

1 (SOUS-)ESPACES VECTORIELS ET COMBINAISONS LINÉAIRES

- 1) Dans \mathbb{R}^3 , $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
- 2) Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$?
- 3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos^2 x$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
- 4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

- 2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et A .

- 3) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- 1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x = y\}$.
- 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 5y - 1 = 0\}$.
- 3) $\{(x, 2x, 3x) / x \in \mathbb{R}\}$.
- 4) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$.
- 5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + x + y^2 = 0\}$.
- 6) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$.
- 7) $\{P \in \mathbb{R}[X] / \partial^\circ P \geq 2\}$.
- 8) $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(X^2) = P' + X^4 P\}$.
- 9) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) + f(1) = f'(0)\}$.

- 4) Montrer que l'ensemble des fonctions 1-périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- 2) L'ensemble des fonctions croissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Et l'ensemble des fonctions monotones de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? Et l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?
- 3) L'ensemble des fonctions majorées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Et l'ensemble des fonctions bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

- 5) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- 1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- 2) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une suite filtrante de sous-espaces vectoriels de E , i.e. telle que :

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I / F_i \cup F_j \subset F_k.$$

Montrer que $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

- 6) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :
- 1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 2 \text{ et } 2x + y + 2z = 1\}$.
 - 2) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(M) = 1\}$.
 - 3) $\{P \in \mathbb{R}[X] / X^2 P'' - 3X P' + 4P = 4 - X\}$.
 - 4) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$.
 - 5) $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} y'(x) + y(x) = 1\}$.

- 7) Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité :
- $$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right).$$

- 8) Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $u = (1, -1, 1)$ et $v = (0, 1, a)$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le vecteur $(1, 1, 2)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$?

- 9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $$\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(kx)\right)_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos^k x\right)_{0 \leq k \leq n}.$$

2 FAMILLES LIBRES ET BASES

- 10) Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto x \sin x$ et $x \mapsto x \cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 11) On note f la fonction $x \mapsto e^x$, g la fonction $x \mapsto e^{2x}$ et h la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ sur \mathbb{R} . Montrer de deux manières différentes que la famille (f, g, h) est libre :
- 1) par une technique d'évaluation.
 - 2) par une étude asymptotique en $+\infty$.

- 12) Montrer de deux manières différentes que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- 13) Montrer que les suites $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, k décrivant \mathbb{N} , sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- 14) On pose : $P_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
- $$P_k = X(X-1)(X-2) \dots (X-k+1).$$

Montrer de deux manières différentes que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

- 15 ☹☹ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose : $v_k = u_1 + \dots + u_k$.
- 1) Montrer que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre si et seulement si la famille (v_1, \dots, v_n) l'est.
 - 2) Montrer que (u_1, \dots, u_n) engendre E si et seulement si (v_1, \dots, v_n) engendre E .

- 16 ☹☹ Montrer que la famille $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

- 17 ☹☹ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, i.e. telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.
- On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On suppose que : $x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0$. Montrer, en utilisant $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, que : $x_1 = \dots = x_n = 0$. Qu'en déduit-on sur A ?

- 18 ☹☹☹ Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que la famille $((X+k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- On suppose que : $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.
- 1) Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:
 - a) $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^p = 0$.
 - b) $\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
 - 2) Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.

- 19 Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre :
- 1) ☹☹ en s'intéressant au comportement asymptotique des exponentielles.
 - 2) ☹☹☹ en convoquant certains polynômes de Lagrange.

- 20 ☹☹☹ Montrer que la famille $(x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre en convoquant certains polynômes de Lagrange.

- 21 ☹☹ On rappelle que \mathbb{Q} est un corps et que \mathbb{R} , en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, peut être vu aussi comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel.
- 1) Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathbb{P}}$ est une famille libre du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .
 - 2) En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p . On peut montrer que $\ln r$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, mais c'est autrement plus compliqué.

3 BASES ET DIMENSION

- 22 ☹☹
- 1) Montrer que $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $(8, 4, 2)$ dans cette base.
 - 2) Montrer que $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans cette base.
 - 3) Montrer que la famille :

$$(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1)$$
 est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

- 23 ☹☹☹ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :
- $$u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$
- Montrer que la famille (u_1, \dots, u_n) est une base de \mathbb{R}^n .

- 24 ☹☹☹ Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la famille :
- $$(1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n)$$
- est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 25 ☹☹☹☹ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer que la famille $(A^k B^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- 26 ☹☹ Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :
- 1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0\}$.
 - 2) $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = 0\}$ avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - 3) $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X^2) = (X^3 + 1)P\}$.
 - 4) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\}$.
 - 5) $\{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(0) = P(1) = P(2)\}$.

- 27 ☹☹☹ On note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et \mathcal{C} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent à A . Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

- 28 ☹☹☹ On note E l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

- 29 ⌚⌚ On note E l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto A \sin(x + \varphi), \quad A \text{ et } \varphi \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

- 30 ⌚⌚ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 1) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}$ pour lequel la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^d)$ est liée.
 - 2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients dans \mathbb{K} .

- 31 ⌚⌚ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 32 ⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $y_1, \dots, y_n \in E$. On suppose que les vecteurs $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ sont linéairement indépendants. Montrer l'inégalité : $\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq n$.

- 33 ⌚ 1) Montrer que la famille :

$$(X^3 + X + 1, X^3 - 2X + 2, X^2 + 3X)$$

est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

- 2) Montrer que la famille $((8, 4, 1, 2), (1, 3, 0, 5))$ est libre et la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .
- 3) Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E . On pose :

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = e_2 - e_3.$$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E .

- 34 ⌚ Déterminer la dimension de :

$$\text{Vect}((1, 2, 1, 0), (4, -2, 1, 1), (7, 2, 4, 2), (11, 4, 1, 3)).$$

4 MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

- 35 ⌚ Les familles suivantes sont-elles des bases ?
- 1) $((2, 0, \alpha), (2, \alpha, 2), (\alpha, 0, 2)) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
 - 2) $((1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1))$.

- 36 ⌚ Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $\partial^i P_i = i$. Montrer par une technique matricielle que la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Comment montrer ce résultat sans matrices ?

- 37 ⌚⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (u_1, \dots, u_{2n+1}) une famille libre de E . Montrer par une technique matricielle que la famille :

$$(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_{2n} + u_{2n+1}, u_{2n+1} + u_1)$$

est également libre.

5 SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

- 38 ⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que : $F \cup G = F + G$ si et seulement si : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

- 39 ⌚ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que : $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

- 40 ⌚⌚ On pose : $a = (0, 0, 1, 0)$, $b = (1, 1, 0, -1)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, 1, 1)$, ainsi que : $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$.

- 41 ⌚ On pose :
- $$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$$
- et $G = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^4 .

- 42 ⌚⌚ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}((\lambda, \lambda, 1))$ et $\text{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

- 43 ⌚⌚ On note F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$ et on pose :

$$G = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

- 44 $\odot \odot$ Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X^2) = X^2 P(X)\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

- 45 $\odot \odot$ On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 46 \odot Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E .
- 1) Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.
 - 2) Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E , $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils dans G ?

- 47 \odot Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants — on admet que ce sont bien des sous-espaces vectoriels :
- 1) $\text{Vect}((1, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (0, 2, 1, 1))$ dans \mathbb{R}^4 .
 - 2) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + 2z - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$ dans \mathbb{R}^4 .
 - 3) $\{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(-X) = P(X)\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.
 - 4) a) $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
b) $\odot \odot \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - 5) dans $\mathbb{R}_3[X]$:
 $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P' + 3P = P(0)X^3 + P(1)X + P(1)\}.$

- 48 Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On pose :

$$F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_k) = 0\}.$$

- 1) \odot Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 2) $\odot \odot \odot$ Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.