# MP: Espace préhilbertien et Topologie.

Coralie Renault

1er mars 2015

**Exercice**

Soient $n$ un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
a) Montrer que

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $E$.
b) Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2+bt+c)\right)^2 \mathrm{d}t$$

**Exercice**

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.
b) On pose

$$V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E / f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que $V$ et $W$ sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur $W$.
c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E / f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice**

Soit $p$ une projection d'un espace vectoriel euclidien $E$.
Montrer que la projection $p$ est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

**Exercice**

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

a) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de $F$.
b) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $F$.
c) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à $F$.
d) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

**Exercice**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque $P_n$ de degré $n$ et de coefficient dominant 1.
b) Etudier la parité des polynômes $P_n$.
c) Prouver que pour chaque $n \geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

**Exercice**

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

— Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $deg(P_n) = n$ , pour tout n.
— Montrer que $P_n$ possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$.
— On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de $P_n$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait :

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

**Exercice**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$

**Exercice**

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Montrer

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$$

b) Montrer

$$M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

c) Montrer que $M$ est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que $a, b$ et $c$ sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

**Exercice**

Soit $u$ et $v$ deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté.
Quels sont les isométries vectorielles qui envoient $u$ sur $v$ ?

**Exercice**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tAB)$.
a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
b) Exprimer la distance à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

c) Montrer que l'ensemble $H$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Donner la distance à $H$ de la matrice $J$ dont tous les coefficients valent 1.