Calcul intégral

I Primitives

I.1 Notion de primitive

Déf. • Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une **primitive de f sur l'intervalle I** est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
1) F est dérivable sur I,
2) $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Par exemple, puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **la** dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \ln(x)$ est **une** primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Thm • Existence de primitives et unicité à constante près
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors :
1) Il existe **une** primitive F de f sur I.
2) **Les** primitives de f sur I sont les fonctions $F + C$, où C est une constante réelle.

Démo. **1)** Théorème admis (résultat de la théorie de l'intégration).
2) Sur les notes de cours.

Ainsi, les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(x) + k$, où k est une constante réelle.

I.2 Primitives usuelles

En lisant le tableau de dérivation « à l'envers », on obtient une liste de primitives usuelles à connaître qui est reproduite ci-contre. ►

Fonction f	Intervalle(s) I	Primitives F
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad \begin{pmatrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant 2 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C$
$x \mapsto x^\alpha \quad \begin{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha \neq -1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + C$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto x\ \ln(x) - x + C$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x) + C$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x) + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$x \mapsto \tan(x) + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\ \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	$]-1,1[$	$x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Démo. Démonstration pour $\ln(x)$, $\frac{1}{a^2+x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

***Exercice* 1** ► Déterminer l'expression d'une primitive de la fonction f quand

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^5}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}.$$

I.3 Opérations sur les primitives

On peut prolonger l'utilisation de cette table par quelques règles de calculs sur les primitives.

Thm • Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I,
F et G des primitives de f et g sur I,
λ une constante réelle. Alors :

1) Les primitives de $x \longmapsto f(x)+g(x)$
sont les fonctions $x \longmapsto F(x)+G(x)+C$ où $C \in \mathbb{R}$.

2) Les primitives de $x \longmapsto \lambda f(x)$
sont les fonctions $x \longmapsto \lambda F(x)+C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Démo. Sur les notes de cours, en dérivant les candidates primitives.

Attention ! Il n'y a pas de formule pour les primitives de $x \mapsto f(x)\times g(x)$. Calculer une primitive d'un produit (ou d'un quotient) peut être difficile, voire impossible.

***Exercice* 2** ► Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{3x^2+5}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-1}, \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+2}.$$

Thm • Soit f une fonction définie sur l'intervalle I,
φ une fonction dérivable sur l'intervalle J, à valeurs dans I,
F un primitive de f sur I.
Alors les primitives de $x \longmapsto f\big(\varphi(x)\big)\times\varphi'(x)$
sont les fonctions $x \longmapsto F\big(\varphi(x)\big)+C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Démo. Sur les notes de cours, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées.

Attention ! Il n'y a pas de formule pour les primitives de $x \mapsto f\big(\varphi(x)\big)$, et la présence de $\varphi'(x)$ en facteur est absolument indispensable.

Par exemple, une fonction g de la forme

$g(x)=\mathrm{e}^{\varphi(x)}\times\varphi'(x)$	aura pour primitives	$G(x)=\mathrm{e}^{\varphi(x)}+C$,
$g(x)=\cos\big(\varphi(x)\big)\times\varphi'(x)$	—	$G(x)=\sin\big(\varphi(x)\big)+C$,
$g(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	—	$G(x)=\ln\lvert\varphi(x)\rvert+C$,
$g(x)=\big(\varphi(x)\big)^n\times\varphi'(x)$	—	$G(x)=\frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1}+C$ etc.

***Exercice* 3** ► Déterminer, si c'est possible, l'expression d'une primitive de

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}, \quad t \mapsto \cos(\omega t+\varphi), \quad x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}, \quad x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x^2+1}.$$

On pourra retenir le cas, très courant, où φ est une fonction affine.

Coroll. • Soit f une fonction définie sur l'intervalle I,
$a \neq 0$ et b deux constantes réelles.
Alors les primitives de $x \longmapsto f(ax+b)$
sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Démo. Il suffit, là encore, de dériver la candidate primitive.

II Calcul intégral

II.1 Notion d'intégrale

Déf. • Intégrale d'une fonction continue sur un segment
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (on suppose donc que $a<b$).

1) L'**intégrale de la fonction f entre a et b** est l'aire algébrique de la région du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f, et entre les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Les parties au dessus de l'axe des abscisses étant comptées positivement, les parties en dessous, négativement.
Elle est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) L'**intégrale de f entre b et a** est, par convention, l'opposé de la précédente :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) L'**intégrale de f entre a et a** est nulle par convention :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Illustration

***Exercice* 4** ► Calculer $\int_{-1}^{2} 5\,\mathrm{d}x$, $\int_{1}^{3}(x-1)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **uniquement avec des considérations géométriques**.

Des propriétés intuitives du calcul d'aire, on déduit que le calcul d'intégrales est compatible avec les sommes et les produits par les constantes.

Propr. • Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I,
a et b deux éléments de I et λ une constante réelle. Alors :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Attention ! Il n'y a pas de formule simple pour $\int_a^b f(x)\times g(x)\,\mathrm{d}x$. Ce n'est **certainement pas** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Quand on souhaite calculer l'intégrale d'un produit, l'outil auquel penser est l'*intégration par parties* présentée plus loin dans ce cours.

II.2 Lien entre primitives et calcul intégral

Quand la courbe d'une fonction n'est pas simple, on ne peut pas calculer ses intégrales de manière immédiate. On peut en revanche utiliser un résultat fondamental reliant les intégrales aux primitives.

Thm • Théorème du calcul intégral

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I,
F une primitive quelconque de f sur I.

Alors pour tout $(a,b)\in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$

Démo. Théorème admis.

***Exercice* 5** ► Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Inversement, les primitives d'une fonctions peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales.

Thm • Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un point de I.
L'unique primitive de f qui s'annule en a est la fonction Φ définie par

$$\forall\, x\in I, \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démo. Théorème admis.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction Φ définie par

$$\forall\, x\in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et il s'agit de l'unique primitive de f telle que $\Phi(0)=0$. On ne peut pas calculer explicitement cette intégrale, mais on sait que $\Phi'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et que $\Phi(0)=0$ (le cours d'intégration du deuxième semestre permettra d'étudier d'autres propriétés de cette primitive Φ).

Notation symbolique des primitives
Lorsqu'on veut calculer une primitive d'une fonction f, on pourra utiliser l'écriture intégrale suivante, sans borne inférieure :

$$F(x) = \int^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On calcule avec cette intégrale comme avec des intégrales normales, à un détail près : le calcul d'un crochet introduit une constante C arbitraire.

Ex. ✻ Calculons une primitive quelconque de $f : x\mapsto x\cos(x^2)$:

$$F(x) = \int^x t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x (2t)\times\cos(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[\sin(t^2)\Big]^x = \frac{1}{2}\sin(x^2)+C \quad \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

***Exercice* 6** ► En utilisant la notation symbolique des primitives, déterminer les primitives de $f : x\mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

II.3 Intégration par parties

Les intégrales de produits ne sont pas toujours calculables. La formule d'intégration par parties permet dans certains cas de débloquer la situation.

Thm • Formule d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I,
a et b deux éléments de I.
Alors on a l'égalité suivante, appelée **formule d'intégration par parties :**

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice 7 ► **1)** Calculer $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

2) Déterminer les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ et de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'une intégration par parties.

II.4 Changement de variable dans une intégrale

Thm • Formule de changement de variable

Soit I un intervalle. Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que f est une fonction continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Important ✪ Pour appliquer cette formule efficacement, repérer les points suivants :

1) Chaque intégrale a une variable d'intégration différente, qui se trouve derrière le petit d. Ici il s'agit de x et de t. **Les deux variables d'intégration ne doivent pas apparaître dans une même intégrale.**

2) On a « posé » $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$. On retient par cœur la règle de substitution : $\mathbf{d}\boldsymbol{x = \varphi'(t)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}$.

3) **Les bornes des intégrales sont naturelles.** Dans la deuxième intégrale, t varie entre a et b. Puisque $x = \varphi(t)$, dans la première intégrale x varie entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Exercice 8 ► **1)** Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(u)}\,du$ au moyen du changement de variable $t = e^u$.

2) Calculer $J = \int_0^{1/2} \sqrt{1-s^2}\,ds$ par le changement de variable $s = \cos(\theta)$.

II.5 Primitives de $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$ où P est un polynôme de degré 2

On donne ici une méthode systématique de calcul de primitive de toute fonction de la forme

$$f:\ x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} \quad \text{où } a \neq 0.$$

Il s'agit d'utiliser le formulaire de primitives usuelles après avoir transformé habilement l'écriture de $f(x)$. La méthode diffère suivant le signe du discriminant du dénominateur.

- Cas du discriminant $\Delta > 0$

1) Factoriser le dénominateur de $f(x)$ en produit de deux polynômes du premier degré $P(x)Q(x)$. En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \frac{a}{P(x)} + \frac{b}{Q(x)}.$$

(on posera le problème proprement et on le résoudra par équivalences)

3) Utiliser les primitives $X \mapsto \frac{1}{X}$ pour conclure sur chaque intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$

- Cas du discriminant $\Delta = 0$

1) Factoriser le dénominateur de f. En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Utiliser les primitives de $X \mapsto \frac{1}{X^2}$ pour conclure sur chaque intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$.

- Cas du discriminant $\Delta < 0$

1) Mettre le dénominateur sous forme canonique : on écrira ainsi $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\big(\varphi(x)\big)^2 + a^2}$$

où φ est un polynôme de degré 1 et a une constante strictement positive.

2) Utiliser les primitives de $X \mapsto \frac{1}{X^2+a^2}$ pour conclure.

Exercice 9 ► Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{1}{2x^2-5x-3}, \quad g: x \mapsto \frac{1}{4x^2-12x+9} \quad \text{et} \quad h: x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+11}.$$

III Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants

L'objet de ce paragraphe est d'étudier les équations différentielles de la forme

$$(E) \quad \forall t \in I,\ y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$$

où y est la fonction inconnue, a et f deux fonctions connues continues sur un intervalle I. a est le **coefficient de l'équation différentielle**, f le **second membre.**

Il s'agit donc d'équations différentielles linéaires, du premier ordre, **à coefficients non constants.**

Remarque. Les méthodes vues dans le premier chapitre pour les équations différentielles à coefficients constants restent valables.

III.1 Résolution de l'équation différentielle homogène associée

Comme dans le cas des coefficients constants, on résout d'abord l'équation homogène associée $(H) \quad \forall t \in I, \quad y'(t) - a(t)\,y(t) = 0$

$$\iff \quad y'(t) = a(t)\,y(t).$$

Thm • Solutions de l'équation homogène

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I.
On note A une primitive de la fonction a sur I.
Alors l'équation différentielle homogène

$$(H) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) = a(t)\,y(t)$$

a pour ensemble de solutions

$$\mathscr{S}(H) = \left\{ y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{A(t)} \end{array}, \quad C \in \mathbb{K} \right\}.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Rem. ◇ Les fonctions solutions de cette équation homogène sont toutes multiples d'une même fonction, $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}$.

***Exercice* 10** ► Résoudre l'équation différentielle

$$(H) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) + t\,y(t) = 0$$

III.2 Équation différentielle avec second membre

L'ensemble des solutions d'une équation avec second membre s'obtient exactement comme dans le cas des équations à coefficients constants : ce sont les sommes d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation homogène associée.

Thm • Solutions de l'équation avec second membre

Soit a et f deux fonctions continues, définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t)$$

et on suppose que l'on connait une solution particulière y_E de cette équation.
Alors les solutions de l'équation (E) sont les sommes de cette solution particulière y_E et d'une solution de l'équation homogène associée (H) :

$$\mathscr{S}(E) = \left\{ y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto y_E(t) + C\,\mathrm{e}^{A(t)} \end{array}, \quad C \in \mathbb{K} \right\}$$

où A est une primitive de la fonction a sur l'intervalle I.

Démo. Sur les notes de cours.

La structure de cet ensemble est la même que dans le cas des équations à coefficients non constants car l'équation est *linéaire*. Pour la même raison, le principe de superposition reste vrai.

III.3 Méthode de variation de la constante

Reste à trouver une solution particulière y_E de l'équation. Pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on dispose d'une méthode universelle (quoique un peu lourde) : **la méthode de la variation de la constante**.

Cette méthode indique sous quelle forme chercher la solution particulière : on prend une solution générique de l'équation homogène, $t \mapsto C\,\mathrm{e}^{A(t)}$, et on fait *varier la constante,* c'est-à-dire qu'on cherche y sous la forme

$$y : t \longmapsto c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}, \quad c \text{ étant une } \textbf{fonction} \text{ inconnue à déterminer.}$$

En remplaçant y dans l'équation, on constatera toujours que les fonctions c convenables sont les primitives d'une fonction donnée.

***Exercice* 11** ► Résoudre l'équation différentielle $(E) \;\; \forall t \in \,]0, +\infty[\,, \; y'(t) + \dfrac{2}{t}\,y(t) = \dfrac{1}{t^3}$.

En appliquant cette méthode dans le cas général, on démontre que les équations différentielles linéaires du premier ordre admettent toujours au moins une solution.

Thm • Soit a et f deux fonctions **continues** définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t)$$

admet au moins une solution.

Démo. Sur les notes de cours.

Si, parmi les solutions d'une équations différentielle linéaire du premier ordre, on cherche celles qui satisfont une *condition initiale* (la valeur de la fonction inconnue en un instant t_0 est imposée), on trouvera toujours une unique solution.

Thm • Problème de Cauchy du premier ordre

Soit a et f deux fonctions continues sur l'intervalle I, $\quad t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} \forall t \in I, \; y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t) \\ \qquad y(t_0) = \alpha \end{cases}$

admet toujours une unique solution.

Démo. Sur les notes de cours.