Chapitre 13
Equations différentielles linéaires

1. Equations différentielles linéaires scalaires du 1^{ier} ordre

(rappels et compléments)

1.1. Equation résolue

a) Définitions et notations

Définitions 1 :

- équation différentielle linéaire (E.D.L.) scalaire résolue du 1^{ier} ordre :

  … toute équation du type : $\boxed{x' = a(t)x + b(t)}$ (**E**)

  ⇨ Dans le cadre du programme $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$, I est un intervalle
- solution de (**E**) : toute fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ qui vérifie :

  $$\forall t \in I : \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$
- courbe intégrale de (**E**) :

  … toute courbe $\mathcal{C}_\varphi$ représentive d'une solution φ de (**E**).
- l'équation homogène associée à (**E**) : $\boxed{X' = a(t)X}$ (**E***)
- un problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ où $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$
- on notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^*$) l'ensemble des solutions de (**E**) (resp. (**E***))

b) Solutions de l'équation homogène

Théorème 1 : Soit A une primitive (fixée) de a sur I

Les solutions de l'équation différentielle homogène $X' = a(t)X$ s'écrivent

$$\boxed{\begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \to C.e^{A(t)} \end{cases}} \quad \text{où } C \in \mathbb{K}.$$

Ainsi $\mathcal{S}^*$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 : $\boxed{\mathcal{S}^* = Vect(e^A)}$

- On notera qu'une primitive A existe toujours puisque $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
- ☺ On notera aussi que si une connaît une solution évidente $\hat{x}$ non nulle, on les connaît immédiatement toutes puisqu'alors $\boxed{\mathcal{S}^* = Vect(\hat{x})}$
- Exemple 1 : $y' = -y\tan(x)$

c) Solutions de l'équation générale

> Théorème 2 : L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ (**E**)
> - s'écrit $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^*$ où $\tilde{x}$: une solution particulière de (**E**)
> - est donc un espace affine de direction $\mathcal{S}^*$, de dimension 1
> - Les solutions de (**E**) s'écrivent donc $\boxed{\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \rightarrow \tilde{x}(t) + C.e^{A(t)} \end{cases}}$

- Théoriquement : $\boxed{\mathbf{1}}$.

  une solution particulière est définie par $\tilde{x}(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du$

- Pratiquement : on utilise la méthode de "**variation de la constante**". $\boxed{\swarrow}$

  ❋ Exemple 2 : $\boxed{(1+t^2)x' + tx = \sqrt{1+t^2}}$

- Néanmoins, dans certains cas, on connaît directement la forme de $\tilde{x}(t)$, souvent du même " type" que le second membre $b(t)$.

  ❋ Exemple 3 $\boxed{x' = k\,x + P(t)e^{mt}}$ où $(k,m) \in \mathbb{K}^2$ et $P \in \mathbb{K}[X]$

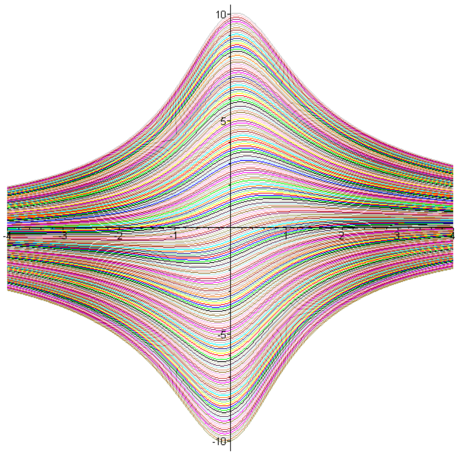
	Bon à retenir : la solution particulière est
si $m \neq k$	… du type $Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $d°(Q) = d°(P)$
si $m = k$	… égale à $Q(t)e^{mt}$ où $Q = \mathrm{Prim}_0(P)$

d) Problème de Cauchy, courbes intégrales

> Théorème 3 :
>
> Le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution

- … puisque la condition initiale $x(t_0) = x_0$ fixe la constante C.
- Il existe en fait une écriture (de peu d'intérêt !) de cette unique solution

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du}$$

Interprétation géométrique	Courbes intégrales de l' exemple 1 $C \in [-10, 10]$, $t \in [-4, 4]$
⇨ Par tout point (t_0, x_0) de la bande $I \times \mathbb{K}$ passe une courbe intégrale et une seule. ⇨ Les courbes intégrales forment ainsi une "partition" de la bande $I \times \mathbb{K}$	

e) Propriété de régularité :

Propriété 1 : caractère $\mathcal{C}^1$ des solutions d'une équation différentielle

Sous la condition $(a,b)\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$ (resp. $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})^2$, resp. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})^2$) , toute solution de l'équation différentielle $x'=a(t).x+b(t)$ (**E**) est de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^{k+1}$, resp. $\mathcal{C}^\infty$)

- Démonstration : récurrence sur k **2**.

f) Changement de corps

Propriété 2

Soient les équations différentielles $x'=a(t).x+b(t)$ (**E**)

et $x'=a(t).x+\tilde{b}(t)$ ($\tilde{\mathbf{E}}$)

où $a\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ et $\tilde{b}(t)=\mathrm{Re}(b(t))$ (resp. $\tilde{b}(t)=\mathrm{Im}(b(t))$).

Si x est solution de (**E**), alors $\mathrm{Re}(x)$ (resp. $\mathrm{Im}(x)$) est solution de ($\tilde{\mathbf{E}}$).

- Exemple 4 : $\boxed{y'=y+x\cos(x)}$ $I=\mathbb{R}$

1.2. Equation non résolue

a) Définition

Définition 2 :

équation différentielle (non résolue) du 1^{ier} ordre :

… toute équation du type : $\boxed{a(t)x'+b(t)x=c(t)}$ (**E**)

⇨ Dans le cadre du programme : $(a,b,c)\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$, I est un intervalle

b) Résolution pratique

⇨ On "découpe" I en intervalles où la fonction a ne s'annulle pas.

⇨ Sur chacun de ces intervalles, en divisant dans (**E**) par $a(t)$, on a l'équivalence avec une E.D.L. résolue qu'on sait donc résoudre.

⇨ On effectue alors si c'est possible un raccordement en 3 temps :

① Prolongement par continuité au point de raccordement

② Vérification de la dérivabilité d'un tel prolongement

③ Vérification au point de raccord de l'équation différentielle.

- Les propriétés des équations résolues ne sont plus vérifiées :

  ⇨ $\mathcal{S}$ peut être $\varnothing$ ou un espace affine de dimension quelconque.

  ⇨ le problème de Cauchy n'a plus forcément de solution ou peut aussi en avoir une, plusieurs, voire une infinité.

c) Exemples **3**.

- Exemple 5 : $\boxed{xy' - y = 0}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

  ⇨ $\dim(\mathcal{S}) = 1$

  ⇨ pb Cauchy : aucune solution ou une infinité

- Exemple 6 : $\boxed{xy' - 2y = 0}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

  ⇨ $\dim(\mathcal{S}) = 2$

  ⇨ Cauchy : aucune solution ou une infinité

- Exemple 7 : $\boxed{xy' + 2y = \dfrac{x^2}{1+x^2}}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

  ⇨ $\mathcal{S}$ est un singleton

  ⇨ Cauchy : aucune solution ou une seule solution

- Exemple 8 : $\boxed{y' \sin\ x\ + y \cos(x) = 1}$ $\qquad I =]-\pi, \pi[$

  ⇨ $\mathcal{S}$ est un singleton

  ⇨ Cauchy : aucune solution ou une seule solution

2. Equations différentielles linéaires du 1ier ordre

2.1. Notations et définitions

Notations :

- F : espace vectoriel de dimension finie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- Pour $u \in \mathcal{L}(F)$ et $x \in F$: on écrira $u.x$ au lieu de $u(x)$

  on pourra lire $u.x$: u appliqué à x

  à mettre en parallèle avec la notation $M.X$ lorsque $M = M_{\mathcal{B}}(u)$
- On considérera une application $\boxed{a : I \to \mathcal{L}(F)}$
- Pour une application $\varphi : I \to F$, on notera alors $a.\varphi$ l'application :

$$a.\varphi : \begin{cases} I \to \quad F \\ t \to a(t).\varphi(t) \end{cases}$$

Définitions 1 :

- équation différentielle linéaire (E.D.L.) résolue du 1ier ordre :

  … toute équation du type : $\boxed{x' = a(t).x + b(t)}$ (**E**)

  ⇨ Ici $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$
- solution de (**E**) : toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ qui vérifie :

$$\forall t \in I : \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$$

- un problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = v \end{cases}$ où $(t_0, v) \in I \times F$
- on notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}$*) l'ensemble des solutions de (**E**) (resp. (**E***))

- Remarque : on retrouve les équations différentielles scalaires si $F = \mathbb{R}$.

  C'est donc ici une généralisation **4**.

- Exemple : si $E=\mathbb{R}^3$, on peut identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

  (**E**) s'écrit alors : $\boxed{X' = A(t).X + B(t)}$

  où $A(t)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $X(t)$ et $B(t)$ des vecteurs colonnes de taille 3.

  soit : $\boxed{\begin{cases} {x_1}' = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + a_{1,3}(t)x_3 \\ {x_2}' = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + a_{2,3}(t)x_3 \\ {x_3}' = a_{3,1}(t)x_1 + a_{3,2}(t)x_2 + a_{3,3}(t)x_3 \end{cases}}$

  On obtient un " système différentiel linéaire" du 1^{ier} ordre

- Exemple **5**.

  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ résolution élémentaire ; remarques.

2.2. Propriétés

Propriété 1 : **caractère $\mathcal{C}^1$ des solutions d'une équation différentielle**

Toute solution de $x' = a(t).x + b(t)$ (**E**) est de classe $\mathcal{C}^1$

- Démonstration : **6**.

Propriété 2 : **structures algébriques des espaces de solutions**

Soit $x' = a(t).x + b(t)$ (**E**) et l'équation homogène associée $x' = a(t).x$ (**E***)

- $\mathcal{S}^*$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,F)$
- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,F)$ de direction $\mathcal{S}^*$

- Autrement dit : $\boxed{\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^*}$
- Démonstration : **7**.

Propriété 3 : **principe de superposition des solutions**

Soient n équations différentielles $x' = a(t).x + b_i(t)$ (**E$_i$**) (où $i \in [\![1,n]\!]$).

Soit l'équation différentielle $x' = a(t).x + b(t)$ (**E**)

où $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ avec $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$

Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, x_i est une solution particulière de (**E$_i$**),

alors $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ est une solution particulière de (**E**).

- Démonstration : **8**.

2.3. Le théorème de Cauchy linéaire

Théorème de **Cauchy linéaire**

Soit l'équation différentielle $x' = a(t).x + b(t)$ (**E**)

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ et $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$

Le problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = v \end{cases}$ où $(t_0, v) \in I \times F$ admet une et une seule solution.

- ☺ Démonstration à admettre : idée de la démo → **9**.

2.4. L'espace des solutions de l'équation homogène

a) Dimension de l'espace des solutions

Théorème fondamental : $\dim(\mathcal{S}^*) = \dim\ F$

- Démonstration **10**. On utilise le fait essentiel que

$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}^* \to F \\ \varphi \to \varphi(t_0) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

b) Application : recherche d'une base de $\mathcal{S}^*$

Théorème d'évaluation :

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ une famille de n solutions de (**E***).

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

① $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}^*$

② $\exists t_0 \in I \,/\, (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ est une base de F.

③ $\forall\, t \in I :\ (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une base de F.

- Démonstration **11**.
- Exemple (reprise) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

2.5. Méthode de variation des constantes pour l'équation complète

Principe :

- ❑ On suppose avoir résolu l'équation homogène (**E***) donc avoir trouvé une base de solutions $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathcal{S}^*$.
- ❑ Les solutions de l'équation (**E**) s'écrivent donc $\tilde{x} + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i$

  où $(C_i)_i \in \mathbb{K}^n$: les C_i sont donc des constantes.
- ❑ On cherche alors $\tilde{x}$ sous la forme $\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \varphi_i(t)$

  où $(C_i)_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^n$: les C_i sont maintenant des fonctions.

☺ on dit qu'on a fait "varier les constantes" C_i

- Justification **12**.

3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

3.1. Objet d'étude

On étudie ici le cas où a est constante i.e. l'équation

$$(\mathbf{E}) \qquad x' = a.x + b(t) \qquad \text{avec } a \in \mathcal{L}(F) \text{ et } b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K}).$$

Matriciellement $(\mathbf{E})$ s'écrit $X' = a.X + B(t)$ ce qui donne le

- Système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + b_2(t) \\ \qquad \ldots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + b_n(t) \end{cases}}$$

⇨ Ici $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] : b_i \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$

3.2. Sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

a) Rappel et extension des résultats du Chapitre 6

Dans l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

⇨ la série exponentielle $\sum \dfrac{M^n}{n!}$ converge (quelle que soit la norme choisie).

⇨ sa somme est la matrice notée $\exp(M)$ ou e^M

⇨ $\forall\ (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$: si M et N commutent, alors $e^{M+N} = e^M \times e^N$

⇨ $\exp(diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)) = diag(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\ldots,e^{\lambda_n})$

⇨ si N est nilpotente d''ordre p : $\exp(N) = \sum_{i=0}^{p-1} N^i$

- Démonstration du point 3 **13**. (autres points → Chapitre 6)
- Conséquence : $\boxed{\exp(0_n) = I_n}$ $\boxed{\exp(tI_n) = e^t I_n}$ **14**.
- De même (par isomorphisme) :

Dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(F)$, pour $u \in \mathcal{L}(F)$:

⇨ la série exponentielle $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge (quelle que soit la norme choisie).

⇨ sa somme est l'endomorphisme de F noté $\exp(u)$ ou e^u

⇨ $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(F)^2$: si u et v commutent, alors $e^{u+v} = e^u \circ e^v$

⇨ $\boxed{\exp(0_{\mathcal{L}(E)}) = Id_E}$ $\boxed{\exp(tId_E) = e^t Id_E}$

- Propriété immédiate : $\boxed{\text{si } M = M_{\mathcal{B}}(u)\text{, alors } \exp(M) = M_{\mathcal{B}}(\exp(u))}$
  - Démonstration **15**.

b) Exemple : **16**.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Méthode pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable

Propriété : Si $M = P\Delta P^{-1}$ alors $\exp(M) = P\,\exp(\Delta)\,P^{-1}$

- Démonstration **17**.

d) Dérivation de $t \mapsto e^{tA}$ et de $t \mapsto e^{ta}$

Propriété : Soient $a \in \mathcal{L}(F)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\varphi : t \to e^{tA}$ et $\psi : t \to e^{ta}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivées respectives $t \to A \times \varphi(t) = A \times e^{tA}$ et $t \to a \circ \psi(t) = a \circ e^{ta}$.

- Démonstration difficile **18**.

3.3. Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

a) Trois théorèmes pour les résoudre

Théorème 1 : **écriture de la solution du problème de Cauchy homogène**

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = v \end{cases}$ où $(t_0, v) \in \mathbb{R} \times F$.

L'unique solution est la fonction $\varphi : t \to \exp((t - t_0)a).v$

- Démonstration **19**.

Théorème 2 : **base de solutions de l'équation homogène**

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n vecteurs de F (où $n = \dim(F)$).

Soient les n fonctions $\varphi_i : t \to \exp((t - t_0)a).v_i$ définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une base de l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des solutions de $x' = a.x$

si et seulement si $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base de F.

- Démonstration **20**. ☺ Dans la pratique, prendre $t_0 = 0$

Lemme : **effet sur un vecteur propre**

Si v est vecteur propre de a associé à λ, alors $e^{ta}.v = e^{\lambda t}v$.

Traduction matricielle : si $Av = \lambda v$, alors $e^{tA}.v = e^{\lambda t}v$.

- Démonstration **21**.
- ☺ Faire le lien avec $P(u).v = P(\lambda)v$ (cf. chapitre 4)

Théorème 3 : écriture des solutions si a est diagonalisable

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomoprphisme diagonalisable.

Soit donc $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de a.

Soit pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, λ_j la valeur propre associée à v_j ($\lambda_j \in \mathbb{K}$).

Les solutions de l'équation différentielle homogène $x' = a.x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \to \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\lambda_j t}.v_j$ où $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_j \in \mathbb{K}$.

- Démonstration **21**.

b) Quatre méthodes pour les résoudre

❑ Si A est diagonalisable (cas simple qui tombe le plus souvent ! ☺)

Méthode 1 : ici on a tout intérêt à utiliser le théorème 3 .

- Exemple 1 : cas où A est $\mathbb{R}$-diagonalisable **22**.

$$\begin{cases} x' = x + 3y + (t-4) \\ y' = 3x + y + (3t-1) \end{cases}$$

- Exemple 2 : cas où A est $\mathbb{C}$-diagonalisable **23**.

$$\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = x + y \end{cases}$$

❑ Si A est trigonalisable avec une seule valeur propre

Méthode 2 : ici on a tout intérêt à utiliser le théorème 1

⇨ Les solutions s'écrivent : $\boxed{e^{tA}.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$ avec $t_0 = 0$ et $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

⇨ Ici, μ_A est scindé avec une seule racine.

⇨ Donc $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente (Chapitre 4)

⇨ … et e^{tA} est facile à calculer.

- Exemple 3 : cas A trigonalisable et $\text{Card}(Sp(A)) = 1$. **24**

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 2y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

❑ Autres cas pour $n = 3$

- Seul cas restant à traiter : A non diagonalisable et $\text{Card}(Sp(A)) = 2$.
- Ici, on a le choix entre 2 méthodes :

Méthode 3 : utiliser le théorème 2

Avec la base (u,v,w) dans laquelle A est trigonalisable et $t_0 = 0$, les solutions s'écrivent : $t \to \alpha\, e^{tA}.u + \beta\, e^{tA}.v + \gamma\, e^{tA}.w$.

On notera que si $u \in E_\lambda$, alors $e^{tA}.u = e^{\lambda t} u$

Méthode 4 : utiliser un changement de fonctions inconnues

⇨ ① Ecrire $A = PTP^{-1}$, ② changer de fonctions inconnues dans le système, ③ résoudre le nouveau système triangulaire (plus facile) avant de ④ revenir aux fonctions inconnues initiales

☺ Cette méthode s'applique bien aussi au cas 'A diagonalisable'

- Exemple 4 : cas où A est trigonalisable avec deux valeurs propres. **25**

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ z' = y + z \end{cases}$$

c) Un exemple avec des coefficients non constants

- Exemple 5 : **26**

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(1+t^4)x - 2t^2 y}{t(t^4-1)} \\ y' = \dfrac{(1+t^4)y - 2t^2 x}{t(t^4-1)} \end{cases}$$

Indication : $\left(t \to \dfrac{1}{t}, t \to t\right)$ est solution…

4. Equations scalaires d'ordre n

4.1. Définitions et principes généraux

Définition :

- équation différentielle linéaire (E.D.L.) scalaire résolue d'ordre n :

… toute équation $\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)}$ **(E)**

⇨ Au programme MP : $(a_i)_i \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$, $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ I est un intervalle

- l'équation homogène associée à **(E)** :

$\boxed{X^{(n)} + a_{n-1}(t)X^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)X' + a_0(t)X = 0}$ **(E*)**

- un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!] : x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \quad \text{où } (t_0,(x_i)_i) \in I \times \mathbb{K}^n$$

- Propriété immédiate : toute solution est de classe $\mathcal{C}^n$

4.2. Représentation par un système différentiel linéaire

Proposition : Soit l'équation différentielle scalaire d'ordre n $(\mathbf{E})$ ci-dessus.

On pose $\forall t \in I : A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

Alors x est solution de $\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)}$

si et seulement si $X = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ est solution de $\boxed{X' = A(t).X + B(t)}$.

- Démonstration **27**. Noter l'analogie avec la **matrice compagnon** !

4.3. Théorème de Cauchy

Théorème de **Cauchy**

Soit $(a_i)_i \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^n$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $(t_0, (x_i)_i) \in I \times \mathbb{K}^n$

Le problème de Cauchy $\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!] : x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$

admet une et une seule solution.

- Démonstration **28**.

4.4. Structure et dimension des espaces de solutions

Théorème fondamental :

Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^*$) l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathbf{E})$ (resp. $(\mathbf{E}^*)$).

❋ $\mathcal{S}^*$ est un sous--espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $\dim(\mathcal{S}^*) = n$.

❋ $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}^*$ donc de même dimension n.

- Démonstration **29**.
- On utilise le fait essentiel que

$$\boxed{\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}^* \to \mathbb{K}^n \\ x \to (x(t_0), x'(t_0) \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases} \text{est un isomorphisme}}.$$

5. Equation différentielle linéaires scalaires d'ordre 2

5.1. Système fondamental de solutions (S.F.S.), wronskien

Définitions :

- On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du 2nd ordre $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$ (**E***) toute base (φ_1, φ_2) de son espace des solutions $\mathcal{S}^*$.
- On appelle **wronskien** d'un couple $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})^2$ la fonction

$$W_{\varphi,\psi} : I \to \mathbb{K} \text{ définie par } \quad \forall t \in I \ : \ W_{\varphi,\psi}(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

5.2. Détermination d'un S.F.S par le wronskien

Théorème :

Soit (φ, ψ) un couple de solutions de $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$ (**E***).

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

① (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (**E***).

② $\exists t_0 \in I \ / \ W_{\varphi,\psi}(t_0) \neq 0$

③ $\forall \ t \in I : \ W_{\varphi,\psi}(t) \neq 0$

- Démonstration **30**.
- ☺ Le wronskien de $(\varphi, \psi) \in \mathcal{S}^*$ s'il n'est pas nul, ne s'annule pas !

5.3. Propriétés du wronskien d'un couple de solutions

Théorème :

Soit (φ, ψ) un couple de solutions de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (**E***).

Alors $W_{\varphi,\psi}$ est solution de l'E.D.L. du 1ier oudre $x' + a(t)x = 0$

- Démonstration **31**.
- Conséquence pour l'équation $x'' + q(t)x = 0$, $W_{\varphi,\psi}$ est constant

  C'est le cas par exemple pour $x'' + x = 0$ et $x'' - x = 0$

5.4. Méthodes pratiques de résolution de (**E***)

Principe général

- ❑ On recherche deux solutions φ et ψ (**E***) (diverses méthodes ↓)
- ❑ On vérifie par le wronskien que (φ, ψ) est un S.F.S. de (**E***).
- ❑ On conclut : $\mathcal{S}^* = Vect(\varphi, \psi)$

Diverses méthodes pour trouver φ et ψ (à faire dans l'ordre)

⓪ On pense d'abord à voir s'il n'y a pas de solution évidente.

① On peut rechercher une solution polynomiale

- Ce peut être le cas si les fonctions a et b sont polynomiales.
- On a intérêt à raisonner sur le degré possible de cette solution

② On cherche des solutions développables en série entière.

- Cette méthode est très prisée !
- Si on a trouvé une famille libre (utiliser le wronskien !) de solutions on a donc la base cherchée de (**E***).

③ Si on n'a trouvé (à une constante multiplicative près) qu'une solution φ de (**E***), on utilise **la méthode du wronskien** utilisant la propriété 5.3

- ψ solution de (**E***) est telle que $W_{\varphi,\psi}$ vérifie $x' + a(t)x = 0$ (2)
- sur un intervalle J où φ ne s'annule pas, on remarque alors que

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{W_{\varphi,\psi}}{\varphi^2} \quad (3)$$

- ayant résolu (2), on trouve $W_{\varphi,\psi}$ puis on primitive (3)

- Méthode ② : précisions
  - Supposer qu'il existe une solution D.S.E. de rayon $R > 0$
  - Reporter le D.S.E. $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ dans l'équation différentielle
  - Justifier par l'unicité du D.S.E. pour trouver des relations
  - Vérifier que pour les a_i trouvés, on a bien $R > 0$.

- Exemples
  - ❖ Exemple 1 : recherche d'une solution polynomiale **33**.

    $$\boxed{(t^2-2)x'' + (t^2-2t-2)x' - 2t\,x = 0}$$

  - ❖ Exemple 2 : recherche de solutions D.S.E. **34**.

    $$\boxed{x'' + t\,x' + x = 0}$$

  - ❖ Exemple 3 : méthode du wronskien **35**.

    $$\boxed{(t+1)x'' - x' - t\,x = 0}$$

5.5. Méthodes pratiques pour résoudre (**E**)

- On résout ici (**E**) $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)}$ où $(a, b, c) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^3$

Méthode standard : variation des deux constantes

On a résolu (**E***) $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ et trouvé un S.F.S. : (φ, ψ).

Les solutions de (**E***) s'écrivent donc $\lambda\varphi + \mu\psi$ avec λ et μ constantes.

① On recherche une solution particulière de (**E**) sous la forme :

$\tilde{x} = \lambda\varphi + \mu\psi$ où λ et μ sont maintenant des fonctions.

② On résout alors le système suivant : $\begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c(t) \end{cases}$ où les inconnues sont λ' et μ'.

☺ Le système est **facile à retenir** car son déterminant est le wronskien (φ, ψ) : il n'y a plus qu'à retenir le second membre.

③ Ayant résolu le système précédent et trouvé les valeurs de λ' et μ', on en déduit par primitivation λ et μ donc $\tilde{x}$ (on prend comme constantes de primitivation 0 car on veut <u>une</u> solution particulière).

③ On conclut : les solutions s'écrivent $\tilde{x} + \lambda\varphi + \mu\psi$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- <u>Justification</u> **36**.

❖ <u>Exemple 4</u> : utilisation de la variation des deux constantes **37**.

$$\boxed{(x-1)y'' - x\,y' + y = e^{2x}(x-1)^2}$$

5.6. Cas de l'équation à coefficients constants (rappels de M.P.S.I. revisités)

a) Cas homogène

- On résout ici : **(E*)** $\boxed{x'' + ax' + bx = 0}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
- L'**équation caractéristique** est : (E) $\boxed{X^2 + aX + b = 0}$.
- On obtient alors pour système fondamental de solutions de l'équation homogène, en fonction de la valeur de Δ :

		Solutions de (E)	S.F.S. de **(E*)**
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\Delta \neq 0$	$\{\lambda, \mu\}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$	$t \to e^{\lambda t}, t \to e^{\mu t}$
	$\Delta = 0$	$\{\lambda\}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$t \to te^{\lambda t}, t \to e^{\lambda t}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$\Delta > 0$	$\{\lambda, \mu\}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$	$t \to e^{\lambda t}, t \to e^{\mu t}$
	$\Delta = 0$	$\{\lambda\}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$t \to te^{\lambda t}, t \to e^{\lambda t}$
	$\Delta < 0$	$\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ où $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ avec $\lambda = a + ib$	$(t \to e^{at}\cos(bt), t \to e^{at}\sin(bt))$

b) Cas général

- On résout ici : $\boxed{x'' + ax' + bx = P(t)e^{mt}}$ où $m \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
- La solution particulière est alors donnée par le tableau suivant :

	Bon à retenir : la solution particulière est
Si m non solution de (E)	$\tilde{x}(t)$ du type $Q(t)e^{mt}$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathrm{d}^\circ(Q) = d^\circ(P)$
Si m racine simple de (E)	$\tilde{x}(t)$ du type $tQ(t)e^{mt}$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathrm{d}^\circ(Q) = d^\circ(P)$
Si m racine double de (E)	$\tilde{x}(t) = Q(t)e^{mt}$ où $Q = \mathrm{Prim}_0(\mathrm{Prim}_0(P))$