Dimension finie

I Notion de dimension finie

I.1 Espaces vectoriels de dimension finie. Fabrication de bases.

Déf. • Espaces vectoriels de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que **E est un espace vectoriel de dimension finie** si E admet une famille génératrice (finie).

Dans le cas contraire, on dit que **E est de dimension infinie.**

Ex. ✻ **1)** Tous les espaces vectoriels admettant une base (finie) sont de dimension finie, en premier lieu : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2) Tous les s.e.v. qui s'écrivent $\text{Vect}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs, sont de dimension finie.

3) $\left\{\vec{0}_E\right\}$ est-il de dimension finie ? Oui, car engendré par la famille vide $\varnothing$.

4) $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie : preuve par l'absurde.

Nous allons voir que tous les espaces vectoriels de dimension finie admettent des bases. Pour en fabriquer, une première technique consiste à partir d'une famille *génératrice* de l'espace et à lui *retirer* des vecteurs bien choisis pour obtenir une base de l'espace.

Thm • Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute famille génératrice (finie) de E, on peut extraire une base de E.

Démo. Démonstration algorithmique : par retraits successifs des vecteurs « inutiles » de la famille en préservant son caractère générateur, jusqu'à obtenir une famille libre.

Ex. ✻ Base de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1,2,-3,1)$, $u_2 = (-2,1,-1,3)$, $u_3 = (1,7,-10,6)$ et $u_4 = (5,0,-1,-5)$.

Coroll. • Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Démo. Il admet par définition une famille génératrice finie donc on peut en fabriquer une base par extraction d'après le théorème de la base extraite.

Attention ❢ L'espace vectoriel nul admet pour base la famille vide, et c'est sa seule base. Tous les autres espaces vectoriels de dimension finie admettent chacun une infinité de bases.

Inversement, il est possible de fabriquer des bases à partir d'une familles *libre* en *rajoutant* des vecteurs à cette famille.

Lemme • Lemme de la base incomplète 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E et $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E. On suppose $\mathscr{F}$ libre et on note $\mathscr{F}'$ la famille obtenue en rajoutant le vecteur $\vec{u}$ à la famille $\mathscr{F}$.

Alors $\mathscr{F}'$ reste libre si et seulement si $\vec{u} \notin \text{Vect}(\mathscr{F})$.

Lemme • Lemme de la base incomplète 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.

Si tous les vecteurs de $\mathscr{G}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}$ est également une famille génératrice de E.

Démo. Sur les notes de cours.

Thm • Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée afin d'obtenir une base de E. On peut, si on le souhaite, imposer de choisir les vecteurs ajoutés dans une famille génératrice de E donnée.

Démo. Preuve algorithmique. Par ajout de vecteurs d'une famille génératrice donnée, en préservant le caractère libre et en s'arrêtant quand le caractère générateur est obtenu.

Ex. ✻ Avec les vecteurs u_k vus plus haut, la famille (u_1, u_2) devient une base de $\mathbb{R}^4$ en lui rajoutant les deux vecteurs de la base canonique $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$. La preuve sera faite plus bas lorsqu'on disposera d'outils un peu plus confortable pour la faire.

I.2 Notion de dimension

Lemme • Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E admet une famille génératrice comportant n vecteurs. Alors :

1) toute famille comportant strictement plus de n vecteurs de E est liée ;

2) toute famille libre comporte au plus n vecteurs de E.

Démo. Sur les notes de cours, en se ramenant à un système linéaire.

Ex. ✻ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille suivante est liée :
$(X^2 - X + 1,\ 3X^2 - X + 1,\ -2X^2 - X - 1,\ X^2 + 5X - 7,\ 8X^2 - X + 7)$.

Thm • Théorème de la dimension

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E comportent le même nombre de vecteurs.

Démo. Sur les notes de cours, en appliquant le lemme.

Déf. • Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **dimension de E** le nombre de vecteurs présents dans chaque base de E. On la note **$\dim(E)$.**

Rem. ◇ Le théorème de la dimension garantit que la définition de la dimension n'est pas ambiguë.

Méthode ✐ La première méthode pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel consiste à en trouver une base et à compter le nombre de vecteurs qu'elle comporte.

Ex. ✻ Retour sur l'exemple du s.e.v. F de $\mathbb{R}^4$ vu plus haut.

Propr. • Dimension des espaces vectoriels usuels

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.

3) Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\quad \dim\big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = n \times p$ et $\dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big) = n^2$.

4) $\dim\big(\{\vec{0}_E\}\big) = 0$.

I.3 Applications de la dimension aux familles de vecteurs

Propr. • Condition nécessaire pour les familles libres et génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1) Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$.

2) Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$.

3) Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Attention ❢ Toutes les réciproques de sont fausses ! On se sert surtout des contraposées de ces trois implications pour prouver qu'une famille est liée ou qu'elle ne peut pas être génératrice de E / une base de E simplement en comptant les vecteurs.

Attention ❢ Ne pas confondre **dim** et **Card** :
- dim doit porter sur un **espace vectoriel** ;
- Card doit porter sur une **famille de vecteurs.**

Ex. ✻ Dans $E = \mathbb{R}^3$, si une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ comporte :
- 5 vecteurs, alors $\mathscr{F}$ est liée.
- 2 vecteurs, alors $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$
- 3 vecteurs, alors on ne peut rien dire !

Ex. ✻ $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie car on peut fabriquer des familles libres comportant un nombre aussi grand que l'on veut de polynômes : $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

Thm • Caractérisation des bases utilisant la dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

On suppose que $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $\mathscr{F}$ est une base de E,

2) $\mathscr{F}$ est une famille libre,

3) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Méthode ✐ Quand on veut prouver qu'une famille est une base de E, si la dimension de E est connue, on commence **toujours** par compter les vecteurs de E : cela épargne la moitié du travail ensuite !

Astuce ➳ Ce théorème est de la forme : « payez pour deux, le troisième est offert ! ».

***Exercice* 1** ► Soit $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (2,0)$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 2** ► Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: $\mathscr{B}_a = \big(1,\ (X-a),\ (X-a)^2,\ \ldots,\ (X-a)^n\big)$.

I.4 Rang d'une famille de vecteurs

Déf. • Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque,
$\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

On appelle **rang de la famille $\mathscr{F}$** la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$. On la note **$\mathrm{rg}(\mathscr{F})$:** $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big)$.

Rem. ◇ Le rang d'une famille de vecteurs est donc la taille maximale des familles libres que l'on peut extraire de cette famille. C'est aussi le plus petit nombre de vecteurs nécessaires pour engendrer le même espace vectoriel que la famille $\mathscr{F}$.

Ex. ✻ Retour sur les exemples précédents.

Propr. • Caractérisation des familles libres par le rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

Alors $\mathscr{F}$ est une famille libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Important ✪ On pourra plus tard calculer le rang d'une famille de vecteurs grâce à l'outil matriciel : cette caractérisation donnera de ce fait un moyen de prouver qu'une famille est libre.

I.5 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Thm • Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est aussi de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démo. ☞ Preuve algorithmique. On construit une base de F en partant de la famille vide que l'on complète avec des vecteurs de F, en préservant le caractère libre, jusqu'à obtenir une base de F. La terminaison du procédé est garantie car les familles libres ont un cardinal majoré par la dimension de E.

Ex. ✻ $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z=0 \text{ et } x-2y+3z+t=0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$: c'est donc un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

Déf. • Droites et plans vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.

1) Une **droite vectorielle de E** est un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est égale à 1.

2) Un **plan vectoriel de E** est un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est égale à 2.

Thm • Caractérisation de l'égalité d'espaces vectoriels utilisant la dimension

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Si $F \subset E$ et que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Position relative d'une droite et d'un plan vectoriel.

II Sommes de sous-espaces vectoriels

II.1 Notion de somme de sous-espaces vectoriels

Déf. • Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

La **somme de F et G** est l'ensemble des vecteurs de E pouvant s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v},\ (\vec{u},\vec{v}) \in F \times G\}.$$

Ex. ✻ **1)** Dans $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \mathrm{Vect}\big((2,1,1)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((-1,3,0)\big)$.

2) Dans $E = \mathbb{R}^2$ avec $F = \mathrm{Vect}\big((2,-1)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$.

Propr. • Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

1) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) $F \subset F + G \subset E$ et $G \subset F + G \subset E$.

Démo. Sur les notes de cours.

Rem. ◇ Si E est de dimension finie, on aura donc $\dim(F) \leqslant \dim(F+G) \leqslant \dim(E)$.

Propr. • Familles génératrices d'une somme de s.e.v.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E admettant pour familles génératrices respectives $\mathscr{G}_F$ et $\mathscr{G}_G$.

Alors la famille $\mathscr{G}$ obtenue en juxtaposant $\mathscr{G}_F$ et $\mathscr{G}_G$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Dans $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-2z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z=0\}$.

II.2 Dimension d'une somme de s.e.v.

Thm • Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ également et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ **1)** Retour sur l'exemple précédent pour trouver une base de $F \cap G$.

2) Positions relatives possibles de deux plans vectoriels dans un espace de dimension 3.

II.3 Sommes directes

Déf. • Notion de somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que **F et G sont en somme directe** lorsque $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Notation Une fois qu'on a prouvé que F et G sont en somme directe, on entoure le signe plus dans la somme $F + G$ pour s'en souvenir : $\boldsymbol{F \oplus G}$.

Ex. ✻ **1)** Retour sur le tout premier exemple.

2) Dans $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((2,1,1)\big)$.

Propr. • Caractérisation des sommes directes par l'unicité de décomposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors F et G sont en somme directe si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de la somme $F+G$ peut s'écrire **de manière unique** sous la forme $\vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Retour sur les exemples précédents.

Propr. • Base adaptée à une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On suppose que F et G sont en somme directe, et on considère $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G.

Alors la famille $\mathscr{B}$ obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F + G$.

On dit qu'une telle base $\mathscr{B}$ qu'elle est **adaptée à la somme directe $F \oplus G$.**

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. Retour sur les exemples précédents.

Propr. • Caractérisation des sommes directes par les bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{L} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On introduit les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n).$$

Alors F et G sont en somme directe.

Démo. Sur les notes de cours.

II.4 Sous-espaces supplémentaires

Déf. • Sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que **F et G sont supplémentaires (dans E)**

si F et G sont en somme directe et que $F + G = E$.

Notation Ceci se note donc $F \oplus G = E$.

Ex. Retour sur les exemples précédents.

Propr. • Dimension des supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E.

Si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démo. Puisque $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$, d'où le résultat.

Propr. • Caractérisation par l'intersection et la dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie,**

F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$,

2) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Caractérisation par l'unicité d'écriture

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de $\underline{\boldsymbol{E}}$ peut s'écrire **de manière unique** sous la forme $\vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$.

Démo. Clair en utilisant la caractérisation par l'unicité d'écriture des sommes directes.

Ex. Dans $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$
et $G = \mathrm{Vect}\big((2, 1, 1)\big)$.

II.5 Projecteurs et symétries

Déf. • Projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on note $(\vec{u}_F, \vec{u}_G)$ l'unique couple de vecteurs tel que : $\vec{u}_F \in F, \quad \vec{u}_G \in G \quad \text{et} \quad \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$.

1) Le **projecteur sur F parallèlement à G** est l'application $p: E \to E$ qui associe à chaque vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}_F$.

2) La **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'application $s: E \to E$ qui associe à chaque vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}_F - \vec{u}_G$.

Illustr.

Ex. Quand $F = \mathrm{Vect}\big((1, 0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1, 3)\big)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

Propr. • Propriétés des projecteurs et des symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., F et G deux s.e.v. supplémentaires dans E,

p le projecteur sur F parallèlement à G,

s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1) p et s sont des endomorphismes de E.

2) $p \circ p = p$.

3) $\mathrm{Im}(p) = F, \quad \mathrm{Ker}(p) = G, \quad \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$.

4) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ donc s est un automorphisme de E.

5) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = G$.

Rem. ◇ Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs *invariants* par f, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs *transformés en leur opposé* par f.

Démo. Sur les notes de cours.

Thm • Caractérisation algébrique des projecteurs et symétries
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E.
1) Si $f \circ f = f$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E et f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
2) Si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\big(x-y,\ -x+y\big)$
et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}\big(-x-4y,\ -2x+y\big)$.

II.6 Fabrication de supplémentaires

Dans ce paragraphe on se fixe F un sous-espace vectoriel de E. Peut-on trouver un sous-espace vectoriel G de E tel que F et G soient supplémentaires dans E ? **La réponse est oui lorsque E est de dimension finie.** On peut procéder ainsi :

1) Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ du sous-espace vectoriel F ;
2) Compléter cette base pour obtenir une base $\mathscr{B}$ de l'espace E : on sait qu'il faudra ajouter un nombre $n_G = \dim(E) - \dim(F)$ de vecteurs ;
3) Poser G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs que l'on a rajoutés.

Alors **G est un supplémentaire de F dans E.**

***Exercice* 3** ► Déterminer un supplémentaire de F dans E dans les cas suivants :
1) $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ où $P_1 = X+1$ et $P_2 = X^3 - X + 1$;
2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2x - y + z = 0\big\}$.

Important. À la deuxième étape, le choix n'est pas unique, et l'espace G obtenu dépend de ce choix. Un espace F donné admet donc plusieurs supplémentaires (en fait, presque toujours une infinité).

Nous retiendrons le théorème suivant :

Thm • Existence de supplémentaires en dimension finie
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E.
Si E est de dimension finie, il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que F et G soient supplémentaires dans E.
On dit alors que G est **un** supplémentaire de F (dans E).

III Applications linéaires et dimension

III.1 Isomorphismes et dimension

Thm • Dimension d'espaces vectoriels isomorphes
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.
Si E est de dimension finie, alors F est également de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Application. Terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ (plus généralement, on peut démontrer grâce à cette approche le théorème de structure des suites récurrentes linéaires d'ordre 2).

III.2 Rang d'une application linéaire

Déf. • Applications linéaires de rang fini, notion de rang
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1) On dit que **f est de rang fini** si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.
2) Dans ce cas, on appelle **rang de f** et on note **$\mathrm{rg}(f)$** l'entier naturel $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Rem. ◇ Quand l'espace d'arrivée F est de dimension finie, l'application f est automatiquement de rang fini puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Ex. ✻ **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x-y, x-y, x-y)$;
2) divers endomorphismes particuliers de $\mathbb{R}^3$: homothéties, application nulle, symétries, projections.

Thm • Théorème du rang
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire.
On suppose que E est de dimension finie.
Alors f est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Important ✪ En dimension finie, le théorème du rang établit un lien fort entre le noyau et l'image d'une application linéaire quelconque.

Ex. ✻ **1)** Calcul du rang de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$(x,y,z) \longmapsto (2x + y - z,\ x - y + 2z,\ x + 5y - 8z)$.
2) Dimension du noyau de $\varphi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0) + P'(0)$.

Une application importante du théorème du rang est la caractérisation des isomorphismes : une nouvelle situation où la dimension permet de « s'épargner la moitié du travail ».

Thm • **Caractérisation des isomorphismes à l'aide de la dimension**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\mathbf{dim(E) = dim(F)}$.
Alors les équivalences suivantes sont vraies :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$, $(x,y,z) \mapsto 2xX^2 + (x-z)X + (x+y-z)$.

Coroll. • **Cas particulier des endomorphismes**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie,** f un endomorphisme de E.
Alors les équivalences suivantes sont vraies :

$$f \text{ est un automorphisme de } E \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Démo. Application immédiate de ce qui précède : puisque $E = F$, $\dim(E) = \dim(F)$!

Attention ❢ Bien vérifier que l'espace E est de dimension finie, car ce corollaire ne se généralise pas aux situations où E est dimension infinie.
Par exemple, l'endomorphisme de dérivation $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjectif (tous les polynômes ont au moins un antécédent par Δ, leur primitive, qui est un polynôme) mais pas injectif (le polynôme nul a une infinité d'antécédents : tous les polynômes constants).

On constate enfin que le rang d'une composée ne peut pas dépasser le rang de chacune des applications impliquées, mais que composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang d'une application linéaire.

Propr. • **Rang de composées**

Soit E, F, E, F' quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension quelconque, On $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\varphi \in \mathscr{L}(E',E)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,F')$.
suppose f de rang fini.
Alors :

1) $f \circ \varphi$ est de rang fini également et $\mathrm{rg}(f \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.

2) $\psi \circ f$ est de rang fini également et $\mathrm{rg}(\psi \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.

3) Si on compose f à gauche ou à droite par un isomorphisme, on obtient une application linéaire de même rang que f.

Démo. Sur les notes de cours.