

Chapitre 15

Probabilités

1. Dénombrements (rappels de M.P.S.I.)

- 1.1. Cardinaux
- 1.2. Applications
- 1.3. Injections
- 1.4. Permutations de E
- 1.5. Parties d'un ensemble
- 1.6. Compléments

- Formules de Pascal, de Pascal généralisée, de Vandermonde.

2. Espaces probabilisés

2.1. Tribus

- a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.
- b) Tribu sur un ensemble Ω

- Définitions : tribu, espace probabilisé, système complet d'événements
- Exemples.

Propriétés : Soit \mathcal{T} une tribu sur un ensemble Ω .

✚ \mathcal{T} contient l'événement certain Ω et l'événement impossible \emptyset .

autrement dit : $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$

✚ \mathcal{T} est stable par réunion finie.

✚ \mathcal{T} est stable par intersection finie ou dénombrable.

✚ \mathcal{T} est stable par soustraction ensembliste.

- **Démonstration de la stabilité par intersection**

2.2. Probabilité

- a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.
- b) Définition : probabilité, espace probabilisé
- c) Détermination d'une probabilité lorsque Ω est fini (rappels M.P.S.I.)
- d) Détermination d'une probabilité lorsque Ω est dénombrable

2.3. Propriétés élémentaires (revisite de celles vues en M.P.S.I.)

2.4. Propriétés des suites d'événements

Propriété de la continuité croissante

Soit A_n $n \in \mathbb{N}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion

autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1}$,

alors la suite $P A_n$ $n \in \mathbb{N}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P A_n = P \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right)$.

- **Démonstration**

Propriété de la continuité décroissante

Soit A_n $n \in \mathbb{N}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion

autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n$,

alors la suite $P A_n$ $n \in \mathbb{N}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P A_n = P \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right)$.

- **Démonstration**

Inégalité de Boole (sous-additivité)

Soit A_n $n \in \mathbb{N}$ une suite d'événements, alors $P \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P A_n$.

- **Démonstration**

2.5. Evénements négligeables, événements presque sûrs.

Propriété : Toute réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

- **Démonstration**

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définition

- L'application $P_B : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ définit une probabilité sur Ω, \mathcal{T} **Démo**

3.2. Inversion des conditionnements

Proposition Soient A et B deux événements non négligeables.

$$\text{Alors } P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P B}$$

- **Démonstration**

3.3. Formule des probabilités composées

Théorème : **formule des probabilités composées**

Soit A_i $i \in 1, n$ $\in \mathcal{T}^n$ telle que $P \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \right) > 0$. Alors

$$P \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = P A_1 \times P_{A_1} A_2 \times P_{A_1 \cap A_2} A_3 \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}} A_n.$$

- **Démonstration**

3.4. Formule des probabilités totales

Théorème : **formule des probabilités totales**

Soit A_n $n \in \mathbb{N}$ un système complet d'événements non négligeables.

Soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

• **Démonstration** .

3.5. Formule de Bayes

Théorème : **formule de Bayes**

Soit A_n $n \in \mathbb{N}$ système complet d'événements non négligeables. Soit $B \in \mathcal{T}$.

Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$$

• **Démonstration**

4. Evénements indépendants

4.1. Couple d'événements indépendants

a) Définition

b) Propriétés

Propriété 1 Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

Propriété 2 Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B sont indépendants.

• **Démonstration**

4.2. Famille d'événements indépendants

a) Définition : famille d'événements deux à deux (resp. mutuellement) indépendants

b) Propriétés

Propriété 1 L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

Propriété 2 Si A_n $n \in \mathbb{N}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(A_k) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

• **Démonstration**

Propriété 3 Si A_i $i \in I$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors la famille B_i $i \in I$ l'est aussi, où $\forall i \in I : B_i = A_i$ ou \bar{A}_i .

4.3. Schéma de Bernoulli, épreuves répétées

* Epreuve de Bernoulli, schéma de Bernoulli, formule $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.