

Chapitre 15

Equations différentielles linéaires

1. Equations différentielles linéaires scalaires du 1^{ier} ordre

(rappels et compléments)

1.1. Equation résolue

a) Définitions et notations

Définitions 1 :

✚ équation différentielle linéaire (E.D.L.) scalaire résolue du 1^{ier} ordre :

... toute équation du type : $x' = a(t)x + b(t)$ (**E**)

⇒ Dans le cadre du programme $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, I est un intervalle

✚ solution de (**E**) : toute fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\forall t \in I : \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

✚ courbe intégrale de (**E**) :

... toute courbe \mathcal{C}_φ représentative d'une solution φ de (**E**).

✚ l'équation homogène associée à (**E**) : $X' = a(t)X$ (**E***)

✚ un problème de Cauchy :
$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0, x_0 \in I \times \mathbb{K}$$

✚ on notera \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}^*) l'ensemble des solutions de (**E**) (resp. (**E***))

b) Solutions de l'équation homogène

Théorème 1 : Soit A une primitive (fixée) de a sur I

Les solutions de l'équation différentielle homogène $X' = a(t)X$ s'écrivent

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \rightarrow C.e^{A(t)} \end{cases} \quad \text{où } C \in \mathbb{K}.$$

Ainsi \mathcal{S}^* est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1 : $\mathcal{S}^* = \text{Vect}(e^A)$

• On notera qu'une primitive A existe toujours puisque $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

• 😊 On notera aussi que si on connaît une solution évidente \hat{x} non nulle, on les connaît immédiatement toutes puisqu'alors $\mathcal{S}^* = \text{Vect}(\hat{x})$

• Exemple 1 : $y' = -y \tan(x)$

c) Solutions de l'équation générale

- On démontre que $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^*$ où \tilde{x} : une solution particulière de (E).
- \mathcal{S} est ainsi un espace affine de direction \mathcal{S}^* , de dimension 1.

- Les solutions de (E) s'écrivent donc
$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \rightarrow \tilde{x}(t) + C.e^{A(t)} \end{cases}$$

- Théoriquement : **1**.

une solution particulière est définie par $\tilde{x}(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(u) e^{-A(u)} du$

- Pratiquement : on utilise la méthode de "**variation de la constante**". \square

✱ Exemple 2 : $1 + t^2 x' + tx = \sqrt{1 + t^2}$

- Néanmoins, dans certains cas, on connaît directement la forme de $\tilde{x}(t)$, souvent du même "type" que le second membre $b(t)$.

✱ Exemple 3 $x' = kx + P(t)e^{mt}$ où $k, m \in \mathbb{K}^2$ et $P \in \mathbb{K} X$

	Bon à retenir : la solution particulière est
si $m \neq k$... du type $Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{K} X$ et $d^\circ Q = d^\circ P$
si $m = k$... égale à $Q(t)e^{mt}$ où $Q = \text{Prim}_0(P)$

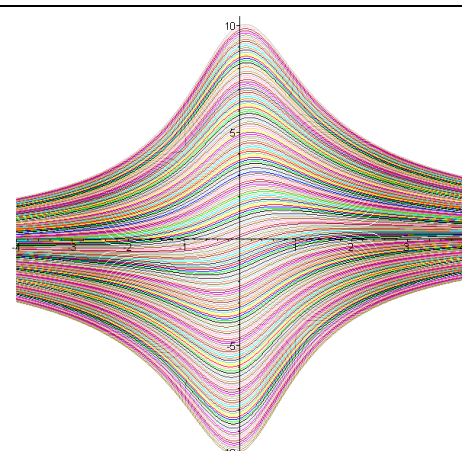
d) Problème de Cauchy, courbes intégrales

- Le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x|_{t_0} = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution

... car la condition initiale $x|_{t_0} = x_0$ fixe la constante C .

- Il existe en fait une écriture (de peu d'intérêt !) de cette unique solution

$$x|_t = x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(u) e^{-A(u)} du$$

Interprétation géométrique	Courbes intégrales de l' <u>exemple 1</u> $C \in -10, 10$, $t \in -4, 4$
<p>\Rightarrow Par tout point t_0, x_0 de la bande $I \times \mathbb{K}$ passe une courbe intégrale et une seule.</p> <p>\Rightarrow Les courbes intégrales forment ainsi une "partition" de la bande $I \times \mathbb{K}$</p>	

e) Propriété de régularité :

Propriété 1 : caractère \mathcal{C}^1 des solutions d'une équation différentielle

Sous la condition $a, b \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}^2)$ (resp. $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}^2)$, resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^2)$), toute solution de l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ (**E**) est de classe \mathcal{C}^1 (resp. \mathcal{C}^{k+1} , resp. \mathcal{C}^∞)

- **Exemple 4** : $y' = y + x \cos(x)$ $I = \mathbb{R}$

f) Changement de corps

Propriété 2 : caractère \mathcal{C}^1 des solutions d'une équation différentielle

Soient les équations différentielles $x' = a(t)x + b(t)$ (**E**)

et $x' = a(t)x + \tilde{b}(t)$ (**\tilde{E}**)

où $a \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $b \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ et $\tilde{b}(t) = \operatorname{Re} b(t)$ (resp. $\tilde{b}(t) = \operatorname{Im} b(t)$).

Si x est solution de (**E**), alors $\operatorname{Re} x$ (resp. $\operatorname{Im} x$) est solution de (**\tilde{E}**).

1.2. Equation non résolue

a) Définition

Définition 2 :

✚ équation différentielle (non résolue) du 1^{er} ordre :

... toute équation du type : $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ (**E**)

\Rightarrow Dans le cadre du programme : $a, b, c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^3)$, I est un intervalle

b) Résolution pratique

\Rightarrow On "découpe" I en intervalles où la fonction a ne s'annule pas.

\Rightarrow Sur chacun de ces intervalles, en divisant dans (**E**) par $a(t)$, on a l'équivalence avec une E.D.L. résolue qu'on sait donc résoudre.

\Rightarrow On effectue alors si c'est possible un raccordement en 3 temps :

- ① Prolongement par continuité au point de raccordement
- ② Vérification de la dérivabilité d'un tel prolongement
- ③ Vérification au point de raccord de l'équation différentielle.

- 🚗 Les propriétés des équations résolues ne sont plus vérifiées :

$\Rightarrow \mathcal{S}$ peut être \emptyset ou un espace affine de dimension quelconque.

\Rightarrow le problème de Cauchy n'a plus forcément de solution ou peut aussi en avoir une, plusieurs, voire une infinité.

c) Exemples

3.

- **Exemple 5** : $xy' - y = 0$ $I = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dim \mathcal{S} = 1$

\Rightarrow pb Cauchy : aucune solution ou une infinité

- Exemple 6 : $\boxed{xy' - 2y = 0}$ $I = \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \dim \mathcal{S} = 2$
 \Rightarrow Cauchy : aucune solution ou une infinité
- Exemple 7 : $\boxed{xy' + 2y = \frac{x^2}{1+x^2}}$ $I = \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \mathcal{S}$ est un singleton
 \Rightarrow Cauchy : aucune solution ou une seule solution
- Exemple 6 : $\boxed{y' \sin x + y \cos(x) = 1}$ $I = -\pi, \pi$
 $\Rightarrow \mathcal{S}$ est un singleton
 \Rightarrow Cauchy : aucune solution ou une seule solution

2. Equations différentielles linéaires du 1^{ier} ordre

2.1. Notations et définitions

Notations :

- ✚ F : espace vectoriel de dimension finie
- ✚ I : intervalle de \mathbb{R}
- ✚ Pour $u \in \mathcal{L} F$ et $x \in F$: on écrira $u.x$ au lieu de $u(x)$
on pourra lire $u.x$: u appliqué à x
à mettre en parallèle avec la notation $M.X$ lorsque $M = M_{\mathcal{B}} u$
- ✚ On considérera une application : $\boxed{a : I \rightarrow \mathcal{L} F}$
- ✚ Pour une application $\varphi : I \rightarrow F$, on notera alors $a.\varphi$ l'application :

$$a.\varphi : \begin{cases} I \rightarrow F \\ t \rightarrow a(t).\varphi t \end{cases}$$

Définitions 1 :

- ✚ équation différentielle linéaire (E.D.L.) résolue du 1^{ier} ordre :
... toute équation du type : $\boxed{x' = a(t).x + b(t)}$ **(E)**
 \Rightarrow Ici $a \in \mathcal{C} I, \mathcal{L} F$ et $b \in \mathcal{C} I, F$
- ✚ solution de **(E)** : toute fonction $\varphi : I \rightarrow F$ qui vérifie :

$$\forall t \in I : \varphi'(t) = a(t).\varphi t + b(t)$$
- ✚ un problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = v \end{cases}$ où $t_0, v \in I \times F$
- ✚ on notera \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}^*) l'ensemble des solutions de **(E)** (resp. **(E*)**)

- Remarque : on retrouve les équations différentielles scalaires si $F = \mathbb{R}$.

C'est donc ici une généralisation

- Exemple : si $E = \mathbb{R}^3$, on peut identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(E) s'écrit alors : $X' = A(t).X + B(t)$

où $A(t) \in \mathcal{M}_3(K)$ et $X(t)$ et $B(t)$ des vecteurs colonnes de taille 3.

$$\text{soit : } \begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + a_{1,3}(t)x_3 \\ x_2' = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + a_{2,3}(t)x_3 \\ x_3' = a_{3,1}(t)x_1 + a_{3,2}(t)x_2 + a_{3,3}(t)x_3 \end{cases}$$

On obtient un "système différentiel linéaire" du 1^{er} ordre

- Exemple 5.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{résolution élémentaire ; remarques.}$$

2.2. Propriétés

Propriété 1 : **caractère \mathcal{C}^1 des solutions d'une équation différentielle**

Toute solution de $x' = a(t).x + b(t)$ (E) est de classe \mathcal{C}^1

- Démonstration : 6.

Propriété 2 : **structures algébriques des espaces de solutions**

Soit $x' = a(t).x + b(t)$ (E) et l'équation homogène associée $x' = a(t).x$ (E*)

\mathcal{S}^* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$

\mathcal{S} est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de direction \mathcal{S}^*

- Autrement dit : $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^*$

- Démonstration : 7.

Propriété 3 : **principe de superposition des solutions**

Soient n équations différentielles $x' = a(t).x + b_i(t)$ (E_i) (où $i \in \{1, n\}$).

Soit l'équation différentielle $x' = a(t).x + b(t)$ (E)

$$\text{où } b(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

Si pour tout $i \in \{1, n\}$, x_i est une solution particulière de (E_i),

alors $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ est une solution particulière de (E).

- Démonstration : 8.

2.3. Le théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire

Soit l'équation différentielle $x' = a(t).x + b(t)$ (**E**)

où $a \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = v \end{cases} \quad \text{où } (t_0, v) \in I \times \mathbb{R}$$

admet une et une seule solution.

- 😊 Démonstration à admettre : idée de la démo \Rightarrow **9**.

2.4. L'espace des solutions de l'équation homogène

a) Dimension de l'espace des solutions

Théorème fondamental : $\dim \mathcal{S}^* = \dim F$

- Démonstration** **10**. On utilise le fait essentiel que

$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}^* \rightarrow F \\ \varphi \mapsto \varphi(t_0) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

b) Application : recherche d'une base de \mathcal{S}^*

Théorème d'évaluation :

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ une famille de n solutions de (**E**^{*}) et \mathcal{B} une base de F .

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- ① $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ est une base de \mathcal{S}^*
- ② $\exists t_0 \in I : \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ est une base de F .
- ③ $\forall t \in I : \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ est une base de F .

- Démonstration** **11**.

2.5. Méthode de variation des constantes pour l'équation complète

Principe :

- ❑ On suppose avoir résolu l'équation homogène (**E**^{*}) donc avoir trouvé une base de solutions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de \mathcal{S}^* .

- ❑ Les solutions de l'équation (**E**) s'écrivent donc $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i$

où $C_i \in \mathbb{R}$: les C_i sont donc des constantes.

- ❑ On cherche alors \tilde{x} sous la forme $\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \varphi_i(t)$

où $C_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$: les C_i sont maintenant des fonctions.

- 😊 on dit qu'on a fait "varier les constantes" C_i

- Justification** **12**.

3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

3.1. Objet d'étude

On étudie ici le cas où a est constante i.e. l'équation

$$(E) \quad x' = a.x + b(t) \quad \text{avec } a \in \mathcal{L} F \text{ et } b \in \mathcal{C} I, \mathbb{K}.$$

Matriciellement (E) s'écrit $X' = a.X + B(t)$ ce qui donne le

✚ Système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2(t) \\ \dots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ Ici } A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n \mathbb{K} \text{ et } \forall i \in 1, n : b_i \in \mathcal{C} I, \mathbb{K}$$

3.2. Sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

a) Rappel et extension des résultats du Chapitre 6

Dans l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{M}_n \mathbb{K}$, pour $M \in \mathcal{M}_n \mathbb{K}$:

\Rightarrow la série exponentielle $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge (quelle que soit la norme choisie).

\Rightarrow sa somme est la matrice notée $\exp(M)$ ou e^M

$\Rightarrow \forall M, N \in \mathcal{M}_n \mathbb{K}^2$: si M et N commutent, alors $e^{M+N} = e^M \times e^N$

$\Rightarrow \exp \text{diag } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \text{diag } e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$

\Rightarrow si N est nilpotente d'ordre p : $\exp N = \sum_{i=0}^{p-1} N^i$

• **Démonstration** du point 3 13. (autres points ➡ Chapitre 6)

• Conséquence : $\exp 0_n = I_n$ $\exp tI_n = e^t I_n$ 14.

• De même (par isomorphisme) :

Dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L} F$, pour $u \in \mathcal{L} F$:

\Rightarrow la série exponentielle $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge (quelle que soit la norme choisie).

\Rightarrow sa somme est l'endomorphisme de F noté $\exp(u)$ ou e^u

$\Rightarrow \forall u, v \in \mathcal{L} F^2$: si u et v commutent, alors $e^{u+v} = e^u \circ e^v$

\Rightarrow $\exp 0_{\mathcal{L} E} = Id_E$ $\exp tId_E = e^t Id_E$

• Propriété immédiate : si $M = M_{\mathcal{B}} u$, alors $\exp(M) = M_{\mathcal{B}} \exp(u)$

▪ **Démonstration** 15.

b) Exemple : **16**.

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Méthode pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable

Propriété : Si $M = P \Delta P^{-1}$ alors $\exp(M) = P \exp(\Delta) P^{-1}$

• **Démonstration**

17.

d) Dérivation de $t \mapsto e^{tA}$ et de $t \mapsto e^{ta}$

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(F)$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Les applications $\varphi : t \mapsto e^{tA}$ et $\psi : t \mapsto e^{ta}$ sont dérivables sur \mathbb{R} et ont pour dérivées respectives $t \mapsto A \times \varphi(t) = A \times e^{tA}$ et $t \mapsto a \circ \psi(t) = a \circ e^{ta}$.

• **Démonstration difficile**

18.

3.3. Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

a) Trois théorèmes pour les résoudre

Théorème 1 : écriture de la solution du problème de Cauchy homogène

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x|_{t_0} = v \end{cases}$ où $t_0, v \in I \times F$.

L'unique solution est la fonction $\varphi : t \mapsto \exp(t - t_0) a.v$

• **Démonstration**

19.

Théorème 2 : base de solutions de l'équation homogène

Soit v_1, v_2, \dots, v_n n vecteurs de F (où $n = \dim(F)$).

Soient les n fonctions $\varphi_i : t \mapsto \exp(t - t_0) a.v_i$ définies sur \mathbb{R} . Alors

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ est une base de l'ensemble \mathcal{S}^* des solutions de $x' = a.x$

si et seulement si v_1, v_2, \dots, v_n est une base de F .

• **Démonstration**

20.

Lemme : effet sur un vecteur propre

Si v est vecteur propre de a associé à λ , alors $e^{ta}.v = e^{\lambda t}v$.

Traduction matricielle : si $Av = \lambda v$, alors $e^{tA}.v = e^{\lambda t}v$.

• **Démonstration**

21.

• 😊 Faire le lien avec $P(u).v = P(\lambda)v$ (cf. chapitre 4)

Théorème 3 : écriture des solutions si a est diagonalisable

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
 Soit donc v_1, v_2, \dots, v_n une base de vecteurs propres de a .
 Soit pour tout $j \in \{1, n\}$, λ_j la valeur propre associée à v_j ($\lambda_j \in \mathbb{K}$).
 Les solutions de l'équation différentielle homogène $x' = a.x$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $t \rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_j t} . v_j$ où $\forall j \in \{1, n\} \quad \alpha_j \in \mathbb{K}$.

- **Démonstration**

21b) Quatre méthodes pour les résoudre

□ Si A est diagonalisable (cas simple qui tombe le plus souvent ! 😊)



Méthode 1 : ici on a tout intérêt à utiliser le théorème 3

- Exemple 1 : cas où A est \mathbb{R} -diagonalisable

22

$$\begin{cases} x' = x + 3y + (t - 4) \\ y' = 3x + y + (3t - 1) \end{cases}$$

- Exemple 2 : cas où A est \mathbb{C} -diagonalisable

23

$$\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = x + y \end{cases}$$

□ Si A est trigonalisable avec une seule valeur propre



Méthode 2 : ici on a tout intérêt à utiliser le théorème 1

$$\Rightarrow \text{Les solutions s'écrivent : } e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{avec } t_0 = 0 \text{ et } v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}).$$

- \Rightarrow Ici, μ_A est scindé avec une seule racine.
- \Rightarrow Donc $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente (Chapitre 4)
- \Rightarrow ... et e^{tA} est facile à calculer.

- Exemple 3 : cas A trigonalisable et $\text{Card } Sp(A) = 1$.

24

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 2y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

□ Autres cas pour $n = 3$

- Seul cas restant à traiter : A non diagonalisable et $\text{Card } Sp(A) = 2$.
- Ici, on a le choix entre 2 méthodes :



Méthode 3 : utiliser le théorème 2

Avec la base u, v, w dans laquelle A est trigonalisable et $t_0 = 0$, les solutions s'écrivent : $t \rightarrow \alpha e^{tA}.u + \beta e^{tA}.v + \gamma e^{tA}.w$.



Méthode 4 : utiliser un changement de fonctions inconnues

\Rightarrow ① Ecrire $A = PTP^{-1}$, ② changer de fonctions inconnues dans le système, ③ résoudre le nouveau système triangulaire (plus facile) avant de ④ revenir aux fonctions inconnues initiales



Cette méthode s'applique bien aussi au cas " A diagonalisable

- Exemple 4 : cas où A est trigonalisable avec deux valeurs propres. **25**

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = y + z \end{cases}$$

c) Un exemple avec des coefficients non constants

- Exemple 5 : **26**

$$\begin{cases} x' = \frac{1+t^4}{t^4-1}x - 2t^2y \\ y' = \frac{1+t^4}{t^4-1}y - 2t^2x \end{cases} \quad \text{Indication : } \left(t \rightarrow \frac{1}{t}, t \rightarrow t \right) \text{ est solution...}$$

4. Equations scalaires d'ordre n

4.1. Définitions et principes généraux

Définition :

- équation différentielle linéaire (E.D.L.) scalaire résolue d'ordre n :

$$\dots \text{ toute équation } \boxed{x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)} \quad (\mathbf{E})$$

\Rightarrow Au programme MP : $a_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ I est un intervalle

- l'équation homogène associée à (\mathbf{E}) :

$$\boxed{X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \dots + a_1(t)X' + a_0(t)X = 0} \quad (\mathbf{E}^*)$$

- un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ \forall i \in \{0, n-1\} : x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \quad \text{où } t_0, x_i \in I \times \mathbb{K}^n$$

- Propriété immédiate : toute solution est de classe \mathcal{C}^n

4.2. Représentation par un système différentiel linéaire

Proposition : Soit l'équation différentielle scalaire d'ordre n **(E)** ci-dessus.

$$\text{On pose } \forall t \in I : A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Alors x est solution de $x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$
si et seulement si $X = (x, x', \dots, x^{n-1})$ est solution de $X' = A(t).X + B(t)$.

- **Démonstration** 27. Noter l'analogie avec la **matrice compagnon** !

4.3. Théorème de Cauchy

Théorème de Cauchy

Soit $a_i \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $b \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $t_0, x_i \in I \times \mathbb{K}^n$

Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ \forall i \in [0, n-1] : x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

- **Démonstration** 29.

4.4. Structure et dimension des espaces de solutions

Théorème fondamental :

Soit \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}^*) l'ensemble des solutions de l'équation **(E)** (resp. **(E*)**).

* \mathcal{S}^* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $\dim \mathcal{S}^* = n$.

* \mathcal{S} est un sous-espace affine de direction \mathcal{S}^* donc de même dimension n .

- **Démonstration** 30.

- On utilise le fait essentiel que

$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}^* \rightarrow \mathbb{K}^n \\ \varphi \rightarrow (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme.}$$

5. Equation différentielle linéaires scalaires d'ordre 2

5.1. Système fondamental de solutions (S.F.S.), wronskien

Définitions :

✚ On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du 2nd ordre $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (**E***) toute base φ_1, φ_2 de son espace des solutions \mathcal{S}^* .

✚ On appelle **wronskien** d'un couple $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ la fonction

$$W_{\varphi, \psi} : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ définie par } \forall t \in I : W_{\varphi, \psi}(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

5.2. Détermination d'un S.F.S par le wronskien

Théorème :

Soit φ, ψ un couple de solutions de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (**E***).

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- ① φ, ψ est un système fondamental de solutions de (**E***).
- ② $\exists t_0 \in I / W_{\varphi, \psi}(t_0) \neq 0$
- ③ $\forall t \in I : W_{\varphi, \psi}(t) \neq 0$

- Démonstration **31**.
- 😊 Le wronskien de $\varphi, \psi \in \mathcal{S}^*$ s'il n'est pas nul, ne s'annule pas !

5.3. Méthodes pratiques de résolution de (**E***)

Principe général

- ❑ On recherche deux solutions φ et ψ (**E***) (**diverses méthodes** ↓)
- ❑ On vérifie par le wronskien que φ, ψ est un S.F.S. de (**E***).
- ❑ On conclut : $\mathcal{S}^* = \text{Vect } \varphi, \psi$

Diverses méthodes pour trouver φ et ψ (à faire dans l'ordre)

- ① On pense d'abord à voir s'il n'y a pas de solution évidente.
- ① On peut rechercher une solution polynomiale
 - Ce peut être le cas si les fonctions a et b sont polynomiales.
 - On a intérêt à raisonner sur le degré possible de cette solution
- ② On cherche une solution développable en série entière.
 - Cette méthode est très prisée !
- ③ En désespoir, on utilise la méthode dite de variation de la constante
 - Il faut pour cela connaître une solution φ (par ①, ② ou ③)
 - On pose alors $x = \varphi \times z$, on substitue dans (**E***) et on résout l'équation différentielle vérifiée par z .

- ☺ Pourquoi ça marche ?

Cette dernière équation vérifiée par z ne contient pas de termes en z , donc en posant $Z = z'$, on tombe sur du 1^{ier} ordre ! \Rightarrow **32**.

- Exemples

- ❖ Exemple 1 : recherche d'une solution polynomiale **33**.

$$t^2 - 2x'' + t^2 - 2t - 2x' - 2tx = 0$$

- ❖ Exemple 2 : recherche de solutions D.S.E. **34**.

$$x'' + tx' + x = 0$$

- ❖ Exemple 3 : méthode de variation de la constante **35**.

$$t + 1x'' - x' - tx = 0$$

5.4. Méthodes pratiques pour résoudre (E)

- On résout ici (E) $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^3$



Méthode standard : variation des deux constantes

On a résolu (E*) $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ et trouvé un S.F.S. φ, ψ .

Les solutions de (E*) s'écrivent donc $\lambda\varphi + \mu\psi$ avec λ et μ constantes.

- ① On recherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\tilde{x} = \lambda\varphi + \mu\psi \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont maintenant des fonctions.}$$

- ② On résout alors le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c(t) \end{cases}$$
 où les

inconnues sont λ' et μ' .



Le système est facile à retenir car son déterminant est le wronskien φ, ψ : il n'y a plus qu'à retenir le second membre.

- ③ Ayant résolu le système précédent et trouvé les valeurs de λ' et μ' , on en déduit par primitivation λ et μ donc \tilde{x} (on prend comme constantes de primitivation 0 car on veut une solution particulière).
- ③ On conclut : les solutions s'écrivent $\tilde{x} + \lambda\varphi + \mu\psi$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- Justification **36**.

- ❖ Exemple 4 : utilisation de la variation des deux constantes **37**.

$$x - 1y'' - xy' + y = e^{2x} \quad x - 1^2$$

Autre méthode : variation de la constante

Si (à l'issue des étapes ①② de résolution de (E^*)) on n'a qu'une solution φ pour (E^*) et qu'on veut lui appliquer comme dans l'exemple 3 la variation de la constante, autant l'appliquer directement à (E) .

❖ Exemple 3-bis : utilisation de la variation de la constante 38.

$$t + 1 \quad x'' - x' - t x = e^{-t}$$

❖ Exercice : Soit l'équation différentielle $x'' + a \quad t \quad x' + b(t)x = 0$

1. Montrer que si φ et ψ sont deux solutions, le wronskien $W_{\varphi,\psi}$ est solution de l'équation différentielle $x' + a \quad t \quad x = 0$.
2. Montrer que le wronskien $W_{\varphi,\psi}$ de deux solutions φ et ψ de l'équation différentielle $x'' + q(t)x = 0$ est constant.

5.5. Cas de l'équation à coefficients constants (rappels de *M.P.S.I.* revisités)

a) Cas homogène

- On résout ici : $(E^*) \quad x'' + ax' + bx = 0$ où $a, b \in \mathbb{K}^2$ et $c \in \mathcal{C}^1 I, \mathbb{K}$
- L'équation caractéristique est : $(E) \quad X^2 + aX + b = 0$.
- On obtient alors pour système fondamental de solutions de l'équation homogène, en fonction de la valeur de Δ :

		Solutions de (E)	S.F.S. de (E^*)
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\Delta \neq 0$	λ, μ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^2$	$t \rightarrow e^{\lambda t}, t \rightarrow e^{\mu t}$
	$\Delta = 0$	λ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$t \rightarrow te^{\lambda t}, t \rightarrow e^{\lambda t}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$\Delta > 0$	λ, μ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$	$t \rightarrow e^{\lambda t}, t \rightarrow e^{\mu t}$
	$\Delta = 0$	λ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$t \rightarrow te^{\lambda t}, t \rightarrow e^{\lambda t}$
	$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées : $\lambda, \bar{\lambda}$ avec $\lambda = a + ib$	$t \rightarrow e^{at} \cos(bt), t \rightarrow e^{at} \sin(bt)$

b) Cas général

- On résout ici : $x'' + ax' + bx = P(t)e^{mt}$ où $m \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
- La solution particulière est alors donnée par le tableau suivant :

	Bon à retenir : la solution particulière est
Si m non solution de (E)	$\tilde{x}(t)$ du type $Q(t)e^{mt}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg Q = \deg P$
Si m racine simple de (E)	$\tilde{x}(t)$ du type $tQ(t)e^{mt}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg Q = \deg P$
Si m racine double de (E)	$\tilde{x}(t) = Q(t)e^{mt}$ où $Q = \text{Prim}_0(\text{Prim}_0(P))$

