Calcul intégral

Calcul de primitives

► 1

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (en faisant notamment apparaître des dérivées de fonctions composées).

1) $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, $\quad t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$, $\quad t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}$.

2) $\theta \mapsto \tan(\theta)$, $\quad \theta \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(2\theta)}$, $\quad \theta \mapsto \tan^2(\theta)$.

3) $x \mapsto x\sqrt{x}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}$, $\quad x \mapsto 2^x$

4) $u \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$, $\quad t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^3(t)}$, $\quad t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$.

5) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, $\quad t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\quad t \mapsto \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$.

6) $t \mapsto t\,\ln(1+t^2)$, $\quad t \mapsto t^3\,\ln(t)$.

7) $\varphi \mapsto \cos(\varphi)\,\sin^{19}(\varphi)$.

Rappel. Une *fonction rationnelle* est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ où } P \text{ et } Q \text{ sont deux fonctions polynomiales.}$$

On sait calculer les primitives de certaines fonctions rationnelles. Ce sont celles qui ont les formes suivantes :

- $f(x) = \lambda\,\dfrac{1}{x-a}$ où a est une constante,
- $f(x) = \lambda\,\dfrac{1}{(x-a)^n}$ où a est une constante et n un entier supérieur ou égal à 2,
- $f(x) = \lambda\,\dfrac{1}{a\,x^2+b\,x+c}$ où a, b et c sont trois constantes telles que $a \neq 0$,
- $f(x) = \lambda\,\dfrac{Q'(x)}{Q(x)}$ où Q est un polynôme quelconque.
- $f(x) = \lambda\,\dfrac{Q'(x)}{\big(Q(x)\big)^n}$ où Q est un polynôme quelconque et n est un entier supérieur à 2.

Pour trouver une primitive d'une fonction rationnelle, il nous faudra nous ramener aux formes ci-dessus.

► 2 Primitives de fonctions rationnelles

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant sur quels intervalles vos primitives sont valables :

$f_1(x) = \frac{1}{x+2}$	$g_1(t) = \frac{1}{(2t+1)^4}$	$\varphi_1(x) = \frac{1}{4x^2-12x+9}$
$f_2(x) = \frac{1}{1-2x}$	$g_2(t) = \frac{t^2-t}{(2t^3-3t^2+1)^3}$	$\varphi_2(x) = \frac{1}{2x^2+x+2}$
$f_3(x) = \frac{1}{(x+5)^2}$	$g_3(t) = \frac{t^2-t}{2t^3-3t^2+1}$	$\varphi_3(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$
$f_4(x) = \frac{1}{x^2+5}$	$g_4(t) = \frac{1}{t^2+2t}$	$\varphi_4(x) = \frac{4x-9}{4x^2-12x+9}$
$f_5(x) = \frac{x}{x^2+5}$	$g_5(t) = \frac{1}{t^2+2t}$	$\varphi_5(x) = \frac{x}{x^2+3}$

► 3

En mettant l'expression de ces fonctions sous la forme appropriée, déterminez des primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{x}{(x+5)^2}$	$g_1(t) = \frac{t+1}{t^2+8}$	$\psi_1(x) = \frac{x^2+x+1}{2x^2-4x}$
$f_2(x) = \frac{x^2+x}{2x-1}$	$g_2(t) = \frac{8t}{4t^2-18t+9}$	$\psi_2(x) = \frac{x^4-x^2}{x^2+3}$.
$f_3(x) = \frac{x}{x+1}$		

► 4 Linéarisation de cosinus et de sinus

En linéarisant les fonctions intégrées, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3\theta)\,\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

► 5 Utilisation astucieuse des complexes

On souhaite maintenant déterminer les primitives des fonctions u et v définies par

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\cos(3t) \quad \text{et} \quad v(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\sin(3t).$$

1) Déterminer les primitives de $\varphi = u + \mathrm{i}\,v$.

2) En déduire les primitives de u et de v.

3) Retrouver ces résultats à l'aide de deux intégrations par parties successives pour chaque fonction.

Techniques de calcul intégral

► 6

À l'aide d'intégrations par parties, calculer :

1) $\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;

2) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (2x+1)\cos(x)$.

► 7

Déterminer une primitive de la fonction arcsin sur $[-1, 1]$. (Indication : on pourra utiliser des intégrales et procéder par intégration par parties)

► 8 ♠ Comme un fumet de Poisson

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note F_n la primitive de f_n qui s'annule en 0.

1) Justifier que F_n existe et en donner une écriture à l'aide d'une intégrale.

2) Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie, que
$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 0, \quad F_n(x) = n F_{n-1}(x) - x^n e^{-x}.$$

3) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0, \quad F_n(x) = n! \left[1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right].$$

4) Déterminer la limite de $F_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

► 9 Entraînement au changement de variable

1) À l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer
$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx.$$

2) Effectuer le changement de variable $x = \tan(\theta)$ afin de calculer
$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3 + \cos^2(\theta)} \, d\theta.$$

3) À l'aide du changement de variable $t = u^2$, déterminer une primitive sur $[0, +\infty[$ de
$$f : x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$
(en cas de difficulté, on commencera par calculer l'intégrale de la fonction f entre 0 et 2).

4) Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$.

► 10 Primitives de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$

On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

1) Donner une écriture à l'aide d'intégrales de la primitive Φ de la fonction φ qui s'annule en 0.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

a. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \, dt = \arctan(x) - \Phi(x).$$

b. En intégrant par parties l'intégrale suivante :
$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt,$$
obtenir une relation reliant $\arctan(x)$ à $\Phi(x)$ sans autres intégrales.

c. En déduire l'expression de $\Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Reprise avec une autre approche

a. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\big(2 \arctan(x)\big) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

b. Retrouver $\Phi(x)$ par calcul direct en effectuant le changement de variable $t = \tan(\theta)$ dans l'intégrale définissant $\Phi(x)$.

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants

► 11 Équations linéaires homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)\, y'(t) + 2t\, y(t) = 0,$

2) $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \sqrt{x^4 - 1}\, y'(x) - x^3\, y(x) = 0,$

3) ♠ $\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1 - x^4}\, y'(x) + x\, y(x) = 0.$

► 12 Avec second membre

Résoudre les équations différentielles suivantes (pour trouver une solution particulière, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante) :

1) $\forall t \in \mathbb{R}_-^*, \quad t\, y'(t) - 2\, y(t) = t\,;$

2) $\forall t \in]1, +\infty[, \quad (t^2 - 1)\, y'(t) - 2t\, y(t) = (t^2 - 1)^2\,;$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\, y'(x) + 2x\, y(x) = 1.$

► 13 Avec une fonction rationnelle

On veut résoudre
$$(E) \quad \forall x \in]0, 1[, \quad 2x\,(x-1)\, y'(x) - (x-3)\, y(x) = 2x^3.$$

1) Déterminer des constantes α et β telles que
$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{x-3}{2x\,(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1}.$$

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$.

3) Y a-t-il parmi les solutions de (E) des solutions qui tendent vers des limites finies en 0 et en 1 ?