SEMAINE 6

TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES

EXERCICE 1 :

Soit (K, d) un espace métrique compact. Soit $f : K \to K$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \qquad d\big(f(x), f(y)\big) \geq d(x, y) \ .$$

Montrer que f est une isométrie de K (bijection de K sur K conservant la distance).

Source : CHAMBERT-LOIR, FERMIGIER, MAILLOT : Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, éditions Masson, ISBN : 2-225-84692-8.

- -

• L'injectivité de f est immédiate.

• L'application f conserve la distance : soient a et b deux points de K, notons $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$ leurs itérés par f ($n \in \mathbb{N}$). Comme K est compact, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que les suites extraites $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\varphi(n)})$ soient convergentes, de limites α et β respectivement.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier k strictement positif tel que $d(a, a_k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $d(b, b_k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$: en effet, il existe des entiers N_1 et N_2 (avec $N_1 < N_2$) tels que

$$d(a_{\varphi(N_1)}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{4} \ ; \quad d(a_{\varphi(N_2)}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{4} \ ; \quad d(b_{\varphi(N_1)}, \beta) < \frac{\varepsilon}{4} \ ; \quad d(b_{\varphi(N_2)}, \beta) < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

En posant $k = \varphi(N_2) - \varphi(N_1) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$d(a, a_k) \leq d\big(f(a), f(a_k)\big) \leq \ldots \leq d\Big(f^{\varphi(N_1)}(a), f^{\varphi(N_1)}(a_k)\Big) = d(a_{\varphi(N_1)}, a_{\varphi(N_2)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et on majore de même $d(b, b_k)$.

On en déduit alors

$$d(a, b) \leq d\big(f(a), f(b)\big) = d(a_1, b_1) \leq d(a_2, b_2) \leq \ldots \leq d(a_k, b_k) \leq d(a, b) + \varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d\big(f(a), f(b)\big) = d(a, b)$.

• L'ensemble image $f(K)$ est dense dans K : on vient de voir que toute orbite de f est **récurrente**, c'est-à-dire

$$\forall a \in K \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \qquad d\big(a, f^k(a)\big) < \varepsilon$$

(*l'orbite du point a repasse aussi près de a que l'on veut*), donc

$$\forall a \in K \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in f(K) \qquad d(a, y) \leq \varepsilon \ .$$

• Enfin, f est surjective puisque, f étant continue car 1-lipschitzienne, l'ensemble $f(K)$ est compact, donc fermé dans K. Comme il est dense dans K, on a $f(K) = K$.

EXERCICE 2 :

Soit (K, d) un espace métrique compact.

Si u et v sont deux éléments de $K^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\delta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(u_n, v_n)}{2^n} \ .$$

1. Vérifier que δ est une distance sur $K^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$ et qu'elle définit sur cet espace la "topologie de la convergence simple", c'est-à-dire : une suite $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $K^{\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in K^{\mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p \to \infty} v_n^p = \lambda_n$.

2. Montrer que $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$ est un espace métrique compact.

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites périodiques est dense dans $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$.

4. Montrer que, en posant $\gamma(u, v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d(u_n, v_n)$, on définit une distance sur $K^{\mathbb{N}}$, mais que l'espace métrique $(K^{\mathbb{N}}, \gamma)$ n'est pas compact.

- -

1. L'espace métrique (K, d) est borné car compact ; soit Δ son diamètre. Si u et v sont deux éléments de K, la série $\sum_n \frac{d(u_n, v_n)}{2^n}$ est convergente, d'où l'existence de $\delta(u, v)$. L'axiome de séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire se laissent vérifier sans opposer de résistance.

Montrons donc l'équivalence

$$\lim_{p\to\infty} v^p = \lambda \quad \text{dans } (K^{\mathbb{N}}, \delta) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{p\to+\infty} v_n^p = \lambda_n \ .$$

- Si $\lim_{p\to\infty} v^p = \lambda$ dans $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$, alors $\lim_{p\to\infty} \delta(v^p, \lambda) = 0$ d'où, clairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty} \frac{d(v_n^p, \lambda_n)}{2^n} = 0$, soit $\lim_{p\to\infty} d(v_n^p, \lambda_n) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
- Supposons $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{p\to+\infty} v_n^p = \lambda_n$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$.

  Il existe un entier N tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2\Delta}$, où Δ est le diamètre de (K, d).

  Pour tout $n \leq N$ fixé, on a $\lim_{p\to\infty} d(v_n^p, \lambda_n) = 0$, donc on peut trouver un entier P_n tel que $p \geq P_n \Longrightarrow d(v_n^p, \lambda_n) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

  Soit $P = \max_{0\leq n\leq N} P_n$. Pour tout $p \geq P$, l'inégalité $d(v_n^p, \lambda_n) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ est réalisée pour tout $n \leq N$, donc

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d(v_n^p, \lambda_n)}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout} \quad p \geq P \ .$$

  Ainsi, pour tout $p \geq P$, on a

$$\delta(v^p, \lambda) = \sum_{n=0}^{N} \frac{d(v_n^p, \lambda_n)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d(v_n^p, \lambda_n)}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\Delta}\Delta = \varepsilon \ .$$

  On a ainsi prouvé que $\lim_{p\to\infty} \delta(v^p, \lambda) = 0$.

La distance δ sur $K^{\mathbb{N}}$ définit bien la topologie de la convergence simple.

2. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K^{\mathbb{N}}$. On va en extraire une sous-suite convergente par le **procédé diagonal**, ce qui prouvera la compacité de l'espace métrique $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$.

▷ De la suite $(u_0^p)_{p\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente $(u_0^{\varphi_0(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, de limite $\lambda_0 \in K$.

▷ De la suite $(u_1^{\varphi_0(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente $(u_1^{\varphi_0\circ\varphi_1(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, de limite $\lambda_1 \in K$.

▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons ainsi construites k extractions φ_0, φ_1, …, φ_{k-1} (applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$). De la suite $\left(u_k^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{k-1}(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente $\left(u_k^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{k-1}\circ\varphi_k(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, de limite $\lambda_k \in K$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons maintenant $\psi(p) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_p(p)$. On a ainsi défini une application ψ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Elle est strictement croissante car

$$\begin{aligned} \psi(p+1) &= \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p\big(\varphi_{p+1}(p+1)\big) \geq \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(p+1) && \mathbf{(1)} \\ &> \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(p) = \psi(p) && \mathbf{(2)}\ : \end{aligned}$$

(1) car $\varphi_{p+1}(p+1) \geq p+1$ et $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p$ est croissante ;
(2) car $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p$ est strictement croissante.

Posons maintenant $v^p = u^{\psi(p)}$: $(v^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{p\to\infty} v_n^p = \lim\limits_{p\to\infty} u_n^{\psi(p)} = \lambda_n$ car $(u_n^{\psi(p)})_{p>n}$ est une suite extraite de la suite $\left(u_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, qui converge vers λ_n dans K : en effet, l'application $p \mapsto \varphi_{n+1} \circ \ldots \circ \varphi_p(p)$ est strictement croissante sur $[\![n+1, +\infty[\![$ par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus pour ψ.

De la question **1.**, on déduit enfin que la suite $(v^p)_{p\in\mathbb{N}}$, extraite de la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$, converge vers λ dans l'espace métrique $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$.

3. Soit $u \in K^{\mathbb{N}}$, soit $\varepsilon > 0$. Comme en **1.**, introduisons un entier N tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{\Delta}$, où Δ est le diamètre de K. Alors toute suite v de $K^{\mathbb{N}}$ dont les $N+1$ premiers termes coïncident avec ceux de u ($v_n = u_n$ pour $n \in [\![0, N]\!]$) vérifie $\delta(u, v) \leq \varepsilon$. Parmi ces suites, il en existe une qui est $(N+1)$-périodique, donc l'ensemble $\mathcal{P}$ est dense dans $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$.

4. La distance γ sur $K^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$ définit la “topologie de la convergence uniforme”. Montrons que $(K^{\mathbb{N}}, \gamma)$ n'est pas compact.

Soient a et b deux éléments de K distincts (*pour les pinailleurs, on suppose K non réduit à un point*). Soit $d_0 = d(a, b)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit u^p la suite d'éléments de K définie par $u_n^p = \begin{cases} a & \text{si} \quad n = p \\ b & \text{sinon} \end{cases}$.

Si p et q sont deux entiers distincts, on a $\gamma(u^p, u^q) = d_0$; on ne peut donc extraire de la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ aucune sous-suite convergente pour la métrique définie par γ.

Remarque. On peut répondre à la question **2.** en court-circuitant la question **1.** Soit, en effet,

$(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K^{\mathbb{N}}$. On définit des extractions φ_0, ..., φ_n, ... commme dans la solution de la question **2.**, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ admette une limite λ_n dans K.

On veut montrer que l'élément $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K^{\mathbb{N}}$ est valeur d'adhérence de la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour cela, plutôt que d'expliciter, par le procédé diagonal, une sous-suite de $(u^p)_p$ qui converge vers λ dans $(K^{\mathbb{N}}, \delta)$, on montre l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall P \in \mathbb{N} \quad \exists p \geq P \qquad \delta(u^p, \lambda) \leq \varepsilon \; .$$

Donnons-nous donc $\varepsilon > 0$ et $P \in \mathbb{N}$, soit d'autre part un entier N tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2\Delta}$, où Δ est le diamètre de K. On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\delta(u^p, \lambda) \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{d(u_n^p, \lambda_n)}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} \; .$$

Il suffit donc de montrer que, pour un certain $p \geq P$, on peut rendre la première somme inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ et, pour cela, il suffit que l'on ait

$$\forall n \in [\![0, N]\!] \qquad d(u_n^p, \lambda_n) \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \textbf{(*)} \; .$$

Or, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, la suite $\left(u_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λ_n, donc aussi la suite $\left(u_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, qui en est extraite. Il existe alors un entier naturel k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0 \quad \forall n \in [\![0, N]\!] \qquad d\left(u_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(k)}, \lambda_n\right) \leq \frac{\varepsilon}{4} \; .$$

Comme $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(k) = +\infty$, il existe un entier k_1 tel que $k \geq k_1 \Longrightarrow \varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(k) \geq P$. En choisissant $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ et en posant $p = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_N(k)$, l'entier p est supérieur à P et vérifie bien **(*)**.

EXERCICE 3 :

Dans $E = \mathbb{R}^m$, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces affines de dimension au plus égale à $m-2$.

Montrer que le complémentaire de leur réunion $A = E \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$ est un ensemble connexe par arcs.

- -

Cet exercice utilise la propriété de Baire. Commençons par quelques “rappels” sur les espaces métriques complets.

. . . .

1. Si (E, d) est un espace métrique complet, alors toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés bornés non vides, décroissante pour l'inclusion, et dont les diamètres tendent vers zéro, a pour intersection (notée B) un singleton (**théorème des fermés emboîtés**).

. . . .

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in B_n$, soit l'ensemble $U_n = \{u_p \ ; \ p \geq n\}$. On a $U_n \subset B_n$, donc le diamètre de l'ensemble U_n tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la suite (u_n) est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément l de E.

Mais, pour tout n, on a $l \in \overline{U_n} \subset \overline{B_n} = B_n$, donc $l \in B$.

Par ailleurs, si $x \in E$ est distinct de l, alors on peut trouver un entier n tel que $\mathrm{diam}(B_n) < d(x, l)$ donc tel que $x \notin B_n$, donc $x \notin B$.

En conclusion, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{l\}$.

. . . .

2. Tout espace métrique complet vérifie la **propriété de Baire**, c'est-à-dire : toute intersection dénombrable $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ d'ouverts denses est un ensemble dense dans E.

. . . .

Posons $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.

Soit U un ouvert non vide de E, il suffit de montrer que $\Omega \cap U \neq \emptyset$.

L'ouvert Ω_0 étant dense dans E, il existe une boule fermée B_0 (de diamètre $\delta_0 > 0$) incluse dans $\Omega_0 \cap U$.

L'ouvert dense Ω_1 rencontre l'ouvert non vide $\overset{\circ}{B}_0$, l'intersection $\overset{\circ}{B}_0 \cap \Omega_1$ contient donc une boule fermée B_1 de diamètre $\delta_1 > 0$ et on peut toujours supposer que $\delta_1 < \dfrac{\delta_0}{2}$.

Par récurrence, on construit une suite (B_n) de boules fermées, de diamètres δ_n avec $0 < \delta_n < \dfrac{\delta_{n-1}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n-1} \cap \Omega_n \subset B_{n-1}$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est un singleton $\{x\}$ d'après **1.** L'élément x de E est alors dans $\Omega \cap U$, ce qui achève la démonstration.

. . . .

3. Dans un espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides a un intérieur vide.

. . . .

C'est la propriété "duale" de la précédente (elle s'en déduit par passage au complémentaire puisqu'une partie de E a un intérieur vide si et seulement si son complémentaire est dense dans E).

. . . .

4. Attaquons maintenant l'exercice proprement dit!

. . . .

Nous allons montrer que deux éléments quelconques de A peuvent être joints (dans A) par une ligne brisée formée de deux segments, autrement dit

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \exists z \in A \qquad [x,z] \,\cup\, [z,y] \subset A\ .$$

Soient x et y deux éléments de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

- un hyperplan affine H_n contenant x et F_n ;
- un hyperplan affine H'_n contenant y et F_n.

Tout hyperplan affine de E est un fermé d'intérieur vide ("**ensemble rare**") donc, d'après **3.**, l'ensemble $M = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H'_n\right)$ est un ensemble d'intérieur vide ("**ensemble maigre**", c.à.d. union dénombrable de fermés d'intérieur vide). Son complémentaire $E \setminus M$ est donc dense dans E et il est donc non vide.

Soit donc $z \in E \setminus M$, soit le segment $S = [x,z]$; alors S ne rencontre aucun des sous-espaces affines F_n (si on avait un point a dans $S \cap F_n$, on aurait alors $x \in H_n$, $a \in H_n$ avec $x \neq a$, donc la droite affine (ax) serait incluse dans H_n donc le point z, qui appartient à cette droite, serait dans H_n, absurde).

De même, le segment $S' = [z,y]$ ne rencontre aucun des F_n et $S \,\cup\, S' \subset A$, ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 4 :

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{C}$.

Pour $F \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$, on note $V_\varepsilon(F) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z,F) \leq \varepsilon\}$ (ε-voisinage de F).

Pour $F \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{K}$, on pose

$$\delta(F,G) = \min\{\varepsilon \geq 0 \mid F \subset V_\varepsilon(G) \quad \text{et} \quad G \subset V_\varepsilon(F)\}\ .$$

a. Vérifier l'existence de $\delta(F,G)$.

b. Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{K}$.

c. Soit (G_n) une suite d'éléments de $\mathcal{K}$, décroissante pour l'inclusion. Montrer que, dans l'espace métrique $(\mathcal{K},\delta)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

d. Montrer que $(\mathcal{K},\delta)$ est un espace métrique complet.

- -

a. Les parties F et G étant bornées, l'ensemble de réels

$$I_{F,G} = \{\varepsilon \geq 0 \mid F \subset V_\varepsilon(G) \quad \text{et} \quad G \subset V_\varepsilon(F)\}$$

est non vide ; il est minoré par 0, donc admet une borne inférieure δ.
Il est alors clair que $I_{F,G}$ est, soit l'intervalle $]\delta,+\infty[$, soit l'intervalle $[\delta,+\infty[$.

Pour tout $\alpha > 0$, on a $\delta + \alpha \in I_{F,G}$, donc $F \subset V_{\delta+\alpha}(G)$, donc $F \subset \bigcap_{\alpha>0} V_{\delta+\alpha}(G) = V_\delta(G)$ et, de même, $G \subset V_\delta(F)$. Finalement, $\delta \in I_{F,G}$ et $\delta = \delta(F,G) = \min I_{F,G}$.

Les lecteurs aimant jongler avec les inf et les sup vérifieront que l'on peut aussi écrire

$$\delta(F,G) = \max\{\max_{x\in F} d(x,G), \max_{y\in G} d(y,F)\} ,$$

les autres feront un dessin, ce qui est largement aussi instructif.

b. Si F est un fermé de $\mathbb{C}$, on a $V_0(F) = \overline{F} = F$, donc

$$\delta(F,G) = 0 \iff F \subset G \quad \text{et} \quad G \subset F \iff F = G .$$

La symétrie $\delta(G,F) = \delta(F,G)$ est immédiate.

Pour l'inégalité triangulaire, notons tout d'abord que, pour tout $K \in \mathcal{K}$ et tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a $V_\alpha\big(V_\beta(K)\big) \subset V_{\alpha+\beta}(K)$. Alors, soient F, G, H trois éléments de $\mathcal{K}$, posons $\alpha = \delta(F,G)$ et $\beta = \delta(G,H)$; on a $F \subset V_\alpha(G)$ et $G \subset V_\beta(H)$ d'où

$$F \subset V_\alpha(G) \subset V_\alpha\big(V_\beta(H)\big) \subset V_{\alpha+\beta}(H) .$$

De même, $H \subset V_{\alpha+\beta}(F)$, donc $\delta(F,H) \leq \alpha + \beta$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'espace métrique $\mathbb{C}$ étant en fait une partie convexe d'un e.v.n., le lecteur se convaicra aisément de l'égalité $V_\alpha\big(V_\beta(K)\big) = V_{\alpha+\beta}(K)$ pour tout compact K non vide.

La distance δ est la **distance de Hausdorff**.

c. Posons $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

On a $G \in \mathcal{K}$: en effet, G est une intersection de fermés bornés, c'en est donc encore un. Par ailleurs, il est classique que *toute suite décroissante de compacts non vides a une intersection non vide* : en effet, si, pour tout n, on se donne $x_n \in G_n$, la suite (x_n), dont tous les éléments appartiennent au compact G_0, admet une valeur d'adhérence $x = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$. Pour tout n, x est alors la limite de la suite $\big(x_{\varphi(k)}\big)_{k\geq n}$ d'éléments du fermé $G_{\varphi(n)}$, donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_{\varphi(n)} = G$.

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} G_n = G$ dans l'espace métrique $(\mathcal{K},\delta)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \delta(G_n,G) = 0$. On a déjà $G \subset G_n$ pour tout n. Ensuite, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $G_N \subset V_\varepsilon(G)$: sinon, pour tout n, on pourrait trouver $x_n \in G_n$ tel que $x_n \notin V_\varepsilon(G)$, c'est-à-dire $d(x_n,G) > \varepsilon$; la suite (x_n), à valeurs dans le compact G_0, admet une valeur d'adhérence x qui vérifie alors, par passage à la limite dans l'inégalité, $d(x,G) \geq \varepsilon$ donc $x \notin G$, ce qui est absurde puisque, pour tout n, x est valeur d'adhérence de la suite $(x_p)_{p\geq n}$ à valeurs dans le compact G_n donc $x \in G_n$. La décroissance de la suite (G_n) fait alors que $G_n \subset V_\varepsilon(G)$ pour tout $n \geq N$, donc $\delta(G_n,G) \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, ce qu'il fallait démontrer.

d. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathcal{K},\delta)$. Pour tout n, posons

$$G_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} F_k} , \quad \text{puis} \quad G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n .$$

Chaque G_n est fermé, non vide car il contient F_n, il est borné car, la suite (F_n) étant de Cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad k \geq N \Longrightarrow F_k \subset V_1(F_N) \; .$$

On a donc $G_n \in \mathcal{K}$ pour tout n. Enfin, la suite (G_n) est décroissante pour l'inclusion.

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n, G_n) = 0$, ce qui achévera la démonstration : on sait en effet que $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G$, il en résultera que la suite (F_n) converge vers G dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

Si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver N tel que $\delta(F_p, F_q) \leq \varepsilon$ pour tous $p \geq N$, $q \geq N$. Pour $n \geq N$, on a alors $F_k \subset V_\varepsilon(F_n)$ pour tout $k \geq n$, ce qui entraîne $G_n \subset V_\varepsilon(F_n)$; comme, par ailleurs, $F_n \subset G_n$, on a $\delta(F_n, G_n) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qu'il fallait prouver.

EXERCICE 5 :

Relèvements et homéomorphismes du cercle

On note $\mathcal{U}$ le cercle unité dans le plan complexe. On note $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ le morphisme de groupe $\theta \mapsto \varepsilon(\theta) = e^{2i\pi\theta}$.

1. Relèvement d'une application continue de $[a, b]$ vers $\mathcal{U}$

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathcal{U}$ une application continue. Montrer qu'il existe une application $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\varphi = \varepsilon \circ \Phi$.

Y a-t-il unicité de Φ ?

2. Relèvement d'une application continue de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{U}$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ une application continue. Montrer l'existence d'une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que

$$f \circ \varepsilon = \varepsilon \circ F \; .$$

Une telle application F est appelée un relèvement de f.

3. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, continue. Comparer deux relèvements de f. Vérifier que le nombre $F(1)-F(0)$ est un entier relatif, qui ne dépend pas du choix du relèvement F de f ; on note ce nombre $N(f)$, c'est le **nombre de rotation** de f.

4. Calculer $N(f)$ lorsque $f : z \mapsto \omega z^k$ avec $\omega \in \mathcal{U}$ et $k \in \mathbf{Z}$.

5. Soient $f, g : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ continues. Montrer que

$$N(g \circ f) = N(g)\, N(f) \; .$$

6. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ un homéomorphisme. Quelles sont les valeurs possibles de $N(f)$?

Montrer que tout relèvement F de f est alors un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

- -

1. Notons tout d'abord que, si une application $h : I \to \mathcal{U}$, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne recouvre pas le cercle $\mathcal{U}$ tout entier, alors elle admet un relèvement H : en effet, soit $u_0 = e^{2i\pi\theta_0}$ un élément de $\mathcal{U}$ n'appartenant pas à l'image $h(I)$, alors l'application

$\alpha : \mathcal{U} \setminus \{u_0\} \to]\theta_0, \theta_0 + 1[$ qui, à tout point $u \in \mathcal{U} \setminus \{u_0\}$, associe l'unique réel $\theta \in]\theta_0, \theta_0 + 1[$ tel que $e^{2i\pi\theta} = u$ est une "détermination continue de l'argument" sur $\mathcal{U} \setminus \{u_0\}$ (c'est, plus précisément, un homéomorphisme de $\mathcal{U} \setminus \{u_0\}$ vers $]\theta_0, \theta_0 + 1[$ dont la réciproque est une restriction de ε) et l'application $H = \alpha \circ h$ répond à la question. On peut donc relever toute application continue h d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{U}$ lorsque le diamètre de l'ensemble-image $h(I)$ est strictement inférieur à 2.

L'application φ, continue sur $[a, b]$, est uniformément continue. Il existe donc un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \qquad |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1 \ .$$

Cela permet de construire une subdivision $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'ensemble $\varphi([c_k, c_{k+1}])$ ait un diamètre au plus égal à 1 (il suffit que le pas de la subdivision soit inférieur à α). Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction φ_k de φ au segment $[c_k, c_{k+1}]$ admet donc un relèvement $\Phi_k : [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{R}$ (application continue telle que $\varphi_k = \varepsilon \circ \Phi_k$).

Il reste à raccorder ces relèvements : en chaque "point de jonction" c_k $(1 \leq k \leq n-1)$, le nombre $\Phi_k(c_k) - \Phi_{k-1}(c_k)$ est un entier relatif N_k puisque $\exp\big(2i\pi\Phi_k(c_k)\big) = \exp\big(2i\pi\Phi_{k-1}(c_k)\big) = \varphi(c_k)$. Considérons alors l'application $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

- $\Phi(x) = \Phi_0(x)$ pour tout $x \in [c_0, c_1]$;
- $\Phi(x) = \Phi_1(x) - N_1$ pour tout $x \in [c_1, c_2]$;

....

- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\Phi(x) = \Phi_k(x) - (N_1 + N_2 + \ldots + N_k)$ sur $[c_k, c_{k+1}]$.

L'application Φ ainsi construite est bien définie et continue sur $[a, b]$ et vérifie $\varphi = \varepsilon \circ \Phi$.

Si Φ et Ψ sont deux relèvements de φ, alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a $e^{2i\pi\big(\Psi(x) - \Phi(x)\big)} = 1$; la fonction $\Psi - \Phi$, continue, est à valeurs dans $\mathbf{Z}$, elle est donc constante.

En conclusion, si Φ_0 est un relèvement de φ sur $[a, b]$ (il en existe), les relèvements de φ sur $[a, b]$ sont les fonctions $\Phi_0 + m$, où m est un entier relatif fixé.

2. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ continue. Posons $\varphi = f \circ \varepsilon$. Alors φ est une application continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{U}$. La restriction ψ de φ au segment $[0, 1]$ est continue et admet donc un relèvement Ψ ($\Psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\psi = \varepsilon \circ \Psi$). Comme $\psi(0) = \psi(1)$, le nombre $\Psi(1) - \Psi(0)$ est un entier relatif N.

Définissons alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall k \in \mathbf{Z} \quad \forall x \in [k, k+1[\qquad F(x) = \Psi(x - k) + kN \ .$$

L'application F est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier les raccordements aux points entiers :

$$F(k^-) = \Psi(1) + (k-1)N = \Psi(0) + kN = F(k) = F(k^+)$$

et on a bien $\varepsilon \circ F = \varphi = f \circ \varepsilon$: si $x \in [k, k+1[$, on a en effet

$$(\varepsilon \circ F)(x) = \varepsilon\big(\Psi(x - k)\big) = \psi(x - k) = \varphi(x - k) = \varphi(x)$$

car φ est 1-périodique.

3. Si F et G sont deux relèvements de f, alors $\varepsilon \circ F = \varepsilon \circ G$, donc la fonction $F - G$, continue sur $\mathbb{R}$, est à valeurs entières, donc constante. Ici encore, étant donné un relèvement F_0 de f, tous les relèvements de f sont les applications $F_0 + m$, où m est un entier relatif.

Le nombre $F(1) - F(0)$ ne dépend donc pas du choix de ce relèvement, et ne dépend donc que de f.

Remarque : si F est un relèvement de f, alors on a $F(x+1) - F(x) = N(f)$ pour tout réel x : en effet, de $\varepsilon \circ F = f \circ \varepsilon$, on tire $e^{2i\pi F(x+1)} = e^{2i\pi F(x)} = f(e^{2i\pi x})$; la fonction $x \mapsto F(x+1) - F(x)$ est donc continue et à valeurs dans $\mathbf{Z}$, donc constante. On a donc aussi $F(x+k) - F(x) = k\,N(f)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$.

4. Posons $\omega = e^{2i\pi\alpha}$. On peut choisir comme relèvement de $f : z \mapsto \omega z^k$ l'application affine $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto kx + \alpha$. Le nombre de rotation de f est donc $N(f) = k$.

5. On vérifie immédiatement que, si F est un relèvement de f et G un relèvement de g, alors $G \circ F$ est un relèvement de $g \circ f$, donc

$$N(g \circ f) = G\big(F(1)\big) - G\big(F(0)\big) = G\big(F(0) + N(f)\big) - G\big(F(0)\big) = N(g) \cdot N(f)$$

d'après la remarque formulée à la fin de la question **3.**

6. Soit $g = f^{-1}$ l'homéomorphisme réciproque de f. De la question **5.**, on déduit

$$N(g)\,N(f) = N(g \circ f) = N(\mathrm{id}_{\mathcal{U}}) = 1\ ,$$

donc $N(f)$ est un élément inversible de l'anneau $\mathbf{Z}$, d'où $N(f) \in \{-1, 1\}$. Ces deux valeurs sont effectivement possibles : $N(f) = 1$ avec $f = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$, et $N(f) = -1$ avec $f : e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$ (c'est-à-dire $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}$).

Soit F un relèvement de f, soit G un relèvement de $g = f^{-1}$. Alors $G \circ F$ et $F \circ G$ sont des relèvements de $\mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ (*cf.* début de la question **5.**). Comme $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est un relèvement de $\mathrm{id}_{\mathcal{U}}$, d'après la question **3.**, il existe des entiers relatifs m et n tels que

$$F \circ G(x) = x + n \qquad \text{et} \qquad G \circ F(x) = x + m\ .$$

L'application $F \circ G$ est surjective, donc F est surjective. L'application $G \circ F$ est injective, donc F est injective. Le relèvement F est donc une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur lui-même, donc un homéomorphisme (*une bijection continue H d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ est toujours strictement monotone et sa bijection réciproque est alors continue, H est alors un homéomorphisme de I sur J*).

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0\ .$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *On pourra pour cela utiliser la propriété de Baire.*

- -

Pour un rappel de la propriété de Baire, *cf.* exercice 3. Un énoncé possible est :

Dans un espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Bon, mais alors, vous allez me dire : l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$, muni de la métrique induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$, n'est pas complet. Certes, mais je répondrai que, si la complétude est une notion "métrique" (i.e. attachée à une distance), la propriété de Baire, elle, est "topologique" (i.e. conservée par homéomorphisme), or l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ (complet, donc de Baire) sur $\mathbb{R}_+^*$. La propriété de Baire reste donc vraie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel p, soit

$$F_p = \{x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \forall n > p \quad |f(nx)| \leq \varepsilon\} \ .$$

Comme f est continue, chaque $F_p = \bigcap_{n>p} \{x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ |f(nx)| \leq \varepsilon\}$ est un fermé relatif de $\mathbb{R}_+^*$.

Or, les F_p recouvrent $\mathbb{R}_+^*$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. La réunion $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ est d'intérieur non vide, puisque c'est $\mathbb{R}_+^*$ tout entier. Par contraposition de la propriété de Baire ci-dessus, l'un au moins des F_p est d'intérieur non vide.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F_p} \neq \emptyset$, il existe alors deux réels u et v avec $0 < u < v$ tels que $[u, v] \subset F_p$, ce qui signifie que

$$\forall n > p \quad \forall x \in [u, v] \qquad |f(nx)| \leq \varepsilon \ .$$

On a donc $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x appartenant à l'ensemble $V = \bigcup_{n>p} [nu, nv]$. Or, cet ensemble V est un voisinage de $+\infty$ puisque, pour n assez grand, les intervalles $[nu, nv]$ se chevauchent : plus précisément, si N est un entier supérieur à $\dfrac{u}{v-u}$, alors, pour $n \geq N$, on a $(n+1)u \leq nv$; l'intervalle $[Nu, +\infty[$ est donc inclus dans V.

On a ainsi prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^* \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \ ,$$

c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.