Ensemble dénombrable, famille sommable des nombres complexes, séries entières

Coralie Renault

2 janvier 2015

Exercice

Etablir

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n!}$$

avec

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Exercice

Etablir que pour $x\in\,]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$

en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice

Existence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$$

Exercice

Une involution d'un ensemble E est une application $f:E\to E$ vérifiant $f\circ f=\mathrm{Id}_E$.
Pour $n\geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. On convient : $I_0=1$.
a) Montrer, si $n\geqslant 2$, que

$$I_n=I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}$$

b) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge si $x\in\,]-1,1[$.
On note $S(x)$ sa somme.
c) Montrer, pour $x\in\,]-1,1[$, que

$$S'(x)=(1+x)S(x)$$

d) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Exercice

Soit $\sigma : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une application bijective.
a) Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

b) Même question pour

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$$

Exercice

Déterminer le rayon de convergence de :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} n! z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \quad \text{d) } \sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$$

Exercice

On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.
b) Justifier la définition de f sur $]-1,1[$ puis calculer f.
c) Calculer $N(n,p)$.
d) Etudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \quad \text{d) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

Exercice

a) Etudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \text{ et } a_0 > 0$$

b) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
c) Etudier la convergence de $(\sum a_n x^n)$ sur le bord de l'intervalle de convergence
(on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^\star$.
Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n} \text{ ?}$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice

On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.
a) Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable.
c) L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?