Colles de mathématiques en PCSI 5

11 octobre 2011

On notera $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\}$.

Exercice n° 1

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$, avec $zz' \neq -1$. Prouver que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 2

Calculer pour $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)\ , \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice n° 3

1. Résoudre, selon le paramètre $\theta \in \mathbb{R}$, l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$z^2 - 2^{\theta+1}\cos(\theta)z + 2^{2\theta} = 0. \tag{1}$$

2. Soient A et B les points du plan complexe ayant les solutions de **??** comme affixe. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral.

Exercice n° 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Prouver l'équivalence

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Longleftrightarrow \mathcal{I}m(z) > 0.$$

En déduire que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ induit une bijection de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

Exercice n° 5

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc > 0$, et posons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\}$. On définit une application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien définie, c'est à dire que son expression a un sens en tout point de $\mathbb{H}$ et qu'elle est bien à valeur dans $\mathbb{H}$.

2. Vérifier que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

Exercice n° 6

[Constructibilité du pentagone régulier] Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. En utilisant la relation $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$, donner une équation du second degré dont $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. Expliquer alors comment tracer *à la règle et au compas* un pentagone régulier dans un cercle.

Exercice n° 7

Calculer pour $z \in \mathbb{C}$: $nz^{n-1}+(n-1)z^{n-2}+\cdots+2z+1$. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Exercice n° 8

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n}(1+\omega^k)^n.$$

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^n+2z^{n-1}+\cdots+2z^2+2z+1=0.$$

Exercice n° 10

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer en fonction de n

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X\ , \qquad \sum_{X,Y\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X\cap Y)\ .$$

Exercice n° 11

1. Exprimer en fonction de $n \geqslant 1$: $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. Prouver que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. En développant $(k+1)^4-k^4$, déduire de ce qui précède une expression de
$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$
4. Expliquer comment on peut calculer $\sum k^p$, $p\geqslant 1$, dans le cas général.

Exercice n° 12

Soit $n \geqslant 2$. Calculer

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)\ , \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij\ , \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\ .$$

Exercice n° 13

On calcule une somme en la transformant en *somme télescopique.*

1. Prouver que pour tout entier naturel k on a la relation

$$\frac{2k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}.$$

2. Simplifier l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}.$$

Exercice n° 14

[Passage du cartésien au polaire] Soit M un point du plan complexe, distinct de l'origine, dont l'affixe s'écrit $z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. Exprimer alors r en fonction de x, y, puis θ en fonction de $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, puis θ en fonction de $\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

On prendra bien garde au domaine de validité des relations mises en évidence.