Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

1. Révisions

1.1. Matrices d'endomorphisme

a) Endomorphisme d'un K-espace vectoriel

- $\boxed{\mathcal{L}(E),+,\circ,.\ \text{ est une algèbre}}$ non commutative avec des diviseurs de zéro.
- Son groupe des inversibles est le **groupe linéaire** $\boxed{GL(E),\circ}$

b) Matrice d'un endomorphisme dans une base de E

- $\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!] \ : \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i}$
- $\boxed{[y = u(x)] \Leftrightarrow [Y = A \times X]}$ $\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!] \ : \ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}$

c) Endomorphisme canoniquement associé à une matrice

1.2. Matrice de passage

- $\boxed{Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$. Nécessairement $\boxed{P \in GL_n(K)}$.
- Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ avec $X = M_{\mathcal{B}}\ x$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}\ x$, alors $\boxed{X = P \times X'}$
- Soit $u \in \mathcal{L}\ E$ avec $M = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M' = M_{\mathcal{B}'}(u)$, alors $\boxed{M' = P^{-1}MP}$

1.3. Matrices semblables

- Définition
- Deux matrices semblables ont même **déterminant** et même **trace** Démo.

1.4. Sous-espace stable

a) Définition

b) Endomorphisme induit

c) Matrice dans une base de E adaptée à F

- $\boxed{M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}}$ $\boxed{d\acute{e}t(M) = d\acute{e}t(A) \times d\acute{e}t(C)}$
- Généralisations

d) Exemple fondamental : $\boxed{Vect(a) \text{ est stable par } u \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, u(a) = \lambda a}$

e) Propriété

Si deux endomorphismes u et v commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Démo.

2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices

2.1. Définition

2.2. Morphismes fondamentaux $\Phi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \to P \quad u \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{M}_n(K) \\ P \to P \quad M \end{cases}$

2.3. Idéal annulateur et polynômes annulateurs

- Définitions
- Exemples : homothétie, matrice scalaire, projecteur, symétrie

2.4. Polynôme minimal (cas où $\dim(E)$ est finie)

a) Propriété préliminaire

Lemme fondamental : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul.
Variante matricielle : toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ admet un polynôme annulateur non nul.

- Démonstration.

b) Définition

> Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
> on appelle **polynôme minimal** de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(K)$) l'unique polynôme unitaire générateur noté μ_u (resp. μ_A) de l'idéal $\mathcal{I}_u$ (resp. $\mathcal{I}_A$)

- Propriétés, exemples.

c) Polynôme minimal d'un endomorphisme et de sa matrice

d) Base de $K[u]$

2.5. Application ; calcul des puissances d'une matrice.

2.6. Exemple fondamental : matrice compagnon (hors-programme)

2.7. Décomposition des noyaux

> **Lemme de décomposition des noyaux** :
> Soit $(P_i)_{i=1..r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux.
> Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, alors $\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))}$

> **Théorème de décomposition des noyaux** :
> Soit $(P_i)_{i=1..r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux.
> Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ est annulateur de u, alors $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))}$

- Démonstration du théorème, le lemme étant admis

3. Eléments propres

3.1. Définitions

a) Valeurs propres, vecteurs propres, spectre

b) Exemples

c) Sous-espace propre

3.2. Propriétés

3.3. Valeurs propres et polynôme minimal

a) Une propriété importante :

> Propriété : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
>
> - Si $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, alors $P(\lambda) \in Sp_{\mathbb{K}}(P(u))$

- Démonstration.

b) Un théorème essentiel

> Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si P est annulateur de u et μ_u le polynôme minimal, alors : $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset Rac_{\mathbb{K}}(P)$ et $Sp_{\mathbb{K}}(u) = Rac_{\mathbb{K}}(\mu_u)$

- Démonstration

c) Exemples

3.4. Cas des matrices

a) Principe et notations

b) Définitions

c) Changement de corps

4. Polynôme caractéristique

4.1. Définitions

a) Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition, écriture : $\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)}$

Exemples : matrice triangulaire, matrice compagnon.

> Propriétés :
>
> - Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
> - $\chi_{{}^tA} = \chi_A$

- Démonstration

b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition, propriétés.

Exemples : homothétie, projecteur, symétrie, endomorphisme de rang 1.

c) Cas d'un endomorphisme induit

4.2. Polynôme caractéritique et valeurs propres

a) Racines du polynôme caractérique

Théorème : Les valeurs propres de u (resp. A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

- Démonstration

Corollaire : Si E est de dimension n, $\boxed{card(Sp(u)) \leqslant n}$

b) Ordre de multiplicité

Définition, exemple : si le polynôme caractéristique est scindé : $\boxed{\mathrm{tr}(u)}$, $\boxed{\det(u)}$

c) Dimension du sous-espace propre et ordre de multiplicité

Théorème : Si λ est valeur propre d'ordre m, alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m$

- Démonstration.
- Exemple : si λ est valeur propre d'ordre 1, alors $\dim(E_\lambda) = 1$

4.3. Polynôme caractéristique et polynôme minimal

Théorème de Cayley-Hamilton : χ_u est annulateur de u.

- Démonstration admise

Corollaire de Cayley-Hamilton : μ_u divise χ_u

- Démonstration

5. Endomorphismes diagonalisables

5.1. Définitions

Propriété : La diagonale de la matrice diagonale est alors constituée des valeurs propres, chacune ayant pour occurrence son ordre de multiplicité.

- Démonstration

5.2. Caractérisation de la diagonalisabilité

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est diagonalisable.

$\Leftrightarrow$ E possède une base de vecteurs propres.

$\Leftrightarrow$ E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) = n$ où $r = card(Sp(u))$

$\Leftrightarrow$ χ_u est scindé et $\forall j \in [\![1, n]\!] : \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$

(où m_i est l'ordre de multiplicité de λ_i)

- Démonstration.

Corollaire : Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

- Démonstration

5.3. Caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme minimal

a) Décomposition en projections

b) Diagonalisabilité et polynôme minimal

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

- Démonstrations.

6. Endomorphismes trigonalisables

6.1. Définitions

6.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé

$\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme annulateur scindé

$\Leftrightarrow \mu_u$ est scindé

- Démonstration non au programme de colle

Corollaire :

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est trigonalisable.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

7. Cas particuliers

7.1. Endomorphismes nilpotents

7.2. Endomorphismes à polynôme minimal scindé

a) Décomposition de E

Théorème

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme minimal scindé $\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$,

alors E est une somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ pour laquelle, sur chaque F_i, $u_{|F_i}$ est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

- Par le corollaire des noyaux, on peut prendre : $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{\beta_i})$
- Démonstrations

b) Traduction matricielle