SEMAINE 14
SÉRIES ENTIÈRES

EXERCICE 1 :

Soit D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n = [\![1, n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $D_0 = 1$ par convention.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$.

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$D_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \ .$$

3. Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini, et calculer sa somme.

- -

1. On a $D_1 = 1 = \sum_{k=0}^{0} C_0^k D_k$.

Soit $n \geq 1$. Soit une partition de E_{n+1}. Soit k le cardinal du complémentaire F de la classe de l'élément $n + 1$. Cet entier $k \in [\![0, n]\!]$ étant fixé, il y a C_n^k façons de choisir cet ensemble F (de k éléments choisis dans E_n) et, pour chaque choix de cet ensemble F, il y a D_k partitions de cet ensemble. Le nombre de partitions de E_{n+1} est donc

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k \ .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$: la série est bien convergente par la règle de d'Alembert :

$$\frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \times \frac{k!}{k^n} = \frac{1}{k+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Alors $S_0 = 1 = D_0$ et, pour tout n entier naturel,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k S_k &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p^k}{p!} \right) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k \right) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)^n}{p!} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)^{n+1}}{(p+1)!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{p!} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{p!} = S_{n+1}
\end{aligned}$$

(il n'y a pas de problème d'interversion de sommation puisque l'une des deux sommes est finie). La suite (S_n) et la suite (D_n) ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, donc $D_n = S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On cherche à calculer (après avoir prouvé son existence) la somme $f(x)=\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right)$ pour $x\in\mathbb{C}$ donné. Or, la suite double $\left(\dfrac{k^n x^n}{k!\,n!}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable : en effet,

- pour tout $k\in\mathbb{N}$ fixé, la série $\displaystyle\sum_n \frac{k^n|x|^n}{k!\,n!}$ est convergente, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n|x|^n}{k!\,n!}=\frac{e^{k|x|}}{k!}$;

- la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{e^{k|x|}}{k!}$ est convergente, de somme $e^{e^{|x|}}$.

Cela prouve l'existence de $f(x)$ pour tout x réel (la série entière $\displaystyle\sum_n \frac{D_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini) et on peut intervertir les sommations : pour tout $x\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right)=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(kx)^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^x)^k}{k!}=\frac{1}{e}\,e^{e^x}=e^{e^x-1}\ . \end{aligned}$$

Voici une fonction récursive MAPLE pour calculer les nombres D_n (appelés **nombres de Bell**) :

```
> bell:=proc(n::nonnegint) local k; option remember; if n=0 then 1 else add(binome(n-
  1,k)*bell(k),k=0..n-1) fi
```

EXERCICE 2 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R>0$.

Pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<R$, on pose $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$.

Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<R$, soit r un réel tel que $|z|<r<R$. Calculer l'intégrale

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Im} f(r\,e^{it})}{r-ze^{-it}}\,dt\ .$$

Que peut-on dire d'une fonction f, développable en série entière de rayon de convergence $R>0$ s'il existe un réel r $(0<r<R)$ tel que f soit réelle sur le cercle de centre O et de rayon r ?

- -

Utilisons $\operatorname{Im} f(r\,e^{it})=\dfrac{1}{2i}\left(f(r\,e^{it})-\overline{f(r\,e^{it})}\right)$ et calculons séparément les deux intégrales

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{f(r\,e^{it})}{r-ze^{-it}}\,dt\quad\text{et}\quad J'=\int_0^{2\pi}\frac{\overline{f(r\,e^{it})}}{r-ze^{-it}}\,dt.$$

Comme $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$, on peut développer : $\dfrac{1}{r - ze^{-it}} = \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{z}{r}\,e^{-it}\right)^{-1} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{r}\right)^k e^{-ikt}$. On a donc, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{f(r\,e^{it})}{r - z\,e^{-it}} = \frac{1}{r}\,f(r\,e^{it}) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^k e^{-ikt}\ ,$$

la série (de fonctions de la variable réelle t) étant normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ car f est bornée ($|f| \leq M_r$) sur le cercle $\mathcal{C}(O, r)$ et $\left|f(r\,e^{it})\,\left(\dfrac{z}{r}\right)^k e^{-ikt}\right| \leq M_r\,\left|\dfrac{z}{r}\right|^k$.

Intégrons donc terme à terme : $J = \displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{f(r\,e^{it})}{r - ze^{-it}}\,dt = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{r}\right)^k J_k$, avec

$$J_k = \int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-ikt}\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\,e^{i(n-k)t}\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt$$

car la série (de fonctions de t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\,e^{i(n-k)t}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ n \neq k \\ 2\pi & \text{si}\ \ n = k \end{cases}$, donc $J_k = 2\pi a_k r^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$J = \int_0^{2\pi}\frac{f(r\,e^{it})}{r - ze^{-it}}\,dt = \frac{2\pi}{r}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \frac{2\pi}{r}\,f(z)\ .$$

On calcule l'intégrale J' de façon analogue : $J' = \displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{\overline{f(r\,e^{it})}}{r - ze^{-it}}\,dt = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{r}\right)^k J'_k$, avec

$$J'_k = \int_0^{2\pi}\overline{f(r\,e^{it})}\,e^{-ikt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}\,r^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)t}\,dt$$

(*justifications analogues pour les interversions de* $\sum$ *et* $\int$).

Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ (n,k) \neq (0,0) \\ 2\pi & \text{si}\ \ (n,k) = (0,0) \end{cases}$, donc il reste $J' = \dfrac{2\pi}{r}\,\overline{a_0}$ et finalement

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Im} f(r\,e^{it})}{r - ze^{-it}}\,dt = \frac{1}{2i}(J - J') = \frac{i\,\pi}{r}\,\big(\overline{a_0} - f(z)\big)\ .$$

Si f est à valeurs réelles sur le cercle $\mathcal{C}(O, r)$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Im} f(r\,e^{it})}{r - ze^{-it}}\,dt = \frac{i\,\pi}{r}\,\big(\overline{a_0} - f(z)\big) = 0\ ,$$

donc f est constante : $f(z) = \overline{a_0}$ sur le disque ouvert $D(O, r)$ de centre O et de rayon r. Les coefficients a_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont donc tous nuls et f est une fonction constante réelle.

EXERCICE 3 :

Problème des parenthésages de Catalan

On pose $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, P_n est le nombre de façons de parenthéser l'expression $a_1 a_2 \cdots a_n$ (en conservant l'ordre des a_i), où les a_i sont des symboles que l'on peut interpréter comme des éléments d'un ensemble muni d'une loi de composition interne a priori non associative. Le nombre P_n est le nombre de façons a priori différentes de calculer le "produit" $a_1 a_2 \cdots a_n$. Ainsi,

- $P_2 = 1$: un seul parenthésage $a_1 a_2$;
- $P_3 = 2$: deux parenthésages $a_1(a_2 a_3)$ et $(a_1 a_2) a_3$;
- $P_4 = 5$: cinq parenthésages $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$ et $((a_1 a_2) a_3) a_4$.

1. Prouver la relation $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}$ pour tout $n \geq 2$.

2. Montrer que la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n$ a un rayon de convergence R non nul (*on ne demande pas de calculer R pour le moment*).

3. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$. En déduire une expression simple de P_n.

- -

1. L'observation des cinq parenthésages de $a_1 a_2 a_3 a_4$, écrits dans l'ordre où ils sont listés dans l'énoncé, nous guide un peu. Si la loi n'est pas supposée associative, seul un produit de deux facteurs peut être défini sans ambiguïté en l'absence de parenthèses : une écriture correcte d'un produit de n facteurs $a_1, \cdots, a_n$ pris dans cet ordre est donc nécessairement, pour un certain k variant de 1 à $n-1$, le produit de $a_1 \cdots a_k$ (écrit avec un certain parenthésage : P_k choix possibles) par $a_{k+1} \cdots a_n$ (écrit avec un certain parenthésage : P_{n-k} choix possibles), d'où la relation à démontrer.

2. On obtient facilement la majoration $P_n \leq 4^n$: en effet, un parenthésage de l'expression $a_1 \cdots a_n$ est déterminé par la position des parenthèses ouvrantes et fermantes ; or, il y a n positions possibles pour les ouvrantes (avant chaque symbole a_i), donc au plus 2^n possibilités pour l'ensemble des positions des parenthèses ouvrantes, et même chose pour les fermantes, d'où une majoration grossière de P_n par 4^n. La série entière $\displaystyle\sum_n P_n x^n$ a donc un rayon de convergence R au moins égal à $\dfrac{1}{4}$.

3. La relation obtenue à la question **1.** fait penser à un produit de Cauchy ; plus précisément, pour $x \in]-R, R[$,

$$f(x)^2=\Big(\sum_{p=0}^{\infty}P_px^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty}P_qx^q\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}P_kP_{n-k}\Big)x^n\ .$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P_kP_{n-k}=P_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$... sauf pour $n=1$ puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}P_kP_{1-k}=0$ alors que $P_1=1$. On a donc

$$f(x)^2=\sum_{n=2}^{\infty}P_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n-x=f(x)-x\ .$$

Pour tout $x\in\,]-R,R[$, le réel $f(x)$ vérifie donc l'équation algébrique du second degré $f(x)^2-f(x)+x=0$, de discriminant $\Delta=1-4x$. Ce discriminant doit être positif, donc $x\leq\dfrac{1}{4}$, le rayon de convergence de la série est donc au plus égal à $\dfrac{1}{4}$, donc $R=\dfrac{1}{4}$. Par ailleurs, $f(x)=\dfrac{1}{2}\big(1\pm\sqrt{1-4x}\big)$. Comme la fonction f est continue sur $]-R,R[$ avec $f(0)=0$, on conclut

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[\qquad f(x)=\frac{1}{2}\big(1-\sqrt{1-4x}\big)\ .$$

Je laisse à l'éventuel lecteur le soin de vérifier que le développement en série entière de $\sqrt{1-u}$ est

$$\sqrt{1-u}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\,n!\,(n-1)!}\,u^n\qquad(u\in\,]-1,1[\,)\ .$$

On a donc, pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$, $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}\,x^n$. Par identification, on a enfin, pour $n\geq 1$,

$$P_n=\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}=\frac{1}{n}\,C_{2n-2}^{n-1}\ .$$

EXERCICE 4 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n$ une série convergente (à termes complexes).

1. Montrer que, pour tout réel C strictement positif, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ converge uniformément sur la partie du plan

$$\mathcal{D}_C=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |1-z|\leq C\big(1-|z|\big)\}\ .$$

2. En déduire que cette même série entière converge uniformément sur l'enveloppe convexe $\mathcal{E}_r$ de l'ensemble $\{1\}\cup\overline{D}(O,r)$ pour tout $r\in\,]0,1[$.

- -

1. Effectuons une transformation d'Abel : en posant $A_p^q = \sum_{k=p}^{q} a_k$ pour $q \geq p$, on a, pour $n > m$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k z^k = A_m^n z^n + \sum_{k=m}^{n-1} A_m^k (z^k - z^{k+1}) \ .$$

On en tire

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k z^k \right| \leq |A_m^n|\, |z|^n + \sum_{k=m}^{n-1} |A_m^k|\, |z^k - z^{k+1}| \ .$$

Or, pour tout $z \in \mathcal{D}_C$, on a $|z| \leq 1$ ($\mathcal{D}_C$ est inclus dans le disque unité fermé et le seul élément de $\mathcal{D}_C$ de module 1 est le nombre 1).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, posons $K_m = \sup_{k \geq m} |A_m^k|$ (K_m existe et $\lim_{m \to +\infty} K_m = 0$ en vertu du critère de Cauchy puisque la série $\sum_n a_n$ est convergente). Alors

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k z^k \right| \leq K_m \left(1 + \sum_{k=m}^{n-1} |z^k - z^{k+1}| \right) \ .$$

Or, on a, si $|z| \neq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n-1} |z^k - z^{k+1}| = |1 - z| \sum_{k=m}^{n-1} |z|^k = |1 - z|\, |z|^m \, \frac{1 - |z|^{n-m}}{1 - |z|} \ ,$$

quantité que l'on peut majorer par $\dfrac{|1 - z|}{1 - |z|}$, puis finalement par C, lorsque $z \in \mathcal{D}_C$ (y compris pour $z = 1$ évidemment). On a ainsi prouvé

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (m < n) \quad \forall z \in \mathcal{D}_C \qquad \left| \sum_{k=m}^{n} a_k z^k \right| \leq (1 + C) K_m$$

avec $\lim_{m \to +\infty} K_m = 0$, autrement dit le critère de Cauchy uniforme est vérifié par la série entière $\sum_n a_n z^n$ sur $\mathcal{D}_C$, d'où la convergence uniforme sur cette partie du plan.

2. Pour tout $C > 0$, l'ensemble $\mathcal{D}_C$ est une partie convexe du plan : en effet, si $z \in \mathcal{D}_C$, $z' \in \mathcal{D}_C$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ avec $\lambda + \mu = 1$, alors $|1 - z| \leq C(1 - |z|)$, $|1 - z'| \leq C(1 - |z'|)$, d'où

$$\begin{aligned} |1 - (\lambda z + \mu z')| &= |\lambda(1 - z) + \mu(1 - z')| \leq \lambda\, |1 - z| + \mu\, |1 - z'| \\ &\leq C \Big[\lambda(1 - |z|) + \mu(1 - |z'|) \Big] = C \big(1 - (\lambda\, |z| + \mu\, |z'|) \big) \\ &\leq C\, (1 - |\lambda z + \mu z'|) \ , \end{aligned}$$

donc $\lambda z + \mu z' \in \mathcal{D}_C$.

Par ailleurs, si $|z| \leq r < 1$, alors

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{|1-z|}{1-r} \leq \frac{1+|z|}{1-r} \leq \frac{1+r}{1-r}\ ,$$

donc $z \in \mathcal{D}_C$ avec $C = \dfrac{1+r}{1-r}$. Pour $C = \dfrac{1+r}{1-r}$, l'ensemble $\mathcal{D}_C$, convexe, contient le disque fermé $\overline{D}(O,r)$ et le nombre 1, donc contient l'ensemble $\mathcal{E}_r$. Comme la série entière $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}_C$, elle converge donc uniformément sur $\mathcal{E}_r$: c'est le **théorème de Picard**.

EXERCICE 5 :

Soit $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(z)$. Pour tout $r \in]0, R[$, on pose $M(r) = \displaystyle\sup_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in [0, R[\quad |a_n r^n| \leq M(r)$.

2. On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe $k > 0$ et $\rho > 0$ tels que

$$\forall r > 0 \qquad r \geq \rho \Longrightarrow M(r) \leq e^{kr}\ .$$

Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \left(\frac{ke}{n}\right)^n\ .$$

3. 0n suppose toujours $R = +\infty$. Montrer , dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, l'égalité

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(n\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) = e\cdot\ \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{r}\ .$$

Indication : on pourra démontrer, puis utiliser l'inégalité $n^n \geq e^{n-1}\,(n-1)!$

- -

1. Pour $r < R$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-int}\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\,e^{i(k-n)t}\Big)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\ \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt = 2\pi a_n r^n$$

car la série de fonctions $t \mapsto a_k r^k\,e^{i(k-n)t}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On en déduit la majoration

$$|a_n| r^n = \frac{1}{2\pi}\ \left|\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-int}\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\ M(r) = M(r)\ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $r \geq \rho$, on a $|a_n| \leq \dfrac{e^{kr}}{r^n}$, donc $|a_n| \leq \displaystyle\inf_{r\geq\rho} \frac{e^{kr}}{r^n}$. La fonction $\varphi_n : r \mapsto \dfrac{e^{kr}}{r^n}$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{n}{k}\right]$, puis croissante sur $\left[\dfrac{n}{k}, +\infty\right[$ et atteint au point $\dfrac{n}{k}$ un minimum de valeur $m_n = \varphi_n\left(\dfrac{n}{k}\right) = \left(\dfrac{ke}{n}\right)^n$. Si $\rho \leq \dfrac{n}{k}$, c'est-à-dire si $n \geq k\rho$, alors

$$\inf_{r\geq\rho} \frac{e^{kr}}{r^n} = \inf_{r\in[\rho,+\infty[} \varphi_n(r) = \varphi_n\left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{ke}{n}\right)^n ,$$

donc en choisissant $N = E(k\rho) + 1$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \left(\frac{ke}{n}\right)^n .$$

3. Posons $\alpha = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(n \sqrt[n]{|a_n|}\right)$ et $\beta = \limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln M(r)}{r}$.

- Supposons $\beta < +\infty$ et montrons qu'alors $\alpha \leq \beta$ (si $\beta = +\infty$, cette inégalité est triviale). De la définition d'une limite supérieure, il résulte que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\rho > 0 \qquad r > \rho \Longrightarrow \frac{\ln M(r)}{r} \leq \beta + \varepsilon .$$

  Pour $r > \rho$, on a donc $M(r) \leq e^{(\beta+\varepsilon)r}$, donc (question **2.**) il existe un entier N tel que

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \left(\frac{(\beta+\varepsilon)\,e}{n}\right)^n , \quad \text{c'est-à-dire} \quad n \geq N \Longrightarrow n\sqrt[n]{|a_n|} \leq e(\beta+\varepsilon) .$$

  On en déduit que $\alpha \leq e(\beta + \varepsilon)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\alpha \leq e\,\beta$.

- Supposons $\alpha < +\infty$ et montrons $\beta \leq \dfrac{\alpha}{e}$. On a

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow n\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha + \varepsilon ,$$

  donc $|a_n| \leq \left(\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}\right)^n$ pour $n \geq N$.

  Si $|z| = r$, alors $|f(z)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,r^n$, donc

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \qquad M(r) \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,r^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{n}\right)^n r^n .$$

  De l'inégalité $n^n \geq e^{n-1}\,(n-1)!$ (*cf. ci-dessous*), on tire

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,r^n + e \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{e}\right)^n \frac{r^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,r^n + (\alpha+\varepsilon)r \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{e}\,r\right)^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,r^n + (\alpha+\varepsilon)r\,e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{e}r} = e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{e}r}\,\varphi_N(r) , \end{aligned}$$

  en ayant posé $\varphi_N(r) = (\alpha+\varepsilon)r + e^{-\frac{\alpha+\varepsilon}{e}r} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n$.

Il en résulte $\dfrac{\ln M(r)}{r} \leq \dfrac{\alpha+\varepsilon}{e} + \dfrac{1}{r}\ \ln\varphi_N(r)$ pour tout $r>0$. Mais $\varphi_N(r) \underset{r\to+\infty}{\sim} (\alpha+\varepsilon)r$, donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\ln\varphi_N(r) = 0$, donc $\displaystyle\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{r} \leq \frac{\alpha+\varepsilon}{e}$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\beta \leq \dfrac{\alpha}{e}$.

Démonstration de $n^n \geq e^{n-1}\,(n-1)!$ *: cette inégalité équivaut à* $\ln\big[(n-1)!\big] \leq n\,\ln n - n + 1$. *Or, par comparaison à une intégrale, la fonction* $\ln$ *étant croissante, on a immédiatement*

$$\ln\big[(n-1)!\big] = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln x\, dx = \int_1^n \ln x\, dx = n\ \ln n - n + 1\ .$$

EXERCICE 6 :

Pour tout $x > 0$, on pose $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

Pour tout $x > 1$, on pose $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Enfin, la **constante d'Euler** est définie par $\displaystyle\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$.

1. Démontrer la relation : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \displaystyle\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt.$

2. En déduire : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \displaystyle\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$

3. Soit $x \in]0,1[$. Démontrer la relation

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\ \zeta(k)\ x^k\ .$$

4. Prouver que $\displaystyle\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\ \zeta(k)$.

- -

1. Plus généralement, soit $f\ :\ ]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $g : t \mapsto e^{-t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ f(t)\ dt\ .$$

En effet, pour tout réel t, on a $\displaystyle e^{-t} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$u_n(t) \ = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si} \qquad t > n\ . \end{cases}$$

Alors u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la suite (u_n) converge simplement, sur $\mathbb{R}_+^*$, vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

En posant $g_n = u_n \cdot f$, on a une suite (g_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, convergeant simplement vers g sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité classique $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$, valable pour $t \in [0,n[$, montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t} \quad \text{donc} \quad |g_n(t)| \leq |g(t)|\ .$$

L'hypothèse de domination est alors vérifiée et le théorème de convergence dominée s'applique. Il suffit donc d'appliquer ce résultat avec $f(t) = t^{x-1}$.

2. Le changement de variable $t = nu$ donne

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n\, u^{x-1}\,du = n^x\, B(x,n+1)\ ,$$

en notant $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 u^{p-1}\,(1-u)^{q-1}\,du$ pour p et q réels strictement positifs (**intégrale eulérienne de première espèce**). La fonction $u \mapsto u^{p-1}(1-u)^{q-1}$ est bien intégrable sur $]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} B(x,n+1) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 u^x(1-u)^{n-1}\,du \\ &= \frac{n}{x}\, B(x+1,n)\ . \end{aligned}$$

À partir de $B(x,1) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\,du = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, une récurrence immédiate donne

$$B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\ .$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n^x\; n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\ ,$$

d'où le résultat.

3. On a $\ln n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1)$. De la relation obtenue à la question **2.**, on déduit donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty}\left[x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[x\ln n-\ln x-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]\\
&= -\ln x+\lim_{n\to+\infty}\left[x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]\\
&= -\ln x-\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\ .
\end{aligned}$$

Si $x\in\,]0,1[$, alors $\dfrac{x}{n}\in\,]0,1[$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et on peut développer :

$$\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\ \frac{x^k}{k\,n^k}\ .$$

Cherchons à intervertir les sommations ; pour cela, vérifions que la famille $\left((-1)^k\ \dfrac{x^k}{k\,n^k}\right)_{n\geq1,k\geq2}$ est sommable : en effet,

- pour $n\geq1$ fixé, on a $u_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k\,n^k}=-\frac{x}{n}-\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$;
- la série de terme général u_n est convergente puisque $u_n\sim\dfrac{x^2}{2n^2}$.

On peut donc écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\ \frac{x^k}{k\,n^k}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\ \zeta(k)\ x^k\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. L'identité

$$\ln\Gamma(x)+\ln x+\gamma x=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\ \zeta(k)\ x^k$$

est valable pour tout $x\in\,]0,1[$. Faisons tendre x vers 1. Le premier membre tend vers γ. Pour ce qui est du second membre, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{k}\ \zeta(k)$, en vertu du critère pour les séries alternées (rappelons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$), assure la continuité au point 1 de la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k$ (**lemme d'Abel radial**), d'où le résultat.

Plus conformément au programme, la série définissant $f(x)$ vérifie, pour tout $x\in\,]0,1]$, le critère des séries alternées, ce qui permet de majorer le reste d'ordre n en valeur absolue *par* $\dfrac{\zeta(n+1)}{n+1}\,x^{n+1}$, *donc a fortiori par* $\dfrac{\zeta(n+1)}{n+1}$ *qui tend vers zéro indépendamment de* x, *d'où la convergence uniforme de cette série sur* $]0,1]$ *et donc la continuité de* f *sur cet intervalle.*