Colles de mathématiques en PCSI 5

22 et 29 novembre 2011

Programme

Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes et en polaires. Coniques.

Exercice n° 1

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux fois dérivable.

1. Que dire du mouvement dans le plan si on suppose qu'à tout instant vitesse et accélération sont orthogonales ?
2. Que dire s'il existe un $\vec{u} \neq 0$ tel qu'à tout instant, $\vec{f}'(t)$ soit colinéaire à $\vec{u}$?

Exercice n° 2

Étudier en détails (asymptotes, points stationnaires, points d'arrêts, points doubles) les courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(2t)(\sin t - \cos t) \\ \sin(2t)(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

$$\rho(\theta) = \sin(3\theta) \qquad \rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{2\cos(\theta) + 1}.$$

Exercice n° 3

Prouver que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \theta \neq \pi \pmod{2\pi},\ \rho \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right) \pmod{2\pi} \\ (x, y) \notin \mathbb{R}_- \times \{0\} \end{cases}$$

Exercice n° 4

1. Tracer la courbe d'équation polaire
$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}.$$
2. Rappeler l'équation d'une droite en coordonnées polaires.

Exercice n° 5

Nature et éléments de la courbe d'équation :

1. $x^2 + xy + y^2 - x + 4y + 5 = 0$;

2. $x^2 + my^2 - mx = 1$, $m \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 6

Prouver qu'une hyperbole est équilatère (asymptotes orthogonales) si et seulement si elle admet pour excentricité $\sqrt{2}$.

Exercice n° 7

Prouver que la normale en un point M_0 d'une ellipse est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{M_0F}, \overrightarrow{M_0F'})$ (si F et F' sont les foyers de l'ellipse, vous l'aurez compris).

Exercice n° 8

Montrer que dans un miroir parabolique, les rayons qui arrivent parallèles à l'axe optique se réfléchissent en passant par le foyer.

Exercice n° 9

Dans une parabole d'équation $y^2 = 2px$, chercher le lieu des milieux des cordes passant par un point donné $A(a, 0)$, avec $a > 0$.

Solution. On paramétrise la parabole par $\binom{2pt^2}{2pt}$. On intuite que le lieu en question est une parabole de sommet A. Commençons par déterminer l'autre extrémité $N(t)$ de la corde passant par $M(t)$ et A. Notons $\left| \begin{array}{l} 2ps^2 \\ 2ps \end{array} \right.$ les coordonnées de $N(t)$. Exprimons que A est sur le segment $[MN]$.

$$\exists u \in]0, 1[\mid \begin{cases} 2ps^2 + u(2pt^2 - 2ps^2) = a \\ 2ps + u(2pt - 2ps) = 0 \end{cases}.$$

On voit alors que $\boxed{st = -a/2p}$. Le milieu a pour coordonnées $I(t) \left| \begin{array}{l} p(s^2 + t^2) \\ p(s + t) \end{array} \right.$.

$$y_{I(t)}^2 = p[p(s^2 + t^2) + \underbrace{2pst}_{=-a}] = p(x_{I(t)} - a).$$

On obtient l'équation de la parabole de sommet A et de paramètre $p/2$. □

Exercice n° 10

Soient trois points A, B, C sur une hyperbole équilatère. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est encore sur l'hyperbole.

Exercice n° 11

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

1. Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathcal{P}$ tels que la normale à $\mathcal{P}$ en M passe par M_0.

2. Quand il y a deux solutions M_1, M_2, décrire le lieu des centres de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.