MP: Réduction et suites et séries de fonctions

Coralie Renault

2 novembre 2014

Exercice

Question de cours : E espace vectoriel de dimension finie, quel est le nombre maximal de valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$? Pourquoi ?

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ , } a \in \mathbb{R}$$

— Quelles sont les valeurs propres de A ?
— Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable.
— Diagonaliser A lorsque cette condition est satisfaite.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
a) A est-elle diagonalisable ?
b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice

Question de cours : Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Réciproque ?

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) A est-elle diagonalisable ?
b) Comment calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que tous ses coefficients soient égaux à 1. La matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer

$$0 \notin \mathrm{sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

Exercice

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre.
Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'.
Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n f(x)$$

Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice

On pose
$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice

On pose, pour $x \geqslant 0$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$
Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice

On pose
$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in \left]0, 1\right] \text{ et } u_n(0) = 0$$
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0, 1]$.

Exercice

On pose
$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+$$
a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0, +\infty[$.
b) Etudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
c) Etudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.