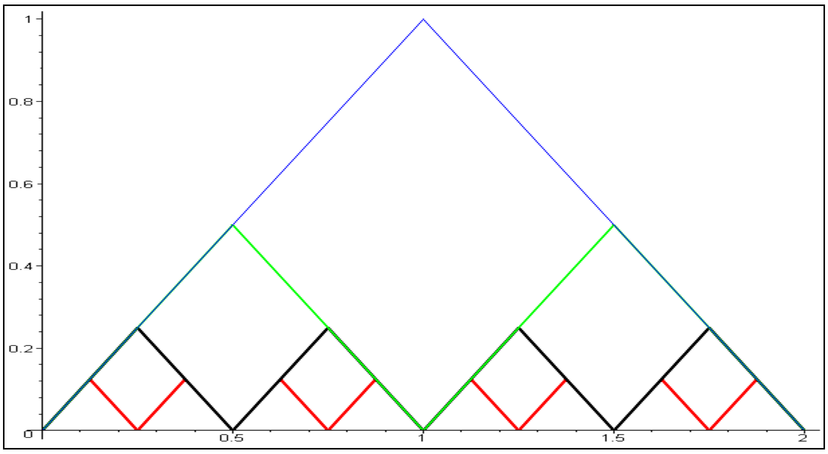
Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

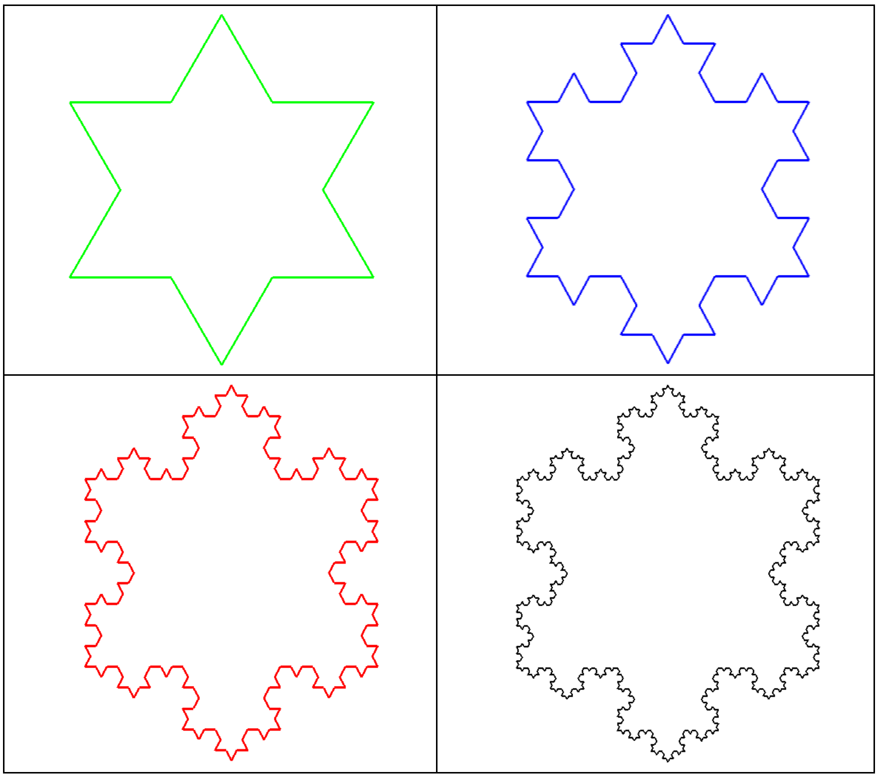
1. Suites de fonctions

1.0. Introduction : deux paradoxes $\boxed{\mathbf{1}}$.

- Une suite de courbes dont la longueur de la courbe limite n'est pas la limite des longueurs des courbes : $\mathcal{C}_n \longrightarrow \mathcal{C}$ mais $\ell(\mathcal{C}_n) \not\longrightarrow \ell(\mathcal{C})$.



- Le flocon de Von Koch : une surface finie dont le périmètre est infini…



1.1. Convergence simple

- Dans ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie ; les fonctions sont définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.
- Dans la pratique et notamment dans les exemples et les exercices :

  A est un intervalle I et $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On remplacera alors dans la pratique $\| \ \|_F$ par $| \ |$.

a) Définition

Définition 1 : **convergence simple d'une suite de fonctions**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans F.

Soit une fonction $f : A \to F$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur A si

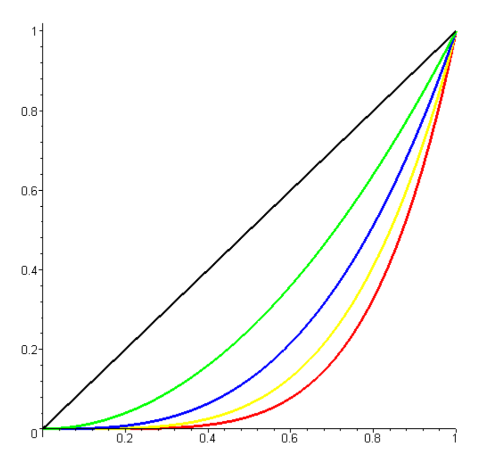
pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans F) vers $f(x)$.

Ainsi : $\boxed{[(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f] \Leftrightarrow [\forall x \in A : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)]}$

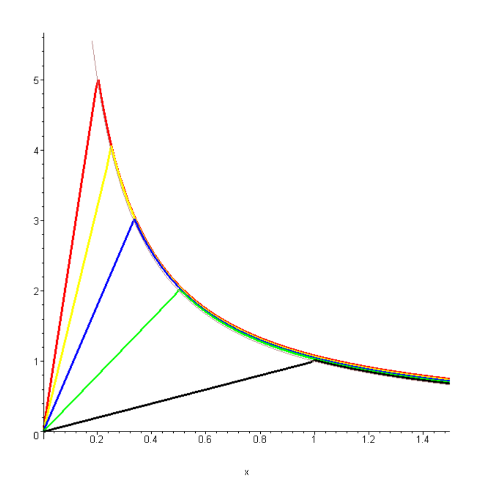
- Pratiquement : $\boxed{\text{On fixe } x \text{ dans } A \text{ et on fait tendre n vers } +\infty}$.

b) Exemples **2**.

- Exemple 1 : sur $[0,1]$, $f_n : x \to x^n$
- Exemple 2 : sur $[0,+\infty[$, $f_n : x \to \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$



Exemple 1



Exemple 2

1.2. Convergence uniforme

a) Définition

- Intro : changement de place du quantificateur $\forall x \in A$.

> Définition 2 : **convergence uniforme d'une suite de fonctions**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans F.
>
> Soit une fonction $f : A \to F$.
>
> On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur A si
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ [n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant n_0] \Rightarrow [\forall x \in A : \|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon].$$

- A partir d'un certain rang N, la fonction $f_n - f$ est donc bornée.

  On peut donc alors définir : $\|f_n - f\|_\infty = \underset{x\in A}{Sup}\|(f_n - f)(x)\|_F$. On a alors :

  $$\boxed{[(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f] \Leftrightarrow [\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0]}$$

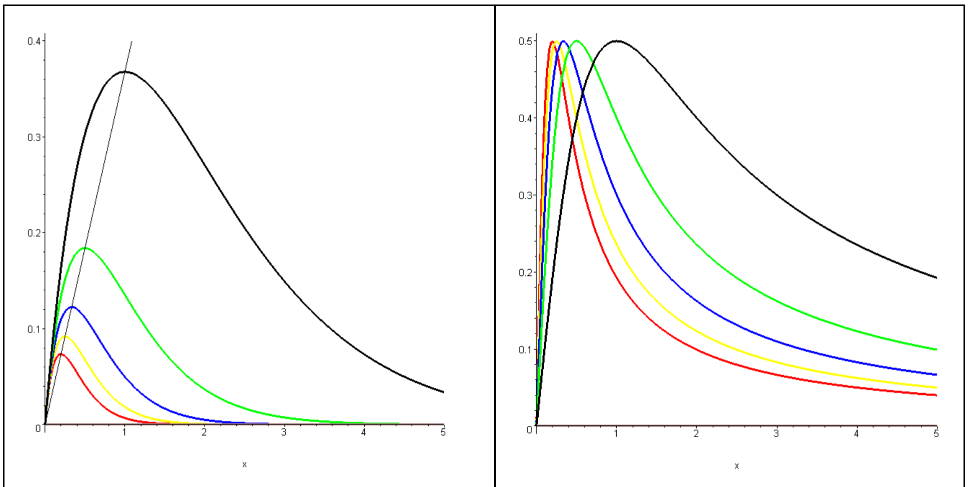
b) Convergence uniforme entraîne convergence simple

> Proposition :
>
> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A,
>
> alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

c) Méthodes pratiques

Démontrer une convergence uniforme par la défintion
① En général, on ne connaît pas la fonction limite : on la détermine donc par convergence simple, en déterminant $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
② On peut alors définir* le nombre $\mu_n = \underset{x\in A}{Sup}\|(f_n - f)(x)\|_F$
③ On montre enfin que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0$.

- μ_n peut n'être défini* qu'à partir d'un certain rang
- Si $F = \mathbb{R}$, μ_n peut être déterminé par l'étude de la fonction $(f_n - f)$
- Exemple 3 : sur $\mathbb{R}_+$, $f_n : x \to xe^{-nx}$ **3**.



Exemple 3	Exemple 5

Démontrer une convergence uniforme par une majoration
① INCHANGÉ
② On **majore** sur A $\lvert (f_n - f)(x) \rvert$ par une quantité ε_n ne dépendant que de n (i.e. "uniformément")
③ On montre enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Justification **4**.

- Exemple 4 : sur $\mathbb{R}_+$, $f_n : x \to xe^{-nx}\cos(nx)$ **5**.

Infirmer une convergence uniforme
Méthode 1 : exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n - f)(x_n)$ ne tende pas vers 0. Justification **6**.
Méthode 2 : utiliser une **propriété** des fonctions f_n (cf § 1.3) **non conservée** par la fonction f.
Méthode 3 : calculer $\mu_n = \underset{x\in A}{Sup}\lVert (f_n - f)(x)\rVert_F$ et montrer que $\mu_n \not\to 0$

- Exemple 5 : sur $\mathbb{R}_+$, $f_n : x \to \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ **7**.

d) Interprétation structurelle

- On a une première propriété conservée par passage à la limite.

Théorème 1 : **conservation du caractère borné**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de A dans F .
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est aussi bornée.

- Démonstration **8**.
- Conséquence : on travaille ici sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A,F)$ muni de la norme $\lVert\ \rVert_\infty$: $\lVert f\rVert_\infty = \underset{x\in A}{Sup}\lVert f(x)\rVert_F$

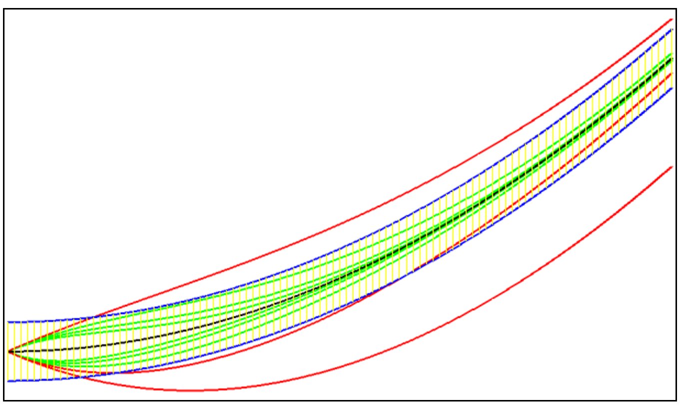
  - D'une part, la proposition précédente s'écrit :

  $$\boxed{[\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in\mathcal{B}(A,F)] \Rightarrow [f\in\mathcal{B}(A,F)]}$$

  - D'autre part, on a immédiatement :

  $$\boxed{[(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f] \Leftrightarrow [f_n \xrightarrow{\lVert\ \rVert_\infty} f]}$$

e) Interprétation géométrique pour les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ **9**.



1.3. Conservation de propriétés par passage à la limite

a) Convergence uniforme et continuité

Théorème 2 : conservation de la continuité

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(A,F)^{\mathbb{N}}$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $f \in \mathcal{C}(A,F)$.

i.e. Toute limite uniforme de fonctions continues est continue

- Démonstrations **10**. ⇙

Corollaire : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(I,F)^{\mathbb{N}}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f **sur tout segment** contenu dans I, alors $f \in \mathcal{C}(I,F)$.

- Exemples 1, 3 et 5 : analyse des diverses situations **11**.

b) Théorème de la double limite

- Intro : le théorème précédent revient à écrire, lorsque $x \in A$:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))}$$

- Qu'en est-il lorsque $x \in \overline{A} - A$? ⇙

Théorème 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et soit $a \in \overline{A}$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A

et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n au point a,

Alors ❑ f admet une limite au point a

❑ la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

❑ $\lim_a f = \lim_{n\to+\infty} b_n$

ainsi $\boxed{\lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))}$

- ☺ Démonstration non exigible **12**. ⇙
- Complément : le théorème reste vrai si $A = I \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$
- Exemple 1 (suite) :

$$\lim_{x\to 1^-}(\lim_{n\to+\infty} x^n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to 1^-} x^n) = 1.$$

Que peut-on en déduire ?

c) Convergence uniforme et intégration

Théorème 4 : **limite d'une suite d'intégrales**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],F)^{\mathbb{N}}$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$.

- Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt}$
- Démonstration **13**.
- Interprétation : on peut munir $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ de la norme $\| \ \|_\infty$, mais aussi de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

  Une conséquence immédiate du théorème 3 s'écrit alors :

Corollaire : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour $\| \ \|_\infty$, elle converge aussi vers f pour $\| \ \|_1$.

- La réciproque est fausse (cf ex.1 ci-dessous) : ce qui prouve une seconde fois que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

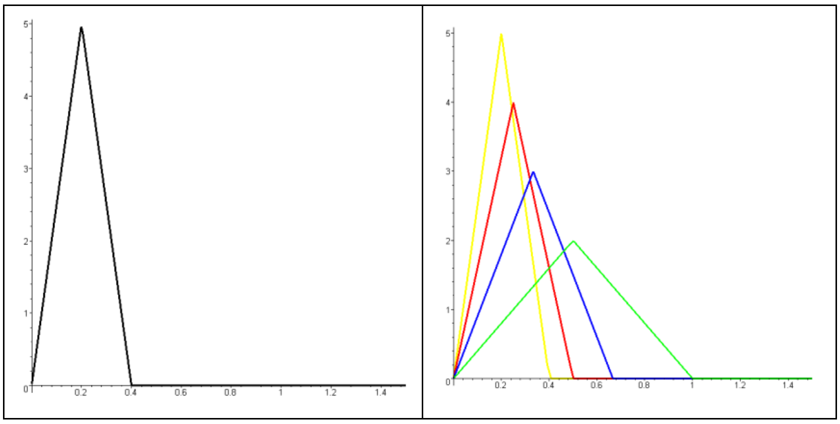
- Exemples **14**.
  - Exemple 1 (suite) : la convergence n'est pas uniforme ; pourtant

    $$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 f(t)dt$$
  - Exemple 3 (suite) :

    la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est uniforme donc

    $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 xe^{-nx}dx = 0$, ce qu'on peut vérifier par le calcul.

Exemple 5 Ici $f_n \xrightarrow{c.s.} 0$ mais $\int_0^1 f_n(t)dt = 1 \not\to \int_0^1 f(t)dt = 0$



d) Convergence uniforme et primitivation

Théorème 5 : convergence uniforme des primitives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(I,F)^{\mathbb{N}}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I,

et si on pose : $\forall x \in I,\quad F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$

alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.

- Ainsi, en notant $\mathrm{Prim}_a(g)$ la primitive sur I de g qui s'annule en a :

$$\boxed{[f_n \xrightarrow[\text{sur tout segment}]{c.u.} f] \Rightarrow [\mathrm{Prim}_a(f_n) \xrightarrow[\text{sur tout segment}]{c.u.} \mathrm{Prim}_a(f)]}$$

- ☺ Démonstration non exigible (en cahier de TD) **16**.

e) Convergence uniforme et dérivabilité

Théorème 6 : convergence uniforme et dérivabilité

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(I,F)^{\mathbb{N}}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si ① $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I,

② la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

Alors $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ et $f' = g$

de plus $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

- Ainsi, sous ces hypothèses $\boxed{(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n')}$
- ☺ Démonstration non exigible (en cahier de TD) **17**.
- Attention : la convergence uniforme doit être celle des dérivées !

Théorème 6 bis : généralisation à la classe C^k

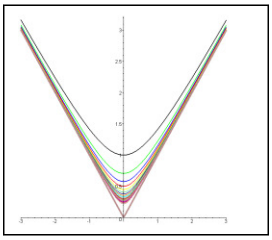
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^k(I,F)^{\mathbb{N}}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si ① $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$: la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i sur I

② la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_k sur tout segment de I,

Alors $f = g_0 \in \mathcal{C}^k(I,F)$ et $\forall i \in [\![0, k]\!] : f^{(i)} = g_i$.

- Exemple 6 : : sur $\mathbb{R}$, $f_n : x \to \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$



On a ici un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais dont la limite, $x \to |x|$, n'est pas dérivable en 0. **18**.

2. Séries de fonctions

2.0. Idée générale

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans F.

  On note encore, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k}$ la **somme partielle** d'indice n.

- On adapte dans le langage des séries tout ce qui concerne cette nouvelle suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui se nomme aussi **série de fonctions** $\boxed{\sum f_n}$.

2.1. Convergence simple

> Définition 1 : **convergence simple d'une série de fonctions**
>
> Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A à valeurs dans F.
>
> On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** et a pour somme la fonction $S : A \to F$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S. On note alors $\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n}$.

Ainsi $[\sum f_n$ converge simplement et a pour somme $S]$

$\Leftrightarrow [\forall x \in A :$ la série numérique $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme $S(x)]$

- Pratiquement : On fixe x dans A et on étudie la série numérique $\sum f_n(x)$.

- Exemple 1 : la série de fonctions $\sum xe^{-nx}$ convergence, somme **19**.

2.2. Convergence uniforme

a) Définition

> Définition 2 : **convergence uniforme d'une série de fonctions**
>
> On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

b) Propriétés essentielles

- ❋ $\boxed{[\sum f_n \text{ converge uniformément}] \Rightarrow [\sum f_n \text{ converge simplement}]}$

- ❋ $\boxed{[\sum f_n \text{ converge uniformément}] \Rightarrow [f_n \xrightarrow{c.u.} 0]}$

- ❋ Si $\sum f_n$ converge simplement, en notant $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$:

  alors $\boxed{[\sum f_n \text{ converge uniformément}] \Leftrightarrow [R_n \xrightarrow{c.u.} 0]}$

- Démonstrations **20**.

c) Exemples **21**.

- Exemple 1 (suite) : $\sum xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$

  ⇨ convergence non uniforme : la somme n'est pas continue

- Exemple 2 : $\sum z^n$ sur $B(0,1)$

  ⇨ convergence non uniforme : la somme n'est pas bornée

- Exemple 3 : $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ sur $[0,1]$

  ⇨ convergence uniforme : par **majoration uniforme du reste** R_n via le critère spécial des séries alternées (cette méthode est **à retenir !**).

2.3. Convergence absolue

> Définition 3 : **convergence absolue d'une série de fonctions**
>
> On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ **converge absolument** sur A
>
> si la série de fonctions $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge simplement sur A.

- Notamment pour $F = \mathbb{K}$, il n'y a qu'à retenir que :

$$\boxed{\left[\sum f_n(x) \text{ converge absolument}\right] \Leftrightarrow \left[\sum |f_n(x)| \text{ converge simplement}\right]}$$

2.4. Convergence normale

a) Définition

> Définition 4 : **convergence normale d'une série de fonctions**
>
> On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur A
>
> si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est bien définie et convergente.

b) Méthodes pratiques

Démontrer une convergence normale par la définition
① On détermine* le nombre $\|f_n\|_\infty = \underset{x\in A}{Sup}\|f_n(x)\|_F$
② On étudie la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.

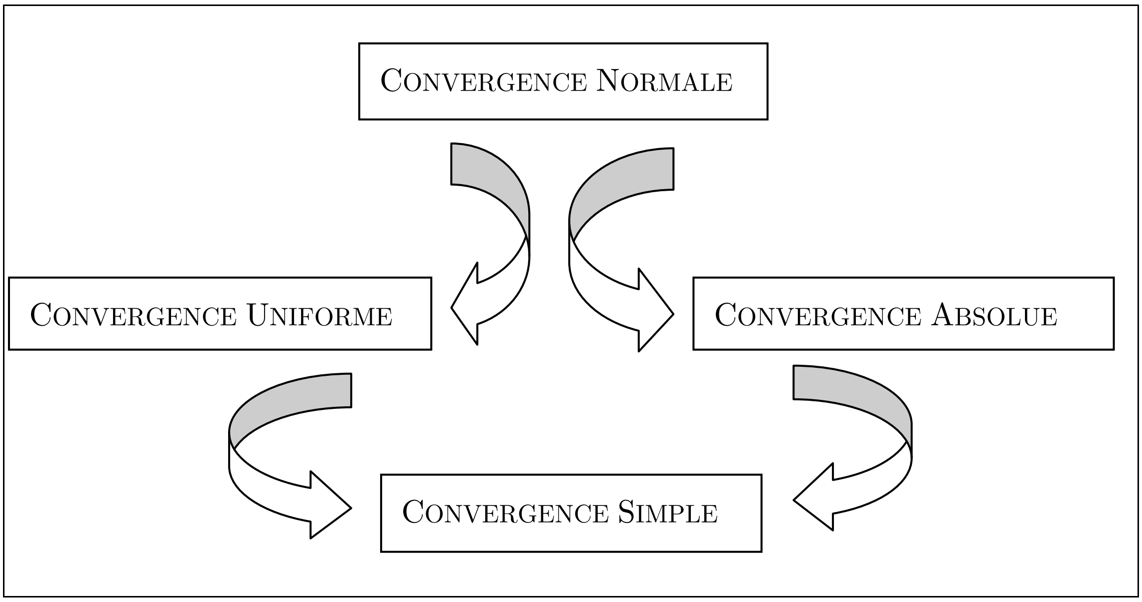
* sous réserve d'existence, sinon c'est cuit…

Démontrer une convergence normale par une majoration
① On **majore** sur A $\lvert f_n(x)\rvert$ par une quantité α_n ne dépendant que de n (i.e. "uniformément")
② On démontre que la série $\sum \alpha_n$ converge

- Démonstration **22**.

2.5. Liens entre les divers type de convergence et exemples

a) Incidences : démonstrations **23**.



b) Exemples **24**.

- Exemples 1 et 2 (suite) : $\sum xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sum z^n$ sur $B(0,1)$:

  ⇨ la fonction limite n'est pas continue (resp. pas bornée) !

  ⇨ la convergence n'est pas normale : elle n'est déjà pas uniforme !

- Exemple 3 : $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ sur $[0,1[$

  ⇨ la convergence n'est pas normale bien qu'uniforme.

- Exemple 4 : $\sum \dfrac{e^{inx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

  ⇨ convergence normale donc uniforme, absolue, donc simple..

- Exemple 5 : $\sum \dfrac{1}{n^z}$ sur $V = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

  ⇨ convergence absolue donc simple sur V.

  ⇨ convergence normale donc uniforme sur $V_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) \geqslant \alpha\}$ pour tout $\alpha > 1$, d'où continuité de la somme sur $V = \bigcup_{\alpha > 0} V_\alpha$.

  ⇨ non convergence uniforme sur V, donc non convergence normale.

  BON À SAVOIR : S'il y avait convergence sur V, il y aurait convergence sur $\overline{V}$ donc notamment pour $z = 1$; absurde…

2.6. Multithéorème : conservation de propriétés

- Principe : on applique les résultats des sept théorèmes vus au § 1.3 aux sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on reformule dans le langage propre aux séries :

Multithéorème : **convergence uniforme et passages à la limite**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I (ou même seulement sur tout segment inclus dans I). Sa somme est notée S (définie sur I).

① Si $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ alors $S \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.

② Si $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ alors $S \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

③ Si $a \in \overline{A}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n au point a,

alors
- ❑ S admet une limite au point a
- ❑ la série $\sum b_n$ converge
- ❑ $\boxed{\lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$ i.e. $\boxed{\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)}$

④ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la série $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge et $\boxed{\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt}$

i.e. $\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt}$

⑤ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et si pour $a \in I$, on pose :

$$\forall x \in I,\ F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad \text{et} \quad U(x) = \int_a^x S(t)dt$$

alors $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I. et a pour somme U i.e. $\boxed{\mathrm{Prim}_a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Prim}_a(f_n)}$

Par ailleurs :

⑥ Si ❶ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(I,F)^{\mathbb{N}}$,

❷ $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme S,

❸ la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I et a pour somme une fonction T,

alors : $S \in \mathcal{C}^1(I,F)$ et $S' = T$ i.e. $\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'}$

de plus $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

- On retrouve de même une généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$ comme on l'a vu dans le théorème 5 bis (§ 1.3.e). La reformuler en exercice.

3. Approximations uniformes

3.1. d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Théorème 1 : Toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([a,b],F)$ est la limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier.

- Démonstration **25**.
- On utilise deux lemmes dont les démonstrations sont intéressantes :

Lemme 1 : $\forall f \in \mathcal{C}_m([a,b],F), \exists (g,h) \in \mathcal{C}([a,b],F) \times \mathcal{E}([a,b],F) \,/\, f = g + h$

Lemme 2 : $\forall g \in \mathcal{C}([a,b],F), \forall \varepsilon > 0 : \exists h \in \mathcal{E}([a,b],F) \,/\, \|g-h\|_\infty < \varepsilon$

- Interprétation : en notant $\mathcal{E}([a,b],F)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$: $\boxed{\mathcal{E}([a,b],F) \text{ est dense dans } \mathcal{C}_m([a,b],F) \text{ muni de } \| \ \|_\infty}$
- Application 1 : ce théorème est la base de la théorie de l'intégration puisqu'on peut définir naturellement : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \varphi_n(t)dt\right)}$
- Application 2 : il est aussi la base de la **méthode des rectangles** **26**.

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right]}$$

Voir aussi à ce sujet "sommes de Riemann".

3.2. d'une fonction continue par des fonctions affines par morceaux

Théorème 2 : Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux

- Démonstration H.P. tout comme le théorème, mais **27**.
- Application : ce théorème est la base de la **méthode des trapèzes** **28**.

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right)\right]}$$

3.3. d'une fonction continue par des fonctions polynômes

Théorème 3 : Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

- Interprétation : en notant $K[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[a,b]$: $\boxed{K[x] \text{ est dense dans } \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \text{ muni de } \| \ \|_\infty}$
- Démonstration non exigible (cf D.M. facultatif) pour $[a,b] = [0,1]$:
  - On utilise la famille des **polynômes de Bernstein** associée à f définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}}$.

Remarque : $\boxed{\overline{K[x]} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}$ mais $\boxed{\overline{\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})} \supset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}$ (fonctions "réglées")