Limites et continuité

Limite en un point

▹ 1 Fonction continue définie par morceaux

1) On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\sin x+\cos x & \text{si } x<\frac{\pi}{2},\\ \pi-x & \text{si } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\\ \frac{x^2}{2}+\beta & \text{si } x\geqslant\pi.\end{cases}$$

Déterminer les réels α et β pour que f soit continue en $\frac{\pi}{2}$ et en π.

2) On considère la fonction g définie par

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) & \text{si } x\leqslant 0,\\ \cos(x+\varphi) & \text{si } x\in\left]0,\frac{4\pi}{3}\right[,\\ 2\sin(2x+\psi) & \text{si } x\geqslant\frac{4\pi}{3}.\end{cases}$$

Déterminer les réels φ et ψ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

► 2 Pas de limite !

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que f n'admet pas de limite en 0.

2) Justifier que $f\left(]0,+\infty[\right)=[-1,1]$.

3) Montrer que, pour tout $a>0$, $f\left(]0,a[\right)=[-1,1]$.

Les preuves doivent s'appuyer sur des théorèmes précis.

► 3 Continuité de fonctions

Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes et dites où elles sont continues :

1) $f:\ x\longmapsto\dfrac{x^2+2x+2}{3-2x-x^2}$,

2) $g:\ x\longmapsto\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{3-2x-x^2}}$,

3) $h:\ x\longmapsto\arccos\left(\dfrac{x^2+2x+2}{3-2x-x^2}\right)$.

► 4 ♠ Morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les applications $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui soient continues et qui vérifient la propriété

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

On procède par analyse-synthèse.

1) Si f vérifie les conditions de l'énoncé, montrer successivement que :

a. $f(0)=0$;

b. f est impaire ;

c. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(nx)=nf(x)$;

d. $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)=nf(1)$;

e. $\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=rf(1)$;

f. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=xf(1)$.

2) Montrer alors que toutes les fonctions obtenues sont bien solutions du problème posé et conclure.

► 5 ♠ Indicatrice de $\mathbb{Q}$

1) Rappeler la définition de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

2) Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en 0.

3) Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point $x_0\in\mathbb{R}$.

Le coin des casse-têtes

► 6

Soit $f:\ [0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ une application continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty}f=-\infty$.
Montrer que f admet un maximum.

► 7

Soit a un réel, $f:\ [a,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ une application croissante sur $[a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty}f=b\in\mathbb{R}$. On suppose que l'application g, définie sur $]a,+\infty[$ par

$$\forall x>a,\quad g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

est croissante sur $]a,+\infty[$. Montrer que f est constante.

► 8

Soit $f:\ ]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ et $g:\ ]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x>0,\quad g(x)=\frac{f(x)}{x}.$$

Montrer que si f est croissante sur $]0,+\infty[$ et g est décroissante sur $]0,+\infty[$, alors f et g sont continues.

► 9

Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application bornée et $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées.

► 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f:\ I\to\mathbb{R}$.

1) Donner un exemple de fonction f non constante telle que $f(I)$ est un ensemble fini.

2) On suppose désormais f continue sur I. Montrer que f est constante si et seulement si $f(I)$ est un ensemble fini.

► 11

Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
Montrer que f est bornée.

► 12

Soit $f:\ [a,b]\to[a,b]$ vérifiant

$$\forall(x,y)\in[a,b]^2,\quad |f(x)-f(y)|=|x-y|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

2) Montrer que f est bijective de $[a,b]$ dans $[a,b]$.