Colles de mathématiques en PCSI 5

17 janvier 2012

Programme

Suites numériques : révision du programme précédent. Fonctions numériques : notion de limite, continuité, théorèmes de continuité. Règles de comparaison.

Questions de cours

- L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- L'image d'un segment par une application continue est un segment.
- Preuve du théorème des gendarmes.
- Preuve du théorème de composition des limites.
- Une application continue et monotone induit une bijection sur son image, dont l'inverse est continue et monotone, de même monotonie.

Exercice n° 1

Donner un exemple de fonction définie et bornée au voisinage de 0, non continue en 0 et qui n'admet pas de limite à gauche ni à droite de 0.

Exercice n° 2

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

1. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$;

2. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$;

3. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice n° 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et continue. Prouver que f est bornée.

Exercice n° 4

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice n° 5

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Prouver que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante et telle que la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Prouver que f est continue.

Exercice n° 7

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de la droite réelle « transforme milieu en milieu » si elle est continue et si

$$\forall x, y \in I,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1}$$

1. Prouver que les fonctions affines transforment milieu en milieu.

2. Prouver que l'ensemble des applications continues qui vérifient (**??**) est stable par combinaison linéaire. On dit que c'est un espace vectoriel.

3. On se donne $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, qui vérifie (**??**).

  a. On suppose ici $f(a) = f(b) = 0$. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = M = \sup_{[a,b]} f$. En considérant le symétrique de x_0 par rapport à a ou b (selon les cas), prouver que $M = 0$. En déduire $f = 0$.

  b. Prouver que f est une fonction affine.

  On pourra introduire la fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.

4. Prouver qu'en toute généralité, une fonction qui transforme milieu en milieu est une fonction affine.

Exercice n° 8

Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bornées. Prouver que l'application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \sup_{x \in [0,1]} (f(t) + xg(t))$$

est lipschitzienne.

Exercice n° 9

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} f(a)$. Prouver que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice n° 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$. Prouver que f est constante.

Exercice n° 11

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \mid f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

Exercice n° 12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Prouver que f est (strictement) monotone.

En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. Existe-t-il une surjection continue de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice n° 13

Prouver

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim_\infty n!\ , \quad \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k} \sim_\infty \frac{1}{n^n}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \sim_\infty \ln n.$$

Exercice n° 14

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x^x-1}}.$$

Exercice n° 15

Former un développement asymptotique à trois termes de (u_n), où u_n est l'unique solution de l'équation $x - \ln x = n$ dans $]0,1[$.