SEMAINE 23

COURBES PLANES

NAPPES PARAMÉTRÉES

EXERCICE 1 :

Soit O un point du plan euclidien orienté, soit Γ un arc de classe $\mathcal{C}^1$, régulier. À tout point M sur Γ, on associe le point T, intersection de la tangente à Γ en M avec la perpendiculaire à (OM) issue de O.

Déterminer Γ de sorte que la distance MT soit constante égale à 1. Calcul d'une abscisse curviligne sur Γ.

- -

Notons s une abscisse curviligne sur Γ. Au point $M\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$, le vecteur tangent unitaire est $\overrightarrow{\tau}\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$. Quitte à changer l'orientation de Γ, on peut supposer que $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{\tau}$. La condition à écrire est alors $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$, ce qui conduit à l'équation différentielle

$$(*) \ : \qquad x(x+x') + y(y+y') = 0 \ .$$

On peut supposer que l'arc recherché ne passe pas par O, et le théorème de relèvement permet de poser $\begin{cases} x(s) = \rho(s)\,\cos\theta(s) \\ y(s) = \rho(s)\,\sin\theta(s) \end{cases}$, les fonctions ρ et θ étant de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors la relation $(**)$: $\rho'(s)^2 + \rho(s)^2\,\theta'(s)^2 = 1$ qui exprime que s est un paramètre normal sur Γ.

En posant $R(s) = \rho(s)^2 = x(s)^2 + y(s)^2$, l'équation $(*)$ s'écrit $R'(s) + 2R(s) = 0$, ce qui s'intègre en $R(s) = C^2\,e^{-2s}$, puis $\rho(s) = C\,e^{-s}$. En réinjectant dans $(**)$, on obtient $C^2\,e^{-2s}\big(1+\theta'(s)^2\big) = 1$, d'où

$$\theta'(s) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \pm\sqrt{\frac{e^{2s}}{C^2} - 1} \ .$$

Cherchons maintenant une équation polaire de Γ :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \pm\frac{C\,e^{-s}}{\sqrt{\frac{e^{2s}}{C^2} - 1}} = \pm\frac{C^2\,e^{-2s}}{\sqrt{1 - C^2\,e^{-2s}}} = \pm\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \ .$$

Nous sommes donc ramenés à intégrer l'équation différentielle autonome (à variables séparables) $\mathrm{d}\theta = \pm\dfrac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$. En posant $\rho = \sin u$ (on a nécessairement $0 < \rho \leq 1$), on obtient

$$\int \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \int \operatorname{cotan}^2 u\,\mathrm{d}u = -\operatorname{cotan} u - u + k = -\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} - \arcsin\rho + k \ ,$$

où k est une constante. Finalement,

$$\theta = \theta_0 \pm \left(\arcsin\rho + \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}\right) \qquad (0 < \rho \leq 1) \ .$$

Les courbes solutions s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles par toutes les isométries fixant O.

L'abscisse curviligne est $s = -\ln\left(\dfrac{\rho}{C}\right)$ soit, à une constante près, $s = -\ln\rho$. La spirale a donc une longueur infinie.

EXERCICE 2 :

Dans le plan euclidien, soit Γ un arc de classe $\mathcal{C}^4$, birégulier. On note I le centre de courbure de Γ en un point M. On note $\mathcal{D}$ la développée de Γ (lieu des centres de courbure). Le centre de courbure de $\mathcal{D}$ au point I (s'il existe) est noté J. On note enfin P le milieu de $[MI]$, et $\mathcal{C}$ le lieu des points P lorsque M parcourt Γ.

Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ au point P est orthogonale à la droite (MJ).

- -

Soit s un paramètre normal ("une abscisse curviligne") sur Γ. Soit R le rayon de courbure de Γ en M. Notons enfin $(M;\overrightarrow{t},\overrightarrow{n})$ le repère de Frenet de Γ en M. Alors $I = M + R\,\overrightarrow{n}$ et, en dérivant cette égalité (grâce aux formules de Frenet), on a

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{t} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{n} + R\cdot\left(-\frac{\overrightarrow{t}}{R}\right) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{n}\ .$$

Remarque : l'arc Γ étant de classe $\mathcal{C}^3$, la fonction $s \mapsto R(s)$ dont l'expression utilise des dérivées d'ordre deux, est de classe $\mathcal{C}^1$.

Les points singuliers sur la développée $\mathcal{D}$ ($\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{0}$) correspondent donc aux "sommets" de la courbe Γ (extremums de la courbure), on exclut désormais ces points. On constate alors que la tangente à $\mathcal{D}$ au point I est la normale à Γ au point M (*propriété classique : la développée d'une courbe est l'enveloppe de ses normales*). Orientons $\mathcal{D}$ (c'est au moins possible localement) de façon que son vecteur tangent unitaire orienté $\overrightarrow{\tau}$ au point I soit $\overrightarrow{n}$; le repère de Frenet de $\mathcal{D}$ au point I est alors $(I;\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\nu}) = (I;\overrightarrow{n},-\overrightarrow{t})$.

Soit σ une abscisse curviligne sur $\mathcal{D}$. On a alors $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\sigma} = \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{n}$, mézôssi

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\,\overrightarrow{n} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\sigma}\,\overrightarrow{n}\ .$$

On en déduit la relation $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\sigma} = 1$ (*ce qui traduit en fait que Γ est une développante de* $\mathcal{D}$), ou encore $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}$ (*interprétation : en intégrant cette égalité pour $s \in [s_1, s_2]$, avec des notations évidentes, on voit que la longueur de l'arc I_1I_2 sur la développée est égale à $|R_2 - R_1|$, c'est-à-dire à la variation du rayon de courbure de Γ entre les points M_1 et M_2, à condition que la courbe Γ ne présente pas de "sommet" entre les points M_1 et M_2, c'est-à-dire que la fonction $s \mapsto R(s)$ soit monotone sur l'intervalle* $[s_1, s_2]$).

On a ensuite $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}\sigma} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\,\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}s} = -\left(R\,\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^{-1}\overrightarrow{t}$ puisque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\overrightarrow{t}}{R}$. Soit alors ρ le rayon de courbure de la développée $\mathcal{D}$ au point I ; les formules de Frenet montrent que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\tau}}{\mathrm{d}\sigma} = \dfrac{\overrightarrow{\nu}}{\rho}$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}\sigma} = -\dfrac{\overrightarrow{t}}{\rho}$. Par comparaison avec la relation obtenue ci-dessus, on obtient une relation entre les courbures R et ρ :

$$\rho = R\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\ .$$

Le point J est donc défini par $\overrightarrow{IJ} = \rho\,\overrightarrow{\nu} = -R\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{t}$ et

$$\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} = R\left(\overrightarrow{n} - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{t}\right)\ .$$

D'autre part, $P = M + \frac{1}{2}\,R\,\overrightarrow{n}$, donc la tangente à $\mathcal{C}$ au point P est dirigée par le vecteur (s'il est non nul) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{t} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{n} + \frac{1}{2}\,R\left(-\frac{\overrightarrow{t}}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\overrightarrow{n}\right)\ .$$

Ce vecteur est donc effectivement non nul et l'arc $s \mapsto P(s)$ est régulier, et on vérifie la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{MJ}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}$.

EXERCICE 3 :

1. Soit $a > 0$, soit (H) l'hyperbole équilatère d'équation $xy = a$. Soit M un point de (H). Calculer les coordonnées de K, centre de courbure de (H) en M.

Vérifier la relation $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM} = 2\|\overrightarrow{OM}\|^2$. En déduire une construction géométrique du point K.

2. Réciproque : déterminer toutes les courbes planes Γ dont le centre de courbure peut s'obtenir par cette construction géométrique.

- -

1. Paramétrons (H) par $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{a}{t} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}^*)$. Alors $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = -\dfrac{a}{t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = \dfrac{2a}{t^3} \end{cases}$, d'où $\|\overrightarrow{F'}(t)\| = x'^2 + y'^2 = \dfrac{t^4 + a^2}{t^4}$, $\mathrm{Det}\big(\overrightarrow{F'}(t), \overrightarrow{F''}(t)\big) = x'y'' - x''y' = \dfrac{2a}{t^3}$ et le rayon de courbure est

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{(t^4 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2at^3}\ .$$

On détermine le repère de Frenet :

$$\overrightarrow{T}\left(\frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}, \frac{-a}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right) \quad ; \quad \overrightarrow{N}\left(\frac{a}{\sqrt{t^4 + a^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right)\ .$$

On détermine le centre de courbure K par $K = M + R\overrightarrow{N}$:

$$\begin{cases} x_K = t + \dfrac{t^4+a^2}{2t^3} = \dfrac{3t^4+a^2}{2t^3} \\ y_K = \dfrac{a}{t} + \dfrac{t^4+a^2}{2at} = \dfrac{t^4+3a^2}{2at} \end{cases}.$$

On vérifie immédiatement que $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM} = 2\|\overrightarrow{OM}\|^2 = 2\dfrac{t^4+a^2}{t^2}$. Cela signifie que le point N, projeté orthogonal de K sur la droite (OM), vérifie $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$.

Pour construire le point K, on place d'abord N tel que $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$; le point K est à l'intersection de la normale à (H) en M et de la perpendiculaire à (OM) issue de N.

2. Supposons l'arc Γ de classe $\mathcal{C}^2$ birégulier, ce qui permettra de considérer l'angle α comme paramètre admissible ; enfin, on suppose naturellement que l'arc ne passe pas par O, ce qui permet d'utiliser le théorème de relèvement pour paramétrer par l'angle θ des coordonnées polaires.

Soit $M(x,y)$ un point de Γ, soit $K(\xi,\eta)$ le centre de courbure de Γ en ce point. On veut que soit satisfaite la relation $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM} = 2\,\|\overrightarrow{OM}\|^2$, c'est-à-dire **(R)** : $x\xi + y\eta = x^2+y^2$.

Notons $(M;\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$ le repère de Frenet de Γ en M, et soit l'angle $\alpha = (\overrightarrow{i},\overrightarrow{T})$. De $K = M + R\overrightarrow{N}$ avec $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$ et $\overrightarrow{T} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{j}$, on déduit que les coordonnées du centre de courbure sont données par $\begin{cases} \xi = x - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} \\ \eta = y + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} \end{cases}$. On a donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}) \quad &\iff \quad x\left(x - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right) + y\left(y + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\right) = 2(x^2+y^2) \\ &\iff \quad y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} - x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = x^2+y^2 \\ &\iff \quad y^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{x}{y}\right) = x^2+y^2\,. \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires :

$$(\mathbf{R}) \iff \rho^2\,\sin^2\theta\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\operatorname{cotan}\theta) = \rho^2 \iff \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} = -1 \iff \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = -1\,.$$

Posons $\theta = \alpha + V$ (notation classique ; V est une mesure de l'angle que fait le vecteur tangent à Γ au point M avec le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, on sait que $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$ avec ici $\rho' = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$). Alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}) \quad &\iff \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 2 \iff V = 2\theta + \theta_0 \\ &\iff \quad \frac{\rho}{\rho'} = \tan(2\theta+\theta_0) \iff \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{cotan}(2\theta+\theta_0) \\ &\iff \quad \ln\left|\frac{\rho}{\rho_0}\right| = -\frac{1}{2}\,\ln|\sin(2\theta+\theta_0)| \end{aligned}$$

$$\iff \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{|\sin(2\theta + \theta_0)|}} \ .$$

Les courbes solutions du problème se déduisent de l'une d'entre elles par les similitudes de centre O. Il suffit donc de reconnaître la courbe Γ_0 d'équation polaire **(E)** : $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$. Or,

$$(\mathbf{E}) \iff \rho^2 \sin 2\theta = 1 \iff (x^2 + y^2)\,\frac{2xy}{x^2 + y^2} = 1 \iff 2xy = 1 \ .$$

Les courbes solutions sont donc les arcs d'hyperboles équilatères de centre O.

EXERCICE 4 :

Soit Γ un arc fermé simple de classe $\mathcal{C}^2$ birégulier, soit $r > 0$. On suppose qu'en tout point M de Γ, le rayon de courbure algébrique R vérifie $R \geq r$. Donner une minoration de la longueur de l'arc Γ. Dans quel cas la minoration obtenue est-elle une égalité ?

- -

Soit l la longueur de la courbe, on peut paramétrer Γ par une abscisse curviligne s décrivant $[0, l]$. En notant $\alpha = \alpha(s)$ l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{t})$, où $\overrightarrow{t}$ est le vecteur tangent unitaire orienté et $c(s)$ la courbure au point $M(s)$, on a $0 < c(s) \leq \dfrac{1}{r}$ et

$$\int_0^l c(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^l \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \alpha(l) - \alpha(0) \in 2\pi\,\mathbf{Z} \ ,$$

donc $\displaystyle\int_0^l c(s)\,\mathrm{d}s \geq 2\pi$ puisque la fonction $s \mapsto c(s)$ est strictement positive sur $[0, l]$. Mais on a aussi $\displaystyle\int_0^l c(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{l}{r}$, d'où l'inégalité $l \geq 2\pi r$.

Si $l = 2\pi r$, alors nécessairement $\displaystyle\int_0^l c(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi = \frac{l}{r}$ avec $c(s) \geq \dfrac{1}{r}$ sur l'intervalle $[0, l]$, ce qui entraîne que $R(s) = r$: le rayon de courbure est constant. L'arc Γ est alors un cercle de rayon r ; en effet, le centre de courbure K de Γ au point $M(s)$ vérifie $K = M + r\,\overrightarrow{n}$, donc (puisque $R(s) = r$ est constant) :

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dM}{ds} + r\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = \overrightarrow{t} + r\left(-\frac{\overrightarrow{t}}{r}\right) = \overrightarrow{0} \ :$$

le centre de courbure K est constant ; il est alors immédiat que le support de Γ est le cercle de centre K et de rayon r.

EXERCICE 5 :

L'espace euclidien orienté de dimension trois est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{T}$ le **tore** obtenu par rotation autour de l'axe Oz du cercle $\mathcal{C}$ d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$.

1. Écrire une représentation cartésienne de $\mathcal{T}$. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.

2. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{T}$ passant par l'origine.

3. Montrer que l'intersection avec $\mathcal{T}$ de l'un quelconque de ces plans est une réunion de deux cercles.

- -

1. Le cercle $\mathcal{C}$ admet pour équations $\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, d'où le paramétrage $\begin{cases} x = 2 + \cos\theta \\ y = 0 \\ z = \sin\theta \end{cases}$.

Par ailleurs, la rotation r_t d'axe Oz et d'angle t ($t \in \mathbb{R}$) admet pour expressions analytiques $\begin{cases} x' = x\cos t - y \sin t \\ y' = x \sin t + y \cos t \\ z' = z \end{cases}$. Le tore $\mathcal{T}$ est la réunion des images du cercle $\mathcal{C}$ par toutes les rotations r_t, d'où un paramétrage $\begin{cases} x = (2+\cos\theta)\ \cos t \\ y = (2+\cos\theta)\ \sin t \\ z = \sin\theta \end{cases}$.

Pour obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{T}$, on élimine les paramètres t et θ en écrivant que

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 5 + 4\cos\theta\ ,$$

ce qui élimine t, donc $\cos\theta = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2+z^2-5)$, puis

(E) $$\frac{1}{16}(x^2+y^2+z^2-5)^2 + z^2 = 1\ .$$

Nous avons ainsi prouvé que le tore $\mathcal{T}$ est inclus dans la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne **(E)**. Réciproquement, si les coordonnées (x, y, z) d'un point M vérifie **(E)**, il existe un réel θ tel que $\begin{cases} \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2-5) = \cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases}$, d'où l'on tire $x^2+y^2 = 5-\sin^2\theta+4\cos\theta = (2+\cos\theta)^2$, puis l'existence d'un réel t tel que $\begin{cases} x = (2+\cos\theta)\cos t \\ y = (2+\cos\theta)\sin t \end{cases}$ et $\mathcal{S}$ est confondue avec $\mathcal{T}$. Donc **(E)** est bien une équation cartésienne du tore $\mathcal{T}$.

2. Soit M le point de $\mathcal{T}$ de paramètres (t, θ). Un vecteur normal à $\mathcal{T}$ en M est

$$\vec{N} = \frac{\partial M}{\partial t} \wedge \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} (2+\cos\theta)\ \cos\theta\ \cos t \\ (2+\cos\theta)\ \cos\theta\ \sin t \\ (2+\cos\theta)\ \sin\theta \end{pmatrix}\ , \quad \text{colinéaire à} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta\ \cos t \\ \cos\theta\ \sin t \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

On vérifie en effet que tout point est régulier, c'est-à-dire que ce dernier vecteur n'est jamais nul. Une équation du plan tangent à $\mathcal{T}$ au point M est alors $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{MX}=0$ (où X est le point courant sur la tangente), soit

$$\big(x-(2+\cos\theta)\cos t\big)\cos\theta\cos t+\big(y-(2+\cos\theta)\sin t\big)\cos\theta\sin t+(z-\sin\theta)\sin\theta=0\ .$$

Ce plan passe par l'origine si et seulement si

$$-(2+\cos\theta)\cos\theta\cos^2 t-(2+\cos\theta)\cos\theta\sin^2 t-\sin^2\theta=0\ ,$$

soit $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$.

Les points du tore $\mathcal{T}$ en lesquels le plan tangent passe par l'origine sont donc situés sur deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ à l'intersection du tore $\mathcal{T}$ avec les plans horizontaux de cotes $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ respectivement, et qui ont pour équations $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t \\ z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Les plans tangents à $\mathcal{T}$ aux points du cercle $\mathcal{C}_1$ ont pour équations

$$\mathcal{P}_t\ :\qquad x\ \cos t+y\ \sin t-z\ \sqrt{3}=0\ .$$

On peut remarquer que les plans tangents à $\mathcal{T}$ aux points de $\mathcal{C}_2$ sont les mêmes puisque le plan $\mathcal{P}_t$ ci-dessus est tangent à $\mathcal{T}$ au point de paramètres $\left(t,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ sur $\mathcal{C}_1$, mais aussi au point de paramètres $\left(t+\pi,-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ sur $\mathcal{C}_2$.

3. Le plan $\mathcal{P}_t$ se déduit du plan $\mathcal{P}_0$ par la rotation d'axe Oz et d'angle t, il suffit donc d'étudier l'intersection du plan $\mathcal{P}_0\ :\ x-z\sqrt{3}=0$ avec le tore.

Pour cela, choisissons un repère orthonormal $\mathcal{R}'=(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ de sorte que les deux premiers vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ dirigent $\mathcal{P}_0$; on peut choisir

$$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{j}\ ;\quad \overrightarrow{J}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{i}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{k}\ ;\quad \overrightarrow{K}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{k}\ .$$

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, d'où les formules de changement de coordonnées $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,Y+\dfrac{1}{2}\,Z \\ y = X \\ z = \dfrac{1}{2}\,Y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,Z\end{cases}$. La courbe intersection du tore $\mathcal{T}$ avec le plan $\mathcal{P}_0$ admet alors pour équations dans le repère $\mathcal{R}'$: $\begin{cases} Z &= 0 \\ \dfrac{1}{16}\Big(\dfrac{3}{4}Y^2 + X^2 + \dfrac{1}{4}Y^2 - 5\Big)^2 + \dfrac{1}{4}Y^2 &= 1 \end{cases}$, soit, toujours avec $Z = 0$,

$$(X^2 + Y^2 - 5)^2 - 16 + 4Y^2 = 0\ ;$$

$$(X^2 + Y^2)^2 - 10X^2 - 6Y^2 + 9 = 0\ ;$$

$$(X^2 + Y^2 - 3)^2 - 4X^2 = 0\ ;$$

$$(X^2 + Y^2 - 2X - 3)(X^2 + Y^2 + 2X - 3) = 0\ :$$

on reconnaît bien, dans le plan $\mathcal{P}_0$, une réunion de deux cercles, chacun de rayon 2. Ces cercles sont les **cercles de Villarceau** du tore $\mathcal{T}$.