Événements Indépendants

Exercice 1 [04013] [Correction]

(a) Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\widetilde{A_i} = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Vérifier la famille $(\widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_n})$ est constituée d'évènements mutuellement indépendant.

(b) Etendre le résultat au cas d'une famille $(A_i)_{i\in I}$.

Exercice 2 [04081] [Correction]

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)\right).$$

Exercice 3 [04109] [Correction]

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

(a) Démontrer

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\overline{A_k}).$$

(b) On suppose $\mathrm{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{P}\big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\big) = 1$;
(ii) $\sum \ln\big(\mathrm{P}(\overline{A_n})\big)$ diverge ;
(iii) $\sum \mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 4 [04947] [Correction]

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

(a) Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\lambda n^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

(b) Pour p nombre premiers, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.

(c) Prouver

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

(d) La famille $(1/p)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Un calcul facile fournit

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \implies \mathrm{P}(A\cap \overline{B})=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Il est alors immédiat de vérifier que

$$A_1,\dots,A_n \text{ mutuellement indépendants } \implies A_1,\dots,\overline{A_i},\dots,A_n \text{ mutuellement indépendants.}$$

En enchaînant les négations, on obtiendra

$$A_1,\dots,A_n \text{ mutuellement indépendants } \implies \widetilde{A_1},\dots,\widetilde{A_n}.$$

(b) C'est immédiat puisque l'indépendance mutuelle d'une famille infinie se ramène à celle des sous-familles finies.

Exercice 2 : [énoncé]

On étudie

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right).$$

Par indépendances des $\overline{A_n}$, on a

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)=\prod_{n=0}^{N}\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr).$$

Or $1-x\leq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)\leq\prod_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{P}(A_n)}=\exp\left(-\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(A_n)\right).$$

À la limite quand $N\to+\infty$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\leq\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(A_n)\right)$$

où l'on comprend l'exponentielle nulle si la série des $\mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) On a

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right).$$

Enfin, par mutuelle indépendance

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr).$$

La relation demandée est dès lors immédiate.

(b) (i) $\implies$ (ii) Supposons (i). On a

$$\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_k})\bigr)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty.$$

Ainsi, la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ est divergente.
(ii) $\implies$ (i) Inversement, si la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ diverge, puisque les termes sommés sont positifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On peut alors suivre la démonstration précédente à rebours et conclure (i).
(ii) $\implies$ (iii) Supposons (ii).
Si $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge grossièrement.
Si en revanche $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors

$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)=\ln\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\mathrm{P}(A_n)$$

et à nouveau la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge, cette fois-ci par équivalence de séries à termes de signe constant.
(iii) $\implies$ (ii) Supposons (iii).
Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en constatant

$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \iff \mathrm{P}(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) La famille définit une loi de probabilité si elle est formée de réels positifs, qu'elle est sommable et de somme égale à 1. Ceci a lieu si, et seulement si, $\lambda = 1/\zeta(s)$.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_m$ des nombres premiers deux à deux distincts.

$$A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \forall k \in [\![1\,;m]\!],\ p_k \mid n\right\}.$$

Les p_k étant des nombres premiers deux à deux distincts, on a la propriété arithmétique

$$\big(\forall k \in [\![1\,;m]\!],\ p_k \mid n\big) \iff p_1 \dots p_m \mid n$$

et donc

$$A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m} = A_{p_1 \dots p_m}.$$

Il reste à calculer les probabilités des événements A_p.

$$\mathrm{P}(A_p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{p^s}.$$

L'égalité $(p_1 \dots p_m)^s = p_1^s \dots p_m^s$ donne alors immédiatement

$$\mathrm{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}) = \mathrm{P}(A_{p_1 \dots p_m}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_m)^s} = \mathrm{P}(A_{p_1}) \times \dots \times \mathrm{P}(A_{p_m}).$$

On peut conclure que les événements A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

(c) On a

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

car tout entier naturel supérieur à 2 est divisible par un nombre premier.
Énumérons les nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. On peut écrire par continuité décroissante et indépendance

$$\mathrm{P}\big(\{1\}\big) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_{p_k}}\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{P}(\overline{A_{p_k}}) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Or $\mathrm{P}(\{1\}) = \lambda$ et donc

$$\lambda = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Après passage à l'inverse, ceci fournit la relation demandée sous réserve de comprendre

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

(d) Par l'absurde, supposons la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ sommable. On a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Or

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

est terme général d'une série convergente et on peut donc introduire

$$M = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right).$$

Aussi, pour tout $s > 1$,

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}}\right) \le \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)$$

et donc, lorsque N tend vers l'infini,

$$\zeta(s) \le M.$$

Ceci est absurde car ζ est de limite $+\infty$ quand s tend vers 1.