MP Programme de colle n° 14

Exercices : Séries entières / Variables aléatoires

Avis aux colleurs : donner au moins un exercice sur les séries entières et un exercice sur les variables aléatoires. Merci !

Cours :

Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

1. Variables aléatoires discrètes
2. Lois de probabilité discrètes usuelles
3. Espérance (sauf § 3.5 Inégalité de Markov)

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes ou délicates)

1.1

Propriété Si X est une v.a.d. sur Ω, alors $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) :\ X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$

1.2

Propriété 1

P_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$

1.4

Proposition Soit X une variable aléatoire sur discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Soit une application $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$

Alors $u \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète notée abusivement $u(X)$ et dont la loi de probabilité est définie par :

$$\forall y \in (u \circ X)(\Omega) : \quad P(u(X) = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} P(X = x)$$

2.2.a

Proposition caractérisation comme **loi sans mémoire**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Il est équivalent d'écrire :

- ❖ X suit une loi géométrique
- ❖ $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \ :\ P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k)$

2.2.b

> <u>Théorème</u> **approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson**
>
> Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), alors
>
> $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \to +\infty} (P(X_n = k)) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

3.3.b

> <u>Proposition</u> : **Positivité (améliorée)**
>
> Soit X une variable aléatoire discrète et <u>positive</u> admettant une espérance finie. Alors :
>
> - $E(X) \geqslant 0$
> - $[E(X) = 0] \Leftrightarrow [P(X = 0) = 1]$ (X est dite presque sûrement nulle »

3.4 Espérance des lois usuelles suivantes

Loi suivie par X	Notation	$X(\Omega)$	Espérance de X
binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$E(X) = np$
géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$E(X) = \dfrac{1}{p}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$E(X) = \lambda$