut avoir $x \leq 0$ et $y \leq 0$, c'est clair!

- on ne peut avoir $x \leq 0$ et $y \geq 0$ car alors $\dfrac{1}{x + y\sqrt{2}} = x - y\sqrt{2}$ serait négatif, absurbe !

- on ne peut avoir $x \geq 0$ et $y \leq 0$ car cela impliquerait $x - y\sqrt{2} = \dfrac{1}{x + y\sqrt{2}} \geq x + y\sqrt{2}$,

impossible avec $x + y\sqrt{2} > 1$.

On a donc $x > 0$ et $y > 0$. On ne peut avoir ni $y = 0$ ni $y = 1$ (vérifications immédiates avec $x^2 - 2y^2 = 1$), et si $y \geq 3$, alors $x^2 = 1 + 2y^2 \geq 19$, donc $x \geq 5$ et $z \geq 5 + 3\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{2}$.

On a ainsi prouvé que $\min(G \cap\,]1, +\infty[) = 3 + 2\sqrt{2}$, donc $G \cap \mathbb{R}_+^* = (3 + 2\sqrt{2})^{\mathbf{Z}}$ et $H = \pm(3 + 2\sqrt{2})^{\mathbf{Z}} = \{\varepsilon(3 + 2\sqrt{2})^n\ ;\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\ ,\ n \in \mathbf{Z}\}$.

Notons que $G \cap [1, +\infty[= (3 + 2\sqrt{2})^{\mathbb{N}} = \{(3 + 2\sqrt{2})^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

3. Notons d'abord T l'ensemble des points à coordonnées entiers relatifs sur l'hyperbole (H) :

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}\ .$$

On vérifie (*c'est facile*) que l'application $\varphi : T \to G$, $(x, y) \mapsto x + y\sqrt{2}$ est une bijection. On vérifie aussi que $G \cap [1, +\infty[= \{x + y\sqrt{2}\ ;\ (x, y) \in \mathbb{N}^2\ ,\ x^2 - 2y^2 = 1\}$ (l'inclusion dans le sens $\subset$ a été démontrée ci-dessus, l'autre est immédiate).

On a donc $S = \varphi^{-1}(G \cap [1, +\infty[)$, c'est-à-dire que S est l'ensemble des couples (x_n, y_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $(3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. Il est clair que x_n et y_n sont des entiers naturels, on peut préciser que

$$x_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k}\, 3^{n-2k}\, 8^k \qquad \text{et} \qquad y_n = 2 \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_n^{2k+1}\, 3^{n-2k-1}\, 8^k\ .$$

On a aussi $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$, d'où la stricte croissance des suites (x_n) et (y_n), et un calcul de proche en proche. Ainsi, si on note M_n le point de coordonnées (x_n, y_n), on a

$$M_0(1,0)\ ; \quad M_1(3,2)\ ; \quad M_2(17,12)\ ; \quad M_3(99,70)\ ; \quad M_4(577,408)\ ; \quad \cdots$$