Ensemble dénombrable, famille sommable des nombres complexes, séries entières

Coralie Renault

11 janvier 2015

Exercice

Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \text{sh}\,(\arcsin x)$$

Exercice

Vous jouez à pile ou face avec un ami. Il parie pile, lance la pièce et fait pile.Quelle est la probabilitée qu'il soit un tricheur ? On peut noter p la proportion de tricheur dans la pop

Exercice

a) Développer en série entière en 0 la fonction arcsin et préciser le domaine de convergence.
b) En étudiant

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

déterminer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ puis } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice

Une involution d'un ensemble E est une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}_E$.
Pour $n \geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$. On convient : $I_0 = 1$.
a) Montrer, si $n \geqslant 2$, que

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

b) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in \left]-1, 1\right[$.
On note $S(x)$ sa somme.

) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Exercice

Exercice (*Théorème de Bernstein*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u - v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. On va montrer que :

1. B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Pour cela :

— Soit $x \in [0,1]$ et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

— On définit la variance de X, lorsqu'elle existe, par : $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$. Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

— Montrer l'inégalité de Tchébytchev : Soit X une variable aléatoire réelle alors montrer que :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

— Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées tel que $Var(X_1)$ existe. Montrer que :

$$Var(S_n) = nVar(X_1)$$

— Calculer $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$

— Montrer que $\forall \delta > 0$ on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta)$$

— Conclure

Exercice

Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice

Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice

Une famille possède deux enfants.
a) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
b) Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
c) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?
d) On sait que l'un des deux enfants est un garçon est né un 29 février, quelle est la probabilité que le deuxième soit un garçon ?

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Reconnaître la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.
a) On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.
b) On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

Exercice

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?