1 Calculs simples

1 Déterminer directement sans aucun calcul d'intégrale une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-3x^2}$. **2)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$.

3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. **4)** $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$.

5) $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$. **6)** $x \longmapsto \tan^2 x$.

7) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$. **8)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.

9) $x \longmapsto \dfrac{\ln\ln x}{x}$. **10)** $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}$.

11) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$. **12)** $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

13) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$. **14)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

---

2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \cos^4 x \sin^2 x$. **2)** $x \longmapsto \cos^3 x \sin^4(2x)$.

3

1) Déterminer une primitive des fonctions suivantes : **a)** $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

b) $x \longmapsto \dfrac{2-5x}{1+x^2}$. **c)** $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x^2-4x+3}$.

d) $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$

2) Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

---

4 Calculer, en utilisant l'exponentielle complexe :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

---

5 Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ dont on note F une primitive. Calculer la dérivée de $x \longmapsto xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)$. Conclusion ?

---

6 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, puis interpréter géométriquement.

---

2 Intégration par parties

7 Calculer, en intégrant par parties :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

---

8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes en intégrant par parties :

1) $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$. **2)** $x \longmapsto (x\ln x)^2$.

3) $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$. **4)** $x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

5) $x \longmapsto \ln\big(1+x^2\big)$. **6)** $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$.

7) $x \longmapsto x \operatorname{ch} x$. **8)** $x \longmapsto x\sin^2 x$.

9) $x \longmapsto x \operatorname{Arctan} x$.

---

9 Pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}.$$

2) En déduire que pour tous $p,q \in \mathbb{N}$:

$$I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

3) En déduire enfin une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$.

---

3 Changement de variable

10 Déterminer une primitive des fonctions suivantes en commençant par y effectuer un changement de variable :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$ en posant $t = \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.

2) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$.

3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ en posant : **a)** $t = \mathrm{e}^x$. **b)** $t = \operatorname{sh} x$. **c)** $t = \operatorname{th} x$.

4) $x \longmapsto \sin(\ln x)$ en posant $t = \ln x$.

5) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $t = \sqrt{x^2-1}$.

6) $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \sin t$.

7) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$ en posant $t = \tan x$.

8) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x + \sin(2x)}$ en posant $t = \cos x$.

---

11 Calculer :

1) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin\theta$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$ en posant $x = \sin\theta$.

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $x=\sqrt{t^2+t+1}-t$.

5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\dfrac{1}{t}$.

12

1) ◷ Déterminer une primitive de $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) ◷◷◷ Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Déterminer une primitive de $x\longmapsto x^\alpha\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ au moyen d'un changement de variable du type $x=t^\beta$ avec $\beta\in\mathbb{R}$ à préciser.

---

13 ◷◷ On pose : $\displaystyle S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$ et : $\displaystyle C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $S=C$ par changement de variable.

2) Que vaut $S+C$? En déduire S et C.

3) En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

---

14 ◷◷ On pose : $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ et : $\displaystyle J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer $I-J$.

2) Calculer $I+J$ en posant $x=\tan t$.

3) En déduire I et J.

---

15 ◷◷ On fait semblant dans cet exercice de **NE PAS** connaître la fonction logarithme et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose : $\displaystyle L(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$: $L(xy)=L(x)+L(y)$.

---

16 ◷◷ Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1) $\displaystyle x\longmapsto\int_{-x}^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

2) $\displaystyle x\longmapsto\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle x\longmapsto\int_0^x f\left(t+x^2\right)\mathrm{d}t$ où $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4) $\displaystyle x\longmapsto\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$ où $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5) $\displaystyle x\longmapsto\int_0^x\sqrt{x-t}\,\sin t\,\mathrm{d}t$.
