Chapitre 14

Intégration sur un intervalle quelconque

II. Les grands théorèmes

1. Convergence des intégrales d'une suite de fonctions

1.1. Sur un segment (rappel)

Théorème : **sur un segment, la convergence uniforme convient**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors

- ❑ $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$
- ❑ la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

- Théorème vu au Chapitre 8 § 1.3.c
- La convergence uniforme ne sert à rien sur un intervalle quelconque.

  ⇨ Contre-exemple : **1**.

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \qquad \| f_n \|_\infty = \frac{1}{n} \qquad f_n \underset{c.u.}{\longrightarrow} 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$$

- ☺ Heureusement, on a mieux ! ↙

1.2. Sur un intervalle : le théorème de convergence dominée

Théorème 1 de **convergence dominée**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ (**CM**) .

Si ❋ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f (**C S**)

❋ il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leqslant \varphi$ (**D**)

Alors :

- ❑ $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$
- ❑ la suite des intégrales $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$

  i.e. . $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f}$

- Démonstration admise ☺
- On peut néanmoins facilement démontrer le point 1 **2**.

1.3. Exemples $\boxed{3}$.

a) Exemple 1 : Intégrales de Wallis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)dt}$

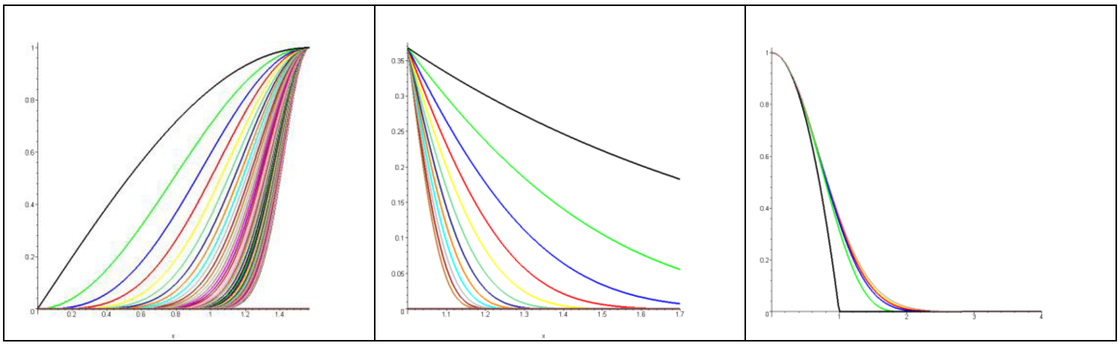
☆ domination par une constante

b) Exemple 2 : Un cas de " convergence monotone " $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}e^{-x^n}dx}$

☆ domination par f_1

c) Exemple 3 : Vers la loi normale de Gauss… $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}dx}$

☆ domination par la fonction limite



d) Exemple : un cas particulier, T.C.D. sur un segment

Corollaire Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ (CM) .

Si ❋ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers f (CS)

❋ il existe $k\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$: $|f_n|\leqslant k$ (UB)

Alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

- Démonstration $\boxed{4}$.
- Bien noter qu'on attend que les fonctions soient Uniformément Bornées, c'est-à-dire bornées par une constante commune.
- Ce corollaire est intéressant à titre d'exercice, mais au concours, il vaut mieux appliquer le T.C.D. original.
- Exemple : c'est ce qu'on a fait dans l'exemple 1 (Wallis)

e) Une extension : passage du discret au continu

Théorème Soient $(f_\lambda)_{\lambda\in[a,b[}\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})^{[a,b[}$ et $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ où $b\in\overline{\mathbb{R}}$ (CM)

. Si $f_\lambda\xrightarrow[\lambda\to b]{c.s.}f$ (CS) et $\exists\ \varphi\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ / $\forall\lambda\in[a,b[$: $|f_\lambda|\leqslant\varphi$ (D)

Alors $\int_I f_\lambda \underset{\lambda\to b}{\longrightarrow}\int_I f$.

- Ainsi avec les mêmes hypothèses ($\mathcal{CM}$ et domination) :

si $\forall t\in I$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)=h(t)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_I f(x,t)\,dt = \int_I h(t)\,dt$

2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

2.1. Deux situations intéressantes

a) Sur un segment : encore la convergence uniforme (rappel)

Théorème : **sur un segment, la convergence uniforme convient**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ (de somme S)

alors $S \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge et a pour somme $\int_a^b S(t)dt$.

- Multithéorème vu au Chapitre 8 § 2.6.c…
- ☺ On peut notamment l'utiliser pour les séries entières si $[a,b] \subset]-R,R[$

b) Une application intéressante du théorème de convergence dominée

Proposition : **cas où le terme général est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, a pour somme S

et si $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$,

alors la série $\sum \int_I f_n(t)dt$ converge et a pour somme $\int_I S(t)dt$.

- Démonstration **5**.
- Même remarque qu'en § 1.3.d : revenir dans les concours au T.C.D.

2.2. Le théorème fondamental

Théorème 2 : **intégration terme à terme d'une série de fonctions**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si ❈ la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme une fonction $S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$,

❈ la série des intégrales $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ et la série $\sum \int_I f_n$ converge et a pour somme $\int_I S$

- Démonstration admise ☺
- Exemple **6** :

  étude de l'intégrabilité de la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{1+n^2}}$ sur $]-1,1[$

3. Intégrales à paramètre

3.1. Continuité

a) Introduction sous forme de question : que vaut $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t)}{x+\sin(t)}\,dt$?

- En particulier peut-on échanger les symboles $\displaystyle\lim_{x\to 0}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}$?

- Prérequis : notations $f(x,.)$ et $f(.,t)$

b) Le théorème

> Théorème 3 : **"continuité sous le signe intégrale"**
>
> Soit $f : \begin{cases} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où $\left| \begin{array}{l} A \subset F \text{ avec } F \text{ e.v.n. de dimension finie} \\ I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \end{array} \right.$
>
> Si ① f est continue par rapport à la première variable **(C1)**
>
> i.e. $\forall t \in I \, : \, f(.,t) \in \mathcal{C}(A,\mathbb{K})$
>
> ② f est continue par morceaux par rapport à la 2^{nde} variable **(CM2)**
>
> i.e. $\forall x \in A \, : \, f(x,.) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$
>
> ③ $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\, x \in A : \, | f(x,.) | \leqslant \varphi$ **(D)**
>
> alors la fonction $g : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

- Démonstration dure **7**. (on utilise le T.C.D.)

- Attention : ③ s'écrit dans la pratique :

$$\boxed{\exists\, \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+) \,/\, \forall\, x \in A, \forall\, t \in I : \, | f(x,t) | \leqslant \varphi(t)}$$

c) Exemples

- Exemple 1 : **8**.

  pourquoi $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t)}{x+\sin(t)}\,dt = \int_0^{\pi} \sin(t)dt = 2$?

- Exemple 2 : **transformée de Fourier** **9**.

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \hat{f} : x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \quad \Rightarrow \quad \hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

- Exemple 3 : **transformée de Laplace** **10**.

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad Lf : x \to \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt \quad \Rightarrow \quad Lf \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$$

- Exemple 4 : un corollaire particulièrement simple

> Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b]\times[c,d],\mathbb{K})$.
>
> Alors la fonction $F : x \longrightarrow \int_c^d f(x,t)dt$ est définie et continue sur $[a,b]$.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{11}}$. Utiliser la propriété suivante :
- Si $f \in \mathcal{C}([a,b]\times[c,d],\mathbb{K})$ alors $f(x,.)$ et $f(.,t)$ sont continues

d) Prolongement important

☺ si $A = J$, intervalle de $\mathbb{R}$ (ce qui est le plus souvent le cas) : il suffit que l'hypothèse de domination(**D**) soit satisfaite **sur tout segment inclus dans** $\boldsymbol{J}$; ③ est ainsi plus facile à réaliser et s'écrit alors :

③ $\boxed{\forall\ (a,b) \in J :\ \exists\ \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)\ /\ \forall\ x \in [a,b] :\ |\ f(x,.)\ | \leqslant \varphi}$

e) Restriction et nouveau prolongement

- Avec les hypothèses ① et ② et si $a \in A$ est tel que

  ③ $\exists V \in \mathcal{V}(a) /\ \ \forall\ x \in V, \forall\ t \in I :\ |\ f(x,t)\ | \leqslant \varphi(t)$

  alors g sera continue en a.

- Avec les hypothèses ① et ② et si $a \in \overline{A}$ (par ex . $a = +\infty$) est tel que

  ③ $\exists V \in \mathcal{V}(a) /\ \ \forall\ x \in V, \forall\ t \in I :\ |\ f(x,t)\ | \leqslant \varphi(t)$

  ④ $\forall\ t \in I\ \ :\ \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$

  alors $\lim\limits_{x\to a} \int_I f(x,t)dt = \int_I h(t)dt$

- Remarque : on retrouve le prolongement du T.C.D. vu en 1.3.e.

3.2. Dérivabilité

a) Prérequis (sera repris en Chapitre 16) :

- Sous réserve d'existence : Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f(.,t)'(x)$.
- Pratiquement :

  $\boxed{\text{On considère } t \text{ comme un paramètre et on dérive par rapport à } x}$.
- Exemples : **12**.

b) Le théorème pour la classe $\mathcal{C}^1$

> Théorème 4 : **"dérivabilité sous le signe intégrale"**
>
> Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où J et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
>
> Si ① $\forall x \in J \; : \; f(x,.) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$
>
> ② f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui vérifie les hypothèses (C1), (CM2) et (D) du théorème de continuité sous le signe intégrale.
>
> alors la fonction $g : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :
>
> $$\forall x \in J \; : \; g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \; .$$

- Démonstration dure **13**. (on utilise encore le T.C.D.)

c) Prolongement intéressant (ici encore) :

☺ si $A = J$, intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit satisfaite **sur tout segment inclus dans J** ; ②(**D**) s'écrit alors :

$$\boxed{③ \; \forall (a,b) \in J : \; \exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+) \; / \; \forall x \in [a,b] :, \forall t \in I : \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)}$$

d) Exemple : encore la **loi normale de Gauss** **14**.

- Etude de $x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
- Démonstration de $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

3.3. Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

a) Prérequis (sera repris en Chapitre 16) :

- Sous réserve d'existence : Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$, $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) = f(.,t)^{(i)}(x)$.
- Pratiquement :

  $\boxed{\text{On considère } t \text{ comme un paramètre et on dérive } i \text{ fois par rapport à } x}$.

b) Le théorème

> Théorème 4-bis : **"dérivabilité k fois le signe intégrale"**
>
> Soient $f : \begin{cases} J \times I \to & \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où J et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et $k \geqslant 2$
>
> Si f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ de manière que :
>
> ① $\forall i \in [\![0, k-1]\!] \ \forall x \in J \ : \ \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,.) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
>
> ② $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie les hypothèses (C1), (CM2) et (D)* du théorème de continuité sous le signe intégrale.
>
> alors la fonction $g : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et vérifie :
>
> $$\forall x \in J \ : \ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt \ .$$

- Démonstration en exercice : réitération du théorème précédent …
- Le théorème 4 est alors un cas particulier de ce théorème…
- ☺ * ici encore il suffit que l'hypothèse de domination soit satisfaite **sur tout segment inclus dans J**

3.4. Exemple : un prolongement de la factorielle, la **fonction Γ** **15**.

Définition

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ : \boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}$$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \Gamma(x+1) = x \times \Gamma(x)$

$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \boxed{n! = \Gamma(n+1)}$

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$