PSI — **Programme de colle n°4** — *2022/2023*

Semaine du 10 au 14 octobre

Alg2-b : Hyperplan
- Formes linéaires, $\dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{K}))$ si E est de dimension finie.
- Une forme linéaire non nulle est surjective.
- H est un hyperplan de E ssi H est le noyau d'une forme linéaire (déf)
- H est un hyperplan de E ssi $\exists \vec{a} \in E$ ($\notin H$) tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.
- H étant un hyperplan de E, $\forall \vec{a} \notin H$, $H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}) = E$.
- Exemples.
- En dimension finie, H est un hyperplan ssi $\dim(H) = \dim(E) - 1$.
- Equation d'un hyperplan.
- Intersection de deux hyperplans

Alg5 : Polynôme d'endomorphisme, de matrice
- Définition. Exemples
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. $\qquad (PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$
- $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}\left((f^k)_{k\in\mathbb{N}}\right) \qquad \mathbb{K}[M] = \mathrm{Vect}\left((M^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$
- $\mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}(f)$ (commutant de f) $\qquad \mathbb{K}[M] \subset \mathscr{C}(M)$ (commutant de M)
- $P \longmapsto P(f)$ et $P \mapsto P(M)$ ne sont ni injectif, ni surjectif
- Polynôme d'un matrice diagonale, triangulaire supérieure
- Polynôme annulateur.
- Il n'existe pas toujours un polynôme annulateur d'un endomorphisme.
- Il existe toujours un polynôme annulateur d'une matrice, ou d'un endomorphisme en dimension finie.

Alg6 : Matrice semblables
- Définition.
- rang, trace et déterminant sont des invariants de similitude.
- $AsB \Longrightarrow A^t s B^T$, $AsB \Longrightarrow \forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A)sQ(B)$.
- Si AsB alors A inversible ssi B inversible et on a alors $A^{-1}sB^{-1}$.
- Exemples de matrices semblables.

Alg 4 : Déterminant
- Rappels sur les propriétés du déterminant.
- Déterminant de matrice tridiagonale
- Déterminant de VanderMonde
- Applications

An3 : Rayon de série entière
- Lemme d'Abel
- Rayon d'une série entière, propriétés.
- Méthodes pratiques de détermination d'une série entière.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon.
- La série dérivée et la série intégrée ont même rayon que la série $\sum a_n z^n$

Remarque : Bien sûr, revoir les techniques pour justifier qu'une série numérique (réelle ou complexe) converge…

Attention : Merci aux colleurs de poser à chaque élève un exercice de calcul de rayon de série entière, pour vérifier que les techniques sont connues.

Questions de cours :

* Hyperplan
* $\mathscr{C}(f)$ est un ev stable par $\circ$. $\mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}(f)$.
* $\mathbb{K}[f]$ est stable par $\circ$: $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$ idem pour les matrices.
* Interpolation de Lagrange : $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$. Coord de $A \in \mathbb{K}_n[X]$. Pol. d'interpolation.
* Exemples de détermination de la trace : $M \mapsto AM$, $P \mapsto P(X+1) + P(X)$.
* Exemples de matrices semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Non unicité de la matrice P...
* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$
* Polynôme annulateur de degré 2 :
  f inversible et $f^{-1} = \dots$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_1[f]$ de dim $\leqslant 2$, noyaux supplémentaires.
* Puissance de matrices (récurrence, binôme de Newton, par polynôme annulateur)
* p et q projecteurs commutant : Montrer que $p \circ q$ est un projecteur... Précisez !
* Lemme d'Abel
* Diverses caractérisations du rayon d'une série entière. (Sup d'ensembles)
* $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon.
* Utilisation de la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon d'une série entière.
* $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = \tilde{0} \Longrightarrow \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) = E$.
* Déterminant de matrice tridiagonale
* Déterminant de VanderMonde (2 méthodes)
* Application de VanderMonde à l'interpolation de Lagrange
* a_i distincts deux à duex $\Longrightarrow ((X-a_0)^n, (X-a_1)^n, \dots, (X-a_n)^n)$ base de $\mathbb{C}[X]$.
* Divers calculs de déterminants (+ révision des exercices vus en SUP)