Chapitre 8
Espaces préhilbertiens réels

1. Espaces préhilbertiens réels (rappels de M.P.S.I.)

1.1. Produit scalaire

- Définitions : produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien.

1.2. Norme euclidienne

a) Définition

b) Propriétés algébriques

- Savoir calculer sans hésiter $\|x+y\|^2$.
- Identités de polarisation.
- Identité du parallélogramme

c) Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité — Démonstration

- Exemples

d) Inégalité de Minkowski, dite aussi triangulaire

e) Bilan : $\| \ \|_2$ définit bien un norme.

1.3. Exemples

1.4. Orthogonalité

a) Définitions

- ❖ Vecteurs orthogonaux
- ❖ Famille orthogonale (resp. orthonormale) de vecteurs
- ❖ Sous-espace vectoriels orthogonaux

b) Propriétés

- Propriété 1 : toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre
- Propriété 2 : Théorème de Pythagore — Démonstration

c) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

- Définition : orthogonal d'un sous-espace vectoriel F
- Six propriétés à connaître

2. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

2.1. Le théorème fondamental en 4 points

Démonstration

- Exemple : si $F = Vect(a)$ et si a est unitaire : $p_F(x) = (a\,|\,x).a$

2.2. Exercice traité : optimisation

2.3. Inégalité de Bessel

a) Inégalité de Bessel amis aussi $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (e_i\,|\,x)^2 + d(x,F)^2$ Démonstration

b) Applications

- Distance d'un vecteur (*point*) à une droite (*affine*) de l'espace
- Distance d'un vecteur (*point*) à un hyperplan (*affine*)

2.4. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

- Connaître l'algorithme de construction et les formules :

$$f_k = u_k - p_{k-1}(u_k) = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k\,|\,e_i).e_i \quad \text{puis} \quad \boxed{e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}}$$

2.5. Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

a) Suites totales : définition

b) Théorème :

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'un espace préhilbertien E.
En notant p_n le projeté orthogonal de E sur $Vect(e_0, e_1, \dots, e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

c) Exemple de suites de polynômes orthogonaux

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien E

3.1. Définition

a) Isométrie : définition, quatre caractérisations Démonstration

b) Matrice orthogonale : définition, reconnaissance visuelle

c) Exemple : symétrie orthogonale

Propriété 1 : toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Propriété 2 : Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

u est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ A est symétrique et orthogonale

3.2. Groupe orthogonal

- $(O(E), \circ)$ est un groupe, $(O(n), \times)$ est un groupe
- $\Phi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} O(E) \to O(n) \\ u \to M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomprohisme de groupes
- Déterminant d'une isométrie, d'une matrice orthogonale.
- Groupe spécial orthogonal

3.3. Théorème de stabilité

- Si $u \in O(E)$ stabilise F, il stabilise aussi $F^{\perp}$. Démonstration

3.4. En dimension 2

3.5. Réduction

a) Spectres : Si $u \in O(E)$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1,1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(u) \subset U$ Démonstration

b) Théorème de réduction

Théorème : Si $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée de E pour laquelle

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

où $(p,q,s) \in \mathbb{N}^3 \,/\, p+q+2s = n$,

et $\forall i \in [\![1,s]\!] : \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

- **Démonstration admise**

3.6. En dimension 3

- Matrice réduite d'une isométrie directe
- Algorithmes : nature et éléments caractéristiques

4. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

4.1. Définition et première propriété

a) Définition : endomorphisme symétrique

b) Noyau et Image sont supplémentaires orthogonaux — Démonstration

4.2. Exemples : projecteurs orthogonaux, involutions orthogonales

Propriétés :

① Les seuls projecteurs symétriques sont les projecteurs orthogonaux.

② Les seules involutions symétriques sont les symétries orthogonales.

4.3. Lien avec les matrices symétriques

Théorème : Soient $\mathcal{B}$ une base orthonomée de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Alors : (u est symétrique) $\Leftrightarrow$ (A est une matrice symétrique) .

Démonstration

4.4. Théorème de stabilité

Proposition : Si s est un endomorphisme symétrique et que F est un sous-espace vectoriel stable par s, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par s.

Démonstration

4.5. Réduction : théorèmes spectraux

a) Lemmes fondamentaux

- Lemme 1 : Les valeurs propres sont réelles — Démonstration

- Lemme 2 : Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Démonstration

b) Théorème spectral pour les endomorphisme symétriques

Démonstration

c) Théorème spectral pour les matrices symétriques

Démonstration