MP Programme de colle n° 16

Cours :

Chapitre 11

Fonctions vectorielles

5. Particularités des fonctions à valeurs réelles (§ 5.1 à 5.4)
6. Quelques exemples d'a rcs paramétrés

Chapitre 12

Intégration sur un intervalle I. Théorie

1. Intégrale généralisée
2. Cas de fonctions à valeurs réelles positives

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes ou délicates)

Chapitre 11

5.3

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$.

Alors $\exists\, c \in]a,b[\;/\; f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

- En supposant acquis le théorème de Rolle

5.4

Lemme : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I-\{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est notée ℓ

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut ℓ.

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I-\{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$: f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$: f n'est pas dérivable en a.

- La démonstration du théorème comprend la démonstration du lemme

Chapitre 12

1.4

Proposition 4 : Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R})$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge,

alors $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et a pour dérivée $-f$.

2.1

Proposition : Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$.

f est intégrable si et seulement si $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

2.2

Théorème : Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+^*)^2$.

❋ Si $f \leqslant g$, $f \underset{x\to b}{=} o(g)$ ou $f \underset{x\to b}{=} O(g)$ alors :

$[g$ est intégrable sur $I] \Rightarrow [f$ est intégrable sur $I]$

❋ Si $f \underset{x\to b}{\sim} g$, alors $[g$ est intégrable sur $I] \Leftrightarrow [f$ est intégrable sur $I]$

2.3

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (autrement dit si f est intégrable).

2.4

Proposition 1-2 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

❋ f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement $\alpha > 1$

❋ f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement $\alpha < 1$.

Proposition 3 : Soit $f : x \to \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement $\alpha < 1$.