

Calcul différentiel

Différentielle

Exercice 1 [00031] [Correction]

- (a) Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Justifier que f est différentiable et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \text{tr}(M^3)$.
Justifier que f est différentiable et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 [00035] [Correction]

Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 3 [00028] [Correction]

Justifier que la fonction $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 4 [00032] [Correction]

- (a) Justifier que l'application $\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.
- (b) Calculer sa différentielle en I_n puis en toute matrice M inversible.
- (c) En introduisant la comatrice de M , exprimer la différentielle de l'application \det en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 [00034] [Correction]

Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de $M \mapsto M^{-1}$.

Exercice 6 [00029] [Correction]

Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finies et $\varphi: E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire.

Établir que φ est différentiable et calculer sa différentielle $d\varphi$.

Exercice 7 [02904] [Correction]

Si $p \in \mathbb{N}$, soit

$$f_p: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- (a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
- (b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 8 [00037] [Correction]

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E .

- (a) Montrer que l'application $f: x \in E \mapsto (u(x)|x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
- (b) Montrer que l'application

$$F: x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{(u(x)|x)}{(x|x)}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie

$$dF(a) = \tilde{0} \iff a \text{ est vecteur propre de } u$$

Exercice 9 [00036] [Correction]

Soit $f: E \rightarrow F$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$.
Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 10 [03502] [Correction]

Soient $E = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, E^* le dual de E et

$$\mathcal{D} = \{d \in E^* \mid \forall (f, g) \in E^2, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$$

- (a) Montrer que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de E^* .
- (b) Montrer que \mathcal{D} est non réduit à $\{0\}$.
- (c) Soit $d \in \mathcal{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
- (d) Soit $f \in E$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Vérifier que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ est dans E .

(e) Soit $d \in \mathcal{D}$. Établir l'existence de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

(f) Déterminer la dimension de \mathcal{D} .

Exercice 11 [04145] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$f(M) = (\text{tr}(M), \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n))$$

- (a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M .
- (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dérivée selon un vecteur

Exercice 12 [01743] [Correction]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de \mathbb{R}^2 .
- (b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 13 [01744] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Calcul de dérivées partielles

Exercice 14 [01742] [Correction]

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = x^y$ (avec $x > 0$)

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = x \sin(x + y)$.

Exercice 15 [01745] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que f est continue en $(0, 0)$.

Étudier les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.

Exercice 16 [03348] [Correction]

Calculer les dérivées partielles de

$$f(x, y) = \min(x, y^2)$$

Exercice 17 [01746] [Correction]

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \varphi(y/x)$.

Montrer que f vérifie la relation :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 18 [02466] [Correction]

On considère

$$f: (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f .

(b) Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D .

Calcul de dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 19 [01756] [Correction]

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = x^2(x + y)$

(b) $f(x, y) = \cos(xy)$

Exercice 20 [01759] [Correction]

Soit f et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^2 et $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = f(x + \varphi(y))$$

(a) Justifier que F est de classe C^2 .

(b) Vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Exercice 21 [00049] [Correction]

Soient $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe C^2 et $g: (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Justifier que g est de classe C^2 et exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de g .

Exercice 22 [01760] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

(a) Justifier que g est de classe C^2 .

(b) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles de f .

Dérivées partielles de fonctions composées

Exercice 23 [01749] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

On pose $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1 + t^2)$.

Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice 24 [02903] [Correction]

Soient $(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

Calculer $g'(t)$.

Exercice 25 [01755] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$$

(a) Justifier que g est différentiable.

(b) Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 26 [00048] [Correction]

Soient $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ différentiable et $g: (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Justifier que g est différentiable et exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g .

Exercice 27 [01750] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(a) Justifier que g est différentiable.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

(b) Exprimer les dérivées partielles de g en (r, θ) en fonction de celles de f en (x, y) .

(c) Exprimer les dérivées partielles de f en (x, y) en fonction de celles de g en (r, θ) .

Exercice 28 [00043] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, x)$$

Quelle relation existe entre les dérivées partielles de f ?

Exercice 29 [01752] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

(a) On suppose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+t, y+t) = f(x, y)$$

Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

(b) Étudier la réciproque.

Exercice 30 [01753] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = f(x, y)$$

Montrer que

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 31 [00045] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

(a) Montrer que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

(b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que les dérivées partielles de f sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.

Exercice 32 [00046] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

(a) On suppose f homogène de degré α . Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

(b) Établir la réciproque.

Matrice jacobienne**Exercice 33** [01323] [Correction]

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique.

Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

Classe d'une fonction**Exercice 34** [01747] [Correction]

Étudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 35 [03802] [Correction]

On considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) f est-elle continue ?

(b) f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 36 [01758] [Correction]

On définit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est de classe C^1 .

(b) La fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 37 [02905] [\[Correction\]](#)

On pose

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls.La fonction f admet-elle un prolongement continue à \mathbb{R}^2 ? Un prolongement de classe C^1 ? de classe C^2 ?**Exercice 38** [01757] [\[Correction\]](#)Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- (b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 39 [00040] [\[Correction\]](#)Soit $f: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

- (a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0, 0)$?
- (b) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et, sans calculs, établir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

- (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 40 [00041] [\[Correction\]](#)Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

- (a) Déterminer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$. On prolonge F par continuité en $(0, 0)$ et on suppose de surcroît f de classe C^2 .

- (b) Justifier que F est différentiable en $(0, 0)$ et y préciser sa différentielle.

- (c) Montrer que F est de classe C^1 .

Exercice 41 [02460] [\[Correction\]](#)

On pose

$$\varphi(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \text{ pour } x \neq y$$

- (a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à \mathbb{R}^2 noté encore φ .
- (b) Montrer que φ est de classe C^1 puis C^∞ .

Exercice 42 [02906] [\[Correction\]](#)Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On pose

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x, x) = g'(x)$$

- (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0; 1]$.
- (b) En déduire que f est de classe C^1 .

Exercice 43 [01748] [\[Correction\]](#)Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_x^y \varphi(t) dt$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles premières.**Exercice 44** [00051] [\[Correction\]](#)Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On définit

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(x + 1, t) dt$$

Démontrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et préciser sa dérivée.

Exercice 45 [02907] [\[Correction\]](#)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n : (x, y) \mapsto \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}} x^n$$

On note D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge.
On pose

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

- (a) Déterminer D .
- (b) Montrer que $f|_D$ est de classe C^1 .

Gradient**Exercice 46** [00030] [\[Correction\]](#)

Soit E un espace vectoriel euclidien.

- (a) En quels points l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est-elle différentiable ?
- (b) Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 47 [03885] [\[Correction\]](#)

Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E .
On étudie la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}(u(x)|x) + (x_0|x)$$

- (a) Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
- (b) Calculer le gradient de f en tout point de E .

Exercice 48 [00033] [\[Correction\]](#)

- (a) Montrer que l'application $\Delta : A \mapsto \det A$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Calculer sa différentielle en commençant par évaluer ses dérivées partielles.
- (c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$.
Déterminer le vecteur gradient de Δ en A

Recherche d'extremum**Exercice 49** [01762] [\[Correction\]](#)

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
- (b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3$
- (d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Exercice 50 [00061] [\[Correction\]](#)

Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

Exercice 51 [02910] [\[Correction\]](#)

Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

Exercice 52 [02463] [\[Correction\]](#)

Déterminer les extremums de $x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 53 [02530] [\[Correction\]](#)

- (a) Étudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter
 $f(t) = t - \ln t - \frac{1}{t}$.
- (b) Résoudre $f(t) = 0$.
- (c) Trouver les extremums globaux et locaux de

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

Exercice 54 [00058] [\[Correction\]](#)

Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Exercice 55 [00059] [Correction]

Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Exercice 56 [00268] [Correction]

Déterminer

$$\sup_{(x,y) \in]0;+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

Exercice 57 [00065] [Correction]

Calculer

$$\inf_{x,y>0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right)$$

Exercice 58 [00070] [Correction]

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f: (x, y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice 59 [00071] [Correction]

Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 60 [03347] [Correction]

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle f(x), x \rangle > 0$$

(b) Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

Montrer que g admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur de \mathbb{R}^n et les expliciter.

(c) Montrer que g admet un unique point critique noté z .

(d) Montrer que g admet un minimum global en z .

Exercice 61 [00072] [Correction]

Soient U un ouvert convexe et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Montrer que tout point critique est un minimum global.

Extremum sur compact**Exercice 62** [00259] [Correction]

Déterminer le maximum de la fonction f définie sur le compact $K = [0; 1]^2$ donnée par

$$f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

Exercice 63 [03509] [Correction]

Déterminer les extrema de f sur D avec

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \text{ avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Exercice 64 [00063] [Correction]

Soit $f: (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

(a) Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T .

(b) Déterminer sa valeur.

Exercice 65 [00064] [Correction]

Soit \mathcal{D} l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geq 0, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$.

- (a) Montrer que \mathcal{D} est une partie compacte de \mathbb{R}^2 .
 (b) Soient $a > 0, b > 0, c > 0$ et $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$$

Montrer que f est continue sur \mathcal{D} .

- (c) Déterminer

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y)$$

Exercice 66 [00066] [Correction]

Déterminer

$$\sup_{[0;\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x + y)$$

Exercice 67 [00067] [Correction]

On note C le cercle trigonométrique.

Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur C ?

Exercice 68 [02911] [Correction]

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r .

Exercice 69 [03349] [Correction]

Soit (ABC) un vrai triangle du plan. Pour un point M du plan, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC$$

- (a) Étudier la différentiabilité de f .
 (b) En considérant le disque fermé de centre A et de rayon $AB + AC$, établir que f possède un minimum absolu dans le plan.
 (c) Soit T un point où ce minimum est atteint. On suppose que T n'est pas un sommet du triangle.

Établir

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} = \vec{0}$$

- (d) Montrer qu'alors le point T voit les sommets du triangle sous un même angle.

Exercice 70 [02465] [Correction]

Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal. Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Exercice 71 [04146] [Correction]

Soit f une fonction différentiable au départ de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que $df(x) \cdot x \geq 0$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \geq 1$.

Montrer que f admet un minimum absolu.

Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 72 [01763] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 73 [00044] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

Exercice 74 [01765] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \text{ via } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 75 [01764] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 76 [01766] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 77 [00080] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 78 [00076] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 79 [01768] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 80 [02461] [Correction]

Montrer que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est homogène de degré p si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n)$$

Exercice 81 [00047] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Montrer la constance de l'application suivante

$$\varphi: r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

Exercice 82 [03675] [Correction]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exprimer

$$\varphi: r \in [0; +\infty[\mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

Exercice 83 [03793] [Correction]

On étudie l'équation aux dérivées partielles

$$(E): x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

où la fonction inconnue f est de classe C^1 de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} .

(a) Montrer l'existence de solutions non nulles.

(b) Soit $g: t \mapsto f(tx, ty)$ avec (x, y) un couple de \mathbb{R}^2 .

Montrer que g est de classe C^1 et exploiter cette fonction pour résoudre l'équation (E).

Exercice 84 [02912] [Correction]

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

(b) Trouver toutes les $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 85 [02913] [Correction]

On note U l'ensemble des (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que $x > 0$ et $E = C^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

- (a) Déterminer $\ker \Phi$.
- (b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
- (c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x, y) associe $(x^2 + y^2)^{3/2} xy$.

Équations aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 86 [00081] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 87 [01769] [Correction]

Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: (x, t) \mapsto f(x, t)$ de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Exercice 88 [00082] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 89 [00084] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 90 [01778] [Correction]

[Fonctions harmoniques] Une fonction de classe C^2 est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est nul.

- (a) Montrer que si f est harmonique et de classe C^3 alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.
On suppose que $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.
- (b) Montrer que f est harmonique si, et seulement si, φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.
- (c) En résolvant cette équation, déterminer f .

Exercice 91 [00050] [Correction]

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et $g(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$.

- (a) Trouver une relation liant

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

- (b) Montrer que

$$\varphi: r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

est de classe C^2 sur \mathbb{R} et que $(r\varphi'(r))' = 0$

- (c) Conclure que φ est constante.

Exercice 92 [00056] [Correction]

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 < R^2$, on pose

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$$

Établir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 93 [01327] [Correction]

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \end{cases}$$

vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$$

Analyse vectorielle**Exercice 94** [01773] [Correction]

On appelle laplacien d'un champ scalaire F de classe C^2 le champ scalaire défini par

$$\Delta F = \operatorname{div}(\vec{\nabla} F)$$

- (a) Montrer

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

- (b) Exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M)$

- (c) Exprimer ΔF en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 95 [01774] [Correction]

Soit F un champ scalaire de classe C^1 de l'espace. Exprimer $\vec{\nabla} F(M)$ en fonction

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(M), \frac{\partial F}{\partial z}(M)$$

et des vecteurs du repère cylindrique associé au point M .

Exercice 96 [01775] [Correction]

Soit \vec{F} le champ de vecteurs du plan défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

- (a) Calculer $\operatorname{div} \vec{F}(M)$

- (b) Le champ de vecteurs \vec{F} dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 97 [01776] [\[Correction\]](#)

Soit \vec{F} le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.

- (a) Ce champ de vecteur dérive-t-il d'un potentiel ?
- (b) Calculer $\operatorname{div} \vec{F}(M)$ et $\operatorname{Rot} \vec{F}(M)$.

Exercice 98 [01777] [\[Correction\]](#)

Soit $\vec{\omega}$ un vecteur de l'espace et \vec{F} le champ de vecteurs de l'espace défini par

$$\vec{F}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- (a) Calculer $\operatorname{div} \vec{F}(M)$ et $\operatorname{Rot} \vec{F}(M)$.
- (b) Le champ de vecteur \vec{F} dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 99 [03799] [\[Correction\]](#)

On pose

$$\vec{\gamma}_1(t) = a(1-t)\vec{i} + bt\vec{j} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{\gamma}_2(s) = a \cos(s)\vec{i} + b \sin(s)\vec{j} \text{ avec } 0 \leq s \leq \pi/2$$

et le champ de vecteurs

$$\vec{V} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$$

- (a) Représenter les courbes paramétrées par $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$.
- (b) Le champ de vecteurs \vec{V} dérive-t-il d'un potentiel $U(x, y)$?
- (c) Calculer la circulation de \vec{V} selon $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$. Conclure.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) L'application $M \mapsto M^2$ est différentiable car polynomiale. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = MH + HM + H^2 = \varphi(H) + o(\|H\|)$$

avec $\varphi: H \mapsto MH + HM$ linéaire.

Par suite

$$df(M): H \mapsto HM + MH$$

- (b) L'application $M \mapsto M^3$ est différentiable car polynomiale et l'application $M \mapsto \text{tr}(M)$ est différentiable car linéaire.

Par opérations sur les fonctions différentiable, f est différentiable

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = \text{tr}(M^2H + MHM + HM^2) + \text{tr}(MH^2 + HMH + H^2M) + \text{tr}(H^3)$$

Posons $\varphi: H \mapsto \text{tr}(M^2H + MHM + HM^2) = 3 \text{tr}(M^2H)$.

φ est une application linéaire telle que :

$$f(M+H) - f(M) = \varphi(H) + \psi(H)$$

avec $|\psi(H)| \leq C \|H\|^2$ donc $\psi(H) = o(\|H\|)$.

Par suite

$$df(M): H \mapsto 3 \text{tr}(M^2H)$$

Exercice 2 : [énoncé]

Posons $f(P) = \int_0^1 P(t)^2 dt$. $f(P+H) = f(P) + 2 \int_0^1 P(t)H(t) dt + \int_0^1 H(t)^2 dt$.

Posons $\ell(H) = 2 \int_0^1 P(t)H(t) dt$ ce qui définit ℓ forme linéaire sur E .

En munissant E de la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, on observe $\left| \int_0^1 H(t)^2 dt \right| \leq \|H\|_\infty^2 = o(\|H\|)$.

Ainsi, la relation précédente donne $f(P+H) = f(P) + \ell(H) + o(\|H\|)$ ce qui assure que f est différentiable en P et $df(P): H \mapsto 2 \int_0^1 P(t)H(t) dt$.

Exercice 3 : [énoncé]

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $h \in \mathbb{C}$.

On peut écrire

$$f(a+h) - f(a) = \frac{-h}{a(a+h)} = \ell(h) + \alpha(h)$$

avec $\ell: h \mapsto -\frac{h}{a^2}$ linéaire et

$$\alpha(h) = \frac{-h}{a(a+h)} + \frac{h}{a^2} = \frac{h^2}{a^2(a+h)} = O(h^2) = o(h)$$

La différentielle de f en a est donc

$$\ell: h \mapsto -\frac{h}{a^2}$$

Exercice 4 : [énoncé]

- (a) \det est différentiable (et même de classe C^∞) car polynomiale en vertu de l'expression générale définissant le déterminant

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

- (b) $\det(I+H) = 1 + \varphi(H) + o(\|H\|)$ avec $\varphi = d_I(\det)$.

Pour $H = \lambda E_{i,j}$, on obtient

$$\det(I_n + \lambda E_{i,j}) = 1 + \lambda \delta_{i,j} = 1 + \lambda \varphi(E_{i,j}) + o(\lambda)$$

donc $\varphi(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$ puis

$$\varphi = \text{tr}$$

Soit M inversible.

$$\det(M+H) = \det M \det(I + M^{-1}H) = \det M + \det M \text{tr}(M^{-1}H) + o(H)$$

donc

$$d(\det)(M): H \mapsto \det M \text{tr}(M^{-1}H)$$

- (c) En M inversible

$$d(\det)(M): H \mapsto \det M \text{tr}(M^{-1}H) = \text{tr}({}^t \text{Com } M \cdot H)$$

Les applications $M \mapsto d(\det)(M)$ et $M \mapsto \text{tr}({}^t \text{Com } M \times \cdot)$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2 \underset{H \rightarrow O_n}{=} I_n + o(H)$$

donc

$$(I_n + H)^{-1} \underset{H \rightarrow O_n}{=} I_n - H + o(H)$$

d'où

$$d(M \mapsto M^{-1})(I): H \mapsto -H$$

On a aussi

$$(M + H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \underset{H \rightarrow O_n}{=} M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

donc

$$d(M \mapsto M^{-1})(M): H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$$

Exercice 6 : [énoncé]

On a

$$\varphi(a + h, b + k) = \varphi(a, b) + \varphi(h, b) + \varphi(a, k) + \varphi(h, k) = \varphi(a, b) + \psi(h, k) + o(\|(h, k)\|)$$

avec $\psi: (h, k) \mapsto \varphi(h, b) + \varphi(a, k)$ linéaire et $\varphi(h, k) = o(\|(h, k)\|)$ car $|\varphi(h, k)| \leq M \|h\| \|k\|$.
Par suite φ est différentiable en (a, b) et $d\varphi(a, b) = \psi$.

Exercice 7 : [énoncé](a) En polaires, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$f_p(x, y) = (\cos \theta + \sin \theta)^p r^p \sin \frac{1}{r}$$

Si $p \geq 1$ alors $|f_p(x, y)| \leq 2^p r^p \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0, 0)$.

Si $p = 0$ alors $f_0(x, y) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.

(b) On suppose $p \geq 1$.Pour $p = 2$:

$$f_2(x, y) = (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = O(\|(x, y)\|^2)$$

ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$.La fonction f_2 est donc différentiable en $(0, 0)$ de différentielle nulle.Pour $p > 2$:

$$f_p(x, y) = (x + y)^{p-2} f_2(x, y)$$

La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.Pour $p = 1$:Quand $h \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{h} (f_1(h, 0) - f_1(0, 0)) = \sin \frac{1}{h}$$

diverge. Ainsi f n'est pas dérivable en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 0)$, elle ne peut donc y être différentiable.

Exercice 8 : [énoncé](a) Pour $a, h \in E$,

$$f(a + h) - f(a) = (u(a)|h) + (u(h)|a) + (u(h)|h) = \ell(h) + o(\|h\|)$$

avec $\ell(h) = 2(u(a)|h)$ définissant une application linéaire et $(u(h)|h) = o(\|h\|)$ car $|(u(h)|h)| \leq \|u\| \|h\|^2$. Ainsi f est différentiable en tout $a \in E$ et

$$df(a): h \mapsto 2(u(a)|h)$$

(b) F est différentiable en tant que rapport défini de fonctions différentiables.

La formule

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

donne

$$dF(a): h \mapsto 2 \frac{(u(a)|h)}{(a|a)} - 2 \frac{(u(a)|a)(a|h)}{(a|a)^2} = 2(v(a)|h)$$

avec

$$v(a) = \frac{u(a)}{\|a\|^2} - \frac{(u(a)|a)}{\|a\|^4} a$$

Si $dF(a) = \tilde{0}$ alors $v(a) = 0$ et donc $u(a)$ est colinéaire à a .

La réciproque est aussi vraie.

Exercice 9 : [énoncé]

Remarquons

$$f(0) = f(0, 0) = 0, f'(0) = 0$$

et notons $\ell = df(0)$.

D'une part

$$f(\lambda x) = f(0) + \ell(\lambda x) + o(\lambda \|x\|)$$

et d'autre part

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

On en déduit

$$\lambda \ell(x) + o(\lambda \|x\|) = \lambda f(x)$$

En simplifiant par λ et en faisant $\lambda \rightarrow 0^+$, on obtient $f(x) = \ell(x)$.

Ainsi, l'application f est linéaire.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) immédiat.

(b) L'application $d_h: f \mapsto d_h f(0)$ fait l'affaire pour n'importe quel $h \in \mathbb{R}^n$ non nul.

(c) Si h est constante égale à λ alors pour toute fonction $f \in E$ on a par linéarité

$$d(fh) = \lambda d(f)$$

et par définition des éléments de \mathcal{D} ,

$$d(fh) = f(0)d(h) + \lambda d(f)$$

En employant une fonction f ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer $d(h) = 0$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, puisque la fonction $\varphi: t \mapsto f(tx)$ est de classe C^1 , on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

ce qui donne

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Soit K un compact de \mathbb{R}^n .

Toutes les dérivées partielles en x de $(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ sont continues sur $K \times [0; 1]$ donc bornées.

Par domination sur tout compact, on peut affirmer que la fonction

$$f_i: x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \text{ est de classe } C^\infty.$$

(e) Notons $p_i: x \mapsto x_i$.

Par linéarité de d , on a

$$d(f) = \sum_{i=1}^n d(p_i f_i) = \sum_{i=1}^n d(p_i) f_i(0)$$

car $d(f(0)) = 0$ et $p_i(0) = 0$.

En posant $a_i = d(p_i)$ et sachant

$$f_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

on obtient

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

(f) L'application qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe d_h est donc une surjection de \mathbb{R}^n sur \mathcal{D} . Cette application est linéaire et aussi injective (prendre $f: x \mapsto (h|x)$ pour vérifier $d_h = 0 \implies h = 0$) c'est donc un isomorphisme et

$$\dim \mathcal{D} = n$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'application $M \mapsto M^k$ est différentiable par produit de fonctions qui le sont. La trace étant linéaire, l'application composée $M \mapsto \text{tr}(M^k)$ est aussi différentiable. Enfin, ses différentes fonctions coordonnées dans la base de \mathbb{R}^n étant différentiables, l'application f est aussi différentiable.

Calculons la différentielle de f en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de limite la matrice nulle, on peut affirmer par développement

$$(M + H)^k = M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1} + o(H)$$

(le terme $o(H)$ regroupe tous les termes contenant au moins deux facteurs H).

Par linéarité de la trace et l'identité $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, on obtient

$$\text{tr}((M + H)^k) = \text{tr}(M^k) + k \text{tr}(M^{k-1}H) + o(H)$$

Ceci déterminer la différentielle de chacune des fonctions coordonnées de f .

Finalement, on peut exprimer l'action de la différentielle de f en M :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df(M) \cdot H = (\text{tr}(H), 2 \text{tr}(MH), \dots, n \text{tr}(M^{n-1}H))$$

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour calculer le rang de l'application linéaire $df(M)$, on détermine son noyau. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$df(M) \cdot H = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \text{tr}(M^{k-1}H) = 0$$

En introduisant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$$

on peut réinterpréter l'appartenance au noyau :

$$H \in \ker(df(M)) \iff H \in \text{Vect}(I_n, {}^tM, \dots, {}^t(M^{n-1}))^\perp$$

L'espace vectoriel engendré par les matrices $I_n, {}^tM, \dots, {}^t(M^{n-1})$ se confond avec l'espace des polynômes en la matrice tM . Cet espace a la dimension du degré du polynôme minimal de tM et ce dernier se confond avec le polynôme minimal de M . On en déduit

$$\dim \ker(df(M)) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \deg \pi_M$$

Par application de la formule de rang, on conclut

$$\text{rg}(df(M)) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \ker(df(M)) = \deg \pi_M$$

- (c) Soit une matrice $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n . Nous allons vérifier qu'il existe une boule centrée en M_0 dans laquelle les matrices ont leurs polynômes minimaux tous de degré n .

Par l'étude qui précède, la différentielle de f en M_0 est de rang n (autrement dit surjective). Si on introduit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , on peut assurer l'existence de matrices $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$(e_1, \dots, e_n) = (df(M_0) \cdot H_1, \dots, df(M_0) \cdot H_n)$$

Considérons ensuite l'application qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le déterminant dans la base canonique de la famille de vecteurs de \mathbb{R}^n :

$$(df(M) \cdot H_1, \dots, df(M) \cdot H_n)$$

Cette application est continue et prend la valeur 1 en M_0 . Il existe alors un voisinage de M_0 sur lequel cette application ne s'annule pas. En les matrices de ce voisinage, la différentielle de f est surjective et donc leurs polynômes minimaux sont de degré n .

Exercice 12 : [énoncé]

- (a) Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1}{t}(f(th) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$D_h f(0,0) = \begin{cases} \beta^2/\alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

- (b)

$$f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \rightarrow 1 \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 13 : [énoncé]

Quand $n \rightarrow +\infty$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)) = \frac{t^2\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^2/\beta & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 14 : [énoncé]

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x \cdot x^y.$$

$$(b) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$(c) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x+y) + x \cos(x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos(x+y).$$

Exercice 15 : [énoncé]

$$|f(x,y)| \leq |y| \frac{|x|}{|x|+|y|} \leq |y| \rightarrow 0$$

donc $f(x,y) \rightarrow 0$.

$$\frac{1}{h}(f(h,0) - f(0,0)) = 0$$

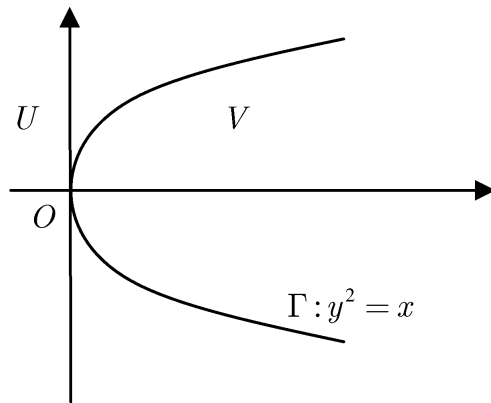
donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 16 : [énoncé]

La courbe Γ d'équation $y^2 = x$ est une parabole séparant le plan en deux portions ouvertes

$$U = \{(x,y) \mid x < y^2\} \text{ et } V = \{(x,y) \mid x > y^2\}$$

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Au voisinage de ce couple, $f(x,y) = x$ et donc



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Soit $(x_0, y_0) \in V$. Au voisinage de ce couple, $f(x, y) = y^2$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma$ (on a donc $x_0 = y_0^2$). Sous réserve d'existence

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0))$$

Pour $t > 0$,

$$\frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \frac{1}{t} (y_0^2 - y_0^2) = 0$$

et pour $t < 0$,

$$\frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \frac{1}{t} (x_0 + t - x_0) = 1$$

On en déduit que la première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) n'est pas définie.

Sous réserve d'existence

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0))$$

Si $y_0 \neq 0$ alors pour t du signe de y_0 ,

$$\frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \frac{1}{t} (x_0 - x_0) = 0$$

et pour t du signe opposé à celui de y_0 ,

$$\frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \frac{1}{t} ((y_0 + t)^2 - y_0^2) = 2y_0 + t$$

On en déduit que la deuxième dérivée partielle de f en (x_0, y_0) n'est pas définie.

Si $y_0 = 0$ (et alors $x_0 = 0$) alors pour tout $t \neq 0$

$$\frac{1}{t} (f(0, 0 + t) - f(0, 0)) = 0$$

donc la deuxième dérivée partielle de f en $(0, 0)$ est définie et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

Exercice 17 : [énoncé]

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \varphi'(y/x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \varphi'(y/x)$$

d'où la relation.

Exercice 18 : [énoncé]

- (a) Si $|y| \leq 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
 Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < |y|^2$ car
 $\frac{x^n}{1+y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$.

Finalement $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \max(1, y^2)\}$.

- (b) $u_n(x, y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0; 1[$ et $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a \max(1, y^2)\}$. Pour
 $(x, y) \in D_a$:

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right|$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right| \leq \frac{na^{n-1}}{1+y^{2n}} \leq na^{n-1}$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right| \leq \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}} \leq \frac{na^{n-1}}{y^2} \leq na^{n-1}$$

Dans les deux cas $\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| = \left| \frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2} \right| \leq \frac{2nx^n}{1+y^{2n}} \text{ car } \frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}} \leq 1$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{2na^n y^{2n}}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Dans les deux cas $\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0; 1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D .

Exercice 19 : [énoncé]

$$(a) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

$$(b) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2 \cos(xy), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin xy - xy \cos(xy) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \cos(xy).$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Par composition F est C^2 .

(b) Par calcul

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x + \varphi(y)), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \varphi'(y)f'(x + \varphi(y)),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x + \varphi(y)) \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \varphi'(y)f''(x + \varphi(y)).$$

Par suite l'égalité proposée est vérifiée.

Exercice 21 : [énoncé]

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) g est C^2 par composition.

(b) Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv, u^2 + v^2) + 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

$$+ 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv, u^2 + v^2) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = uv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv, u^2 + v^2) + 2(u^2 + v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

$$+ 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv, u^2 + v^2) + \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv, u^2 + v^2) + 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

$$+ 4v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv, u^2 + v^2) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Exercice 23 : [\[énoncé\]](#)

Par composition la fonction g est dérivable et

$$g'(t) = 2\partial_1 f(2t, 1+t^2) + 2t\partial_2 f(2t, 1+t^2)$$

Exercice 24 : [\[énoncé\]](#)

Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

Exercice 25 : [\[énoncé\]](#)

- (a) $(u, v) \mapsto (u^2 + v^2, uv)$ est différentiable de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 car à composantes polynomiales.

Par composition g est différentiable.

- (b)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, uv) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, uv)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2v \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, uv) + u \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, uv)$$

Exercice 26 : [\[énoncé\]](#)

Par composition de fonctions différentiables, g est différentiable

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Exercice 27 : [\[énoncé\]](#)

- (a) $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est différentiable donc g l'est aussi par composition.

- (b) Par dérivation de la composition $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

- (c) En résolvant le système formé par les deux équations précédentes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

avec $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exercice 28 : [\[énoncé\]](#)

Par dérivation de fonctions composées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(f(x, y)) = \frac{d}{dx}(f(y, x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

- (a) On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t = 0$.
- (b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On introduit la fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(x + t, y + t)$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(t) = 0$ en vertu de l'hypothèse de travail. On en déduit que la fonction φ est constante. L'identité $\varphi(t) = \varphi(0)$ produit celle voulue.

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t = 1$.

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

(a) En dérivant la relation $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ en la variable t

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = nt^{n-1} f(x, y)$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y)$$

(b) En dérivant la relation $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ en la variable x

$$t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^n \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

donc, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Cette identité se prolonge aussi en $t = 0$ grâce à la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On peut conclure que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de homogène de degré $n - 1$.

Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) En dérivant la relation $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ en la variable t :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

(b) Supposons que f vérifie l'équation proposée.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considérons $\varphi: t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

φ est dérivable et $t\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)$. Après résolution et puisque $\varphi(1) = 0$, on obtient

$\varphi(t) = 0$ et donc f est homogène de degré α .

Exercice 33 : [énoncé]

Notons f_1, \dots, f_n les fonctions composantes de f et d_1, \dots, d_n les opérateurs de dérivées partielles.

L'antisymétrie de la matrice jacobienne de f donne

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, d_i(f_j) = -d_j(f_i)$$

Exploitions cette propriété pour établir que les dérivées partielles de f sont constantes

Soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Par antisymétrie

$$d_k(d_j f_i) = -d_k(d_i f_j)$$

Par le théorème de Schwarz, puis par antisymétrie

$$d_k(d_j f_i) = -d_i(d_k f_j) = d_i(d_j f_k)$$

À nouveau par le théorème de Schwarz et par antisymétrie

$$d_k(d_j f_i) = d_j(d_i f_k) = -d_j(d_k f_i)$$

Enfin, en vertu du théorème de Schwarz, on obtient

$$d_k(d_j f_i) = 0$$

Ainsi toutes les dérivées partielles de $d_j f_i$ sont nulles et donc $d_j f_i$ est constante.

En posant $a_{i,j}$ la valeur de cette constante, on obtient

$$\text{Jac}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ antisymétrique}$$

Enfin en intégrant, on obtient

$$f(x) = Ax + b \text{ avec } b = f(0)$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Étudions la continuité en $(0, 0)$

$$f(x, y) = (xy) \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \left((x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

f est donc continue en $(0, 0)$.

Étudions l'existence de la dérivée partielle par rapport à x .

Par composition $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2}$$

et

$$\frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Enfin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

car

$$2xy^2 \ln(x^2 + y^2) = 2y \frac{xy}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur \mathbb{R}^2 .

Étudions l'existence de la dérivée partielles par rapport à y .

Comme $f(x, y) = f(y, x)$ l'étude de $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique.

(b) Soit $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = \begin{cases} t \sin 1/\sqrt{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+ et comme $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, f est continue sur \mathbb{R}^2 .

La fonction g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* donc f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Étudions l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$.

$$\frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = t \sin \frac{1}{|t|} = O(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe pas et vaut 0. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = \frac{2}{n} \sin n - \cos n$$

diverge quand $n \rightarrow +\infty$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) La fonction f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En passant en coordonnées polaires

$$f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow 0}{\sim} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r |\cos \theta| + |\sin \theta|} \rightarrow 0 = f(0, 0)$$

car le facteur

$$\frac{\cos \theta \times \sin \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}$$

est bornée en tant que fonction continue et 2π -périodique.

La fonction f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

(b) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

Or pour $x, y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y \cos(xy)(x + y) - \sin(xy)}{(x + y)^2}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, t) = \frac{2t^2 \cos(t^2) - \sin(t^2)}{(2t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$$

La fonction f n'est donc pas de classe C^1 .

Exercice 36 : [énoncé]

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Par opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

(b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

On en déduit que f n'est pas de classe C^2 car la conclusion du théorème de Schwarz n'est pas vérifié.

Exercice 37 : [énoncé]

En passant en coordonnées polaires, on écrit

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

On a alors

$$f(x, y) = r^2 \cos \theta \sin \theta \cos(2\theta) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

Ainsi f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Cependant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

La fonction f ne peut donc être de classe C^2 .

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Par composition f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

De plus

$$\frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

et

$$\frac{1}{t}(f(0, t) - f(0, 0)) = 0,$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Aussi

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |y| \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 2|y| \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 3|y| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} + 2|y| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Par suite f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

(b)

$$\frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = 1 \rightarrow 1$$

et

$$\frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 0 \rightarrow 0.$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1.$$

On en déduit que f n'est pas de classe C^2 le théorème de Schwarz n'étant pas vérifié.

Exercice 39 : [énoncé]

- (a) Quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on peut écrire $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.
On a alors

$$f(x, y) = 2r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \ln r \rightarrow 0$$

car $r^2 \ln r \rightarrow 0$

On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

- (b) f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations. On observe $f(x, y) = -f(y, x)$ donc en dérivant cette relation en la variable x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

- (c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on peut écrire $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4r \ln r + 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et par le résultat de b), on obtient le même résultat pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 40 : [énoncé]

- (a) Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in]0; x^2 + y^2[$ tel que
 $F(x, y) = f'(c)$.
Quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ alors $c_{x,y} \rightarrow 0$ puis $F(x, y) \rightarrow f'(0)$.
- (b) Par Taylor-Young :

$$F(x, y) = F(0, 0) + \frac{x^2 + y^2}{2} f''(0) + (x^2 + y^2) \varepsilon(x^2 + y^2) = F(0, 0) + \varphi(x, y) + o(x, y)$$

avec $\varphi = 0$.

Donc F est différentiable en $(0, 0)$ et $dF(0, 0) = 0$.

- (c) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} (f'(x^2 + y^2) - F(x, y)) = x(f''(0) + o(1)) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

et de même

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

donc F est de classe C^1 .

Exercice 41 : [énoncé]

- (a) On pose $\varphi(a, a) = -\sin a$ et on observe que $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(a, a)$ quand $(x, y) \rightarrow (a, a)$ avec $x \neq y$ et avec $x = y$.
- (b) En vertu de

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

on a

$$\varphi(x, y) = -\operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

avec sinc de classe C^∞ car développable en série entière.

Exercice 42 : [énoncé]

- (a) Puisque la fonction g est de classe C^1 , on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t) dt$$

Par le changement de variable $t = y + u(x - y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x - y) \int_0^1 g'(y + u(x - y)) du$$

Ainsi

$$f(x, y) = \int_0^1 g'(y + u(x - y)) du$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

L'application $\varphi: (x, u) \mapsto g'(y + u(x - y))$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) = ug''(y + u(x - y))$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en u

Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}$ assez grand pour que y en soit élément, on a

$$\forall x \in [a; b], \forall u \in [0; 1], y + u(x - y) \in [x; y] \subset [a; b]$$

La fonction g'' est continue donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ sur le segment $[a; b]$.

On a alors

$$\forall (x, u) \in [a; b] \times [0; 1], \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) \right| \leq M = \psi(u)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x, u) du$ est de classe C^1 et

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \varphi(x, u) du \right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) du$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 ug''(y + u(x - y)) du$$

De plus, la fonction $(x, y, u) \mapsto ug''(y + u(x - y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times [0; 1]$ et par une domination sur $[a; b] \times [a; b]$, on obtient la continuité sur \mathbb{R}^2 de l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$.

De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.

Exercice 43 : [énoncé]

Introduisons ϑ primitive de φ sur \mathbb{R} . ϑ existe et est de classe C^1 car φ est continue.

$$f(x, y) = \vartheta(y) - \vartheta(x)$$

donc par opérations f est de classe C^1 avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\vartheta'(x) = -\varphi(x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \vartheta'(y) = \varphi(y)$$

Exercice 44 : [énoncé]

On peut écrire

$$F(x) = \int_0^{x^3} f(x+1, t) dt - \int_0^{2x} f(x+1, t) dt = \varphi(x, x^3) - \varphi(x, 2x)$$

avec

$$\varphi(x, u) = \int_0^u f(x+1, t) dt = \int_0^1 uf(x+1, tu) dt$$

Fixons $u \in \mathbb{R}$ et considérons $g(x, t) = uf(x+1, tu)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$.

La fonction g est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$. La fonction f étant continue sur le compact $[a+1; b+1] \times [0; u]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$.

On a alors

$$\forall (x, u) \in [a; b] \times [0; u], |g(x, t)| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0; u]$ et donc, par intégration sur un segment, on obtient que la fonction $x \mapsto \varphi(x, u)$ est de classe C^1 et

$$\frac{d}{dx} (\varphi(x, u)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) = \int_0^1 u \frac{\partial f}{\partial x}(x+1, tu) dt$$

Ainsi φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et, une domination analogue à la précédente permet d'établir que cette fonction est continue en le couple $(x, u) \in \mathbb{R}^2$.

D'autre part, $u \mapsto \varphi(x, u)$ est évidemment dérivable et

$$\frac{d}{du} (\varphi(x, u)) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) = f(x+1, u)$$

Ainsi φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et celle-ci est clairement continue.

Finalement φ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Notons enfin que les dérivées partielles de φ sont continues en (x, u) et donc la fonction φ est de classe C^1 .

Puisque F est de classe C^1 .

Par dérivation de fonctions composées

$$F'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, x^3) + 3x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, x^3) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 2x) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, 2x)$$

Enfin

$$F'(x) = \int_{2x}^{x^3} \frac{\partial f}{\partial x}(x+1, t) dt + 3x^2 f(x+1, x^3) - 2f(x+1, 2x)$$

Exercice 45 : [énoncé](a) Cas $|x| < 1$:

$$|u_n(x, y)| = o(x^n)$$

donc la série $\sum u_n(x, y)$ est absolument convergente.Cas $|x| > 1$:Si la série $\sum u_n(x, y)$ converge alors $u_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\cos(ny) = u_n(x, y) \frac{\sqrt{n}}{x^n} \rightarrow 0$$

par croissance comparée.

Mais alors

$$\cos(2ny) = 2 \cos^2(ny) - 1 \rightarrow -1$$

ce qui est incohérent avec l'affirmation qui précède.

Ainsi la série $\sum u_n(x, y)$ diverge.Cas $x = 1$:Si $y = 0 \quad [2\pi]$ alors $u_n(1, y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1, y)$ diverge.Si $y \neq 0 \quad [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient la convergence de la série $\sum u_n(1, y)$.Cas $x = -1$:

On remarque

$$u_n(-1, y) = u_n(1, y + \pi)$$

Ainsi $\sum u_n(-1, y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi \quad [2\pi]$.

Finalement

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\} \cup \{(1, y)/y \neq 0 \quad [2\pi]\} \cup \{(-1, y)/y \neq \pi \quad [2\pi]\}$$

(b) L'intérieur de D est alors

$$D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$$

Soient $a \in [0; 1[$ et $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a\}$. u_n est de classe C^1 sur D_a et la série de fonctions $\sum u_n(x, y)$ converge simplement sur D_a .La série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq \sqrt{n} a^{n-1}$$

Enfin, la série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \sqrt{n} a^n$$

On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que

$$(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y)$$

admet deux dérivées partielles continues sur D_a . C'est donc une fonction de classe C^1 sur D_a . Enfin, ceci valant pour tout $a \in [0; 1[$, on obtient une fonction de classe C^1 sur l'intérieur de D .**Exercice 46 : [énoncé]**(a) Pour $x = 0$, $\frac{1}{t} (\|0 + t.h\| - \|0\|) = \frac{\|h\|}{t}$ n'a pas de limite en 0. Par suite $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0.Pour $x \neq 0$,

$$\|x + h\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x|h) + \|h\|^2} = \|x\| \sqrt{1 + 2 \frac{(x|h)}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}} = \|x\| + \frac{(x|h)}{\|x\|} + o(h) \text{ donc } \|\cdot\|$$

est différentiable en x et de différentielle $h \mapsto \frac{(x|h)}{\|x\|}$.(b) Le vecteur gradient en $x \neq 0$ est $x/\|x\|$.**Exercice 47 : [énoncé]**(a) Soit $a \in E$. On peut écrire

$$f(a + h) = \frac{1}{2} ((u(a)|a) + (u(a)|h) + (u(h)|a) + (u(h)|h)) + (x_0|a) + (x_0|h)$$

Sachant $(u(h)|a) = (u(a)|h)$, on obtient

$$f(a + h) = f(a) + \ell(h) + (u(h)|h)$$

avec ℓ la forme linéaire donnée par

$$\ell(h) = (u(a) + x_0|h)$$

Puisque

$$|(u(h)|h)| \leq \|u(h)\| \|h\| \text{ avec } \|u(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0$$

on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$f(a + h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$$

Finalement f est différentiable en a et

$$df(a).h = (u(a) + x_0|h)$$

(b) Le gradient de f en a est alors

$$\text{grad } f(a) = u(a) + x_0$$

Exercice 48 : [énoncé]

Notons $A = (a_{i,j})$

(a) Puisque

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

la fonction Δ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par somme et produit de fonctions qui le sont (à savoir les application linéaires $A \mapsto a_{i,j}$).

(b) En développant le déterminant selon la i -ème ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

avec $A_{i,j}$ cofacteur d'indice (i, j) . On en déduit.

$$\partial_{(i,j)} \Delta(A) = A_{i,j}$$

Par conséquent la différentielle de Δ en A est

$$d\Delta(A): H \mapsto \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} h_{i,j}$$

(c) On observe

$$d\Delta(A) \cdot H = \text{tr}({}^t \text{Com}(A)H) = \langle \text{Com}(A), H \rangle$$

Le vecteur gradient de Δ en A est donc $\text{Com}(A)$.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Point critique $(0, 3)$, $f(0, 3) = -9$. Posons $u = x$ et $v = y - 3$.

$$f(x, y) - f(0, 3) = u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(u + v)^2 \geq 0$$

f admet un minimum en $(0, 3)$.

(b) Point critique $(1, 1)$, $f(1, 1) = 4$. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$

$$f(x, y) - f(1, 1) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u - v)^2 + v^2 \geq 0$$

f admet un minimum en $(1, 1)$.

(c) Point critique $(0, 0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1/n, 0) > 0 \text{ et } f(-1/n, 0) < 0$$

Pas d'extremum.

(d) Point critique $(0, 0)$.

$$f(1/n, 0) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2} > 0 \text{ et } f(-1/n, -1/n + 1/n^2) \sim -\frac{2}{n^3} < 0$$

Pas d'extremum.

Exercice 50 : [énoncé]

$(-2, 2)$ seul point critique.

En posant $x = -2 + u$ et $y = 2 + v$, puis $u = r \cos \theta$ et $v = r \sin \theta$

$$f(x, y) - f(-2, 2) = u^2 + uv + v^2 = r^2(1 + \cos \theta \sin \theta) \geq 0$$

Il y a un minimum global en $(-2, 2)$.

Exercice 51 : [énoncé]

La fonction $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

Après résolution ses points critiques sont : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

En $(0, 0)$: $f(0, 0) = 0$, $f(1/n, 0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n, 1/n) \sim 2/n^4 > 0$.

Pas d'extremum local en $(0, 0)$

En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.

Il y a un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = -8 + 10(u^2 + v^2) + 4uv + 4\sqrt{2}(u^3 - v^3) + u^4 + v^4$$

On exploite

$$2(u^2 + v^2) + 4uv = 2(u + v)^2 \text{ et } 8u^2 + 4\sqrt{2}u^3 + u^4 = u^2(u + 2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + 2(u + v)^2 + u^2(u + 2\sqrt{2})^2 + v^2(v + 2\sqrt{2})^2$$

Ainsi $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum global.

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 52 : [énoncé]

L'étude des points critiques donne (1, 1) seul point critique.

La fonction $t \mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x, y) \mapsto x^{\ln x} + y^{\ln y}$ admet un minimum en (1, 1).

Exercice 53 : [énoncé]

- (a) f est définie sur $]0; +\infty[$, strictement croissante, concave sur $]0; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$. Asymptote verticale en 0 et branche parabolique de direction $y = x$ en $+\infty$.
- (b) $t = 1$ est solution et c'est la seule car f est strictement croissante.
- (c) g est de classe C^1 . Recherchons, ses points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = e \end{cases}$$

On conclut que (e, e) est le seul point critique.

On étudie alors le signe de

$$d(x, y) = g(x, y) - g(e, e) = x \ln y - y \ln x$$

On procède à une translation

$$\begin{cases} x = e + u \\ y = e + v \end{cases}$$

et à développement limité à l'ordre 2

$$d(x, y) = (e + u) \left(1 + \frac{v}{e} - \frac{v^2}{2e} + v^2 \varepsilon(v) \right) - (e + v) \left(1 + \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e} + u^2 \varepsilon(u) \right)$$

avec $\varepsilon \xrightarrow{0} 0$. Après simplification

$$d(x, y) = \frac{u^2 - v^2}{2} + (u^2 + v^2) \tilde{\varepsilon}(u, v)$$

avec $\tilde{\varepsilon} \xrightarrow{(0,0)} 0$.

En considérant $u = 1/n$ et $v = 0$ ou, à l'inverse $u = 0$ et $v = 1/n$, on obtient que d prend des signes différents au voisinage de (e, e) qui n'est donc pas extremum de f .

Exercice 54 : [énoncé]

f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

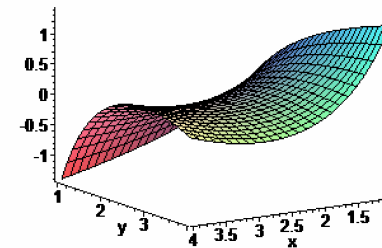


FIGURE 1 – Une représentation de la fonction g

Recherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$$

On a

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

(0, 0), (1, 1) sont donc les seuls points critiques

Étude en (0, 0)

$$g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$g\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3} > 0$ et $g\left(-\frac{1}{n}, 0\right) = -\frac{1}{n^3} < 0$ donc (0, 0) n'est pas extremum local.

Étude en (1, 1)

$$g(x, y) = f(x, y) - f(1, 1) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

Procédons à la translation

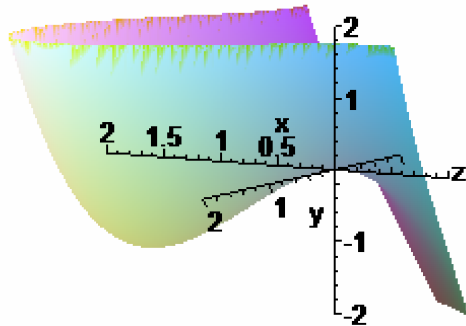
$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 1 + v \end{cases}$$

On obtient

$$g(x, y) = 3u^2 + 3v^3 - 3uv + u^3 + v^3$$

Passons en coordonnées polaires

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$



On obtient

$$g(x, y) = r^2 \left(3 - \frac{3}{2} \sin 2\theta + r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta \right)$$

Quand $(x, y) \rightarrow (1, 1)$, on a $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ donc $r \rightarrow 0$ puis

$$3 - \frac{3}{2} \sin 2\theta + r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta = 3 - \frac{3}{2} \sin 2\theta + o(1) \geq \frac{3}{2} + o(1) \geq 0$$

$(1, 1)$ est un minimum local.

Cependant $f(t, 0) = t^3 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$ donc f n'est pas minorée et donc $(1, 1)$ n'est pas un minimum global.

Exercice 55 : [énoncé]

f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

Recherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x$$

On a

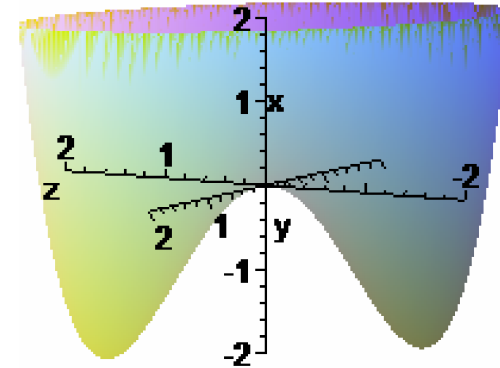
$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0, -1 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

$(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont donc les seuls points critique

Étude en $(0, 0)$

$$f(1/n, 1/n) \sim -\frac{4}{n^2} < 0 \text{ et } f(1/n, -1/n) \sim \frac{4}{n^2} > 0$$

$(0, 0)$ n'est pas extremum local de f .



Étude en $(1, 1)$.

On peut écrire

$$f(x, y) - f(1, 1) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 \geq 0$$

donc $(1, 1)$ est minimum global.

Il en est de même $(-1, -1)$ car $f(-x, -y) = f(x, y)$.

Exercice 56 : [énoncé]

Posons

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

définie et de classe C^∞ sur $]0; +\infty[^2$

Soit $x > 0$ fixé. Posons

$$\varphi: y \rightarrow f(x, y)$$

On a

$$\varphi'(y) = \frac{x(x - y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$$

La fonction φ admet donc un maximum en $y = \sqrt{x}$ dont la valeur est

$$\psi(x) = f(x, \sqrt{x}) = \frac{x}{(1+x)(1+\sqrt{x})^2}$$

On a

$$\psi'(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{(1+x)^2(1+\sqrt{x})^3}$$

La fonction ψ admet donc un maximum en $x = 1$ dont la valeur est

$$\psi(1) = f(1, 1) = \frac{1}{8}$$

Au final

$$\sup_{(x,y) \in]0;+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \max_{(x,y) \in]0;+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \frac{1}{8}$$

Exercice 57 : [énoncé]

Soit $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Soit $x > 0$ fixé.

L'application $y \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $-\frac{1}{y^2} + x$, elle donc minimale pour $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Considérons $g: x \mapsto f(x, \frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$.

g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$.

g est minimale pour $x = 1$, puis f est minimale en $(1, 1)$ avec $f(1, 1) = 3$.

Exercice 58 : [énoncé]

L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ seul point critique.

Posons $\alpha = \sqrt[3]{a}$.

$$f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = x + y + \frac{\alpha^3}{xy} - 3\alpha = \frac{x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy}{xy}$$

Étudions $\varphi: \alpha \mapsto x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en \sqrt{xy} de valeur

$$x^2y + xy^2 - 2xy\sqrt{xy} = xy(x + y - 2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

donc pour tout $x, y > 0$,

$$f(x, y) \geq f(\alpha, \alpha)$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ et $\alpha = \sqrt{xy}$ i.e. $x = y = \alpha$.

Exercice 59 : [énoncé]

Soit $x > 0$ fixé.

L'application $y \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $2y - \frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y = \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.

Considérons

$$g: x \mapsto f(x, \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}) = x^2 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = 2x - \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,

$$g'(x) = 0 \iff 2x^{8/3} = 2^{1/3}a^{2/3} \iff x = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}.$$

g est minimale pour $x = \sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2}, \sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt[4]{2a}$.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteurs propres de f .

Pour

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$$

on a

$$f(x) = \lambda_1x_1e_1 + \dots + \lambda_nx_ne_n$$

avec $\lambda_i > 0$ valeur propre associée au vecteur propre e_i .

Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2 > 0$$

(b) Par opérations, la fonction g est de classe C^1 donc admet des dérivées partielles relatives à n'importe quelle base. Dans la base (e_1, \dots, e_n) , ses dérivées partielles sont

$$d_u g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x + t.u) - g(x)) = \lambda_i x_i - u_i$$

en notant u_1, \dots, u_n les composantes de u .

(c) Il est alors immédiat que g admet un unique point critique qui est

$$z = \frac{u_1}{\lambda_1}e_1 + \dots + \frac{u_n}{\lambda_n}e_n = f^{-1}(u)$$

Tout ceci serait plus simple, en parlant de différentielle plutôt que de dérivées partielles.

(d) Pour $h \in E$,

$$g(f^{-1}(u) + h) = \frac{1}{2}(u + f(h) \mid f^{-1}(u) + h) - (u \mid f^{-1}(u) + h)$$

donc

$$g(f^{-1}(u) + h) = g(f^{-1}(u)) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) \geq g(f^{-1}(u))$$

car $(f(h) \mid f^{-1}(u)) = \langle h, u \rangle$ par adjonction.

Exercice 61 : [énoncé]

Soit a point critique de f .

Pour tout $b \in U$, on a par convexité de f :

$$\forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Par suite

$$\frac{1}{\lambda} (f(a + \lambda(b - a)) - f(a)) \leq f(b) - f(a)$$

En passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0^+$,

$$df(a).(b - a) \leq f(b) - f(a)$$

Or $df(a) = 0$ donc $f(b) \geq f(a)$.

Exercice 62 : [énoncé]

Rappelons que toute fonction réelle définie et continue sur un compact non vide y admet un maximum. Puisque la fonction f est continue sur le compact K , on est assuré de l'existence du maximum étudié.

Notons U l'ouvert donné par

$$U = K^\circ =]0; 1[^2$$

La fonction f est de classe C^1 sur U .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - 2xy - x^2}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1 - 2xy - y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)^2}$$

Après résolution, seul le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est point critique de f dans U .

La valeur de f en ce couple est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Sur le bord de K , les valeurs prises par f sont les valeurs prises sur $[0; 1]$ par les fonctions

$$\varphi(t) = f(t, 0) = f(0, t) = \frac{t}{1 + t^2} \text{ et } \psi(t) = f(t, 1) = f(1, t) = \frac{1 + t}{2(1 + t^2)}$$

D'une part

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\psi'(t) = \frac{1 - 2t - t^2}{2(1 + t^2)^2}$$

donne que le maximum de ψ est en $\sqrt{2} - 1$ avec $\psi(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2}+1}{4} > \frac{1}{2}$.
Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

on peut affirmer que le maximum de f n'évolue pas sur le bord du compact K , il est donc forcément dans U et c'est alors un point critique de f qui ne peut qu'être le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Exercice 63 : [énoncé]

La fonction f est continue sur le compact D et donc y admet un minimum et un maximum.

Si ces extremum sont à l'intérieur de D , ce sont des points critiques de f .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtient les points critiques $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ mais les deux derniers ne sont pas éléments de l'intérieur de D .

La valeur de f en $(0, 0)$ est 0.

Il reste à étudier les valeurs prises par f sur le bord de D .

$$f(2 \cos t, 2 \sin t) = -8 \sin^2(2t) + 8 \sin(2t) + 8$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto -8x^2 + 8x + 8$ sur $[-1; 1]$ donne les valeurs extrémales -8 et 10 .

On en déduit que le minimum de f vaut -8 et son maximum 10 .

`plot3d(eval([x, y, x^4+y^4-2*(x-y)^2], [x=r*cos(t), y=r*sin(t)]),
r=0..2, t=0..2*Pi, grid=[50, 50]);`

Exercice 64 : [énoncé]

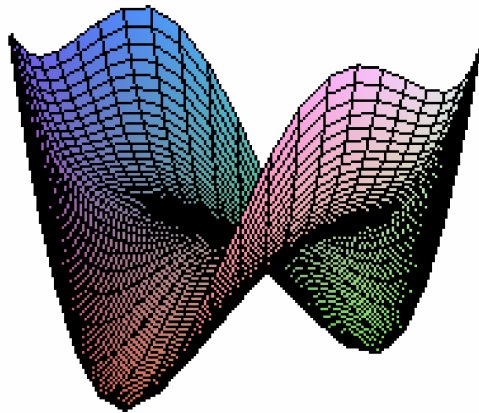
(a) f est polynomiale donc continue. T est compact donc f présente un maximum sur T .
Comme f prend des valeurs strictement positives et des valeurs nulles sur le bord de T , f présente son maximum à l'intérieur de T .

(b) f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = T^\circ$ donc le maximum de f est point critique.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x - 2y)$$

Après résolution, on obtient que seul le couple $(1/3, 1/3)$ est point critique de f et on a

$$f(1/3, 1/3) = \frac{1}{27}$$

FIGURE 2 – Surface représentant f au dessus de D **Exercice 65 : [énoncé]**

- (a) \mathcal{D} est fermée et bornée donc compacte.
- (b) Pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0; 1]$ donc f est continue par composition.
- (c) Puisque f est continue sur un compact il y admet un maximum. Puisque f est positive et non nulle ce maximum est à valeur strictement positive. Or f est nulle sur le bord de \mathcal{D} donc ce maximum est dans l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$ et c'est donc un point critique de f car f est C^1 sur l'ouvert U .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= x^{a-1} y^b (1-x-y)^{c-1} (a(1-x-y) - cx) \text{ et} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^a y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} (b(1-x-y) - cy) \end{aligned}$$

Il n'y a qu'un seul point critique c'est :

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$$

Finalement

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$$

Exercice 66 : [énoncé]

La fonction $f: (x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$ est continue sur le compact $[0; \pi/2]^2$ donc y admet un maximum.

Le seul point critique intérieur à $[0; \pi/2]^2$ est en $x = y = \pi/3$ et la valeur y est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Sur le bord de $[0; \pi/2]^2$ le maximum est celui de la fonction φ avec

$$\varphi(t) = \sin t \sin(\pi/2 - t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Ce maximum vaut $1/2$.

Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \geq \frac{1}{2}$$

on a

$$\sup_{[0;\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Exercice 67 : [énoncé]

On peut supposer l'un des sommets être $(1, 0)$ et les deux autres repérés par des angles $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

Cela nous amène à considérer

$$f: (\alpha, \beta) \mapsto 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

sur l'ouvert

$$U = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < \beta < 2\pi\}$$

Le maximum, qui existe, est alors point critique de cette fonction de classe C^1 .
Cela nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = 0 \\ \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

L'équation $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ donne

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad [2\pi]$$

L'alternative $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad [2\pi]$ est à exclure et il reste $\beta = 2\alpha$ avec de plus $\alpha \in]0; \pi[$.

L'équation $\cos \frac{\beta}{2} = -\cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ donne alors $\cos \alpha = -\cos \frac{\alpha}{2}$ d'où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ puisque $\alpha \in]0; \pi[$.

Finalement le triangle correspondant est équilatéral.

Exercice 68 : [énoncé]

Notons A, B, C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.

En introduisant les mesures α, β, γ des angles (\vec{OC}, \vec{OB}) , (\vec{OB}, \vec{OA}) et (\vec{OA}, \vec{OB}) , on vérifie

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad [2\pi]$$

et on peut calculer l'aire algébrique des triangles (OAB) , (OBC) et (OCA) qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha, \frac{1}{2}r^2 \sin \beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2 \sin \gamma = -\frac{1}{2}r^2 \sin(\alpha + \beta)$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta))$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe C^1 sur $]0; 2\pi[$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta) \\ \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

dont les seules solutions dans $]0; 2\pi[$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux resp. direct et indirect.

L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) La fonction $M \mapsto MA$ est différentiable sauf en A et sa différentielle en un point M est

$$\vec{h} \mapsto \frac{\vec{MA} \cdot \vec{h}}{MA}$$

On en déduit que f est différentiable en tout point du plan sauf en A, B et C et

$$df(M): \vec{h} \mapsto \left(\frac{\vec{MA}}{MA} + \frac{\vec{MB}}{MB} + \frac{\vec{MC}}{MC} \right) \cdot \vec{h}$$

(b) La fonction f est continue sur le disque \mathcal{D} considéré. Puisque ce dernier est compact, la fonction f admet un minimum sur ce disque en un certain point T :

$$\forall M \in \mathcal{D}, f(M) \geq f(T)$$

Puisque le point A appartient au disque \mathcal{D} , on a

$$f(T) \leq f(A)$$

Pour un point M en dehors de ce disque, on a

$$f(M) \geq MA > AB + AC = f(A) \geq f(T)$$

Le point T apparaît donc comme étant un minimum absolu de f sur le plan.

(c) La différentielle de f en T est nulle donc

$$\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} = \vec{0}$$

- (d) Les trois vecteurs sommés sont unitaires. Notons a, b, c leurs affixes dans un repère orthonormé direct donné. La relation vectorielle ci-dessus donne

$$a + b + c = 0 \text{ avec } |a| = |b| = |c| = 1$$

En multipliant par a^{-1} , on obtient

$$1 + x + y = 0 \text{ avec } |x| = |y| = 1$$

où $x = a^{-1}b$ et $y = a^{-1}c$

Les parties imaginaires de x et y sont alors opposées et la somme de leurs parties réelles vaut -1 . On en déduit qu'à l'ordre près $x = j$ et $y = j^2$.

Finalement on obtient

$$(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) = (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) = (\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) = \pm \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Notons qu'on peut en déduire un procédé construisant le point T comme intersection de cercles que l'on pourra définir en exploitant le théorème de l'angle au centre. .

Exercice 70 : [énoncé]

Méthode analytique :

L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.

En introduisant un repère, $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C(a, b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB = 1$) la fonction étudiée est

$$f(x, y) = y(bx - ay)(b(x - 1) - (a - 1)y)$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.

Méthode géométrique (plus élégante) :

Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A, B, C affectés de masses $a, b, c \geq 0$ vérifiant $a + b + c = 1$.

L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) \right|$$

Or

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC}$$

donc

$$\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = a \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

En notant \mathcal{A} l'aire du triangle ABC et d_A la distance de M à la droite (BC) , on obtient

$$a = \frac{d_A \cdot BC}{\mathcal{A}}$$

De façon analogue,

$$b = \frac{d_B AC}{\mathcal{A}} \text{ et } c = \frac{d_C AB}{\mathcal{A}}$$

avec des notations entendues.

Par suite, maximiser le produit $d_A d_B d_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a + b + c = 1$ et $a, b, c \geq 0$

La maximisation de $ab(1 - a - b)$ avec $a, b \geq 0$ et $a + b \leq 1$ conduit à $a = b = 1/3$, d'où $c = 1/3$ et le point M est au centre de gravité.

Exercice 71 : [énoncé]

Notons B la boule unité fermée pour la norme en cours. La fonction f est différentiable donc continue sur B : elle y admet un minimum en un certain élément a . L'enjeu est alors d'établir que ce minimum sur B est aussi un minimum sur \mathbb{R}^n .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\|x\| \leq 1$ alors $f(x) \geq f(a)$ par définition de a . Si $\|x\| > 1$, introduisons $x_0 = \lambda x$ avec $\lambda = 1/\|x\|$. L'élément x_0 est de norme 1, il appartient donc au bord de B et vérifie ainsi $f(x_0) \geq f(a)$. Au surplus, en considérant le paramétrage $\gamma: t \mapsto tx_0$ pour t allant de 1 à $\|x\|$, on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \int_1^{\|x\|} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) dt = \int_1^{\|x\|} df(tx_0) \cdot x_0 dt \geq 0$$

car pour tout $t \in [1; \|x\|]$, $df(tx_0) \cdot x_0$ est du signe de $df(tx_0) \cdot tx_0$ à savoir positif puisque tx_0 est de norme supérieure à 1. On obtient ainsi $f(x) \geq f(x_0)$ donc $f(x) \geq f(a)$.

Finalement, a est un minimum absolu de la fonction f .

Exercice 72 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3u - v \\ y = v - 2u \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (3u - v, v - 2u)$$

ϕ est une bijection de classe C^1 .

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(3u - v, v - 2u),$$

Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3u - v, v - 2u) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(3u - v, v - 2u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ ce qui conduit à $g(u, v) = h(v)$ puis $f(x, y) = h(2x + 3y)$ avec h fonction de classe C^1 .

Exercice 73 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = v - u \\ y = 3u - 2v \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (v - u, 3u - 2v)$$

ϕ est une bijection de classe C^1 (et même un C^1 -difféomorphisme)

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par « $g(u, v) = f(x, y)$ » i.e.

$$g(u, v) = f(v - u, 3u - 2v)$$

$g = f \circ \phi$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ soit $g(u, v) = \varphi(v)$ avec φ fonction de classe C^1 .

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x, y) = \varphi(3x + y)$ avec φ de classe C^1 .

Exercice 74 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2 \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2} \right)$$

ϕ est une bijection de classe C^1 .

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f((u + v)/2, (u - v)/2).$$

Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)_{(x, y) = \phi(u, v)}$$

Par suite f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, g est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$2 \frac{\partial g}{\partial u} = g$$

Après résolution, on obtient $g(u, v) = C(v)e^{u/2}$ avec C fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} puis

$$f(x, y) = C(x - y)e^{(x+y)/2}$$

Exercice 75 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(u, u + v)$.

Par composition g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, u + v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, u + v) = f(u, u + v) = g(u, v)$$

La fonction $u \mapsto g(u, v)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ donc il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ tel que $g(u, v) = C(v)e^u$.

Notons que $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 car $C(v) = g(0, v)$ avec g de classe C^1 .

Par suite, on obtient $f(x, y) = C(y - x)e^x$.

Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 76 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Par composition, g est de classe C^1 .

On a

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \left(-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)_{x=r \cos \theta, y=r \sin \theta}$$

Par surjectivité de l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

on peut affirmer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$$

c'est-à-dire, si, et seulement si, $g(r, \theta) = C(r)$ avec C fonction de classe C^1 définie sur $]0; +\infty[$.

On obtient alors $f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2})$ puis $f(x, y) = D(x^2 + y^2)$ avec D fonction de classe C^1 définie sur $]0; +\infty[$.

Exercice 77 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 solution de

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g: \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Par composition g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; \pi[$ et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -g(r, \theta)$$

Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\theta \mapsto g(r, \theta)$ est solution de l'équation différentielle $y'(\theta) = -y(\theta)$.

Après résolution il existe $C(r) \in \mathbb{R}$ tel que $g(r, \theta) = C(r)e^{-\theta}$

De plus, la fonction $r \mapsto C(r) = g(r, 0)$ est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi

$$f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan(x/y) - \pi/2} = h(x^2 + y^2)e^{\arctan(x/y)}$$

où h est C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 78 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g: \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Par composition g est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$ et

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ ce qui conduit à $g(r, \theta) = h(\theta)$ puis $f(x, y) = h(\arctan \frac{y}{x}) = \tilde{h}(\frac{y}{x})$ avec \tilde{h} fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} .

Exercice 79 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g: \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Par composition g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$ et

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(\rho, \theta) = r$$

ce qui conduit à $g(r, \theta) = r + h(\theta)$ puis

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \sqrt{x^2 + y^2} + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec k fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} .

Exercice 80 : [énoncé]

Supposons f homogène de degré p i.e.

$$\forall t > 0, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n)$$

Inversement, posons

$$g(t) = f(tx_1, \dots, tx_n)$$

Si f vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée, la fonction $t \mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tg'(t) = pg(t)$$

et, après résolution, on obtient

$$g(t) = t^p g(1)$$

ce qui donne f homogène de degré p .

Notons que pour $n = 1$, $f(x) = |x|^3$ vérifie la relation et n'est pas homogène de degré 3 que dans le sens précisé initialement.

Exercice 81 : [énoncé]

L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Posons $g: (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$.

La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi]$.

Pour $a > 0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[-a; a] \times [0; 2\pi]$ et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (r, t) \in [-a; a] \times [0; 2\pi], \left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) \right| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) dt$$

On en déduit $r\varphi'(r) = 0$ puis $\varphi'(r) = 0$, d'abord pour $r \neq 0$, puis pour tout $r \in \mathbb{R}$, par continuité.

Par suite φ est constante égale à $\varphi(0) = 2\pi f(0)$.

Exercice 82 : [énoncé]

L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Posons $g: (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$.

La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi]$.

Pour $a > 0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[0; a] \times [0; 2\pi]$ et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (r, t) \in [-a; a] \times [0; 2\pi], \left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) \right| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) dt$$

On en déduit

$$r\varphi'(r) = \lambda\varphi(r)$$

puis après résolution de cette équation différentielle sur $]0; +\infty[$

$$\varphi(r) = \lambda r^\alpha$$

La fonction φ étant définie et continue en 0, le cas où $\alpha < 0$ oblige $\lambda = 0$ et alors $\varphi(r) = 0$.

Le cas $\alpha \geq 0$, n'impose rien de particulier et alors $\varphi(r) = \lambda r^\alpha$ pour tout $r \geq 0$.

Exercice 83 : [énoncé]

(a) Les fonctions données par $f(x, y) = ax + by$ sont solutions.

(b) Par composition, la fonction g est de classe C^1 et

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$

de sorte que

$$tg'(t) = f(tx, ty) = g(t)$$

La résolution de l'équation différentielle $ty'(t) = y$ après raccord donne

$$y(t) = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = tf(x, y)$$

En dérivant cette relation en le paramètre x , on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

En simplifiant par t

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Or la relation engage des fonctions continues, elle donc encore valable en $t = 0$ ce qui fournit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

De même, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Enfin, en posant

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et } b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

l'équation initiale fournit

$$f(x, y) = ax + by$$

Exercice 84 : [énoncé]

- (a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r \sin \theta$ et $y = r \cos \theta$.

On parvient à

$$f(x, y) = C(x/y)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec C une fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} .

- (b) Idem, on parvient à

$$f(x, y) = \frac{2}{3} \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3} + C(x/y)$$

avec C une fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} .

Exercice 85 : [énoncé]

- (a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E .

Posons $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$,

$(r, \theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$

Pour $f \in E$, on considère $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

On remarque

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \iff r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

pour tout $(r, \theta) \in V$.

La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r, \theta) = C(\theta)$ avec C de classe C^∞ sur $]-\pi/2; \pi/2[$.

Par suite on obtient la solution générale $f(x, y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

- (b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t = 1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$. Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \alpha g(r, \theta)$$

ce qui donne $g(r, \theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x, y) = D(y/x)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec D fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α .

- (c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker \Phi$.

Exercice 86 : [énoncé]

On a

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2 \end{cases}$$

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f((u + v)/2, (u - v)/2)$$

g est de classe C^2 .

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$

soit $g(u, v) = C(u) + D(v)$ avec C, D fonction de classe C^2 .

Ainsi les solutions sont

$$f(x, y) = C(x + y) + D(x - y)$$

Exercice 87 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f((u + v)/2, (u - v)/2c).$$

Par composition g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et, par calculs, f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$

On obtient $g(u, v) = C(u) + D(v)$ puis $f(x, t) = C(x + ct) + D(x - ct)$ avec C et D fonctions de classe C^2 .

Exercice 88 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(u, v - u)$. Par composition g est C^2 sur \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, v - u) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v - u)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v - u) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v - u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v - u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0$$

soit $g(u, v) = uC(v) + D(v)$ puis $f(x, y) = xC(x + y) + D(x + y)$ avec C, D fonctions de classe C^2 .

Exercice 89 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 solution de

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(u, v) = f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$$

Par composition g est C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) - \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4v\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2u} \frac{\partial g}{\partial v}$$

Pour $v \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ est solution de l'équation différentielle $2u.y'(u) = y(u)$.

Par suite il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = C(v) \sqrt{u}$$

De plus la fonction $v \mapsto C(v)$ est de classe C^1 et si G désigne une primitive de celle-ci : $g(u, v) = G(v) \sqrt{u} + H(u)$ où H est une fonction dont le caractère C^2 n'échappe à personne. Finalement

$$f(x, y) = G(x/y) \sqrt{xy} + H(xy)$$

où G et H sont des fonctions de classe C^2 .

Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 90 : [énoncé]

(a) On a

$$\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta f) = 0$$

car

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est harmonique et il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Aussi

$$\Delta \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = x \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

donne

$$\Delta \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = x \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + y \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \Delta f = 0$$

(b) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2 + y^2)$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 2x^2\varphi''(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 2y^2\varphi''(x^2 + y^2)$$

Donc

$$\Delta f = 0 \iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (x^2 + y^2)\varphi''(x^2 + y^2) + \varphi'(x^2 + y^2) = 0$$

d'où

$$\Delta(f) = 0 \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^*, r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$$

φ' est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$xy' + y = 0$$

(c) Les solutions de l'équation $xy' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = C/x$.

On en déduit

$$\varphi(x) = C \ln x + D \text{ avec } C, D \in \mathbb{R}$$

Les fonction harmoniques radiales sont les

$$f(x, y) = C' \ln(x^2 + y^2) + D$$

avec $C', D \in \mathbb{R}$.

Exercice 91 : [énoncé]

(a) g est de classe C^2 par opérations sur les fonctions C^2 .

D'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2r \cos t \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -r \sin t \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos t \frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -r \cos t \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin t \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2 \cos t \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

donc

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0$$

(b) $g: (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto g(r, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r, t)$ sont continue par morceaux donc intégrables sur $[0; 2\pi]$.

$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue en t et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$. $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue sur le compact $[a; b] \times [0; 2\pi]$ donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; 2\pi], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0; 2\pi]$ et donc, par intégration sur tout segment, on peut affirmer que φ est de classe C^2 sur \mathbb{R} avec

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt \text{ et } \varphi''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt$$

Ainsi

$$r(r\varphi'(r))' = r\varphi'(r) + r^2\varphi''(r) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(r; t) \right]_0^{2\pi}$$

Puisque $t \mapsto g(r, t)$ est 2π périodique, il en est de même de $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(r, t)$ et donc

$$r(r\varphi'(r))' = 0$$

Puisque $r \mapsto (r\varphi'(r))'$ est continue et nulle sur \mathbb{R}^* , cette fonction est continue nulle sur \mathbb{R} .

(c) Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $r\varphi'(r) = C$ puis

$$\varphi'(r) = \frac{C}{r}$$

et

$$\varphi(r) = C \ln |r| + D$$

sur \mathbb{R}^* .

Or φ est définie et continue sur \mathbb{R} donc $C = 0$ et finalement φ est constante.

Exercice 92 : [énoncé]

Pour $y \in]-R; R[$ fixé, on peut appliquer le théorème dérivation sous le signe somme à l'application

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n$$

sur les segments $[a; b]$ inclus dans $]-r; r[$ avec $r = \sqrt{R^2 - y^2}$.

En effet, la série entière dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et donc celle-ci converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$, en particulier sur le compact $[a; b] \times \{y\}$

On obtient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x + iy)^{n-1}$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n(x + iy)^{n-2}$$

et aussi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1) a_n(x + iy)^{n-2}$$

d'où la conclusion.

Exercice 93 : [énoncé]

Par composition de fonctions de classe C^2 , la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} f''\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) + \frac{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}} f'\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ parcourt \mathbb{R}_+^* quand (x_1, \dots, x_n) parcourt $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{(n-1)}{t} f'(t) = 0$$

Après résolution on obtient

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ si } n \neq 2 \text{ et } f(t) = \lambda \ln t + \mu \text{ si } n = 2$$

Exercice 94 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j}$$

on a

$$\Delta F = \operatorname{divgrad} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

(b) Introduisons f et \tilde{f} les représentations cartésiennes et polaires de F .

On a

$$F(M) = \tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ce qu'on réécrit

$$\frac{\partial F}{\partial r}(M) = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(M) = -r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

(c) Aussi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(M) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(M) &= r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M) \\ &\quad - r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) - r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y}(M) \end{aligned}$$

On observe alors

$$r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(M) + r \frac{\partial F}{\partial r}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(M) = r^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) \right)$$

et donc

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Exercice 95 : [énoncé]

Introduisons les représentations cartésiennes et cylindriques de F .

$$F(M) = \tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

On en tire

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho, \varphi, z) = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

qu'on réécrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) = \cos \varphi \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin \varphi \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même :

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M) = -\rho \sin \varphi \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \rho \cos \varphi \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

Sachant $\vec{u}_\rho = \cos(\varphi) \cdot \vec{i} + \sin(\varphi) \cdot \vec{j}$ et $\vec{u}_\varphi = -\sin(\varphi) \cdot \vec{i} + \cos(\varphi) \cdot \vec{j}$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(M) \vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}(M) \vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x}(M) \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M) \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M) \vec{k}$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

Exercice 96 : [énoncé]

$$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}.$$

$$(a) \operatorname{div} \vec{F}(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \right) = \frac{1}{OM}.$$

$$(b) \vec{F} \text{ dérive du potentiel } V(M) = \sqrt{x^2+y^2} = OM.$$

Exercice 97 : [énoncé]

$$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{k}$$

$$(a) \vec{F} \text{ dérive du potentiel } V(M) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{OM}.$$

$$(b) \operatorname{div} \vec{F}(M) = \left(\frac{1}{OM^3} - 3 \frac{x^2}{OM^5} \right) + \left(\frac{1}{OM^3} - 3 \frac{y^2}{OM^5} \right) + \left(\frac{1}{OM^3} - 3 \frac{z^2}{OM^5} \right) = -\frac{2}{OM^3}.$$

$$\operatorname{Rot} \vec{F} = \vec{0} \text{ car } \vec{F} \text{ dérive d'un potentiel.}$$

Exercice 98 : [énoncé]

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}.$$

$$\vec{F}(M) = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}$$

$$(a) \operatorname{div} \vec{F}(M) = 0. \operatorname{Rot} \vec{F}(M) = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

$$(b) \text{ Lorsque } \vec{\omega} \neq \vec{0}, \text{ le champ } \vec{F} \text{ ne dérive pas d'un potentiel.}$$

Lorsque $\vec{\omega} = \vec{0}$, le champ \vec{F} est nul et donc d'un dérive de n'importe quel potentiel constant.

Exercice 99 : [énoncé]

$$(a) \vec{\gamma}_2 \text{ paramètre le quart d'une ellipse partant du sommet } A(a, 0) \text{ jusqu'au sommet } B(0, b).$$

$\vec{\gamma}_1$ paramètre le segment $[A; B]$ de A vers B .

$$(b) \text{ Le champ de vecteurs } \vec{V} \text{ dérive du potentiel } U \text{ si, et seulement si,}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = y \text{ et } \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 2x$$

Un tel potentiel est alors de classe C^2 et l'égalité de Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

n'étant pas vérifiée, on peut conclure à l'inexistence de U .

$$(c) \text{ La circulation de } \vec{V} \text{ le long de } \vec{\gamma}_1 \text{ est}$$

$$\int_0^1 -abt + 2ab(1-t) dt = \frac{ab}{2}$$

$$\text{et celle le long de } \vec{\gamma}_2 \text{ est}$$

$$\int_0^{\pi/2} -ab \sin^2(s) + 2ab \cos^2(s) ds = \frac{ab\pi}{4}$$

Par la différence des deux valeurs obtenues, on retrouve que \vec{V} ne dérive pas d'un potentiel.