

# Probabilités sur un univers fini

## Événements et langage ensembliste

### Exercice 1 [04003] [Correction]

Soient  $A, B, C$  trois événements d'un espace probabilisable. Exprimer les événements suivants :

- (a) Aucun des événements  $A, B$  ou  $C$  n'est réalisé.
- (b) Un seul des trois événements  $A, B$  ou  $C$  est réalisé.
- (c) Au moins deux des trois événements  $A, B$  ou  $C$  sont réalisés.
- (d) Pas plus de deux des trois événements  $A, B$  ou  $C$  sont réalisés.

### Exercice 2 [04004] [Correction]

Soient  $A, B, C$  trois événements.

- (a) Vérifier que  $(A \cup B) \cap C$  entraîne  $A \cup (B \cap C)$ .
- (b) À quelle condition sur  $A$  et  $C$  les deux événements précédents sont-ils égaux ?

## Construction d'une probabilité

### Exercice 3 [03821] [Correction]

Déterminer une probabilité sur  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  telle que la probabilité de l'événement  $\{k\}$  soit proportionnelle à  $k$ .

### Exercice 4 [03822] [Correction]

Déterminer une probabilité sur  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  telle que la probabilité de l'événement  $\{1, 2, \dots, k\}$  soit proportionnelle à  $k^2$ .

### Exercice 5 [03824] [Correction]

Soient  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $\Omega$  fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \overline{B} \neq \emptyset, \overline{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

À quelle condition sur  $(a, b, c, d) \in ]0; 1[^4$  existe-t-il une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  vérifiant

$$P(A|B) = a, P(A|\overline{B}) = b, P(B|A) = c \text{ et } P(B|\overline{A}) = d?$$

### Exercice 6 [03829] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé.

Montrer

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}.$$

## Probabilité par dénombrement

### Exercice 7 [03957] [Correction]

On dispose  $r$  boules à l'intérieur de  $n$  urnes (avec  $r \leq n$ ), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.

Les répartitions possibles sont équiprobables.

- (a) Déterminer la probabilité de l'événement :

$$A = \text{« chaque urne contient au plus une boule »}.$$

- (b) Déterminer la probabilité de l'événement :

$$B = \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules »}.$$

### Exercice 8 [03958] [Correction]

- (a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
- (b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

### Exercice 9 [04116] [Correction]

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion  $p$  et  $q$  (avec  $p + q = 1$ ). On opère à des tirages successifs avec remise.

- (a) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du  $n$ -ième tirage ?
- (b) Quelle est la probabilité que la  $k$ -ième boule blanche tirée apparaisse lors du  $n$ -ième tirage ?

### Exercice 10 [04120] [Correction]

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
- (b) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
- (c) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

## Probabilités conditionnelles

### Exercice 11 [ 03361 ] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) > 0$ . Comparer les probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B | A \cup B) \text{ et } P(A \cap B | A).$$

### Exercice 12 [ 03826 ] [Correction]

On considère  $N$  coffres. Avec une probabilité  $p$  un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert  $N - 1$  coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

### Exercice 13 [ 03831 ] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé. On suppose  $0 < P(B) < 1$ . Établir

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}).$$

### Exercice 14 [ 03841 ] [Correction]

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

- (a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
- (b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

### Exercice 15 [ 03955 ] [Correction]

Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

- (a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
- (b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

### Exercice 16 [ 04012 ] [Correction]

Soient  $A, B, C$  trois événements avec  $P(B \cap C) > 0$ . Vérifier

$$P(A|B \cap C)P(B|C) = P(A \cap B|C).$$

### Exercice 17 [ 04956 ] [Correction]

Une urne contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note  $T$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$  précisant le nombre de tirages alors effectués.

- (a) Proposer un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  modélisant cette expérience.
- (b) Calculer  $P(T = 2)$ .
- (c) Soit  $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ . Exprimer  $P(T > k | T > k-1)$ .
- (d) Donner une expression de  $P(T = k)$  pour tout  $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$

## Formule des probabilités totales

### Exercice 18 [ 03842 ] [Correction]

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

### Exercice 19 [ 03827 ] [Correction]

Une succession d'individus  $A_1, \dots, A_n$  se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».

Chaque individu  $A_k$  transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité  $p$  à l'individu  $A_{k+1}$  ou la transforme en son inverse avec la probabilité  $1 - p$ . Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

Calculer la probabilité  $p_n$  pour que l'information reçue par  $A_n$  soit identique à celle émise par  $A_1$ .

On suppose  $0 < p < 1$ . Quelle est la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers l'infini ?

## Événements indépendants

### Exercice 20 [03948] [Correction]

On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements

$A = \ll \text{on obtient le tirage } 2, 4 \text{ ou } 6 \gg$  et  $B = \ll \text{on obtient le tirage } 3 \text{ ou } 6 \gg$ .

### Exercice 21 [03951] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants. Les événements  $A$  et  $\overline{B}$  sont-ils aussi indépendants ?

### Exercice 22 [03953] [Correction]

Montrer qu'un événement  $A$  est indépendant de tout autre événement si, et seulement si,  $P(A) = 0$  ou  $1$ .

### Exercice 23 [03949] [Correction]

Soient  $A, B, C$  trois événements tels que  $A$  et  $B$  d'une part,  $A$  et  $C$  d'autre part, soient indépendants. Les événements  $A$  et  $B \cup C$  sont-ils indépendants ? Même question avec  $A$  et  $B \cap C$ .

### Exercice 24 [03950] [Correction]

Soient  $A, B, C$  trois événements tels que  $A$  et  $B \cup C$  d'une part,  $A$  et  $B \cap C$  d'autre part, soient indépendants. Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

### Exercice 25 [04033] [Correction]

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des  $A_i$  ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right).$$

### Exercice 26 [04946] [Correction]

On donne la décomposition en facteurs irréductibles d'un entier  $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

et note  $P$  la probabilité uniforme sur  $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

- Que définit la fonction d'Euler  $\varphi(n)$  ? Rappeler sa valeur.
- Soit  $d$  un diviseur de  $n$  et  $D(d)$  l'ensemble de ses multiples dans  $\Omega$ . Calculer  $P(D(d))$ .
- On note  $A$  l'ensemble des entiers de  $\Omega$  premiers avec  $n$  ; montrer

$$A = \bigcap_{k=1}^r \overline{D(p_k)}.$$

- Retrouver la valeur de  $\varphi(n)$ .

## Formule de Bayes

### Exercice 27 [03820] [Correction]

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.

Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

### Exercice 28 [03962] [Correction]

Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

- On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
- Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- (a)  $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ .
- (b)  $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ .
- (c)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ .
- (d)  $\overline{A \cap B \cap C}$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

- (a) En développant

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

- (b)  $A \cap C = A$  i.e.  $A \subset C$  est une condition évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

alors

$$A \subset A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \subset C.$$

### Exercice 3 : [énoncé]

Par hypothèse, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $P(\{k\}) = \alpha k$ . Or par additivité

$$\sum_{k=1}^n P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

### Exercice 4 : [énoncé]

Si  $P$  est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \alpha k^2.$$

En particulier,  $P(\Omega) = 1$  donne  $\alpha = 1/n^2$ .

Aussi,

$$P(\{k\}) = P(\{1, \dots, k\}) - P(\{1, \dots, k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.

On vérifie aussi par additivité

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

### Exercice 5 : [énoncé]

Soit  $P$  une probabilité solution. Posons

$$x = P(A \cap B), y = P(A \cap \overline{B}), z = P(\overline{A} \cap B) \text{ et } t = P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

On a  $x, y, z, t \geq 0$  et par additivité

$$x + y + z + t = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Inversement, si  $x, y, z, t$  sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints  $A \cap B$ ,  $A \cap \overline{B}$ ,  $\overline{A} \cap B$  et  $\overline{A} \cap \overline{B}$ , de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à  $x, y, z$  et  $t$  respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.

Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe  $x, y, z, t \geq 0$  de somme égale à 1 tels que

$$P(A|B) = a, P(A|\overline{B}) = b, P(B|A) = c \text{ et } P(B|\overline{A}) = d.$$

Par additivité

$$P(A) = x + y \text{ et } P(B) = x + z.$$

On a alors  $P(A|B) = a$  si, et seulement si,  $x = a(x+z)$ .

De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x+z)), x = c(x+y) \text{ et } z = d(1 - (x+y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d. \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c)+bc}, y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c)+bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c)+bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.

La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d).$$

La solution  $(x, y, z)$  alors obtenue vérifie  $x, y, z \geq 0$  et  $x + y + z \leq 1$  de sorte qu'on peut encore déterminer  $t \geq 0$  tel que  $x + y + z + t = 1$ .

Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par  $abcd$ , peut encore s'énoncer

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

### Exercice 6 : [énoncé]

On a  $A \cap B \subset A$  donc  $P(A \cap B) \leq P(A)$  et de même  $P(A \cap B) \leq P(B)$  donc

$$P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}.$$

Bien évidemment  $P(A \cap B) \geq 0$ . De plus  $P(A \cup B) \leq 1$  or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B).$$

### Exercice 7 : [énoncé]

En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application  $\varphi$  de  $\{1, \dots, r\}$  vers  $\{1, \dots, n\}$  associant à la boule d'indice  $i$  l'urne de numéro  $\varphi(i)$  qui la contient.

Il y a  $n^r$  répartitions possible.

- (a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction  $\varphi$  injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{n^r}.$$

- (b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A).$$

### Exercice 8 : [énoncé]

- (a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de  $k$  lancers est  $(5/6)^k$ . Il s'agit donc ici de trouver le plus petit  $k$  pour lequel  $(5/6)^k \leq 1/2$ . On obtient  $k = 4$ .
- (b) On veut  $(35/36)^k < 1/2$  et on obtient  $k = 25$ .

### Exercice 9 : [énoncé]

Notons  $A_i$  l'événement « une boule blanche est obtenue lors du  $i$ -ème tirage ». Les événements  $A_i$  sont mutuellement indépendants et  $P(A_i) = p$  pour tout  $i$ .

- (a) Notons  $B_n$  l'événement « la première boule blanche apparaît lors du  $n$ -ième tirage ».

On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$P(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

- (b) Notons  $C_{n-1}$  l'événement «  $k-1$  boules sont apparues lors des  $n-1$  premiers tirages » et  $D_n$  l'événement « la  $k$ -ième boule blanche tirée apparaît lors du  $n$ -ième tirage ».
- On a  $D_n = C_{n-1} \cap A_n$  et

$$P(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir  $k-1$  succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . Par indépendance, on conclut

$$P(D_n) = P(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Exercice 10 :** [énoncé]

- (a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres  $a, b, c$  dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à  $1/6$ .
- (b) Un tirage s'apparente à une fonction de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Il y a  $10^3$  fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a  $\binom{10}{3}$  possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

- (c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ . À une telle fonction  $f$ , on peut associer la fonction  $g: \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; 12 \rrbracket$  déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2.$$

La fonction  $f$  étant croissante, la fonction  $g$  est strictement croissante. Inversement, à une fonction  $g$  strictement croissante de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 12 \rrbracket$  correspond une unique fonction  $f$  croissante de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Il y a donc autant de fonctions croissantes de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 10 \rrbracket$  que de fonctions strictement croissantes de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1; 12 \rrbracket$  à savoir  $\binom{12}{3}$ . La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

**Exercice 11 :** [énoncé]

Puisque  $A \subset A \cup B$ , on a  $P(A \cup B) \geq P(A)$  puis

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

i.e.

$$P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A).$$

**Exercice 12 :** [énoncé]

Considérons l'événement  $A$  : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$P(A) = p.$$

Considérons l'événement  $A_i$  : un trésor est placé dans le coffre d'indice  $i$ . Par hypothèse  $P(A_i) = P(A_j)$  et puisque les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles

$$P(A_i) = p/N.$$

La question posée consiste à déterminer

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}).$$

On a

$$P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$P(A_N \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = P(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}.$$

**Exercice 13 :** [énoncé]

On a

$$P(A) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})).$$

Les événements  $A \cap B$  et  $A \cap \bar{B}$  étant disjoints

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Or  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$  et  $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})P(\bar{B})$ .

**Exercice 14 :** [énoncé]

- (a) L'événement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches. Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3} / \binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

- (b) Notons  $A$  l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$P(A) = \frac{9 \times 8 + 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

L'événement  $B$ , au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}.$$

### Exercice 15 : [énoncé]

- (a) Il y a  $\binom{52}{5}$  distributions possibles équiprobables.  
Il y a exactement  $\binom{4}{2}$  paires d'As,  $\binom{48}{3}$  façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.  
Au final, ce la donne la probabilité

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04.$$

- (b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

La probabilité conditionnelle cherchée est donc

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12.$$

### Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$P(A|B \cap C)P(B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B|C).$$

### Exercice 17 : [énoncé]

- (a) Quitte à poursuivre les tirages dans l'urne, on peut supposer que l'on tire exactement  $n+1$  boules dans celle-ci et on s'intéresse alors au rang d'apparition d'un premier tirage identique à l'un des précédents. Les tirages étant équiprobables, on considère  $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket^{n+1}$  muni de la probabilité uniforme.  
(b) Pour  $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , introduisons  $X_k$  la variable aléatoire déterminant le numéro de la boule obtenue lors du  $k$ -ième tirage : celles-ci sont mutuellement indépendantes car le tirage est supposé avoir lieu avec remise. L'événement  $T=2$  se confond avec  $X_1 = X_2$  qui est lui-même la réunion des  $(X_1 = i, X_2 = i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ . Ces derniers événements étant deux à deux incompatibles

$$P(T=2) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i)P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

- (c) L'événement  $(T > k-1)$  est de probabilité non nulle et correspond à l'obtention de valeurs deux à deux distinctes de  $X_1, \dots, X_{k-1}$ . Par conséquent,

$$P(T > k | T > k-1) = P(X_k \neq X_1, \dots, X_{k-1} | T > k-1) = \frac{n - (k-1)}{n}.$$

- (d) Pour  $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , on a par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P(T > k | T > k-1) = \frac{P(T > k, T > k-1)}{P(T > k-1)} = \frac{P(T > k)}{P(T > k-1)}$$

et donc

$$\begin{aligned} P(T > k) &= \frac{n - (k-1)}{n} P(T > k-1) = \dots \\ &= \underbrace{\frac{n - (k-1)}{n} \cdot \frac{n - (k-2)}{n} \dots \frac{n-1}{n}}_{k-1 \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}. \end{aligned}$$

Pour  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , on obtient

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(T > k-1) - P(T > k) \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{(k-1)n!}{(n-k+1)!n^k}. \end{aligned}$$

**Exercice 18 :** [\[énoncé\]](#)

Notons  $A_i$  l'événement la boule obtenue lors du  $i$ -ème tirage est noire.

On introduit un système complet d'événements en considérant  $B_1, \dots, B_4$  égaux à

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2.$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(A_3) = \sum_{k=1}^4 P(A_3 | B_k) P(B_k).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$P(A_3 | B_1) = 0.$$

$$P(A_3 | B_2) = P(A_3 | B_3) = 1/8 \text{ avec } P(B_2) = P(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$P(A_3 | B_4) = 2/8 \text{ avec } P(B_4) = 8/10 \times 7/9.$$

Au final

$$P(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

**Exercice 19 :** [\[énoncé\]](#)

On a  $p_1 = 1$  et  $p_2 = p$ .

Supposons connu  $p_n$ . Selon que  $A_n$  émet la même information que  $A_1$  ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n).$$

La suite  $(p_n)$  vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1-p.$$

Sachant la condition initiale  $p_1 = 1$ , cette suite arithmético-géométrique a pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}.$$

Si  $p \in ]0; 1[$  alors  $|2p-1| < 1$  et donc  $p_n \rightarrow 1/2$ .

**Exercice 20 :** [\[énoncé\]](#)

$P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/3$  et  $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$  donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Les événements  $A$  et  $B$  sont bien indépendants.

**Exercice 21 :** [\[énoncé\]](#)

Puisque  $A$  est la réunion disjointe de  $A \cap B$  et  $A \cap \bar{B}$ , on a

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

et donc

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

puis

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

Les événements  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Exercice 22 :** [\[énoncé\]](#)

Si  $A$  est indépendant de tout événement alors  $A$  est indépendant de lui-même et donc

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2.$$

On en déduit  $P(A) = 0$  ou  $1$ .

Inversement, supposons  $P(A) = 0$ . Pour tout événement  $B$ , on a  $A \cap B \subset A$  et donc  $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ . Ainsi

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B).$$

Supposons maintenant  $P(A) = 1$ . On a  $P(\bar{A}) = 0$  et donc  $\bar{A}$  est indépendant de tout événement  $B$ . Par suite,  $A$  est aussi indépendant de tout événement  $B$ .

**Exercice 23 :** [\[énoncé\]](#)

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\} \text{ et } C = \{2, 3\}.$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A)P(C).$$



Cependant

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cup C) = 1/4$$

et

$$P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cap C) = 1/12.$$

Ainsi,  $A$  et  $B \cup C$  ne sont pas indépendants. Non plus,  $A$  et  $B \cap C$ .

#### Exercice 24 : [énoncé](#)

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\} \text{ et } C = \{1, 2, 4\}.$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/3 = P(A)P(B \cup C) \text{ et } P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 = P(A)P(B \cap C).$$

Cependant

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4.$$

#### Exercice 25 : [énoncé](#)

On étudie

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right).$$

Par indépendances des  $\overline{A_i}$ , on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$

Or  $1 - x \leq e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \leq \prod_{i=1}^n e^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right).$$

#### Exercice 26 : [énoncé](#)

(a)  $\varphi(n)$  détermine le nombre d'entiers de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  premiers avec  $n$ . C'est aussi le nombre d'inversibles dans l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On sait

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(b) Il y a exactement  $n/d$  multiples de  $d$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , ce sont  $d, 2d, \dots, n$ . On en déduit  $P(D(d)) = 1/d$ .

(c) Les entiers  $\ell$  de  $\Omega$  premiers avec  $n$  sont tels que  $\ell \wedge n = 1$ , ils correspondent aux entiers qui ne sont divisibles par aucun des facteurs premiers de  $n$ .

(d) Les événements  $D(p_1), \dots, D(p_r)$  sont mutuellement indépendants car, si  $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r$ , on a

$$D(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = D(p_{i_1}) \cap \dots \cap D(p_{i_s})$$

et donc

$$P(D(p_{i_1}) \cap \dots \cap D(p_{i_s})) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_s}} = P(D(p_{i_1})) \times \dots \times P(D(p_{i_s})).$$

L'indépendance des  $D(p_1), \dots, D(p_r)$  entraîne celle des événements contraires  $\overline{D(p_1)}, \dots, \overline{D(p_r)}$  et donc

$$P(A) = \prod_{k=1}^r P(\overline{D(p_k)}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Aussi,

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et on retrouve la formule précédente.

#### Exercice 27 : [énoncé](#)

Notons  $\Omega$  la population,  $M$  le sous-ensemble constitué des individus malades et  $T$  celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4}, P(T|M) = 0,99 \text{ et } P(T|\overline{M}) = 10^{-3}.$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.

La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

**Exercice 28 :** [\[énoncé\]](#)

- (a) Notons  $D$  l'évènement le dé tiré est équilibré et  $A$  l'évènement : on a obtenu un « six »

$$P(D) = P(\overline{D}) = 1/2, P(A|D) = 1/6 \text{ et } P(A|\overline{D}) = 1/2.$$

Par la formule de Bayes

$$P(D|A) = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)}$$

avec par la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|\overline{D})P(\overline{D}).$$

On obtient

$$P(D|A) = \frac{1}{4}.$$

- (b) Notons  $B$  l'évènement : on a obtenu un « cinq » Par des calculs analogues aux précédents

$$P(D|B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}} = \frac{5}{8}.$$