Calcul matriciel

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n, p et q seront sauf mention contraire des entiers naturels non nuls.

I Vocabulaire général

Déf. • Une **matrice de taille (n,p) à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est une famille de nombres de $\mathbb{K}$ repérés par deux indices : $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Une telle matrice M se représente par un tableau rectangulaire de nombres, non séparés par des virgules, encadré de grandes parenthèses :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

Le premier indice repère la ligne, le second repère la colonne. Ainsi $m_{i,j}$ est le **coefficient d'indice (i,j) de la matrice M**, que l'on trouve à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de M.

Une matrice de taille (n,p) comporte n lignes et p colonnes.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble comprenant toutes les matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Important ✪ Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et mêmes coefficients.

Déf. • Forme des matrices, diagonale d'une matrice carrée

1) Une **matrice-colonne de taille n** est une matrice de taille $(n,1)$.
L'ensemble de ces matrices est donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2) Une **matrice-ligne de taille n** est une matrice de taille $(1,n)$.
L'ensemble de ces matrices est donc $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

3) Une **matrice carrée de taille n** est une matrice de taille (n,n).
L'ensemble de ces matrices, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, est noté $\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$.

4) Si $M=(m_{i,j})$ est une matrice carrée de taille n, la **diagonale de M** est le n-uplet : $(m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n})$.

Déf. • Matrices nulles, matrices identité

1) La **matrice nulle de taille (n,p)** est la matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. On la note **(0)** ou même plus simplement **0** :

$$(0) = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

2) La **matrice identité de taille n** est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients sont nuls. Elle est notée $\mathbf{I}_n$:

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son terme général est donné par $\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $\delta_{i,j}$ est le **symbole de Kronecker :**

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{si } i\neq j. \end{cases}$$

Déf. • Matrices carrées particulières

Soit $M=(m_{i,j})$ une matrice carrée de taille n. On dit que :

1) ***M* est une matrice diagonale** quand tous ses coefficients hors de sa diagonale sont nuls, autrement dit

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, \quad i\neq j \Rightarrow m_{i,j}=0.$$

2) ***M* est triangulaire supérieure** quand tous ses coefficients strictement en dessous de sa diagonale sont nuls, autrement dit

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow m_{i,j}=0.$$

3) ***M* est triangulaire inférieure** quand tous ses coefficients strictement au-dessus de sa diagonale sont nuls, autrement dit

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow m_{i,j}=0.$$

Déf. • Transposée d'une matrice
Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice de taille (n,p). On appelle **transposée de M** la matrice de taille (p,n) dont le coefficient d'indice (i,j) est donné par le coefficient d'indice (j,i) de la matrice M. On note cette matrice $\mathbf{{}^tM}$ ou $\mathbf{M^T}$.

Illustr. ✎ La transposée d'une matrice est donc obtenue en transformant les lignes en colonnes et vice-versa.

Déf. • Matrices symétriques et antisymétriques
Soit M une matrice.

1) On dit que **M est symétrique** quand ${}^tM = M$.

2) On dit que **M est antisymétrique** quand ${}^tM = M$.

Rem. ◇ Les matrices symétriques et antisymétriques sont obligatoirement carrées (sinon M et M^T n'ont pas la même taille).

Illustr. ✎ Une matrice symétrique a des coefficients symétriques par rapport à sa diagonale. Dans une matrice antisymétrique, la diagonale est nulle et les coefficients de part et d'autre de la diagonale sont opposés.

II Opérations sur les matrices

II.1 Somme et produit par un nombre

Déf. • Somme de deux matrices, produit d'une matrice par un nombre
Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices **de même taille** (n,p).

1) La somme $\boldsymbol{A+B}$ s'obtient en additionnant les coefficients qui se trouvent à la même position dans chaque matrice. $\boldsymbol{A+B}$ est donc la la matrice de taille (n,p) dont les coefficients $(s_{i,j})$ vérifient

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

2) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\boldsymbol{\lambda A}$ s'obtient en multipliant tous les coefficients de A par λ. $\boldsymbol{\lambda A}$ est donc la matrice de taille (n,p) dont les coefficients $(\alpha_{i,j})$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad \alpha_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}.$$

Notation ✎ Quand on multiplie une matrice par un nombre, le nombre doit toujours être placé devant la matrice et on n'utilise pas le signe $\times$: on écrit λM ou $\lambda\,.\,M$, jamais $\lambda \times M$ ou $M \times 2$.

Le calcul matriciel vérifie des propriétés calculatoires analogues au calcul sur les vecteurs du plan où les matrices joueraient le rôle des vecteurs.

Dans ce qui suit, A, B et C sont des matrices de même taille (n,p) tandis que λ et μ sont deux nombres de $\mathbb{K}$.

1) Propriétés de l'addition :
- $+$ est associative :
- $+$ est commutative :
- La matrice nulle est neutre pour $+$:
- Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un symétrique pour $+$: c'est la matrice $(-1)A$, notée dorénavant $-A$:

2) Propriété du produit par une constante :
- 1 est neutre à gauche :
- associativité mixte :

3) Compatibilité entre somme et produit par une constante :
- . se distribue à droite sur $+$:
- . se distribue à gauche sur $+$:

La transposition se comporte bien avec ces deux opérations.

4) Transposition et opérations :
- Transposée de la somme :
- Transposée du produit par un nombre :

II.2 Multiplication matricielle

On commence par expliquer sur des exemples comment calculer en pratique le produit de deux matrices. **Sur les notes de cours, on multipliera :**

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Déf. • Produit de deux matrices

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de taille (n,p), $B=(b_{i,j})$ une matrice de taille (p,q) (le nombre de colonnes de A doit être le même que le nombre de lignes de B).

Le **produit de la matrice A par la matrice B** est la matrice notée **AB**, de taille (n,q), dont le terme général $(c_{i,j})$ est donné par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}.$$

Attention **On ne peut pas toujours multiplier deux matrices données entre elles !** Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, **le produit AB n'existe pas.**

Rem. ◇ À quelle condition peut-on multiplier deux matrices de même taille entre elles ?

Le produit matriciel vérifie des propriétés analogues au produit de nombres, **à quelques exceptions importantes près.**

D'abord ce qui fonctionne bien :

1) Le produit de matrices est **associatif :**

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (AB)C = A(BC).$$

(les parenthèses sont inutiles dans les produits de plus de deux matrices.)

2) Les matrices identité sont neutres pour le produit,
les matrices nulles sont absorbantes :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{I}_n A = A \qquad A\mathrm{I}_p = A$$
$$(0)A = (0) \qquad A(0) = (0).$$

3) Associativité mixte entre produit par une nombre et produit matriciel :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\,(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

4) Le produit matriciel est distributif sur l'addition :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall (B,C) \in \left(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2, \quad A(B+C) = AB + AC$$
$$\forall (A,B) \in \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2,\ \forall C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (A+B)\,C = AC + BC.$$

Ce qui ne marche pas bien avec le produit de matrices :

1) Le produit de matrices n'est pas commutatif :
Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,
alors $AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ donc $AB \neq BA$.

2) Le théorème du produit nul n'est pas vrai avec les matrices :
Si $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,
alors $AB=(0)$ et pourtant $A \neq (0)$ et $B \neq (0)$.
On dit que le produit de matrices **n'est pas intègre.**

3) A priori, **les matrices ne sont pas simplifiables :**
Si $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$,
on a $MX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $MX'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $MX=MX'$ et pourtant $X \neq X'$.

Toutefois, pour certains choix particuliers de matrices, l'ordre dans lequel est effectué le produit n'est pas important.

Déf. • Soit A et B deux matrices carrées de taille n.
On dit que **A et B commutent** quand $AB = BA$.

Exercice **1** ► **1)** Montrer que les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ commutent.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A=\lambda\,\mathrm{I}_n$. Montrer que A commute avec toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Produit et transposition :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

II.3 Puissances d'une matrice carrée

On peut toujours multiplier deux matrices carrées de même taille entre elles, et on obtient une matrice carrée de même taille. En recommençant, on obtient les **puissances de cette matrice carrée.**

Déf. • Puissances d'une matrice carrée

Soit A une matrice **carrée** de taille p.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $\boldsymbol{A^n}$ par

$$A^n = \begin{cases} \mathrm{I}_n & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Important ✪ Calculer A^n pour une petite valeur de n consiste à calculer des produits de matrices par la méthode habituelle. Calculer les coefficients de A^n *pour tout* n est un problème plus délicat.

Attention ❢ **Calculer A^n ne consiste pas à élever à la puissance n chaque coefficient de A pris séparément !**

***Exercice* 2** ► Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^9.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n+1}+2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

Propr. • Propriétés calculatoires pour les puissances de matrices

Soit $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_p(\mathbb{K})\right)^2$, n et m deux entiers.

1) Alors $A^n A^m = A^{n+m}$, $\quad (A^n)^m = A^{n\times m}$, $\quad (\lambda A)^n = \lambda^n A^n$.

2) **Si de plus A et B commutent** ($AB = BA$), alors $(AB)^n = A^n B^n$.

3) **Si de plus A et B commutent,** la formule du binôme de Newton est vraie pour les matrices A et B :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

4) **Si de plus A et B commutent,** la formule de Bernoulli est vraie pour les matrices A et B :

$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k.$$

Attention ❢ L'hypothèse « A et B commutent » ne doit surtout pas être oubliée pour les trois dernières propriétés !

***Exercice* 3** ► Soit M une matrice carrée de taille p, n un entier naturel.

1) Exprimer $(M + 2\mathrm{I}_p)^n$ en fonction de puissances de M.

2) Factoriser $M^2 - \mathrm{I}_p$, $M^2 - 5\mathrm{I}_p$ et $M^n - \mathrm{I}_p$.

II.4 Cas particulier des matrices triangulaires et diagonales

Propr. • Stabilité des matrices triangulaires et diagonales par les opérations

Soit A et B deux matrices carrées de même taille,
λ un nombre, n un entier naturel.

1) Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A+B$, λA, AB et A^n sont toutes triangulaires supérieures également.

2) Même chose pour les matrices triangulaires inférieures.

3) Même chose pour les matrices diagonales.

Propr. • Calcul sur les matrices diagonales

Si A et B sont deux matrices diagonales de même taille p, tous les calculs matriciels s'effectuent en travaillant sur chaque coefficient séparément :

Important ✪ En particulier, il est très facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale : il suffit d'élever chaque coefficient à cette puissance **(ce qui est faux pour les matrices quelconques !)**

III Matrices inversibles

III.1 Définition et liens avec les opérations

Prop. Déf. • Matrices inversibles, inverse d'une matrice

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée.** On dit que ***A* est inversible** (dans $\mathbb{K}$) quand il existe une matrice $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AA' = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad A'A = \mathrm{I}_n.$$

2) Si une telle matrice A' existe, elle est unique.
On appelle A' l'**inverse de *A*** et on la note A^{-1}.

3) L'ensemble comprenant toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé **groupe linéaire d'ordre *n*.**

Rem. ◇ **1)** L'inverse de la matrice A n'existe pas forcément. Avant de la faire intervenir dans un calcul, il faut toujours justifier que la matrice A est inversible.
2) Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.
3) Quand elle existe, l'inverse de la matrice A s'écrit toujours A^{-1}. La notation $\frac{1}{A}$ est interdite, de même que toute division impliquant des matrices.

***Exercice* 4** ► Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et que son inverse est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

***Exercice* 5** ► Montrer que la matrice I_3 est inversible et préciser son inverse. Même question pour la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Propr. • Matrices inversibles et opérations

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}$.
On suppose que <u>*A* et *B* sont inversibles</u> et que $\lambda \neq 0$. Alors :

1) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2) A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.
3) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4) λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
5) A^{T} est inversible que $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Démo. ↝ Sur les notes de cours.

***Exercice* 6** ► A et B étant inversibles, que dire de $C = A^2B^3$?

***Exercice* 7** ► Si A vérifie $A^3 - 3A^2 + 2A + 2\,\mathrm{I}_3 = 0$, montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction des puissances de A.

***Exercice* 8** ► Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 et en déduire que $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

III.2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Pour l'instant, nous ne saurons calculer l'inverse d'une matrice que dans deux cas très simples. Les chapitres suivants nous fourniront par la suite d'autres méthodes.

Propr. • Cas des matrices diagonales

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.
Alors A est inversible si et seulement si $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.
Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démo. ↝ Sur les notes de cours.

Propr. • Cas des matrices carrées de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2.
Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démo. ↝ Sur les notes de cours.

Rem. ◇ La quantité $ad - bc$ est le **déterminant** de A. Cette notion s'étend à toutes les matrices carrées et sera étudiée au second semestre.

***Exercice* 9** ► Dire si les matrices suivantes sont inversibles, et, le cas échéant, donner leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}.$$