Théorème de Rolle

Exercice 1 [01370] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 2 [01371] [Correction]
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 3 [00256] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 4 [01372] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

(a) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

(b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
On pourra introduire une fonction auxiliaire.

Exercice 5 [00262] [Correction]
On pose $f\colon x \mapsto \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$.

(a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n.

(b) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

(c) Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $\left]-1\,;1\right[$.

Exercice 6 [02820] [Correction]
Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b, c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d).$$

Exercice 7 [01376] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 8 [01373] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 [01374] [Correction]
Soit $f\colon \left[0\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0).$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10 [01377] [Correction]
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0\,;a]$ et dérivable sur $\left]0\,;a\right]$.
On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]0\,;a\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 11 [01380] [Correction]
Soit $a > 0$ et $f\colon [0\,;a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

(a) Montrer que la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ s'annule sur $\left]0\,;a\right[$.

(b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 12 [01375] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0, f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \left]a\,;b\right[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 13 [03436] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x

Exercice 14 [05027] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en a et b.

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f'(c) + cf(c) = 0$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Si f est T-périodique avec $T > 0$ alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et T, la dérivée de f s'annule.

Exercice 2 : [énoncé]
Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Exercice 3 : [énoncé]
f admet un maximum sur $[a\,;b]$ qui ne peut être ni en a, ni en b : la dérivée de f s'y annule.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les $n+1$ points où nous savons que f s'annule.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_{i-1}\,;a_i]$.
En effet f est continue sur $[a_{i-1}\,;a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}\,;a_i[$ et $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_{i-1}\,;a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque $b_1 < a_1 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_n$, les $b_1, \ldots, b_n$ sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule au moins n fois.
De même, f'' s'annule au moins $n-1$ fois et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

(b) Considérons $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. g s'annule $n+1$ fois donc g' s'annule au moins n fois.
Or $g'(x) = \big(f'(x) + \alpha f(x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x}$ donc les annulations de g' sont les annulations de $f' + \alpha f$.
Puisque $f' + \alpha f$ s'annule n fois, la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ donc $\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$ est de degré n.

(b) Introduisons $g\colon x \mapsto (x^2-1)^n$ de sorte que $f = g^{(n)}$
Quand $x \to 1$ On a

$$g(x) = (x+1)^n(x-1)^n = 2^n(x-1)^n + \mathrm{o}\big((x-1)^n\big).$$

Par la formule de Taylor-Young, on a parallèlement

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \mathrm{o}\big((x-1)^n\big)$$

donc

$$f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaire

$$f(-1) = (-1)^n 2^n n!$$

(c) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $g\colon x \mapsto (x^2-1)^n$, 1 et -1 sont donc racines de $g, g', \ldots, g^{(n-1)}$.
En appliquant le théorème de Rolle, on montre que $g', g'', \ldots, g^{(n)} = f$ admettent resp. $1, 2, \ldots, n$ racines dans $]-1\,;1[$. Puisque f est de degré n, celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 6 : [énoncé]
Considérons

$$g\colon x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 7 : [énoncé]
En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b : il existe $c_1 \in]a\,;b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f' entre a et c_1 : il existe $c_2 \in]a\,;c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
...
En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n-1)}$ entre a et c_{n-1} : il existe $c_n \in]a\,;c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.
$c = c_n$ résout le problème.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0, d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in]a\,;0[$ et $\beta \in]0\,;b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et β, il existe $c \in]\alpha\,;\beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 : [énoncé]
Si f est constante, la propriété est immédiate.
Sinon, il existe $x_0 \in]0\,;+\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.
Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0\,;x_0[$ tel que $f(a) = y$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in]x_0\,;x_1]$ tel que $f(b) = y$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a\,;b]$, on peut alors conclure.

Exercice 10 : [énoncé]
Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
Puisque $f'(a) < 0$, il existe $b \in]0\,;a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et b, il existe $\alpha \in]0\,;b[$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et a, on obtient $c \in]\alpha\,;a[\subset]0\,;a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) La fonction $g\colon x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;a]$.
Quand $x \to 0$,
$$g(x) \to f'(0) = 0.$$
Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
Puisque g est continue sur $[0\,;a]$, dérivable sur $]0\,;a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in]0\,;a[$.

(b)
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$
donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.
La tangente à f en c a pour équation :
$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x.$$
Elle passe par l'origine.

Exercice 12 : [énoncé]
Puisque $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $x_1 \in]a\,;b[$ tel que $f(x_1) > 0$.
En effet, si pour tout $x_1 \in]a\,;b[$, $f(x_1) \leq 0$ alors quand $h \to 0^+$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ et donc $f'(a) \leq 0$.
De même, puisque $f(b) = 0$ et $f'(b) > 0$, il existe $x_2 \in]a\,;b[$ tel que $f(x_2) < 0$.
Puisque f prend une valeur positive et une valeur négative dans $]a\,;b[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'y annule.
Ainsi il existe $c_2 \in]a\,;b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a\,;c_2]$ et $[c_2\,;b]$, on obtient c_1 et c_3.

Exercice 13 : [énoncé]
Introduisons $\varphi\colon x \mapsto \big(f(x) - f'(x)\big)\mathrm{e}^x$.
La fonction φ est définie et continue sur $[a\,;b]$, φ est dérivable sur $]a\,;b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.
Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0.$$
Or
$$\varphi'(x) = \big(f(x) - f''(x)\big)\mathrm{e}^x$$
donc $\varphi'(c) = 0$ donne
$$f(c) = f''(c).$$

Exercice 14 : [énoncé]

On introduit une fonction auxiliaire dont l'annulation de la dérivée fait apparaître la relation souhaitée.

(a) Considérons la fonction $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. Celle-ci est dérivable par produit de fonctions qui le sont et
$$\varphi'(x) = \big(f'(x) + \alpha f(x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$
De plus, φ s'annule en a et b ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Puisque le facteur exponentiel ne s'annule pas, ceci donne $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.

(b) On suit la même démarche avec la fonction auxiliaire $\psi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = f(x)\mathrm{e}^{x^2/2}$$

pour laquelle

$$\psi'(x) = \big(f'(x) + xf(x)\big)\mathrm{e}^{x^2/2}.$$