

# 1 PRODUITS, CONJUGUÉS, MODULES

- 1) ⌚ Déterminer la forme algébrique et le module de :

$$\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}.$$

- 2) ⌚ On note  $h$  la fonction  $z \mapsto \frac{z+1}{z-2}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ . Déterminer l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  pour lesquels :

- 1)  $|h(z)| = 1$ . 2)  $\operatorname{Re}(h(z)) = 0$ .

- 3) ⌚ Montrer que pour tous  $u, v \in \mathbb{C}$  :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2),$$

puis interpréter géométriquement cette égalité.

- 4) 1) ⌚ Étudier les variations sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ .  
2) ⌚ En déduire que pour tous  $u, v \in \mathbb{C}$  :

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|} \leq \frac{|u|}{1+|u|} + \frac{|v|}{1+|v|}.$$

- 5) ⌚ 1) Déterminer une factorisation de  $a^2 + b^2$  dans  $\mathbb{C}$  pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$ .  
2) Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $m$  et  $n$  sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit  $mn$  l'est aussi.

- 6) ⌚ Simplifier :  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$  pour tout  $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ .

- 7) ⌚ Simplifier :  $\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$  pour tous  $r \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- 8) ⌚ Résoudre l'équation :  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}$ .

- 9) ⌚ Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  :

$$\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{\operatorname{Re}(z)+|z|}}\right)^2 = 2z.$$

- 10) 1) ⌚ Montrer que pour tous  $z, z' \in \mathbb{U}$  pour lesquels  $zz' \neq -1$  :  $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$ .

- 2) ⌚ Montrer que pour tous  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$  de même module :

$$\frac{(z_1+z_2)\dots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1\dots z_n} \in \mathbb{R}.$$

- 11) ⌚ Déterminer tous les  $z \in \mathbb{C}$  pour lesquels :

$$\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1).$$

## 2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

- 12) ⌚ Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

- 1)  $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$ .  
2)  $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ .  
3)  $z^2 + (4-3i)z = 2 + 8i$ .  
4)  $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$ .  
5)  $6z^2 + (21-14i)z + (5-37i) = 0$ .  
6)  $z^2 + 5z + 7 - i = 0$ .  
7)  $(z^2 - 2z)\cos^2 \varphi + 1 = 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ).

- 13) ⌚ Résoudre les systèmes suivants d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  :

- 1)  $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2. \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=13i. \end{cases}$   
3)  $\begin{cases} x+y=3i \\ xy=-1-3i. \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x+y=3i-3 \\ xy=-5i. \end{cases}$   
5)  $\begin{cases} x+y=3+4i \\ xy=5+15i. \end{cases}$

## 3 ARGUMENTS

- 14) ⌚ 1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants : a)  $1-\sqrt{2}$ . b)  $-5i$ .  
c)  $2-i$ . d)  $(-3+i\sqrt{3})^{19}$ . e)  $-\frac{1+2i}{3+4i}$ .  
2) Déterminer la forme algébrique de  $(1+i\sqrt{3})^{1000}$ .

- 15) ⌚ Déterminer tous les  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquels :  
1)  $(1+i)^n \in \mathbb{R}$ . 2)  $(\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbb{R}$ .

- 16) ⌚ Résoudre l'équation :  $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

- 17) ⌚ Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On pose :  $z = e^{i\theta}$ . Déterminer une forme trigonométrique de  $1+z+z^2$ .

- 18) ⌚ Soient  $a, b, c \in \mathbb{U}$ . Montrer qu'alors :

$$|a+b+c| = |ab+bc+ca|.$$

19

- 1) ⌚⌚ Montrer que pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , si on pose  $x = \tan \frac{\theta}{2}$ , alors :  $e^{i\theta} = \frac{1+ix}{1-ix}$ , puis exprimer  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  en fonction de  $x$ .
- 2) ⌚⌚ En déduire pour tout  $t \in \mathbb{R}$  une simplification de  $\cos(2 \operatorname{Arctan} t)$  et  $\sin(2 \operatorname{Arctan} t)$ .
- 3) ⌚⌚⌚ Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  de forme algébrique  $z = x + iy$  :

$$\arg(z) \equiv 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + |z|} [2\pi].$$

20

⌚⌚⌚⌚

- 1) Soient  $u, v \in \mathbb{U}$ . On suppose que  $u + v = -1$ . Montrer qu'alors :  $\{u, v\} = \{j, \bar{j}\}$ .
- 2) Soient  $a, b, c \in \mathbb{U}$ . On suppose que  $a + b + c = 0$ . Que peut-on dire du triangle de sommets  $a, b$  et  $c$  ?

## 4 APPLICATIONS TRIGONOMETRIQUES

21

⌚

- 1) Linéariser les expressions suivantes :  
a)  $\sin x \cos^2(2x)$ . b)  $\sin^3(2x) \cos(3x)$ .
- 2) Calculer les intégrales suivantes :  
a)  $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \sin(3x) dx$ .  
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$ .

22

⌚⌚

- 1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , exprimer  $\cos(5x)$  en fonction de  $\cos x$ .
- 2) En déduire une expression explicite de :  
a)  $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ . b)  $\cos \frac{\pi}{5}$ . c)  $\sin \frac{\pi}{5}$ .

23

⌚⌚

- 1) a) Résoudre l'équation :  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .  
b) Soit  $z$  une solution de cette équation. On pose :  $x = z + \frac{1}{z}$ . Montrer que  $x$  est solution d'une équation simple, puis la résoudre.
- 2) En déduire une expression explicite de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

24

⌚⌚

Simplifier pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

- 1)  $\sum_{k=0}^n \cos(kx + y)$ . 2)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ .

25

- 1) ⌚ Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|\sin x| \geq \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- 2) ⌚⌚ En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n |\sin k| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2 \sin 1}.$$

26

⌚⌚⌚⌚ Soient  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $x \in ]-1, 1[$ . Simplifier la

somme :  $\sum_{k=0}^n x^k \sin(\omega k)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puis mon-

trer l'égalité :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k \sin(\omega k) = \frac{x \sin \omega}{1 - 2x \cos \omega + x^2}$ .

27

⌚⌚⌚ Résoudre l'équation :

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## 5 EXPONENTIELLE COMPLEXE

28

Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

- 1) ⌚ a)  $e^z = 1 + i$ . b)  $e^z = -5 - 12i$ .
- 2) ⌚⌚ a)  $e^z + e^{-z} = 1$ .  
b)  $e^z + e^{-z} = 2i$ . c)  $e^z + 2e^{-z} = i$ .

29

⌚ On souhaite montrer que la fonction  $z \mapsto e^z$  possède des points fixes sur  $\mathbb{C}$ .

On note  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{\frac{x}{\tan x}} - \frac{x}{\sin x}$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

- 1) Que valent  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$  ?  
Montrer que :  $\exists b \in ]0, \frac{\pi}{2}[ / f(b) = 0$ .

- 2) On pose  $a = \frac{b}{\tan b}$  et  $z = a + ib$ . Montrer qu'alors  $e^z = z$ .

## 6 RACINES $n^{\text{ÈMES}}$

30

⌚⌚ Résoudre les équations suivantes d'inconnue

- 1)  $z \in \mathbb{C}$  :  $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$ .
- 2)  $z^6 - 2z^3 \cos \varphi + 1 = 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ).

31

Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $z$  — où  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- 1) ⌚ a)  $(z + 2)^3 = 3i$ .  
b)  $(z - 1)^4 = 4 + 4i$ . c)  $z^n + 1 = 0$ .
- 2) ⌚⌚ a)  $z^n = \bar{z}$ . b)  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ .

- 32** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , simplifier :
- 1)  $\odot$  a)  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ . b)  $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ .
- 2)  $\odot \odot$  a)  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$ . b)  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega-1|$ .

- 33**  $\odot \odot \odot$  Soit  $n \in \mathbb{N}$  IMPAIR. On pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \quad (\text{somme de Gauss}).$$

- 1) Écrire  $|S|^2$  comme une somme double, puis montrer que :  $|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$ .
- 2) a) Montrer que la fonction  $\begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{C} \\ p & \mapsto \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$  est  $n$ -périodique pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .  
b) En déduire pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  une écriture simplifiée de :  $\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$ .
- 3) Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ .
- 4) En déduire l'égalité :  $|S| = \sqrt{n}$ .

## 7 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

- 34**  $\odot$  On note  $A, B$  et  $C$  les trois points d'affixes respectifs :  $a = 1+i$ ,  $b = -i$  et  $c = -1+2i$ . Que peut-on dire du triangle  $ABC$  ?

- 35** À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $z$  :
- 1)  $\odot$   $z$  et  $z^2$  sont-ils les affixes de deux vecteurs :  
a) colinéaires ? b) orthogonaux ?
- 2)  $\odot$   $1, z$  et  $z^2$  sont-ils les affixes de trois points alignés ?
- 3)  $\odot$   $z$  et  $\bar{z}$  sont-ils les affixes de deux vecteurs orthogonaux ?
- 4)  $\odot$   $z, \frac{1}{z}$  et  $z-1$  sont-ils les affixes de points situés sur un même cercle de centre  $O$  ?
- 5)  $\odot \odot \odot$   $z$  et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en  $z$  ?

- 36** On note  $A$  le point d'affixe 1 et  $B$  le point d'affixe 5.
- 1)  $\odot$  Déterminer le lieu des points  $M$  pour lesquels :  
a)  $MA = MB$ . b)  $MB = MA\sqrt{2}$ .
- 2)  $\odot \odot$   
a) Montrer, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , que le lieu des points  $M$  pour lesquels :  $MB = \lambda MA$  est un cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

- b) Étudier l'allure des cercles trouvées en a) pour  $\lambda$  très grand (resp. proche de 0, resp. proche de 1 par valeurs inférieures, resp. proche de 1 par valeurs supérieures).

- 37**  $\odot$  1) Caractériser géométriquement la similitude :

$$z \mapsto 2(1+i)z - 7 - 4i.$$

- 2) Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre  $1+i$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{4}$ .
- 3) On note  $r$  la rotation de centre 1 et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  et  $s$  la symétrie centrale de centre  $3+i$ . Caractériser géométriquement la fonction  $s \circ r$ .
- 4) On note  $r$  la rotation de centre  $2+i$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$  et  $r'$  la rotation de centre  $3-2i$  et d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{3}$ . Caractériser géométriquement la fonction  $r' \circ r$ .

- 38**  $\odot \odot \odot$  Soit  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  fixé. Pour tout  $\alpha \in ]0, \pi[$ , on pose :  $z_\alpha = \frac{e^{i\alpha} - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$  et on note  $h$  la fonction

$$z \mapsto \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}.$$

- 1) Décrire l'ensemble des  $z_\alpha$ ,  $\alpha$  décrivant  $]0, \pi[$ .  
2) Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, \pi[$  :

$$h(z_\alpha) = i \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \theta}.$$

En déduire une description de l'ensemble des  $h(z_\alpha)$ ,  $\alpha$  décrivant  $]0, \pi[$ .

- 39**  $\odot \odot \odot$  Soient  $A, B$  et  $C$  trois points d'affixes respectifs  $a, b$  et  $c$ . Par définition, le triangle  $ABC$  est équilatéral si les distances  $AB, BC$  et  $CA$  sont égales, mais on admettra qu'il l'est si et seulement si, par exemple,  $C$  est l'image de  $B$  par une certaine rotation de centre  $A$  et d'angle de mesure à préciser.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $ABC$  est un triangle équilatéral.  
(ii)  $j$  ou  $j^2$  est racine du polynôme  $aX^2 + bX + c$ .  
(iii)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ .