SEMAINE 3

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES (PREMIÈRE PARTIE)

EXERCICE 1 :

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que E n'est pas la réunion d'une famille finie de sous-espaces vectoriels stricts.

2. Soit u un endomorphisme de E. Pour tout vecteur x de E, soit $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ (**idéal annulateur de** u **en** x). Montrer que I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$; on notera μ_x le générateur normalisé de cet idéal.

3. Soit μ le polynôme minimal de u. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $\mu = \mu_x$.

4. Un endomorphisme u de E est dit **cyclique** s'il existe un vecteur x de E tel que l'ensemble

$$E_x = \{P(u)(x) \; ; \; P \in \mathbb{K}[X]\}$$

soit égal à E. Montrer que u est cyclique si et seulement si son polynôme minimal est égal (au signe près) à son polynôme caractéristique (noté χ).

5. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$.

On pourra, pour tout x de E, considérer l'application $\delta_x : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ définie par $\delta_x(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$, où $\mathcal{B}$ est une quelconque base de E, et $n = \dim E$.

Source :

- *Jacques CHEVALLET, Algèbre MP/PSI, Éditions Vuibert, ISBN 2-7117-2092-6*
- *Patrice TAUVEL, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2, Éditions Masson, ISBN 2-225-84441-0*

- -

1. Par récurrence sur $n = \dim E$.

- Pour $n = 0$ ou $n = 1$, c'est évident.
- Soit $n \geq 2$, supposons la propriété démontrée pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, supposons $E = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_p$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels stricts de E. Si H est un hyperplan de E, on a alors

  $$H = (H \cap F_1) \cup (H \cap F_2) \cup \ldots \cup (H \cap F_p) \; .$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, on a $H \cap F_i = H$ pour un certain indice $i \in [\![1, p]\!]$, c'est-à-dire $H \subset F_i$, soit encore $H = F_i$ puisque F_i est un sous-espace strict de E.

  Tout hyperplan de E est donc l'un des F_i (c'est absurde, il y a dans E une infinité d'hyperplans distincts).

2. Vérifications immédiates, laissées à l'éventuel lecteur. On a $I_x \neq \{0\}$ car $\mu \in I_x$.

3. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs stricts normalisés de μ dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\mathcal{D} = \{P \in \mathbb{K}[X] \; ; \; P \text{ normalisé} \; , \; P \mid \mu \; , \; P \neq \mu\} \; .$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est fini. S'il n'existait pas de vecteur x de E tel que $\mu = \mu_x$, alors tout x de E appartiendrait à un sous-espace $\operatorname{Ker} P(u)$ avec $P \in \mathcal{D}$, on aurait donc

$$E = \bigcup_{P \in \mathcal{D}} \operatorname{Ker} P(u)$$

et E serait une union finie de sous-espaces stricts (on a bien $\operatorname{Ker} P(u) \neq E$ pour tout $P \in \mathcal{D}$ en raison de la minimalité de μ), ce qui est absurde.

3'. *Montrons avec des arguments plus classiques l'existence d'un vecteur x tel que $\mu_x = \mu$, même si $\mathbb{K}$ est un corps fini :*

- si x et y sont deux vecteurs quelconques, on a $P(u)(x+y) = P(u)(x) + P(u)(y)$ pour tout polyn"me P, d'où $I_x \cap I_y \subset I_{x+y}$, soit $\mu_{x+y} \mid \mu_x \vee \mu_y$, ce qui entraîne $\mu_{x+y} \mid \mu_x\, \mu_y$.
- si les vecteurs x et y sont tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, alors $\mu_{x+y} = \mu_x\, \mu_y$: en effet, on sait déjà que $\mu_{x+y} \mid \mu_x\, \mu_y$; par ailleurs, $x = (x+y) + (-y)$, donc $\mu_x \mid \mu_{x+y}\, \mu_y$. Par le théorème de Gauss, on tire $\mu_x \mid \mu_{x+y}$. Par symétrie, $\mu_y \mid \mu_{x+y}$. Donc $\mu_x\, \mu_y = \mu_x \wedge \mu_y \mid \mu_{x+y}$.
- Soit $\mu = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} P_k^{r_k}$ la décomposition de μ en produit de facteurs irréductibles dans $K[X]$.

  D'après le lemme des noyaux, on a $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ avec $N_k = \operatorname{Ker} P_k^{r_k}(u)$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, posons $Q_i = P_i^{r_i - 1}\Big(\displaystyle\prod_{j \neq i} P_j^{r_j}\Big)$, on a ainsi $\mu = P_i Q_i$.

  Dans $N_i = \operatorname{Ker} P_i^{r_i}(u)$, il existe au moins un élément x_i tel que $\mu_{x_i} = P_i^{r_i}$: en effet, sinon, on aurait $P_i^{r_i-1}(u)(x) = 0$ pour tout $x \in N_i$, donc $N_i = \operatorname{Ker} P_i^{r_i-1}(u)$ et le polynôme Q_i annulerait alors u, ce qui contredirait la minimalité de μ.

  Les $P_i^{r_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, le vecteur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ vérifie $\mu_x = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i^{r_i} = \mu$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque, soit $x \in E$ non nul. L'ensemble $E_x = \{P(u)(x)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E (*évident, on l'appelle sous-espace u-monogène engendré par le vecteur x*). La dimension de E_x est le degré du polynôme μ_x : $\dim E_x = \deg \mu_x$.

En effet, soit r le plus petit entier naturel non nul pour lequel la famille de vecteurs $\big(x, u(x), \ldots, u^r(x)\big)$ est liée. Alors, la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\big)$ est libre, donc l'idéal annulateur I_x ne contient aucun polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$ (sauf le polynôme nul), mais $u^r(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs x, $u(x)$, $\ldots$, $u^{r-1}(x)$ donc il existe un polynôme normalisé P de degré r tel que $P(u)(x) = 0$ et ce polynôme est alors μ_x, donc $\deg \mu_x = r$.

Par ailleurs, $u^r(x) \in \operatorname{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\big)$ et, par une récurrence immédiate, on a $u^k(x) \in \operatorname{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $E_x = \operatorname{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\big)$ et cet espace est de dimension r puisque la famille $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\big)$ est libre.

- Si u est cyclique, alors il existe x tel que $E_x = E$, donc tel que $\deg \mu_x = n$. Comme $\mu_x \mid \mu$ et $\mu \mid \chi$ avec $\deg \chi = n$, on a donc $(-1)^n \chi = \mu = \mu_x$.
- Si $\chi = (-1)^n \mu$, on utilise l'existence d'un vecteur x tel que $\mu_x = \mu$; pour un tel x, on a $\dim E_x = \deg \mu_x = n$, donc $E_x = E$ et u est cyclique.

5. Soit Ω l'ensemble des endomorphismes cycliques de E. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Alors

$$u \in \Omega \iff \exists x \in E \quad \det_{\mathcal{B}}\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big) \neq 0\ .$$

Pour tout $x \in E$, l'application $\delta_x : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ définie par $\delta_x(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ est polynomiale (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$), donc continue, donc $\Omega = \displaystyle\bigcup_{x \in E} \delta_x^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Remarquons que l'application δ_x est $\dfrac{n(n-1)}{2}$-homogène (multilinéarité du déterminant) :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall t \in K \qquad \delta_x(tu) = t^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \delta_x(u) \ .$$

Donnons-nous un endomorphisme cyclique v_0 fix de E (celui tel que $M_{\mathcal{B}}(v_0) = \mathrm{diag}(1, \ldots, n)$ par exemple : *un endomorphisme diagonalisable est cyclique si et seulement si ses valeurs propres sont deux à deux distinctes*), soit donc x un vecteur tel que $\delta_x(v_0) \neq 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque, montrons que l'on peut approcher u par des endomorphismes cycliques. Par continuité, on a $\delta_x(v_0+tu) \neq 0$ pour $|t|$ petit. Mais on a $\delta_x(u+tv_0) = t^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \delta_x\left(v_0 + \dfrac{1}{t}u\right)$ pour tout $t \in \mathbb{K}^*$. L'application $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \delta_x(u+tv_0)$, est polynomiale non identiquement nulle, soit R l'ensemble (fini, éventuellement vide) de ses racines ; si $0 \notin R$, cela signifie que $u \in \Omega$ et, si $0 \in R$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que 0 soit le seul élément de R de module strictement inférieur à α et alors tous les endomorphismes $u + tv_0$, avec $0 < |t| < \alpha$, sont cycliques.

EXERCICE 2 :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- on note γ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\gamma_A(M) = [A, M] = AM - MA$;
- on note τ_A la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\tau_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que l'application $\tau : A \mapsto \tau_A$ définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

2. On suppose A nilpotente. Comparer les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,\gamma_A$ et $\mathrm{Ker}\,\tau_A$.

3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = BA - AB$.

4. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si les matrices A et $2A$ sont semblables.

Source : Merci à Jacques CHEVALLET.

- -

1. La linéarité de $\tau : \mathcal{M}_n(K) \to \big(\mathcal{M}_n(K)\big)^*$ est immédiate. On vérifie que $\tau_A(E_{ij}) = a_{ji}$ (*avec des notations évidentes*) donc $\tau_A = 0$ si et seulement si $A = 0$. L'application linéaire τ est donc injective, c'est donc un isomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension.

2. Si A est nilpotente et si M est une matrice commutant avec A (c'est-à-dire $M \in \mathrm{Ker}\,\gamma_A$), alors AM est nilpotente (puisque $(AM)^k = A^k M^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), donc $\mathrm{tr}(AM) = 0$. On a ainsi prouvé l'inclusion

$$\mathrm{Ker}\,\gamma_A \subset \mathrm{Ker}\,\tau_A \ .$$

3. • Si A est nilpotente, l'inclusion $\operatorname{Ker}\gamma_A \subset \operatorname{Ker}\tau_A$ démontrée ci-dessus permet de factoriser : il existe une forme linéaire λ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\tau_A = \lambda \circ \gamma_A$ (*cf. théorème de factorisation, semaine* **2**, *exercice* **1**, *question* **a.**). D'après la question **1.**, on peut écrire $\lambda = \tau_B$, où B est une certaine matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$. Mais si M est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned}(\tau_B \circ \gamma_A)(M) &= \operatorname{tr}\big(B(AM - MA)\big) = \operatorname{tr}(BAM) - \operatorname{tr}(BMA) = \operatorname{tr}(BAM) - \operatorname{tr}(ABM)\\ &= \operatorname{tr}\big([B,A]\,M\big) = \tau_{[B,A]}(M)\ ,\end{aligned}$$

donc $\tau_B \circ \gamma_A = \tau_{[B,A]}$. On a ainsi prouvé l'existence d'une matrice B telle que $\tau_A = \tau_{[B,A]}$. Par l'isomorphisme "canonique" entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual, on déduit

$$A = [B,A] = BA - AB\ .$$

• Si $BA - AB = A$, alors $(BA - AB)A + A(BA - AB) = 2A^2$, soit $BA^2 - A^2B = 2A^2$ puis, par récurrence, on a $BA^k - A^kB = kA^k$ pour tout entier naturel k. Si la matrice A n'était pas nilpotente, alors l'endomorphisme $\gamma_B : M \mapsto BM - MB$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettrait une infinité de valeurs propres (tous les entiers naturels), ce qui est impossible. La matrice A est donc nilpotente.

4. • Supposons A nilpotente. Il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$, ce que l'on peut écrire $A(I + B) = BA$. Par une récurrence immédiate, on en tire $A(I + B)^k = B^kA$ pour tout entier naturel k puis, plus généralement, $A \cdot P(I + B) = P(B) \cdot A$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; en considérant la suite de polynômes (P_N) définie par $P_N(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k X^k}{k!}$ et en passant à la limite (*justifications immédiates*), on obtient la relation

$$A\,e^{\lambda(I+B)} = e^{\lambda B}\,A\ , \qquad \text{soit encore} \qquad e^{\lambda}A = e^{\lambda B}\,A\,e^{-\lambda B}\ ;$$

les matrices A et $e^{\lambda}A$ sont donc semblables, il suffit alors de prendre $\lambda = \ln 2$.

• Si A et $2A$ sont semblables, alors 2^kA est semblable à A pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si λ est une valeur propre (complexe) de A, alors $2^k\lambda$ est aussi valeur propre de A pour tout n, cela impose $\lambda = 0$ (sinon A admettrait une infinité de valeurs propres). Le polynôme caractéristique de A est donc $(-X)^n$, donc A est nilpotente d'après Cayley-Hamilton.

EXERCICE 3 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, soient u et v deux endomorphismes de E tels que $uv - vu = u$.

1. Montrer que $u^k v - v u^k = k\, u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que u est nilpotent.

3. Montrer que u et v sont cotrigonalisables (*il existe une base de trigonalisation commune*).

4. Montrer que le résultat de la question **3.** reste vrai si on suppose seulement que

$$uv - vu \in \mathrm{Vect}(u, v) .$$

- -

1. C'est une récurrence immédiate.

En notant $[u, v] = uv - vu$, on peut remarquer que $[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$. Si, au rang $k \geq 1$, on a $[u^k, v] = k\, u^k$, alors

$$[u^{k+1}, v] = [uu^k, v] = [u, v]u^k + u[u^k, v] = u^{k+1} + k\, u^{k+1} = (k+1)u^{k+1} .$$

2. Notons γ_v l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\gamma_v(w) = [w, v] = wv - vw$ pour tout $w \in \mathcal{L}(E)$. On a $\gamma_v(u^k) = k u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc, si u n'était pas nilpotent, l'endomorphisme γ_v de $\mathcal{L}(E)$ aurait une infinité de valeurs propres (tous les entiers naturels), ce qui est impossible car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie.

3. Montrons d'abord que u et v admettent un vecteur propre commun : le sous-espace $\mathrm{Ker}\, u$ (non réduit à $\{0\}$ car u est nilpotent) est stable par v (vérification immédiate). Le corps de base étant $\mathbb{C}$, l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}\, u$ induit par v admet au moins un vecteur propre, et le tour est joué.

Raisonnons maintenant par récurrence sur $n = \dim E$:

- pour $n = 1$, c'est évident ;
- soit $n \geq 2$, supposons l'assertion vraie au rang $n - 1$, soit E de dimension n, soient u et v deux endomorphismes de E tels que $[u, v] = u$. Soit e_1 un vecteur propre commun à u et v (*on vient d'en prouver l'existence*) : $u(e_1) = 0$ (nécessairement!) et $v(e_1) = \lambda e_1$.

  Soit H un hyperplan supplémentaire de la droite $D = \mathbb{C}e_1$ dans E, notons p le projecteur sur H parallèlement à D ; dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E où $\mathcal{B}' = (e_2, \cdots, e_n)$ est une base de H, on a $U = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & U' \end{pmatrix}$ et $V = M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & L' \\ 0 & V' \end{pmatrix}$ avec U' et V' carrées d'ordre $n - 1$ (représentant dans $\mathcal{B}'$ les endomorphismes u' et v' de H induits par $p \circ u$ et $p \circ v$ respectivement).

  De $UV - VU = U$, un calcul par blocs donne $U'V' - V'U' = U'$, soit $[u', v'] = u'$. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes u' et v' de H : il existe une base $\mathcal{C}' = (\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ de H dans laquelle u' et v' sont représentés par des matrices triangulaires supérieures T_1 et T_2. Dans la base $\mathcal{C} = (e_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ de E, les endomorphismes u et v sont représentés par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & Y \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ qui sont encore triangulaires supérieures (X et Y sont des matrices-lignes à $n-1$ coefficients). La récurrence est achevée.

4. Supposons maintenant $[u, v] = \alpha u + \beta v$.

- Si $\alpha \neq 0$, en tâtonnant un peu, on se ramène à ce qui a été étudié : posons $w = \dfrac{1}{\alpha} v$, on vérifie $[u, w] = u + \beta w$; on pose ensuite $t = u + \beta w$ et on a $[t, w] = w$, donc t et w sont trigonalisables dans une même base, donc aussi $u = t - \beta w$ et $v = \alpha w$.
- Si $\beta \neq 0$, on conclut itou en échangeant les rôles de u et v.
- Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, alors u et v commutent, donc ont un vecteur propre commun (*tout sous-espace propre de u est stable par v*) et on conclut par récurrence sur la dimension de E comme dans la question **3.** ci-dessus.

EXERCICE 4 : Décomposition de Jordan

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit ν un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence r avec $0 < r < n$:

$$\nu^{r-1} \neq 0 \quad \text{et} \qquad \nu^r = 0 \;.$$

Soit a un vecteur de E tel que $\nu^{r-1}(a) \neq 0$, soit H un hyperplan de E ne contenant pas $\nu^{r-1}(a)$.

Montrer que $E = F \oplus G$, avec

$$F = \text{Vect}\left(a, \nu(a), \cdots, \nu^{r-1}(a)\right) \quad \text{et} \qquad G = \bigcap_{k=0}^{r-1} (\nu^k)^{-1}(H) \;.$$

2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E, stable par f, est dit **indécomposable** s'il n'existe pas de décomposition $F = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 stables par f, $F_1 \neq \{0\}$, $F_2 \neq \{0\}$.

Soit F un sous-espace stable indécomposable de dimension n, soit g l'endomorphisme de F induit par f. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de F dans laquelle la matrice de g est de la forme

$$M_{\mathcal{C}}(g) = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C} \;.$$

Source : Denis MONASSE, Mathématiques MP, Cours complet avec CD-ROM, Éditions Vuibert, ISBN 2-7117-8811-3

1. La famille $\mathcal{F} = \big(a, \nu(a), \cdots, \nu^{r-1}(a)\big)$ est libre (*question classique*), donc $\dim F = r$.

Soit φ une forme linéaire sur E, de noyau H, alors $G = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{r-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ \nu^k)$. Chaque $\varphi \circ \nu^k$ est une forme linéaire sur E, non nulle car $(\varphi \circ \nu^k)\big(\nu^{r-1-k}(a)\big) = \varphi\big(\nu^{r-1}(a)\big) \neq 0$ étant donné que $\nu^{r-1}(a) \notin H$. Le sous-espace G est une intersection de r hyperplans, il est donc de codimension au plus égale à r, c'est-à-dire $\dim G \geq n - r$.

Montrons $F \cap G = \{0\}$: si $x \in F \cap G$, alors $x = \lambda_0 a + \lambda_1 \nu(a) + \cdots + \lambda_{r-1}\nu^{r-1}(a)$, mais $(\varphi \circ \nu^{r-1})(x) = 0$ ce qui donne $\lambda_0 \varphi\big(\nu^{r-1}(a)\big) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$.

On applique ensuite $\varphi \circ \nu^{r-2}$ qui donne $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite (*c'est la même idée que pour montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre*), donc $x = 0$.

Enfin, $\dim(F + G) = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G \geq n$, donc $F \oplus G = E$.

Remarquons que F et G sont deux sous-espaces stables par ν et qu'ils ne sont pas réduits à $\{0\}$, cela servira par la suite.

2. Soit μ le polynôme minimal de g. Il est irréductible : en effet, si on avait $\mu = \mu_1\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 non constants et premiers entre eux, alors le théorème de décomposition des noyaux donnerait $F = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Ker}\,\mu_1(g)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}\,\mu_2(g)$ (sous-espaces stables par g et non réduits à $\{0\}$ en raison de la minimalité de μ), ce qui contredit l'indécomposabilité de F (*ce qui a été fait jusqu'à présent est valable sur un corps quelconque ; maintenant, plaçons-nous sur $\mathbb{C}$*).

On a donc $\mu(X) = (X - \lambda)^r$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Donc l'endomorphisme (de F) : $\nu = g - \lambda\,\mathrm{id}_F$ est nilpotent d'indice r. Si on avait $r < n$, d'après la question **1.**, on pourrait décomposer F en $F = F' \oplus F''$ avec F' et F'' stables par ν (donc par $g = \nu + \lambda\,\mathrm{id}_F$) et non réduits à $\{0\}$, ce qui est absurde.

On a donc $r = n$ (ν est un endomorphisme de F nilpotent d'indice maximal) et en choisissant un vecteur a de F tel que $\nu^{n-1}(a) \neq 0$, la matrice de $g = \nu + \lambda\,\mathrm{id}_F$ dans la base $\mathcal{C} = \big(\nu^{n-1}(a), \nu^{n-2}(a), \cdots, \nu(a), a\big)$ de F est celle proposé par l'énoncé.

Achevons la décomposition de Jordan : si f est un endomorphisme quelconque d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables indécomposables (faire une récurrence forte sur la dimension de E) : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec $\dim E_i = n_i$ $(1 \leq i \leq p)$. En concaténant les bases construites dans chaque E_i comme à la question précédente, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant un "bloc de Jordan" :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,\big(J_{n_1}(\lambda_1), \cdots, J_{n_p}(\lambda_p)\big)\ .$$

EXERCICE 5 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $[u, v] = uv - vu$ commute avec u et v. Montrer que u et v sont cotrigonalisables (*on pourra prouver que l'endomorphisme $w = [u, v]$ est nilpotent*).

Source : Cyril GRUNSPAN et Emmanuel LANZMANN, L'oral de mathématiques aux concours, Algèbre, Éditions Vuibert, ISBN 2-7117-8824-5

Notons que l'hypothèse peut s'écrire $\big[[u,v],u\big] = \big[[u,v],v\big] = 0$ (*ce qui nous fait une belle jambe...*).

On commence par prouver que u et v ont un vecteur propre commun, ce qui permet d'amorcer une récurrence.

Soit λ une valeur propre de $w = [u,v]$ (*il en existe au moins une car le corps de base est* $\mathbb{C}$), soit $F = E_\lambda(w)$ le sous-espace propre associé. Alors F est stable par u et par v, notons u', v', w' les endomorphismes de F induits. On a $[u',v'] = w' = \lambda\,\mathrm{id}_F$, donc

$$0 = \mathrm{tr}(u'v' - v'u') = \lambda\ \dim(F)\ ,$$

d'où $\lambda = 0$. Il en résulte que w est nilpotent puisque sa seule valeur propre est 0 (son polynôme caractéristique est donc $(-X)^n$ et on applique Cayley-Hamilton).

Avec les notations ci-dessus, on a donc $[u',v'] = 0$, ce qui signifie que u' et v' commutent, donc admettent un vecteur propre commun (si $G \subset F$ est un sous-espace propre de u', alors il est stable par v' et l'endomorphisme de G induit par v' admet au moins un vecteur propre), donc u et v ont un vecteur propre commun e_1.

Maintenant, on récurre :

- si $n = \dim E = 1$, c'est évident ;
- soit $n \geq 2$ fixé, si la propriété est vraie pour $\dim E < n$, soit E de dimension n, soit e_1 un vecteur propre commun à u et v, soit H un hyperplan supplémentaire de la droite $D = \mathbb{C}e_1$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = D \oplus H$; on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \beta & \cdots \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où A et B sont les matrices dans $(e_2, \cdots, e_n)$ des endomorphismes $\overline{u}$ et $\overline{v}$ de H induits par $p \circ u$ et $p \circ v$ (p étant le projecteur sur H parallèlement à D). De $\big[[u,v],u\big] = \big[[u,v],v\big] = 0$, on déduit, par des produits par blocs, que $\big[[A,B],A\big] = \big[[A,B],B\big] = 0$ ou $\big[[\overline{u},\overline{v}],\overline{u}\big] = \big[[\overline{u},\overline{v}],\overline{v}\big] = 0$, ce qui permet de "cotrigonaliser" $\overline{u}$ et $\overline{v}$, dans une base $(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ de H ; dans la base $(e_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ de E, les matrices de u et de v sont triangulaires.

EXERCICE 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice, soit $\tilde{A} = {}^t\mathrm{Com}A$ la transposée de la matrice des cofacteurs.

1. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $\tilde{A}$.

2. On suppose A diagonalisable. Exprimer les valeurs propres de $\tilde{A}$ en fonction de celles de A.

- -

1. Rappelons la relation $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$.

- Soit X un vecteur propre de A pour une valeur propre A non nulle. On a $AX = \lambda X$, d'où

$$\tilde{A}AX = \tilde{A}\lambda X = \lambda\tilde{A}X = (\det A)\cdot X$$

et $\tilde{A}X = \dfrac{\det A}{\lambda}X$, donc X est vecteur propre de $\tilde{A}$ pour la valeur propre $\mu = \dfrac{\det A}{\lambda}$.

- Si X est vecteur propre de A pour la valeur propre 0 ($AX = 0$), alors A n'est pas inversible, donc $\mathrm{rg}\, A < n$;
  $\triangleright$ si $\mathrm{rg}\, A \leq n-2$, alors $\tilde{A} = 0$ (tous les mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice A sont nuls), donc $\tilde{A}X = 0$;
  $\triangleright$ si $\mathrm{rg}\, A = n-1$, alors $\mathrm{Ker}\, A$ est de dimension un, et de $AX = 0$, on tire $A\tilde{A}X = \tilde{A}AX = 0$, donc $\tilde{A}X \in \mathrm{Ker}\, A$ et $\tilde{A}X$ est colinéaire à X, ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une base (de $\mathbb{K}^n$) constituée de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres λ_1, $\cdots$, λ_n. On sait (question **1.**) que X_1, $\cdots$, X_n sont des vecteurs propres de $\tilde{A}$.

- Si A est inversible (les λ_i tous non nuls), alors $\tilde{A}X_i = \mu_i X_i$ avec
$$\mu_i = \frac{\det A}{\lambda_i} = \prod_{j \neq i} \lambda_j\ .$$
- Si $\mathrm{rg}\, A \leq n-2$, alors au moins deux des λ_i sont nuls et d'autre part $\tilde{A} = 0$, donc $\mathrm{Sp}(\tilde{A}) = \{0\}$.
- Si $\mathrm{rg}\, A = n-1$, un seul des λ_i (disons λ_n) est nul et, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\tilde{A}X_i = \dfrac{\det A}{\lambda_i} X_i = 0$ (*cf.* question **1.**), donc 0 est valeur propre de $\tilde{A}$ de multiplicité au moins $n-1$ (et même exactement $n-1$ car $\tilde{A}$ est diagonalisable et $\tilde{A} \neq 0$). La n-ième valeur propre de $\tilde{A}$ est alors égale à sa trace, que nous allons calculer :

  si on note A_{ij} le mineur d'indice (i,j) dans la matrice A, on a $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$, mais cette somme est aussi l'opposé du coefficient de X dans le développement du polynôme caractéristique de A ; en effet, en notant C_j le j-ième vecteur-colonne de la matrice A et $e_j = {}^t\!\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ le j-ième vecteur de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1 - Xe_1, C_2 - Xe_2, \cdots, C_n - Xe_n)$$

  et un développement par multilinéarité montre que le coefficient de X est
$$-\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \cdots, C_{j-1}, e_j, C_{j+1}, \cdots, C_n) = -\sum_{j=1}^{n} A_{jj}\ .$$
  Mais le coefficient de X dans $\chi_A(X)$ est aussi $-\sigma_{n-1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \lambda_j \right) = -\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ puisque $\lambda_n = 0$. La n-ième valeur propre de $\tilde{A}$ est donc $\mu_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

Conclusion. Si A est diagonalisable, de valeurs propres λ_1, $\cdots$, λ_n (non nécessairement distinctes), alors $\tilde{A}$ est diagonalisable (dans la même base) avec pour valeurs propres les μ_1, $\cdots$, μ_n, où $\quad \forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \mu_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \lambda_j$.