Les développements asymptotiques pour les suites implicites

Exercice 24

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution x_n dans $]0,1[$ puis étudier la suite (x_n) et un développement asymptotique à deux termes significatifs.

Correction de l'exercice 24

On pose la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln x \end{array} \right. .$$

La fonction f est dérivable de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} < 0.$$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1[$. De plus,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 1,$$

donc la fonction f induit une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, alors $n \in]1,+\infty[$ et le seul nombre x_n solution de l'équation proposée est :

$$x_n = f^{-1}(n).$$

La fonction f étant strictement décroissante, il en est de même de la fonction réciproque f^{-1} : la suite (x_n) est strictement décroissante, minorée par 0 donc convergente.
On note ℓ la limite.
La limite ℓ est nulle. On peut le montrer de deux manières différentes.

- Comme $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, alors :

  $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0,$$

  donc :

  $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 0.$$

- Si l'on suppose $\ell > 0$, alors par décroissance de la suite (x_n), on a :

  $$0 < \ell \leqslant x_2 < 1.$$

  La fonction f étant continue en ℓ, on peut écrire :

  $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

  Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$ quantité censée tendre vers $+\infty$.
  Conclusion, la limite ℓ ne peut être strictement positive : la limite ℓ est nulle.

On s'attaque maintenant au développement asymptotique. (en abrégé : D.A.)
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on va utiliser $\ln x_n = -n + x_n$, donc :

$$\boxed{x_n = e^{-n+x_n}.}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x_n &= e^{-n+\circ(1)} \\ &= e^{-n} \times e^{\circ(1)} \\ &= e^{-n} \times (1+\circ(1)) \\ &= e^{-n} + \circ(e^{-n}). \end{aligned}$$

On a déjà le premier terme dans le D.A.
On réinjecte dans la formule encadrée l'information que l'on vient d'obtenir, ce qui fournit les calculs suivants :

$$\begin{aligned} x_n &= e^{-n+e^{-n}+\circ(e^{-n})} \\ &= e^{-n} \times \left(e^{e^{-n}+\circ(e^{-n})}\right) \\ &= e^{-n} \times \left(1+e^{-n}+\circ(e^{-n})\right), \text{ car } e^h = 1+h+\circ(h), \text{ quand } h \longrightarrow 0 \\ &= e^{-n} + e^{-2n} + \circ(e^{-2n}). \end{aligned}$$

On dispose donc d'un développement asymptotique à deux termes. On pressent que derrière le $\circ(e^{-2n})$ se cache un terme en $\mathcal{O}(e^{-3n})$...

Exercice 25

1. Montrer que pour tout entier naturel n assez grand supérieur à un entier n_0, l'équation $\mathrm{ch}x = nx + \dfrac{1}{2}$ admet deux solutions réelles $x_n < y_n$.
2. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ sont monotones.
3. Déterminer les deux premiers termes dans les développements asymptotiques des quantités x_n et y_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 25

1. On fixe un entier naturel n. On considère la fonction :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}x - nx - \dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$$

La fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et :

$$f_n' : x \longmapsto \mathrm{sh}x - n.$$

On pose dans toute la suite :

$$a_n = \mathrm{argsh}(n).$$

On a alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		a_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(a_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut simplifier $f(a_n)$, en utilisant la formule de « cours » :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \mathrm{ch}(a_n) - n\ a_n - \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{1+a_n^2} - n\ a_n - \frac{1}{2} \\ &= -n\ a_n + \circ(n\ a_n) \end{aligned}$$

de limite $-\infty$.
Il existe donc un entier n_0 assez grand pour pouvoir écrire :

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(a_n) < 0.$$

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, le théorème des valeurs intermédiaires couplé aux variations de la fonction f_n montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $x_n < y_n$.

On peut aussi calculer plus « tranquillement » :

$$f_n(1) = \mathrm{ch}1 - n - \frac{1}{2}.$$

Il existe un entier n_1 tel que :

$$f_{n_1}(1) < 0.$$

La valeur minimale de la fonction f_n, pour $n \geqslant n_1$ est inférieure à $f_n(1) \leqslant f_{n_1}(1) < 0$. Le tableau de variations montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

2. Dans un premier temps, on essaie d'encadrer x_n et y_n pour y voir un peu plus clair.
Pour n assez grand, $f_n(1) < 0 = f_n(x_n)$, donc $x_n < 1$. De plus, $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$. La fonction f_n admet un point d'annulation entre 0 et 1, et il s'agit de x_n car $x_n < 1 < a_n$.
Ainsi, pour n assez grand,
$$0 < x_n < 1.$$
D'autre part, pour n assez grand,
$$a_n < y_n.$$

Fixons maintenant un entier n assez grand.
On utilise la méthode habituelle en déterminant le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= \mathrm{ch} x_n - (n+1)\,x_n - \frac{1}{2} \\ &= f_n(x_n) - x_n \\ &= -x_n < 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $]-\infty, a_{n+1}]$, donc strictement décroissante sur $]0,1[$. Or, x_n et x_{n+1} appartiennent à $]0,1[$, imposant :

$$x_n > x_{n+1}.$$

La suite (x_n) est strictement décroissante.

On s'occupe maintenant de y_n et y_{n+1} :

$$f_{n+1}(y_n) - y_n < 0 = f_{n+1}(y_{n+1}).$$

Il est impossible que y_n soit supérieur ou égal à y_{n+1} car dans le cas contraire, comme $a_{n+1} < y_{n+1}$ et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[a_{n+1}, +\infty[$, alors on aurait :

$$a_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n$$

et donc :

$$f_{n+1}(y_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(y_n),$$

ce qui n'est pas le cas.
Conclusion, $y_n < y_{n+1}$ et la suite (y_n) est strictement croissante.

3. On s'occupe du D.A. de x_n.
On va utiliser l'égalité suivante :

$$\boxed{x_n = \frac{\mathrm{ch}(x_n) - \frac{1}{2}}{n}.}$$

On en déduit dans un premier temps :

$$x_n = \frac{\mathcal{O}(1)}{n} = \circ(1).$$

La suite (x_n) converge vers 0.
On réinjecte dans la formule encadrée ce qui donne :

$$x_n = \frac{1 + \circ(1) - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour avoir le terme suivant, on va utiliser le développement limité :

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2), \qquad \bigstar$$

lorsque x tend vers 0.
On démontre déjà cette formule en ayant recours pour l'instant à des subterfuges plus ou moins emprunts à la trigonométrie hyperbolique ...
On utilise :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \text{ch}(2\theta) - 1 = 2\text{sh}^2\theta.$$

D'autre part,

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{\text{sh}\theta}{\theta} = \text{sh}'(0) = 1,$$

donc :

$$\text{sh}(\theta) = \theta + \circ(\theta),$$

lorsque θ est proche de 0.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{ch}x - 1 &= 2\text{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x}{2} + \circ(x)\right)^2 \\ &= 2 \times \frac{x^2}{4} \times (1 + \circ(1))^2 \\ &= \frac{x^2}{2} + \circ(x^2). \end{aligned}$$

On obtient bien la formule $\bigstar$ donnée ci-dessus.

On revient au D.A. de x_n :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\text{ch}(x_n) - \frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{1 + \frac{x_n^2}{2} + \circ(x_n^2) - \frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Ceci est le D.A. à deux termes.

- En ce qui concerne y_n, on utilise

$$\text{ch}(y_n) = \frac{e^{y_n} + e^{-y_n}}{2},$$

puis :

$$e^{y_n} + e^{-y_n} = 2n\ y_n + 1$$

et donc

$$e^{y_n} = 2n\ y_n + 1 - e^{-y_n}.$$

On va donc utiliser la formule suivante :

$$\boxed{y_n = \ln\Big(2n\ y_n + 1 - e^{-y_n}\Big).}$$

On sait que y_n tend vers $+\infty$, car $a_n < y_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & \ln\Big(2n\ y_n \times (1 + \circ(1))\Big) \\ & = & \ln(2n) + \ln y_n + \ln(1 + \circ(1)) \\ & = & \ln(2n) + \ln y_n + \circ(1). \end{array}$$

Par les croissances comparées, comme y_n tend vers $+\infty$, alors :

$$\ln(y_n) = \circ(y_n),$$

puis :

$$y_n - \ln(y_n) = \ln(2n) + \circ(1),$$

et donc :

$$y_n \times (1 + \circ(1)) = \ln(2n) \times (1 + \circ(1)).$$

Conclusion :

$$y_n = \ln(2n) \times (1 + \circ(1)).$$

En définitive :

$$y_n = \ln n + \ln 2 + \circ(\ln n) = \ln n + \circ(\ln n).$$

On réinjecte dans la formule encadrée, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & \ln(2n\ y_n \times (1 + \circ(1)) + \mathscr{O}(1)) \\ & = & \ln\Big(2n\ \ln n \times (1 + \circ(1))\Big) \\ & = & \ln n + \ln(\ln n) + \ln 2 + \circ(1). \end{array}$$

On obtient ainsi en fait un développement asymptotique à trois termes pour y_n.

Exercice 27

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! x_n > 0$, $x_n^n + x_n = 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante, puis convergente vers une limite ℓ à déterminer.
3. Calculer un équivalent de $x_n - \ell$.

Correction de l'exercice 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction :
$$f_n : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + x - 1 \end{array} \right. .$$
La fonction f_n est dérivable de dérivée :
$$f_n' : x \longmapsto n\ x^{n-1} + 1 > 0.$$
La fonction f_n induit une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $]-1,+\infty[$. On voit alors que $x_n = f_n^{-1}(0)$ est la seule solution à l'équation proposée.
2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
Comme d'habitude, on étudie le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
On a successivement :
$$\begin{array}{rcll} f_{n+1}(x_n) & = & x_n^{n+1} + x_n - 1 & \\ & = & x_n^{n+1} - x_n^n & , \text{car } f_n(x_n) = 0 \\ & = & x_n^n \times (x_n - 1) < 0. & \end{array}$$
Ainsi,
$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}),$$
et la stricte croissance de la fonction f_{n+1} implique :
$$x_n < x_{n+1}.$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.
Supposons par l'absurde que la limite ℓ ne soit pas égale à 1. Alors, $|\ell| = \ell < 1$ et :
$$0 \leqslant x_n \leqslant \ell, \text{ donc } 0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n = \circ(1).$$
Par le théorème des gendarmes, la quantité x_n^n tend vers 0 et le passage maintenant autorisé dans l'égalité :
$$x_n^n + x_n - 1 = 0,$$
donne :
$$0 + \ell - 1 = 0,$$
rentrant en contradiction avec le fait que la limite soit différente de 1.
En définitive,
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 1.$$

3. Le calcul de l'équivalent nécessite pas mal d'initiative...
   On pose dans la suite :
$$h_n = 1 - x_n$$
   de limite 0^+.
   Ainsi, $x_n = 1 - h_n$ et donc :
$$(1-h_n)^n = h_n.$$
   On prend le logarithme ce qui donne :
$$n\ \ln(1-h_n) = \ln h_n.$$
   On multiplie le tout par (-1) pour manipuler des quantités strictement positives pour reprendre le logarithme une deuxième fois, ce qui donne :
$$\ln\Big(-n\ln(1-h_n)\Big) = \ln(-\ln h_n).$$
   On a ensuite :
$$\ln\Big(-n\times(-h_n)\times(1+\circ(1))\Big) = \ln(-\ln h_n),$$
   et donc :
$$\ln n + \ln h_n + \circ(1) = \ln(-\ln h_n) = \circ(\ln h_n),$$
   par les croissances comparées.
   Par suite,
$$\ln h_n = -\ln n \times (1+\circ(1))$$
   et donc :
$$n\times h_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} -\ln h_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \ln n.$$
   Finalement,
$$h_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \frac{\ln n}{n} \text{ et } x_n - 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} -\frac{\ln n}{n}.$$