Techniques algébriques I

Développements, factorisations Équations polynomiales

▷ 1 Calcul sur les exposants

Écrire les nombres suivants en ne faisant apparaître que des puissances de 2, 3, 5 et 7.

1) $(2^2\times 6^3)^2\times(9^2\times 7)^2$,

2) $(49\times 4)^3\times 27^4$,

3) $(8\times 7)^2\times(3^2)^3\times(2^2)^4$,

4) $\dfrac{2^3\times 3^2}{36^3}$,

5) $\dfrac{49^2\times 64\times 125}{1000\times 21^4}$,

6) $\dfrac{(2^2)^3\times(5^3)^2}{(6\times 125)^2}$.

▷ 2

Développer les polynômes suivants :

1) $p(x)=(x-2)^3(2x+1)$,

2) $q(x)=(3x^2-x+2)(2x^3+x^2-x-4)$,

3) $r(x)=(2x^2-x+1)^2$.

▷ 3 Développement

Développer $(a+b+c)^4$, a, b et c étant trois nombres réels quelconques.

▷ 4 Factorisations rapides

Soit x un nombre complexe quelconque.

1) Factoriser $x^{10}-32$ par $x-\sqrt{2}$ puis proposer d'autres factorisations.

2) Factoriser $x^{12}+1$ par x^4+1.

▷ 5 Factorisations par techniques élémentaires

Soit x un réel quelconque. Factorisez les expressions suivantes :

1) $(x+3)^3-4(x+3)^2+(1-x)(5x+15)$,

2) $2x^2-7$ et $\sqrt{3}x-3x^2$,

3) $25+20x+4x^2$,

4) $1+2(x+1)+(x+1)^2$,

5) $9(1-x)^2-(1+2x)^2$,

6) $x^3+2x^2-(x^2-4)$,

7) $(x-2)^5-(x-2)^2$.

8) $x^2(x+1)-x(x^2-1)+x^2(2x+2)$,

► 6

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $x^2+3x=0$,

2) $(x+1)^2=7$,

3) $x(x+1)^2=2(x+1)^4$,

4) $9(x-1)^2=4(1-2x)^2$,

5) $x\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x^3$,

6) $(x+1)^4=4(x+1)^2(x+2)^2$,

7) $x^4+x^2+1=0$,

8) $2x^4=(x+3)^2$.

► 7 Équations algébriques

Résoudre les équations d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1) $x^3-6x^2+11x-6=0$,

En introduisant une inconnue auxiliaire X bien choisie, résoudre les équations suivantes :

2) $x^4-3x^2+2=0$,

3) $2x^6-3x^4-3x^2+2=0$.

► 8 Équation antisymétrique

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$(E)\qquad x^4-2x^3-5x^2+2x+1=0.$$

Pour ce faire, on introduit l'inconnue auxiliaire $X=x-\frac{1}{x}$.

1) Donner une expression développée de X^2 en fonction de x.

2) Exprimer le premier membre de l'équation (E) à l'aide de X, X^2 et d'une puissance de x.

3) Résoudre l'équation (E).

► 9 ♠ Simplifications plus délicates

Simplifiez les fractions suivantes :

1) $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{b(a+b)}+\dfrac{1}{a(a-b)}+\dfrac{1}{b(a-b)}$,

2) $\dfrac{1}{x^3-x}-\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2-1}$,

3) $\dfrac{xyz}{ab}+\dfrac{(x-a)(y-a)(z-a)}{a(a-b)}+\dfrac{(x-b)(y-b)(z-b)}{b(b-a)}$.

Inégalités

► 10

Déterminez, en fonction de x, le signe du polynôme

$$p(x)=x^4-4x^3-10x^2-4x+1.$$

► 11

La constante de Néper vérifie $\frac{5}{2}<\mathrm{e}<\frac{11}{4}$ et la constante d'Euler-Mascheroni $\frac{1}{2}<\gamma<\frac{3}{5}$.

Que peut-on en déduire concernant les nombres suivants :

$$a=3\gamma-\mathrm{e},\quad b=\gamma(3\gamma-\mathrm{e}),\quad c=\frac{\mathrm{e}}{3\gamma-\mathrm{e}}\ ?$$

Propriétés des nombres entiers

► 12

1) Simplifier au maximum la fraction $\frac{1020}{238}$.

2) L'écrire sous la forme $n+\frac{p}{q}$ où n, p et q sont trois entiers tels que $0\leqslant p<q$.

► 13

Déterminer la liste complète de tous les diviseurs de 1400. Combien y en a-t-il ? Comment retrouver ce nombre ?

► 14

Déterminer le nombre d'entiers naturels qui, dans la division euclidienne par 17, ont un quotient égal au reste.

► 15

On dit que deux entiers sont *premiers entre eux* lorsque leur PGCD est égal à 1.

Déterminer tous les entiers n tels que n et 56 soient premiers entre eux.

► 16

1) Soit $a = 40$ et $b = 150$. Calculer leur PGCD et leur PPCM. Quel lien entretiennent-il avec le produit $a\,b$?

2) Si maintenant a et b sont des entiers naturels non nuls, justifier que le constat de la question précédente reste vrai.

Systèmes linéaires

► 17

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -6x+7y=-4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x-2y=5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x+2y=5 \\ -3x+y=2 \\ 5x+3y=8 \end{cases}$

► 18

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -3x+2y-3z=5 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} -2x+y+z=7 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=-5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y+2z+4t=1 \\ 2x+4y+t=2 \\ 3x+6y-z=4 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2z+t=0 \\ z-2t+x=0 \\ t-2x+y=0 \end{cases}$

► 19 Systèmes bizarres

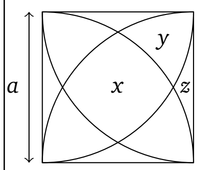
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x-4y+z-2t=1 \\ -x+2y-z+2t+3u=1 \\ -3x+6y+2z+u=-1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x+y-t=1 \\ x-y+z=-1 \\ -x+z+t=1 \\ -y+z-t=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x+3y+4z=1 \\ 2x+y-2z=0 \\ x+y-z=1 \\ x+11y+8z=0 \\ 4y+3z=2 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} -x+3y+4z=1 \\ 2x+y-2z=0 \\ x+y-z=1 \\ x+11y+8z=3 \\ 4y+3z=2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \end{cases}$

► 20 ♠ Petit coussin



Dans un carré de côté a, on trace quatre arcs de cercles dont les centres sont en un des sommets et dont les rayons valent a. Cette figure délimite trois types de régions dont les aires sont appelées x, y et z comme sur la figure.

1) Déterminer trois équations linéaires reliant les aires x, y et z.

2) Résoudre ce système.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

▷ 21 Premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'(t) = y(t) + 5\,e^t$,

2) $2\,y'(t) + 3\,y(t) = 2\,e^{3t} + e^{-3t/2}$,

3) $y'(t) + 3\,y(t) = \sin(t) - 2\,\cos(t)$,

4) $2\,y'(t) - 3\,y(t) = t^3 + 2\,t^2 - t - 5$,

5) $y'(t) = 4\,y(t) - 2e^{4t}$.

▷ 22 Deuxième ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = -2$.

2) $y''(t) - 6\,y'(t) + 13\,y(t) = e^{3t}$.

3) $y''(t) - 6\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,t^2 - t + 3$.

4) $y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 4\,e^{2t}$.

5) $2\,y''(t) + 7\,y'(t) + 3\,y(t) = 2\,e^{-3t} + e^t$.

6) $y''(t) + 9\,y(t) = \cos(3t)$.

► 23 Problèmes de Cauchy

Sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 0 \\ y(0) = 5 \end{cases}$

Déterminez dans chaque cas $y'(0)$ ainsi que la limite de $y(t)$ quand t tend vers l'infini. Tracez l'allure de la courbe de y (on prêtera attention à la tangente en l'origine).

2) $\begin{cases} y''(t) + 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 3\,\cos(2t), \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1. \end{cases}$

Comment se comportent, quand t tend vers l'infini, la partie héritée de l'équation homogène et la partie héritée de la solution particulière ? Quelle est l'allure de la courbe de y ?