# Espaces vectoriels

## I Notion d'espace vectoriel

### I.1 Définition et premières propriétés

Les espaces vectoriels interviennent dans des contextes variés. Ce sont des ensembles d'objets qui peuvent être manipulés à l'aide de deux opérations fondamentales :

– l'addition de deux objets,
– le produit d'un objet par un nombre.

Le résultat de ces opérations est lui-même un objet de l'ensemble. Ces deux opérations vérifient les mêmes règles de calcul que celles qui s'appliquent aux vecteurs du plan ou de l'espace.

Déf. • Un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble $E$ :

- muni de deux opérations, aussi appelées lois :

une **addition :** et un **produit externe :**

$$+ : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (\vec{u},\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}+\vec{v}, \end{array} \qquad . : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha,\vec{u}) & \longmapsto & \alpha\,.\,\vec{u}. \end{array}$$

- où l'addition a les propriétés suivantes :

**1)** $+$ est commutative :
$\forall (\vec{u},\vec{v})\in E^2,\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$

**2)** $+$ est associative :
$\forall (\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in E^3,\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}).$

**3)** il existe un élément neutre pour $+$, noté $\vec{0}_E$ :
$\exists\, \vec{0}_E\in E,\ \forall \vec{u}\in E,\quad \vec{0}_E+\vec{u}=\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}_E.$

**4)** tout élément admet un symétrique pour $+$ :
$\forall \vec{u}\in E,\ \exists \vec{u}\,'\in E,\quad \vec{u}+\vec{u}\,'=\vec{0}_E=\vec{u}\,'+\vec{u}.$

- où la loi externe vérifie les propriétés :

**1)** 1 est neutre à gauche pour la loi externe :
$\forall \vec{u}\in E,\quad 1\,.\,\vec{u}=\vec{u}.$

**2)** . se distribue à droite sur $+$ :
$\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \forall (\vec{u},\vec{v})\in E^2,\quad \alpha\,.\,(\vec{u}+\vec{v})=(\alpha\,.\,\vec{u})+(\alpha\,.\,\vec{v}).$

**3)** $+$ se distribue à droite sur . :
$\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall \vec{u}\in E,\quad (\alpha+\beta)\,.\,\vec{u}=(\alpha\,.\,\vec{u})+(\beta\,.\,\vec{u}).$

**4)** associativité mixte :
$\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall \vec{u}\in E,\quad \alpha\,.\,(\beta\,.\,\vec{u})=(\alpha\beta)\,.\,\vec{u}=\beta\,.\,(\alpha\,.\,\vec{u}).$

**Vocabulaire :**

· Les éléments $\vec{u}$ de $E$ sont appelés **vecteurs de $E$.**
· Les éléments $\alpha$ de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires (ou nombres).**
· $\vec{0}_E$ est le **vecteur nul de $E$.**
· Le symétrique du vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$ et appelé **opposé du vecteur $\vec{u}$.**
· L'écriture $\vec{u}-\vec{v}$ est un raccourci pour $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Attention ❢ Quelques remarques quant au produit externe :

**1)** Il est le plus souvent implicite : $\alpha\,.\,\vec{u}$ sera simplement noté $\alpha\,\vec{u}$.

**2)** On écrit toujours le scalaire devant le vecteur : $\alpha\,\vec{u}$ et non $\vec{u}\,\alpha$.
Le symbole $\times$ est interdit.

**3)** Le produit externe n'est pas le produit scalaire. Il fait intervenir un nombre et un vecteur, alors que le produit scalaire concerne deux vecteurs. Nous en parlerons en fin d'année dans le chapitre *Espaces euclidiens*.

Propr. • Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels (**à bien connaître**)
Les ensembles suivants, munis de leur addition et de leur produit externe habituels, constituent des espaces vectoriels :

**1)** L'ensemble $\vec{\mathscr{P}}$ des vecteurs du plan et l'ensemble $\vec{\mathscr{E}}$ des vecteurs de l'espace sont de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

**2)** Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$ fixé,
$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**3)** Pour chaque couple $(n,p)$ d'entiers naturels non nuls,
l'ensemble de matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**4)** L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**5)** L'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{C})$ des suites complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**6)** Pour chaque ensemble non vide $A$ fixé, l'ensemble $\mathscr{F}(A,\mathbb{K})$ des fonctions définie sur $A$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**7)** Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels fixés, l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires définies sur $E$, à valeurs dans $F$, est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. (défini et étudié plus tard)

Démo. Nous admettrons que ces exemples vérifient les axiomes des espaces vectoriels.

Ex. ✻ Illustration de ces exemples fondamentaux sur les notes de cours : exemples de vecteurs, notations et forme générique ; définition de la somme et du produit externe ; vecteur nul et opposés.

Rem. ◇ Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on se restreint à n'utiliser que des scalaires réels : par exemple, on peut décider de voir $\mathbb{C}^2$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais dans ce cas l'écriture $(1+i).(1+i,\,2-i)$ n'a plus de sens. En revanche $-3\,.\,(1+i,\,2-i)$ est toujours autorisée.

Propr. • Propriétés calculatoires élémentaires
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs de $E$, $\alpha$ et $\beta$ deux scalaires. Alors :
**1)** Si $\vec{u}+\vec{w}=\vec{u}+\vec{w}$, alors $\vec{u}=\vec{v}$.
**2)** $0 \,.\, \vec{u}=\vec{0}_E$ et $\alpha \,.\, \vec{0}_E=\vec{0}_E$.
**3)** $\alpha \,.\, \vec{u}=\vec{0}_E \iff \alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}_E$.
**4)** $(-1) \,.\, \vec{u}=-\vec{u}, \quad (-\alpha) \,.\, \vec{u}=-\alpha \,.\, \vec{u}$,
$(\alpha-\beta) \,.\, \vec{u}=\alpha \,.\, \vec{u}-\beta \,.\, \vec{u}$,
$\alpha \,.\, (\vec{u}-\vec{v})=\alpha \,.\, \vec{u}-\beta \,.\, \vec{v}$.

Démo. Conséquences des axiomes des espaces vectoriels.

## I.2 Notion de sous-espace vectoriel

En pratique, on démontre rarement qu'un ensemble $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en revenant à la définition. On montrera plutôt que $F$ est un **sous-espace vectoriel** d'un des espaces vectoriels de référence.

Déf. • Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un ensemble.
On dit que **$F$ est un sous-espace vectoriel de $E$** quand :
**1)** $F$ est non vide : $F \neq \varnothing$.
**2)** $F$ est inclus dans $E$ : $F \subset E$.
**3)** $F$ est stable par $+$ : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \quad \vec{u}+\vec{v} \in F$.
**4)** $F$ est stable par $.$ : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in F, \quad \alpha \,.\, \vec{u} \in F$.

L'intérêt de cette notion est donné par la propriété suivante :

Propr. • Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$, muni des mêmes opérations que $E$, est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démo. Puisque $F \subset E$, les éléments de $F$ peuvent être additionnés (à l'aide de l'addition de $E$) et multipliés par des scalaires (à l'aide du produit externe de $E$). Le résultat de ces opérations reste dans $F$. On se convainc ensuite que tous les axiomes des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont vérifiés par $F$.

Ex. ✻ Exemples et contre-exemples de sous-espaces vectoriels :
**1)** $F=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x+y-z=0\}$,
**2)** $G=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x+y-z=1\}$, $H=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \geqslant 0\}$,
**3)** Sous espaces vectoriels du plan vectoriel $\vec{\mathscr{P}}$ : espace nul $\{\vec{0}\}$, droites vectorielles $\{\alpha \vec{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ où $\vec{u}_0$ est un vecteur fixé, plan $\vec{\mathscr{P}}$ tout entier.
**4)** $\mathscr{S}_0(\mathbb{C})$, l'ensemble des suites complexes tendant vers 0 en l'infini.

**Exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels (à connaître) :**

Propr. • Sous-espaces vectoriels triviaux
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $E$ et $\{\vec{0}_E\}$ (appelé **sous-espace vectoriel nul de $E$**) sont deux sous-espaces vectoriels de $E$.

Démo. Sur les notes de cours.

Attention Ne pas confondre le sous-espace vectoriel nul de $E$, noté $\{\vec{0}_E\}$ :
**1)** avec le vecteur nul $\vec{0}_E$ qui est un vecteur, et non un espace vectoriel ;
**2)** avec l'ensemble vide $\varnothing$, qui n'est pas un sous-espace vectoriel.

Propr. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Propr. • Espaces de fonctions
Soit $I$ un intervalle non réduit à un point, $n$ un entier naturel quelconque. Alors les ensembles $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont tous des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Démo. Sur les notes de cours.

## I.3 Propriétés des sous-espaces vectoriels

Propr. • Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors :
**1)** $\vec{0}_E$ (le vecteur nul de $E$) appartient à $F$.
**2)** Si $\vec{u} \in F$, alors $-\vec{u} \in F$ également.
**3)** $F$ est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs :

**4)** $F$ est stable par combinaison linéaire de $n$ vecteurs :

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ **1)** Retour sur $\mathscr{S}_0(\mathbb{R})$.
**2)** $F=\{P \in \mathbb{K}[X] \;/\; \deg(P)=n\}$ ;
**3)** $F=\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \;/\; 2x+y=1-i\}$.

Propr. • Caractérisation rapide des sous-espaces vectoriels
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un ensemble.
Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si :
**1)** $F$ est non vide : $F \neq \varnothing$.
**2)** $F$ est inclus dans $E$ : $F \subset E$.
**3)** $F$ est stable par combinaison linéaire :

**Deux nouveaux exemples fondamentaux (à connaître) :**

Propr. • L'ensemble des solutions d'un système **linéaire** **homogène** de $p$ équations à $n$ inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Propr. • Soit $E$ une équation différentielle d'ordre 1 ou 2, **linéaire**, **homogène** sur un intervalle $I$. L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**1)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors $F\cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$.

**2)** Si $F_1,F_2,\dots,F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, alors $\bigcap_{k=1}^{n} F_k$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. Ensembles des polynômes réels de degré inférieur à $n$ qui s'annulent en 2.

Attention Cela ne marche **pas du tout** avec les réunions ! Par exemple, dans $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, mais $F\cup G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x=0 \textbf{ ou } y=0\right\}$ n'en est pas un (pourquoi ?).

# II Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs

## II.1 Notion de combinaison linéaire

Déf. • Combinaison linéaire de vecteurs

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ des vecteurs de $E$.

Une **combinaison linéaire de $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$** est un vecteur de $E$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n \quad \text{où } (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n.$$

Ex. **1)** Exemples de combinaisons linéaires de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ : $2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$, $\vec{0}_E$.

**2)** Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1,X,X^2,\dots,X^n$.

***Exercice* 1** ► Dans $E=\mathbb{R}^3$, soit $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(0,1,2)$ et $e_3=(4,2,0)$.
Les vecteurs $u=(1,-1,-3)$ et $v=(2,0,1)$ sont-ils des combinaisons linéaires de $e_1$, $e_2$ et $e_3$ ?

**Écriture formelle :**

$$\vec{u} \text{ est combinaison linéaire de } \vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n \iff \exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\ \vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n.$$

## II.2 Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Déf. • Définition de **Vect($\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ des vecteurs de $E$.

**1)** On note **Vect($\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$)** l'ensemble comprenant toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ :

$$\mathbf{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{e}_k,\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\right\}.$$

**2)** On décide également, par convention, que **Vect(∅)** est le sous-espace nul de $E$ :

$$\mathbf{Vect}(\varnothing)=\left\{\vec{0}_E\right\}.$$

Propr. • (mêmes hypothèses que précédemment)

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de $E$. Alors :

$$\begin{aligned}&\vec{u}\in\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)\\ \iff\ &\vec{u} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{e}_1,\dots\vec{e}_n\\ \iff\ &\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\ \vec{u}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{e}_k.\end{aligned}$$

Ex. **1)** $\mathrm{Vect}(X+1,\ X^2+X+1)$ ;
**2)** $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ ;
**3)** $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Propr. • **Vect($\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$)** est un espace vectoriel

Si $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots\vec{e}_n$ sont des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Démo. Sur les notes de cours.

Cette propriété fournit une nouvelle méthode pour établir qu'un ensemble de vecteurs $F$ est un espace vectoriel : **l'écrire sous la forme $F=\mathrm{Vect}(\cdots)$.**

***Exercice* 2** ► Démontrer que les ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ :

**1)** $F=\left\{(a+2b)X^2+(b-c)X+a+b-c,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$,
**2)** $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=0 \text{ et } 2x+y+z=0\right\}$,
**3)** $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ 2x+y+z=0\right\}$.

**Propr.** • **Manipulations de la notation Vect**

Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

**1)** Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des **scalaires non nuls,**

$$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \mathrm{Vect}(\alpha_1 \vec{e}_1, \alpha_2 \vec{e}_2, \dots, \alpha_n \vec{e}_n)$$

(on peut multiplier les vecteurs par des constantes non nulles)

**2)** si $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, alors

$$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{u}) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n).$$

(on peut retirer/adjoindre un vecteur s'il est combinaison linéaire des autres)

**3)** Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$
et que $F$ contient les vecteurs $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n$, alors

$$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \subset F.$$

Démo. Sur les notes de cours.

*Exercice* **3** ► Dire de quels espaces ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels puis simplifier leur écriture :

**1)** $\mathrm{Vect}\big((\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (1,3,2), (-4,6,-2)\big)$.

**2)** $\mathrm{Vect}(1,\ 1+X,\ 1+2X-X^2)$.

# III Familles de vecteurs

Une **famille de vecteurs de *E*** est une liste finie et ordonnée de vecteurs de $E$, où les répétitions sont autorisées. Elle est entourée de parenthèses et les vecteurs qui la composent sont séparés par des virgules. La **famille vide,** notée $\varnothing$, ne contient aucun vecteur.

## III.1 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

**Déf.** • **Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$,
$\mathscr{G} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.

On dit que **$\mathscr{G}$ est une famille génératrice du s.e.v. $F$** si et seulement si :

**1)** chaque vecteur de la famille $\mathscr{G}$ se trouve dans $F$ :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \vec{e}_k \in F,$$

**2)** tout vecteur $\vec{u}$ de $F$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ :

$$\forall \vec{u} \in F,\ \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k.$$

Par convention, on décide que **la famille vide $\mathscr{G} = \varnothing$ est génératrice du sous-espace trivial $\{\vec{0}_E\}$.**

Attention ! Il faut toujours bien préciser de quel sous-espace vectoriel la famille considérée est génératrice.

Ex. **1)** Famille génératrice de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = y = z\}$.

**2)** Familles génératrices de $F = E = \mathbb{R}^2$ : $\mathscr{G}_1 = \big((1,0), (0,1)\big)$
et $\mathscr{G}_2 = \big((1,0), (0,1), (1,1)\big)$.

**3)** Familles génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$ : $\mathscr{G}_1 = (1, X, X^2)$
et $\mathscr{G}_2 = (X^2-1, X-1, X^2+X)$.

**Propr.** • **Lien entre familles génératrices et Vect($\cdots$)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$,
$\mathscr{G} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.

Alors la famille $\mathscr{G}$ est génératrice de $F$ si et seulement si $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. Famille génératrice de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2x + y - z = 0\}$.

Attention ! **Ne pas confondre les objets suivants :**

**1)** $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ : **un seul vecteur**

**2)** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \in E^n$ : **famille de vecteurs**

**3)** $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ : **sous-espace vectoriel.**

## III.2 Familles liées, familles libres

**Déf.** • **Famille liée**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
$\mathscr{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.

On dit que $\mathscr{F}$ **est une famille liée** s'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **non tous nuls** tels que

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}_E.$$

On considère par convention que **la famille vide $\varnothing$ n'est pas liée.**

Important « Non tous nuls » signifie qu'au moins un des scalaires est différent de 0.

Ex. **1)** Dans $E = \mathbb{R}^2$ : $\mathscr{F} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (2,-2)$.

**2)** Dans $E = \mathbb{R}^3$ : $\mathscr{F} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,-2,2)$, $e_2 = (1,-7,5)$
et $e_3 = (-4,-7,1)$.

**3)** Dans $E$ $\mathbb{K}$-e.v. quelconque : $\mathscr{F}_1 = (\vec{u},\ \vec{v},\ 2\vec{u} - \vec{v})$ et $\mathscr{F}_2 = (\vec{u},\ \vec{0}_E,\ \vec{v})$.

Déf. • Famille liée

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
$\mathscr{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
Alors la famille $\mathscr{F}$ est liée si et seulement un (au moins) de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Coroll. • Familles liées comportant peu de vecteurs

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ deux vecteurs de $E$. Alors :

**1)** La famille $(\vec{e}_1)$ est liée si et seulement si $\vec{e}_1 = \vec{0}_E$.

**2)** La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est liée si et seulement si $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont proportionnels.

Démo. ↪ Sur les notes de cours

Attention ❢ Ces raisonnements ne fonctionnent pas du tout pour des familles comportant trois vecteurs et plus.

Le contraire de la notion de famille liée est la notion de **famille libre.**

Déf. • Famille libre

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$,
$\mathscr{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
On dit que $\mathscr{F}$ **est une famille libre** si

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0}_E \implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Par convention, on considère que **la famille vide $\varnothing$ est libre.**

Ex. ✻ **1)** Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ où $e_1 = (2, 1, -1)$, $e_2 = (-1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ puis $\mathscr{F}' = (e_1, e_2)$.

**2)** Dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathscr{F} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Méth. • Tableau récapitulatif : pour voir si une famille est libre ou liée

Ce tableau est présenté sur les notes de cours.

Propr. • Propriété fondamentale des familles libres : identification des coefficients

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathscr{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
**Si $\mathscr{F}$ est une famille libre**, on peut identifier les coefficients dans deux écritures d'une combinaison linéaire de vecteurs de $F$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \ \ \alpha_k = \beta_k.$$

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Propr. • Une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre

Si $\mathscr{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes **non nuls** tels que

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n),$$

alors $\mathscr{F}$ est une famille libre.

Démo. ↪ Par récurrence sur le nombre de vecteurs ; sur les notes de cours.

## III.3 Bases d'un sous-espace vectoriel

Déf. • Base d'un sous-espace vectoriel

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$,
$\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de $E$.
On dit que **la famille $\mathscr{B}$ est une base de $F$** si $\mathscr{B}$ est simultanément une famille libre et une famille génératrice de $F$.

Ex. ✻ **1)** Deux bases de $\mathbb{R}^2$ : $\mathscr{B}_0 = \big((1,0), (0,1)\big)$ et $\mathscr{B} = \big((1,0), (-2,1)\big)$.

**2)** Base de $\mathbb{R}_2[X]$ : $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2)$.

Propr. • Bases canoniques (à connaître)

Les espaces vectoriels suivants : $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ admettent chacun une base usuelle qu'on appelle sa **base canonique.**

**1)** **Base canonique de $\mathbb{K}^n$ :** $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_k$ désigne le $n$-uplet $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, l'unique 1 étant placé à la $k$-ième position.
Cette base comporte $n$ vecteurs.

**2)** **Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ :** $\mathscr{B}_0 = (E_{k,\ell})$ où $(k, \ell)$ varie dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ ; chaque matrice $E_{k,\ell}$ est de taille $(n, p)$, est remplie de 0 à l'exception d'un unique 1 qui est placé à la position $(k, \ell)$.
Cette base comporte $n \times p$ matrices.

**3)** **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ :** $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
Cette base comporte $n + 1$ polynômes.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Propr. • Propriété caractéristique des bases

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$,
$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
Alors $\mathscr{B}$ est une base de $F$ si et seulement si :

**1)** tous les vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ se trouvent dans $F$ ;

**2)** tout vecteur de $\vec{u}$ peut s'écrire **de manière unique** comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

**Propr.** • Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$,
$\mathscr{B}$ une base de $F$, $\vec{u}$ un vecteur quelconque de $F$.

On appelle **coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$** l'unique $n$-uplet de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Ex. ✻ **1)** Dans $\mathbb{R}^2$, coordonnées du vecteurs $u = (5, -3)$ dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$.
**2)** Dans $\mathbb{C}_3[X]$, coordonnées du polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 3$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

Attention ❢ Quand on parle de coordonnées d'un vecteurs, **il faut toujours dire dans quelle base on travaille.**
Par ailleurs, ne jamais confondre :
**1)** un **vecteur $\vec{u}$** (élément de $E$)
**2)** avec ses **coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans une base $\mathscr{B}$** (élément de $\mathbb{K}^n$).

**Propr.** • Effet sur les coordonnées des opérations vectorielles

Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$,
$\mathscr{B}$ une base de $F$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $F$.

On suppose que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans la base $\mathscr{B}$
et que $\vec{v}$ a pour coordonnées $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dans cette même base.

Alors, dans la base $\mathscr{B}$, $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$
et $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda \alpha_1, \ldots, \lambda \alpha_n)$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Retour sur les exemples dans $\mathbb{R}^2$.

# IV Applications linéaires

## IV.1 Définition et propriétés immédiates

**Déf.** • Application linéaire

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,

**1)** Une **application linéaire de $E$ dans $F$** est une fonction $f : E \to F$ telle que

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

**2)** Un **endomorphisme de $E$** est une application linéaire de $E$ dans $E$
(application linéaire dans le cas particulier où $F = E$).

**3)** On note **$\mathscr{L}(E, F)$** l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ et **$\mathscr{L}(E)$** l'ensemble des endomorphismes de $E$.

Attention ❢ Ne pas dire « $f$ est stable par combinaison linéaire » : **seuls les ensembles de vecteurs peuvent être stables par une opération,** pas les fonctions.

Ex. ✻ **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x$ ;
**2)** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (2x + y,\ y - z)$ ;
**3)** $D : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X],\ P \mapsto P'$ ;
**4)** $T : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^t M$.

**Propr.** • Applications linéaires usuelles

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**1)** L'**application nulle :** $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{0}_F \end{array}$ est une application linéaire de $E$ dans $F$.

**2)** L'**identité de $E$**, $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u} \end{array}$ est un endomorphisme de $E$.

**3)** Pour tout scalaire $k \in \mathbb{K}^*$, l'**homothétie de rapport $k$**, $h_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{u} & \longmapsto & k\vec{u} \end{array}$ est un endomorphisme de $E$.

Démo. ☞ Exercice.

**Propr.** • Propriétés calculatoires des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ ($f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$). Alors :

**1)** $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
**2)** $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
**3)** $\forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$.
**4)** $\forall \vec{u} \in E,\ f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.
**5)** $\forall (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\vec{u}_k)$.

Démo. ☞ Exercice.

Ex. ✻ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 2$ n'est pas linéaire car $f(0) = 2 \neq 0$.

## IV.2 Applications linéaires et bases

**Propr.** • Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de l'espace de départ $E$,
$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de l'espace d'arrivée $F$.

Alors il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(\vec{e}_k) = \vec{u}_k.$$

Démo. ☞ Démonstration admise.

Important ✪ Deux implications pratiques :

**1)** L'existence permet de fabriquer une application linéaire entre deux espaces linéaires à partir d'une base de l'espace de départ et en choisissant à notre guise les futures images des vecteurs de la base par $f$.

**2)** L'unicité indique que si on connait l'effet d'une application linéaire sur une base de l'espace de départ, on connait cette application linéaire partout.

**3)** Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales partout.

Ex. ✻ $\mathbb{R}^2$ admet pour base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (1,2)$. $f$ étant l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $f(e_1) = 3X^3 - X + 1$ et $f(e_2) = X^2 - 2$ : on détermine $f\big((4,3)\big)$ puis $f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.

## IV.3 Noyau et image d'une application linéaire

Déf. • Noyau et image d'une application linéaire

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

**1)** On appelle **noyau de $f$** l'ensemble des antécédents du vecteur nul de $F$ par l'application $f$. On le note **Ker($f$).** Formellement :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{u} \in E \;/\; f(\vec{u}) = \vec{0}_F\right\}.$$

**2)** On appelle **image de $f$** l'ensemble comportant toutes les images par $f$ des vecteurs de $E$. On le note **Im($f$).** Formellement :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{u}),\ \vec{u} \in E\}.$$

Ex. ✻ Calcul de Ker($f$) et Im($f$) dans les cas suivants :

**1)** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y,\ y - z)$ ;

**2)** $\Delta : \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_2[X]$, $P \mapsto XP' - P$ ;

**3)** $h_k : E \to E$, $\vec{u} \mapsto k\vec{u}$ quand $k \neq 0$.

Propr. • Noyau et image sont des sous-espaces vectoriels

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

**1)** Ker($f$) est un sous-espace vectoriel de $E$ ;

**2)** Im($f$) est un sous-espace vectoriel de $F$.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E'$ un sous-espace vectoriel de $E$, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

**1)** $f$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{0}_E\right\}$,

**2)** $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Retour sur les exemples précédents.

## IV.4 Isomorphismes et automorphismes

Déf. • Isomorphismes et automorphismes

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**1)** Un **isomorphisme de $E$ dans $F$** est une application $f : E \to F$ qui est linéaire et bijective.

**2)** Un **automorphisme de $E$** est une application $f : E \to E$ (l'espace d'arrivée est le même que l'espace de départ) qui est linéaire et bijective.

**3)** L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé **groupe linéaire de $E$** et il est noté GL($E$).

Astuce Un **auto**morphisme est donc une application qui est à la fois un **endo**morphisme et un **iso**morphisme.

Rem. ◇ $f \in \mathrm{GL}(E)$ signifie que $f$ est un automorphisme de $E$ : c'est une application linéaire bijective de $E$ dans $E$.

Important ✪ Quand $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$, on peut parler de sa **bijection réciproque** $f^{-1} : F \to E$.

Ex. ✻ **1)** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -zX^2 + yX + 2x - 3z$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

**2)** L'identité de $E$, et plus généralement toutes les homothéties de rapport $k \neq 0$ de $E$ sont des automorphismes de $E$.

***Exercice* 4** ► Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires réelles $u$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

On pose l'application $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathscr{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1). \end{array}$

Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme de $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Propr. • La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Démo. Sur les notes de cours.

**Propr.** • Caractérisation des isomorphismes par les bases

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

**1)** $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ ;

**2)** $f$ transforme **une** base particulière $\mathscr{B}_0$ de $E$ en une base de $F$ ;

**3)** $f$ transforme **toutes** les bases de $E$ en des bases de $F$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Retour sur les exemples.

**Propr.** • Caractérisation algébrique des isomorphismes

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $g \in \mathscr{L}(F,E)$ vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$,
alors $f$ est un isomorphisme et $f^{-1} = g$.

Démo. Sur les notes de cours.

## IV.5 Opérations sur les applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, $E$, $F$, $G$ et $H$ désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels quelconques.

**Propr.** • Somme et produit par un scalaire d'applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

**1)** $f+g$ est une application linéaire : $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$.

**2)** $\lambda . f$ est une application linéaire : $\lambda . f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Démo. Sur les notes de cours.

**Thm** • **$\mathscr{L}(E,F)$ muni des opérations + et . est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**

Important ✪ Cela signifie qu'en ce qui concerne les opérations + et ., on calcule avec les applications linéaires comme s'il s'agissait de vecteurs.

Attention ❢ Toutefois, on ne peut additionner deux applications linéaires que si leurs espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes !

Rem. ◇ Le vecteur nul de $\mathscr{L}(E,F)$ est l'application nulle $0_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{0}_F. \end{array}$

On peut aussi composer deux applications linéaires lorsque leurs espaces de départ et d'arrivée s'enchaînent bien.

**Propr.** • Composée d'applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Rem. ◇ Par convention, on décide que la composition est une opération prioritaire sur l'addition et le produit externe : $\lambda . f \circ g + h$ signifie $\big(\lambda . (f \circ g)\big) + h$.

**Propr.** • Propriétés calculatoires de la composition

**1)** La composition est **associative** :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall g \in \mathscr{L}(F,G),\ \forall h \in \mathscr{L}(G,H),\quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

**2)** Les applications identités sont **neutres** pour la composition :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\quad \mathrm{Id}_F \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ \mathrm{Id}_E = f.$$

**3)** La composition se **distribue** à gauche et à droite sur l'addition :

$$\forall (f,g) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2,\ \forall h \in \mathscr{L}(F,G),\quad h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g,$$
$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall (g,h) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2,\quad (h+g) \circ f = h \circ f + g \circ f.$$

**4)** La composition **commute** avec le produit externe :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall g \in \mathscr{L}(F,G),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\quad (\lambda . g) \circ f = \lambda . (g \circ f) = g \circ (\lambda . f).$$

Démo. Pour la distributivité.

Important ✪ Pour les applications linéaires, + et $\circ$ se comportent comme + et × pour les nombres, à deux limitations importantes près :

**1)** On ne peut pas toujours composer une application par elle-même ;

**2)** La composition n'est pas commutative : la plupart du temps $f \circ g \neq g \circ f$.

***Exercice* 5** ► Développer prudemment l'expression $(2f+g) \circ (f-g+2\mathrm{Id}_E) + f \circ g$ où $f$ et $g$ sont deux applications linéaires pour lesquelles on précisera les contraintes sur les ensembles de départ et d'arrivée.

Les **endo**morphismes peuvent être composés entre eux sans crainte. Ils peuvent en particulier être composés avec eux-mêmes.

**Déf.** • Puissances d'endomorphismes

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^n$ par

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Attention ❢ $f^2(\vec{u})$ vaut $f \circ f(\vec{u}) = f\big(f(\vec{u})\big)$
et non $\big(f(\vec{u})\big)^2$ qui n'a aucun sens !

Ex. ✻ Si $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{C}[X])$ est la dérivation, calcul de $(\Delta^2 - 2\Delta + 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]})(P)$.

***Exercice* 6** ► Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$f^3 + 4f^2 + 2f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0.$$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et proposer une expression de $f^{-1}$.