Chapitre 12

Intégration sur un intervalle quelconque

I. Théorie

Dans tout le chapitre, les fonctions sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble de telles fonctions.

1. Intégrale généralisée

1.1. Préliminaires

Définition 1 : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

- Exemple : la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.

1.2. Cas où l'intervalle est semi-fermé

a) Définitions

Définition 2 : intervalle du type $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ i.e. f continue par morceaux sur $[a,b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a,b[$ a une limite finie en b.

Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f$.

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

- De manière similaire :

Définition 2-bis : intervalle du type $]a,b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si la fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ définie sur $]a,b]$ a une limite finie en a.

Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{]a,b]} f$.

b) Exemples **1**.

- $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1,+\infty[$ puis sur $]0,1]$
- $x \to \ln(x)$ sur $]0,1]$
- $x \to \cos(x)$ sur $[0,+\infty[$
- $x \to e^x$ sur $]-\infty,0]$

1.3. Cas où l'intervalle est ouvert

a) Définition

Définition 2 : intervalle du type $]a,b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$. Soit $c \in]a,b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent.

On note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

- Ainsi, on traitera toujours en deux temps le problème en a et le problème en b (principe de scission).
- Ne pas inventer de règle qui ne serait pas dans ce cours !

b) Exemples **2**.

- $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $x \to \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1.4. Propriétés

a) Linéarité

Proposition 1 : Soient $(f,g) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, alors $\displaystyle\int_I (\alpha f + g)$ converge et $\displaystyle\int_I (\alpha f + g) = \alpha \int_I f + \int_I g$

- Démonstration **3**.

b) Positivité

Proposition 2 : Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_I f$ converge.

Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.

- Démonstration **4**.

c) Croissance

Proposition 3 : Soient $(f,g) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})^2$.

Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

- Démonstration **5**.

d) Intégrale généralisée et dérivation

> Proposition 4 : Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R})$.
>
> Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors la fonction $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $-f$.

- Démonstration **6**.
- Plus généralement, dérivabilité et dérivée des fonctions
  - $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ lorsque $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge.
  - $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ lorsque $f \in \mathcal{C}(]a,b],\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ converge.

2. Cas de fonctions à valeurs réelles positives

2.1. Caractérisation

f est ici à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

> Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+)$.
>
> f est dite intégrable si l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge.

> Proposition : Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$.
>
> f est intégrable si et seulement si $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

- Démonstration **7**.

2.2. Théorème de comparaison

> Théorème : Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+^*)^2$.
>
> - Si $f \leqslant g$, $f \underset{x\to b}{=} o(g)$ ou $f \underset{x\to b}{=} O(g)$ alors :
>
> $$[g \text{ est intégrable sur } I] \Rightarrow [f \text{ est intégrable sur } I]$$
>
> - Si $f \underset{x\to b}{\sim} g$, alors :
>
> $$[g \text{ est intégrable sur } I] \Leftrightarrow [f \text{ est intégrable sur } I]$$

- Démonstration **8**.

2.3. Comparaison série intégrale

> Théorème : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.
>
> La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (autrement dit si f est intégrable).

- Démonstration **9**.
- Ce théorème n'est qu'une revisite du théorème vu au chapitre 5.
- Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} dt$ diverge.

2.4. Fonctions de référence : intégrales de Riemann

a) Sur $[1,+\infty[$:

Proposition 1 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement $\alpha > 1$.

- Démonstration **10**.
- Note : il en est de même sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

☺ **Remarque :** penser aux séries !

b) Sur $]0,1]$

Proposition 2 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement $\alpha < 1$.

- Démonstration **11**.

c) Plus généralement sur $]a,b]$

Proposition 3 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement $\alpha < 1$.

- Démonstration **12**.
- De même $f : x \to \dfrac{1}{(a-x)^\alpha}$ est intégrable sur $[b,a[$ si et seulement $\alpha < 1$

3. Intégrabilité

3.1. Introduction

Analogie avec les familles sommables (et non avec les séries !)

3.2. Définition

Définition 3 : Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

On dit que f est intégrable sur I si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

On dira aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

- Cas particulier où I est un segment.

3.3. Convergence absolue et convergence

Théorème : Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge absolument (autrement dit si f est intégrable), alors $\displaystyle\int_I f$ converge. On a alors $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$

- Démonstration **13**.

3.4. Exemples et contre-exemples **14**.

- $x \to \dfrac{e^{ix}}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$
- $x \to \dfrac{(-1)^{E(x)}}{E(x)+1}$ sur $[0,+\infty[$
- $x \to \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $[0,+\infty[$
- dans les deux derniers exemples, les intégrales convergent, mais ne convergent absolument : les fonctions ne sont donc pas « intégrables » !

3.5. L'espace des fonctions intégrables

> Proposition : Soit $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.
> Alors $(\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Démonstration **15**.

3.6. Exemples : justification d'intégrabilité **16**.

- Exemple 1 : $x \to \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $]-1,0]$.
- Exemple 2 : $x \to e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ bon à savoir : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$
- Exemple 3 : $x \to \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$ puis sur $]0,1]$.
- Exemple 4 : $x \to \dfrac{1}{1+x^3\ {}^m}$ sur $]-1,+\infty[$
- Exemple 5 : $x \to \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0,\pi]$
- Exemple 6 : $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x\ 1-x}}$ sur $]0,1[$

3.7. Exemples : justification d'intégrabilité et calcul de l'intégrale **17**.

- Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$
- Exemple 2 : $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)dt$
- Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$

3.8. Positivité améliorée

> Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}_+)$.
> Si f est intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

- Démonstration **18**.

4. Changement d'inconnues

4.1. Rappel de M.P.S.I.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],[a,b])$.

Alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

- Attention : f doit être continue sur $[a,b]$ qui contient $\varphi([\alpha,\beta])$ et pas seulement sur $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ ce que laisserait entendre la première intégrale.
- Dans la pratique, on procède mécaniquement :
  - On pose : $u=\varphi(t)$, on note que $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],[a,b])$.
  - Il vient mécaniquement $du = \varphi'(t)dt$
  - On n'oublie pas de modifier les bornes en respectant leurs positions : $u = \ldots \leftrightarrow t = \ldots$

4.2. Le théorème pour un intervalle quelconque

Théorème : Soient $a,\alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b,\beta \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Soient $I=]a,b[$ ($a<b$) et J un intervalle de bornes α et β.

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$, bijective avec $\lim\limits_{\alpha}\varphi = a$ et $\lim\limits_{\beta}\varphi = b$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

- J est un intervalle dont les bornes sont α et β

  si $\beta<\alpha$, alors $J=]\beta,\alpha[$: φ est alors strictement décroissante.
- .Démonstration **19**.
- Ici encore, dans la pratique, on procède mécaniquement :
  - On pose : $u=\varphi(t)$; il vient $du=\varphi'(t)dt$
  - On modifie les bornes en respectant leurs positions :

    $u=a \leftrightarrow t=\alpha$; $u=b \leftrightarrow t=\beta$

- Exemples : **20**.
  - $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$
  - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$

5. Intégration par partie

Théorème : Soit $(f,g)\in\mathcal{C}^1(]a,b[,\mathbb{K})^2$.

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule suivante entraîne l'existence du troisième et l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

où $[f(t)g(t)]_a^b = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ <}} f(t)g(t) - \lim\limits_{\substack{t\to a\\ >}} f(t)g(t)$

- Démonstration **21**.
- Exemples : **22**.
  - $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

6. Intégration des relations de comparaison

Théorème 1 : Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g\in\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$ avec $f \underset{x\to b}{=} o(g)$.

- Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge et $\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$
- Si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$

On a les mêmes propriétés en remplaçant o par O.

- Démonstration **23**.
- Penser aux séries entières
  - Comparaison des « restes » lorsque les séries convregent.
  - Comparaison des sommes partielles lorsque les séries divergent.

Théorème 2 : Soit $(f,g)\in\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)^2$ avec $f \underset{x\to b}{\sim} g$.

- $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.
- Si elles convergent : $\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$
- Si elles divergent : $\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$

- Démonstration **24**.