Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel Sous-espaces vectoriels

▷ 1 Faire ses gammes

Pour chaque ensemble proposé :

- Donner l'espace vectoriel usuel dans lequel l'ensemble est inclus ;
- Déterminer si l'ensemble est un sous-espace vectoriel ou non (on apportera dans les deux cas des arguments qui règlent définitivement la question).

1) L'ensemble des suites réelles convergentes ;

2) L'ensemble des suites réelles bornées ;

3) L'ensemble des suites réelles qui tendent vers 1 ;

4) L'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0 ;

5) L'ensemble des suites réelles géométriques ;

6) L'ensemble des suites complexes géométriques de raison $\lambda \in \mathbb{R}$ fixée ;

7) L'ensemble des suites réelles récurrentes linéaires d'ordre 2 ;

8) L'ensemble des suites réelles négligeables devant $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

9) L'ensemble des suites réelles équivalentes à $\left(n!\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

10) L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré 2 ;

11) L'ensemble des polynômes à coefficients complexes admettant 1 et -1 commes racines ;

12) L'ensemble des polynômes à coefficients réels factorisables par X^2+1 ;

13) L'ensemble des polynômes P à coefficients réels de degré au plus égal à 4 et admettant 2 comme racine d'ordre supérieur à 2 ;

14) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x+2\,y=1\right\}$;

15) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x\,y=0\right\}$;

16) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 2\,x-y+z-2=0\right\}$;

17) L'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

18) L'ensemble des matrices échelonnées réduites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

19) L'ensemble des matrices échelonnées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

20) L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

21) L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

22) L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+3\,y'-2y=0$;

23) ... de l'équation différentielle $x\,y'=-3\,y$;

24) ... de l'équation différentielle $y'-\mathrm{e}^x\,y=2x$.

► 2 ♠ La réunion de deux s.e.v. donne rarement un s.e.v.

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Familles de vecteurs

▷ 3 De l'intérêt de Vect

Écrire les ensembles suivants sous la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$. En déduire qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel que l'on précisera. Déterminer ensuite une famille génératrice puis une base de ces ensembles.

1) $A=\left\{(a,\ a+b,\ b,\ b-a),\ \ (a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$;

2) $B=\left\{(2x+y+z,\ x+2y-4z,\ -x-y+z),\ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$;

3) $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 2x+3y-z=0 \ \text{ et } \ x-y+2z=0\right\}$;

4) $D=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;/\; x=y=2z\right\}$;

5) $E=\left\{\alpha X^3+(\beta-\gamma)X^2+(\alpha+2\beta)X-(\alpha+2\gamma),\ \ (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

6) $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \;/\; P(1)=P'(1)=0\}$;

7) $G=\left\{\begin{pmatrix} a+b & a-b+3c \\ 2a-c & 2b-a\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$;

8) $H=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \;/\; AM=MA\}$ où $A=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}$.

▷ 4

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$a=(-1,2,1),\ b=(0,1,-1),\ u=(1,0,-3),\ v=(-2,5,1).$$

1) Déterminer x pour que $(x,1,2)$ soit un élément de $\mathrm{Vect}(a,b)$.

2) Montrer que $\mathrm{Vect}(a,b)=\mathrm{Vect}(u,v)$.

▷ 5 On élimine

Soit $u=(2,-1)$, $v=(3,8)$ et $w=(1,0)$.

1) (u,v,w) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

2) Est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?

▷ 6 Bricolage interdit !

1) Déterminer les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 (on traitera la question à l'aide de la méthode du pivot de Gauss) :

a. $u_1=(-1,1,-2,3)$, $\quad u_2=(-2,1,-3,1)$, $\quad u_3=(0,1,-1,5)$, $\quad u_4=(1,-2,2,3)$;

b. $u_1=(1,2,-3,1)$, $\quad u_2=(-2,1,-1,3)$, $\quad u_3=(1,7,-10,6)$, $\quad u_4=(5,0,-1,-5)$.

2) Déterminer une base du s.e.v. engendré par u_1, u_2, u_3 et u_4.

► 7

Soit n un entier naturel non nul.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille libre de E. On pose

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} = \vec{e}_{n-1} - \vec{e}_n,\ \vec{u}_n = \vec{e}_n.$$

La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est-elle une famille libre ?
(commencer par une preuve avec points de suspension puis essayer de la réécrire plus rigoureusement)

▷ 8 Des sous-espaces vectoriels classiques de matrices

1) Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En fournir une famille génératrice, puis une base.
2) Même question pour les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3) Généraliser à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Combien les bases obtenues comportent-elles de matrices ?

▷ 9 Avec des polynômes…

Soit $P_1 = 2 + X,\ P_2 = -X + 2X^2$ et $P_3 = -X^2$.
1) (P_1, P_2, P_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?
2) Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme X dans cette base.

▷ 10 … des suites …

Montrer que dans l'espace vectoriel des suites réelles, si on pose

$$u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad v = (1)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad w = (2^n)_{n\in\mathbb{N}},$$

alors la famille $\big(u, v, w\big)$ est libre.

▷ 11 … et des fonctions

On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fontions réelles définies sur $\mathbb{R}$.
1) Soit $f : x \mapsto 1,\quad g : x \mapsto (\cos x)^2,\quad h : x \mapsto \cos(2x)$.
La famille (f, g, h) est-elle libre ?
2) Soit $f : x \mapsto x,\quad g : x \mapsto |x|,\quad h : x \mapsto 1 - x$.
La famille (f, g, h) est-elle libre ?
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^{x+k}$.
La famille $(e_0, \dots, e_n)$ est-elle libre ?
4) ♠ Même question avec $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

► 12

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On considère $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ trois vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Montrer que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une famille liée de vecteurs de E.

► 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ trois vecteurs de E, α, β, γ trois scalaires tels que

$$\alpha\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}.$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{z}) = \mathrm{Vect}(\vec{y}, \vec{z})$.

Applications linéaires

▷ 14 Sans malice

Justifier la linéarité ou la non-linéarité des applications suivantes :

1) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - 3y,\ x + y) \end{array}$
2) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,\ 3x) \end{array}$
3) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y,\ 1) \end{array}$
4) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + i\,y,\ i\,x - y) \end{array}$
5) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
6) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & xyz \end{array}$
7) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array}$
8) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & PP' \end{array}$
9) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
10) $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{S}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
11) $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) + 2 \end{array}$
12) $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f \circ \cos\,. \end{array}$

▷ 15

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

1) Calculer l'image de 1, X, X^2 et $2X^2 - 1$ par f.
2) Montrer que f est bien définie et qu'elle est linéaire.
3) Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, écrire $f(P)$ explicitement suivant les puissances décroissantes de X.
4) Déterminer le noyau et l'image de f.

► 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On pose, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\varphi(P) = P - P'$.
1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ tels que $\varphi(P) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
3) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

► 17

Soit $n \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés.
On pose $\Phi(P) = (X^2 + 1)P' + \lambda X P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
1) Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application Φ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
2) Déterminer si cet endomorphisme est un automorphisme.

► 18

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y,\ x + y) \end{array}$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Montrer que f est un isomorphisme et expliciter sa bijection réciproque.
3) Vérifier vos résultats.
4) Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que remarque-t-on ?

► 19 ♠ Où il faut connaître ses définitions

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{cases}$ où Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)$.

1) Justifier que l'application φ est bien définie puis montrer qu'il s'agit d'une application linéaire.

2) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

► 20

On considère les applications suivantes :

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P'. \end{array}$$

1) Montrer que u et v sont des applications linéaires.

2) Déterminer $v \circ u - u \circ v$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v \circ u^n - u^n \circ v = n u^{n-1}$.

Plus abstrait

▷ 21 De futurs bons amis

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que l'ensemble $P = \{\vec{x} \in E \,/\, f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ des vecteurs de E invariants par f est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On introduit $E_\lambda = \{\vec{x} \in E \,/\, f(x) = \lambda\,\vec{x}\}$. S'agit-il d'un sous-espace vectoriel de E ?

▷ 22 Foire aux noyaux et aux images

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :

- **a.** $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$;
- **b.** $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$;
- **c.** $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

2) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Démontrer l'équivalence :

$$\Big[\ \mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f\ \Big] \iff \Big[\ \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}\ \Big].$$

3) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$\Big[\ f \text{ et } g \text{ sont dans } \mathrm{GL}(E)\ \Big] \iff \left[\begin{array}{c} f \circ g \text{ et } g \circ f \\ \text{sont dans } \mathrm{GL}(E) \end{array}\right].$$

► 23 Là encore un grand classique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

(comment souvent, c'est facile une fois qu'on sait ce que l'on veut démontrer !)

► 24 ♠ Où l'ordre des quantificateurs est important

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *homothétie vectorielle de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

On souhaite montrer qu'un endomorphisme f de E est une homothétie vectorielle si et seulement si, pour tout $\vec{u} \in E$, la famille $\big(\vec{u}, f(\vec{u})\big)$ est liée.

On supposera dans cet exercice que E admet une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$.

1) Montrer l'une des deux implications.

On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $\big(\vec{u}, f(\vec{u})\big)$ est liée pour tout vecteur $\vec{u}$ de E.

2) Écrire formellement l'affirmation « f est une homothétie vectorielle de E ».

3) **a.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E quelconques. Montrer que

$$\big(\vec{u}, \vec{v}\big) \text{ est liée} \iff \vec{u} = \vec{0}_E \text{ ou } \exists\, \alpha \in \mathbb{K},\ \vec{v} = \alpha\,\vec{u}.$$

b. En déduire que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe une constante $\lambda_k \in \mathbb{K}$ telle que $f(\vec{e}_k) = \lambda_k\,\vec{e}_k$.

4) **a.** Soit $k \neq k'$ deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\lambda_k = \lambda_{k'}$ (on pourra calculer $f(\vec{e}_k + \vec{e}_{k'})$ de deux manières).

b. Conclure.