Éléments propres d'une matrice

Exercice 1 [00772] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\text{rg}(A) = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$ et que ce scalaire λ est valeur propre de A.

Exercice 2 [00773] [Correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

Montrer que

$$\text{Sp}(A) \subset [-\|A\| \,; \|A\|].$$

Exercice 3 [03280] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

(a) Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.

(b) Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.

(c) Observer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et vérifie $|\lambda| = 1$ alors λ est une racine de l'unité.

Exercice 4 [02729] [Correction]
Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $A = (\min(i, j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

(a) Trouver une matrice triangulaire inférieure unité L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

(b) Exprimer A^{-1} à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que $\text{Sp}\, A^{-1} \subset [0\,; 4]$.

Exercice 5 [02861] [Correction]
Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 6 [03316] [Correction]
Soient $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Calculer les rangs de A et A^2.

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par la matrice A. Montrer

$$\text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f = \mathbb{R}^n.$$

(c) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \text{GL}_2(\mathbb{R}).$$

(d) Calculer $\text{tr}\, B$ et $\text{tr}\, B^2$.
En déduire les valeurs propres de B puis celles de A.

(e) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 [03672] [Correction]
Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. On suppose que 1 est racine simple de

$$P(X) = X^p - \left(a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0\right).$$

On suppose la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par ses p premiers termes $u_0, \dots, u_{p-1}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 [02543] [Correction]
Expliquer brièvement pourquoi

$$^{t}\mathrm{Com}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$?
Que représente un vecteur propre de A pour $^{t}\mathrm{Com}(A)$?
On suppose de plus que A n'est pas inversible. Déterminer

$$\dim \mathrm{Ker}\, {}^{t}\mathrm{Com}(A).$$

Prouver que $^{t}\mathrm{Com}(A)$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On retraduit le problème en termes d'endomorphismes.
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant $\operatorname{rg}(u) = 1$.
Le noyau de u est un hyperplan et si l'on fixe $x \notin \operatorname{Ker} u$, on obtient

$$\operatorname{Vect}(x) \oplus \operatorname{Ker} u = E.$$

Puisque $u(x) \in E$, on peut écrire $u(x) = \lambda x + y$ avec $y \in \operatorname{Ker} u$ de sorte que

$$u^2(x) = \lambda u(x).$$

Les applications linéaires u^2 et λu sont alors égales sur $\operatorname{Vect}(x)$ mais aussi bien sûr sur $\operatorname{Ker} u$, ces applications linéaires sont donc égales sur E.
De plus, pour $y \in \operatorname{Im}(u) \setminus \{0\}$, on peut écrire $y = u(a)$ et alors

$$u(y) = u^2(a) = \lambda u(a) = \lambda y.$$

Ainsi λ est bien valeur propre de u.

Exercice 2 : [énoncé]
Soient $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tels que $AX = \lambda X$.
Posons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$. On a $x_i \neq 0$ et

$$|\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_i| \le \|A\|\,|x_i|$$

d'où $|\lambda| \le \|A\|$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Le vecteur $X = {}^t(1 \dots 1)$ est évidemment vecteur propre associé à la valeur propre 1.

(b) Soient $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ un vecteur propre associé. Soit i_0 l'indice vérifiant

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

On a $|x_{i_0}| \neq 0$ et la relation $AX = \lambda X$ donne $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$ donc

$$|\lambda|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|\,|x_j| \le \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\,|x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

puis $|\lambda| \le 1$.

(c) Si de plus $|\lambda| = 1$ alors il y a égalité dans l'inégalité précédente.
L'égalité dans la deuxième inégalité entraîne $|x_j| = |x_{i_0}|$ pour tout j tel que $a_{i_0,j} \neq 0$.
L'égalité dans la première inégalité entraîne que les complexes engagés sont positivement liés et donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j}\,|x_j|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Ces deux propriétés donnent pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j}\,|x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ que $a_{i_0,j} \neq 0$ ou non.
En injectant ceci dans la relation $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$, on obtient $\lambda x_{i_0} = |x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{i_0,j} \neq 0$, $x_j = \lambda x_{i_0}$.
Posons $i_1 = j$ et reprenons la même démarche, ce qui est possible puisque $|x_{i_1}| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.
On définit ainsi une suite $(i_p) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lambda x_{i_p} = x_{i_{p+1}}$.
Cette suite étant non injective, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $i_p = i_{p+q}$ ce qui donne $\lambda^q = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^tL.$$

(b) $U = I + N + \dots + N^{n-1}$, $(I - N)U = I$ donc $U^{-1} = I - N$,
$L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^tN$ donc $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = I - N - {}^tN + N^tN$.

(c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons χ_n le polynôme caractéristique de $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.
On a $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$ avec $\chi_0(\lambda) = 1$ et $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$.
En écrivant $\lambda = 2 + 2\cos\theta$ avec $\theta \in [0\,;\pi]$ et en posant $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2\cos\theta)$ on a la relation :
$f_{n+2}(\theta) + 2\cos\theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$, $f_0(\theta) = 1$ et $f_1(\theta) = 2\cos\theta - 1$.

La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi, χ_n admet n racines dans $[0\,;4]$ et puisque ce polynôme est de degré n il n'y en a pas ailleurs : $\operatorname{Sp} A^{-1} \subset [0\,;4]$.

Exercice 5 : [énoncé]

Notons M la matrice étudiée et supposons $n \geq 3$, les cas $n = 1$ et 2 étant immédiats.
Puisque $\operatorname{rg} M = 2$, 0 est valeur propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim E_0(M) = n-2$.
Soit λ une valeur propre non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
L'équation $MX = \lambda X$ fournit le système

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lambda(\lambda-1)x_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_{n-1} = (n-1)x_n$$

avec $x_n \neq 0$ car $x_n = 0$ et $\lambda \neq 0$ entraînent $X = 0$.
Par suite λ est racine de l'équation $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$ et donc

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Inversement, on justifie que ses valeurs sont valeurs propres, soit en remontant le raisonnement, soit en exploitant la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle M pour affirmer l'existence de n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Par le calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & & & \vdots \\ 0 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Puisque A et A^2 ne possèdent que deux colonnes non nulles et que celles-ci sont visiblement indépendantes, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = 2$.

(b) On a $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. Or $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
Pour $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$ donc $a \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ puis $x = 0$.
On en déduit $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ et un argument de dimension permet d'affirmer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.

(c) Une base adaptée à la décomposition $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$ permet de justifier que la matrice A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Puisqu'on a alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, on peut affirmer que la matrice B est inversible.

(d) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A = 0$ et $\operatorname{tr} B^2 = \operatorname{tr} A^2 = 2$.
Soient λ et μ les deux valeurs propres complexes de la matrice B. On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2. \end{cases}$$

On en déduit

$$\{\lambda, \mu\} = \{1, -1\}.$$

Ainsi

$$\operatorname{Sp} B = \{1, -1\} \text{ et } \operatorname{Sp} A = \{1, 0, -1\}.$$

(e) Par calcul de rang

$$\dim E_0(A) = \dim \operatorname{Ker} A = n-2.$$

On a aussi

$$\dim E_1(A) = \dim E_1(B) = 1 \text{ et } \dim E_{-1}(A) = 1$$

donc la matrice A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

Exercice 7 : [énoncé]

Introduisons la colonne $X_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p-1}\end{pmatrix}$. On vérifie $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la limite de (u_n), on va chercher une constance le long de la dynamique. Il parait naturel de la considérer linéaire et fonction p termes consécutifs de la suite. Nous cherchons donc une ligne $L \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ telle que $LX_{n+1} = LX_n$. Il suffit pour cela de déterminer L vérifiant $L = LA$ et donc de trouver ${}^tL$ vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1. Après calcul, on obtient

$$L = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 & \cdots & a_0 + \cdots + a_{p-1} \end{pmatrix}$$

sachant $P(1) = 1 - (a_0 + \cdots + a_{p-1}) = 0$.
En posant ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la relation $LX_n = LX_0$ donne à la limite

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1}(p-k)a_k\right)\ell = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \sum_{j=0}^{k} u_j.$$

Puisque 1 est racine simple de P,

$$P'(1) = p - \sum_{k=0}^{p-1} k a_k = \sum_{k=0}^{p-1}(p-k)a_k \neq 0$$

et donc

$$\ell = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a_k \sum_{j=0}^{k} u_j}{P'(1)}.$$

Exercice 8 : [énoncé]
Les coefficients de ${}^t\mathrm{Com}(A)A$ s'interprètent comme des développements de déterminants selon une colonne...
Si A admet n valeurs propres distinctes, $\det A$ est le produit de ces valeurs propres.
Si $X \neq 0$ vérifie $AX = \lambda X$ alors $\lambda {}^t\mathrm{Com}(A)X = (\det A)X$.
Ainsi quand $\lambda \neq 0$, X est vecteur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ associé à la valeur propre $\frac{\det A}{\lambda}$.
Si A n'est pas inversible alors $\det A = 0$ donc ${}^t\mathrm{Com}(A)A = 0$ puis $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A)$.
Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) \geq n-1$. De plus $\mathrm{Com}(A) \neq 0$ car $\mathrm{rg}\, A = n-1$ (car les valeurs propres de A sont simples, en particulier 0). Par suite $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$
Sous réserve que $n \geq 2$, 0 est valeur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ et puisque $\dim \mathrm{Ker}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$, il ne reste de place que pour une seule autre valeur propre.
Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A \setminus \{0\}$,. On a ${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)(A + t\mathrm{I}_n)X = \det(A + t\mathrm{I}_n)X$

Pour $t \neq 0$, on a

$${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)X = \frac{\det(A + t\mathrm{I}_n)}{t}X.$$

Quand $t \to 0^+$, par continuité

$${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)X \to {}^t\mathrm{Com}(A)X.$$

En calculant le déterminant par diagonalisation, $\frac{\det(A + t\mathrm{I}_n)}{t} \to \mu$ avec μ le produit des valeurs propres non nulles de A.
Par unicité de la limite, on obtient ${}^t\mathrm{Com}(A)X = \mu X$.
Au final, ${}^t\mathrm{Com}(A)$ admet 2 valeurs propres : 0 et μ.