

MP: Réduction

Coralie RENAULT

12 octobre 2014

Exercice

Question de cours : E espace vectoriel de dimension finie, quel est le nombre maximal de valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$? Pourquoi ?

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable.
- Diagonaliser A lorsque cette condition est satisfaite.

Exercice

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A .

- a) A est-elle diagonalisable ?
- b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice

Question de cours : Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Réciproque ?

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) A est-elle diagonalisable ?

b) Comment calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Montrer qu'un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\text{Im } p$ et $\ker p$ sont stables par f .

Exercice

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que tous ses coefficients soient égaux à 1. La matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer

$$0 \notin \text{sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

Exercice

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre.

Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f' .

Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.