MP Programme de colle n° 9

Chapitre 6
Suites et séries de fonctions

Colleurs, attention : sur le site et sur mon poly de cours, c'est le chapitre 7 !

Cours : tout le chapitre

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

1. Suites de fonctions

1.2.d

> Théorème 1 : **conservation du caractère borné**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de A dans F.
>
> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est aussi bornée.

1.3.a

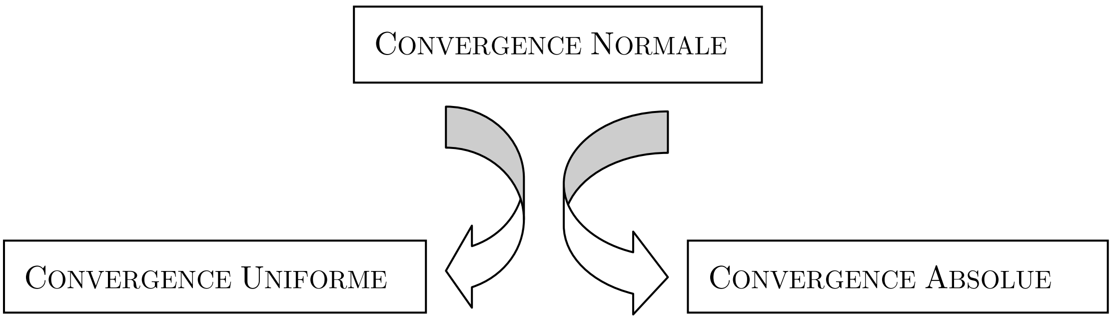
> Théorème 2 : **conservation de la continuité**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(A,F)^{\mathbb{N}}$
>
> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $f \in \mathcal{C}(A,F)$.

1.3.c

> Théorème 4 : **limite d'une suite d'intégrales**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],F)^{\mathbb{N}}$
>
> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$.

2. Séries de fonctions

2.5.a



2.6

<u>Multithéorème</u> : **convergence uniforme et passages à la limite**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I (ou même seulement sur tout segment inclus dans I). Sa somme est notée S (définie sur I).

③ Si $a \in \overline{A}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n au point a,

alors ❑ S admet une limite au point a

❑ la série $\sum b_n$ converge

❑ $\boxed{\lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$ i.e. $\boxed{\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)}$

④ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la série $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge et $\boxed{\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt}$

i.e. $\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt}$

La propriété correspondante sur les suites de fonctions est supposée ici connue : m'intéresse seulement la connaissance du théorème sur les suites (ex. double limite) et son utilisation pour obtenir un nouveau théorème sur les séries (ex. ③).