Colles de mathématiques en PCSI 5

10 avril 2012

Programme

Dénombrement, polynômes.

Exercice n° 1

Questions rapides :

- Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En donner un supplémentaire.
- $\mathbb{K}[X]$ est-il de dimension finie ?

Exercice n° 2

Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2} + ... + \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice n° 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq b \in \mathbb{R}$. On note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k(X) = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Prouver que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n° 4

On introduit l'opérateur linéaire $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Prouver que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ si P n'est pas constant.

2. Prouver que pour $n \geqslant 1$,

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

3. Calculer $\Delta^n(X^n)$

4. Déterminer pour $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p.$$

5. Si $\deg P = n$, prouver que $(P(X),\ P(X+1), ..., P(X+n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On introduit les polynômes de Hilbert :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ H_p(X) = \frac{X(X-1)...(X-p+1)}{p!}.$$

a. Justifier que $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b. Calculer $\Delta^n(H_p)$.

c. Si P est un polynôme, montrer que

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \Delta^k P(0) H_k.$$

d. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, prouver que

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \iff \text{les coordonnées de } P \text{ dans la base } (H_p) \text{ sont entières.}$$

Exercice n° 5

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\varphi + X\sin\varphi)^n$ par X^2+1.

Exercice n° 6

Soient $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$. Calculer

$$\prod_{k=0}^{n-1}(a + b\omega_k).$$

Exercice n° 7

On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $X^3 + X - 1$. Calculer ${x_1}^4 + {x_2}^4 + {x_3}^4$.

Exercice n° 8

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.