

# Cours de mathématiques – 2017/2018

---

PCSI

*Vésale Nicolas*



## Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation
	$\alpha$	Alpha
	$\beta$	Beta
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma
$\Delta$	$\delta$	Delta
	$\epsilon$	Epsilon
	$\zeta$	Zeta
	$\eta$	Eta
$\Theta$	$\theta$	Theta
	$\iota$	Iota
	$\kappa$	Kappa
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda
	$\mu$	Mu
	$\nu$	Nu
$\Xi$	$\xi$	Xi
$\Pi$	$\pi$	Pi
	$\rho$	Rho
$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
	$\tau$	Tau
	$\upsilon$	Upsilon
$\Phi$	$\varphi$	Phi
	$\chi$	Chi
$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Omega$	$\omega$	Omega

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rudiments de logique et de théorie des ensembles</b>	<b>9</b>
1.1	Rudiments de logique	9
1.2	Rudiments de théorie des ensembles	9
1.3	Quantificateurs, premiers raisonnements	10
<b>2</b>	<b>Équations différentielles : quelques cas simples pour la physique</b>	<b>13</b>
2.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants	13
2.2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	16
<b>3</b>	<b>Études de fonctions</b>	<b>21</b>
3.1	Généralités sur les fonctions	21
3.2	Opérations sur les fonctions	22
3.3	Tangentes et dérivées	23
3.3.1	Droites du plan, pentes	24
3.3.2	Tangentes, nombre dérivé, version géométrique (hors programme, non fait en cours)	26
3.3.3	Le grand prêt : calculs pratiques de dérivées	28
3.3.4	Dérivées d'ordre supérieur	31
3.4	Limites	32
3.4.1	Rappels de lycée	32
3.4.2	Quelques méthodes pour lever une indétermination	34
3.5	Études de fonctions	36
3.5.1	Réduction du domaine	36
3.5.2	Recherche d'asymptotes	39
3.5.3	Mise en œuvre	40
3.6	Application à la recherche d'inégalités	42
3.7	Fonctions usuelles	45
3.7.1	Fonctions puissance	45
3.7.2	Cosinus et sinus hyperboliques	46
3.7.3	Fonctions inverses	47
3.7.3.1	Fonctions injectives, surjectives, bijectives	47
3.7.3.2	Fonction réciproque d'une bijection	48
3.7.3.3	Fonctions trigonométriques réciproques	50
<b>4</b>	<b>Nombres complexes et trigonométrie</b>	<b>53</b>
4.1	Définition	53
4.2	Premières opérations géométriques	54
4.3	Nombres complexes de module un, trigonométrie	56
4.4	Arguments d'un nombre complexe non nul	59
4.4.1	Définition, premières propriétés	59
4.4.2	Calculs pratiques d'arguments	60
4.5	Exponentielle complexe	62
4.6	Résolutions d'équations complexe	62
4.6.1	Second degré	62
4.6.1.1	Racines carrées d'un nombre complexe : méthode algébrique	62
4.6.1.2	Équations du second degré à coefficients complexes	63
4.6.2	Quelques équations d'ordre $n$ .	65

4.6.2.1	Racines de l'unité . . . . .	65
4.6.2.2	Racines $n$ -ième d'un complexe. . . . .	66
4.7	Fonctions réelles à valeurs complexes . . . . .	67
4.8	Opérations sur les complexes et géométrie plane. . . . .	69
4.8.1	Affixes et géométrie du plan . . . . .	69
4.8.2	Quelques exemples de transformations du plan . . . . .	70
4.8.2.1	Transformations du plan, premiers exemples . . . . .	70
4.8.2.2	Similitudes du plan . . . . .	70
4.8.2.3	Similitudes directes du plan . . . . .	71
4.8.2.4	Similitudes indirectes du plan . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Calculs algébriques</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1	Les raisonnements par récurrence . . . . .	75
5.1.1	Récurrence simple . . . . .	75
5.1.2	Récurrence double . . . . .	76
5.1.3	Récurrence forte . . . . .	77
5.2	Sommes et produits : . . . . .	78
5.2.1	Définition, premiers exemples . . . . .	78
5.2.2	Sommes doubles . . . . .	80
5.3	Formule du binôme de Newton . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Calculs de primitives :</b> . . . . .	<b>85</b>
6.1	Définition, premiers exemples . . . . .	85
6.2	Méthodes directes . . . . .	86
6.2.1	Linéarisation . . . . .	86
6.2.2	Repérer des dérivées de fonctions composées . . . . .	87
6.2.3	Quelques fractions rationnelles . . . . .	88
6.3	Méthodes intégrales . . . . .	90
6.3.1	Notation intégrale . . . . .	90
6.3.2	Intégration par parties . . . . .	91
6.3.3	Changements de variables . . . . .	92
6.3.3.1	Le théorème, premiers exemples . . . . .	92
6.3.3.2	Primitives de fonctions avec des racines . . . . .	93
6.3.3.3	Formules de l'arc-moitié et applications . . . . .	95
6.4	Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	95
6.4.1	Définitions, solutions de l'équation homogène . . . . .	95
6.4.2	Solutions de l'équation différentielle . . . . .	98
6.4.3	Problèmes de recollement . . . . .	100
6.4.4	Une étude qualitative : définition de la fonction logarithme . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Nombres réels, suites numériques</b> . . . . .	<b>103</b>
7.1	Quelques généralités sur les nombres réels . . . . .	103
7.1.1	Majorants, minorants . . . . .	103
7.1.2	Bornes supérieures, inférieures . . . . .	104
7.1.3	Nombres décimaux, approximations de réels . . . . .	106
7.1.4	Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ . . . . .	108
7.1.5	Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . . .	109
7.2	Suites numériques . . . . .	110
7.2.1	Modes de définitions . . . . .	110
7.2.1.1	Généralités . . . . .	110
7.2.1.2	Suites arithmético-géométriques . . . . .	110
7.2.1.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . . .	111
7.2.2	Quelques généralités sur les suites réelles . . . . .	114
7.2.2.1	Monotonie . . . . .	114
7.2.2.2	Convergence d'une suite réelle . . . . .	115
7.2.2.3	Quelques propriétés sur les limites . . . . .	118
7.2.3	Théorèmes de convergence . . . . .	120

7.2.3.1	Comparaisons de suites . . . . .	120
7.2.3.2	Suites monotones . . . . .	122
7.2.3.3	Suites adjacentes . . . . .	125
7.2.4	Suites extraites . . . . .	127
7.2.4.1	Définition, premières propriétés . . . . .	127
7.2.4.2	Application aux « escargots » . . . . .	128
7.2.4.3	Un peu de poésie dans ce monde de brutes . . . . .	131
7.2.5	Suites complexes . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Matrices et systèmes linéaires</b>	<b>137</b>
8.1	Généralités sur les matrices . . . . .	137
8.1.1	Définition et opérations algébriques . . . . .	137
8.1.2	Matrices carrées . . . . .	140
8.1.2.1	Puissances de matrices . . . . .	140
8.1.2.2	Matrices inversibles . . . . .	142
8.1.3	Quelques familles de matrices . . . . .	144
8.1.3.1	Matrices triangulaires supérieures . . . . .	144
8.1.3.2	Transposition, matrices symétriques et antisymétriques . . . . .	145
8.1.3.3	Matrices nilpotentes . . . . .	147
8.1.3.4	Matrices élémentaires . . . . .	147
8.2	Systèmes linéaires . . . . .	148
8.2.1	Définitions, lien avec les matrices . . . . .	148
8.2.2	Une méthode de résolution . . . . .	149
8.2.3	Applications aux matrices . . . . .	150
8.2.3.1	Matrices équivalentes, décomposition de Gauß-Jordan . . . . .	150
8.2.3.2	Matrices inversibles . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Arithmétique et dénombrement</b>	<b>155</b>
9.1	Divisibilité . . . . .	155
9.1.1	Définition et premières propriétés . . . . .	155
9.1.2	Division euclidienne . . . . .	156
9.2	Entiers premiers entre eux . . . . .	156
9.2.1	Plus grand et plus petit commun diviseurs . . . . .	156
9.2.2	Algorithme d'Euclide . . . . .	157
9.2.3	Entiers premiers entre eux . . . . .	159
9.2.4	Décomposition en produit de facteurs premiers . . . . .	160
9.3	Dénombrement . . . . .	161
9.3.1	Ensembles fini, partitions . . . . .	161
9.3.2	Cardinaux et fonctions . . . . .	162
9.3.3	Cardinaux de certains ensembles . . . . .	163
9.3.4	Combinaisons . . . . .	164
9.3.5	Arrangements, permutations . . . . .	165
<b>10</b>	<b>Continuité, dérivabilité</b>	<b>167</b>
10.1	Limite d'une fonction . . . . .	167
10.1.1	Limites finies . . . . .	167
10.1.2	Notion de voisinage, limites infinies . . . . .	169
10.1.3	Notations de Landau . . . . .	171
10.2	Continuité . . . . .	173
10.2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	173
10.2.2	Continuité sur un intervalle . . . . .	174
10.3	Dérivabilité . . . . .	177
10.3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	177
10.3.2	Propriétés des fonctions dérivables . . . . .	179
10.3.3	Fonctions de classe $C^n$ . . . . .	184
10.3.4	Extension aux fonctions complexes . . . . .	187
10.4	Développements limités . . . . .	188

10.4.1	Définition et premières propriétés . . . . .	188
10.4.2	Théorèmes d'existence . . . . .	189
10.4.3	Calculs pratiques . . . . .	191
10.4.4	Applications des développements limités . . . . .	194
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>197</b>
11.1	Notion d'espace vectoriel . . . . .	197
11.1.1	Premières définitions . . . . .	197
11.1.2	Construire des sous-espaces vectoriels . . . . .	200
11.1.3	Familles libres, sommes directes . . . . .	203
11.1.4	Bases . . . . .	205
11.1.5	Dimension finie . . . . .	207
11.1.6	Sommes d'espaces vectoriels en dimension finie . . . . .	209
11.2	Le cas euclidien . . . . .	212
11.2.1	Produit scalaire, norme associée . . . . .	212
11.2.2	Propriétés des produits scalaires . . . . .	213
11.2.3	Familles de vecteurs et orthogonalité . . . . .	214
11.2.4	Orthogonal et supplémentaire . . . . .	217
<b>12</b>	<b>Intégration</b>	<b>219</b>
12.1	Intégrales des fonctions en escalier . . . . .	219
12.2	Fonctions intégrables au sens de Riemann . . . . .	221
12.3	Propriétés de l'intégrale de fonctions continues . . . . .	223
<b>13</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>227</b>
13.1	Généralités sur les séries . . . . .	227
13.2	Premières méthodes intégrales . . . . .	228
13.2.1	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	228
13.2.2	Sommes de Riemann . . . . .	229
13.3	Séries à termes positifs . . . . .	229
13.4	Séries à termes quelconques . . . . .	233
13.5	Application aux suites . . . . .	235
<b>14</b>	<b>Applications linéaires, matrices</b>	<b>237</b>
14.1	Définition et premiers exemples . . . . .	237
14.1.1	Applications linéaires . . . . .	237
14.1.2	Matrices et applications linéaires en dimension finie . . . . .	238
14.2	Noyau, image et rang d'une application linéaire . . . . .	240
14.2.1	Noyau d'une application linéaire. . . . .	240
14.2.2	Image et rang d'une application linéaire. . . . .	241
14.3	Isomorphismes d'espaces vectoriels . . . . .	243
14.3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	243
14.3.2	Lien avec les matrices inversibles . . . . .	246
14.4	Projections et symétries . . . . .	248
14.4.1	Le cas général . . . . .	248
14.4.2	Le cas euclidien . . . . .	250
14.5	Déterminant d'une matrice . . . . .	252
14.5.1	Aires, volumes, définition . . . . .	252
14.5.1.1	Aire définie par deux vecteurs du plan . . . . .	252
14.5.1.2	Le cas général . . . . .	252
14.5.2	Propriétés du déterminant . . . . .	254
14.5.3	Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme . . . . .	257

<b>15 Probabilités</b>	<b>259</b>
15.1 Espaces probabilisés . . . . .	259
15.1.1 Vocabulaire probabiliste . . . . .	259
15.1.2 Notion de probabilité . . . . .	259
15.1.3 Probabilités conditionnelles . . . . .	262
15.1.4 Évènements indépendants . . . . .	264
15.2 Variables aléatoires sur un univers fini . . . . .	265
15.2.1 Loi, espérance, variance . . . . .	265
15.2.2 Exemples essentiels . . . . .	268
15.2.2.1 Loi uniforme . . . . .	268
15.2.2.2 Loi de Bernoulli . . . . .	269
15.2.2.3 Loi binomiale . . . . .	270
15.2.3 Constructions de variables aléatoires . . . . .	271
15.2.3.1 Fonctions de variables aléatoires . . . . .	271
15.2.3.2 Couples de variables aléatoires . . . . .	272
15.2.4 Indépendance de variables aléatoires . . . . .	272
15.2.4.1 Le cas de deux variables aléatoires . . . . .	272
15.2.4.2 Indépendance mutuelle . . . . .	274
<b>16 Polynômes</b>	<b>277</b>
16.1 Définition, premières propriétés . . . . .	277
16.1.1 Rappels sur l'espace vectoriel des polynômes . . . . .	278
16.1.2 Propriétés arithmétiques des polynômes . . . . .	278
16.1.2.1 Division euclidienne . . . . .	278





# Chapitre 1

## Rudiments de logique et de théorie des ensembles

### 1.1 Rudiments de logique

La logique est la grammaire des mathématiques. Elle permet d'articuler des *propositions*, qui sont des énoncés mathématiques supposés vrais ou faux (on écrira  $V$  ou  $F$ ) à l'aide de connecteurs logiques. Le tableau suivant résume les règles d'utilisation des principaux opérateurs logiques :

P	Q	non(P)	P ou Q	P et Q	$P \implies Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V

**Remarque(s) 1 :** Presque tout le contenu de ce tableau devrait vous paraître naturel, à l'exception d'un point : le *ou* mathématique n'est pas exclusif. Plus précisément, la proposition :

« il fait beau aujourd'hui » *ou* « il n'y a pas de nuages »

est une proposition vraie s'il fait beau et qu'il n'y a pas de nuages.

Les autres opérations logiques se définissent à partir de celles-ci, par exemple, l'équivalence est définie par :

$$P \iff Q \stackrel{Def.}{=} (P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P).$$

En particulier, une équivalence se prouve presque toujours en montrant deux implications successives, que l'on appelle implication directe ( $P \implies Q$ ) et réciproque ( $Q \implies P$ ). Notez qu'on peut vérifier en utilisant la table ci-dessus que l'équivalence logique correspond bien à l'égalité des valeurs de vérité des propositions.

### 1.2 Rudiments de théorie des ensembles

Les ensembles, quand à eux, sont le vocabulaire de base des mathématiques. On les note souvent avec des lettres majuscules : « soit  $E$  un ensemble », ou, lorsqu'ils sont particuliers, avoir leur lettre dédiée. Par exemple :

1.  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,
2.  $\mathbb{Z}$  celui des entiers relatifs,
3.  $\mathbb{Q}$  celui des rationnels,
4.  $\mathbb{R}$  celui des réels.

Un ensemble est souvent décrit par ses *éléments* ; si  $x$  est un élément d'un ensemble  $E$ , on écrira  $x \in E$ , si ce n'est pas le cas,  $x \notin E$ . Par exemple :

$$2 \in \mathbb{N}, \quad -3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Si  $E$  est un ensemble fixé, on dit qu'un ensemble  $A$  est *inclus* ou *une partie* de  $E$  si tous les éléments de  $A$  sont aussi des éléments de  $E$  ; on écrit alors :

$$A \subset E.$$

Par exemple :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

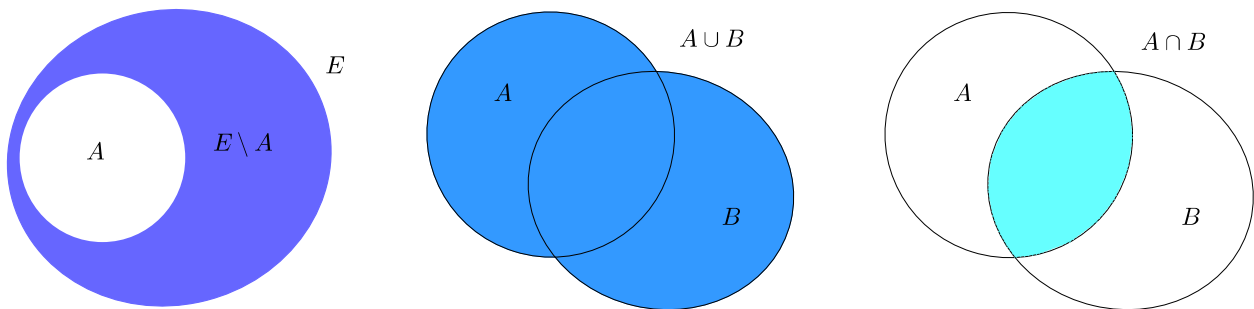
Un autre ensemble joue un rôle particulièrement important : l'ensemble vide. Il s'agit de l'ensemble qui ne contient aucun élément, noté  $\emptyset$ .

Pour  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ , il est possible de définir des opérations sur  $A$  et  $B$  en utilisant la table suivante, pour  $x$  un élément de  $E$  :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in E \setminus A$	$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

ou, autrement dit :

$$x \in E \setminus A \iff \text{non}(x \in A), \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B), \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$



On appelle ces ensembles :

1.  $E \setminus A = \overline{A} = \mathcal{C}_A^E$ , le *complémentaire* de  $A$  dans  $E$ ,
2.  $A \cup B$ , l'*union* de  $A$  et  $B$ ,
3.  $A \cap B$ , l'*intersection* de  $A$  et  $B$ .

### 1.3 Quantificateurs, premiers raisonnements

Pour formuler des propositions mathématiques, il est souvent utile d'utiliser des quantificateurs. Ils sont au nombre de deux :

$$\forall : \text{« pour tout »}, \quad \exists : \text{« il existe »}.$$

Traitons un exemple ; la proposition « tout réel élevé au carré est positif » peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0.$$

Les quantificateurs sont particulièrement agréables pour travailler avec les négations ; en effet :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) = \exists x \in E, \text{non}(P(x)) \quad \text{et} \quad \text{non}(\exists x \in E, P(x)) = \forall x \in E, \text{non}(P(x)).$$

#### Exemple(s) 1 :

### 1.1 La proposition

« Tout réel est inférieur à  $10^{99}$  »

est fausse ! Elle s'écrit  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 10^{99}$  et sa négation :  $\exists x \in \mathbb{R}, x > 10^{99}$  est clairement vraie en prenant  $x = 10^{99} + 1$ . C'est ce qu'on appelle une recherche de contre-exemple ; ce type de raisonnement se résume en :

*Pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, il suffit d'en trouver un contre-exemple.*

1.2 Dans une proposition logique, l'ordre des quantificateurs est primordial. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y$$

est vraie ; il suffit de prendre  $x = y$  mais :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y$$

est clairement fausse : un contre exemple est donné par  $y = x + 1$ .

Terminons cette partie par trois types de raisonnements couramment utilisés :

1. *Le raisonnement par implication directe* : c'est le plus simple à utiliser, pour prouver  $P \implies Q$  on suppose  $P$  vrai et on en déduit qu'alors  $Q$  aussi. Par exemple :

« Si  $x$  est positif, alors  $x$  est le carré d'un réel »

Est une proposition vraie. En effet, si  $x$  est positif, alors  $\sqrt{x}$  existe donc on peut écrire :  $x = (\sqrt{x})^2$ .

2. *Le raisonnement par contraposée* : qui se base sur la constatation suivante :

P	Q	non(P)	non(Q)	non(Q) $\implies$ non(P)	P $\implies$ Q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Ou, autrement dit :

$$(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)).$$

La méthode consiste donc à supposer que  $Q$  est faux et à en déduire que  $P$  est faux. Par exemple :

« Si  $\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon$  alors  $x \leq 0$  »

est une proposition vraie. En effet, sa contraposée est :

« Si  $x > 0$  alors  $\exists \epsilon > 0, x > \epsilon$  » et elle est vraie car si  $x > 0$  alors  $\epsilon = x/2 > 0$  et  $x > x/2 = \epsilon$ .

3. *Le raisonnement par l'absurde* : qui part du principe qu'il est équivalent de dire que  $P$  est vraie et que  $\text{non}(P)$  est fausse. Vous en avez sans-doute déjà vu deux : la preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  et celle de l'infinité des nombres premiers. Voyons un autre exemple ; montrons que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{Q}$$

Supposons pour ceci par l'absurde que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Alors en particulier, comme  $\sqrt{2}$  est irrationnel,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  aussi. Mais alors, pour les irrationnels  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $b = \sqrt{2}$ , on trouve :

$$a^b = \left( \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde ! La proposition est donc vraie. Notez le côté particulièrement frustrant d'une telle preuve ; il est impossible de décider qui de  $a = \sqrt{2}$  et  $b = \sqrt{2}$  ou  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $b = \sqrt{2}$  est l'exemple ici. On sait donc qu'il existe un exemple, mais on est incapable de dire lequel...

Il reste un dernier « raisonnement » : l'analyse-synthèse. Il s'agit par ce raisonnement de montrer qu'un objet ayant certaines propriétés existe. On commence (souvent au brouillon) par supposer que l'objet existe avec ses propriétés, puis on raisonne par *conditions nécessaires* jusqu'à trouver un exemple. On termine en vérifiant (sur la copie) que l'exemple trouvé a bien les bonnes propriétés (on parle de *conditions suffisantes*). Par exemple, si un exercice nous demande de trouver s'il existe un paramètre  $m$  tel que l'équation :

$$x^2 + m \times x + 11 = 0$$

admet une solution entière, on commence par supposer (ce qui se fait, j'insiste, au brouillon!) que  $m$  est tel quel ceci est vrai. L'équation admet alors deux solutions,  $x_1$  et  $x_2$  qui vérifient :

$$x_1 \times x_2 = 11$$

dont au moins l'une est un entier. Comme 11 est un nombre premier, on en déduit que  $x_1 = 1$  ou 11. Supposons par exemple que  $x_1 = 1$  et remplaçons dans l'équation ; on trouve :

$$1 + m + 11 = 0$$

et l'on en déduit  $m = -12$ . Ceci termine l'analyse et notre travail au brouillon. Sur la copie, il s'agit seulement d'écrire :

*Prenons  $m = -12$ . Alors 1 est un entier racine de l'équation  $x^2 + m \times x + 11$ . Il existe donc un tel paramètre  $m$ .*

Notez que si l'énoncé avait demandé *tous* les paramètres  $m$  tels que cette équation admette une solution entière, la rédaction aurait été différente...

## Chapitre 2

# Équations différentielles : quelques cas simples pour la physique

## 2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

**Définition 2.1.1 :** Soit  $I$  un intervalle et  $b$  une fonction définie sur  $I$ . Soit  $a$  un réel. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants* une expression du type :

$$y' + a \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $I$  qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du premier ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de  $t_0 \in I$  et de  $y_0$  un réel ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y' + a \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution  $f$  de l'équation différentielle qui vérifie de plus  $f(t_0) = y_0$ .

**Remarque(s) 2 :** 1. La fonction  $b$  est appelée **second membre** de l'équation différentielle.

2. Lorsqu'on travaille avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = b(t),$$

on est souvent amené à travailler aussi avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0$$

on l'appelle **équation différentielle homogène associée**.

3. Il y a deux questions à se poser systématiquement lorsqu'on travaille avec un problème de Cauchy : une solution existe-t-elle (**existence**) ? Est-elle unique (**unicité**) ?
4. En mathématiques, il est important de bien distinguer l'équation différentielle et le problème de Cauchy ; souvent, un problème de Cauchy admet une unique solution (c'est ce qui semble intuitif en physique ; par exemple, le mouvement doit être unique) mais une équation différentielle une infinité.

**Propriété(s) 2.1.1 :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :  $y' + a \times y = 0$  est :

$$S = \{t \in I \mapsto C \times e^{-a \times t}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Le problème de Cauchy associé, pour la condition initiale  $y(t_0) = y_0$  admet une unique solution :

$$f : t \in I \mapsto y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}.$$

**Démonstration :** Commençons par le premier point. Appelons  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0.$$

Il s'agit de montrer que les ensembles  $S$  et  $S_0 = \{t \in I \mapsto C \times e^{-a \times t}, C \in \mathbb{R}\}$  sont égaux. Procédons par double inclusion :

1. Si  $f \in S_0$  alors il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $t$  de  $I$ ,  $f(t) = C \times e^{-a \times t}$ . Alors  $f'(t) = -a \times f(t)$  donc  $f \in S$ .
2. Si  $f \in S$ , alors si pour tout  $t$  de  $I$ ,  $g(t) = f(t) \times e^{a \times t}$ , on a :

$$g'(t) = (f'(t) + a \times f(t)) \times e^{a \times t} = 0$$

Donc la fonction  $g$  est constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall t \in I, f(t) \times e^{a \times t} = g(t) = C.$$

Donc  $f(t) = C \times e^{-a \times t}$ ,  $f \in S_0$ .

Pour le deuxième point, procédons par analyse et synthèse. Si  $f$  est une solution du problème de Cauchy, c'est une solution de l'équation différentielle. Il existe donc une constante  $C$  telle que :

$$\forall t \in I, f(t) = C \times e^{-a \times t}.$$

On utilise maintenant la condition initiale :  $y_0 = f(t_0) = C \times e^{-a \times t_0}$  donc  $f(t) = y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}$ . Donc si il existe une solution au problème de Cauchy, c'est celle-ci. Effectuons maintenant la synthèse : si  $f(t) = y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}$ , alors  $f(t_0) = y_0$  et  $f$  est solution de l'équation différentielle. La solution existe donc. ■

Comment passer d'une équation homogène à une équation quelconque ? On peut utiliser, pour ceci, le **principe de superposition** : si  $f$  est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t)$$

et  $g$  une solution de

$$y' + a \times y = c(t)$$

alors  $f + g$  est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t) + c(t).$$

De ce principe, on déduit immédiatement que :

**Propriété(s) 2.1.2 :** S'il existe  $f_0$ , une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + a \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est :

$$S = \{t \in I \mapsto f_0(t) + C \times e^{-a \times t}, C \in \mathbb{R}\}.$$

En particulier, la solution du problème de Cauchy est unique.

Il reste une dernière chose à régler : comment trouver cette solution particulière ? Nous verrons des méthodes plus générales dans un chapitre ultérieur, mais pour le moment, nous nous contenterons de quelques cas particuliers :

Forme de $b$	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A \times e^{\lambda \times t}$	si $-a \neq \lambda$ , $B \times e^{\lambda \times t}$ sinon $B \times t \times e^{\lambda \times t}$
$A \times \cos(\omega \times t) + B \times \sin(\omega \times t)$	$D \times \cos(\omega \times t) + E \times \sin(\omega \times t)$

**Exemple(s) 2 :**

2.1 Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y' + y = e^{-t}.$$

Commençons par résoudre l'équation homogène  $y' + y = 0$ . Les solutions sont :

$$S_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière ; le tableau nous dit qu'elle sera de la forme  $B \times t \times e^{-t}$ . Un calcul direct nous donne que cette fonction est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$B \times e^{-t} = e^{-t}$$

il faut et il suffit donc que  $B = 1$ , donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto (C + t) \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Résolvons sur  $\mathbb{R}$  le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + y = \cos(3t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On connaît déjà les solutions de l'équation homogène. Cherchons maintenant une solution particulière. Le tableau nous dit d'essayer  $t \mapsto D \times \cos(3t) + E \times \sin(3t)$ . En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} 3E + D = 1 \\ -3D + E = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} D = \frac{1}{10} \\ E = \frac{3}{10} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3t) + 3 \sin(3t)) + C \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Résolvons maintenant le problème de Cauchy. Une solution du type :

$$t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3t) + 3 \sin(3t)) + C \times e^{-t}$$

est solution du problème de Cauchy pour la condition initiale  $y(0) = 0$  si et seulement si  $\frac{1}{10} + C = 0$ . La solution du problème de Cauchy est donc :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3t) + 3 \sin(3t) - e^{-t}).$$

2.3 Terminons en cherchant les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + y = \cos(3t) + e^{-t}.$$

Pour ceci, nous allons utiliser le principe de superposition ; on a déjà calculé une solution particulière de :

$$y' + y = e^{-t}$$

et une solution particulière de :

$$y' + y = \cos(3t),$$

on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3t) + 3 \sin(3t)) + (C + t) \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

**Définition 2.2.2 :** Soit  $I$  un intervalle et  $b$  une fonction définie sur  $I$ . Soit  $p$  et  $q$  deux réels. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une expression du type :

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $I$ , telle que  $f'$  soit aussi dérivable sur  $I$  et qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du second ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de  $t_0 \in I$  et de  $(y_0, z_0)$  des réels ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y'' + p \times y' + q \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution  $f$  de l'équation différentielle qui vérifie de plus  $f(t_0) = y_0$  et  $f'(t_0) = z_0$ .

**Remarque(s) 3 :** 1. Comme pour l'équation de degré un, on parle de second membre pour  $b$  et d'équation homogène pour :

$$y'' + p \times y' + q \times y = 0.$$

2. Il existe une quantité essentielle pour ces équations différentielles : **l'équation caractéristique associée** :

$$x^2 + p \times x + q = 0$$

dont on notera dans ce cours le discriminant  $\delta = p^2 - 4q$ .

**Théorème 2.2.1 :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'' + p \times y' + q \times y = 0$$

est :

$$S = \{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\},$$

avec :

1. Si  $\delta > 0$  :

$$f_1(t) = \exp\left(\frac{-p + \sqrt{\delta}}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \exp\left(\frac{-p - \sqrt{\delta}}{2} \times t\right),$$

2. Si  $\delta = 0$  :

$$f_1(t) = \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = t \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right),$$

3. Si  $\delta < 0$  :

$$f_1(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right).$$

De plus, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.



**Démonstration :** Faisons la preuve dans le premier cas. Dans le deuxième, la preuve est exactement la même et pour le troisième, elle sera exactement la même une fois qu'on saura dériver l'exponentielle complexe. Commençons par remarquer que comme :

$$f_1(t) = \exp(x_1 \times t)$$

où  $x_1$  est une racine de l'équation

$$x^2 + p \times x + q = 0$$

alors :

$$f_1''(t) + p \times f_1'(t) + q \times f_1(t) = (x_1^2 + p \times x_1 + q) \times \exp(x_1 \times t) = 0.$$

Donc  $f_1$  donc de même  $f_2$  (car elle est définie par la deuxième racine de l'équation,  $x_2$ ) puis par principe de superposition tout l'ensemble de fonctions  $\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}$  sont solutions de l'équation différentielle. Montrons que ce sont les seules. Si  $f$  est une solution de l'équation différentielle, posons pour tout  $t$  :

$$g(t) = f(t) \times \exp(-x_1 \times t) \iff f(t) = g(t) \times \exp(x_1 \times t).$$

Comme  $f$  est solution de l'équation différentielle, on a :

$$f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = 0 \iff ((x_1^2 + p \times x_1 + q) \times g(t) + (2x_1 + p) \times g'(t) + g''(t)) \times e^{x_1 \times t} = 0$$

on utilise une nouvelle fois que  $x_1$  est racine de l'équation caractéristique et on en déduit que  $g'$  est solution de l'équation différentielle :

$$y' + \sqrt{\delta} \times y = 0.$$

Donc par ce qu'on a déjà vu sur les équations différentielles d'ordre un, il existe un réel  $A$  tel que :

$$g'(t) = A \times e^{-\sqrt{\delta} \times t}$$

donc comme  $\delta \neq 0$ , il existe une constante  $B$  telle que :

$$g(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{-\sqrt{\delta} \times t} + B \iff f(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{x_2 \times t} + B \times e^{x_1 \times t}.$$

La fonction  $f$  appartient donc à l'ensemble de fonctions  $\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Parlons maintenant du problème de Cauchy : une solution  $C \times f_1 + D \times f_2$  est solution du problème de Cauchy si et seulement si :

$$\begin{cases} C \times f_1(t_0) + D \times f_2(t_0) = y_0 \\ C \times x_1 \times f_1(t_0) + D \times x_2 \times f_2(t_0) = z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} D \times \sqrt{\delta} \times f_2(t_0) = y_0 \times x_1 - z_0 \\ C \times \sqrt{\delta} \times f_1(t_0) = y_0 \times x_2 - z_0 \end{cases}$$

ce qui montre, comme  $\sqrt{\delta}$ ,  $f_1(t_0)$  et  $f_2(t_0)$  sont non nuls que  $C$  et  $D$  existent et sont uniques, donc la solution au problème de Cauchy aussi. ■

### Exemple(s) 3 :

3.1 L'équation différentielle :

$$y'' - y' - 6y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \{t \mapsto C \times e^{3t} + D \times e^{-2t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3.2 L'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \{t \mapsto (C \times t + D) \times e^{-2t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3.3 L'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \{t \mapsto (C \times \cos(3t) + D \times \sin(3t)) \times e^{-2t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre un, on peut utiliser le principe de superposition ; on en déduit :

**Propriété(s) 2.2.3 :** Si  $f_0$  est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation sont :

$$S = \{f_0 + f, \quad f \in S_0\}$$

où  $S_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. En particulier, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.

Terminons, comme dans la partie précédente, par quelques méthodes pour trouver des solutions particulières :

Forme de $b$	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A \times e^{\lambda \times t}$	si $\lambda$ n'est pas racine, $B \times e^{\lambda \times t}$ ; si $\lambda$ est racine simple $B \times t \times e^{\lambda \times t}$ sinon $B \times t^2 \times e^{\lambda \times t}$
$A \times \cos(\omega \times t) + B \times \sin(\omega \times t)$	$D \times \cos(\omega \times t) + E \times \sin(\omega \times t)$ sauf si $p = 0$ et $q = \omega^2$ : $D \times t \times \cos(\omega \times t) + E \times t \times \sin(\omega \times t)$

#### Exemple(s) 4 :

4.1 Considérons l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}.$$

L'équation caractéristique  $x^2 + 2x + 1$  a pour racine double  $-1$ , donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S_0 = \{t \mapsto (C + D \times t) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Recherchons maintenant une solution particulière. Comme  $-1$  est racine double de l'équation caractéristique, il s'agit de trouver une solution du type  $B \times t^2 \times e^{-t}$ . En remplaçant dans l'équation, on a qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$2B \times e^{-t} = e^{-t}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \left( \frac{t^2}{2} + D \times t + C \right) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4.2 Soit  $\omega \neq \omega_0$  deux réels strictement positifs. Cherchons la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 \times y = \cos(\omega_0 \times t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Commençons par remarquer que les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_0 = \{t \mapsto C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle. Chance ! Comme  $\omega \neq \omega_0$ , il s'agit de trouver une solution du type  $A \times \cos(\omega_0 \times t) + B \times \sin(\omega_0 \times t)$ . En remplaçant dans l'équation, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} A \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 1 \\ B \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant la solution du problème de Cauchy. Une solution  $f$  du problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle, donc il existe des réels  $C$  et  $D$  tels que

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t).$$

Utilisons maintenant les conditions initiales, qui nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + C = 1 \\ D \times \omega = 0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donc la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t) - \cos(\omega \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega \times t).$$

#### 4.3 Cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(t)$$

Les solutions de l'équation homogène sont immédiatement :

$$S_0 = \{ t \mapsto C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Pour trouver une solution particulière, nous sommes dans le cas où il faut chercher une solution du type  $D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t)$ . En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$-2D \times \sin(t) - D \times t \times \cos(t) + 2E \times \cos(t) - E \times t \times \sin(t) + D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t) = \cos(t).$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2D = 0 \\ 2E = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

#### 4.4 Enfin, si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2 + \cos(t)$$

On peut utiliser le principe de superposition et remarquer que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2$$

pour conclure que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ t \mapsto 2 + \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$



## Chapitre 3

# Études de fonctions

### 3.1 Généralités sur les fonctions

**Définition 3.1.3 :** Une fonction  $f$  est la donnée de deux ensembles  $E$  et  $F$  et, pour chaque  $x \in E$  d'un unique élément  $f(x) \in F$ . On la note :

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

1. On appelle  $E$  l'ensemble de définition de  $f$ ,
2. on dit que  $f$  est à valeurs dans  $F$ ,
3. et que  $f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ .

On notera  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$  l'ensemble des fonctions définies sur  $E$  à valeurs dans  $F$ .

**Remarque(s) 4 :** 1. Pour une fonction  $g$  réelle à valeurs réelle que l'on souhaite définir par une formule, il est parfois utile de chercher le domaine de définition **maximal**, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \text{ existe}\}.$$

Par exemple :

- (a) la fonction  $\ln$  admet pour domaine de définition maximal  $\mathbb{R}_+^*$
- (b) la fonction racine carrée admet pour domaine de définition maximal  $\mathbb{R}_+$
- (c) si l'on souhaite définir  $g$  par la formule  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , le domaine de définition maximal de  $g$  est  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
2. Concernant l'ensemble  $F$ , il est souvent utile de le choisir aussi **petit** que possible, c'est-à-dire **l'ensemble image** :

$$f(E) = \{f(x), \quad x \in E\}.$$

Par exemple :

- (a) La fonction exponentielle :  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet pour ensemble image  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 8$  admet pour ensemble image  $[-8, +\infty[$ .
3. Notez que, par définition, l'image de  $x$  par  $f$  est unique. Si  $y \in F$ , on appelle **antécédent** de  $y$  par  $f$  un  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = y$ . Par exemple, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $f(x) = x^2$ , alors :
  - (a)  $-1$  n'a pas d'antécédent,
  - (b)  $0$  a un unique antécédent :  $0$ ,
  - (c)  $1$  admet deux antécédents :  $-1$  et  $1$ .

**Exemple(s) 5 :**

5.1 La fonction

$$\text{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

est appelée **identité de  $E$** .

5.2 Si  $G \subset E$ , alors :

$$\mathbb{1}_G : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 1 \text{ si } x \in G, \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction, appelée **indicatrice de  $G$** .

5.3 Si  $f : E \rightarrow F$  est une fonction et  $G \subset E$  alors :

$$f|_G : \begin{cases} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **restriction de  $f$  à  $G$** .

5.4 (Hors programme) Si  $f : E \rightarrow F$  est une fonction et  $G \subset f(E)$  alors :

$$f|_G : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **co-restriction de  $f$  à  $G$** .

## 3.2 Opérations sur les fonctions

**Définition 3.2.4 :** Soit  $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F)$ . Supposons que  $F \subset \mathbb{R}$ . On définit les fonctions :

1. somme de  $f$  et  $g$ , notée  $f + g \in \mathcal{F}(E, F)$  par :  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
2. produit de  $f$  et  $g$ , notée  $f \times g \in \mathcal{F}(E, F)$  par :  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ .
3. si  $g$  ne s'annule pas sur  $E$ , le quotient de  $f$  par  $g$ , noté  $\frac{f}{g} \in \mathcal{F}(E, F)$  par :  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Exemple(s) 6 :**

6.1 Attention ! Il est important de vérifier que la fonction  $g$  ne s'annule pas avant d'écrire un quotient. Par exemple, si  $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sont définies par  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^2 - 1$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  n'est pas défini sur  $\mathbb{R}$  ! Son domaine de définition maximal est :

$$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

**Définition 3.2.5 :** Soit  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{F}(G, H)$  Alors si  $\boxed{F \subset G}$ , on peut définir la composition de  $f$  par  $g$ , notée  $g \circ f \in \mathcal{F}(E, H)$  par :

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

**Exemple(s) 7 :**

7.1 Dans la définition, l'inclusion est indispensable ! Par exemple, si  $f$  est la fonction logarithme et  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est définie par  $g(x) = x$ , alors  $f \circ g$  n'existe pas !

7.2 Si :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

Alors :

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x| \end{cases} \quad \text{et} \quad g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

En particulier,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont deux fonctions très différentes.

### 3.3 Tangentes et dérivées

Considérons maintenant une courbe  $\mathcal{C}$  du plan (intuitivement, quelque chose que l'on peut tracer avec un crayon). Un cas particulier nous sera celui des courbes définies par des fonctions  $f$  définies sur un intervalle  $I$  :

$$\mathcal{C} = \{(x, y), \quad y = f(x), \quad x \in I\}$$

on parle alors de **graphe** de la fonction  $f$ . Une information intéressante pour tracer le graphe de la fonction  $f$  est donnée par la définition suivante :

**Définition 3.3.6 :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On dit que :

1.  $f$  est croissante sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y),$$

2.  $f$  est décroissante sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y),$$

3.  $f$  est monotone sur  $I$  si elle est croissante ou décroissante sur  $I$ ,

4.  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I, \quad x < y \implies f(x) < f(y),$$

5.  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I, \quad x < y \implies f(x) > f(y),$$

6.  $f$  est strictement monotone sur  $I$  si  $f$  est strictement croissante ou strictement décroissante sur  $I$ .

La définition suivante est aussi souvent utile :

**Définition 3.3.7 :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On dit que :

1.  $f$  est majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq M$$

2.  $f$  est minorée si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq f(x)$$

3.  $f$  est bornée si  $f$  est majorée et minorée.

**Exemple(s) 8 :**

8.1 La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est :

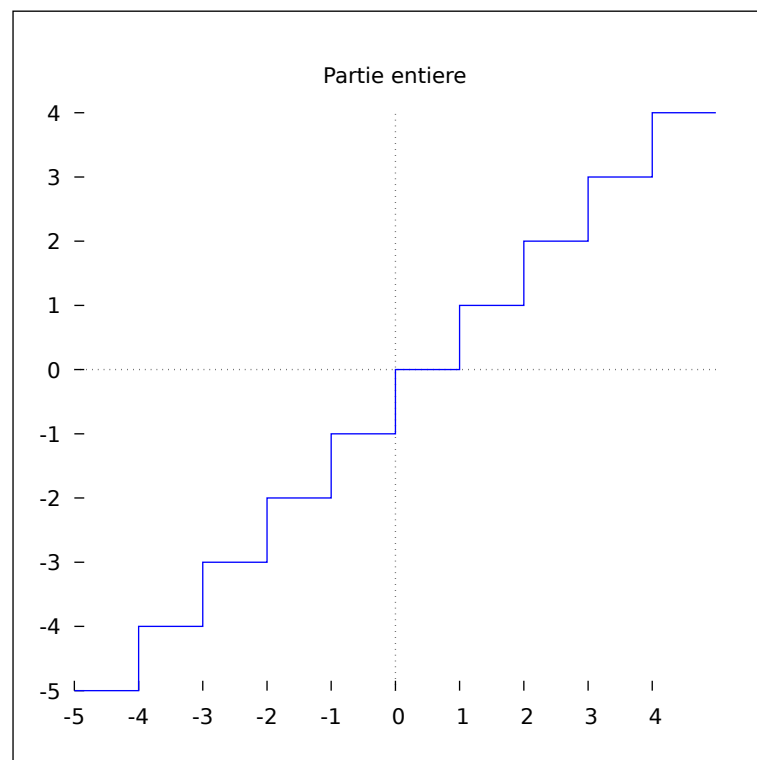
- (a) strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,
- (b) strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ ,
- (c) non monotone sur  $\mathbb{R}$
- (d) ni majorée ni minorée sur  $\mathbb{R}$ .

8.2 La fonction sin et la fonction cos sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

8.3 On définit la fonction partie entière pour tout réel  $x$  par :

$$\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z} \iff k \leq x < k + 1$$

Le graphe de cette fonction est (attention, l'ordinateur ne « voit » pas bien ce qui se passe à chaque entier) :



Alors :

- (a) La fonction partie entière est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,
- (b) elle n'est pas strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.3.1 Droites du plan, pentes

On peut définir une droites du plan de plusieurs façons différentes :

1. Par un *lieu géométrique* :

- (a) la droite passant par deux points distincts,
- (b) la droite passant par un point et dirigée par un vecteur non nul,



(c) la droite parallèle à une autre passant par un point, ou perpendiculaire...

2. Par une équation *paramétrique*, qui est souvent la façon algébrique la plus simple de décrire une droite à partir d'un lieu géométrique ; par exemple la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A = (a, b)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u} = (u, v) \neq (0, 0)$  a pour équation paramétrique :

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad M = A + t \cdot \vec{u}.$$

Ou encore :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases}.$$

3. Par une équation *cartésienne*, qui est souvent la formulation la plus simple à manier pour les calculs ; si l'on reprend le cas de l'exemple précédent, comme  $u \times v \neq 0$ , on a :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases} \iff \boxed{v \times (x - a) - u \times (y - b) = 0}.$$

**Remarque(s) 5 :** Il est important de savoir passer d'une écriture à l'autre dans ces définitions ; par exemple si l'énoncé vous donne l'équation cartésienne ( $\beta \neq 0$ ) :

$$\alpha \times x + \beta \times y + \gamma = 0$$

il faut savoir immédiatement dire que cette droite est dirigée par le vecteur  $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$  et passe par le point  $\left(0, \frac{-\gamma}{\beta}\right)$ .

**Définition 3.3.8 :** Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan, que l'on suppose dirigée par un vecteur  $\vec{u} = (u, v)$ ,  $u \neq 0$ . On appelle *pente* de la droite  $\mathcal{D}$  la valeur  $v/u$ .

**Remarque(s) 6 :** 1. Parfois, il est commode de quand même parler de pente d'une droite si  $u = 0$ . On dira dans ce cas que la droite a une pente infinie.

2. Il semble *a priori* que changer de choix de vecteur  $\vec{u}$  pourrait changer la valeur de la pente de la droite  $\mathcal{D}$ . Ce n'est pas le cas ! Si  $\vec{v}$  est un autre vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ , alors  $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$  ( $\lambda \neq 0$ ) donc  $\vec{v} = (\lambda \times u, \lambda \times v)$  et

$$\frac{\lambda \times v}{\lambda \times u} = \frac{v}{u}$$

on dit que la pente est une propriété intrinsèque de la droite (et non du vecteur).

3. Considérons la droite d'équation  $y = a \times x + b$  ; la pente de cette droite est alors égale à  $a$ , si l'on définit alors sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f$  par  $f(x) = a \times x + b$ , on remarque immédiatement que sur  $\mathbb{R}$  :

- (a)  $f$  est croissante si et seulement si  $a \geq 0$ ,
- (b)  $f$  est décroissante si et seulement si  $a \leq 0$ ,
- (c)  $f$  est strictement croissante si et seulement si  $a > 0$
- (d)  $f$  est strictement décroissante si et seulement si  $a < 0$

une des idées de la tangente est de généraliser ce fait aux courbes en utilisant en chaque point une droite « meilleure approximation » de la courbe.

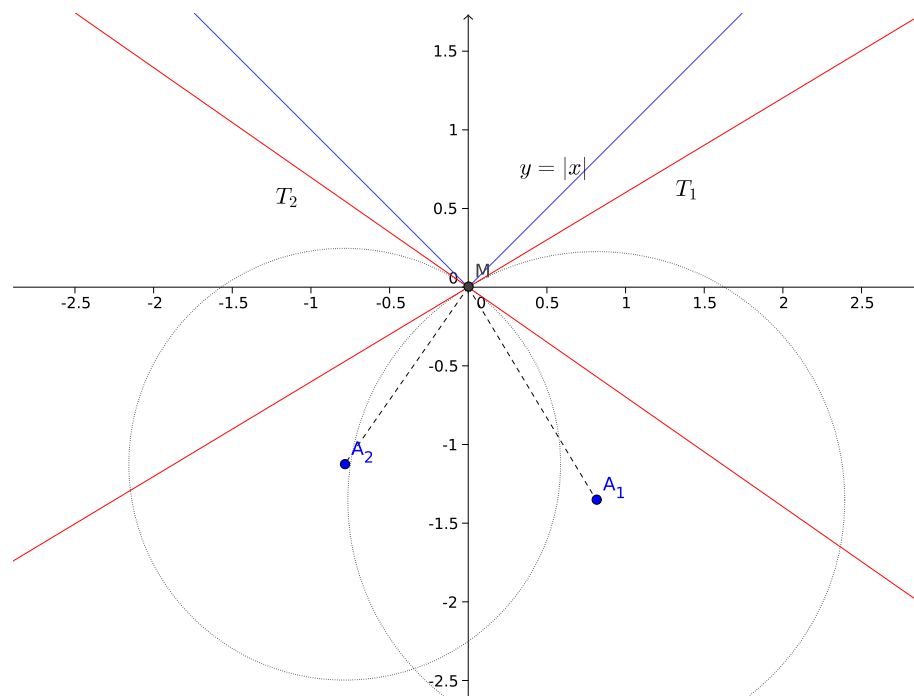
### 3.3.2 Tangentes, nombre dérivé, version géométrique (hors programme, non fait en cours)

*Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie. (Descartes, sur la tangente d'une courbe en un point)*

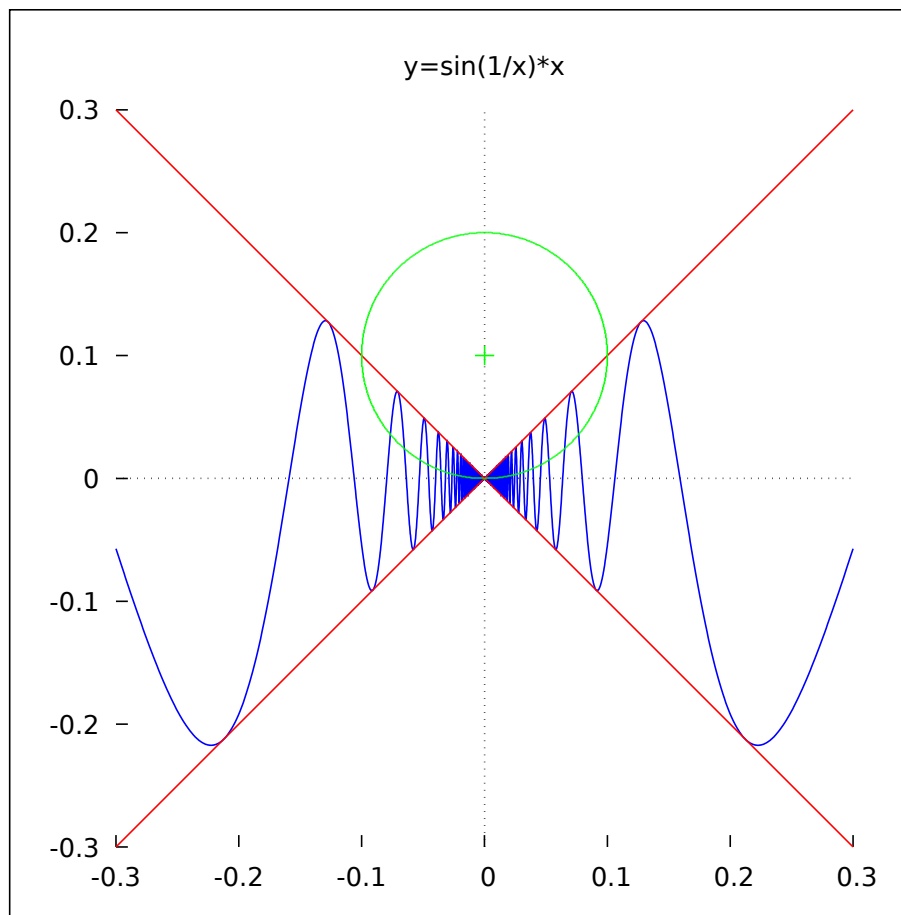
La définition suivante est, pour une fois, **à ne pas retenir** : elle montre la difficulté qu'il existe à définir une tangente de façon géométrique :

**Définition 3.3.9 :** (Descartes) Soit  $M$  un point de la courbe  $\mathcal{C}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  admet une tangente au point  $M$  si il existe un cercle de centre  $A$  différent de  $M$  dont l'intersection avec  $\mathcal{C}$  est réduite à  $M$ . Une tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $M$  est alors la droite passant par  $M$  orthogonale à la droite  $(AM)$ .

**Remarque(s) 7 :** 1. Notez qu'à priori, rien ne dit que la tangente en un point d'une courbe est unique ; parfois, c'est même faux :

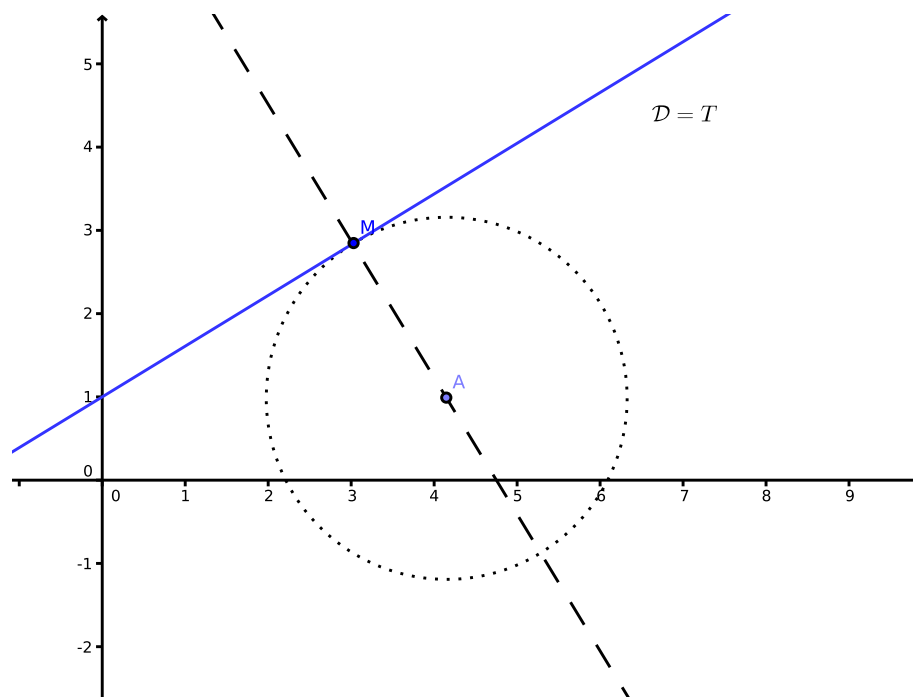


2. Il est même possible qu'une courbe n'admette pas en un point de tangente ; ici, il est impossible de tracer un cercle qui n'intersecte la courbe qu'en le point  $(0, 0)$  :

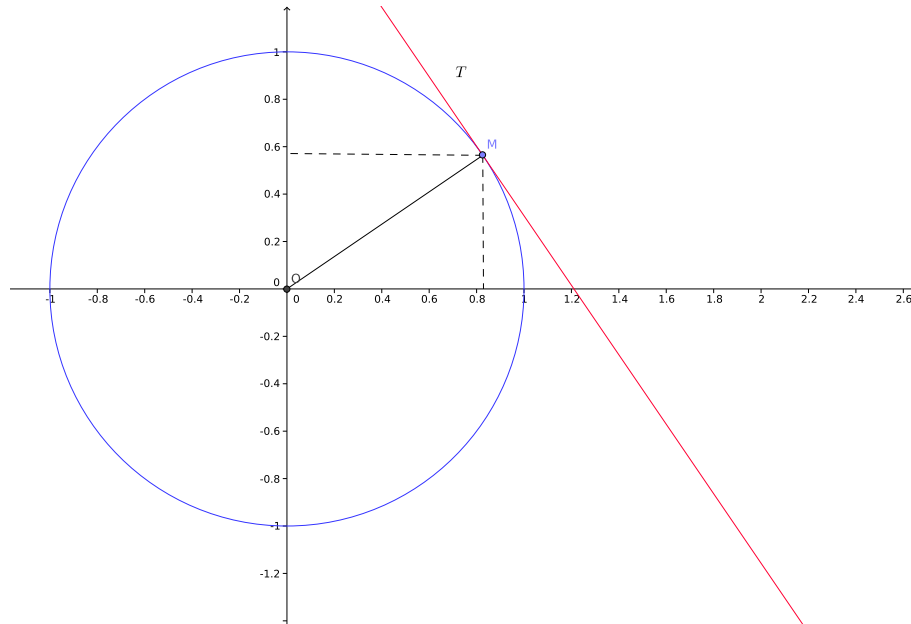


3. Il est cependant important de connaître certains résultats :

- (a) Dans le cas d'un point  $M$  appartenant à une droite  $\mathcal{D}$ , il n'y a qu'une seule droite tangente  $T$  à  $\mathcal{D}$  au point  $M$  : la droite  $\mathcal{D}$  elle-même !



- (b) Dans le cas d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  la tangente  $T$  du cercle  $\mathcal{C}$  au point  $M$  est unique ; c'est la droite perpendiculaire à  $(OM)$  qui passe par  $M$ .



La méthode géométrique donnée par la définition est particulièrement mauvaise pour faire des calculs. Heureusement, il existe une meilleure méthode pour certaines courbes. Tout part de la remarque suivante : elle est unique, pour connaître la tangente en un point  $M$  d'une courbe, il suffit d'en connaître la pente, puisqu'on en connaît déjà un point :  $M$ .

**Définition 3.3.10 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  est dérivable en  $x \in I$  si la courbe  $\mathcal{C} = \{(x, y), y = f(x), x \in I\}$  admet en  $(x, f(x))$  une unique tangente de pente finie. On note alors  $f'(x)$  la pente de cette tangente. Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  et on note  $f'$  et on appelle fonction dérivée de  $f$  la fonction définie sur  $I$  qui à  $x$  associe  $f'(x)$ .

### Exemple(s) 9 :

9.1 On commence à s'approcher de ce que vous connaissez : la fonction  $f'$  ! Ce qu'il faut retenir de ce paragraphe est la chose suivante : il n'est absolument pas évident, à priori, que donnée une fonction, cette fonction soit dérivable ; on a par exemple montré que les fonctions :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

ne sont pas dérivables en 0.

9.2 Cependant, on sait déjà calculer un type de fonction dérivée ; si  $f$  est définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = a \times x + b$$

alors  $f'(x) = a$ , puisque la tangente d'une droite est la droite elle-même !

### 3.3.3 Le grand prêt : calculs pratiques de dérivées

Pour réussir à utiliser quand-même la notion de dérivée, nous allons temporairement emprunter les résultats d'une centaine d'années de recherche mathématique ; l'idée est d'utiliser une définition analytique de la dérivée :

**Définition 3.3.11 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si :

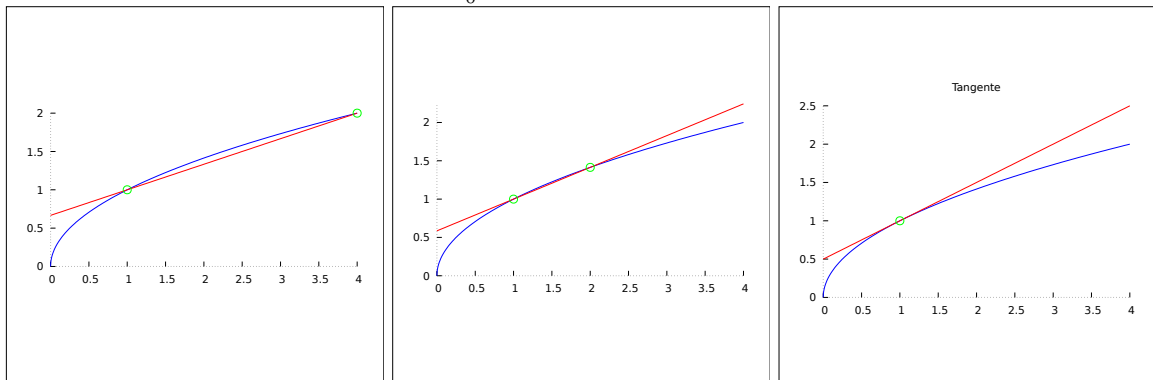
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On la note alors  $f'(x_0)$ . On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout  $x_0 \in I$ .

**Remarque(s) 8 :** 1. D'où vient cette idée? On peut faire un dessin pour essayer de l'expliquer. Si une droite passe par  $(x, f(x))$  et  $(x_0, f(x_0))$ , alors elle a pour pente :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

l'idée est d'ensuite faire tendre  $x$  vers  $x_0$  :



2. Notez que par définition, si elle existe, l'équation de la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(a, f(a))$  est donnée par :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

3. Rappelez vous que toutes les fonctions ne sont pas dérivables, même avec cette définition. Par exemple, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0.

On a le tableau suivant des dérivations des fonctions usuelles sur  $\mathbb{R}$  :

$f(x)$	$f'(x)$	dérivable sur
$x^n, (n \in \mathbb{N})$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^{-n}, (n \in \mathbb{N}^*)$	$(-n) \times x^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$

### Exemple(s) 10 :

10.1 Dans tous les exemples précédents, le domaine de dérivabilité est le même que celui de définition. Mais la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et n'est dérivable que sur  $\mathbb{R}_+^*$  !

**Propriété(s) 3.3.4 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivables sur  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors

1.  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$ .
2.  $k.f$  est dérivable sur  $I$  et  $(k.f)' = k.f'$ .
3.  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

4. Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f/g$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

5. Si  $h : J \supset f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , est dérivable sur  $J$ , alors  $h \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'.$$

**Exemple(s) 11 :**

- 11.1 Par soucis de cohérence, on peut vérifier qu'avec les autres formules, on peut retrouver la formule de dérivation d'un quotient ; on montre d'abord avec la formule de dérivation des composées et celle de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  que la dérivée de  $\frac{1}{g}$  est  $-\frac{g'}{g^2}$ , puis on utilise la formule de dérivation des produits pour obtenir :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \times g'}{g^2} = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}.$$

- 11.2 On définit, pour  $\alpha$  un réel quelconque **la fonction puissance**  $\alpha$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \times \ln(x)).$$

Alors, cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée :

$$\alpha \times \frac{1}{x} \times \exp(\alpha \times \ln(x)) = \alpha \times x^{\alpha-1}.$$

- 11.3 On définit la fonction tangente par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Son domaine de définition maximal est :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

et l'on peut calculer sa dérivée en tout  $x$  de son ensemble de définition :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

- 11.4 Un exercice de calcul de dérivée commence souvent par la détermination du domaine de dérivation. Par exemple, si l'on cherche à calculer la dérivée de :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$

l'ensemble de définition maximal de cette fonction est  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  mais son ensemble de dérivation est seulement  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  ! Pour tout  $x$  de ce domaine, on a alors :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Et tant qu'on est à faire des prêts, en voici un dernier, essentiel :

**Propriété(s) 3.3.5 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On a :

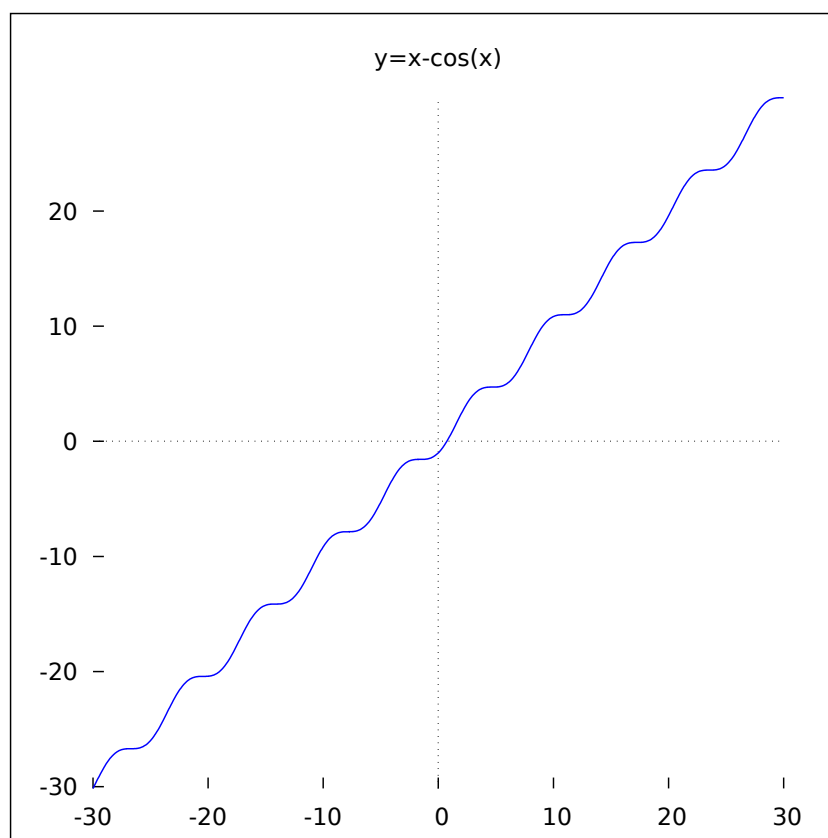
$$\begin{aligned} f' &\geq 0 &\iff f \text{ croissante} \\ f' &\leq 0 &\iff f \text{ décroissante} \\ f' &> 0 &\implies f \text{ strictement croissante} \\ f' &< 0 &\implies f \text{ strictement décroissante} \end{aligned}$$

**Remarque(s) 9 :** 1. Grâce aux deux premières affirmations, on en déduit :

$$f' = 0 \iff f \text{ constante}$$

2. Il est possible de relâcher légèrement les hypothèses pour obtenir une monotonie stricte ; il suffit que la dérivée soit strictement positive, sauf en un nombre fini de points. C'est par exemple pratique de s'en souvenir pour montrer que  $x \mapsto x^n$ ,  $n$  impair est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
3. Notez qu'il n'y a pas de réciproque dans les deux dernières implications, il est même possible qu'une fonction soit strictement croissante alors que sa dérivée s'annule une infinité de fois, comme le montre la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto x - \cos(x).$$



### 3.3.4 Dérivées d'ordre supérieur

- Définition 3.3.12 :** 1. Si  $f$  est dérivable et si  $f'$  est dérivable, on dit que  $f$  est deux fois dérivable. On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$  (la dérivée de  $f'$ ).
2. De manière itérative, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable si  $f$  est  $n - 1$ -fois dérivable et si la dérivée  $(n - 1)$ -ième, notée  $f^{(n-1)}$  est dérivable. On note  $f^{(n)}$  sa dérivée  $n$ -ième.
3. Une fonction  $n$  fois dérivable pour tout entier  $n$  est dite infiniment dérivable (ou de classe  $C^\infty$ ).

On a les propriétés immédiates suivantes :

- Propriété(s) 3.3.6 :** Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , si  $k \in \mathbb{R}$  et si  $h$  est  $n$  fois dérivable sur un intervalle  $J \supset f(I)$ , alors
1.  $f + g$  est  $n$  fois dérivable,
  2.  $k.f$  est  $n$  fois dérivable,
  3.  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable,
  4. si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{f}{g}$  est  $n$  fois dérivable,
  5.  $h \circ f$  est  $n$  fois dérivable.

**Exemple(s) 12 :**

- 12.1 Les fonctions usuelles (données par leur expression en  $x$ ) suivantes sont de classe  $C^\infty$  sur le domaine de dérivation donné.

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{x} & \text{sur} & \mathbb{R}^* \\ e^x, \sin(x), \cos(x), & \text{sur} & \mathbb{R} \\ \ln(x) & \text{sur} & \mathbb{R}_+^* \\ \tan(x) & \text{sur} & \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{array}$$

## 3.4 Limites

Pour compléter un tableau de variations, on a besoin de calculer des limites.

### 3.4.1 Rappels de lycée

Dans ce paragraphe, on notera  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Commençons par quelques exemples à connaître :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} & 0 \\ \frac{1}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} & +\infty \\ \frac{1}{x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} & -\infty \\ \forall \alpha > 0, x^\alpha & \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & +\infty \\ \ln(x) & \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & +\infty \\ \ln(x) & \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} & -\infty \\ e^x & \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & +\infty \\ e^x & \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} & 0 \end{array}$$



**Exemple(s) 13 :**

- 13.1 Notez qu'à priori, il est tout à fait possible qu'une fonction n'admette pas de limite en un point. Par exemple, ni la fonction sinus ni la fonction cosinus n'admet de limite en  $+\infty$ .

**Propriété(s) 3.4.7 :** 1. Si  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite)  $\lambda$  et  $\mu$  réelles en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $f + g$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda + \mu$  en  $a$ .

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad & \ll x + \infty \gg = \ll \infty + x \gg = \ll +\infty + \infty \gg = +\infty, \\ & \ll x - \infty \gg = \ll -\infty + x \gg = \ll -\infty - \infty \gg = -\infty,\end{aligned}$$

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll +\infty - \infty \gg \text{ et } \ll -\infty + \infty \gg.$$

2. Si  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite)  $\lambda$  et  $\mu$  réelles en  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f \times g$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda \times \mu$  en  $a$ .

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque les limites sont dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad & \ll x \times +\infty \gg = \ll +\infty \times x \gg = \ll +\infty \times +\infty \gg \\ & = \ll -\infty \times -\infty \gg = +\infty \\ \forall x < 0, \quad & \ll x \times +\infty \gg = \ll +\infty \times x \gg = \ll +\infty \times -\infty \gg \\ & = \ll -\infty \times +\infty \gg = -\infty\end{aligned}$$

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll 0 \times (+\infty) \gg \text{ et } \ll 0 \times (-\infty) \gg.$$

3. Si  $f$  admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , si  $g$  est définie au voisinage de  $\lambda$  et admet une limite  $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $\lambda$ , alors  $g \circ f(x)$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\mu$  en  $a$ .

**Exemple(s) 14 :**

- 14.1 La fonction définie par  $f(x) = x^2 - x$  vérifie :

$$f(x) = x^2 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Elle admet donc pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

- 14.2 La fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  admet pour limite 0 en  $+\infty$  et comme limite 1 en  $0^+$  et  $0^-$ .

- 14.3 À partir des limites de la fonction  $\frac{1}{x}$  et des limites de produit et d'une composition, on en déduit facilement la limite d'un quotient  $\frac{f}{g}$  si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  (en ligne, les limites de  $f$ , en colonnes celles de  $g$ ) :

	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\pm\infty$	0	0	FI	FI	0
$0^+$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$0^-$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

14.4 La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$h(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

### 3.4.2 Quelques méthodes pour lever une indétermination

Donnons ici quelques méthodes utiles pour lever une indétermination lorsqu'on recherche une limite. Commençons par quelques rappels de lycée :

1. La factorisation : il est parfois utile de factoriser les expressions avec lesquelles on travaille. Par exemple :

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

donc la fonction définie par cette expression admet pour limite 4 en 2.

2. La multiplication par une « quantité conjuguée », qui consiste essentiellement à se débarrasser de racines dans l'expression grâce à l'identité remarquable  $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ . Par exemple, pour  $x > 1$  :

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

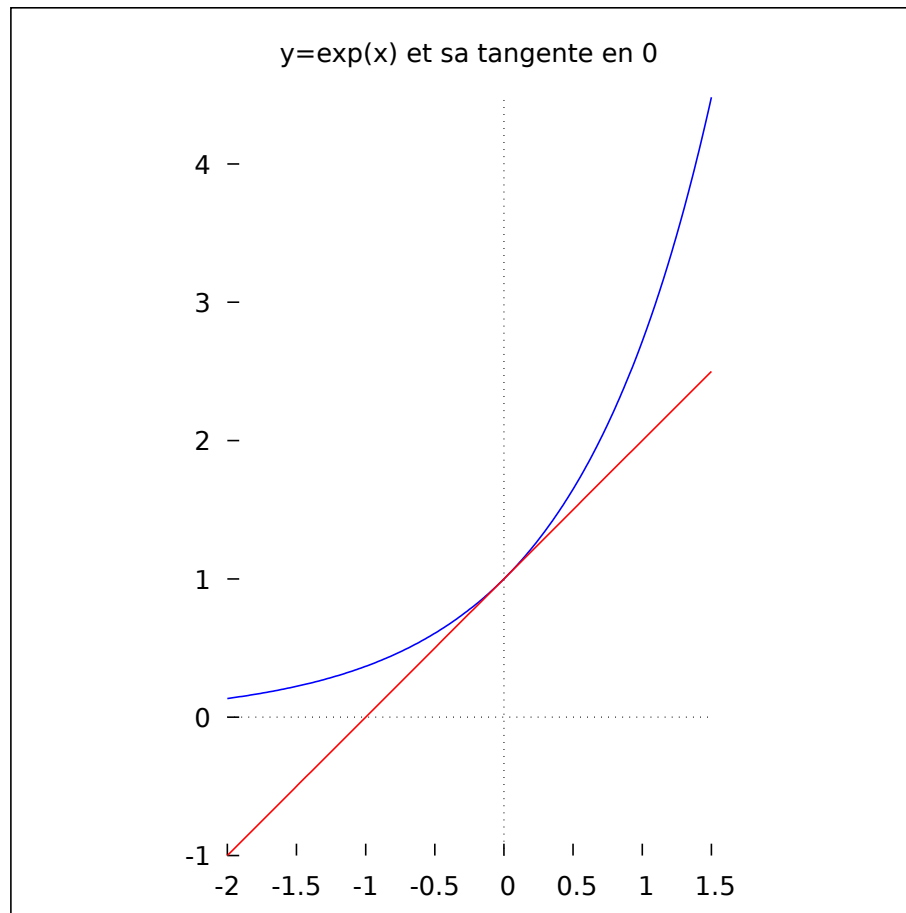
Une nouveauté est l'utilisation du taux d'accroissement ; parfois, la connaissance de la dérivée permet de conclure en utilisant :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Une autre nouveauté est l'utilisation des « croissances comparées » : tout commence par la remarque géométrique suivante : le graphe de la fonction exponentielle est « au-dessus » de sa tangente en 0 :



En termes quantifiés :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{e^x}{x^n} = e^{x/2} \times \left( \frac{e^{x/2n}}{x} \right)^n \geq \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2n} \right)^n \times e^{x/2}$$

Donc, comme le côté droit de l'inégalité tend vers  $+\infty$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

De cette limite, on en déduit :

**Propriété(s) 3.4.8 :** Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{a \times x}}{x^b} = +\infty \quad (1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b \times e^{a \times x} = 0 \quad (2),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \times |\ln(x)|^b = 0 \quad (4).$$

**Démonstration :** IL s'agit essentiellement à chaque fois d'effectuer le bon changement de variables. On pose :  $y = a \times x$  dans le premier cas,  $y = -a \times x$  dans le deuxième,  $y = a \times \ln(x)$  dans le troisième et  $y = -a \times \ln(x)$  dans le dernier. Développons le premier cas. Il s'agit après changement de variables de déterminer la limite lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$  de

$$a^b \times \frac{e^y}{y^b} \geq a^b \times \frac{e^y}{y^n}$$

où  $y \geq 1$  et  $n$  est un entier supérieur à  $b$ . Il reste à utiliser ce qu'on vient de prouver pour conclure.


**Exemple(s) 15 :**

15.1 On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} \times x \times e^{-x} = 0$$

15.2 On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times e^{-x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}} = 0$$

15.3 On a :

$$\frac{x^2 + x + \ln(x)}{3 \ln(x)} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{x^2}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)} \right)$$

Donc cette quantité admet pour limite  $\frac{1}{3}$  en  $0^+$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ .

## 3.5 Études de fonctions

### 3.5.1 Réduction du domaine

**Définition 3.5.13 :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $I$ . On dit que :

1.  $f$  est  $p$ -périodique si :  $\forall x \in I, \quad f(x + p) = f(x)$ ,
2. si  $I$  est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $-x \in I$ ) :

(a)  $f$  est impaire si :  $\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$

(b)  $f$  est paire si :  $\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$ .

**Exemple(s) 16 :**

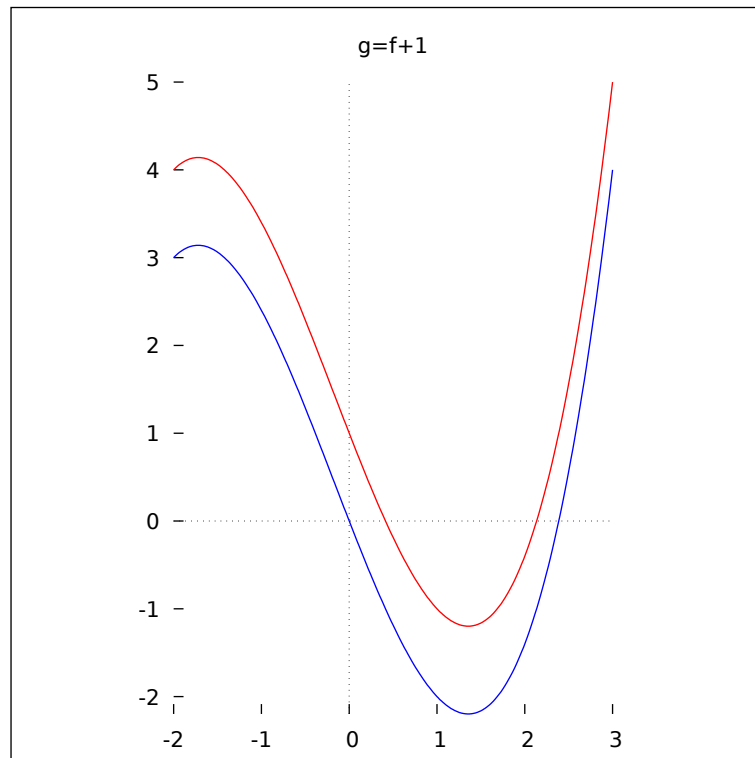
16.1 La fonction sinus est impaire,  $2\pi$ -périodique

16.2 la fonction cosinus est paire,  $2\pi$ -périodique.

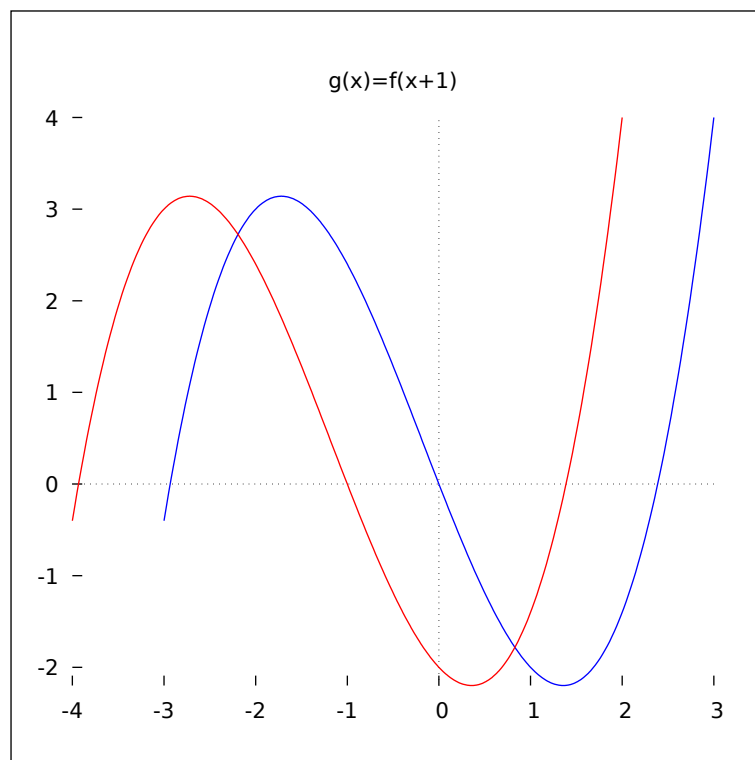
16.3 la fonction tangente est impaire,  $\pi$ -périodique

Faisons maintenant quelques remarques géométriques :

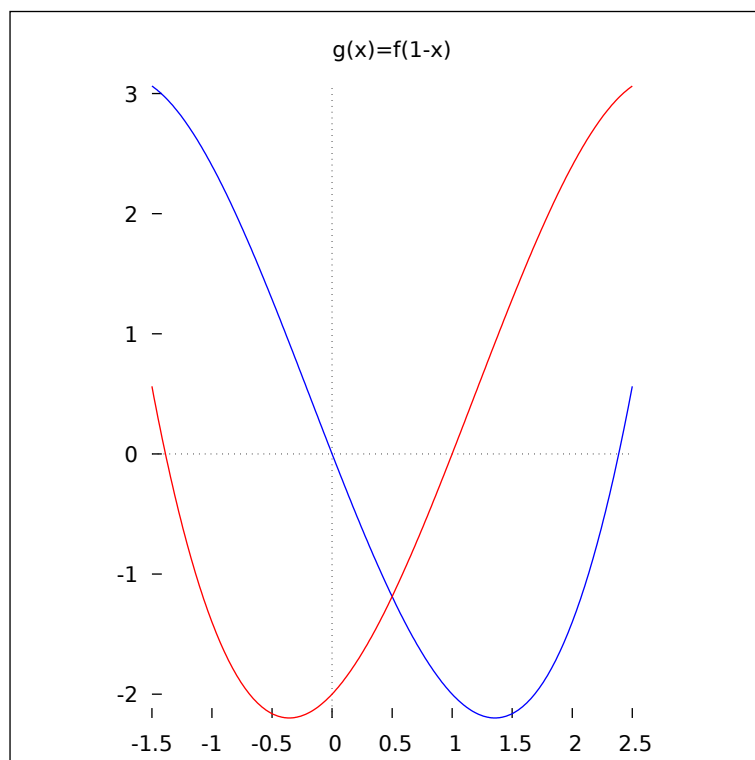
**Remarque(s) 10 :** 1. Si  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(x) + a$  est le translaté du graphe de la fonction de  $f$  de vecteur  $(0, a)$  :



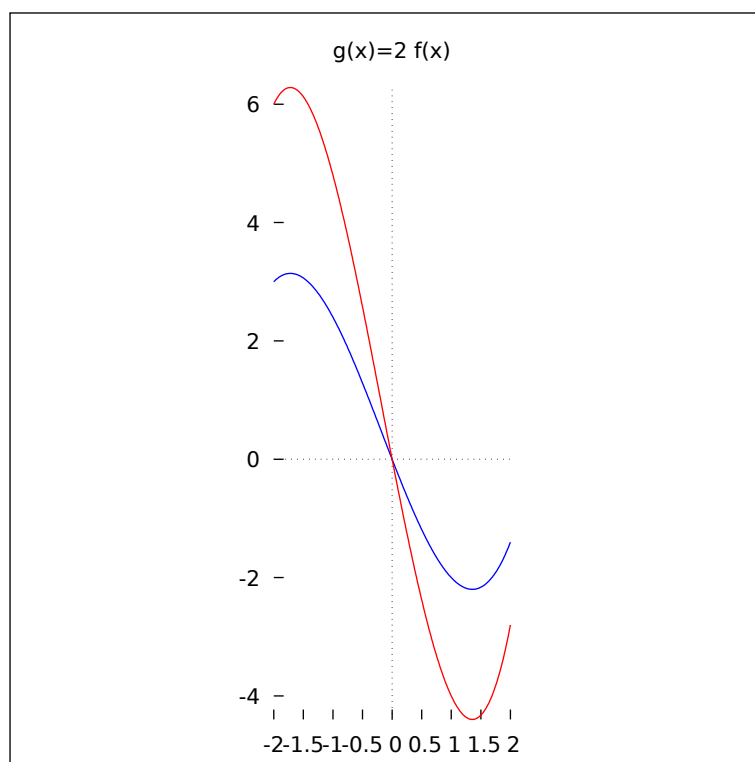
2. Si  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(x + a)$  est le translaté du graphe de la fonction de  $f$  de vecteur  $(-a, 0)$  :



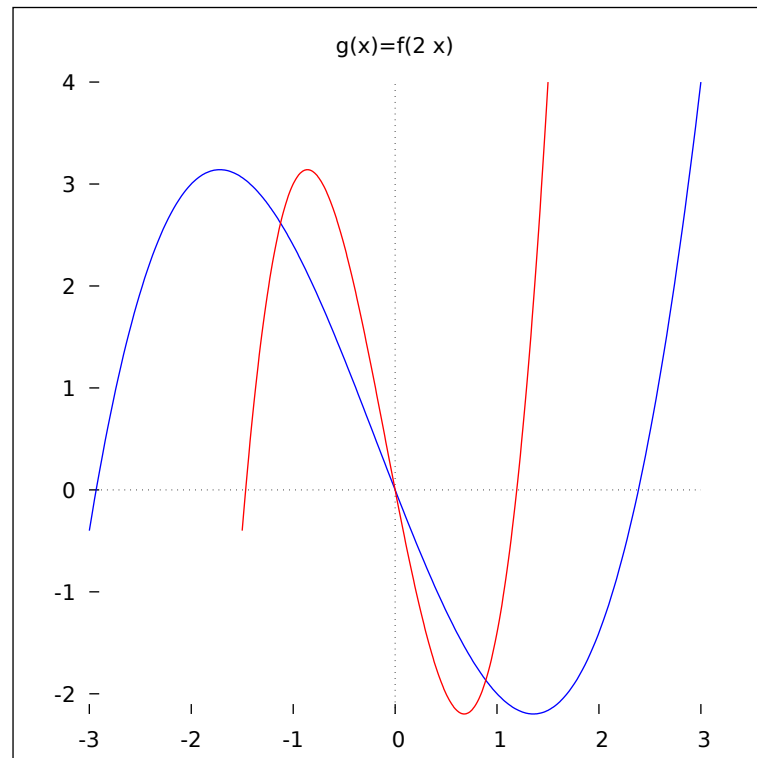
3. Si  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(a - x)$  est la symétrie du graphe de la fonction de  $f$  par rapport à la droite  $x = \frac{a}{2}$  :



4. Si  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de la fonction  $g : x \mapsto a \times f(x)$  est l'affinité du graphe de  $f$  par rapport à l'axe  $O_x$  de rapport  $a$  (c'est-à-dire, la distance à l'axe  $O_x$  de tout point du graphe est multiplié par  $a$ )



5. Si  $a \in \mathbb{R}^*$ , le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(a \times x)$  est l'affinité du graphe de  $f$  par rapport à l'axe  $O_y$  de rapport  $\frac{1}{a}$  (c'est-à-dire, la distance à l'axe  $O_y$  de tout point du graphe est multiplié par  $\frac{1}{a}$ )



De ces remarques, on en déduit la méthode suivante pour réduire le domaine d'étude d'une fonction :

1. Si une fonction est  $p$ -périodique, il suffit de l'étudier sur une période (c'est-à-dire sur un intervalle de longueur  $p$ ) pour en déduire son graphe entier par translations (remarque 2),
2. si une fonction est impaire ou paire, il suffit de l'étudier sur la partie positive de son ensemble de définition, pour en déduire son graphe complet par symétrie orthogonale par rapport à  $O_y$  (dans le cas pair, par la remarque 3) ou centrale par rapport à  $O$  (dans le cas impair, par les remarques 3 et 4).
3. Plus généralement, il est possible d'utiliser ces remarques pour réduire le domaine en utilisant toute symétrie de la fonction. Par exemple, comme

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

il suffit d'étudier la fonction sinus sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  pour en connaître le graphe...

### 3.5.2 Recherche d'asymptotes

**Définition 3.5.14 :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelle. Soit  $x_0$ ,  $a$  et  $b$  trois réels. On dit que :

1.  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = a$  si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

2.  $f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = x_0$  en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

3.  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = a \times x + b$  si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a \times x - b) = 0$$

**Remarque(s) 11 :** 1. Il est relativement facile de trouver une asymptote horizontale ou verticale. Mais comment faire pour en trouver une oblique ?

- (a) On recherche une éventuelle limite en  $+\infty$  de  $f(x)$ . Si cette limite existe et est infinie alors :
- (b) on recherche une éventuelle limite en  $+\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$ . Si cette limite existe et est finie, notons-la  $a$  et :
- (c) on recherche une éventuelle limite en  $+\infty$  de  $f(x) - a \times x$ . Si cette limite existe et est finie, notons-la  $b$  : la droite d'équation  $y = a \times x + b$  est une asymptote oblique de la courbe de  $f$ .

**Exemple(s) 17 :**

17.1 La fonction  $a(x) = \frac{1}{x}$  admet en  $0^+$  et en  $0^-$  une tangente verticale.

17.2 La fonction définie pour  $x \geq -1$  par :

$$f(x) = \frac{5 + 7x + 4x^2}{2(x+1)}$$

admet pour asymptote oblique la droite d'équation  $y = 2x + \frac{3}{2}$ .

17.3 La fonction  $g(x) = \cos(x)$  n'admet pas d'asymptote en  $+\infty$ .

17.4 La fonction  $h(x) = \ln(x)$  n'admet pas d'asymptote en  $+\infty$ .

### 3.5.3 Mise en œuvre

Une étude de fonctions utilise toutes mes méthodes que l'on a vues jusqu'à maintenant. En résumé :

1. On détermine l'ensemble de définition
2. on cherche à réduire au maximum l'ensemble d'étude en utilisant les symétries de la fonction.
3. on détermine l'ensemble de dérivation, et on calcule la dérivée sur cet ensemble
4. on étudie le signe de la dérivée ; et on utilise le lien entre signe de la dérivée et croissance/décroissance
5. on étudie les points particuliers : en chaque point, on détermine une éventuelle limite, tangente ou asymptote
6. on trace le graphe de la fonction.

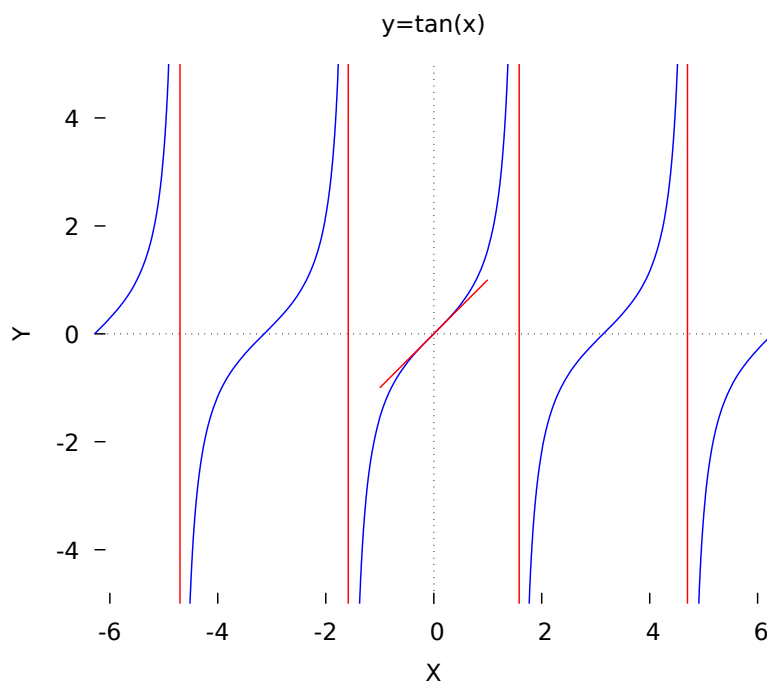
Traitons quelques exemples :

1. La fonction tangente est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \times \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$  et dérivable sur le même ensemble. Comme elle est  $\pi$ -périodique et impaire, il suffit de l'étudier sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . On a :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$$

on étudie les points extrémaux : en 0, la courbe admet pour tangente  $y = x$  et en  $\frac{\pi}{2}^-$ , la fonction admet pour limite  $+\infty$  donc elle y a une tangente verticale. On en déduit le graphe :





2. La fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

admet pour domaine de définition et de dérivabilité l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Elle est impaire, il suffit donc de l'étudier sur  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 \times (x^2 - 3)}{(x - 1)^2 \times (x + 1)^2}$$

La dérivée est du signe de  $x^2 - 3$ , donc positive pour  $x$  supérieur à  $\sqrt{3}$  et négative sinon. Faisons le tableau de variations :

$x$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Diagram illustrating the variation of  $f(x)$  between the points in the table:

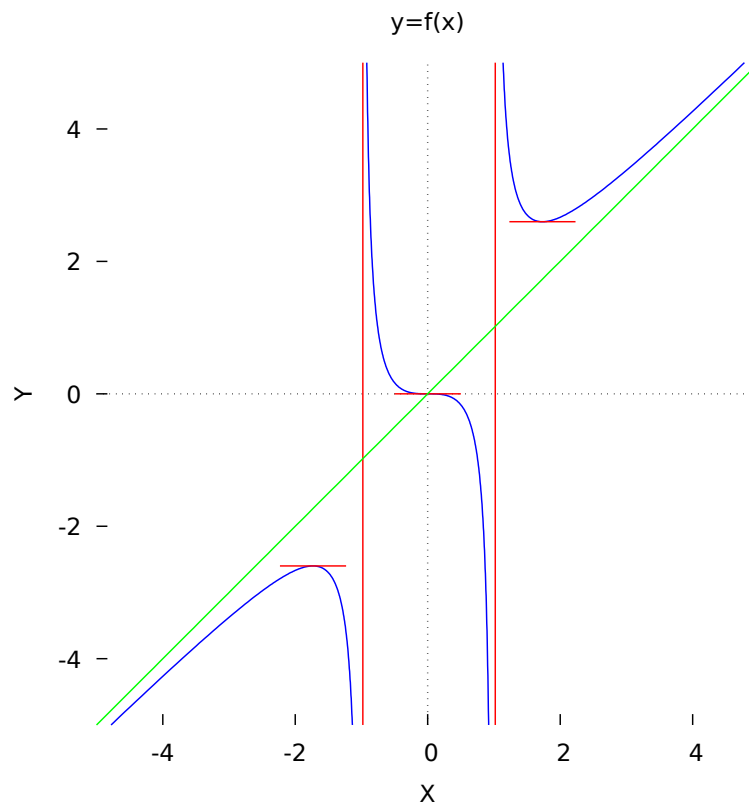
- From  $x=0$  to  $x=1$ , the function decreases from 0 to  $-\infty$ .
- From  $x=1$  to  $x=\sqrt{3}$ , the function increases from  $+\infty$  to  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- From  $x=\sqrt{3}$  to  $x=+\infty$ , the function increases from  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  to  $+\infty$ .

En 0 et en  $\sqrt{3}$  la dérivée s'annule, en 1, on a une asymptote verticale à droite et à gauche. Reste à étudier une éventuelle asymptote oblique en  $+\infty$  :

(a)  $\frac{f(x)}{x}$  admet pour limite 1 en  $+\infty$

(b)  $f(x) - x = \frac{x}{x^2 - 1}$  admet pour limite 0 en  $+\infty$

la courbe de  $f$  admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation  $y = x$  en  $+\infty$ . On en déduit le graphe :



### 3.6 Application à la recherche d'inégalités

L'étude de fonctions permet également de prouver des inégalités. Commençons par un peu de vocabulaire :

**Définition 3.6.15 :** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On dit que :

1.  $M$  est un majorant de  $f$  sur  $I$  si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$

2.  $m$  est un minorant de  $f$  sur  $I$  si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$

3.  $M_0$  est un maximum de  $f$  sur  $I$  si c'est un majorant de  $f$  et si il existe  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = M_0$

4.  $m_0$  est un minimum de  $f$  sur  $I$  si c'est un minorant de  $f$  et si il existe  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = m_0$

**Remarque(s) 12 :** 1. Notez que presque toujours les majorants (et les minorants) d'une fonction  $f$  ne sont pas uniques. Le fonction cosinus admet par exemple tout réel supérieur à 1 comme majorant.

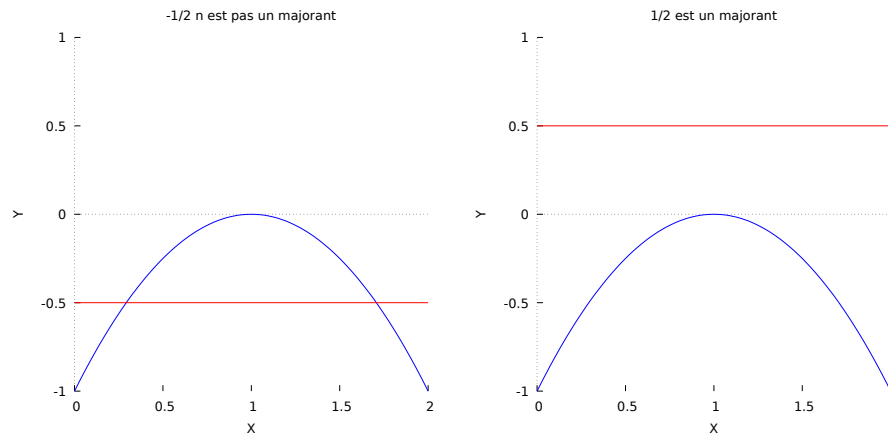
2. Il est aussi possible qu'une fonction n'admette ni majorant ni minorant ; la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x$  n'a ni majorant ni minorant sur  $\mathbb{R}$ .

3. Par contre, si une fonction admet un maximum (ou un minimum), celui-ci est unique : nommons  $M_1$  et  $M_2$  deux éventuels maximum de  $f$  sur  $I$  alors par définition il existe  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $f(x_1) = M_1$  et  $f(x_2) = M_2$  donc comme ce sont des majorants :

$$M_1 = f(x_1) \leq M_2 \quad \text{et} \quad M_2 = f(x_2) \leq M_1$$

donc  $M_1 = M_2$ .

4. Il est très facile de repérer graphiquement un majorant ou un minorant si l'on connaît le graphe d'une fonction. Par exemple :



5. Il arrive très souvent qu'une fonction admette un majorant mais pas de maximum. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  admet pour majorant 0 mais n'a pas de maximum.

La recherche de majorants ou de maximum d'une fonction s'effectue souvent par une étude de fonction. Par exemple, si l'on considère la fonction traitée dans la partie précédente :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

alors cette fonction admet sur  $] -\infty, 1[$

1. pour majorants tous les réels de l'intervalle  $[\frac{\sqrt{3} \times 3}{2}, +\infty[$
2. pour maximum  $\frac{\sqrt{3} \times 3}{2}$ .

Mais on peut aller plus loin : si l'on cherche à montrer que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$$

alors il suffit de montrer que 0 est un majorant de  $f - g$  (ou un minorant de  $g - f$ ) à l'aide d'une étude de fonction. Voici quelques exemples essentiels :

### Exemple(s) 18 :

18.1 Commençons par prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$$

c'est l'inégalité géométrique que l'on a utilisée lors des théorèmes de comparaison. On pose :

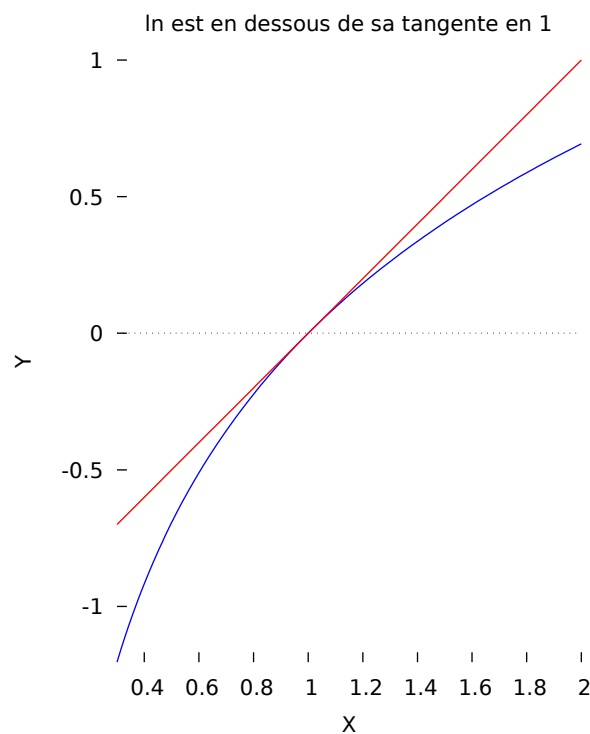
$$f(x) = e^x - (x + 1)$$

Alors  $f'(x) = e^x - 1$  donc  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $f$  admet un minimum en 0, c'est-à-dire l'inégalité recherchée.

18.2 La fonction logarithme vérifie aussi une inégalité géométrique du même type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1}$$

on dit que la fonction logarithme est « en dessous » de sa tangente en 1.



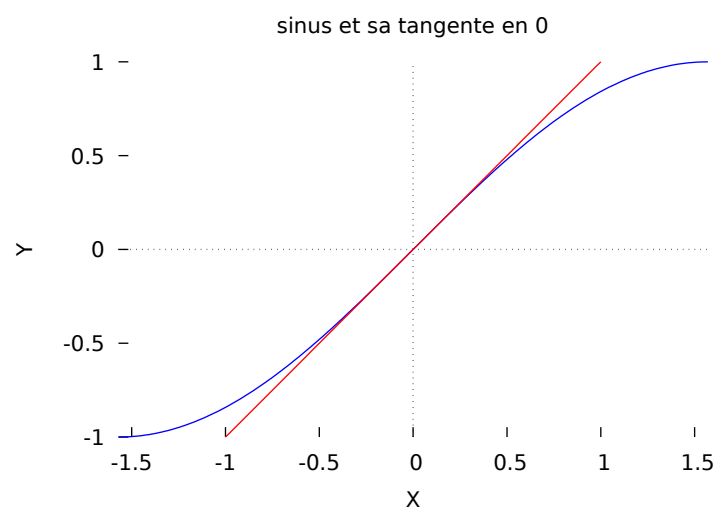
En effet, si :

$$f(x) = \ln(x) - x + 1$$

Alors  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$  donc  $f$  est croissante sur  $]0, 1[$  et décroissante sur  $]1, +\infty[$ . Elle admet donc un maximum en 1, ce qui montre l'inégalité recherchée.

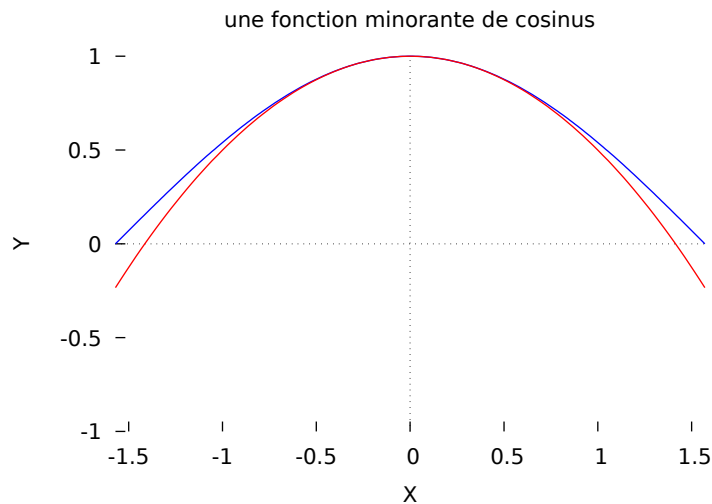
18.3 Pour la fonction sinus, il est important de retenir que l'inégalité suivante, qui se montre de la même façon que les autres, n'est vraie que pour les réels positifs :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leq x}$$



18.4 Enfin, pour la fonction cosinus, l'inégalité suivante se montre à l'aide de celle du sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$



## 3.7 Fonctions usuelles

### 3.7.1 Fonctions puissance

Rappelons que, si  $\alpha$  est un réel et  $x$  un réel strictement positif, on a posé :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \times \ln(x))$$

Mais nous connaissons d'autres façons de définir une puissance, par exemple, si  $n$  est un entier naturel non nul :

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad (n \text{ fois}).$$

Bien entendu, ces deux formules coïncident si  $x > 0$ . La différence essentielle entre elles est l'ensemble de définition, dans le premier cas, le formule n'a de sens que si  $x > 0$  dans le deuxième, toujours. Pour ce qui concerne les entiers naturels (et aussi relatifs), la définition par multiplication (ou division) est donc bien plus générale. Que se passe-t-il en  $0^+$  si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ? Un rapide calcul de limites donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pour cette raison, on étend la définition de ces fonctions puissances en 0 en posant, si  $\alpha > 0$ ,  $0^\alpha = 0$ . Résumons ; la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est définie :

1. sur  $\mathbb{R}$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$
2. sur  $\mathbb{R}^*$  si  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
3. sur  $\mathbb{R}_+^*$  et étendue en 0 si  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$

4. sur  $\mathbb{R}_+^*$  si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Rappelons maintenant quelques formules utiles : si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels quelconques et pour tout  $x$  tel que ceci ait du sens, on a :

$$(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}.$$

Si l'on s'intéresse à leur domaine de dérivabilité, les théorèmes généraux nous donnent que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf éventuellement dans la cas où  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ , pour lequel le point  $x = 0$  reste à étudier. Écrivons le taux d'accroissement pour  $x > 0$  :

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

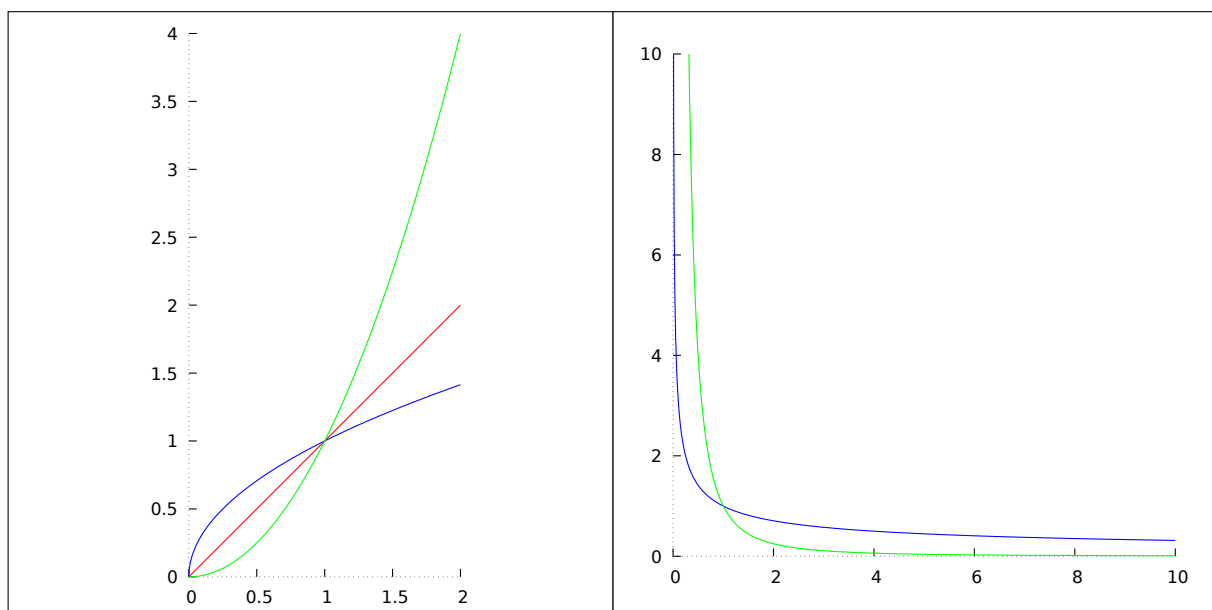
Récapitulons. Les fonctions puissances sont donc dérivables sur leur domaine de définition, sauf si  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$  et  $\alpha < 1$  et alors  $x \mapsto x^\alpha$

n'est dérivable que sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Terminons par une étude de fonctions. Pour  $x > 0$ , la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  admet pour dérivée :

$$\alpha \times x^{\alpha-1}$$

on en déduit (dans le cas  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ) les formes de graphes suivantes (si  $\alpha > 0$  puis  $\alpha < 0$ )



### 3.7.2 Cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies pour tout réel  $x$  par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

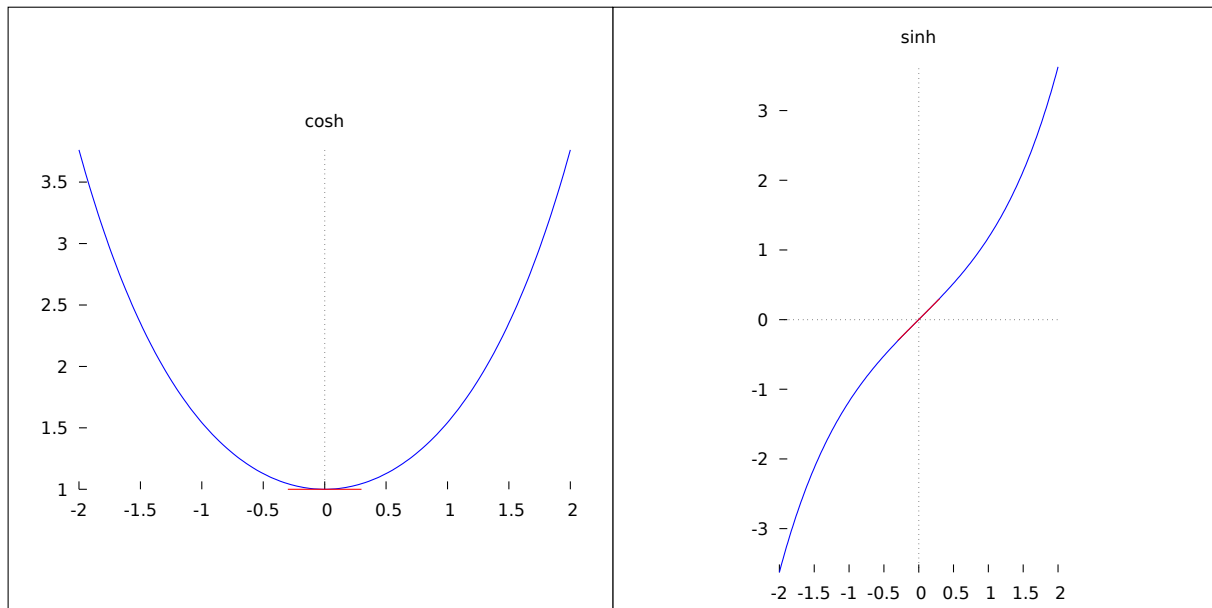
Elles vérifient certaines identités semblables à celles des fonctions sinus et cosinus. La plus importante est sans-doute :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Elles sont de plus dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

On en déduit les graphes :



### 3.7.3 Fonctions inverses

#### 3.7.3.1 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

**Définition 3.7.16 :** Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs dans  $J$ . On dit que :

1.  $f$  est injective si chaque antécédent est unique, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

2.  $f$  est surjective si tout élément de  $J$  admet un antécédent par  $f$  c'est-à-dire si :

$$\forall y \in J, \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y.$$

3.  $f$  est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

**Remarque(s) 13 :** 1. Il est parfois énoncé directement la définition de la bijectivité d'une fonction de la façon suivante : tout élément de  $J$  admet un unique antécédent par  $f$  ou :

$$\forall y \in J, \quad \exists! x \in I, \quad f(x) = y$$

où le quantificateur  $\exists!$  signifie « il existe un unique ».

#### Exemple(s) 19 :

19.1 Un exemple essentiel de fonction injective est une fonction strictement monotone (il suffit de prendre la contraposée de sa définition). Rappelons que pour montrer qu'une fonction est strictement monotone, il suffit d'examiner sa dérivée si elle existe.

19.2 Il est facile de, à partir d'une fonction, en construire une surjective. Il suffit pour ceci de considérer la (co-)restriction de cette fonction à son image. Plus généralement, une fonction  $f : I \rightarrow J$  est surjective si et seulement si

$$f(I) = J$$

On en déduit la méthode suivante lorsqu'on cherche à construire une fonction bijective à partir d'une fonction réelle à valeurs réelles dérivable.

1. On cherche un intervalle le plus grand possible sur lequel sa dérivée est strictement positive ou négative (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On restreint la fonction à cet intervalle.
2. On calcule l'image de cet intervalle et on (co-)restreint la fonction à cette image.

### Exemple(s) 20 :

20.1 La fonction sinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et que son image une fois restreinte à cet intervalle est  $[-1, 1]$ . On en déduit que la fonction :

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$$

est bijective.

20.2 La fonction cosinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  et que son image une fois restreinte à cet intervalle est  $[-1, 1]$ . On en déduit que la fonction :

$$g : \begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$$

est bijective.

20.3 La fonction tangente n'est pas bijective, mais elle est strictement croissante (et définie!) sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ . Son image une fois restreinte à cet intervalle est  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction :

$$h : \begin{cases} ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

est bijective.

### 3.7.3.2 Fonction réciproque d'une bijection

À partir d'une fonction bijective, on peut construire sa fonction réciproque :

**Définition 3.7.17 :** Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective. On appelle fonction réciproque de  $f$  et on note  $f^{-1}$  la fonction définie par :

$$f^{-1} : \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto x, f(x) = y. \end{cases}$$

**Remarque(s) 14 :** 1. Notez qu'il est indispensable que  $f$  soit bijective pour que cette définition ait du sens. L'élément  $x$  existe car  $f$  est surjective et il est unique car  $f$  est injective.

2. On remarque que, par définition, si une fonction  $f$  est bijective alors  $f^{-1}$  existe et vérifie :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_J, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_I.$$

### Exemple(s) 21 :

21.1 La fonction réciproque de l'exponentielle est le logarithme, celle du logarithme l'exponentielle.

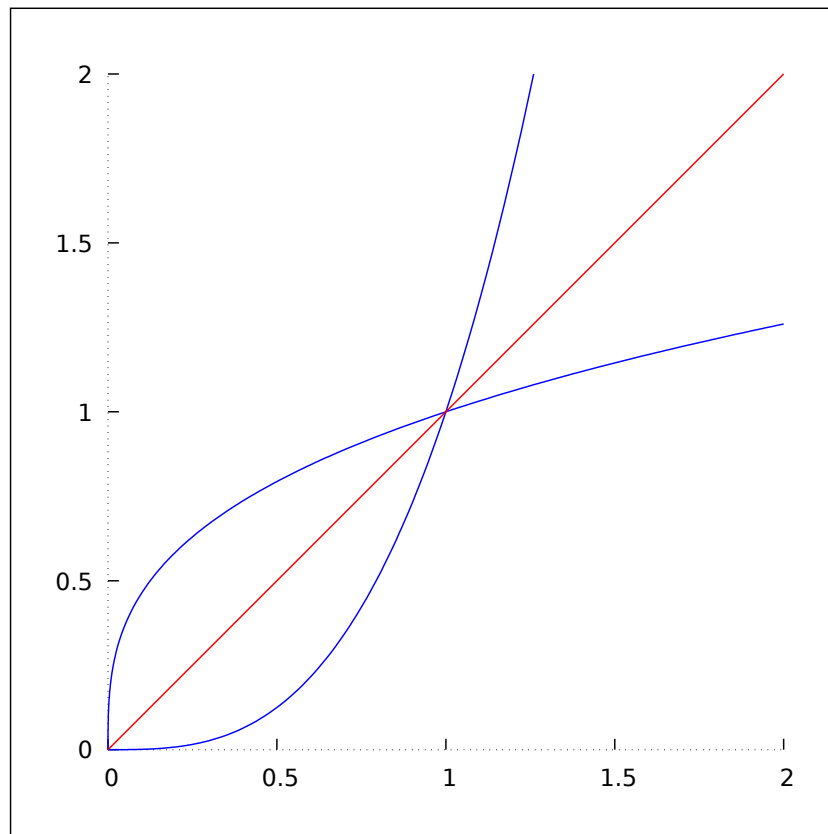


21.2 La fonction réciproque de la racine carrée est la fonction :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2. \end{cases}$$

Pour les fonctions réelles à valeurs réelles, il est très facile de tracer le graphe d'une fonction réciproque  $f^{-1}$  à partir de celui de  $f$ . Il s'agit de la symétrie orthogonale du graphe de  $f$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$  en effet, si  $f(x) = y$  :

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$



Terminons cette partie en parlant de la dérivée d'une fonction réciproque. On a :

**Théorème 3.7.2 :** Soit  $f : I \rightarrow J$  continue et bijective sur  $I$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $x$  et que  $f'(x) \neq 0$ . Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y = f(x)$  et :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Remarque(s) 15 :** Il existe de nombreuses façons de retenir ce théorème, plus ou moins mathématiques ;

1. un physicien aimera sans-doute

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2. un mathématicien retrouvera facilement la formule en dérivant la formule  $f(f^{-1}(y)) = y$  grâce à la formule de dérivation des fonctions composées,

aucune de ces astuces ne peut remplacer la connaissance du théorème et de ses hypothèses.

### 3.7.3.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Rappelons que les trois fonctions suivantes sont bijectives :

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases} \quad ; \quad g : \begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases} \quad ; \quad h : \begin{cases} ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}.$$

On définit les fonctions trigonométriques réciproques par :

$$\arcsin = f^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \longmapsto \arcsin(x) \end{cases} \quad ; \quad \arccos = g^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ x \longmapsto \arccos(x) \end{cases} \quad ; \quad \arctan = h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x \longmapsto \arctan(x) \end{cases}.$$

Le point le plus important pour ces fonctions concerne leurs ensembles de définition. En particulier, les formules suivantes sont **fausses** en dehors des ensembles sur lesquelles elles sont énoncées :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques (et un peu de trigonométrie) donnent :

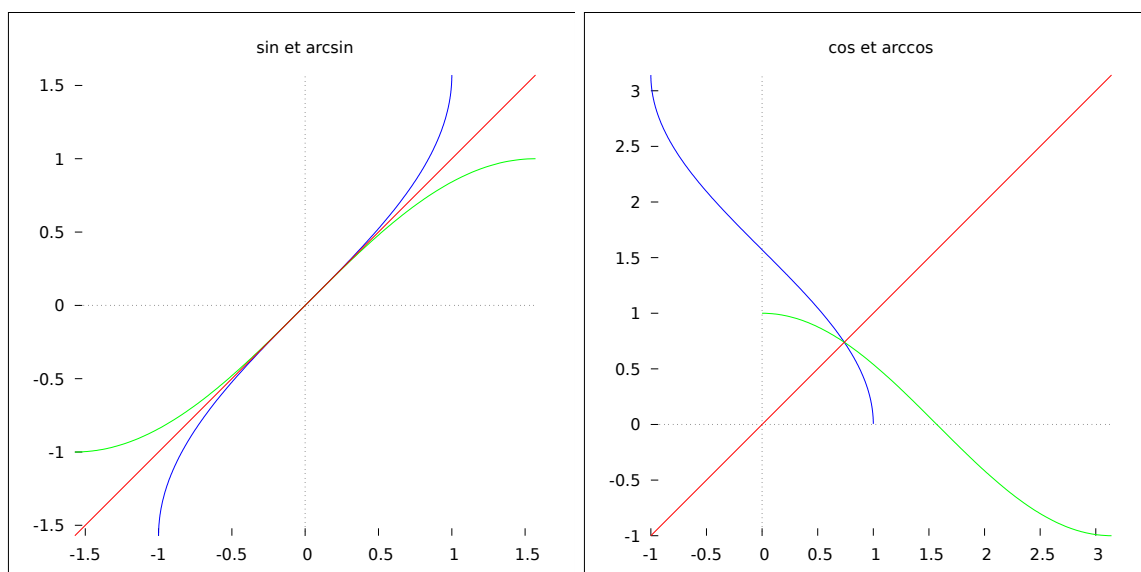
**Propriété(s) 3.7.9 :** 1. La fonction arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

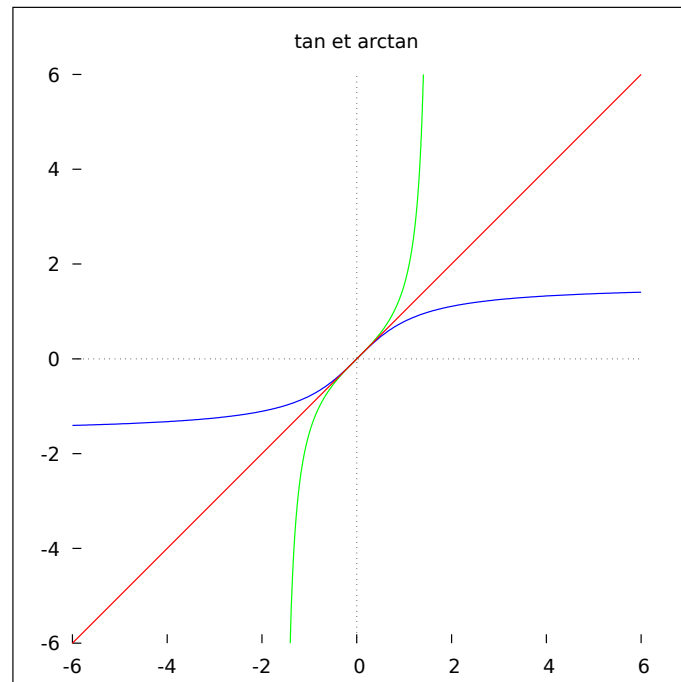
2. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur  $] -1, 1[$  et vérifient :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Terminons par les graphes de ces fonctions qui sont obtenus par symétrie de ceux des fonctions sinus et cosinus pour arcsin et arccos :



et par symétrie de celle de tangente pour arctan :



notez qu'en particulier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$



## Chapitre 4

# Nombres complexes et trigonométrie

### 4.1 Définition

**Définition 4.1.18 :** On considère l'ensemble des points du plan, que l'on note

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{Not.}}{=} \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

sur lequel on définit deux lois (ou opérations) notées  $+$  et  $\times$  par, pour tous réels  $a, b, c$  et  $d$  :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c).$$

**Notation(s) :** Si  $z = (a, b)$  est un élément de  $\mathbb{C}$ , on le notera :

$$z \stackrel{\text{Not.}}{=} a + bi$$

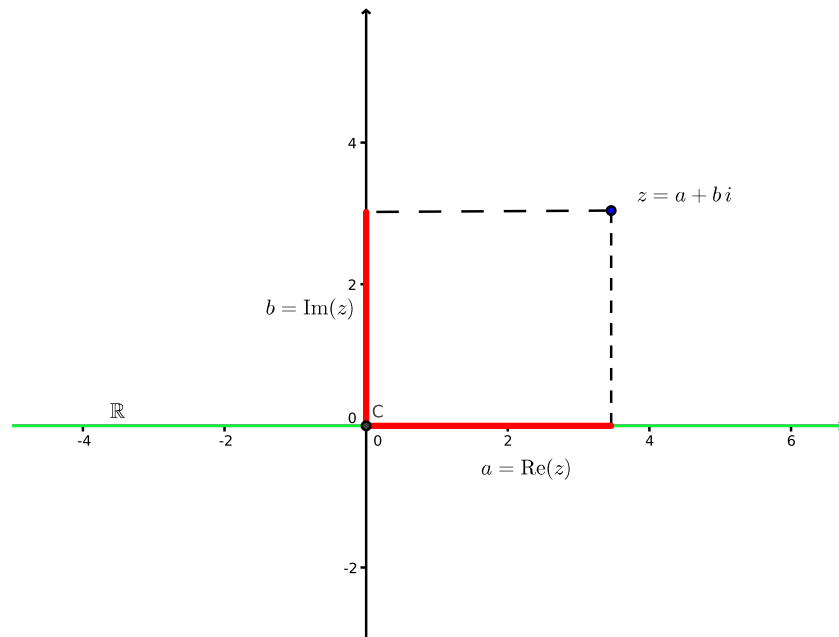
Et on dira que  $a + bi$  est l'*affiche* de ce complexe. On appellera de plus  $a$  la *partie réelle* du complexe  $z$  et  $b$  sa *partie imaginaire*. On les notera :

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

On verra dans la suite l'ensemble des réels comme le sous ensemble des complexes donc la partie imaginaire est nulle ; en particulier :

$$0 = 0 + 0i, \quad 1 = 1 + 0i.$$

Tout ceci se résume très bien sur une dessin...



Il est important de remarquer qu'il est possible de faire les calculs dans  $\mathbb{C}$  de la même façon que dans les réels :

**Proposition 4.1.1 :** Soit  $z_1, z_2$  et  $z_3$  trois éléments de  $\mathbb{C}$  (dans la suite, on notera  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  ou  $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ ) alors :

1.  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ,  $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$  associativité de la somme et du produit,
2.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,  $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$  commutativité de la somme et du produit,
3.  $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ , distributivité du produit sur la somme,
4.  $z_1 + 0 = z_1$ ,  $z_1 \times 1 = z_1$  0 est un élément neutre pour la somme et 1 pour le produit,

**Remarque(s) 16 :** Heureusement pour nous, il existe une astuce qui permet de retenir extrêmement facilement tous ces résultats ; avec la notation  $z = a + bi$ , tout se passe comme si il suffisait de se souvenir de la règle de calcul supplémentaire

$$i^2 = -1$$

puis d'utiliser les règles de calcul usuelles. Notez bien que  $i$  n'est pas un réel mais juste une notation pour  $(0, 1)$  !

## 4.2 Premières opérations géométriques

Par sa nature géométrique l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$  est muni de diverses opérations géométriques :

**Définition 4.2.19 :** Soit  $z = a + bi$  un complexe. Alors :

1. La distance de  $z$  à 0 est notée  $|z|$  et appelée module de  $z$  ; par le théorème de Pythagore  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
2. La symétrie centrale par rapport à 0 de  $z$  est notée  $-z$  ; clairement,  $-z = -a - bi$ .
3. La symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels de  $z$  est appelée conjugaison complexe de  $z$  et est notée  $\bar{z}$  ; clairement,  $\bar{z} = a - bi$ .

**Remarque(s) 17 :** 1. Bien-entendu, la définition de  $-z$  ne tient pas au hasard. En plus de son sens géométrique, on remarque facilement que :

$$z + (-z) = 0$$

on dit que  $z$  admet un *inverse* pour  $+$ .

2. On remarque facilement que si  $z$  est un complexe alors :

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

3. De même, un rapide calcul donne :

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

La propriété suivante permet de faire le lien entre calculs et géométrie :

**Proposition 4.2.2 :** Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$ . On a :

1.  $-(z_1 + z_2) = -z_1 - z_2$ ,  $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$  (compatibilité avec les opérations)
2.  $z_1 \times \bar{z}_1 = |z_1|^2$

**Remarque(s) 18 :** La deuxième formule nous donne en particulier l'existence et une méthode pour calculer l'inverse (pour  $\times$ ) d'un complexe non nul. En effet, si  $z$  est un complexe différent de zéro (on notera dans la suite  $z \in \mathbb{C}^*$ ) alors :

$$z \times \left( \frac{1}{|z|^2} \times \bar{z} \right) = 1$$

cette égalité nous incite alors à noter :

$$\frac{1}{z} \stackrel{\text{Not.}}{=} \frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}.$$

**Exemple(s) 22 :**

$$22.1 \quad \frac{1+2i}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

**Proposition 4.2.3 :** Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. Alors :

1.  $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ .
2. (si  $z' \neq 0$ )  $\frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right|$ .
3.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  (première inégalité triangulaire)
4.  $|z + z'| = |z| + |z'|$  si et seulement si  $z$  et  $z'$  sont alignés, de même sens (c'est-à-dire qu'il existe un réel positif  $a$  tel que  $z = a \times z'$  ou  $a \times z = z'$ ).
5.  $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$  (deuxième inégalité triangulaire)

Le module nous donne également une façon commode de décrire les cercles et disques du plan ; en effet si  $M_0$  a pour affixe  $z_0$  et  $r$  est un réel strictement positif, alors :

1. Le cercle de centre  $M_0$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| = r\}$$

2. Le disque de centre  $M_0$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points :

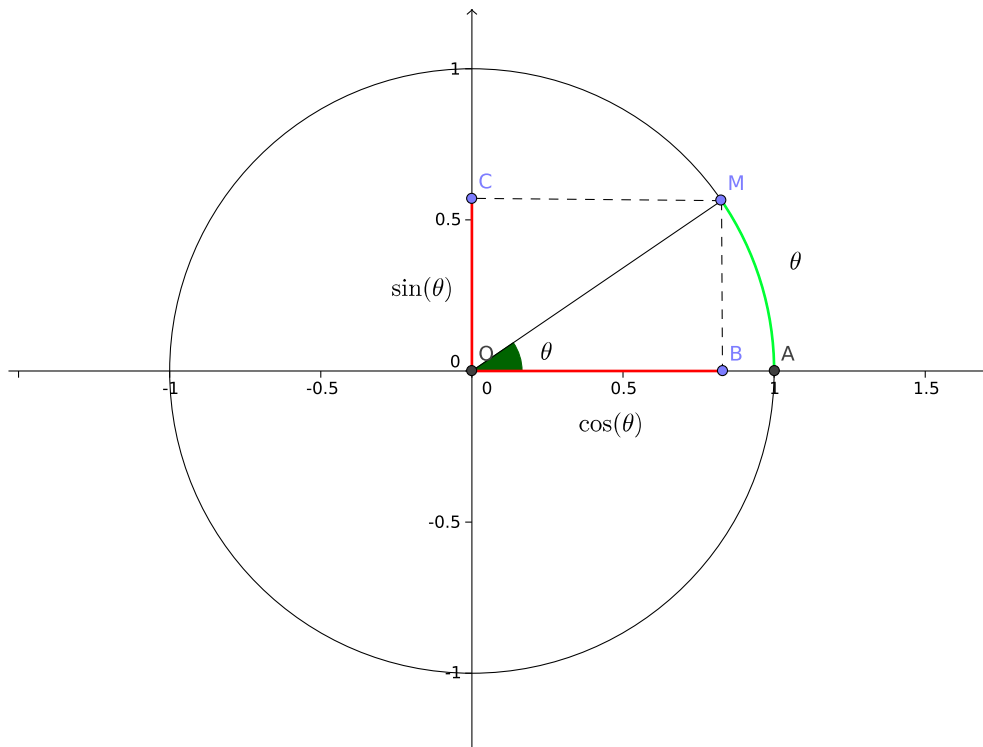
$$\mathcal{D}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leq r\}.$$

### 4.3 Nombres complexes de module un, trigonométrie

Parmi les nombres complexes, ceux de module un jouent un rôle particulier. On note :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Il s'agit du cercle centré en 0 et de rayon 1. On peut *paramétrer* les points  $M$  de ce cercle par l'angle direct entre les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OM}$ , où  $O = (0, 0)$  et  $A = (1, 0)$  (notez qu'il est possible de *définir* cet angle par la longueur de l'arc de cercle reliant  $A$  à  $M$  en sens direct). Si  $\theta$  désigne cet angle, alors  $M = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .



Commençons par remarquer que, par définition,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

De cette formule, on déduit les valeurs particulières :

$\theta$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Les formules suivantes s'obtiennent immédiatement en faisant un dessin :

**Propriété(s) 4.3.10 :** 1.  $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$ ,

2.  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ,  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ ,

3.  $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$ ,  $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ ,

4.  $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ ,  $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ ,

5.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$ ,

6.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$ .



Il est par contre nécessaire de faire un peu plus de géométrie pour obtenir les deux formules suivantes :

**Proposition 4.3.4 :** Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$ , on a :

1.  $\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta) \times \cos(\theta') - \sin(\theta) \times \sin(\theta')$ ,
2.  $\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta) \times \cos(\theta') + \cos(\theta) \times \sin(\theta')$ .

**Démonstration :** Notons  $M_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  et comme d'habitude  $O = (0, 0)$ . Alors

$$\overrightarrow{OM_{\theta+\theta'}} = \cos(\theta') \cdot \overrightarrow{OM_\theta} + \sin(\theta') \cdot \overrightarrow{OM_{\theta+\frac{\pi}{2}}}.$$

Il suffit alors d'utiliser le point 6 de la propriété précédente et de prendre des coordonnées pour conclure. ■

Ces deux formules essentielles sont heureusement extrêmement faciles à apprendre grâce aux nombres complexes. On note, pour  $\theta$  un réel :

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{Not.}}{=} \cos(\theta) + \sin(\theta)i.$$

Alors les deux formules précédentes se résument en :

$$\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}.$$

Notez qu'on peut aussi passer de cette exponentielle complexe aux fonctions qui la définissent grâce aux *formules d'Euler* :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

### Exemple(s) 23 :

23.1 Examinons, pour  $\theta$  un réel, le complexe  $1 \pm e^{i\theta}$ . On a :

$$(a) \quad 1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left( \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

En particulier, ce complexe est de module  $2|\cos(\frac{\theta}{2})|$ .

$$(b) \quad 1 - e^{i\theta} = 2ie^{i\frac{\theta}{2}} \times \left( \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right) = 2ie^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

En particulier, ce complexe est de module  $2|\sin(\frac{\theta}{2})|$ .

De ces formules s'en déduisent toutes les suivantes :

**Propriété(s) 4.3.11 :** 1.  $\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$

$$2. \cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$3. \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$4. \sin(2a) = 2 \sin a \times \cos a,$$

$$5. \cos a \times \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)),$$

$$6. \sin a \times \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)),$$

$$7. \cos a \times \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b)),$$

$$8. \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$9. \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$10. \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$11. \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

**Exemple(s) 24 :**

24.1 Calculons  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ . On remarque que :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \times (1 + \sqrt{3}).$$

24.2 Calculons  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ . On a :

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

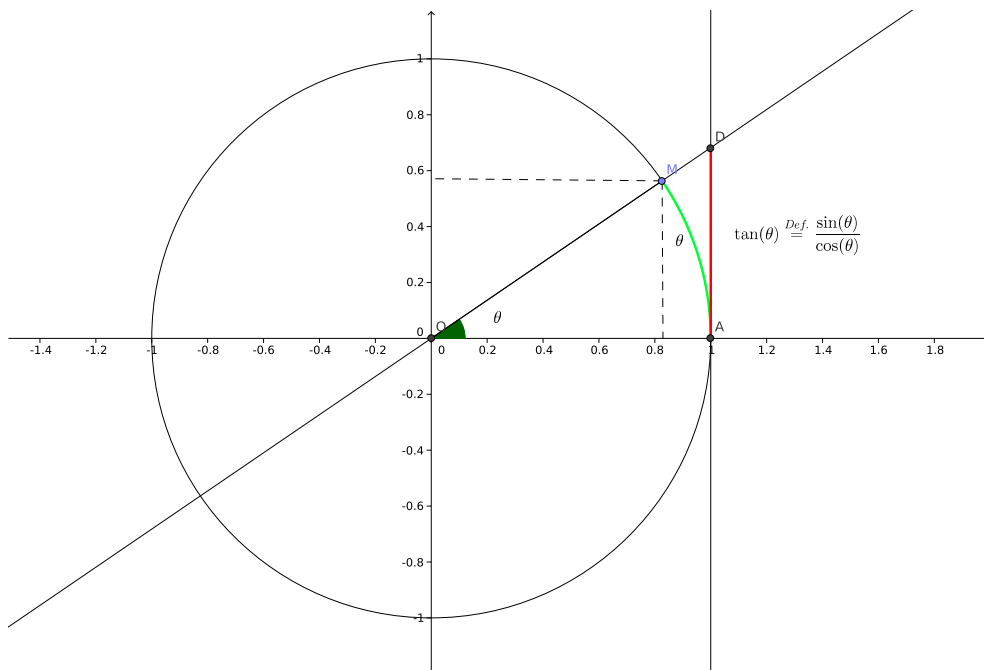
donc en appliquant en  $a = \frac{\pi}{8}$  :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

On en déduit, après avoir remarqué que comme  $\frac{\pi}{8} \in [0, \pi]$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

Terminons par une dernière fonction trigonométrique, la fonction *tangente*, qui doit son nom au petit dessin suivant :



Commençons immédiatement par remarquer que, contrairement aux fonctions sinus et cosinus, la fonction tangente n'est pas définie pour tout réel  $\theta$ , ce qui peut se voir géométriquement, ou simplement en cherchant les points d'annulation de la fonction cosinus. L'ensemble de définition de la fonction tangente est :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La formule nous donne immédiatement les valeurs particulières suivantes :

$$\tan(0) = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Les formules trigonométriques à connaître pour la fonction tangente sont au nombre de deux :

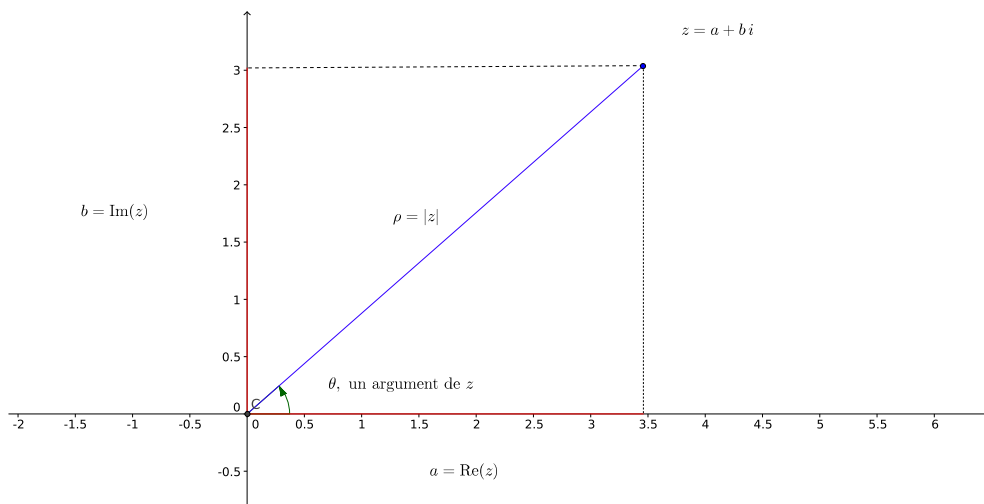
**Propriété(s) 4.3.12 :** Soit  $(a, b) \in \mathcal{D}^2$ . On a :

1. si  $a + b \in \mathcal{D}$ , alors  $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$ ,
2. si  $a - b \in \mathcal{D}$ , alors  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$ .

## 4.4 Arguments d'un nombre complexe non nul

### 4.4.1 Définition, premières propriétés

Il n'existe une autre façon de décrire un point du plan que de donner ses coordonnées, c'est ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* ou encore en termes de nombres complexes *le module et l'argument*. Faisons un dessin.



Pour un complexe non nul  $z = a + ib$ , on note  $\rho = |z| \in \mathbb{R}^*$  et on rappelle qu'il s'agit du module du complexe  $z$ . On désigne également par  $\theta$  et on appelle *argument du complexe  $z$*  **un** angle direct entre l'axe des abscisses et le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ,  $M = (a, b)$ . Notez que cet angle existe car le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est non nul, mais qu'il est loin d'être unique! En effet, si  $\theta$  est un tel angle, toute valeur du type  $\theta + 2k \times \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  conviendra aussi. Pour rendre ce problème moins douloureux, on introduit la définition :

**Définition 4.4.20 :** Soit  $\theta$  et  $\theta'$  deux réels. On dira que  $\theta$  et  $\theta'$  sont égaux ou congruents modulo  $2\pi$  si il existe un entier relatif  $k$  tel que :

$$\theta' = \theta + 2k \times \pi$$

et on écrira alors :

$$\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

On peut alors dire que l'argument  $\theta$  du complexe  $z$  est bien défini **modulo**  $2\pi$ . Voici quelques règles de calcul à connaître :

**Propriété(s) 4.4.13 :** Soit  $\theta, \theta', \theta''$  et  $\theta'''$  des réels. Alors :

1. Propriétés de relation d'équivalence :

- (a)  $\theta \equiv \theta \bmod 2\pi$  (réflexivité),
  - (b)  $\theta \equiv \theta' \bmod 2\pi \iff \theta' \equiv \theta \bmod 2\pi$  (symétrie),
  - (c) si  $\theta \equiv \theta' \bmod 2\pi$  et  $\theta' \equiv \theta'' \bmod 2\pi$  alors  $\theta \equiv \theta'' \bmod 2\pi$  (transitivité),
2. Compatibilité avec la somme :
- (a) si  $\theta \equiv \theta' \bmod 2\pi$  et  $\theta'' \equiv \theta''' \bmod 2\pi$  alors  $\theta + \theta'' \equiv \theta' + \theta''' \bmod 2\pi$
  - (b) si  $\theta \equiv \theta' \bmod 2\pi$  et  $\theta'' \equiv \theta''' \bmod 2\pi$  alors  $\theta - \theta'' \equiv \theta' - \theta''' \bmod 2\pi$

**Remarque(s) 19 :** Notez qu'il est **faux** de penser que cette relation est compatible avec le produit ; par exemple :

$$0 \equiv 2\pi \bmod 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2} \bmod 2\pi,$$

mais :

$$0 \not\equiv \pi \bmod 2\pi.$$

Un peu de trigonométrie nous permet de voir que :

$$M = (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)),$$

autrement dit, en termes de nombres complexes :

$$z = \rho \times e^{i\theta}.$$

Faisons le lien avec l'amplitude et la phase d'un signal. Il existe deux façons équivalentes de décrire un signal sur  $\mathbb{R}$  :

$$a \times \cos(t) + b \times \sin(t) \quad \text{et} \quad A \times \cos(t - \varphi).$$

Pour passer d'une expression à l'autre, il faut et il suffit de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a = A \times \cos(\varphi) \\ b = A \times \sin(\varphi) \end{cases}$$

Autrement dit, d'un point de vue complexe,  $A$  est le module du complexe  $a + ib$  et s'il est non nul,  $\varphi$  un argument de ce complexe.

#### 4.4.2 Calculs pratiques d'arguments

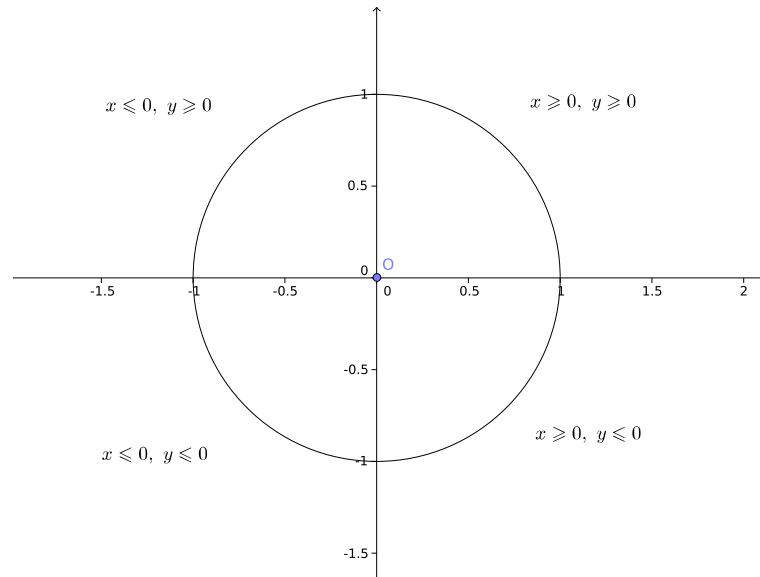
La dernière formule du paragraphe précédent nous permet de passer de l'argument et du module d'un complexe non nul à son affixe. Passer d'une affixe à un module et un argument se fait à l'aide des fonctions trigonométriques inverses. Supposons que  $x$  est la partie réelle de  $z$  et  $y$  sa partie imaginaire. Alors rappelons que :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pour retrouver  $\theta$ , on utilise que :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$

La dernière formule n'étant valable que si  $x \neq 0$ . Pour savoir si il est légitime d'utiliser les formules d'inversion, il faut déterminer dans quel quadrant du cercle trigonométrique se situe l'angle  $\theta$  recherché. On a quatre cas, déterminés par les signes de  $x$  et de  $y$  :



On a déduit donc les possibilités suivantes, dans chaque cas, un argument  $\theta$  est donné par une des formules (à choisir en fonction du contexte) :

1. Si  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  :

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si  $x \neq 0$

2. Si  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$  :

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si  $x \neq 0$

3. Si  $x \leq 0$  et  $y \leq 0$  :

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si  $x \neq 0$

4. Si  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$  :

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si  $x \neq 0$

C'est souvent (pour des raisons de facilité de calculs) les formules qui utilisent la fonction arc-tangente qui sont utilisées en pratique, résumons-les : l'argument  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  du complexe  $z = x + yi$  est donné par :

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \end{cases}$$

**Exemple(s) 25 :**

25.1 Un argument de  $z = -4 - 10i$  est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \pi$$

## 4.5 Exponentielle complexe

**Définition 4.5.21 :** (*Exponentielle complexe.*) Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe. On appelle exponentielle du complexe  $z$  et on note  $e^z$  ou  $\exp(z)$  le complexe :

$$e^z \stackrel{Def.}{=} e^a \times e^{ib}.$$

Remarquer que cette définition « prolonge » l'exponentielle réelle à  $\mathbb{C}$ . La fonction exponentielle jouit de presque les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle. Les voici résumées :

**Propriété(s) 4.5.14 :** Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. Alors :

1.  $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
2.  $e^z \neq 0$  et  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
3.  $e^z = e^{z'}$  si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \bmod 2\pi$ .

**Remarque(s) 20 :** 1. En particulier, si  $\theta$  est un argument de  $z$  et  $\theta'$  un argument de  $z'$ , alors :

- (a)  $\theta + \theta'$  est un argument de  $z \times z'$
- (b) si  $z' \neq 0$ ,  $\theta - \theta'$  est un argument de  $\frac{z}{z'}$ .
2. Il faut faire particulièrement attention, s'il existe une exponentielle complexe, le notion de logarithme complexe est totalement hors programme (et beaucoup plus difficile) ; en particulier, retenez que d'écrire  $\log(z)$  pour  $z$  un complexe n'a absolument aucun sens !

## 4.6 Résolutions d'équations complexe

L'ensemble des nombres complexes est le bon ensemble pour résoudre des équations. Traitons plusieurs exemples.

### 4.6.1 Second degré

#### 4.6.1.1 Racines carrées d'un nombre complexe : méthode algébrique

Supposons que nous cherchions, pour un complexe  $z = a + bi$  un complexe  $\delta$  appelé racine carrée de  $z$ <sup>1</sup> vérifiant :

$$\delta^2 = a + bi$$

L'idée de la méthode algébrique est de raisonner en résolvant astucieusement un système :

---

1. Il est totalement *interdit* d'utiliser la notation  $\sqrt{\delta}$  pour un complexe (sauf si c'est un réel positif) !

1. On écrit  $\delta = x + yi$  et on dit qu'il si et seulement si :

$$x^2 - y^2 + 2x \times yi = \delta^2 = a + bi$$

ou encore :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2x \times y = b \end{cases}$$

2. Malheureusement ces équations sont en général difficiles à résoudre... il existe heureusement une astuce : l'équation  $\delta^2 = a + bi$  implique aussi l'égalité des modules :  $x^2 + y^2 = |\delta^2| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; on en déduit le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2x \times y = b \end{cases}$$

3. On résout le système : les deux premières lignes donnent  $x^2$  et  $y^2$  ce qui détermine  $x$  et  $y$  au signe près, signe que l'on détermine avec la dernière équation.

### Exemple(s) 26 :

- 26.1 Parfois, les racines carrées sont « évidentes » : les racines carrées de  $-1$  dont :

$$\delta_1 = i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -i$$

- 26.2 Les racines complexes de  $z = i$  sont :

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -e^{i\frac{\pi}{4}}$$

elles peuvent se retrouver facilement en constatant que  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

- 26.3 Cherchons les racines carrées complexes de  $z = -4 - 10i$ . Le complexe  $\delta = x + yi$  est une racine carrée de  $z$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{29} \\ 2x \times y = -10 \end{cases}$$

On en déduit, par addition puis soustraction des deux premières lignes que :

$$x^2 = -2 + \sqrt{29} \quad \text{et} \quad y^2 = 2 + \sqrt{29}$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{-2 + \sqrt{29}} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{2 + \sqrt{29}}$$

mais par la troisième ligne du système d'équations,  $x$  et  $y$  sont de signes opposés donc les deux racines carrées recherchées sont :

$$\delta_1 = \sqrt{\sqrt{29} - 2} - \sqrt{\sqrt{29} + 2}i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt{\sqrt{29} - 2} + \sqrt{\sqrt{29} + 2}i.$$

#### 4.6.1.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ ,  $a \neq 0$ , on peut toujours écrire, pour  $z \in \mathbb{C}$  :

$$a \times z^2 + b \times z + c = a \times \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4a \times c - b^2}{4a}.$$

Il vient alors, pour l'équation à l'inconnue complexe  $z$  :  $a \times z^2 + b \times z + c = 0$ .

1. Si  $\Delta = b^2 - 4a \times c = 0$  ( $\Delta$  s'appelle le *discriminant de l'équation*), alors l'équation possède une unique solution :

$$z_0 = -\frac{b}{2a} \text{ (dite solution double),}$$

et l'équation s'écrit :

$$a \times \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

2. Si  $\Delta \neq 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes

$$(\text{si } \delta \in \mathbb{C} \text{ est une racine carrée de } \Delta) \quad z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Et l'équation s'écrit :

$$a \times (z - z_1) \times (z - z_2) = 0.$$

**Remarque(s) 21 :** 1. En développant l'expression ci-dessus, on voit que :

$$a \times (z - z_1) \times (z - z_2) = a \times z^2 - (z_1 + z_2) \times z + z_1 \times z_2 = a \times z^2 + b \times z + c,$$

donc

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Lorsque la solution est double les relations sont encore exactes (avec  $z_1 = z_2 = z_0$ ).

2. Si  $a, b$  et  $c$  sont dans  $\mathbb{R}$  et  $\Delta < 0$ , on peut prendre

$$\delta = i \times \sqrt{-\Delta} \text{ et } -\delta = \bar{\delta},$$

et l'on retrouve les formules :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

En particulier,  $z_1 = \bar{z}_2$ .

3. De manière générale, si  $\alpha$  est solution de  $a \times z^2 + b \times z + c = 0$ , alors

$$\bar{\alpha} \text{ est solution de } \bar{a} \times z^2 + \bar{b} \times z + \bar{c} = 0.$$

### Exemple(s) 27 :

27.1 Les racines de l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

sont

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) \text{ et } z_2 = z_1^2$$

on notera :

$$j \stackrel{\text{Not.}}{=} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right).$$

27.2 Résolvons l'équation :

$$z^2 + (-1 - 3i) \times z + 3i - 4 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = (-1 - 3i)^2 - 4(3i - 4) = 8 - 6i.$$



Cherchons ses racines carrées par la méthode du paragraphe précédent. Le complexe  $\delta = x + yi$  est racine carrée de  $\Delta$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2x \times y = -6 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent :

$$x = \pm 3 \quad \text{et} \quad y = \pm 1$$

mais par la troisième équation,  $x$  et  $y$  sont de signes opposés, donc les racines carrées de  $\Delta$  sont :

$$\delta_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -3 + i.$$

On en déduit que les racines de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-(-1 - 3i) + \delta_1}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-1 - 3i) + \delta_2}{2} = -1 + 2i.$$

## 4.6.2 Quelques équations d'ordre $n$ .

### 4.6.2.1 Racines de l'unité

On appelle *unité* le complexe identifié à 1. Le problème qui va nous intéresser est le suivant : étant donné  $n \in \mathbb{N}^*$ , résoudre l'équation :

$$z^n = 1.$$

Les solutions complexes de cette équation s'appellent *racines  $n$ -ième de l'unité*. Calculons-les. Supposons  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé :

1. Si  $z^n = 1$ , alors  $z \in \mathbb{U}$ . En effet,  $z \neq 0$ , il possède un argument noté  $\theta$ . On a alors :

$$z^n = (|z| \times e^{i \times \theta})^n = |z|^n \times e^{i \times n \times \theta} = 1.$$

En prenant les modules, on obtient :

$$|z|^n = 1, \text{ or } |z| > 0 \text{ donc } |z| = 1.$$

2. Il y a exactement  $n$  racines  $n$ -ième de l'unité. En effet, si  $z$  est solution de  $z^n = 1$ , alors on a :

$$n \times \theta - 0 \in 2\pi\mathbb{Z}, \text{ soit } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k \times \pi}{n}.$$

Mais, la fonction  $x \mapsto e^{i \times x}$  est  $2\pi$ -périodique, il reste donc les solutions :

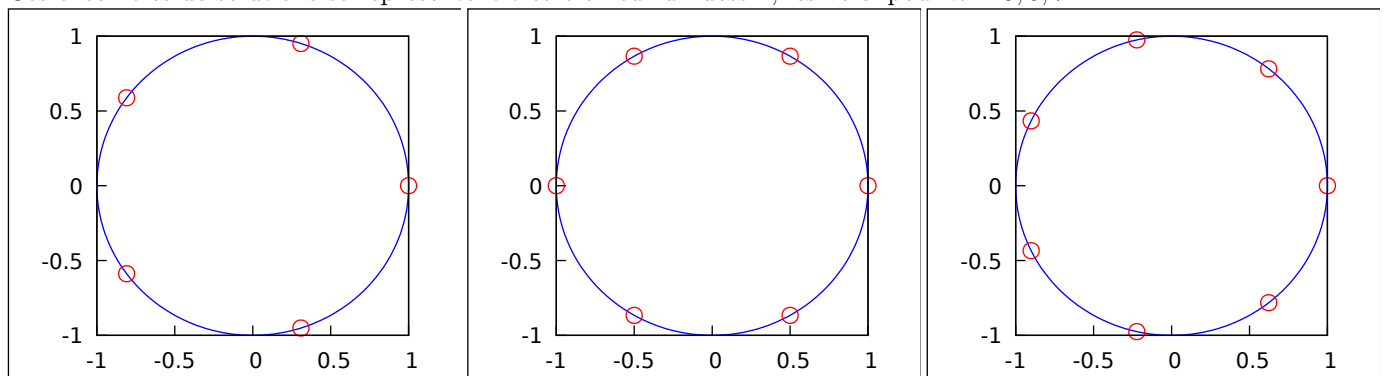
$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z_k = \exp\left(i \times \frac{2k \times \pi}{n}\right)}.$$

3. On note :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(i \times \frac{2k \times \pi}{n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\},$$

c'est l'ensemble des racines  $n$ -ième de l'unité cherché.

Ces ensembles de solutions se représentent très bien sur un dessin, les voici pour  $n = 5, 6, 7$  :



Algébriquement, on trouve facilement :

**Exemple(s) 28 :**

28.1

$$\mathbb{U}_1 = \{1\}, \mathbb{U}_2 = \{1, -1\}, \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \text{ et } \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\},$$

où l'on rappelle que :

$$j = \exp\left(i \times \frac{2\pi}{3}\right).$$

On a donc :  $j^3 = 1, \bar{j} = j^2, 1 + j + j^2 = 0$ .

#### 4.6.2.2 Racines $n$ -ième d'un complexe.

Soit maintenant l'équation

$$z^n = a, \text{ où } a \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

( $a = 0$  est facile). Soit  $\delta \in \mathbb{C}$ , tel que  $\delta^n = a$  (une solution), alors

$$\{z \in \mathbb{C}, z^n = a\} = \delta \times \mathbb{U}_n.$$

Comment trouver  $\delta$  ?

$$\text{Si } a = |a| \times e^{i \times \theta}, \theta \in \mathbb{R}, \text{ on peut prendre } \delta = \sqrt[n]{|a|} \times \exp\left(i \times \frac{\theta}{n}\right).$$

Finalement :

$$\{z \in \mathbb{C}, z^n = a\} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} \times \exp\left(i \times \frac{\theta + 2k \times \pi}{n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

**Exemple(s) 29 :**

29.1 Résolvons l'équation :

$$z^3 = i.$$

On remarque que  $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$ . On a donc :

$$S = \left\{ \exp\left(i \left(\frac{\pi}{6} + k \times \frac{2\pi}{3}\right)\right), k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\} = \{e^{i \frac{\pi}{6}}, e^{i \frac{5\pi}{6}}, e^{i \frac{9\pi}{6}}\}.$$

Il est ici possible d'exprimer ces trois complexes à l'aide de racines (c'est un coup de chance...) :

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}.$$

29.2 Résolvons l'équation :

$$z^4 = -16i$$

On remarque que  $-16i = 2^4 e^{i \frac{3\pi}{2}}$ . Les solutions sont donc :

$$S = \left\{ 2 \times \exp\left(i \left(\frac{3i\pi}{8} + k \times \frac{\pi}{2}\right)\right), k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\} = \{2 \times e^{\frac{3i\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{7i\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{11i\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{15i\pi}{8}}\}.$$

**Remarque(s) 22 :** En particulier, cette méthode nous donne une autre façon de calculer les racines carrées d'un complexe  $z$ . On peut :

a Écrire le complexe  $z$  sous forme exponentielle :

$$z = |z| \times e^{i\theta}$$

b En déduire que les racines carrées de  $z$  sont :

$$\delta_1 = \sqrt{|z|} \times e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \delta_2 = -\delta_1.$$

Traitons quelques exemples :

1. Parfois, ça se passe bien : les racines carrées de  $1 + i = \sqrt{2} \times e^{i\pi/4}$  sont :

$$\delta_1 = 2^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{\pi}{8}i}, \quad \delta_2 = -\delta_1$$

2. Parfois, la méthode algébrique est mieux adaptée : cherchons de cette façon les racines carrées de :

$$z = -4 - 10i.$$

Alors, comme nous l'avons remarqué, un argument de  $z$  est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \pi$$

et son module vaut clairement :  $|z| = \sqrt{116}$ . Les racines carrées de  $z$  sont donc :

$$\delta_1 = (116)^{\frac{1}{4}} \times \exp\left(\left(\frac{\arctan\left(\frac{5}{2}\right)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)i\right), \quad \delta_2 = -\delta_1.$$

## 4.7 Fonctions réelles à valeurs complexes

**Définition 4.7.22 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est dérivable si les fonctions :

$$\operatorname{Re}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)) \end{cases}$$

sont dérivables sur  $I$ . On note alors :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + \operatorname{Im}(f)'(x)i.$$

**Remarque(s) 23 :** 1. Bien entendu, cette définition s'énonce de même pour les autres notions de régularité que nous avons étudiées (ou nous étudierons) : continuité, dérivable  $n$  fois...

2. Notez bien que **nous n'avons pas** (parce que c'est autrement plus compliqué) parlé de fonctions complexes à valeurs complexes. La fonction considérée ici est réelle à valeurs complexe.

**Exemple(s) 30 :**

30.1 Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . L'exemple le plus utile est sans-doute la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \exp(\lambda \times t).$$

Si l'on écrit  $\lambda = a + bi$  alors :

$$\operatorname{Re}(f)(t) = e^{a \times t} \times \cos(b \times t) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f)(t) = e^{a \times t} \times \sin(b \times t).$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\operatorname{Re}(f)'(t) = a \times e^{a \times t} \times \cos(b \times t) - b \times e^{a \times t} \times \sin(b \times t)$$

$$\operatorname{Im}(f)'(t) = a \times e^{a \times t} \times \sin(b \times t) + b \times e^{a \times t} \times \cos(b \times t).$$

On en déduit que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{a \times t} \times (a \times \cos(b \times t) - b \times \sin(b \times t) + (a \times \sin(b \times t) + b \times \cos(b \times t))i) \\ &= (a + bi) \times e^{a \times t} \times (\cos(b \times t) + \sin(b \times t)i) = \lambda \times e^{\lambda \times t}. \end{aligned}$$

On retrouve alors (ou pouvait s'y attendre!) pour  $\boxed{\lambda \in \mathbb{C}}$  :

$$\boxed{\text{La dérivée de } f(t) = e^{\lambda \times t} \text{ est } f'(t) = \lambda \times e^{\lambda \times t} .}$$

30.2 Plus généralement et presque par le même calcul, si  $\varphi$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors la fonction définie sur  $I$  par

$$f(t) = \exp(\varphi(t))$$

est dérivable sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \varphi'(t) \times \exp(\varphi(t)).$$

Enfin, on retrouve les propriétés classiques de dérivabilité des fonctions réelles à valeurs réelles :

**Propriété(s) 4.7.15 :** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et  $a \in \mathbb{C}$ . Alors :

1.  $a \times u$  est dérivable sur  $I$  de dérivée  $a \times u'$
2.  $u + v$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée  $u' + v'$
3.  $u \times v$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée  $u' \times v + u \times v'$
4. si  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée :

$$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}.$$

**Démonstration :** Nous nous contenterons de montrer les deux points les plus difficile, les troisièmes et quatrièmes. Écrivons

$$u = a + bi \quad v = c + di.$$

Alors :

$$u \times v = a \times c - b \times d + (a \times d + b \times c)i$$

par le théorèmes généraux sur les fonctions réelles, cette fonction est donc dérivable sur  $I$ , de dérivée :

$$\begin{aligned} (u \times v)' &= a' \times c + a \times c' - b' \times d - b \times d' + (a' \times d + a \times d' + b' \times c + b \times c')i \\ &= (a' + b'i) \times (c + di) + (a + bi) \times (c' + d'i) = u' \times v + u \times v'. \end{aligned}$$

Déduisons-en 3. Il suffit de remarquer que, par la méthode de la quantité conjuguée

$$\frac{1}{v} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

donc par les théorèmes généraux sur les fonctions réelles,  $\frac{1}{v}$  puis  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$ . Mais ce serait inutilement compliqué d'utiliser cette formule pour calculer la dérivée. On a, si  $v$  ne s'annule pas sur  $I$  :

$$u = \frac{u}{v} \times v$$

donc par la formule 3 :

$$u' = \left(\frac{u}{v}\right)' \times v + \frac{u}{v} \times v'$$

et l'on en déduit la formule recherchée. ■

### Exemple(s) 31 :

31.1 Il est parfois utile de « passer par les complexes » pour obtenir des solutions réelles des équations différentielles. Par exemple, pour trouver une solution particulière de :

$$y'' + 2y = e^t \times \cos(t) = \frac{1}{2} (e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t})$$

On peut utiliser le principe de superposition. Une solution particulière de :

$$y'' + 2y = \frac{1}{2} e^{(1+i)t}$$

est :  $f_0(t) = \frac{1-i}{8} e^{(1+i)t}$  et une solution particulière de :

$$y'' + 2y = \frac{1}{2} e^{(1-i)t}$$

est :  $f_1(t) = \frac{1+i}{8} e^{(1-i)t}$ . On en déduit la solution particulière de l'équation différentielle initiale :

$$f_2(t) = f_0(t) + f_1(t) = \frac{e^t}{4} (\cos(t) + \sin(t)).$$

## 4.8 Opérations sur les complexes et géométrie plane.

### 4.8.1 Affixes et géométrie du plan

Soit  $M$  d'affixe  $z$  et  $M'$  d'affixe  $z'$ . Alors :

1. le vecteur  $\overrightarrow{M'M}$  a pour affixe  $z - z'$
2. la distance  $M'M$  vaut  $|z - z'|$

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  deux à deux distinctes. Alors :

1. un angle orienté entre  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est donné par un argument du complexe

$$\frac{c-a}{b-a}.$$

2.  $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \text{Re}((c-a) \times \overline{b-a})$ .

Il est en particulier facile de vérifier l'alignement ou l'orthogonalité en termes d'affixes :

1. Les points d'affixes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont alignés si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad (a-b) = \lambda.(a-c) \quad \text{ou} \quad \lambda.(a-b) = a-c.$$

En particulier, si les points d'affixes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont deux à deux distincts, ils sont alignés si et seulement si :

$$\text{Im} \left( \frac{c-a}{b-a} \right) = 0$$

2. Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les affixes de points  $A$ ,  $B$  et  $C$  deux à deux distincts alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\text{Re} \left( \frac{c-a}{b-a} \right) = 0$$

## 4.8.2 Quelques exemples de transformations du plan

### 4.8.2.1 Transformations du plan, premiers exemples

**Définition 4.8.23 :** Une transformation du plan est une bijection du plan vers lui-même.

Toutes les applications suivantes sont des transformations du plan :

**Exemple(s) 32 :**

32.1 Soit  $b \in \mathbb{C}$ , alors la fonction

$$z \mapsto z + b$$

est une translation de vecteur  $\overrightarrow{OB}$  où  $B$  est le point du plan d'affixe  $b$ .

32.2 Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors la fonction :

$$z \mapsto k \times (z - b) + b$$

est une homothétie de centre d'affixe  $b$  et de rapport  $k$

32.3 Soit  $\theta$  un réel. Alors la fonction :

$$z \mapsto e^{i\theta} \times (z - b) + b$$

est la rotation de centre d'affixe  $b$  et d'angle  $\theta$ .

### 4.8.2.2 Similitudes du plan

Il existe de nombreuses autres transformations du plan, mais ce sont les exemples venus de la géométrie qui nous intéresseront particulièrement :

**Définition 4.8.24 :** Une similitude du plan est une transformation qui conserve les angles non orientés.

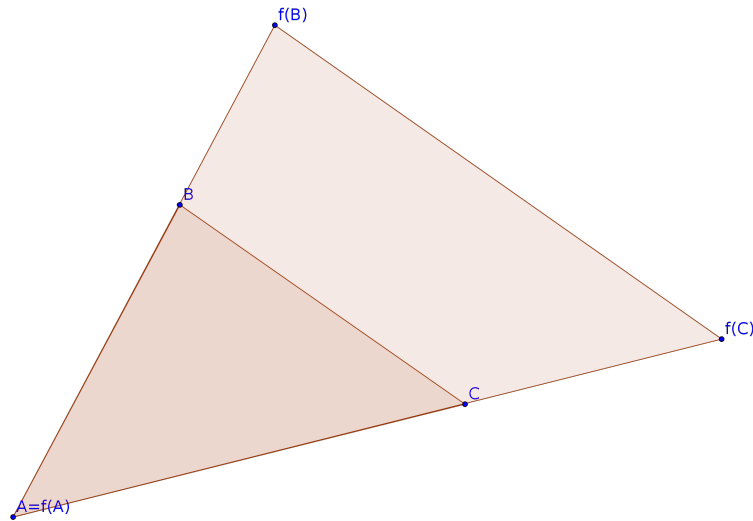
**Exemple(s) 33 :**

33.1 Tous les exemples considérés au paragraphe précédent sont des similitudes.

33.2 Toutes les symétries orthogonales et centrales sont des similitudes.

**Propriété(s) 4.8.16 :** Une similitude du plan conserve les rapports de distances.

*Démonstration :* Après translation, rotation et éventuellement symétrie (il y a exactement deux cas : tous les angles du triangle image ont même orientation ou orientation opposée), la situation géométrique devient



et l'on obtient ainsi le résultat par le théorème de Thalès.

■

En particulier, lors de la preuve, nous avons montré qu'une similitude conserve les angles orientés ou transforme tous les angles orientés en leurs opposés. Traitons les deux cas.

#### 4.8.2.3 Similitudes directes du plan

**Définition 4.8.25 :** Soit  $f$  une transformation du plan. On dit que  $f$  est une similitude directe du plan si elle préserve les angles orientés (donc aussi les rapports de distance). En termes d'affixes, pour tous trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives  $z$ ,  $z'$  et  $z''$  :

$$\frac{f(z') - f(z)}{f(z'') - f(z)} = \frac{z' - z}{z'' - z}$$

**Remarque(s) 24 :** 1. Dans les exemples du paragraphe précédent, tous sont des similitudes directes.  
2. Rappelons que l'application

$$z \mapsto \bar{z}$$

est une transformation du plan : la symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $O_x$ . Ce n'est pas une similitude directe.

**Propriété(s) 4.8.17 :** Une transformation du plan  $f$  est une similitude directe si et seulement si il existe  $a$  un complexe non nul et  $b$  un complexe tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a \times z + b.$$

**Démonstration :** La réciproque est un calcul direct. Soit  $f$  une similitude directe. Alors pour tout  $z$  différent de 0 et 1, on a :

$$\frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{z - 0}{1 - 0} = z.$$

On en déduit :

$$f(z) = z \times (f(1) - f(0)) + f(0)$$

et il reste à remarquer que cette formule est aussi vraie pour  $z = 0$  et  $z = 1$  et que comme  $f$  est injective,  $a = f(1) - f(0) \neq 0$ . ■

En pratique, c'est souvent de cette façon qu'est donnée une similitude directe dans les énoncés. Pour reconnaître ce qu'elle représente géométriquement, on procède de la façon suivante :

1. On recherche un éventuel **point fixe**, c'est-à-dire, on résout l'équation :  $f(z) = z$ .
2. Si  $a \neq 1$ , on trouve  $z_0 = \frac{b}{1-a}$  comme point fixe et

$$f(z) = a \times (z - z_0) + z_0$$

si l'on écrit  $a = \rho \times e^{i\theta}$ , la similitude directe  $f$  est donc la composée d'une rotation de centre d'affixe  $z_0$  et d'angle  $\theta$  et d'une homothétie de centre d'affixe  $z_0$  et de rapport  $\rho$ .

3. Si  $a = 1$ , il s'agit de la translation de vecteur d'affixe  $b$ .

#### Exemple(s) 34 :

34.1 La transformation donnée par la formule :

$$f(z) = (1 + i) \times z + 1$$

est la composée de la rotation de centre d'affixe  $i$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de l'homothétie de centre d'affixe  $i$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

#### 4.8.2.4 Similitudes indirectes du plan

**Définition 4.8.26 :** Soit  $f$  une transformation du plan. On dit que  $f$  est une similitude indirecte du plan si elle transforme tous les angles orientés en leurs opposés (et donc préserve aussi les rapports de distance). En termes d'affixes, pour tous trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives  $z$ ,  $z'$  et  $z''$  :

$$\frac{f(z') - f(z)}{f(z'') - f(z)} = \overline{\left( \frac{z' - z}{z'' - z} \right)}$$

#### Exemple(s) 35 :

35.1 La transformation :

$$z \mapsto e^{i\theta} \times \bar{z}$$

est une similitude indirecte, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

35.2 Plus généralement, la transformation

$$z \mapsto e^{i\theta} \times \overline{z - b} + b$$

est une similitude indirecte, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par le point d'affixe  $b$  et faisant un angle de  $\theta/2$  avec l'axe  $O_x$ .



Avec la même preuve que dans le cas des similitudes directes, on a :

**Propriété(s) 4.8.18 :** Une transformation du plan  $f$  est une similitude directe si et seulement si il existe  $a$  un complexe non nul et  $b$  un complexe tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a \times \bar{z} + b.$$

Comme pour les similitudes directes, c'est souvent de cette façon que sont données les similitudes indirectes dans les exercices. Voici comment reconnaître ce qu'elles représentent géométriquement :

1. On recherche d'éventuels points fixes, c'est-à-dire les  $z$  tels que  $f(z) = z$ . Un tel  $z$  est solution de l'équation :

$$(1 - |a|^2) \times z = b + a \times \bar{b}.$$

2. Si  $|a| = 1$  et  $b = 0$  alors si  $a = e^{i\theta}$ ,  $f$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

3. Si  $|a| = 1$  et  $b \neq 0$  alors si  $a = e^{i\theta}$ ,  $f$  est la composée de la translation de vecteur d'affixe  $b$  et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

4. Si  $|a| \neq 1$  alors  $f$  admet un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{b + a \times \bar{b}}{1 - |a|^2}$$

et l'on peut réécrire  $f(z) = z_0 + a \times \overline{z - z_0}$ . Donc si l'on note  $M$  le point d'affixe  $z_0$  et  $a = \rho \times e^{i\theta}$ ,  $f$  est la composée de la symétrie par rapport à la droite passant par  $M$  et faisant un angle  $\theta/2$  avec l'axe  $O_x$  et d'une homothétie de centre  $M$  et de rapport  $\rho$ .



## Chapitre 5

# Calculs algébriques

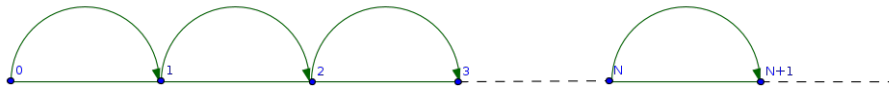
### 5.1 Les raisonnements par récurrence

Commençons en parlant d'un raisonnement essentiel en mathématiques : les raisonnements par récurrence.

#### 5.1.1 Récurrence simple

Le raisonnement par récurrence simple est basé sur le principe suivant. Considérons une proposition  $P(n)$  dont on veut montrer la véracité pour tout entier naturel  $n$ . Alors il suffit de :

1. La montrer pour  $n = 0$  (on parle d'*initialisation* de la récurrence) (notez qu'on pourrait aussi commencer en un entier  $k$  quelconque mais qu'alors la propriété ne serait prouvée que pour  $n \geq k$ )
2. De montrer que si pour un entier naturel  $N$ ,  $P(N)$  est vraie, alors  $P(N + 1)$  aussi (on parle d'*hérédité* de la récurrence)



#### Exemple(s) 36 :

36.1 Montrons que (inégalité de Bernoulli) :

$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \times x.$$

Pour ceci, on pose :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \geq -1, \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \times x.$$

(a) *Initialisation* : prenons  $n = 0$ . Alors, pour  $x \geq -1$  :

$$(1 + x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \times x.$$

(b) *Hérédité* : supposons, pour  $N$  un entier naturel fixé, que  $\mathcal{P}(N)$  est vraie et montrons  $\mathcal{P}(N + 1)$ . Soit  $x$  un réel plus grand que  $-1$ . On a :

$$(1 + x)^N \geq 1 + N \times x \text{ (hypothèse de récurrence)} \quad \text{et} \quad 1 + x \geq 0 \text{ (} x \geq -1 \text{)}.$$

Ceci nous donne, en multipliant la première inégalité par le réel positif  $1 + x$  :

$$(1 + x)^{N+1} \geq (1 + N \times x) \times (1 + x) = 1 + (N + 1) \times x + N \times x^2 \geq 1 + (N + 1) \times x \quad (x^2 \geq 0).$$

Concluons : par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  ; donc :

$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \times x.$$

36.2 Il est possible d'initialiser une récurrence pour un entier différent de 0 ; par exemple, montrons que toute somme supérieure à 12 peut être payée seulement avec des pièces de 4 et de 5 :

$$\forall n \geq 12, \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad 12 = 4 \times a + 5 \times b$$

- (a) *Initialisation* : prenons  $n = 12$ . Alors  $12 = 4 \times 3$ .
- (b) *Hérédité* : supposons, pour  $N$  un entier naturel fixé supérieur à 12, la propriété soit vraie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que :

$$N = 4 \times a + 5 \times b$$

Il y a alors deux cas :

- i. Si  $a \neq 0$  alors :

$$N + 1 = 4 \times (a - 1) + 5 \times (b + 1)$$

- ii. Si  $a = 0$  alors, comme  $N \geq 12$ ,  $b \geq 3$  donc :

$$N + 1 = 5 \times b + 1 = 5 \times (b - 3) + 4 \times 4$$

Concluons : par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 12$ .

36.3 Traitons maintenant un exemple de mauvaise utilisation : montrons (ce qui est évidemment faux !) que  $n$  points du plan sont toujours alignés.

- (a) C'est clairement vrai pour  $n = 0, 1$  et  $2$
- (b) Si je considère  $N + 1$  points, notés  $A_0, A_1, \dots, A_N$  alors par hypothèse de récurrence  $A_0, A_1, \dots, A_{N-1}$  sont alignés et  $A_1, \dots, A_N$  aussi donc  $A_0, A_1, \dots, A_N$  sont sur la même droite : celle qui passe par  $A_1, \dots, A_{N-1}$  ; ils sont alignés !

Sauriez-vous trouver l'erreur ?

### 5.1.2 Récurrence double

Le raisonnement par récurrence double est une conséquence immédiate du raisonnement par récurrence simple ; son principe est le suivant : pour montrer que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$ , il suffit de montrer que :

1.  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vrais (*initialisation*)
2. et que si, pour tout entier  $N$ , la véracité de  $P(N)$  et  $P(N + 1)$  entraîne celle de  $P(N + 2)$  (*hérédité*)

#### Exemple(s) 37 :

37.1 Soit  $x$  un réel tel que  $x + 1/x \in \mathbb{Z}$ . Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

- (a) *initialisation* : le résultat est vrai pour  $n = 0$  car  $2 \in \mathbb{Z}$  et pour  $n = 1$  par hypothèse
- (b) *hérédité* : supposons le résultat vrai pour  $N$  et pour  $N + 1$ . Alors :

$$\left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} + x^N + \frac{1}{x^N}$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} = \left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) - x^N - \frac{1}{x^N} \in \mathbb{Z}.$$

On conclut alors que la propriété est vraie pour tout  $n$  par principe de récurrence double.

37.2 On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On pose :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

- (a) *initialisation* : le résultat est vrai pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$  (faites le calcul !)  
 (b) *hérédité* : supposons le résultat vrai pour  $N$  et pour  $N + 1$ . Alors (hypothèse de récurrence) :

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^N - \psi^N) \quad \text{et} \quad u_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^{N+1} - \psi^{N+1}).$$

On en déduit :

$$u_{N+2} = u_{N+1} + u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^N \times (1 + \varphi) - \psi^N \times (1 + \psi))$$

mais  $1 + \varphi = \varphi^2$  et  $1 + \psi = \psi^2$  (faites le calcul !) donc :

$$u_{N+2} = u_{N+1} + u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^{N+2} - \psi^{N+2})$$

et on conclut : par principe de récurrence double, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

Notez que si la vérification de la formule est assez facile ici, il serait intéressant de trouver d'où vient l'idée de celle-ci...

### 5.1.3 Récurrence forte

Le raisonnement par récurrence forte, quand à lui, repose sur le principe que, pour montrer  $P(n)$  pour tout  $n$ , il suffit de :

1. Montrer  $P(0)$  (*initialisation*)
2. Montrer que si, pour tout entier  $N$ , la propriété est vraie pour tout entier  $k$  inférieur à  $N$ , alors elle l'est aussi pour  $N + 1$  (*hérédité*)

#### Exemple(s) 38 :

38.1 Montrons que tout entier naturel supérieur à 2 admet un diviseur premier.

- (a) *initialisation* : si  $n = 2$  alors 2 est un nombre premier qui divise 2  
 (b) *hérédité* : soit  $N$  un entier naturel et supposons que pour tout entier  $k$  inférieur ou égal à  $N$ ,  $k$  admette un diviseur premier. Alors, soit  $N + 1$  est un nombre premier et c'est terminé, soit il s'écrit comme produit de deux entiers naturels strictement inférieurs différents de 1 :  $N + 1 = n_1 \times n_2$ ,  $1 < n_1 < N + 1$ ,  $1 < n_2 < N + 1$  et alors par hypothèse de récurrence appliquée à  $n_1$ , il est divisible par un nombre premier donc  $N + 1$  aussi.

38.2 Montrons d'une autre façon que :

$$\forall n \geq 12, \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad n = 4 \times a + 5 \times b.$$

- (a) *initialisation* : on a :

$$12 = 4 \times 3, \quad 13 = 4 \times 2 + 5, \quad 14 = 4 + 5 \times 2, \quad 15 = 5 \times 3$$

- (b) *hérédité* : soit  $N \geq 16$  un entier naturel et supposons que pour tout entier  $k$  inférieur ou égal à  $N$  et supérieur à 12, la propriété soit vraie. C'est en particulier vrai pour  $N - 4 \geq 12$  :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad N - 4 = 4 \times a + 5 \times b$$

donc :  $N = 4 \times (a + 1) + 5 \times b$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 12$  par principe de récurrence forte.

## 5.2 Sommes et produits :

### 5.2.1 Définition, premiers exemples

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille d'ensemble. On appelle produit cartésien de cette famille l'ensemble :

$$\prod_{i \in I} E_i \stackrel{\text{Not.}}{=} \left\{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i, \forall i \in I, \quad x(i) \in E_i \right\}.$$

Un élément de ce produit cartésien est appelé famille et sera noté  $(x_i)_{i \in I}$ . Si  $E_i = E$  pour tout  $i$ , on notera plus simplement cet ensemble  $E^I$ . Un cas particulier qui nous intéressera sera celui où  $I = \mathbb{N}$  et  $E_i$  est l'ensemble des réels (resp. des complexes). On parlera dans ce cas de suite réelle (resp. complexe), que l'on notera  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (ou  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ).

**Définition 5.2.27 :** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels ou de complexes. On définit, pour tout entier  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n x_k$$

par les formules de récurrence :

$$\sum_{k=0}^0 x_k = x_0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} x_k = \sum_{k=0}^n x_k + x_{n+1} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^0 x_k = x_0, \quad \prod_{k=0}^{n+1} x_k = \left( \sum_{k=0}^n x_k \right) \times x_{n+1}.$$

**Remarque(s) 25 :** 1. Il est parfois aisé, pour bien se représenter les sommes et les produits, de noter :

$$\sum_{k=0}^n x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n x_k = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n.$$

Attention cependant ! Ces notations utilisant des pointillés sont très dangereuses et peuvent faire faire des erreurs (pensez à la récurrence fautive du paragraphe précédent)...

2. Soit  $I$  un ensemble fini non vide à  $n$  éléments. Numérotions ses éléments par les entiers compris entre 0 et  $n - 1$ , c'est-à-dire :

$$I = \{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}.$$

Alors on définit, pour  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou de complexes indexés par  $I$

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_{i_k}, \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} x_i = \prod_{k=0}^{n-1} x_{i_k}.$$

Notez que cette définition ne dépend pas de l'ordre employé dans la numérotation de  $I$ .

3. Par la définition précédente, si  $I = \llbracket k, k+n \rrbracket$ , où  $k$  et  $n$  sont deux entiers naturels, on a :

$$\sum_{i=k}^{k+n} x_i \stackrel{Not.}{=} \sum_{i \in \llbracket k, k+n \rrbracket} x_i = \sum_{i=0}^n x_{i-k}$$

c'est ce qu'on appelle un *changement d'indices* ; il en existe d'autres...

Traitons quelques exemples :

**Exemple(s) 39 :**

39.1 On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$n! = \prod_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

39.2 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique. Alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

En effet, comme la suite est arithmétique on remarque facilement que pour tout  $0 \leq k \leq n$  :  $u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$  donc en effectuant le changement d'indices  $k \leftrightarrow n-k$  :

$$2 \times \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n u_{n-k} = \sum_{k=0}^n (u_0 + u_n) = (n+1) \times (u_0 + u_n)$$

39.3 En particulier (somme arithmétique) :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

39.4 Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 1$ . On a (somme géométrique) :

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

En effet :

$$(1-a) \times \sum_{k=0}^n a^k = \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} = \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}.$$

39.5 On en déduit immédiatement que si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $r \neq 1$  alors :

$$\sum_{k=0}^n v_k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \times v_0.$$

39.6 En particulier, si  $\zeta \in \mathbb{U}_n$  alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0.$$

39.7 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . On a (formule de Bernoulli) :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}.$$

En effet :

$$(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \times b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} = \sum_{k=1}^n a^k \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} = a^n - b^n.$$

39.8 Il existe un type de somme particulièrement facile à calculer : les sommes dites télescopiques : si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite, alors :

$$\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

Par exemple, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \times (k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

39.9 Les sommes télescopiques ont aussi leur tenant pour les produits ; si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de complexes non nuls, alors :

$$\prod_{k=0}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

Par exemple, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1.$$

39.10 La notation indicielle de la somme est particulièrement adaptée au produit de sommes : en effet (il suffit, pour s'en rappeler, de se souvenir de la distributivité du produit sur la somme) :

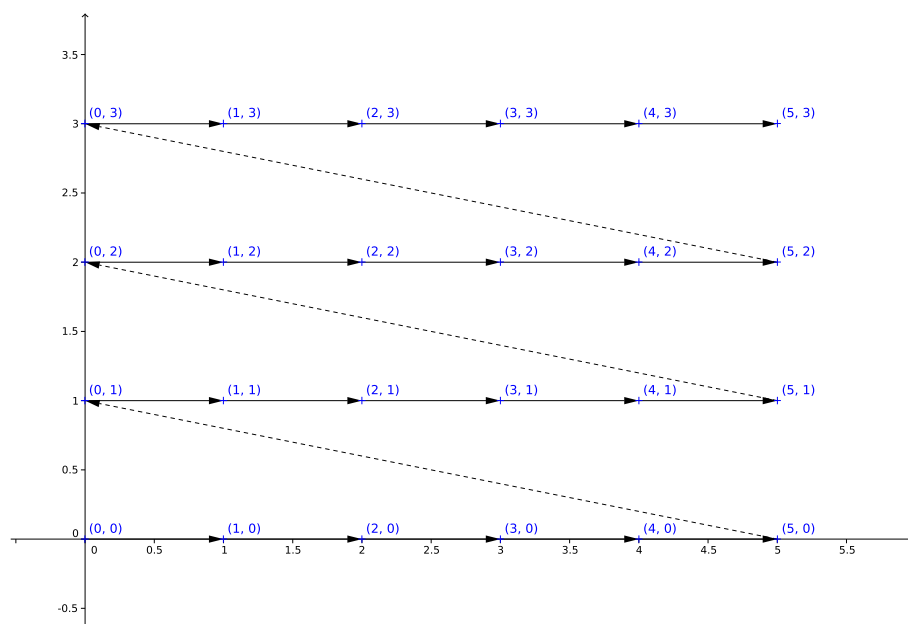
$$\left( \sum_{i \in I} x_i \right) \times \left( \sum_{j \in J} y_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \times y_j.$$

## 5.2.2 Sommes doubles

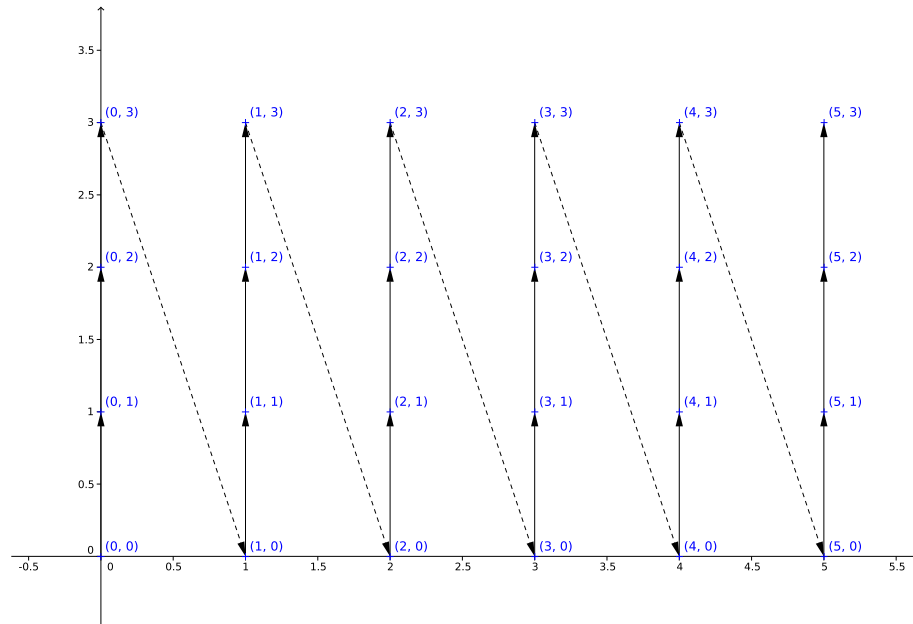
Le dernier exemple nous suggère naturellement d'étudier les sommes dites *doubles*. Le cas le plus simple est le suivant :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket} a_{i,j}.$$

Il exista alors deux façons d'effectuer la somme, par lignes, ou par colonnes :







Ce qui donne, en utilisant ces deux numérotations : :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{i,j}.$$

#### Exemple(s) 40 :

40.1 On a :

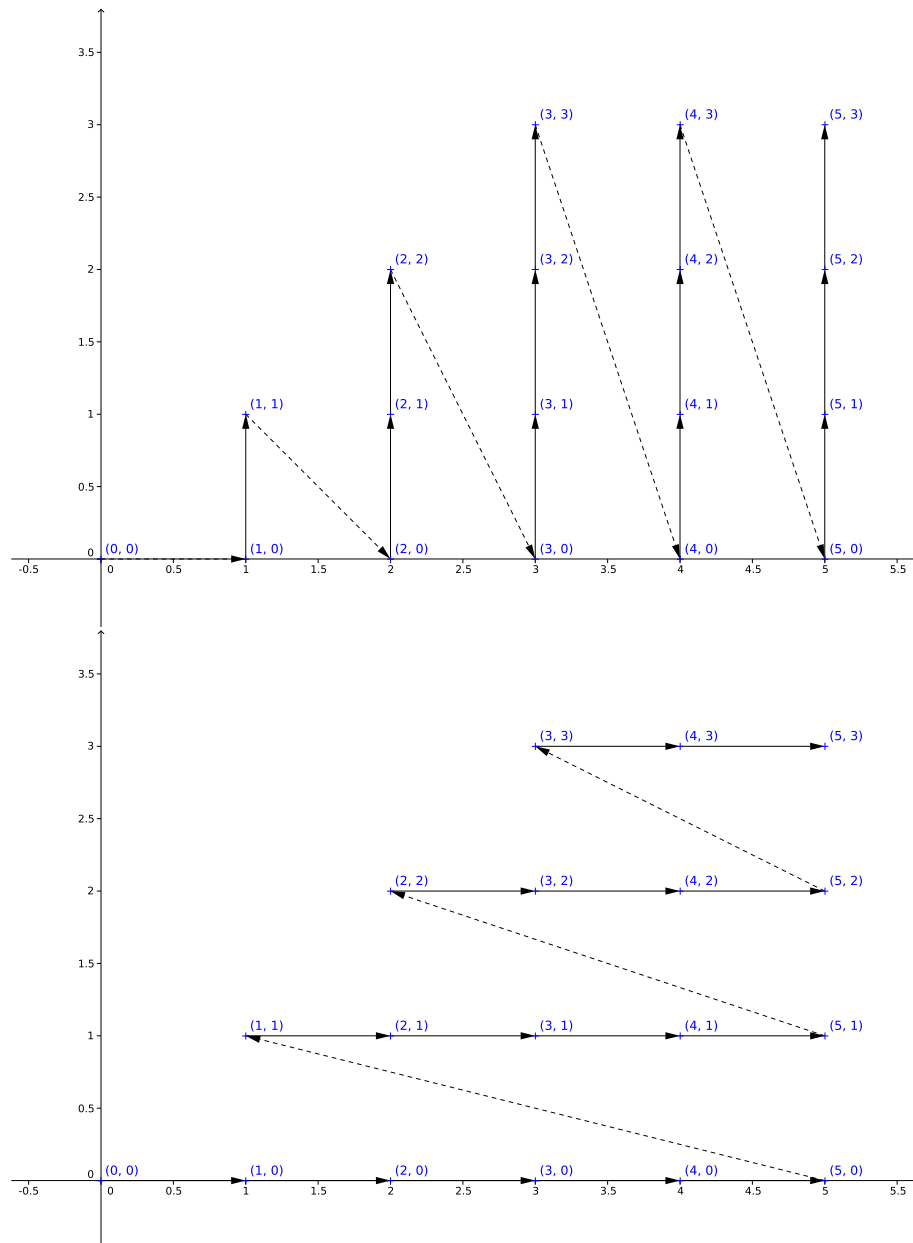
$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} (i+j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (i+j) = \sum_{i=0}^n (m+1) \times \left(i + \frac{m}{2}\right) = \frac{(n+1) \times (m+1) \times (n+m)}{2}.$$

40.2 On a :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} i \times j = \left(\sum_{i=0}^n i\right) \times \left(\sum_{j=0}^m j\right) = \frac{n \times m \times (n+1) \times (m+1)}{4}.$$

Un autre type de sommes doubles que l'on rencontre souvent est dit « triangulaire » :

$$\sum_{\substack{j \leq i \\ (i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket}} a_{i,j}$$



On peut alors, comme pour le cas des sommes précédentes, procéder par lignes ou par colonnes (par convention, la dernière somme est nulle si  $j > n$ ) :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\max(i, m)} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \leq i \\ (i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=j}^n a_{i,j}$$

Souvent,  $m = n$  dans une telle somme et la formule se simplifie alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{\substack{j \leq i \\ (i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}}$$

**Exemple(s) 41 :**

41.1 Parfois, intervertir une somme triangulaire facilite grandement les calculs :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

41.2 Parfois, une somme triangulaire apparaît naturellement lors d'un calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j) &= \sum_{\substack{j \leq i \\ (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}} j + \sum_{\substack{i < j \\ (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}} i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n i \\ &= \sum_{j=1}^n (n-j+1) \times j + \sum_{i=1}^n (n-i) \times i = (2n+1) \times \frac{n \times (n+1)}{2} - \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{3} = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

### 5.3 Formule du binôme de Newton

Terminons cette partie par la formule du binôme de Newton. Commençons par rappeler que les coefficients binomiaux sont définis par, pour  $p \leq n$  deux entiers naturels :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Notez que, souvent, si  $p > n$ , on dira que  $\binom{n}{p} = 0$ . Retenir la formule de définition est très importante, mais il existe une méthode pour calculer ces coefficients : le *triangle de Pascal*, dont la justification est donnée par la formule éponyme, pour  $k$  et  $n$  des entiers strictement positifs (faites le calcul!) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

cette formule, couplée à la remarque que  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$  permet de calculer les coefficients binomiaux ligne par ligne (et c'est exactement ce dont on aura besoin pour la formule du binôme de Newton) :

$n \setminus k$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
$n = 0$	1					
$n = 1$	1	1				
$n = 2$	1	2	1			
$n = 3$	1	3	3	1		
$n = 4$	1	4	6	4	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

**Théorème 5.3.3 (Formule du binôme de Newton) :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

**Démonstration :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Montrons la formule par récurrence sur  $n$ .

1. *initialisation* : si  $n = 0$ , on a :

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k \times b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 \times b^{0-0} = 1.$$

2. *hérédité* : supposons que, pour  $N$  un entier naturel fixé :

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k \times b^{N-k}.$$

Alors :

$$(a+b)^{N+1} = (a+b) \times \left( \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k \times b^{N-k} \right) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^{k+1} \times b^{N-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k}.$$

Donc, en effectuant le changement de variables  $k' = k + 1$  dans la première somme :

$$\begin{aligned} (a+b)^{N+1} &= \sum_{k'=1}^{N+1} \binom{N}{k'-1} a^{k'} \times b^{N+1-k'} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k} \\ &= a^{N+1} + b^{N+1} + \sum_{k=0}^N \left( \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right) a^k \times b^{N+1-k}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la formule du triangle de Pascal pour conclure. ■

### Exemple(s) 42 :

42.1 On a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Voyons maintenant quelques applications ; il est possible, grâce au binôme de Newton et aux formules d'Euler d'obtenir des formules de trigonométrie :

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . La **formule de Moivre** :

$$\cos(n \times \theta) + \sin(n \times \theta) i = e^{i n \times \theta} = (\cos(\theta) + \sin(\theta) i)^n$$

permet, en développant l'expression de droite grâce au binôme de Newton, d'exprimer  $\cos(n \times \theta)$  et  $\sin(n \times \theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Par exemple :

$$(\cos(\theta) + \sin(\theta) i)^5 = \cos^5(\theta) + 5 i \cos^4(\theta) \times \sin(\theta) - 10 \cos^3(\theta) \times \sin^2(\theta) - 10 i \cos^2(\theta) \times \sin^3(\theta) + 5 \cos(\theta) \times \sin^4(\theta) + i \sin^5(\theta)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10 \cos^3(\theta) \times \sin^2(\theta) + 5 \cos(\theta) \times \sin^4(\theta) \\ \sin(5\theta) = 5 \cos^4(\theta) \times \sin(\theta) - 10 \cos^2(\theta) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta). \end{cases}$$

Remarquez que grâce à la formule  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ , il est possible pour ces formules (et c'est toujours le cas pour le cosinus) d'exprimer le cosinus uniquement à l'aide de cosinus et le sinus seulement à l'aide de sinus :

$$\begin{cases} \cos(5\theta) = 16 \cos^5(\theta) - 20 \cos^3(\theta) + 5 \cos(\theta) \\ \sin(5\theta) = 16 \sin^5(\theta) - 20 \sin^3(\theta) + 5 \sin(\theta). \end{cases}$$

2. Inversement, on peut **linéariser** les puissances de cosinus et de sinus, c'est-à-dire les exprimer à l'aide de cosinus et sinus sans puissances ; par exemple :

$$\cos(\theta)^4 = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{1}{8} \left( \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} + 4 \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{8} (\cos(4\theta) + 4 \cos(2\theta) + 3),$$

$$\sin(\theta)^4 = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{8} \left( \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} - 4 \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{8} (\cos(4\theta) - 4 \cos(2\theta) + 3).$$

## Chapitre 6

# Calculs de primitives :

### 6.1 Définition, premiers exemples

**Définition 6.1.28 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle primitive de  $f$  une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$  telle que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

**Remarque(s) 26 :** 1. Une fonction  $f$  n'admet jamais une seule primitive, en effet, si  $F$  est une primitive de  $f$  alors pour toute constante  $k \in \mathbb{K}$ , la fonction  $F + k$  est aussi une primitive de  $f$ .

2. Réciproquement, si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$ , alors  $(F - G)' = 0$  donc comme  $I$  est un intervalle, il existe une constante  $k$  telle que :  $F = G + k$  sur  $I$ .

3. Les deux précédentes remarques se résument à : si  $F$  est une primitive de  $f$  alors l'ensemble des primitives de  $f$  est :

$$\{F + k, \quad k \in \mathbb{K}\}.$$

4. Il est possible que certains énoncés demandent de trouver des primitives sur une réunion d'intervalles  $E$ ; dans ce cas, il s'agit de chercher une primitive sur chaque intervalle. Attention cependant ! Dans ce cas, l'ensemble des primitives est différent que si il s'agissait d'un intervalle; par exemple, l'ensemble des primitives de  $\frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$  est :

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln(x) + k_1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(-x) + k_2 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**Exemple(s) 43 :**

43.1 On a des primitives célèbres à bien connaître ( $F$  désigne une primitive de  $f$  sur chaque intervalle où la fonction  $f$  est définie) :

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/x$	$\ln( x )$

La première formule est fondamentale, elle contient de nombreuses primitives connues, par exemple, on peut en déduire que sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}^*$ , si  $n \neq 1$ , une primitive de  $f(x) = 1/x^n$  est :

$$F(x) = \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

De même, sur  $\mathbb{R}_+^*$ , une primitive de la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est :

$$F(x) = \frac{2}{3} \times x^{3/2}.$$

43.2 Les même formules sont vraies avec un décalage : si  $a$  est une constante, une primitive de  $f$  sur chaque intervalle où la fonction  $f$  est définie est :

$f(x)$	$F(x)$
$(x+a)^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$(x+a)^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/(x+a)$	$\ln( x+a )$

**Propriété(s) 6.1.19 :** Soit  $F$  une primitive de  $f$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur un intervalle  $I$  et  $k \in \mathbb{K}$ . Alors :

1.  $F + G$  est une primitive de  $f + g$
2.  $k \times F$  est une primitive de  $k \times f$ .

#### Exemple(s) 44 :

44.1 Une primitive sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}^*$  de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$$

est la fonction :

$$F(x) = -\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^2} - \ln(|x|).$$

44.2 Cherchons une primitive sur chaque intervalle de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Écrite comme ceci, il est difficile de trouver une primitive de  $f$ . Pour simplifier, il est possible de décomposer cette fraction en éléments simples :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}$$

et l'on en déduit une primitive de  $f$  :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|x - 1|) - \frac{1}{2} \ln(|x + 1|).$$

Nous reviendrons ultérieurement sur cette idée de décomposition.

## 6.2 Méthodes directes

### 6.2.1 Linéarisation

Commençons par remarquer que les fonctions suivantes  $f$  ont pour primitives  $F$  sur  $\mathbb{R}$  :

$f(x)$	$F(x)$
$e^{\lambda \times x} \ (\lambda \in \mathbb{K}^*)$	$e^{\lambda \times x} / \lambda$
$\cos(\omega \times x) \ (\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\sin(\omega \times x) / \omega$
$\sin(\omega \times x) \ (\omega \in \mathbb{R}^*)$	$-\cos(\omega \times x) / \omega$
$\cosh(\omega \times x) \ (\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\sinh(\omega \times x) / \omega$
$\sinh(\omega \times x) \ (\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\cosh(\omega \times x) / \omega$

Il est alors possible, à partir de ces formules, d'obtenir une primitive de n'importe quelle somme ou produit de ces fonctions. La méthode est la suivante :

1. On linéarise l'expression grâce que formules d'Euler ou la définition,
2. on trouve une primitive de la fonction linéarisée grâce aux formules que l'on vient de voir et éventuellement on travaille un peu pour faire apparaître des fonctions réelles.

#### Exemple(s) 45 :

45.1 Rappelons-nous que par linéarisation :

$$\cos(x)^4 = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3),$$

une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x)^4$  est donc :

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x.$$

45.2 Considérons maintenant la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x) \times e^x$  : on commence en linéarisant :

- (a)  $f(x) = \cos(x) \times e^x = \frac{1}{2} (e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x})$
- (b) une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est donc la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2(1+i)} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2(1-i)} e^{(1-i)x} = e^x \times \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}.$$

45.3 Avec la même méthode, on peut montrer qu'une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cosh(x) \times \cos(x)$  est la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2} (\sin(x) \times \cosh(x) + \cos(x) \times \sinh(x)).$$

## 6.2.2 Repérer des dérivées de fonctions composées

Cette méthode permet parfois de résoudre très facilement des exercices qui seraient sinon très techniques.

**Propriété(s) 6.2.20 :** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $u : I \rightarrow J$  et  $v : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonction dérivables sur leur ensemble de définition. Alors une primitive de la fonction définie sur  $I$  par :

$$f(x) = u'(x) \times v(u(x))$$

est la fonction définie sur  $I$  par :

$$F(x) = v(u(x)).$$

#### Exemple(s) 46 :

46.1 Deux cas particulier que nous utiliserons fréquemment sont donnés par :

$$(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}, \quad \ln(|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

46.2 Une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \cos^3(x) \times \sin^6(x) = \cos(x) \times \sin^6(x) - \cos(x) \times \sin^8(x)$$

est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \frac{(\sin(x))^7}{7} - \frac{(\sin(x))^9}{9}.$$

Plus généralement, si l'on cherche une primitive d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos^i(x) \times \sin^j(x)$  alors, en utilisant la formule  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  :

- (a) si  $i$  est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en  $\sin(x)$
- (b) si  $j$  est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en  $\cos(x)$

**Il ne faut donc surtout pas linéariser** lorsqu'on cherche une primitive d'une telle fonction !

46.3 Une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1}$$

est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ . Plus généralement, il est bon de remarquer qu'une primitive de la fonction définie sur par :

$$f(x) = \frac{2a \times x + b}{ax^2 + bx + c}$$

est sur tout intervalle de son ensemble de définition la fonction :

$$F(x) = \ln(|ax^2 + bx + c|).$$

46.4 Une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

est le fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = -\frac{1}{2(1 + x^2)}.$$

46.5 Une primitive de la fonction tangente :

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

est, sur tout intervalle de son ensemble de définition :

$$F(x) = -\ln(|\cos(x)|).$$

### 6.2.3 Quelques fractions rationnelles

Commençons cette partie en rappelant la primitive :

$f(x)$	$F(x)$
$1/(1 + x^2)$	$\arctan(x)$

Nous allons dans la suite utiliser cette primitive, en plus de certaines autres primitives que nous avons rencontrées pour calculer des primitives de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a \times x + b}$$

Suivant le signe du discriminant  $\Delta = a^2 - 4b$ , il y a deux cas :



1. Si  $\Delta > 0$ , l'équation  $x^2 + a \times x + b = 0$  a deux racines distinctes :  $x_1$  et  $x_2$  et l'on peut écrire :

$$x^2 + a \times x + b = (x - x_1) \times (x - x_2).$$

il est alors possible d'écrire la **décomposition en éléments simples** : (à savoir retrouver sur les exemples et non à apprendre par cœur)

$$\frac{1}{x^2 + a \times x + b} = \frac{1}{(x - x_1) \times (x - x_2)} = \frac{\frac{1}{x_1 - x_2}}{x - x_1} + \frac{\frac{1}{x_2 - x_1}}{x - x_2}$$

On en déduit qu'une primitive de  $f$  est :

$$F(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \times (\ln(|x - x_1|) - \ln(|x - x_2|)).$$

2. Si  $\Delta = 0$  l'équation admet une racine double  $x_1$  et l'on peut écrire :

$$\frac{1}{x^2 + a \times x + b} = \frac{1}{(x - x_1)^2}$$

il s'agit alors de reconnaître la dérivée d'une fonction composée. On en déduit la primitive :

$$F(x) = -\frac{1}{x - x_1}.$$

3. Enfin, si  $\Delta < 0$ , il faut travailler un peu pour se ramener à la dérivée d'une fonction composée ; on a :

$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}x + \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1}$$

On en déduit la primitive (penser  $\arctan(u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ )

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}x + \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\right).$$

Encore une fois, c'est la méthode plus que le résultat qu'il faut retenir ici.

Traitons quelques exemples :

#### Exemple(s) 47 :

47.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 1) \times (x - 2)} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \ln(|x - 2|) - \ln(|x - 1|).$$

47.2 Il faut faire bien attention à se ramener à ce qu'on sait faire s'il y a une constante au numérateur ou devant le  $x^2$  au dénominateur :

$$f(x) = \frac{2}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{3} \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

La fonction  $f$  admet donc pour primitive le fonction :

$$F(x) = -\frac{2}{3} \frac{1}{x + 1}.$$

47.3 Enfin, une primitive de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

On peut prolonger la méthode un peu ; il est possible en utilisant les résultats des deux paragraphes précédents de calculer une primitive d'une fonction du type :

$$f(x) = \frac{cx + d}{x^2 + ax + b}.$$

Il faut d'abord faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$f(x) = \frac{cx + d}{x^2 + ax + b} = \frac{c}{2} \times \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \left(d - \frac{a \times c}{2}\right) \times \frac{1}{x^2 + ax + b}.$$

Puis de remarquer que l'on sait calculer une primitive des deux fonctions ; la première est un logarithme, la deuxième grâce à la méthode que l'on vient de voir.

#### Exemple(s) 48 :

48.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

est la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x).$$

48.2 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

## 6.3 Méthodes intégrales

### 6.3.1 Notation intégrale

Dans la suite du paragraphe, on admettra que, sur un intervalle  $I$ , **toute fonction continue admet une primitive.**

**Définition 6.3.29 :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Pour tout  $c \in I$ , on note pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$  :

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $c$ .

- Remarque(s) 27 :**
1. Nous verrons dans un paragraphe futur que (ce qui est très loin d'être évident) cette notation est reliée à un calcul d'aire ; plus précisément, la quantité :  $\int_c^d f(t) dt$  désigne, si  $c \leq d$  sont deux réels de l'intervalle  $I$  l'aire (orientée) comprise entre l'axe  $O_x$  et la courbe de  $f$ .
  2. Une telle primitive est bien-sûr dérivable, mais il y a plus, comme  $f$  est continue, sa dérivée est continue. On appelle une telle fonction une **fonction de classe  $\mathcal{C}^1$** .
  3. Le réel  $c$  importe peu si l'on cherche à calculer **une** primitive : changer  $c$  en un autre réel de l'intervalle revient à ajouter une constante à la primitive que nous sommes en train de calculer.
  4. Si  $a$  et  $b$  sont deux réels d'un intervalle  $I$  et  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  alors ;

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a).$$

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la compatibilité des primitives avec la somme et le produit par une constante.

**Propriété(s) 6.3.21 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$ . Soit  $k$  une constante. alors, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) dt &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \\ \int_a^b k \times f(t) dt &= k \times \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

### 6.3.2 Intégration par parties

**Proposition 6.3.5 :** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ . Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I$  :

$$\int_a^b u'(t) \times v(t) dt = [u(t) \times v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t) \times v'(t) dt.$$

**Démonstration :** Il s'agit d'une application directe de la formule  $u' \times v = (u \times v)' - u \times v'$ . ■

**Exemple(s) 49 :**

49.1 Calculons une primitive de la fonction logarithme par intégration par parties :

$$\int_c^x \ln(t) dt = [t \times \ln(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 1 dt = x \times \ln(x) - x + C.$$

une primitive de la fonction logarithme est donc la fonction :

$$F(x) = x \times \ln(x) - x.$$

49.2 Calculons une primitive de la fonction arc-tangente par intégration par parties :

$$\int_c^x \arctan(t) dt = [t \times \arctan(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \times \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Une primitive de la fonction arc-tangente est donc la fonction :

$$F(x) = x \times \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

49.3 Une primitive de la fonction arc-sinus sur  $] -1, 1[$  se calcule aussi par intégration par parties :

$$\int_c^x \arcsin(t) dt = [t \times \arcsin(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Une primitive sur  $] -1, 1[$  de la fonction arc-sinus est donc la fonction :

$$F(x) = x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

49.4 Enfin, il est possible de faire plusieurs intégrations par parties de suite ; par exemple, si l'on cherche à calculer une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 \times e^x$  :

$$\int_c^x t^2 \times e^t dt = [t^2 \times e^t]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 2t \times e^t dt = [t^2 \times e^t]_{t=c}^{t=x} - [2t \times e^t]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x 2e^t dt = (x^2 - 2x + 2) \times e^x + C.$$

### 6.3.3 Changements de variables

#### 6.3.3.1 Le théorème, premiers exemples

**Théorème 6.3.4 (changement de variables) :** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $J$  et  $\varphi : I \rightarrow J$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a, pour tous  $a$  et  $b$  éléments de  $I$  :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

*Démonstration :* Soit  $F$  une primitive de  $f$  alors la fonction  $G$  définie sur  $I$  par :

$$G(t) = F(\varphi(t))$$

est une primitive de  $f \circ \varphi \times \varphi'$  car elle est dérivable et par la formule de dérivation des composées :

$$G'(t) = \varphi'(t) \times F'(\varphi(t)).$$

On en déduit :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

■

**Remarque(s) 28 :** 1. Il est possible de retenir cette formule plus facilement comme une formule de changements de variables ; si l'on note  $s = \varphi$  (et qu'on le pense comme une nouvelle variable) la formule se réécrit :

$$\int_{s(a)}^{s(b)} f(s) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt$$

et il suffit pour l'appliquer de penser à la règle :  $ds = \varphi'(t) dt$  et de ne pas oublier de changer les bornes.

#### Exemple(s) 50 :

50.1 Calculons une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

On a :

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^x \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt \underset{s=e^t}{=} \int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{1 + s^2} ds = [\arctan(s)]_{s=e^c}^{s=e^x} = \arctan(e^x) + C$$

50.2 Calculons maintenant une primitive de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sin(x)},$$

sur l'intervalle  $]0, \pi[$ . On a :

$$\int_c^x g(t) dt = \int_c^x \frac{\sin(t)}{1 - \cos^2(t)} dt \stackrel{s=\cos(t)}{=} \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{1 - s^2} ds = \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} \right) ds = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) + C.$$

50.3 Attention à l'ensemble de définition du changement de variables ! Si l'on cherche à calculer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction :

$$h(x) = \frac{1}{1 + \sin^2(x)}$$

une façon de procéder est d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{dt}{1 + \sin^2(t)} &= \int_c^x \frac{dt}{\cos^2(t) + 2 \sin^2(t)} = \int_c^x \frac{1}{1 + 2 \tan^2(t)} \frac{dt}{\cos^2 t} \stackrel{s=\tan(t)}{=} \int_{\tan(c)}^{\tan(x)} \frac{ds}{1 + 2s^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\tan(c)}^{\tan(x)} \frac{\sqrt{2} ds}{1 + (\sqrt{2}s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan(x)) + C. \end{aligned}$$

La primitive trouvée n'est même pas définie sur  $\mathbb{R}$  ! Le problème vient du fait que la fonction  $\tan$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$ . Le calcul que nous avons fait n'est valable que sur tout intervalle de la forme :

$$\left] -\frac{\pi}{2} + n \times \pi, \frac{\pi}{2} + n \times \pi \right[, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(à la lisière du programme) il est cependant possible de trouver une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$  à l'aide des primitives que l'on vient de calculer si l'on pose :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (\arctan(\sqrt{2} \tan(x)) + n \times \pi), & \text{si } x \in \left] -\frac{\pi}{2} + n \times \pi, \frac{\pi}{2} + n \times \pi \right[, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} + n \times \pi \right) & \text{si } x = \frac{\pi}{2} + n. \end{cases}$$

### 6.3.3.2 Primitives de fonctions avec des racines

Si l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction qui fait apparaître une expression du type  $\sqrt[n]{\frac{a \times x + b}{c \times x + d}}$ , il est souvent utile d'effectuer le changement de variables :

$$s = \sqrt[n]{\frac{a \times x + b}{c \times x + d}}.$$

#### Exemple(s) 51 :

51.1 Cherchons à calculer une primitive sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

On a :

$$\int_c^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt \stackrel{s=\sqrt{t}}{=} \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{x}} \frac{2s^2}{1+s^2} dt = 2\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x}) + C.$$

51.2 Cherchons à calculer une primitive sur  $] -1/2, +\infty[$  de la fonction :

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+1} + 1}{x+1}.$$

Remarquons qu'il faut travailler un peu plus pour le changement de variables :

$$\begin{aligned} s = \sqrt{2t+1} &\implies t = \frac{s^2-1}{2} \\ \int_c^x \frac{\sqrt{2t+1}+1}{t+1} dt &\stackrel{s=\sqrt{2t+1}}{=} \int_{c'}^{\sqrt{2x+1}} \frac{s+1}{\frac{s^2-1}{2}+1} \times s ds = 2 \int_{c'}^{\sqrt{2x+1}} \frac{s^2+s}{s^2+1} ds \\ &= 2 \int_{c'}^{\sqrt{2x+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{1+s^2} \right) ds \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction  $g$  est donc la fonction :

$$G(x) = 2\sqrt{2x+1} + \ln(2x+2) - 2 \arctan(\sqrt{2x+1}).$$

Si dans une fonction apparaît une expression du type :

$$\sqrt{-x^2 + a \times x + b} = \sqrt{b + \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

remarquons que  $a^2 + 4b$  doit être strictement positif pour que la fonction soit définie sur un intervalle d'intérieur non vide. On a donc :

$$\sqrt{-x^2 + a \times x + b} = \sqrt{\frac{4b+a^2}{4}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a}{4b+a^2}\right)^2}$$

l'idée est alors de poser :

$$\frac{2x-a}{4b+a^2} = \sin(\theta),$$

puis d'utiliser la formule  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

### Exemple(s) 52 :

52.1 Cherchons une primitive de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 1}}.$$

On a :

$$\int_c^x g(t) dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \int_c^x \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^2}} dt \stackrel{\sin(\theta) = \frac{2t-1}{\sqrt{5}}}{=} \int_d^{\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)} d\theta.$$

Et l'on en déduit la primitive :

$$G(x) = \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

52.2 Cherchons une primitive de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 1}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_c^x \sqrt{-t^2 + t + 1} dt &= \int_c^x \sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_c^x \sqrt{1 - \left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^2} dt \\ &\stackrel{\sin(\theta) = \frac{2t-1}{\sqrt{5}}}{=} \frac{5}{4} \int_d^{\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{5}{8} \int_d^{\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)} (\cos(2\theta) + 1) d\theta \end{aligned}$$

On en déduit la primitive :

$$F(x) = \frac{5}{16} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)\right) + \frac{5}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

### 6.3.3.3 Formules de l'arc-moitié et applications

Les formules de l'arc-moitié permettent d'exprimer toutes les fonctions trigonométriques d'un angle  $t$  en fonction de  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ . Attention cependant ! Ce changement de variables n'est défini que si  $t \notin \pi + 2\pi \times \mathbb{Z}$ . On a :

$$\mathrm{d}t = \frac{2 \mathrm{d}u}{1+u^2} \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

**Démonstration :** Pour la première égalité, il suffit de se souvenir de la dérivée de la fonction tangente. Pour la deuxième, on a :

$$\cos(t) = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1$$

donc  $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$  puis  $\cos(t) = 2 \frac{1}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ . Enfin,

$$\sin(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \times u = \frac{2u}{1+u^2}$$

et la dernière formule est une conséquence directe des deux précédentes. ■

Ces formules permettent de ramener le calcul d'intégrales faisant apparaître des fonctions trigonométriques à un calcul d'intégrales faisant apparaître des puissances.

#### Exemple(s) 53 :

53.1 Une primitive sur  $] -\pi, \pi[$  de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x)}$$

est la fonction :

$$\int_c^x \frac{1}{2 + \cos(t)} \mathrm{d}t = \int_d^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2 \mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_d^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2 \mathrm{d}u}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_d^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{\mathrm{d}u/\sqrt{3}}{1+(u/\sqrt{3})^2}$$

On en déduit la primitive :

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

53.2 Cherchons maintenant une primitive sur  $] -\pi/2, \pi[$  de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 1}$$

on a :

$$\int_c^x \frac{1}{\sin(t) + \cos(t) + 1} \mathrm{d}t = \int_d^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2 \mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_d^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + D.$$

## 6.4 Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre

### 6.4.1 Définitions, solutions de l'équation homogène

**Définition 6.4.30 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une expression du type :

$$y' + a(t) \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction  $f$  dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t) \times f(t) = b(t).$$

Le problème de Cauchy associé à cette équation différentielle est la donnée supplémentaire d'une condition initiale  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ . On le note :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

une solution du problème de Cauchy est une solution  $f$  de l'équation différentielle qui vérifie de plus  $f(t_0) = y_0$ .

**Remarque(s) 29 :** 1. Comme dans le cas linéaire à coefficients constants, on appelle équation différentielle homogène associée l'équation :

$$y' + a(t) \times y = 0.$$

2. Le principe de superposition s'applique à ces équations comme dans le cas des coefficients constants : si  $f_1$  est une solution de  $y' + a(t) \times y = b_1(t)$  et  $f_2$  est une solution de  $y' + a(t) \times y = b_2(t)$  alors  $f_1 + f_2$  est une solution de :

$$y' + a(t) \times y = b_1(t) + b_2(t).$$

**Proposition 6.4.6 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $a$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur l'intervalle  $I$  :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = y_0 \times \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right).$$

**Démonstration :** Clairement,  $f$  est solution du problème de Cauchy. Réciproquement, si  $g$  est une solution du problème de Cauchy, on pose :

$$h(t) = g(t) \times \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right).$$

Alors :

$$\forall t \in I, \quad h'(t) = (g'(t) + a(t) \times g(t)) \times \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right) = 0,$$

la fonction  $h$  est donc constante, mais par la condition initiale,  $h(t_0) = y_0$  et l'on en déduit l'unicité. ■

**Remarque(s) 30 :** 1. Notez l'importance de travailler sur un **intervalle**  $I$ .

2. De cette proposition, on en déduit immédiatement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène  $y' + a(t) \times y = 0$  : si  $A$  est une primitive de  $a$ ,

$$S_0 = \{t \in I \mapsto C \times \exp(-A(t)), \quad C \in \mathbb{K}\}.$$



**Exemple(s) 54 :**

54.1 Évidemment, les résultats que nous avons donnés pour les équations à coefficients constants restent valables; traitons un exemple venant de la physique : le circuit  $RC$  :

$$R \times C \times \frac{du}{dt} + u(t) = 0$$

pensez bien à diviser par  $R \times C$  pour vous ramener à la proposition ! Une fois ceci fait, une primitive de la fonction constante  $1/(R \times C)$  est la fonction  $1/(R \times C) \times t$ ; on en déduit les solutions :

$$S_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto A \times \exp\left(\frac{-t}{R \times C}\right), \quad A \in \mathbb{R} \right\}.$$

54.2 Prenons maintenant un exemple plus mathématique. Les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} \times y = 0$$

sont par la proposition :

$$S_0 = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto C \times \exp(-\ln(|1+x^2|)), \quad C \in \mathbb{R} \}.$$

Mais cette expression se simplifie; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{C}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

54.3 Cherchons maintenant les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(t) + 1} \times y = 0$$

sur l'intervalle  $] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} [$ . Pour ceci, nous allons chercher à calculer la primitive suivante grâce aux formules de l'arc-moitié :

$$\begin{aligned} \int_c^t \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(s) + 1} ds &= \int_d^{\tan(\frac{t}{2})} \frac{\sqrt{3}}{2 \frac{1-u^2}{u^2+1} + 1} \frac{2 du}{u^2 + 1} = \int_d^{\tan(\frac{t}{2})} \frac{-2\sqrt{3} du}{u^2 - 3} \\ &= \int_d^{\tan(\frac{t}{2})} \left( \frac{1}{u + \sqrt{3}} - \frac{1}{u - \sqrt{3}} \right) du = \ln \left( \frac{\sqrt{3} + \tan(\frac{t}{2})}{\sqrt{3} - \tan(\frac{t}{2})} \right) + D \end{aligned}$$

Notez que quand  $t \in ] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} [$ ,  $\tan(\frac{t}{2}) \in ] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$ . On en déduit les solutions de l'équation différentielle :

$$S = \left\{ t \in \left] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right[ \mapsto C \times \frac{\sqrt{3} + \tan(\frac{t}{2})}{\sqrt{3} - \tan(\frac{t}{2})}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Terminons par quelques remarques sur la justification d'une méthode appréciée en physique pour résoudre l'équation différentielle. Remarquons que par la forme des solutions, *si une solution  $y$  s'annule en un point de  $I$ , alors elle est nulle sur  $I$* . En conséquence, si elle vérifie pour la condition initiale  $y(t_0) \neq 0$ , elle n'est jamais nulle sur  $I$  donc par la théorème des valeurs intermédiaires strictement positive ou strictement négative comme elle est continue. Si  $y(t_0)$  est strictement positif, le calcul suivant est donc légitime (et peut permettre de retrouver la formule) :

$$y' + a(t) \times y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a(t) \iff \ln(y) = -A(t) + D \iff y = \exp(-A(t) + D) = C \times \exp(-A(t)).$$

### 6.4.2 Solutions de l'équation différentielle

Le principe de superposition nous donne, comme dans le cas à coefficients constants : si  $f_0$  est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + a(t) \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S = \{f_0 + f, \quad f \in S_0\} = \{f_0 + C \times \exp(-A(t)), \quad C \in \mathbb{K}\}.$$

Le problème est alors réduit à : comment trouver une telle solution (si elle existe) ? Supposons que l'on cherche une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'idée qui suit est appelée **variation de la constante** : si  $f$  est une fonction dérivable, on fixe  $A(t) = \int_{t_0}^t a(u) du$  la primitive de  $a$  qui s'annule en  $t_0$  et l'on pose :

$$C(t) = f(t) \times e^{A(t)} \iff f(t) = C(t) \times e^{-A(t)}$$

alors  $f$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f'(t) + a(t) \times f(t) = b(t) \iff (C'(t) - a(t) \times C(t) + a(t) \times C(t)) \times e^{-A(t)} = b(t) \iff C'(t) = b(t) \times e^{A(t)}$$

il reste alors à remarquer que  $C(t_0) = y_0$  pour conclure :  $f$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f(t) = \left( \int_{t_0}^t b(s) \times \exp\left(\int_{t_0}^s a(u) du\right) ds + y_0 \right) \times \exp\left(\int_{t_0}^t -a(u) du\right).$$

Cette formule n'est absolument pas à retenir par cœur ! Ce sont ses deux conséquences qu'il faut connaître :

pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle, on peut précéder par variation de la constante

ce qui se fait en pratique en cherchant  $f_0$  de la forme  $f_0(t) = C(t) \times e^{-A(t)}$  ; remarquez que tout se passe comme si la constante des solutions de l'équation homogène devenait une fonction et

**Proposition 6.4.7 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Il existe une unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

#### Exemple(s) 55 :

55.1 Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y' - y = (1 + t) \times e^t.$$

L'équation homogène ne pose pas de problème. Pour chercher une solution particulière, on procède par variation de la constante : la fonction  $f_0(t) = C(t) \times e^t$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^t = (1 + t) \times e^t \iff C'(t) = 1 + t$$

il suffit donc de prendre  $C'(t) = \frac{t^2}{2} + t$  ; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \left( C + \frac{t^2}{2} + t \right) \times e^t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

55.2 Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y' + t \times y = t$$

Une primitive de la fonction  $a(t) = t$  est la fonction  $A(t) = t^2$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme  $C \times e^{-t^2}$ . Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Une fonction  $f_0 = C(t) \times e^{-t^2}$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^{-t^2} = t \iff C'(t) = t \times e^{t^2}.$$

Il suffit donc de prendre  $C(t) = e^{t^2}$  et donc la solution particulière constante égale à un (qu'on aurait pu deviner...). On en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + C \times e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

55.3 Terminons par un dernier exemple ; si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y' - i \times y = \cos(t)$$

les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme  $C \times e^{it}$ . Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Une fonction  $f_0 = C(t) \times e^{it}$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^{it} = \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \iff C'(t) = \frac{1 + e^{-2it}}{2}$$

il suffit donc de prendre  $C(t) = \frac{1}{2}t + i \frac{e^{-2it}}{4}$  et l'on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \left( \frac{1}{2}t + i \frac{e^{-2it}}{4} + C \right) \times e^{it}, \quad C \in \mathbb{C} \right\}.$$

55.4 Il est également possible d'utiliser ces résultats pour des exercices théoriques. Par exemple, montrons que si une solution  $f$  de  $y' + a \times y = b$  ( $a, b \in \mathbb{R}^2$  vérifie, pour  $T \in \mathbb{R}$   $f(T) = f(0)$  alors elle est périodique de période  $T$ . En effet, elle est solution du problème de Cauchy ;

$$\begin{cases} y' + a \times y = b \\ y(0) = f(0) \end{cases}$$

De plus, si l'on note  $g(t) = f(t + T)$ , comme  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t + T) + a \times f(t + T) = b \iff g'(t) + a \times g(t) = b$$

la fonction  $g$  est donc solution du problème de Cauchy ;

$$\begin{cases} y' + a \times y = b \\ y(0) = g(0) = f(T) = f(0) \end{cases}$$

Comme ce problème de Cauchy admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = g(t) = f(t + T)$$

la fonction  $f$  est donc  $T$ -périodique.

### 6.4.3 Problèmes de recollement

Parfois, on rencontre des expressions différentielles du type :

$$c(t) \times y' + d(t) \times y = e(t)$$

avec  $c$ ,  $d$  et  $e$  des fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Une solution d'un tel problème est une fonction  $f$  dérivable sur  $I$  qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad c(t) \times f'(t) + d(t) \times f(t) = e(t).$$

Pour résoudre ce type de problème, on raisonne par analyse-synthèse. L'idée est de diviser par  $c$  pour se ramener au problème précédent avec  $a(t) = d(t)/c(t)$  et  $b(t) = e(t)/c(t)$  **sur chaque intervalle sur lequel la fonction  $c$  ne s'annule pas**. Une fois ceci fait, pour trouver les solutions sur  $I$ , on continue l'analyse en «recolant» les solutions trouvées sur chaque intervalle, en faisant bien attention à la dérivabilité de la fonction en chaque point de «recollement». Une fois ceci terminé, on effectue la synthèse.

#### Exemple(s) 56 :

56.1 Cherchons les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'expression différentielle :

$$t \times y' - y = 0$$

L'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{t} y = 0$$

admet pour solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  les fonctions  $S_1 = \{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times t, \quad C \in \mathbb{R}\}$  et pour solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  les fonctions  $S_2 = \{t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times t, \quad D \in \mathbb{R}\}$ . Une solution  $f$  de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 0$  par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes  $C$  et  $D$  telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C \times t, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D \times t, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

il ne faut surtout pas s'arrêter ici : la fonction, pour être une solution doit être dérivable en 0. En particulier, il faut que

$$C = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = D$$

Finalement, il est nécessaire qu'une solution de l'expression différentielle s'écrive pour tout réel  $t$   $f(t) = C \times t$  pour  $C \in \mathbb{R}$ . Il est de plus clair qu'une telle fonction est solution de l'expression différentielle ; l'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times t, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

56.2 Cherchons maintenant les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'expression différentielle :

$$t \times y' - 2y = 0.$$

L'équation différentielle :

$$y' - \frac{2}{t} y = 0$$

admet pour solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  les fonctions  $S_1 = \{t^2 \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times t^2, \quad C \in \mathbb{R}\}$  et pour solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  les fonctions  $S_2 = \{t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times t^2, \quad D \in \mathbb{R}\}$ . Une solution  $f$  de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 0$  par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes  $C$  et  $D$  telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

de plus, la fonction, pour être une solution doit être dérivable en 0. Mais on remarque que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}.$$

Une telle fonction est donc toujours dérivable en 0 ! On en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+ \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases}, (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

56.3 Cherchons les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'expression différentielle :

$$t \times y' + y = 0$$

L'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{t} y = 0$$

admet pour solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  les fonctions  $S_1 = \{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times 1/t, C \in \mathbb{R}\}$  et pour solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  les fonctions  $S_2 = \{t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times 1/t, D \in \mathbb{R}\}$ . Une solution  $f$  de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 0$  par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes  $C$  et  $D$  telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C/t, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D/t, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

traitons maintenant la dérivabilité en 0. On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si, } C \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si, } D \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour que  $f$  soit solution de l'expression différentielle sur  $\mathbb{R}$ , il est donc nécessaire que  $C = D = 0$ , et la fonction nulle est clairement solution de l'expression différentielle. on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto 0\}.$$

56.4 Enfin, l'expression différentielle :

$$t \times y' + t \times y = 1$$

n'admet aucune solution sur  $\mathbb{R}$  ! En effet, s'il en existait une alors elle vérifierait :

$$0 = 0 \times y'(0) + 0 \times y(0) = 1$$

absurde ! L'ensemble de solutions est donc  $S = \emptyset$ .

- Remarque(s) 31 :**
1. Remarquez qu'il n'existe pas d'expression générale en termes de constantes de l'ensemble des solutions d'une telle expression différentielle ;
  2. il arrive qu'un problème de Cauchy associé à une expression différentielle admette plus d'une ou une infinité de solutions, en reprenant les exemples que l'on vient de traiter, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} t \times y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions, les fonctions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+ \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases}, (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} t \times y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

n'admet pas de solution !

### 6.4.4 Une étude qualitative : définition de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est par définition l'unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Notons-la (juste pour ce paragraphe)  $f$  et redémontrons ses propriétés **sans résoudre l'équation différentielle**. On a :

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ .

**Démonstration :** Soit  $y \in \mathbb{R}_+^*$ . Notons  $g$  et  $h$  les fonction définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = f(x \times y), \quad h(x) = f(x) + f(y).$$

Alors les fonctions  $g$  et  $h$  vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = y \times f'(x \times y) = \frac{y}{x \times y} = \frac{1}{x}, \quad h'(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$$

mais également  $g(1) = f(y)$  et  $h(1) = f(1) + f(y) = f(y)$ . Les fonctions  $g$  et  $h$  sont donc toutes deux solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = f(y) \end{cases}$$

elles sont donc égales sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui nous donne l'égalité recherchée. ■

2. On a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(e^y) = y, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(f(x)) = x.$$

**Démonstration :** Pour prouver la première égalité, on considère la fonction définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = f(e^y)$$

alors la fonction  $g$  vérifie : pour tout réel  $y$ ,  $g'(y) = e^y \times f'(e^y) = \frac{e^y}{e^y} = 1$  et  $g(0) = f(e^0) = f(1) = 0$  donc pour tout réel  $y$ ,  $g(y) = f(e^y) = y$ . De plus, si l'on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = \frac{\exp(f(x))}{x}$$

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = \frac{f(x) \times \exp(f(x)) \times x - \exp(f(x))}{x^2} = 0$$

et  $h(1) = \exp(f(1)) = \exp(0) = 1$ , on en déduit que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $h(x) = x$  c'est-à-dire  $\exp(f(x)) = x$ . ■

## Chapitre 7

# Nombres réels, suites numériques

### 7.1 Quelques généralités sur les nombres réels

#### 7.1.1 Majorants, minorants

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Comme lorsque l'on a travaillé avec les fonctions réelles à valeurs réelles, On dit que :

- Définition 7.1.31 :**
1. Le réel  $M$  est un majorant de  $A$  si :  $\forall x \in A, \quad x \leq M$ ,
  2. Le réel  $m$  est un minorant de  $A$  si :  $\forall x \in A, \quad x \geq m$ ,
  3. On dit que  $A$  est majoré si il admet un majorant, minoré si il admet un minorant et borné si il admet un majorant et un minorant,
  4. Le réel  $M_0$  est un maximum de  $A$  si c'est un majorant de  $A$  et si  $M_0 \in A$ ,
  5. Le réel  $m_0$  est un minimum de  $A$  si c'est un minorant de  $A$  et si  $m_0 \in A$ .

**Remarque(s) 32 :** 1. Comme dans le cas des fonctions, si un ensemble admet un maximum ou un minimum, celui-ci est unique. il est donc légitime d'écrire :

$$\max(A) \quad \text{resp.} \quad \min(A)$$

pour le maximum (resp. le minimum) de l'ensemble  $A$  si il existe.

2. Certains ensembles n'ont ni maximum ni minimum, comme  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des entiers relatifs, il faut donc toujours prouver qu'un tel élément existe avant de le considérer.

#### Exemple(s) 57 :

57.1 Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme :

$$I = ]a, b], \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

alors,  $I$  est minoré (par  $a - 1$ ) et majoré (par  $b + 1$ ), il admet un maximum :  $\max(I) = b$  mais pas de minimum. Ce résultat se généralise sans difficulté à tous types d'intervalles.

57.2 Parfois, il faut réfléchir un peu plus : pour l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 2x - 3)^2 - 25 \leq 0\},$$

le mieux est d'abord d'essayer de l'exprimer comme un intervalle ; on a :

$$(x^2 + 2x - 3)^2 - 25 \leq 0 \iff (x^2 + 2x + 2) \times (x^2 + 2x - 8) \leq 0 \iff (x^2 + 2x + 2) \times (x - 2) \times (x + 4) \leq 0.$$

On en déduit  $A = [-4, 2]$  un intervalle qui admet un maximum : 2 et un minimum : -4.

57.3 Il est possible de, en résolvant une inéquation comme celle que nous venons de traiter, trouver une union d'intervalles ; on peut alors utiliser la propriété : si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  qui admettent des maxima, alors  $A \cup B$  admet un maximum et :

$$\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B)).$$

**Démonstration :** Notons  $m = \max(\max(A), \max(B))$ . Alors comme  $\max(A)$  et  $\max(B)$  sont des majorants de  $A$  (resp.  $B$ ) :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \max(A) \leq m \quad \text{et} \quad \forall x \in B, \quad x \leq \max(B) \leq m$$

on en déduit :

$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leq m$$

le réel  $m$  est donc un majorant de  $A \cup B$ . De plus,  $\max(A) \in A$  et  $\max(B) \in B$ , donc  $m = \max(\max(A), \max(B)) \in A \cup B$ . L'ensemble  $A \cup B$  admet donc un maximum :  $m$ . ■

Seriez-vous capables d'énoncer et de prouver un résultat analogue avec le minimum ?

57.4 Cherchons maintenant d'éventuels majorants, minorants, maximums ou minimums de l'ensemble :

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^*, \quad x - \frac{2}{x} \leq -1 \right\}.$$

Il faut encore travailler :

$$x - \frac{2}{x} \leq -1 \iff \frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0 \iff \frac{(x-1) \times (x+2)}{x} \leq 0$$

Un tableau de signes nous donne alors :  $B = ]-\infty, -2] \cup ]0, 1]$ . L'ensemble est donc non minoré, majoré et admet pour maximum le réel 1.

### 7.1.2 Bornes supérieures, inférieures

**Définition 7.1.32 :** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{M}_+$  l'ensemble des majorants de  $A$  et  $\mathcal{M}_-$  l'ensemble des minorants de  $A$  :

$$\mathcal{M}_+ = \{M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \leq M\}, \quad \mathcal{M}_- = \{m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad m \leq x\}$$

1. On dit que  $A$  admet une borne supérieure si  $\mathcal{M}_+$  admet un minimum. On pose alors  $\sup(A) = \min(\mathcal{M}_+)$ .
2. On dit que  $A$  admet une borne inférieure si  $\mathcal{M}_-$  admet un maximum. On pose alors  $\inf(A) = \max(\mathcal{M}_-)$ .

**Remarque(s) 33 :** 1. Pour retenir facilement cette définition, on dit souvent que la borne supérieure est, si elle existe : «le plus petit des majorants» et la borne inférieure est, si elle existe : «le plus grand des minorants».

2. On peut légèrement généraliser cette définition, si  $A$  est non vide, non majoré on dit que  $\sup(A) = +\infty$  et si  $A$  est non vide, non minoré,  $\inf(A) = -\infty$ .

#### Exemple(s) 58 :

58.1 Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Considérons l'intervalle :

$$I = [a, b[$$



Alors, pour cet intervalle, l'ensemble des majorants est :  $\mathcal{M}_+ = [b, +\infty[$  et l'ensemble des minorants :  $\mathcal{M}_- = ]-\infty, a]$ . Le premier admet un minimum :  $b$  et le deuxième un maximum :  $a$ . L'intervalle  $I$  admet donc une borne supérieure et une borne inférieure :

$$\sup(I) = b, \quad \inf(I) = a.$$

Ceci se généralise aisément à n'importe quel intervalle.

58.2 Cherchons une éventuelle borne supérieure/inférieure de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{-x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Pour ceci, il s'agit d'étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f$  est clairement dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{-(1+x^2) + 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Finalement,  $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ , l'ensemble  $A$  admet une borne supérieure et une borne inférieure :  $\sup(A) = 0$ ,  $\inf(A) = -\frac{1}{2}$ .

58.3 Comme pour le maximum, on a la propriété : si les ensembles  $A$  et  $B$  admettent une borne supérieure, alors  $A \cup B$  admet une borne supérieure et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

**Démonstration :** Notons  $m = \max(\sup(A), \sup(B))$ . Alors comme  $\sup(A)$  et  $\sup(B)$  sont des majorants de  $A$  (resp.  $B$ ) :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \sup(A) \leq m \quad \text{et} \quad \forall x \in B, \quad x \leq \sup(B) \leq m$$

on en déduit :

$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leq m$$

le réel  $m$  est donc un majorant de  $A \cup B$ . Montrons que c'est le plus petit. Si  $M$  est un majorant de  $A \cup B$  alors c'est en particulier un majorant de  $A$  donc comme  $\sup(A)$  est le plus petit des majorants de  $A$  :  $\sup(A) \leq M$ . De même c'est en particulier un majorant de  $B$  donc  $\sup(B) \leq M$  ; On en déduit :

$$m = \max(\sup(A), \sup(B)) \leq M,$$

le réel  $m$  est donc le plus petit des majorants de  $A \cup B$ , donc la borne supérieure. ■

Sauriez-vous énoncer et prouver une propriété analogue pour les bornes inférieures ?

58.4 Étudions enfin une éventuelle borne inférieure ou supérieure de l'ensemble :

$$B = \left\{ x \in ]-\pi, \pi], \quad \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Grâce à un cercle trigonométrique, on trouve :

$$B = \left] -\pi, -\frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{6}, \pi \right].$$

L'ensemble  $B$  admet donc une borne inférieure et une borne supérieure :  $\inf(B) = -\pi$ ,  $\sup(B) = \pi$ .

**Propriété(s) 7.1.22 :** Soit  $M$  un majorant de  $A$ . On a :

$$M = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon < x.$$

**Démonstration :** Supposons que  $M = \sup(A)$  et soit  $\epsilon > 0$ . Alors, comme  $M = \sup(A)$  est le plus petit des majorants de  $A$  et  $M - \epsilon < M$ ,  $M - \epsilon$  n'est pas un majorant de  $A$ , c'est-à-dire qu'il existe un élément  $x$  de  $A$  tel que  $M - \epsilon < x$ .

Réciproquement, si  $M$  est un majorant de  $A$  qui vérifie :  $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon < x$ . Soit  $m_0$  un réel strictement inférieur à  $M$ . Alors si l'on pose  $\epsilon = M - m_0 > 0$ , on a :

$$\exists x \in A, M - \epsilon = m_0 < x$$

donc  $m_0$  n'est pas un majorant de  $A$ . Comme aucun réel strictement inférieur à  $M$  n'est un majorant de  $A$ ,  $M$  est le plus petit des majorants de  $A$ , c'est-à-dire sa borne supérieure. ■

**Remarque(s) 34 :** Il existe une caractérisation identique pour la borne inférieure; un minorant  $m$  est la borne inférieure de  $A$  si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \epsilon.$$

### 7.1.3 Nombres décimaux, approximations de réels

**Définition 7.1.33 :** On appelle ensemble des nombres décimaux le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n}, \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Remarque(s) 35 :** 1. Un nombre décimal est simplement un réel qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple :

$$123,456789 = \frac{123456789}{10^6}.$$

2. Certains nombres décimaux sont un peu « cachés », par exemple :

$$\frac{3}{4} = 0.75 = \frac{75}{10^2}.$$

3. Par définition, un nombre décimal est un rationnel :  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  mais il existe des rationnels qui ne sont pas de nombres décimaux; par exemple

1	3	1	1
-1	1	1,	1
2		8	...
	0		
	-1		
9			
	0		
	-8		
2			

On remarque en effectuant la division euclidienne que si l'on cherche à écrire  $\frac{13}{11}$  sous forme décimale, il est nécessaire d'écrire un nombre infini de chiffres (on parle de développement périodique) :

$$\frac{13}{11} = 1,181818181818\dots$$

ce que l'on résume en écrivant  $1, \underline{18}$ .

4. Plus généralement, comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers strictement inférieurs à  $b \in \mathbb{N}^*$ , la division euclidienne d'un rationnel  $\frac{a}{b}$  donne *toujours* deux fois le même reste, il est donc toujours possible d'écrire un rationnel sous forme d'un développement périodique.
5. La réciproque est aussi vraie, si l'on nous donne un développement périodique, il est possible de l'écrire comme un rationnel, par exemple, si  $x = 1, \underline{123}$  alors :

$$(x - 1) \times 1000 - 123 + 1 = x \iff x = \frac{374}{333}.$$

Les nombres décimaux servent à « approximer » les nombres réels ; l'idée intuitive est qu'il est toujours possible d'écrire un réel avec une infinité de chiffres après la virgule :

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots, \quad \pi = 3.141592653589793\dots$$

Donnons une définition plus précise de ceci :

**Définition 7.1.34 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle *approximation de  $x$  à  $\epsilon$  près* un réel  $a$  tel que :

$$|x - a| \leq \epsilon$$

si  $a > x$  on parle d'*approximation par excès*, si  $a < x$  on parle d'*approximation par défaut*.

L'approximation par des réels de fait à l'aide de la fonction partie entière, rappelons que, si  $x$  est un réel,  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$  est l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ou encore le plus grand entier relatif inférieur à  $x$ .

**Exemple(s) 59 :**

59.1 Si  $x = -\pi$ , alors  $\lfloor x \rfloor = -4$ .

59.2 Si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad k \times \lfloor y \rfloor \leq \lfloor k \times y \rfloor.$$

En effet,  $k \times \lfloor y \rfloor$  est un entier et par définition de la partie entière,  $k \times \lfloor y \rfloor \leq k \times y$ , l'inégalité est alors claire car  $\lfloor k \times y \rfloor$  est le plus grand entier inférieur à  $k \times y$ .

**Propriété(s) 7.1.23 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $d_n = \lfloor x \times 10^n \rfloor \times 10^{-n} \in \mathbb{D}$  est une approximation par défaut du réel  $x$  et  $d_n + 10^{-n} \in \mathbb{D}$  est une approximation par excès à  $10^{-n}$  près du réel  $x$  :

$$d_n \leq x < d_n + 10^{-n}.$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leq d_{n+1} < d_n + 10^{-n}.$$

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \leq x \times 10^n < \lfloor x \times 10^n \rfloor + 1$$

et la première inégalité recherchée est alors immédiate en divisant par  $10^n$ . pour la deuxième inégalité, on écrit :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \times 10 \leq \lfloor x \times 10^{n+1} \rfloor \leq x \times 10^{n+1} < (\lfloor x \times 10^n \rfloor + 1) \times 10$$

et il suffit alors de diviser par  $10^{n+1}$ .

Tout réel  $x$  admet donc pour tout entier naturel  $n$  une suite d'approximations à  $10^{-n}$  près par des nombres décimaux  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , par exemple si  $x = \pi$  :

$$d_0 = 3, \quad d_1 = 3.1, \quad d_2 = 3.14, \quad d_3 = 3.141, \quad d_4 = 3.1415$$

nous admettrons<sup>1</sup> réciproquement qu'une suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de décimaux vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leq d_{n+1} < d_n + 10^{-n}$$

caractérise un réel  $x$ . Notez qu'il y a une petite subtilité ici, il est possible qu'une telle suite ne soit pas celle de l'écriture usuelle du réel  $x$ . Par exemple :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 0.9, \quad s_2 = 0.99, \quad s_3 = 0.999, \quad \dots$$

vérifie toutes ces propriétés et caractérise le réel 1. Pour cette raison, on écrit parfois :

$$1 = 0.999999 \dots$$

### 7.1.4 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

**Théorème 7.1.5 ( $\mathbb{R}$  est archimédien) :** *Soit  $x$  et  $y$ ,  $y \neq 0$  deux réels positifs, alors :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad k \times y \geq x.$$

*Démonstration :* Il suffit de prendre  $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + 1$ .

#### Exemple(s) 60 :

60.1 En particulier, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que :

$$n \times \epsilon \geq 1 \iff \frac{1}{n} \leq \epsilon.$$

si l'on prend  $k$  tel que  $10^k > n$  ceci donne :

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, 10^{-k} < \frac{1}{n} \leq \epsilon.$$

**Théorème 7.1.6 ( $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ) :** *Soit  $x \in \mathbb{R}$  :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists d \in \mathbb{D}, \quad |d - x| \leq \epsilon.$$

*Démonstration :* Il suffit de prendre une approximation décimale à  $10^{-n} \leq \epsilon$  (voir de dernier exemple) près du réel  $x$ .

**Remarque(s) 36 :** 1. Comme tout décimal est un rationnel, on a donc aussi que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

2. Remarquer qu'on a même mieux : il est possible de prendre une approximation par excès ou une approximation par défaut, il est donc possible d'approcher à  $\epsilon$ -près tout réel par par excès et par défaut tout réel par des décimaux.

1. C'est évidemment une grosse arnaque ! Mais une construction rigoureuse des réels est hors programme car très difficile... si vous souhaitez en consulter une pendant vos vacances, votre professeur vous conseille de lire [ceci](#).

**Exemple(s) 61 :**

61.1 La borne supérieure de l'ensemble :

$$\mathbb{Q} \cap ]-\infty, \sqrt{2}]$$

est le réel  $\sqrt{2}$ . Ce n'est pas un maximum. Il suffit pour s'en convaincre d'utiliser la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  et la propriété qui caractérise la borne supérieure.

61.2 De même, l'ensemble :

$$\mathbb{D} \cap \left] -\infty, \frac{2}{3} \right]$$

n'a pas de maximum mais une borne supérieure :  $\frac{2}{3}$ .

**Théorème 7.1.7 (propriété de la borne supérieure) :** *Soit  $A$  un sous-ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{R}$ . Alors  $A$  possède une borne supérieure.*

*Démonstration :* Notons  $\mathcal{M}_+$  l'ensemble des majorants de  $A$  et posons, pour tout entier naturel :

$$d_n = \min(10^{-n} \times \mathbb{Z} \cap \mathcal{M}_+).$$

Notez que  $d_n$  existe car  $A$  est non vide, majoré donc  $\mathbb{Z} \cap 10^n \times \mathcal{M}_+$  est un ensemble d'entiers non vide, minoré. Alors par définition, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} \leq d_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \quad x \leq d_n, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, \quad x_n > d_n - 10^{-n}.$$

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n - 10^{-n} < d_{n+1} \leq d_n$ , la suite définit donc un réel  $x$ , qui est un majorant par le deuxième point est qui est la borne supérieure par le troisième et la caractérisation de la borne supérieure. ■

### 7.1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit  $a < b$  deux réels. On classe les intervalles de  $\mathbb{R}$  de la façon suivante :

1. (a) bornés :  $\emptyset, [a, b], [a, b[, ]a, b], ]a, b[$   
 (b) non bornés :  $[a, +\infty[, ]a, +\infty[, ]-\infty, b[, ]-\infty, b], \mathbb{R}$ .
2. (a) fermés :  $\emptyset, \mathbb{R}, [a, b], [a, +\infty[, ]-\infty, b]$   
 (b) ouverts :  $\emptyset, \mathbb{R}, ]a, b[, ]a, +\infty[, ]-\infty, b[, \mathbb{R}$   
 (c) semi-ouverts :  $[a, b[, ]a, b]$
3. Enfin, on dit que les intervalles du type  $[a, b]$  sont des **segments**.

**Proposition 7.1.8 :** *(caractérisation des intervalles) Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Alors  $A$  est un intervalle si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \quad [x, y] \subset A.$$

*Démonstration :* Si  $I$  est un intervalle, il est clair qu'il possède cette propriété. Réciproquement, supposons que  $A$  est un ensemble possédant cette propriété. Alors si  $A$  est vide, c'est un intervalle. Sinon, les quantités  $u = \sup(A)$  et  $v = \inf(A)$  existent (notez qu'ils peuvent être infinis!). Il y a alors quatre cas, suivant si  $u$  et  $v$  sont des éléments de  $A$ . Nous traiterons le cas  $u \in A$  et  $v \notin A$ , les autres cas se traitent de façon similaire. Montrons que :  $A = [u, v[$ .

1. Comme  $u$  est un minorant de  $A$  et  $v$  un majorant, on a :  $\forall x \in A, \quad u \leq x < v$  donc  $A \subset [u, v[$ .
2. Soit  $x \in [u, v[$ . Alors,  $x < v$  n'est pas un majorant de  $A$  par définition de la borne supérieure donc :  $\exists y \in A, \quad x < y$ . Comme  $u \leq x < y$  sont deux éléments de  $A$ ,  $[u, y] \subset A$  mais  $x \in [u, y] \subset A$  donc comme ceci est vrai pour tout  $x \in [u, v[$ ,  $[u, v[ \subset A$ .

On conclut alors par double inclusion :  $A = [u, v[$ . ■

## 7.2 Suites numériques

### 7.2.1 Modes de définitions

#### 7.2.1.1 Généralités

Dans la suite, on posera  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Il existe au moins trois façons de définir une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

1. De façon **explicite** (souvent, celle que l'on préfère) : si il existe une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n).$$

#### Exemple(s) 62 :

62.1 On peut définir une suite arithmétique de façon explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a \times n + b, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2,$$

62.2 On peut aussi définir une suite géométrique de façon explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = b \times a^n, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2.$$

2. De façon **implicite** : pour tout  $n$ ,  $u_n$  est l'unique solution d'une équation dépendant de  $n$ .

#### Exemple(s) 63 :

63.1 Soit  $n \geq 2$ . L'équation :

$$\tan(x) = x \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2} + n \times \pi, \frac{\pi}{2} + n \times \pi \right[$$

admet une unique solution, que l'on appelle  $a_n$ .

63.2 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'équation :

$$x^n - n \times x + 1 = 0$$

admet une unique solution sur  $[0, 1]$  (car la fonction  $x \mapsto x^n - n \times x + 1$  est strictement décroissante sur cet intervalle) ; on note  $b_n$  cette solution.

3. Enfin, **par récurrences** :

- (a) simple :  $u_{n+1} = f(u_n, n) \quad u_0 = a \in \mathbb{K}$
- (b) double :  $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}, n) \quad u_0 = a \in \mathbb{K}, \quad u_1 = b \in \mathbb{K}$
- (c) forte :  $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_1, u_0, n) \quad u_0 = a \in \mathbb{K}$ .

On peut parfois résoudre des exercices en donnant une forme explicite d'une suite dont la définition est donnée de façon explicite ou par récurrence. Voyons quelques exemples.

#### 7.2.1.2 Suites arithmético-géométriques

Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ . On considère la suite définie par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

On appelle un tel type de « suite arithmético-géométrique ». Évidemment, si  $a = 1$ , il s'agit d'une suite arithmétique et la forme explicite est bien connue. Sinon, l'idée est de se ramener à une suite géométrique grâce à la méthode suivante :

1. On résout l'équation :

$$x = a \times x + b,$$

on trouve :  $x = \frac{b}{1-a}$  et l'on pose  $v_n = u_n - x$ .

2. On cherche la formule de récurrence vérifiée par la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : comme

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \quad \text{et} \quad x = a \times x + b,$$

on en déduit :  $v_{n+1} = a \times v_n$ .

3. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$  donc pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = a^n \times v_0$ . On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \times (u_0 - x) + x.$$

### Exemple(s) 64 :

64.1 Sa suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

admet pour formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 1$$

#### 7.2.1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Théorème 7.2.8 :** Soit  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\delta = p^2 - 4q$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + p \times u_{n+1} + q \times u_n = 0.$$

Alors :

$$\exists!(C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C \times a_n + D \times b_n$$

avec :

1. Si  $\delta > 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left( \frac{-p + \sqrt{\delta}}{2} \right)^n, \quad b_n = \left( \frac{-p - \sqrt{\delta}}{2} \right)^n,$$

2. si  $\delta = 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left( \frac{-p}{2} \right)^n, \quad b_n = n \times \left( \frac{-p}{2} \right)^{n-1},$$

3. si  $\delta < 0$  et si l'on écrit  $(-p + i\sqrt{-\delta})/2 = \rho \times e^{i\theta}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \rho^n \times \cos(\theta \times n), \quad b_n = \rho^n \times \sin(\theta \times n).$$

**Démonstration :** Vous aurez sans aucun doute repéré la similarité avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Ce n'est pas un hasard. Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + p \times y' + q \times y = 0 \\ y(0) = u_0 \\ y'(0) = u_1 \end{cases}$$

Alors ce problème de Cauchy admet une unique équation :

$$\exists!(C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f = C \times f_1 + D \times f_2.$$

où  $f_1$  et  $f_2$  vérifient :

1. Si  $\delta > 0$  :  $f_1(t) = \exp\left(\frac{-p + \sqrt{\delta}}{2} \times t\right)$ ,  $f_2(t) = \exp\left(\frac{-p - \sqrt{\delta}}{2} \times t\right)$ ,
2. Si  $\delta = 0$  :  $f_1(t) = \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$ ,  $f_2(t) = t \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$ ,
3. Si  $\delta < 0$  :  $f_1(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$ ,  $f_2(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$ .

Notons en particulier que  $f$  est infiniment dérivable. Le lien entre la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la fonction  $f$  est fait par la remarque suivante : comme  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$f'' + p \times f' + q \times f = 0$$

donc en dérivant  $n$  fois et en évaluant en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n+2)}(0) + p \times f^{(n+1)}(0) + q \times f^{(n)}(0) = 0$$

si l'on ajoute à ceci que  $f(0) = u_0$  et  $f'(0) = 0$  on en déduit que : pour tout entier  $n$ ,  $u_n = f^{(n)}(0)$ . Reste à calculer les dérivées  $n$ -ièmes des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , ce qui se fait aisément en remarquant que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^{\lambda \times t})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda \times t}, \quad (t \times e^{\lambda \times t})^{(n)} = \lambda^{n-1} (n + \lambda \times t) \times e^{\lambda \times t}$$

d'où, en évaluant cette égalité en  $t = 0$  :

$$(e^{\lambda \times t})^{(n)}(0) = \lambda^n, \quad (t \times e^{\lambda \times t})^{(n)}(0) = n \times \lambda^{n-1},$$

enfin, si  $x + i y = \mu = \rho \times e^{i\theta}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^{x \times t} \times \cos(y \times t))^{(n)} + i (e^{x \times t} \times \sin(y \times t))^{(n)} = (e^{\mu \times t})^{(n)} = \mu^n \times e^{\mu \times t}$$

donc, en évaluant cette égalité en  $t = 0$  :

$$(e^{x \times t} \times \cos(y \times t))^{(n)}(0) = \rho^n \times \cos(\theta \times n), \quad (e^{x \times t} \times \sin(y \times t))^{(n)}(0) = \rho^n \times \sin(\theta \times n),$$

il suffit alors de se souvenir des différentes formules de  $f_1$  et  $f_2$  pour conclure. ■

**Remarque(s) 37 :** 1. Dans la suite, on appellera équation caractéristique de cette suite l'équation :

$$x^2 + p \times x + q = 0,$$

évidemment,  $\delta$  est son discriminant. il est alors facile de retrouver les formules dans les trois cas en remarquant que :

- (a) dans le cas  $\delta > 0$ , si  $x_1$  et  $x_2$  sont les solutions de l'équation caractéristique,  $a_n = x_1^n$  et  $b_n = x_2^n$
- (b) dans le cas  $\delta = 0$ , si  $x_1$  est l'unique solution de l'équation caractéristique,  $a_n = x_1^n$  et  $b_n = n \times x_1^n$
- (c) dans le dernier cas, si  $z_1$  est une solution complexe de l'équation caractéristique dont la partie imaginaire est positive :

$$a_n = \operatorname{Re}(z_1^n), \quad b_n = \operatorname{Im}(z_1^n).$$

- 2. Nous verrons dans la partie algèbre linéaire du cours une preuve plus « directe » de ce résultat.
- 3. En pratique, les réels  $C$  et  $D$  sont déterminés par les deux premiers termes de la suite.

### Exemple(s) 65 :

65.1 Revenons sur la suite de Fibonacci :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

dans ce cas, l'équation caractéristique :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

admet pour racines :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc deux uniques constantes  $C$  et  $D$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = C \times \varphi^n + D \times \psi^n.$$



Reste à déterminer les constantes  $C$  et  $D$  ; les deux premières valeurs de la suite donnent :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ C \times \varphi + D \times \psi = 1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

65.2 Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0, \quad u_0 = u_1 = 1$$

l'équation caractéristique :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

a pour discriminant  $\delta = -3$  et

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

on en déduit qu'il existe deux uniques constantes  $C$  et  $D$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C \times \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right) + D \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right).$$

Pour déterminer les constantes  $C$  et  $D$ , on utilise les deux premières valeurs de la suite :

$$\begin{cases} C = 1 \\ -C \times \frac{1}{2} + D \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases}$$

On en déduit  $C = 1$  et  $D = \sqrt{3}$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right) + \sqrt{3} \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right).$$

Le cas complexe est plus simple à énoncer :

**Théorème 7.2.9 :** Soit  $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\delta = p^2 - 4q$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite complexe définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + p \times u_{n+1} + q \times u_n = 0.$$

Alors :

$$\exists!(C, D) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C \times a_n + D \times b_n$$

avec :

1. Si  $\delta \neq 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1^n, \quad b_n = \lambda_2^n,$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux solutions de l'équation caractéristique  $z^2 + p \times z + q = 0$

2. si  $\delta = 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda^n, \quad b_n = n \times \lambda^{n-1},$$

où  $\lambda$  est l'unique solution de l'équation caractéristique.

**Démonstration :** Cette preuve sera faire dans le chapitre « algèbre linéaire ».

■

### Exemple(s) 66 :

66.1 Cherchons l'expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (3 - 2i) \times u_{n+1} - (5 - 5i) \times u_n.$$

Commençons pour ceci par chercher les solutions complexes de l'équation caractéristique :

$$z^2 - (3 - 2i) \times z + (5 - 5i) = 0.$$

Le discriminant de cette équation s'écrit :

$$\delta = (3 - 2i)^2 - 4(5 - 5i) = -15 + 8i.$$

Pour trouver une racine carrée de ce complexe, on utilise la méthode habituelle,  $r = x + yi$  est une racine carrée de  $\delta$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ x^2 + y^2 = 17 \\ 2x \times y = 8 \end{cases}$$

On en déduit la racine carrée  $r = 1 + 4i$  puis les solutions complexes :

$$\lambda_1 = 2 + i \quad \lambda_2 = 1 - 3i$$

il existe donc des uniques complexes  $C$  et  $D$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C \times (2 + i)^n + D \times (1 - 3i)^n$$

que l'on détermine grâce aux premières valeurs de la suite :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ C \times (2 + i) + D \times (1 - 3i) = 1 + 4i \end{cases}$$

ce qui donne  $C = 1$  et  $D = -1$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n.$$

## 7.2.2 Quelques généralités sur les suites réelles

### 7.2.2.1 Monotonie

Les notions de monotonie se généralisent sans difficulté aux suites réelles : on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est

1. croissante si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$ ,
2. strictement croissante si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$ ,
3. décroissante si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ ,
4. strictement décroissante si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$ ,
5. monotone si elle est croissante ou décroissante
6. strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
7. majorée si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$
8. minorée si :  $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$
9. bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si :  $\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$ .

nous pouvons ajouter à ces notions une dernière, plus spécifique aux suites numériques : on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}.$$

**Remarque(s) 38 :** 1. Si la suite est donnée par une formule explicite  $u_n = f(n)$  où  $f$  est une fonction réelle à valeurs réelles, il est **suffisant** que  $f$  soit croissante sur  $\mathbb{R}_+$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  le soit, mais ce n'est pas une condition nécessaire, comme la montre la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(2\pi \times n) = 1$$

ceci s'étend sans difficulté aux autres notions de monotonie.

2. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Démonstration :** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors,

$$\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -|m| \leq m \leq u_n \leq M \leq |M|$$

on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max(|M|, |m|),$$

la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc majorée.

Réciproquement, si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$$

on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leq u_n \leq M;$$

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bornée. ■

### Exemple(s) 67 :

67.1 La suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \left\lfloor 2 + \frac{4}{n} \right\rfloor$$

est décroissante car définie explicitement par une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $u_n \geq 2$  et  $u_5 = 2$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc stationnaire à partir de  $n = 5$ .

67.2 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante ; alors la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est aussi croissante. En effet, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{n \times u_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n \times (n+1)} \geq 0.$$

### 7.2.2.2 Convergence d'une suite réelle

**Définition 7.2.35 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $l \in \mathbb{R}$  comme limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

On dit qu'une telle suite est convergente.

**Remarque(s) 39 :** 1. On écrit alors :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

et l'on dira souvent que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $l$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. L'inégalité  $|u_n - l| \leq \epsilon$  peut se réécrire :

$$-\epsilon + l \leq u_n \leq \epsilon + l$$

ce qui peut se comprendre « tout intervalle ouvert centré en  $l$  contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang ».

3. Cette définition s'étend aux limites  $+\infty$  et  $-\infty$  de la façon suivante :

(a) On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A.$$

(b) On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq B.$$

4. Rappelons que :

$$\llcorner \text{ Si } \forall \epsilon > 0, \quad x \leq \epsilon \text{ alors } x \leq 0 \llcorner$$

est une proposition vraie. En effet, sa contraposée est :  $\llcorner \text{ Si } x > 0 \text{ alors } \exists \epsilon > 0, \quad x > \epsilon \llcorner$  et elle est vraie car si  $x > 0$  alors  $\epsilon = x/2 > 0$  et  $x > x/2 = \epsilon$ .

**Propriété(s) 7.2.24 :** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors cette limite est unique.

*Démonstration :* Soit  $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ . Supposons que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$ . Montrons que  $l = l'$ . Par définition, si  $\epsilon > 0$  est fixé, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |u_n - l'| \leq \epsilon$$

pour que ces deux inégalités soient vraies au même temps, on pose  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ , on a alors, si  $n \geq n_2$  :

$$|u_n - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |u_n - l'| \leq \epsilon$$

On en déduit :

$$|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq 2\epsilon$$

cette dernière égalité était vraie pour tout  $\epsilon > 0$ , on en déduit  $|l - l'| \leq 0$  donc  $l = l'$ . ■

### Exemple(s) 68 :

68.1 Soit  $c \in \mathbb{R}$ . La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c$$

tend vers  $c$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = 0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - c| = 0 < \epsilon.$$

68.2 Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

Alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . En effet, si  $\epsilon > 0$  alors comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 \times \epsilon \geq 1$ .

On en déduit, pour  $n \geq n_0$  :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

68.3 Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = n.$$

Alors  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . En effet, si  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0 \geq A$  donc :

$$\forall n \geq n_0, \quad n \geq n_0 \geq A.$$

68.4 Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \exp(n).$$

Alors  $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . En effet comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, pour  $A \in \mathbb{R}$  fixé, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $n_0 \geq \ln(|A| + 1)$ , on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\forall n \geq n_0, \quad e^n \geq e^{n_0} \geq A$$

on montre de la même façon que  $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

68.5 La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n$$

n'admet pas de limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ; en effet si une telle limite  $l$  existait, alors par la définition pour  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , la définition donne :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |l - (-1)^n| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc pour  $n$  pair supérieur ou égal à  $n_0$  :

$$\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{3}{2}$$

et pour  $n$  impair supérieur ou égal à  $n_0$  :

$$-\frac{3}{2} \leq l \leq -\frac{1}{2}$$

mais ces deux inéquation sont incompatibles... absurde ! Il n'existe donc pas de telle limite  $l$ .

Il faut donc impérativement toujours vérifier qu'une limite existe avant d'en parler !

Traisons maintenant quelques exemples moins triviaux :

### Exemple(s) 69 :

69.1 La suite définie par  $u_n = \frac{\sin(n)}{n + \cos(n)}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet en utilisant les deux inégalités triangulaires, on a pour  $n \geq 2$ <sup>2</sup>

$$\left| \frac{\sin(n)}{n + \cos(n)} \right| \leq \frac{1}{n - 1}$$

Donc, si l'on fixe  $\epsilon > 0$  et l'on prend  $n_0$  tel que  $(n_0 - 1) \times \epsilon \geq 1$ , on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{\sin(n)}{n + \cos(n)} \right| \leq \frac{1}{n - 1} \leq \frac{1}{n_0 - 1} \leq \epsilon.$$

69.2 On considère maintenant le série harmonique :

$$\forall n \geq 1, \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Commençons par remarquer que, cette suite est croissante car :

$$h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

L'idée est de considérer, pour  $n \in \mathbb{N}$  la différence :

$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. en général, si l'on a conjecturé une limite  $l$ , c'est une bonne idée de chercher à majorer  $|u_n - l|$  grâce aux inégalités triangulaires.

On en déduit, pour tout entier  $m$  :

$$h_{2^m} - 1 = \sum_{k=0}^{m-1} h_{2^{k+1}} - h_{2^k} \geq \frac{m}{2}$$

Finalement, si  $A$  est un réel fixé et  $\frac{m_0}{2} + 1 \geq A$ , on a, pour tout  $n \geq 2^{m_0}$ , comme la suite est croissante :

$$h_n \geq h_{2^{m_0}} \geq \frac{m_0}{2} + 1 \geq A.$$

Donc  $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

69.3 Remarquons que, cependant,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

donc la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée !

### 7.2.2.3 Quelques propriétés sur les limites

**Propriété(s) 7.2.25 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$ .

Alors :

1.  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ ,
2.  $\lambda \times u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \times l$ ,
3.  $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \times l'$ ,
4. si  $l \neq 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq n_0$   $u_n \neq 0$  et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{l}.$$

**Remarque(s) 40 :** 1. Cette propriété s'étend aux limites infinies à condition de prendre les précautions habituelles pour les formes indéterminées. Vous pouvez consulter le paragraphe 3.4.1 du cours à ce propos. C'est un excellent exercice de faire soi-même la preuve d'au moins une de ces propriétés.

2. Cette propriété, associée aux exemples du paragraphe précédent permet maintenant de raisonner « comme pour les limites de fonctions » pour les suites définies explicitement.

**Démonstration :**

1. Montrons la première propriété. Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Par définition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Pour que ces deux propriétés soient vraies en même temps, on prend  $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$ . Alors :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \epsilon.$$

On en déduit que

$$u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'.$$

2. Pour le deuxième point, commençons par remarquer que si  $\lambda = 0$ , il n'y a rien à faire. Sinon, fixons  $\epsilon > 0$  ; alors par la définition appliquée au réel strictement positif  $\frac{\epsilon}{|\lambda|}$  :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}.$$

En multipliant cette dernière inégalité par le réel strictement positif  $|\lambda|$ , on en déduit :

$$|\lambda \times u_n - \lambda \times l| = |\lambda| \times |u_n - l| \leq \epsilon$$

donc  $\lambda \times u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \times l$ .

3. Commençons par remarquer que, comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l'$ , la définition pour  $\epsilon = 1$  donne :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |v_n - l'| \leq 1$$

on en déduit, pour  $n \geq n_0$  :  $|v_n| \leq |v_n - l'| + |l'| \leq 1 + |l'|$ . Remarquons maintenant que, par définition si  $\epsilon > 0$  est fixé :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{1 + |l'| + |l|} \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \quad |v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{1 + |l'| + |l|}$$

Donc, pour  $n \geq n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$  :

$$|u_n \times v_n - l \times l'| = |(u_n - l) \times v_n + l \times (v_n - l')| \leq |v_n| \times |u_n - l| + |l| \times |v_n - l'| \leq (1 + |l'| + |l|) \times \frac{\epsilon}{1 + |l'| + |l|} = \epsilon.$$

Finalement,  $u_n \times v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \times l'$ .

4. Commençons par prouver le premier point. Par définition, pour  $\epsilon = |l|/2 > 0$  (car  $l \neq 0$ ) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}.$$

On en déduit, par la deuxième inégalité triangulaire, pour  $n \geq n_0$  :

$$|u_n| = |u_n - l + (-l)| \geq ||l| - |u_n - l|| \geq \frac{|l|}{2} > 0.$$

Donc, pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n \neq 0$ . Soit maintenant  $\epsilon > 0$ . Alors :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |u_n - l| \leq \frac{\epsilon \times |l|^2}{2}.$$

On en déduit, pour  $n \geq \max(n_0, n_1)$  :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|l - u_n|}{|l| \times |u_n|} \leq \frac{2}{|l|^2} \times |l - u_n| \leq \epsilon.$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}.$$

■

### Exemple(s) 70 :

70.1 Montrons qu'aucune des suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n)$$

ne converge. Pour ceci, commençons par remarquer que :

$$\cos(n-1) = \cos(1) \times \cos(n) + \sin(1) \times \sin(n)$$

donc si  $(u_n)$  converge, alors  $(v_n)$  aussi. Mais de plus, si  $(v_n)$  converge vers  $l$ , comme :

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos(n) \times \sin(1),$$

$\cos(n)$  converge vers  $(l-l)/(2 \sin(1)) = 0$ . En particulier, la convergence d'une des deux suites implique toujours celle de l'autre. De plus, d'après la première égalité,  $\sin(n)$  converge vers 0. Mais enfin, l'égalité

$$\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$$

implique en passant à la limite  $0 = 1$ . Absurde !

**Propriété(s) 7.2.26 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites. On suppose que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ ,  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors  $l \leq l'$ .

**Démonstration :** Posons  $z_n = u_n - v_n$ . Par la propriété précédente,  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l - l'$  et par définition, pour tout  $n$ ,  $z_n \leq 0$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par définition,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |z_n - (l - l')| \leq \epsilon.$$

On en déduit  $-\epsilon \leq z_n - (l - l')$  donc comme  $z_n \leq 0$  :

$$l - l' \leq z_n + \epsilon \leq \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , on en déduit :  $l - l' \leq 0$ . ■

**Remarque(s) 41 :** 1. Attention ! Cette propriété n'est vraie que avec des inégalités larges. En effet,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \leq 0.$$

2. Attention également ! Dans cette propriété, **il faut** que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettent des limites. « Passer à la limite » dans l'inégalité :

$$(-1)^n \leq 1 + \frac{1}{n}$$

n'a par exemple aucun sens !

**Exemple(s) 71 :**

71.1 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite du segment  $[a, b]$ . Supposons que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ . Alors  $l \in [a, b]$ . En effet, il suffit de passer à la limite dans les inégalités :

$$a \leq u_n \leq b.$$

71.2 La limite d'une suite positive est positive ; celle d'une suite négative est négative.

## 7.2.3 Théorèmes de convergence

### 7.2.3.1 Comparaisons de suites

**Propriété(s) 7.2.27 :** Supposons que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  alors  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Démonstration :** Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Alors par définition,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

mais alors,  $v_n \geq u_n \geq A$  donc  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .





**Remarque(s) 42 :** 1. Sauriez-vous énoncer et prouver une propriété analogue pour  $-\infty$  ?

2. La force de cette propriété est qu'elle permet de **prouver** que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La valeur de cette limite est un bonus agréable...

**Exemple(s) 72 :**

72.1 La suite  $u_n = (2 + \sin(n)) \times n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2 + \sin(n)) \times n \geq n$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

72.2 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

72.3 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$$

Alors, comme une racine est toujours positive, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \sqrt{n}$$

par théorème de comparaison, on en déduit que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Théorème 7.2.10 (dit des gendarmes) :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites qui tendent vers le même réel  $l$ . On suppose que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Démonstration :** Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers le même réel  $l$ ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |w_n - l| \leq \epsilon.$$

En particulier, pour  $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$  :

$$-\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon$$

c'est-à-dire  $|v_n - l| \leq \epsilon$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $l$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



**Exemple(s) 73 :**

73.1 Considérons la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Alors, pour tout  $n$  non nul :

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

73.2 On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(u_n).$$

Remarquons que pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ . De plus, par l'inégalité « géométrique » de la fonction sinus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

donc par une rapide récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n} \times u_0 = \frac{1}{2^n}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure : la suite  $(u_n)$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

73.3 Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Alors la suite définie par  $v_n = \frac{a^n}{n!}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{a^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{a}{k};$$

mais la suite  $\frac{a}{k}$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  donc :

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \quad \frac{a}{k} \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit, pour  $n \geq k_0$  :

$$0 \leq v_n \leq \left( \prod_{k=1}^{k_0} \frac{a}{k} \right) \times \frac{1}{2^{n-k_0}}$$

mais la suite  $\frac{1}{2^{n-k_0}}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc  $(v_n)$  aussi par le théorème des gendarmes.

### 7.2.3.2 Suites monotones

**Théorème 7.2.11 :** *Toute suite croissante majorée converge. De même, toute suite décroissante minorée converge.*

*Démonstration :* Montrons le premier point. Le deuxième se montre de la même façon. Soit  $(u_n)$  une suite croissante et majorée. Alors l'ensemble

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide, majoré. Il admet donc une borne supérieure, que l'on appelle  $l$ . Soit  $\epsilon > 0$ ; par caractérisation de la borne supérieure, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$u_{n_0} \geq l - \epsilon$$

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$u_n \geq u_{n_0} \geq l - \epsilon$$

mais  $l$  est un majorant de  $A$  donc  $u_n \leq l$ . On en déduit  $0 \leq l - u_n \leq \epsilon$  donc  $|u_n - l| \leq \epsilon$ . La suite  $(u_n)$  converge donc. ■

### Exemple(s) 74 :

74.1 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On remarque que, pour  $n \geq 2$  par l'inégalité « géométrique » du logarithme :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante. De plus, toujours par l'inégalité géométrique du logarithme : pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1,  $\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ , donc :

$$u_n \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0.$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante, minorée par 0, elle converge donc. On note :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

On ne sait que peu de choses de la constante  $\gamma$ , appelée constante d'Euler–Mascheroni : par exemple, on ne sait pas si il s'agit d'un rationnel ou non.

74.2 On considère maintenant la suite définie par :

$$u_0 \in [0, 2], \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$$

Montrons que  $u_n$  tend vers 2. Commençons par remarquer que  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ .

(a) la fonction  $f$  est clairement croissante et  $f(0) = 1 \geq 0$ ,  $f(1) = \frac{5}{4} \leq 2$ . L'intervalle  $[0, 2]$  est donc **stable par  $f$** , c'est-à-dire que si  $x \in [0, 2]$ ,  $f(x) \in [0, 2]$ . On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 2]$$

(b) Remarquons maintenant que pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$  ; pour étudier une éventuelle monotonie de  $(u_n)$ , il suffit alors d'**étudier le signe de  $f(x) - x$**  pour  $x \in [0, 2]$ . Ici :

$$f(x) - x = \frac{x^2}{4} + 1 - x = \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{(x-2)^2}{4} \geq 0.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante.

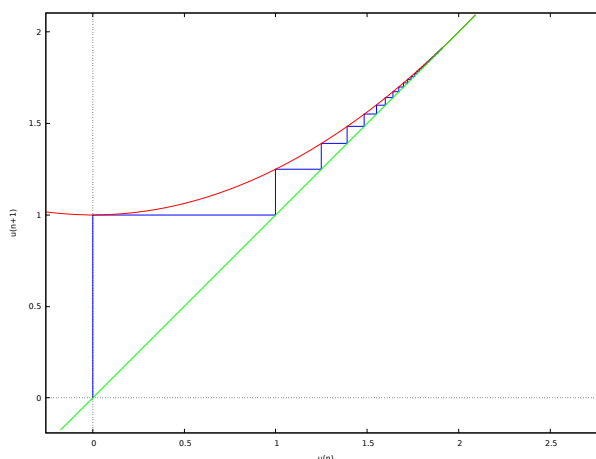
(c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, majorée par 2, elle converge donc. Notons  $l \in [0, 2]$  sa limite. En passant à la limite dans l'expression  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$ , on trouve :

$$l = \frac{l^2}{4} + 1 = f(l)$$

notez que  **$l$  est un point fixe de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 2]$** . Il reste à résoudre l'équation pour trouver  $l$  :

$$l \in [0, 2], \quad f(l) - l = 0 \iff \frac{(l-2)^2}{4} = 0 \iff l = 2.$$

Finalement,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ .



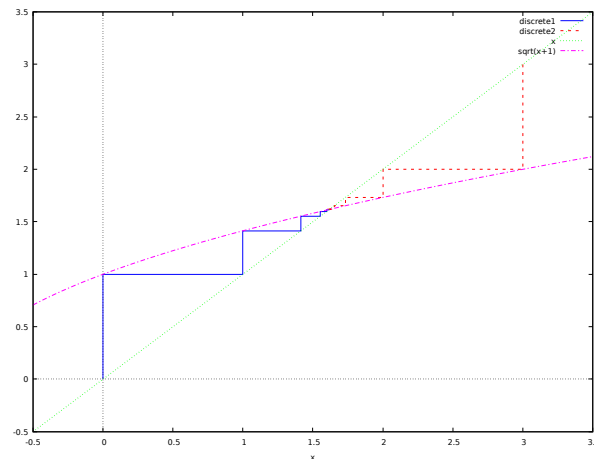
74.3 Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_0 \in [-1, +\infty[, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

- (a) Commençons par chercher un intervalle stable ; on a  $u_{n+1} = g(u_n)$ . De plus, la fonction  $g$  clairement croissante sur  $[-1, +\infty[$  et  $g(-1) = 0$ , l'intervalle  $[-1, +\infty[$  est donc stable, en particulier, ceci prouve que  $(u_n)$  est bien définie et que pour tout  $n$ ,  $u_n \in [-1, +\infty[$ .
- (b) Étudions maintenant le signe de  $g(x) - x$ . On a<sup>3</sup>

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \sqrt{x+1} - x \leq 0 \iff x+1 \leq x^2 \iff x \in [\varphi, +\infty[.$$

Malheureusement pour nous, il y a plusieurs possibilités dans l'intervalle  $[-1, +\infty[$ , on ne peut donc pas conclure que la suite est croissante ou décroissante. Heureusement pour nous, un dessin nous redonne espoir :



Il semble qu'on puisse résoudre le problème en faisant deux cas.

- (c) Retour aux intervalles stables : la fonction  $g$  est croissante sur les intervalles  $[-1, \varphi]$  et sur  $[\varphi, +\infty[$ . De plus,  $g(-1) = 0$  et  $g(\varphi) = \varphi$ . On a donc deux intervalles stables :

$$[-1, \varphi] \quad \text{et} \quad [\varphi, +\infty[.$$

On en déduit deux cas :

- i. si  $u_0 \in [-1, \varphi]$ , pour tout  $n$ ,  $u_n \in [-1, \varphi]$  et par (b),  $(u_n)$  est croissante. Elle est croissante majorée donc convergente. Notons  $l \in [-1, \varphi]$  sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

$$l = g(l) \implies l = \varphi$$

donc dans ce cas,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$ .

- ii. si  $u_0 \in [\varphi, +\infty[$ , pour tout  $n$ ,  $u_n \in [\varphi, +\infty[$  et par (b),  $(u_n)$  est décroissante. Elle est décroissante minorée donc convergente. Notons  $l \in [\varphi, +\infty[$  sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

$$l = g(l) \implies l = \varphi$$

donc dans ce cas,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$ .

On en conclut : dans tous les cas :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$ .

On peut légèrement généraliser ce théorème :

**Propriété(s) 7.2.28 :** Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ . De même, toute suite décroissante non minorée tend vers  $-\infty$ .

3. On rappelle que  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Pour obtenir la dernière équivalence, il faut faire deux cas, suivant si  $x$  est positif ou négatif...

**Démonstration :** Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ , mais alors, comme  $(u_n)$  est croissante, pour tout entier supérieur ou égal à  $n_0$  ;

$$u_n \geq u_{n_0} > A.$$

La suite  $(u_n)$  tend donc vers  $+\infty$ . ■

### Exemple(s) 75 :

75.1 Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant :

$$u_0 > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$

Montrons que  $u_n$  tend vers  $+\infty$ . Pour ceci, on reprend les résultats de l'exemple précédent ; on a  $u_{n+1} = f(u_n)$  donc :

(a)  $f$  est strictement croissante sur  $]2, +\infty[$ ,  $f(2) = 2$  donc l'intervalle  $]2, +\infty[$  est stable par  $f$ . On en déduit :

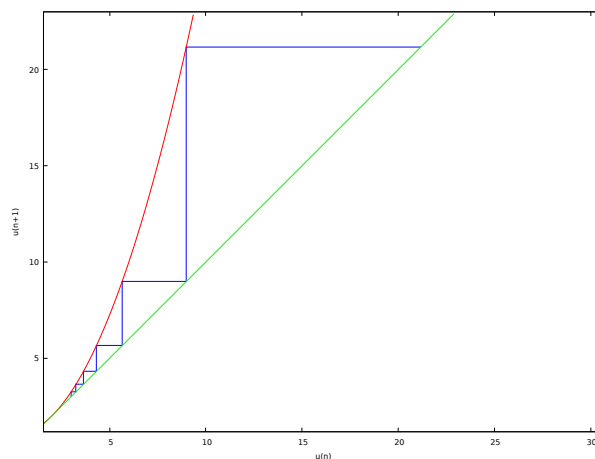
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in ]2, +\infty[.$$

(b)  $f(x) - x \geq 0$  sur  $]2, +\infty[$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

(c) par la propriété,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l$  ou tend vers  $+\infty$  ; en éliminant la première possibilité, nous aurons la deuxième. Supposons par l'absurde que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l$ . Alors en passant à la limite dans l'égalité :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$ , on a :

$$l = f(l) \implies l = 2 \quad \text{ou} \quad l = -2$$

ce qui est impossible ! En effet,  $u_n \geq u_0 > 2$  donc en passant à la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $l \geq u_0 > 2$ . On en déduit  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .



### 7.2.3.3 Suites adjacentes

**Définition 7.2.36 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si :

1.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
2.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante,
3.  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**Remarque(s) 43 :** 1. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > v_{n_0}$  donc, par la monotonie des deux suites, pour  $n \geq n_0$  :

$$u_n \geq u_{n_0} > v_{n_0} \geq v_n$$

ce qui contredit que  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

2. L'exemple canonique de suites adjacentes est celui des approximations décimales d'un réel, il s'agit en fait d'une autre façon de définir un réel par approximations.

**Théorème 7.2.12 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite.

*Démonstration :* Par ce que l'on vient de remarquer, comme  $(v_n)$  est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq b_0$$

la suite  $(u_n)$  est donc croissante, majorée, donc elle converge. Si l'on note  $l$  sa limite, comme  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0,  $v_n = u_n - (u_n - v_n)$  converge aussi vers la même limite. ■

**Remarque(s) 44 :** 1. Par croissance de  $(u_n)$  et décroissance de  $(v_n)$ , on a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n.}$$

On en déduit que  $v_n$  est une approximation par excès à  $v_n - u_n$ -près de  $l$  et  $u_n$  est une approximation par défaut à  $v_n - u_n$ -près de  $l$ , ce qui peut servir pour calculer une valeur approchée d'un réel.

**Exemple(s) 76 :**

76.1 Voyons par exemple l'utilisation de deux telles suites pour calculer une valeur approchée de  $e$ . On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Rappelons que  $(a_n)$  tend vers  $e$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est clairement croissante. Concernant  $b_n$ , on a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{-1}{n! \times n \times (n+1)^2}$$

la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante. Enfin,

$$b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc adjacentes. Par la remarque précédente, on a l'inégalité, pour tout entier  $n$  :

$$a_n \leq e \leq b_n$$

Ce qui signifie donc, que pour tout entier  $n$ , on a :

$$0 \leq e - a_n \leq b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!},$$

ce qui nous donne, si  $\frac{1}{n \times n!} \leq 10^{-k}$  une valeur de  $e$  à  $10^{-k}$ -près.

## 7.2.4 Suites extraites

### 7.2.4.1 Définition, premières propriétés

**Définition 7.2.37 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On appelle suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est fonction strictement croissante.

**Remarque(s) 45 :** On dit souvent qu'une suite extraite est « formée de certains termes de la suite  $(u_n)$  ».

#### Exemple(s) 77 :

77.1 Les exemples les plus utilisés de suites extraites sont les suites :

$$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}.$$

77.2 Si l'on considère la suite définie par la formule  $u_n = (-2)^n$ , les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont pour formules :

$$u_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2 \times 4^n.$$

Il s'agit dans les deux cas de suites géométriques de raison 4.

77.3 On peut se servir des suites extraites pour contredire certaines affirmations, il est par exemple clair que si une suite est bornée, majorée ou minorée, alors toutes ses suites extraites aussi. Par exemple, la suite définie par  $u_n = (-1)^n \times n$  n'est ni majorée ni minorée car :

$$u_{2n} = 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -(2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

**Propriété(s) 7.2.29 :** Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

**Démonstration :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers une limite  $l$  et soit  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Commençons par montrer par récurrence que comme  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

1. *initialisation* :  $\varphi(0) \in \mathbb{N}$  donc  $\varphi(0) \geq 0$ ,
2. *hérédité* : soit  $N$  un entier naturel fixé. Supposons que  $\varphi(N) \geq N$ . Alors  $N+1 > N$  donc comme  $\varphi$  est strictement croissante :

$$\varphi(N+1) > \varphi(N) \geq N$$

mais  $\varphi(N+1)$  est un entier naturel, donc  $\varphi(N+1) \geq N+1$ .

Par principe de récurrence, la formule est donc exacte. Montrons maintenant que  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par définition, comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Mais alors, si  $n \geq n_0$ , par ce qu'on vient de prouver,  $\varphi(n) \geq n \geq n_0$  donc :

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leq \epsilon.$$

■

**Remarque(s) 46 :** 1. La même preuve nous donne sans difficulté que si  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  alors toutes ses suites extraites aussi.

Cette propriété sert à montrer facilement qu'une suite n'est pas convergente, en effet :

Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit d'exhiber deux de ses sous-suites qui ont une limite différente.

**Exemple(s) 78 :**

78.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente ; en effet :

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

78.2 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

est divergente. En effet,

$$u_{3n} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad u_{3n+1} = n + \frac{1}{3} - \left\lfloor n + \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

78.3 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + (-2)^n \times \sin\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$$

est divergente. En effet,

$$u_{2n} = 2^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad u_{4n+1} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

#### 7.2.4.2 Application aux « escargots ».

On utilise parfois les suites extraites pour montrer qu'une suite converge. Par exemple, on a :

Si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  **convergent vers la même limite  $l$** , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $l$ .

**Démonstration :** Soit  $\epsilon > 0$ . Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_{2n} - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon.$$

Donc, si  $n \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$  il y a deux cas :

1. Si  $n$  est pair,  $n = 2k$  et alors  $k \geq n_0$  et donc  $|u_n - l| = |u_{2k} - l| \leq \epsilon$
  2. Si  $n$  est pair,  $n = 2k + 1$  et alors  $k \geq n_1$  et donc  $|u_n - l| = |u_{2k+1} - l| \leq \epsilon$
- dans tous les cas,  $|u_n - l| \leq \epsilon$ .

■

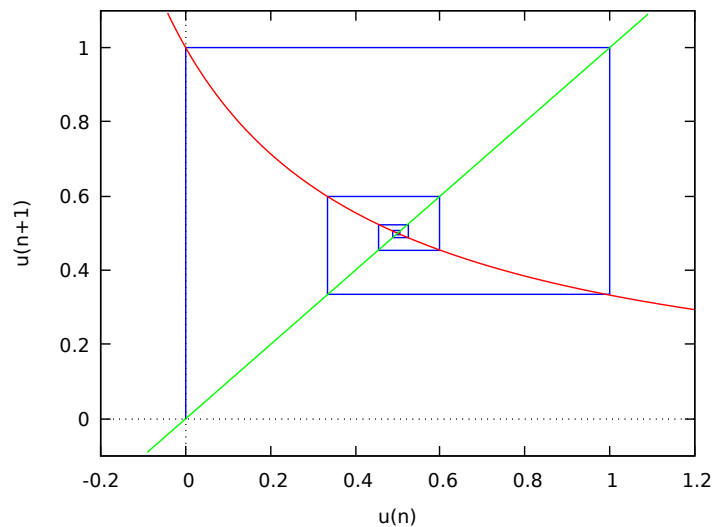
**Exemple(s) 79 :**

79.1 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2u_n}$$

Commençons par remarquer que si l'on pose  $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ , l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ . Faisons maintenant un dessin :





...qui nous suggère d'étudier les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

- (a) Commençons par étudier la suite définie pour tout entier naturel par  $v_n = u_{2n}$ . On a :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad v_0 = 0 \leq v_1 = \frac{1}{3}.$$

Comme la fonction  $f$  est décroissante, une récurrence immédiate donne alors, pour tout entier naturel :  $v_{n+1} \geq v_n$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante. Elle est de plus majorée, donc elle converge.

- (b) Si l'on considère maintenant la suite définie pour tout entier naturel par  $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$ , comme la fonction  $f$  est décroissante et pour tout entier naturel :  $v_{n+1} \leq v_n$ , on a  $w_{n+1} = f(v_{n+1}) \leq w_n = f(v_n)$ . La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante, minorée, elle converge aussi.

- (c) Il reste à montrer qu'elles convergent vers la même limite. pour ceci, il faut remarquer que :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(f(w_n))$$

donc que par les théorèmes généraux, en passant à la limite dans ces égalités, leurs limites respectives sont des points fixes de  $g = f \circ f$ . Calculons-les. On a :

$$g(l) = l \iff \frac{1}{1 + \frac{2}{1+2l}} = l \iff \frac{2l^2 + l - 1}{2l + 3} = 0.$$

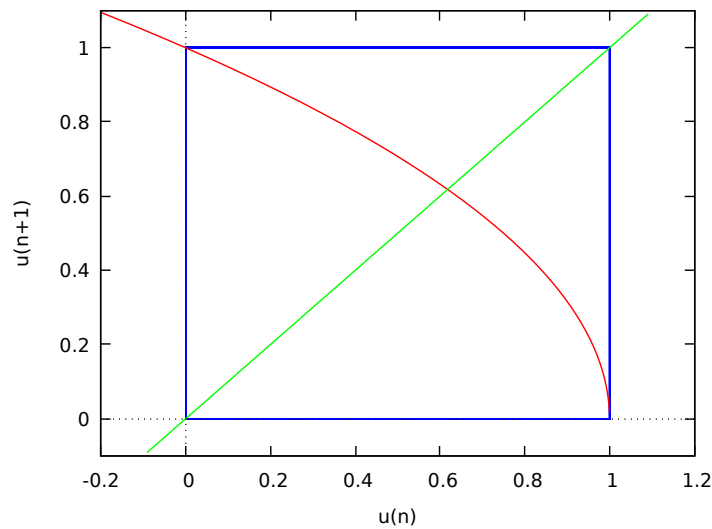
Si  $l$  est un point fixe de  $g$ , on a donc  $l = \frac{1}{2}$  ou  $l = -1$ . Heureusement pour nous, une éventuelle limite des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  doit appartenir à l'intervalle  $[0, 1]$ , il n'y a donc qu'une valeur possible pour ces limites :  $l = \frac{1}{2}$ .

Finalement,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  admettent la même limite :  $\frac{1}{2}$ , on en déduit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}}.$$

79.2 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$$



alors :

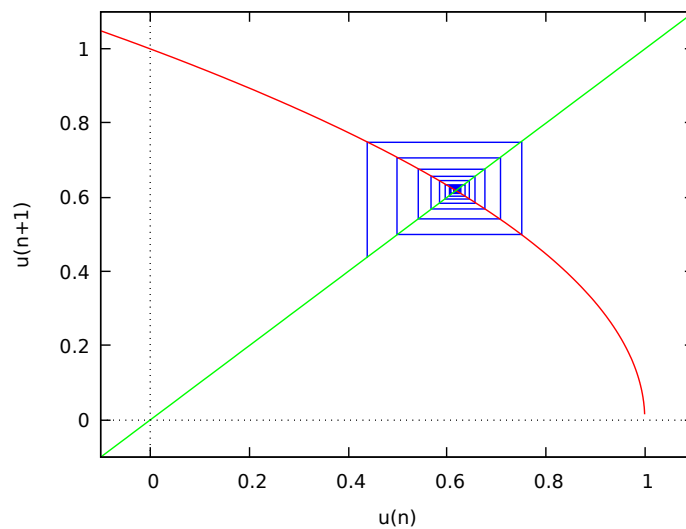
$$u_{2n} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge donc pas (on parle de 2-cycle).

79.3 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = \frac{7}{16}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$$

Commençons par remarquer que si l'on pose  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , l'intervalle  $]0,1[$  est stable par  $f$ . Faisons maintenant un dessin :



...qui nous suggère d'étudier les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

(a) Commençons par étudier la suite définie pour tout entier naturel par  $v_n = u_{2n}$ . On a :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{7}{16} \leq v_1 = \frac{1}{2}.$$

Comme la fonction  $f$  est décroissante, une récurrence immédiate donne alors, pour tout entier naturel :  $v_{n+1} \geq v_n$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante. Elle est de plus majorée, donc elle converge.

(b) Si l'on considère maintenant la suite définie pour tout entier naturel par  $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$ , comme la fonction  $f$  est décroissante et pour tout entier naturel :  $v_{n+1} \geq v_n$ , on a  $w_{n+1} = f(v_{n+1}) \leq w_n = f(v_n)$ . La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante, minorée, elle converge aussi.

(c) Il reste à montrer qu'elles convergent vers la même limite. pour ceci, il faut remarquer que :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(f(w_n))$$

donc que par les théorèmes généraux, en passant à la limite dans ces égalités, leurs limites respectives sont des points fixes de  $g = f \circ f$ . Calculons-les. On a :

$$g(l) = l \iff \sqrt{1 - \sqrt{1-l}} = l \implies l^2 = 1 - \sqrt{1-l} \implies 1-l = (1-l^2)^2 \implies l \times (l-1) \times (l^2+l-1) = 0.$$

Si  $l$  est un point fixe de  $g$ , il s'agit donc de l'un des réels : 0, 1,  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  ou  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  (notez qu'un des quatre n'est en fait pas un point fixe car nous n'avons procédé que par implication). Heureusement pour nous, une éventuelle limite des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  doit appartenir à l'intervalle  $[u_0, u_1] \subset ]0, 1[$  (on utilise ici leur sens de variation), il n'y a donc qu'une valeur possible pour ces limites :  $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

Finalement,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  admettent la même limite :  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ <sup>4</sup>, on en déduit :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Remarque(s) 47 :** 1. Fondamentalement, la différence entre les exemples de ce paragraphe et ceux du paragraphe 7.2.3.2 est que, dans ce cas, la fonction  $f$  est décroissante, alors que dans le premier, elle était croissante sur l'intervalle stable considéré.

2. Le fait que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones dans ce cas est général, mais même si cette information est intéressante, elle ne permet pas de conclure : elles pourraient converger vers des limites différentes (comme dans le deuxième exemple), il est de plus parfois utile de savoir plus précisément si elles sont croissantes ou décroissantes, comme le montre le troisième exemple.

### 7.2.4.3 Un peu de poésie dans ce monde de brutes

Les deux théorèmes de ce paragraphe sont hors programme.

**Théorème 7.2.13 (du soleil levant) :** *Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

*Démonstration :* (idée de la) On considère le graphe de la suite dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , que l'on imagine éclairé par un soleil rasant par la droite. On considère l'ensemble des « sommets » qui voient le soleil<sup>5</sup>. Si ils sont infinis, ils définissent une suite extraite décroissante. Si ils sont finis, on va au-delà du dernier vers la droite et l'on prend le premier élément à l'ombre, il est forcément caché par un sommet, qui est lui aussi à l'ombre, en répétant ce procédé, on construit ainsi une suite extraite croissante. ■

**Théorème 7.2.14 (Bolzano-Weierstrass) :** *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

*Démonstration :* Par le théorème précédent, elle admet une suite extraite monotone et bornée, donc convergente. ■

## 7.2.5 Suites complexes

Commençons par remarquer que, comme le symbole  $\leq$  n'a pas de sens dans les complexes, les notions de monotonie n'ont pas de sens pour les suites complexes. On peut cependant « sauver » une notion similaire : on dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (complexe) est **bornée** si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée au sens réel.

4. Elles sont même adjacentes !

5. on peut le quantifier :  $\{u_n, \quad \forall p > n, u_n > u_p\}$

**Définition 7.2.38 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{C}$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \epsilon.$$

**Remarque(s) 48 :** 1. Notez que la seule différence avec la définition pour les suites réelles est que la valeur absolue est devenue un module.

2. Comme pour les suites réelles, une méthode efficace pour montrer qu'une suite complexe converge est de montrer que la quantité  $|u_n - l|$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , c'est d'autant plus utile ici que cette suite est alors réelle !

3. Contrairement au cas réel, il n'existe pas de notion de suites convergeant vers  $\pm\infty$ .

4. Récapitulons : les notions suivantes, pour les suites complexes :

ont du sens	n'ont pas de sens
converge, bornée, suite extraite, stationnaire, constante.	croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée, tend vers $\pm\infty$ .

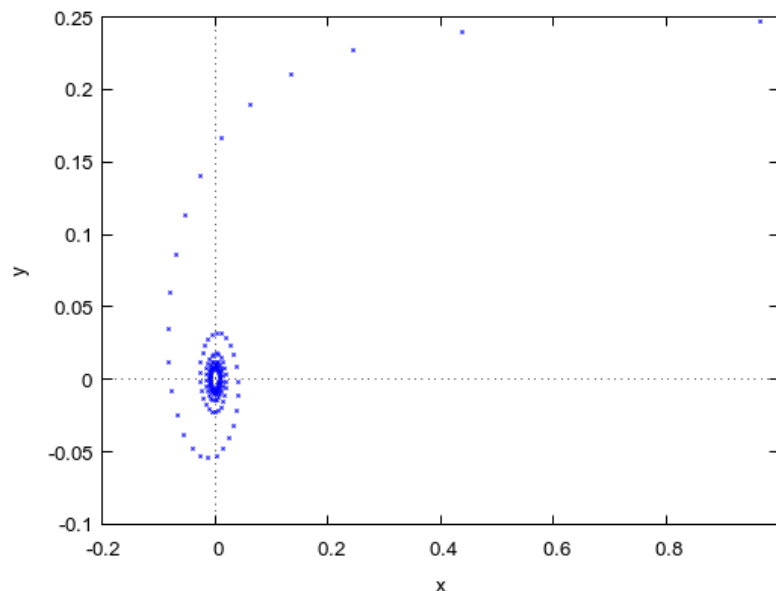
**Exemple(s) 80 :**

80.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{e^{i \frac{n}{4}}}{n}$$

tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet :

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



Il existe une deuxième façon de relier les suites complexes aux suites réelles, via les parties réelles et imaginaires :

**Proposition 7.2.9 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Alors :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l = a + ib \iff \left[ \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \right].$$

**Démonstration :** Le point clé de cette preuve sont les inégalités suivantes (faites un dessin!). Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , alors :

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|, \quad |z| \leq |x| + |y|.$$

Procédons maintenant par double implication.

1. Supposons que :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l = a + ib$ . Alors :

$$|\operatorname{Re}(u_n) - a| = |\operatorname{Re}(u_n - l)| \leq |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

on en déduit que :  $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  et de même que  $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ .

2. Réciproquement, si l'on suppose que :

$$\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$$

alors :

$$|u_n - l| \leq |\operatorname{Re}(u_n - l)| + |\operatorname{Im}(u_n - l)| = |\operatorname{Re}(u_n) - a| + |\operatorname{Im}(u_n) - b| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l = a + ib$ . ■

**Remarque(s) 49 :** 1. En particulier, grâce à cette proposition, on en déduit que la limite d'une suite complexe, si elle existe, est unique.

2. Des théorèmes d'opérations sur les limites réelles, on en déduit également les mêmes théorèmes sur les limites de suites complexes.

### Exemple(s) 81 :

81.1 Soit  $q \in \mathbb{C}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0 = 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

Alors :

- (a) si  $|q| < 1$ ,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,
- (b) si  $q = 1$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, égale à 1,
- (c) dans tous les autres cas,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

**Démonstration :** Supposons que  $|q| < 1$ . Alors :

$$|u_n - 0| = |q^n| = |q|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ce qui montre que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Le deuxième cas est immédiat. Supposons maintenant que  $|q| \geq 1$  et  $q \neq 1$ .

Alors, si l'on suppose par l'absurde que la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

donc en passant à la limite dans cette égalité  $l = q \times l$ , donc comme  $q \neq 1$ ,  $l = 0$ . Absurde! Comme  $|q| \geq 1$ ,  $|u_n| \geq 1$  pour tout entier naturel  $n$ . ■

81.2 En particulier, pour tout  $\theta \in ]0, 2\pi[$  la suite définie explicitement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{in\theta}$$

est divergente!

81.3 Cherchons une éventuelle limite de la suite définie par  $u_0$  quelconque et :

$$u_{n+1} = \frac{i}{2} u_n + 1.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons-en une formule explicite.

(a) On résout  $x = \frac{i}{2}x + 1$ , ce qui donne  $x = \frac{-2}{i-2} = \frac{2}{5} \times (i+2)$ .

(b) On pose alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - x$ . on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{i}{2} \times v_n.$$

Le suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique, de raison  $\frac{i}{2}$ . Donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0$

(c) On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x.$$

il suffit alors d'utiliser ce qu'on vient de voir : comme  $|i/2| = 1/2 < 1$ ,

$$u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x = \frac{2}{5} \times (i+2).$$

81.4 Déterminons les suites complexes  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+2} - (1+i) \times z_{n+1} + i \times z_n = 0.$$

Une telle suite est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Son équation caractéristique :

$$z^2 - (1+i) \times z + i = 0$$

Dont les deux racines sont :

$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = 1.$$

Si une telle suite complexe vérifie cette relation de récurrence, il existe donc deux uniques complexes  $C$  et  $D$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = C + D \times i^n.$$

Si une telle suite converge, alors ses suites extraites  $(u_{4n})$  et  $(u_{4n+2})$  aussi, donc  $C + D = C - D$  ce qui implique  $D = 0$ . Donc si une suite complexe vérifie cette relation de récurrence et converge, elle est constante, et réciproquement, il est clair qu'une suite constante vérifie cette relation de récurrence et converge.

81.5 Considérons la suite définie par :

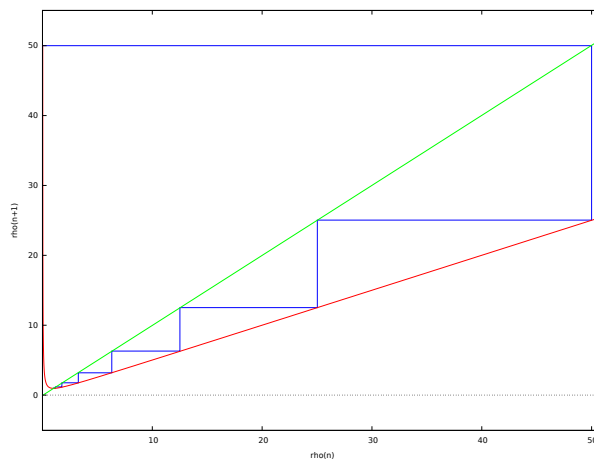
$$z_0 \in \mathbb{C}^*, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2} \left( z_n + \frac{1}{\overline{z_n}} \right).$$

Remarquons que, si  $z_n = \rho_n \times e^{i\theta_n}$ , alors :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \rho_n + \frac{1}{\rho_n} \right) \times e^{i\theta_n}.$$

On en déduit que, si  $z_0 = \rho \times e^{i\theta}$  alors pour tout entier  $n$ , on a (à condition de vérifier qu'il existe) :  $z_n = \rho_n \times e^{i\theta}$ , où  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite réelle définie par :

$$\rho_0 = \rho > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \rho_n + \frac{1}{\rho_n} \right).$$



De plus, si l'on définit pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  la fonction  $f$  par  $f(x) = 1/2 \times (x + 1/x)$ , on a  $f'(x) = 1/2 \times (1 - 1/x^2)$ , on en déduit :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

L'intervalle  $[1, +\infty[$  est donc stable par  $f$  et pour  $n \geq 1$ ,  $\rho_n \in [1, +\infty[$ . En particulier, ceci prouve que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. De plus :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - x = \frac{1 - x^2}{2x} \leq 0$$

La suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est donc décroissante. Elle est de plus minorée par 1, elle converge donc vers une limite  $l$ . Comme  $f$  est continue, on a alors  $f(l) = l$  donc  $l = 1$ . Finalement :

$$\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et l'on en déduit :

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{i\theta}.$$





## Chapitre 8

# Matrices et systèmes linéaires

### 8.1 Généralités sur les matrices

#### 8.1.1 Définition et opérations algébriques

**Définition 8.1.39 :** On appelle matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ , toute famille  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$  d'éléments d'un ensemble  $A$  représentée sous la forme d'un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes :

$$M = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la matrice s'appellent coefficients de la matrice.

On dit aussi que la matrice  $M$  est  $n \times p$ .

L'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients dans  $A$  se note :

$$\mathcal{M}_{n,p}(A) \text{ ou } \mathcal{M}_n(A) \text{ lorsque } n = p.$$

Dans la suite, on notera  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Exemple(s) 82 :

82.1 On appelle matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice dont tous les termes sont nuls. On la note  $0_{n,p}$  et si  $n = p$ ,  $0_n$ . Par exemple :

$$0_{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

82.2 On appelle matrice identité la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par :

$$I_n = (\delta(i, j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} \quad \text{où} \quad \delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou encore :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit des opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  :

1. L'addition.<sup>1</sup>

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \times (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$$

## 2. La multiplication externe.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \cdots & \lambda \times a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \times a_{n,1} & \cdots & \lambda \times a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$\lambda \cdot (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} = (\lambda \times a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}.$$

**Exemple(s) 83 :**

83.1 On a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

83.2 Par contre, on ne peut pas faire la somme des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (1 \quad 1).$$

Dans la suite, on notera  $-A$  la matrice  $(-1).A$ . Les propriétés suivantes sont immédiates :

**Propriété(s) 8.1.30 :** Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ . Alors :

1. La loi  $+$  a les propriétés :

(a)  $+$  est associative :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$

(b)  $+$  est commutative :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \quad A + B = B + A,$$

(c)  $0_{n,p}$  est neutre pour  $+$  :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + 0_{n,p} = A,$$

(d) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  admet un inverse pour  $+$  : la matrice  $-A$  :  $A + (-A) = 0_{n,p}$ .

2. Auxquelles s'ajoutent les propriétés du produit externe :

(a)  $\cdot$  est compatible avec le produit de  $\mathbb{K}$  :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (\lambda \times \mu).A = \lambda.(\mu.A),$$

(b)  $1 \in \mathbb{K}$  est neutre pour  $\cdot$  :

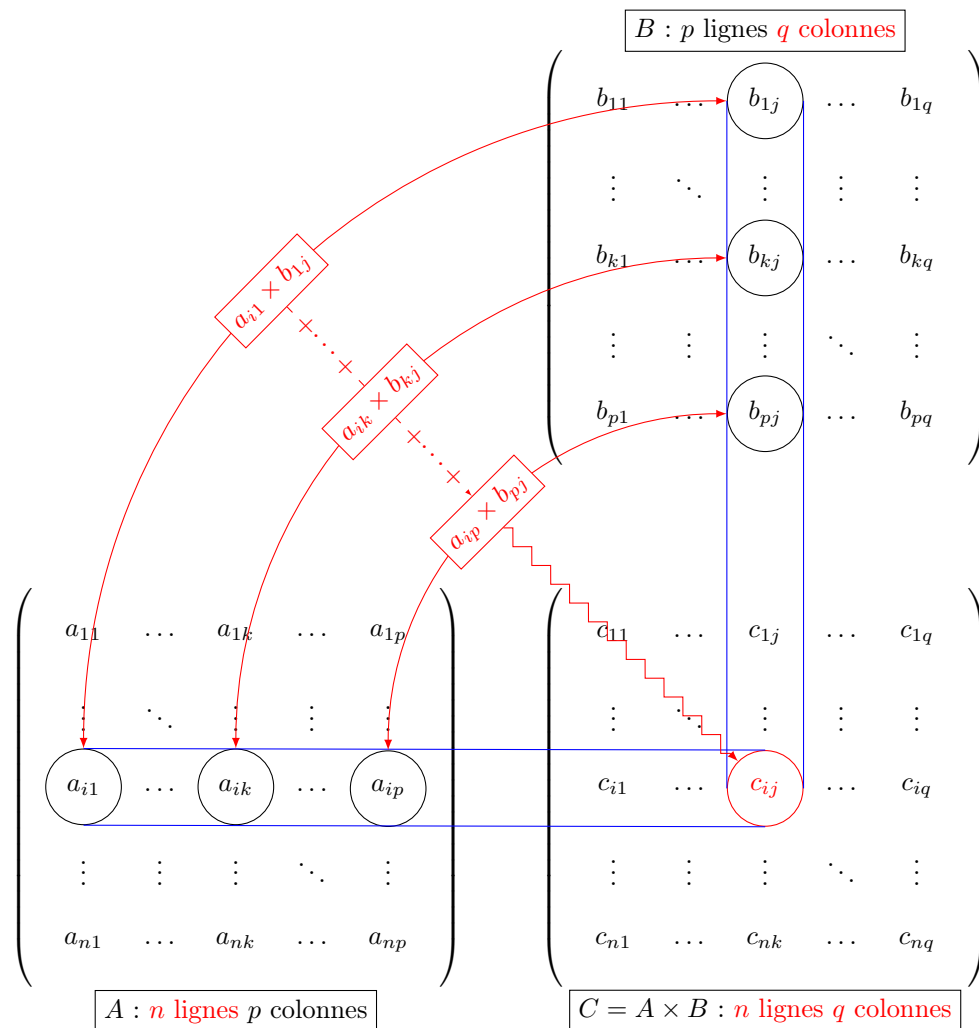
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 1.A = A,$$

(c)  $\cdot$  est distributive sur  $+$  :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \quad \lambda.(A + B) = \lambda.A + \mu.B \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$$

1. Attention, il faut que les dimensions des matrices soient les mêmes !

Pour le produit, on a le schéma suivant<sup>2</sup> :



Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$(c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \times (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} = \left( \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$$

#### Exemple(s) 84 :

84.1 Attention, le produit de matrices n'est pas commutatif! On a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Il est aussi possible que  $A \times B$  existe, mais pas  $B \times A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tiré de <http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/>

Mais même si les deux produits existent et sont des matrices de mêmes tailles, ils peuvent avoir des valeurs différentes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dans la suite, nous dirons que les matrices  $A$  et  $B$  commutent si  $A \times B = B \times A$ .

84.2 Il se passe d'autres étrangetés avec le produit de matrices ; le théorème de produit nul est par exemple faux :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0_2} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

84.3 Il y a un cas pour lequel le produit de matrices deux matrices est particulièrement facile à calculer ; si elles sont **diagonales**, c'est-à-dire si elles sont carrées tous leurs termes sont nuls sauf ceux de la diagonale :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d'_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \times d'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 \times d'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} \times d'_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \times d'_n \end{pmatrix}$$

Heureusement pour nous, certaines propriétés usuelles du produit restent valables :

**Propriété(s) 8.1.31 :** Soit  $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^{*4}$ . Alors :

1. la loi  $\times$  est associative :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}, \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}, \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}, \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C),$$

2. la matrice identité est neutre pour le produit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad A \times I_p = A, \quad I_n \times A = A,$$

3. la loi  $\times$  est distributive sur la loi  $+$  :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q} \quad (A + B) \times C = A \times C + B \times C,$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}^2, \forall C \in \mathcal{M}_{n,p} \quad C \times (A + B) = C \times A + C \times B.$$

**Démonstration :** L'associativité du produit est une conséquence de la formule des sommes « rectangulaires » :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^q \left( \sum_{l=1}^p a_{i,l} \times b_{l,k} \right) \times c_{k,j} = \sum_{l=1}^p a_{i,l} \times \left( \sum_{k=1}^q b_{l,k} \times c_{k,j} \right).$$

Les deux autres propriétés se prouvent par calculs directs. ■

## 8.1.2 Matrices carrées

### 8.1.2.1 Puissances de matrices

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ont une propriété particulière : le produit de deux telles matrices est toujours défini. En particulier, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on peut définir les puissances de  $A$  de la façon suivante :

$$A^0 = I_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = A \times A^k (= A^k \times A).$$

Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note aussi parfois :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

**Exemple(s) 85 :**

85.1 Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  on montre par récurrence sur  $k$  que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

85.2 Comme pour le produit, les puissances d'une matrice diagonale sont particulièrement faciles à calculer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

85.3 Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$(A + B)^2 = A^2 + 2.A \times B + B^2 \iff A \times B = B \times A.$$

En effet :

$$(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + A \times B + B \times A + B^2$$

et l'équivalence est maintenant claire :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2.A \times B + B^2 \iff (A+B) = A^2 + A \times B + B \times A + B^2 = A^2 + 2.A \times B + B^2 \iff A \times B = B \times A.$$

L'exemple précédent montre qu'il est suffisant que la matrices  $A$  et  $B$  commutent pour développer le carré d'une somme avec les formules usuelles. C'est un fait général :

**Théorème 8.1.15 (binôme de Newton pour les matrices) :** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices qui commutent. Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i \times B^{k-i}.$$

*Démonstration :* Il suffit de relire la preuve de la formule du binôme de Newton dans la cas complexe en faisant attention de bien remplacer les 1 par des  $I_n$  pour les puissances 0-ièmes et à repérer l'endroit où l'on utilise que  $A$  et  $B$  commutent. ■

**Exemple(s) 86 :**

86.1 On a donc, si  $A$  et  $B$  commutent :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3.A^2 \times B + 3.A \times B^2 + B^3.$$

86.2 On peut se poser la question de savoir si la condition que les matrices  $A$  et  $B$  commutent est nécessaire et suffisante en général ; c'est faux dès que  $n \geq 3$ , par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas, car :

$$A \times B = 0_3 \quad \text{et} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais :

$$(A + B)^3 = 0_3 \quad \text{et} \quad A^2 = B^2 = 0_3 \quad \text{donc} \quad A^3 + 3.A^2 \times B + 3.A \times B^2 + B^3 = 0_3.$$

86.3 Il existe une matrice qui commute avec toutes les autres matrices : la matrice identité. En effet :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times I_n = A = I_n \times A.$$

On en déduit, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$(A + I_n)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i.$$

Cette formule est souvent utile dans les exercices. Par exemple, si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, un calcul direct montre :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3$$

on en déduit :

$$\forall k \geq 2, \quad B^k = (I_3 + A)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i = I_3 + k.A + \frac{k \times (k-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k \times (k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et l'on remarque que cette formule est aussi vraie si  $k = 0$  et  $k = 1$ .

### 8.1.2.2 Matrices inversibles

**Définition 8.1.40 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

On note  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarque(s) 50 :** 1. Si une telle matrice  $B$  existe, elle est unique, on la note alors  $A^{-1}$  et on l'appelle inverse de la matrice  $A$ .

**Démonstration :** Supposons que  $B$  et  $B'$  vérifient

$$A \times B = B \times A = I_n \quad A \times B' = B' \times A = I_n$$

$$\text{Alors } A \times B = A \times B' \quad \text{donc} \quad B = B \times (A \times B) = (B \times A) \times B' = B'.$$

■

2. Il est vrai, mais nous ne le prouverons que beaucoup plus tard, que pour montrer qu'une matrice  $A$  est inversible, il suffit de montrer qu'il existe une matrice  $B$  telle que  $A \times B = I_n$  **ou**  $B \times A = I_n$ .
3. Les matrices inversibles sont celles par lesquelles on a le droit de «simplifier multiplicativement» ; plus précisément,

$$(A \times C = B \times C \text{ et } C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) \implies A = B.$$

**Exemple(s) 87 :**

87.1 La matrice identité est inversible, en effet :

$$I_n \times I_n = I_n \times I_n = I_n.$$

87.2 Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls est inversible. En effet (les deux matrices considérées commutent donc il suffit de faire la vérification dans un sens) :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/d_n \end{pmatrix} = I_n.$$

87.3 La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 81 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3.$$

En particulier,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .<sup>3</sup>

87.4 De nombreuses matrices ne sont pas inversibles ; une méthode pour montrer qu'une matrice n'est pas inversible est d'utiliser le résultat :

si il existe  $B \neq 0_n$  telle que :  $A \times B = 0_n$ , alors  $A$  n'est pas inversible.

En effet, si elle était inversible, alors :

$$A \times B = 0_n \implies B = (A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times 0_n = 0_n$$

absurde ! En particulier, les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles.

87.5 Une matrice diagonale dont l'un des termes est nul n'est pas inversible, en effet, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & d_{i-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0_n} = 0_n.$$

3. Cette matrice n'a pas été trouvée par hasard ! Nous verrons plus tard une façon systématique de calculer des matrices inverses, si elles existent.

**Propriété(s) 8.1.32 :** Soit  $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ . De plus,  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Démonstration :** Concernant le produit, c'est un calcul direct :

$$A \times B \times B^{-1} \times A^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \times A \times B = I_n.$$

Concernant le deuxième point, il suffit de regarder d'un autre œil l'égalité :  $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$ . ■

## 8.1.3 Quelques familles de matrices

### 8.1.3.1 Matrices triangulaires supérieures

**Définition 8.1.41 :** Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $T = (t_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ . On dit que  $T$  est triangulaire supérieure si :

$$\forall i > j, \quad t_{i,j} = 0$$

elle s'écrit alors :

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,1} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

**Remarque(s) 51 :**

1. On appelle matrice triangulaire supérieure stricte une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls.
2. On définit de la même manière les matrices triangulaires inférieures (strictes), il suffit de remplacer  $i > j$  par  $j > i$ .
3. Une matrice diagonale est aussi une matrice triangulaire supérieure et inférieure.

**Propriété(s) 8.1.33 :** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices triangulaires supérieures,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :

1.  $A + B$  est triangulaire supérieure,
2.  $\lambda.A$  est triangulaire supérieure,
3.  $A \times B$  est triangulaire supérieure.

**Démonstration :** Seul le produit est non trivial à traiter. On écrit, si  $j > i$  :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j} = \sum_{k=1}^i a_{i,k} \times \underbrace{b_{k,j}}_{=0} + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{a_{i,k}}_{=0} \times b_{k,j} = 0.$$

Il est facile de calculer les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} \times b_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix},$$

mais ne généralisez pas hâtivement aux autres termes ! ■



**Remarque(s) 52 :** 1. Toute matrice triangulaire supérieure  $T$  stricte vérifie  $T^n = 0_n$  (on dit qu'elle est nilpotente), ceci se voit facilement en considérant les colonnes des matrices puissances, qui sont de plus en plus envahies par les zéros...

### 8.1.3.2 Transposition, matrices symétriques et antisymétriques

**Définition 8.1.42 :** Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle matrice transposée de  $A$  et on note  $A^T$  (ou  ${}^tA$ ) la matrice :  $A^T = (a_{j,i})_{(j,i) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}.$$

**Exemple(s) 88 :**

88.1 Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ . On a :  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

88.2 Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tX = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n).$$

**Propriété(s) 8.1.34 :** On a :

1. Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{et} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$$

2. Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  :

$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA.$$

3. Pour tout  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

**Démonstration :** Le premier point est immédiat, pour le deuxième, le coefficient en  $(i, j)$  de la matrice  ${}^t(A \times B)$  s'écrit :  $\sum_{k=1}^p a_{j,k} \times b_{k,i}$  et celui de la matrice  ${}^tB \times {}^tA$  s'écrit :  $\sum_{k=1}^p b_{k,i} \times a_{j,k}$  ; ce sont les mêmes ! Pour le dernier point, on remarque que, comme :

$$A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A$$

on a :

$$(A^{-1})^T \times A^T = (A \times A^{-1})^T = I_n = (A^{-1} \times A)^T = A^T \times (A^{-1})^T.$$

■

**Définition 8.1.43 :** On appelle matrice symétrique une matrice  $A$  qui est égale à sa transposée :  ${}^tA = A$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle matrice antisymétrique une matrice  $A$  qui est égale à l'opposé de sa transposée :  ${}^tA = -A$ . On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarque(s) 53 :** 1. Pour qu'une matrice soit symétrique ou antisymétrique il **faut** qu'elle appartienne à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. L'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices qui s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

En particulier, la somme de deux matrices symétrique est symétrique et le produit par un scalaire d'une matrice symétrique est symétrique.

3. L'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices qui s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la somme de deux matrices symétrique est symétrique et le produit par un scalaire d'une matrice symétrique est symétrique.

### Exemple(s) 89 :

- 89.1 Soit  $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ . Montrons que  $A \times B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si  $A$  et  $B$  commutent.

*Démonstration :* On a, comme  $A$  et  $B$  sont symétriques :

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T = B \times A$$

donc

$$(A \times B)^T = A \times B \iff B \times A = A \times B.$$

■

- 89.2 Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  ${}^tA \times A$  et  $A \times {}^tA$  sont symétriques.

**Proposition 8.1.10 :** Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

*Démonstration :* Procédons par analyse et synthèse :

1. *Analyse :* soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Supposons qu'il existe  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  telles que :  $M = S + A$ . Alors  ${}^tM = {}^tA + {}^tS = S - A$ . En additionnant puis soustrayant ces deux lignes, on en déduit :

$$S = \frac{1}{2} \cdot (M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \cdot (M - {}^tM).$$

Ceci termine l'analyse et montre l'unicité d'une telle somme.

2. *Synthèse :* on remarque que :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}.$$

■

### Exemple(s) 90 :

- 90.1 On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 8.1.3.3 Matrices nilpotentes

Cette partie est hors programme, elle est à voir comme un exemple d'utilisation des outils vus dans les paragraphes précédents.

On appelle **matrice nilpotente** une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui admet un entier naturel  $d$  tel que  $N^d = 0_n$ . Les matrices nilpotentes ne sont donc pas inversibles. On a vu dans les paragraphes précédents que les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes, mais ce ne sont pas les seules :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad A^2 = 0_n.$$

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes **qui commutent**. Alors  $A \times B$  et  $A + B$  sont nilpotentes.

**Démonstration :** Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels tels que  $A^p = B^q = 0_n$ . Alors :

$$(A \times B)^{\min(p,q)} \underbrace{=}_{A \times B = B \times A} A^{\min(p,q)} \times B^{\min(p,q)} = 0_n.$$

De plus, par le binôme de Newton, qu'il est légitime d'utiliser car  $A$  et  $B$  commutent :

$$(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k \times B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} A^k \times \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0_n} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0_n} \times B^{p+q-k} = 0_n.$$

■

### 8.1.3.4 Matrices élémentaires

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On note  $E_{i,j}$  la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme  $(i, j)$ , qui vaut 1 :

$$E_{i,j} = (\delta_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \quad \text{avec} \quad \delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Définition 8.1.44 :** Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$ . On appelle :

1. *Matrice de permutation* une matrice du type :

$$T_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

2. *matrice de dilatation* une matrice du type :

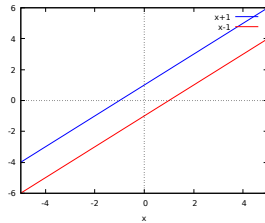
$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) \cdot E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$



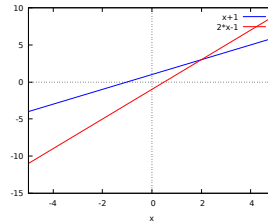
Ou encore, trouver l'intersection de trois plans de l'espace revient à résoudre un système du type :

$$\begin{cases} a \times x + b \times y + c \times z = d \\ a' \times x + b' \times y + c' \times z = d' \\ a'' \times x + b'' \times y + c'' \times z = d'' \end{cases}.$$

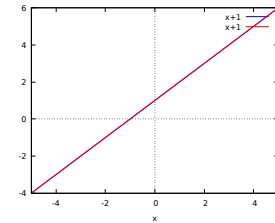
91.2 Cette vision géométrique peut nous permettre de mieux comprendre quels ensembles de solutions on peut attendre d'un système. Dans le cas de deux droites, par exemple, on peut avoir :



aucune



une seule



ou une infinité de solutions

Si l'on pose  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,p] \times [1,n]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

le système est équivalent à l'égalité matricielle :

$$A \times X = B.$$

Dans cette équation, l'inconnue est alors le vecteur  $X$  et on appelle **système homogène associé** au système  $A \times X = B$  le système  $A \times X = 0_{n,1}$ .

**Remarque(s) 55 :** 1. Les deux notations (par système et matricielle) sont utiles, la première a pour intérêt d'être plus « concrète » et la deuxième de faire des erreurs de calculs en travaillant en oubliant temporairement les inconnues.

2. Pour terminer d'oublier complètement les inconnues, on considère parfois la matrice dite augmentée :

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} & b_p \end{array} \right).$$

## 8.2.2 Une méthode de résolution

Pour résoudre un système linéaire, on le transforme peu à peu en un système plus facile à résoudre.

**Définition 8.2.46 :** Deux systèmes linéaires sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

**Remarque(s) 56 :** 1. Soit  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors les systèmes :

$$A \times X = B \quad \text{et} \quad (P \times A) \times X = P \times B$$

sont équivalents. C'est une application de la règle : « on a le droit de simplifier par des matrices inversibles ».

Pour transformer un système linéaire en un système équivalent, les opérations suivantes, qui correspondent toutes à la multiplication par une matrice  $P$  inversible, sont permises :

opération sur le système	notation	matrice $P$
permuter deux lignes	$L_i \leftrightarrow L_j$	$T_{i,j}$
multiplier une ligne par une constante <b>non nulle</b>	$L_i \leftarrow \lambda.L_i$	$D_i(\lambda)$
ajouter à une ligne un multiple d'une autre	$L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$	$L_{i,j}(\lambda)$ .

On appelle ces opérations *opérations élémentaires* sur les lignes.

**Définition 8.2.47 :** Une matrice est dite **échelonnée** si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros. On dit qu'un système est échelonné si sa matrice associée est échelonnée. On appelle **pivots** de la matrice ou du système les premiers coefficients non nuls qui apparaissent dans les lignes non nulles. Les inconnues qui correspondent à ces pivots sont appelées **inconnues principales**, les autres **inconnues secondaires**. Si de plus, les pivots sont égaux à un et sont les seuls éléments non nuls de leurs colonnes, on dit que le système est **échelonné réduit**.

### Algorithme du pivot de Gauß-Jordan.

1. On écrit la matrice associée au système  $A$ , augmentée du second membre  $(A|B)$
2. on cherche la première colonne non nulle de cette matrice  $A$
3. sur cette colonne, on choisit un pivot le « plus simple possible »
  - (a) idéalement, égal à 1, sinon, il doit être facile à inverser
  - (b) les autres coefficients de sa ligne doivent être les plus simples possibles
4. on effectue une permutation de lignes pour ramener le pivot en première ligne
5. on se sert du pivot pour annuler tous les coefficients en-dessous de lui par des opérations  $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$
6. on recommence avec la sous-matrice située en bas à droite du pivot.

**La matrice obtenue à la fin de cet algorithme est échelonnée**

1. on considère la première ligne en partant du bas dont le pivot est non nul et on la divise par la valeur du pivot
2. on se sert du nouveau pivot, 1 pour annuler tous les coefficients au-dessus de lui par des opérations  $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$
3. on recommence avec la sous-matrice en haut à gauche du pivot.

**La matrice obtenue à la fin de cet algorithme est échelonnée réduite.**

**Théorème 8.2.16 (du pivot de Gauß-Jordan) :** Tout système linéaire est équivalent à un unique système échelonné réduit.

**Démonstration :** Pour l'existence, il s'agit de faire une récurrence sur le nombre de colonnes de la matrice associée au système. L'unicité est admise. ■

**Remarque(s) 57 :** Résoudre un système échelonné réduit est particulièrement simple :

1. on vérifie d'abord si le système admet une solution, ce qui se voit en regardant les lignes nulles de  $A$  : si elles correspondent toutes à des 0 de  $B$ , la système a une solution (on dit qu'il est **compatible**), sinon, il n'a pas de solution (on dit qu'il est **incompatible**).
2. si le système a une solution, on exprime alors les inconnues principales à l'aide des inconnues secondaires, qui deviennent des paramètres.
3. On appelle **rang** d'un système le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite à laquelle il est équivalent.

## 8.2.3 Applications aux matrices

### 8.2.3.1 Matrices équivalentes, décomposition de Gauß-Jordan

**Définition 8.2.48 :** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes :

1. par lignes s'il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = P \times B$  (on écrit alors  $A \underset{L}{\sim} B$ ),
2. par colonnes s'il existe  $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  telle que  $A = B \times Q$  (on écrit alors  $A \underset{C}{\sim} B$ ).

**Définition 8.2.49 :** Soit  $E$  un ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation sur  $E$ , c'est-à-dire un sous-ensemble  $F$  de  $E^2 : x\mathcal{R}y$  si et seulement si  $(x, y) \in F$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$  si :

1.  $\mathcal{R}$  est réflexive :

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x,$$

2.  $\mathcal{R}$  est symétrique :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x,$$

3.  $\mathcal{R}$  est transitive :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z.$$

### Exemple(s) 92 :

92.1 Les relations  $\underset{L}{\sim}$  et  $\underset{C}{\sim}$  sont des relations d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Démonstration :** Traitons le cas de l'équivalence par lignes :

- (a) *réflexivité* :  $I_n \times A = A$
- (b) *symétrie* : s'il existe  $P$  inversible telle que  $P \times A = B$  alors  $A = P^{-1} \times B$  et  $P^{-1}$  est inversible
- (c) *transitivité* : s'il existe  $P$  et  $Q$  deux matrices inversibles telles que  $P \times A = B$  et  $Q \times B = C$  alors  $(Q \times P) \times A = C$  et  $P \times Q$  est inversible.

■

Le théorème suivant est une simple reformulation du pivot de Gauß-Jordan en termes de matrices :

**Théorème 8.2.17 (décomposition de Gauß-Jordan) :** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors il existe  $E$ , un produit de matrices élémentaires et il existe une unique matrice  $R$  échelonnée réduite (par lignes) telles que :

$$E \times A = R.$$

**Remarque(s) 58 :** 1. Comme l'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire, il existe donc aussi une matrice produit de matrices élémentaires  $E'$  telle que :  $A = E' \times R$ .

2. En particulier, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe une unique matrice  $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  échelonnée réduite telle que :

$$A \underset{L}{\sim} R.$$

Il est important de savoir trouver la matrice  $R$  et la matrice  $E$  pour une matrice  $A$  donnée. Pour ceci, on considère la matrice augmentée  $(I_n | A)$  et on effectue le pivot de Gauß (pour  $A$ ) sur cette matrice augmentée. La matrice  $E$  du théorème apparaît alors à gauche de la matrice augmentée.

### Exemple(s) 93 :

93.1 Considérons la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . On écrit alors la matrice augmentée  $(I_4 | A)$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

On en déduit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E} \times A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R}.$$

### 8.2.3.2 Matrices inversibles

Commençons par rappeler la formule vue en *TD* pour les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  :

**Propriété(s) 8.2.36 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $a \times d - b \times c \neq 0$  et alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{a \times d - b \times c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Pour les matrices de taille supérieure, il n'existe pas de formule aussi simple. Il s'agit alors d'utiliser la pivot de Gauß-Jordan.

**Propriété(s) 8.2.37 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est inversible,
2.  $A \underset{L}{\sim} I_n$ ,
3. le système  $A \times X = 0_{n,1}$  n'admet pour solution que la solution nulle,
4. pour tout  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $A \times X = B$  admet une unique solution,
5. pour tout  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $A \times X = B$  admet au moins une solution.

**Démonstration :** Nous allons faire une preuve « circulaire » :  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ . Les deux premières implications sont claires. Pour la troisième, on remarque que si le système  $A \times X = 0_{n,1}$  n'admet pour solution que la solution nulle, alors par la décomposition de Gauß-Jordan, si l'on note  $R$  la matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à  $A$ ,  $R \times X = 0_{n,1}$  n'admet aussi que la solution nulle comme solution. Donc  $R$  est de rang  $n$ , c.a.d.  $R = I_n$ . Il en découle que  $A$  est produit de matrices élémentaires, donc inversible et le système  $A \times X = B$  n'admet qu'une seule solution :  $X = A^{-1} \times B$ . La quatrième implication est aussi claire. Montrons la dernière ; si (5) est vraie, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le système :

$$A \times X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où le 1 est à la  $i$ -ième ligne dans le vecteur de droite admet une solution. Appelons-la  $C_i$ . Si l'on considère la matrice  $B$  dont les colonnes sont les vecteurs  $C_i$ , on a alors  $A \times B = I_n$ . La matrice  $A$  est donc inversible à droite, donc inversible<sup>4</sup>.

■

**Remarque(s) 59 :** 1. On déduit par exemple immédiatement de cette propriété qu'une matrice échelonnée réduite carrée est inversible si et seulement si elle a pour rang  $n$ , donc il s'agit de la matrice identité. On en déduit, par la décomposition de Gauß-Jordan que si une matrice  $P$  est inversible, il existe  $E$  un produit de matrices élémentaires tel que :  $E \times P = I_n$ . Puis  $P = E^{-1}$  et donc :

Toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires.

4. notez qu'on utilise ici un résultat non encore prouvé... patience...



2. Cette remarque permet de mieux comprendre les notions d'équivalence par lignes et par colonnes :

Deux matrices sont équivalentes par lignes si l'on passe de l'une à l'autre par des opérations sur les lignes.

Et l'on a évidemment la même propriété pour l'équivalence par colonnes.

3. Le deuxième point de cette propriété implique alors qu'une matrice est inversible si et seulement si elle est équivalente par lignes à la matrice identité.

De la dernière remarque, on déduit alors une méthode pour déterminer si une matrice est inversible et calculer son inverse grâce au pivot de Gauß :

**Étude de l'inversibilité d'une matrice par le pivot de Gauß -Jordan :**

1. On écrit la matrice augmentée  $(I_n|A)$ .
2. On effectue le pivot de Gauß, ce qui nous donne la matrice augmentée  $(E|R)$  où  $R$  est la matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à  $A$ .
  - (a) si  $R$  n'est pas de rang  $n$ ,  $A$  n'est pas inversible
  - (b) sinon,  $R = I_n$  et  $E \times A = I_n$  donc  $A^{-1} = E$ .

**Exemple(s) 94 :**

94.1 Considérons la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -L_2 \\ &\stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \end{aligned}$$

La matrice  $A$  est donc inversible, et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

94.2 Considérons maintenant la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\stackrel{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

La matrice échelonnée obtenue n'est alors pas de rang 3, donc la matrice  $B$  n'est pas inversible.

- 94.3 Une fois une matrice inverse calculée, on peut facilement résoudre un système linéaire par exemple, si l'on considère la matrice du premier exemple :

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x - y = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \iff A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



## Chapitre 9

# Arithmétique et dénombrement

## 9.1 Divisibilité

### 9.1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 9.1.50 :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . On dit que  $a$  divise  $b$  s'il existe  $c \in \mathbb{Z}$  tel que :  $b = a \times c$ . On dit de plus alors que  $b$  est un multiple de  $a$ .

#### Exemple(s) 95 :

- 95.1 1 et  $-1$  divisent tous les entiers,
- 95.2 les seuls diviseurs de 1 sont 1 et  $-1$ ,
- 95.3 0 est un multiple tous les entiers,
- 95.4 si  $n$  est impair, 8 divise  $n^2 - 1$ ,
- 95.5 si  $n \in \mathbb{N}$ , 6 divise  $n^3 - n$ .

**Propriété(s) 9.1.38 :** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ . On a :

1.  $[a|b]$  et  $[a|c] \Rightarrow [a|(b+c)]$
2.  $[a|b]$  et  $[c|d] \Rightarrow [a \times c|b \times d]$
3.  $[a|b]$  et  $[b|a] \Rightarrow |a| = |b|$

**Démonstration :** Il s'agit à chaque fois de revenir à la définition :

1. Supposons qu'il existe des entiers  $e$  et  $f$  tels que  $b = a \times e$  et  $c = a \times f$ . Alors  $b + c = a \times (e + f)$ .
2. Supposons qu'il existe des entiers  $e$  et  $f$  tels que :  $b = a \times e$  et  $d = c \times f$ . Alors :  $b \times d = (a \times e) \times (c \times f)$ .
3. Supposons qu'il existe des entiers  $d$  et  $e$  tels que  $b = a \times e$  et  $a = b \times f$ . Alors  $e \times f = 1$  c.a.d.  $e$  divise 1, donc  $e = \pm 1$  d'où  $b = \pm a$ .

■

**Définition 9.1.51 :** Un nombre premier  $p$  est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Pour trouver l'ensemble des nombres premiers inférieurs à un certain entier, une méthode simple mais peu efficace pour de grands entiers est d'utiliser le crible d'Ératosthène :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Son principe est simple :

1. on écrit la liste des entiers naturels de 2 à  $N$  dans un tableau
2. on parcourt le tableau par l'ordre croissant des entiers en effectuant l'opération : à chaque fois qu'on tombe sur un entier non barré, on barre tous ses multiples dans le tableau, et ceci pour tous les entiers inférieurs ou égaux à  $\sqrt{N}$
3. les nombres non barrés dans le tableau sont des nombres premiers.

## 9.1.2 Division euclidienne

**Théorème 9.1.18 (division euclidienne) :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ,  $b \neq 0$ . Il existe des uniques entiers naturels  $q$  (le quotient) et  $r$  (le reste) tels que :

$$a = b \times q + r \quad r < b.$$

**Démonstration :** Existence : il suffit de prendre  $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ . Unicité : supposons qu'il existe quatre entiers naturels  $q, q', r$  et  $r'$  tels que :

$$a = b \times q + r \quad r < b \quad \text{et} \quad a = b \times q' + r' \quad r' < b.$$

Alors  $b \times (q - q') = r - r'$ , mais  $-b < r - r' < b$  et le seul multiple de  $b$  dans cet intervalle est 0 donc  $r - r' = 0$  et on en déduit  $r = r'$  puis  $q = q'$ . ■

### Exemple(s) 96 :

- 96.1  $a = 60, b = 84 : 60 = 0 \times 84 + 60,$   
 96.2  $a = 720, b = 252 : 720 = 252 \times 2 + 216,$   
 96.3  $a = 955, b = 18 : 955 = 18 \times 53 + 1.$

**Propriété(s) 9.1.39 :** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels,  $b \neq 0$  alors  $b$  divise  $a$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  vaut 0

**Démonstration :** La réciproque est clairement vraie. Si l'on suppose maintenant que  $a|b$  alors il existe  $q$  un entier naturel tel que  $a = b \times q + 0$  donc par unicité du reste et du quotient dans la division euclidienne,  $r = 0$ . ■

## 9.2 Entiers premiers entre eux

### 9.2.1 Plus grand et plus petit commun diviseurs

**Définition 9.2.52 :** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels. Soit  $d \in \mathbb{N}$ . On dit que  $d$  est le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$  si  $d|a$  et  $d|b$  et s'il est le plus grand entier naturel avec cette propriété.

**Remarque(s) 60 :** 1. Un tel entier naturel existe toujours 1 divise toujours  $a$  et  $b$  et l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$  est borné,  
 2. on note parfois  $PGCD(a, b)$  l'entier naturel qui a cette propriété,  
 3. on peut évidemment définir de même le PPCM de  $a$  et  $b$  comme le plus petit des multiples communs à  $a$  et  $b$ .

Pour certains entiers, il est facile de calculer leur PGCD :

**Exemple(s) 97 :**

$$97.1 \quad PGCD(1, n) = 1,$$

$$97.2 \quad PGCD(0, n) = n.$$

**Définition 9.2.53 :** Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  entiers relatifs. On définit le PGCD de ces nombres par récurrence sur  $n$  :

$$PGCD(a_1, a_2, \dots, a_n) = PGCD(PGCD(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

En général, on dispose de l'algorithme d'Euclide :

## 9.2.2 Algorithme d'Euclide

### Algorithme d'Euclide :

On cherche le PGCD de  $a$  et  $b$  :

1. On pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$  et, tant que  $b \neq 0$
2. on effectue la division Euclidienne de  $a_k$  par  $b_k$  :

$$a_k = b_k \times q_k + r_k,$$

et on pose  $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} = r_k$ .

le PGCD de  $a$  et  $b$  est le dernier reste non nul de division Euclidienne.

il s'agit de montrer que cet algorithme s'arrête et produit bien le résultat désiré :

1. L'algorithme s'arrête car, par définition de la division Euclidienne, pour tout  $k$  :

$$b_{k+1} < b_k$$

et il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante

2. L'algorithme donne le bon résultat car, pour tout  $k$  :

$$PGCD(a_k, b_k) = PGCD(a_{k+1}, b_{k+1}).$$

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que l'ensemble des diviseurs positifs de  $a_k$  et  $b_k$  est le même que celui de  $a_{k+1}$  et  $b_{k+1}$ . En effet, si  $d$  divise  $a_k$  et  $b_k$ , il divise aussi  $a_{k+1} = b_k$  et  $b_{k+1} = a_k - b_k \times q_k$  et réciproquement, si  $d'$  divise  $a_{k+1}$  et  $b_{k+1}$ , il divise aussi  $b_k = a_{k+1}$  et  $a_k = a_{k+1} \times q_k + b_{k+1}$ . ■

La suite  $(PGCD(a_k, b_k))_k$  est donc constante, en particulier, si l'on numérote  $k_0$  la dernière étape de l'algorithme :

$$PGCD(a, b) = PGCD(a_0, b_0) = PGCD(a_{k_0}, b_{k_0}) = PGCD(b_{k_0}, 0) = b_{k_0}.$$

L'algorithme d'Euclide a de nombreuses conséquences, en particulier :

**Propriété(s) 9.2.40 :** (lemme de Bézout) Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ . Il existe  $u$  et  $v$  deux entiers relatifs tels que :

$$a \times u + b \times v = PGCD(a, b).$$

**Démonstration :** Avec les notations de l'algorithme d'Euclide, on a :

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_k \\ b_{k+1} = a_k - q_k \times b_k \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}}_{=M_k} \times \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que, si  $M = M_{k_0-1} \times \cdots \times M_1 \times M_0$ , on a :  $\begin{pmatrix} a_{k_0} \\ b_{k_0} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . En particulier, si  $M = \begin{pmatrix} \star & \star \\ u & v \end{pmatrix}$ , on en déduit :  $PGCD(a, b) = b_{k_0} = u \times a + v \times b$ . ■

La preuve de cette propriété nous suggère une méthode de calcul des coefficients  $u$  et  $v$  : via un produit de matrices. Mais on peut faire mieux pour tout  $k$ , on a :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -q_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Donc pour passer du vecteur  $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$  au vecteur  $\begin{pmatrix} b_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$  et de la matrice  $N_k = M_{k-1} \times \cdots \times M_1 \times M_0$  à la matrice  $N_{k+1} = M_k \times M_{k-1} \times \cdots \times M_1 \times M_0$  il suffit d'effectuer les opérations élémentaires  $L_1 \leftarrow L_1 - q_k \cdot L_2$  puis  $L_1 \leftrightarrow L_2$ . On en déduit la méthode de calcul :

**Algorithme d'Euclide étendu, version matricielle :**

On cherche le PGCD de  $a$  et  $b$  ainsi qu'une relation de Bézout :

1. On écrit la matrice augmentée  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right) = \left( N_0 \middle| \begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \end{array} \right)$ . Et, tant que  $b_k \neq 0$  :
2. on effectue la division Euclidienne de  $a_k$  par  $b_k$  :

$$a_k = b_k \times q_k + r_k,$$

et on effectue sur la matrice augmentée les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 - q_k \cdot L_2$  puis  $L_1 \leftrightarrow L_2$ .

une fois l'algorithme terminé, on a alors la matrice augmentée  $\left( \begin{array}{cc|c} u & v & PGCD(a, b) \\ \star & \star & 0 \end{array} \right)$  donc la relation de Bézout  $PGCD(a, b) = u \times a + v \times b$ .

**Exemple(s) 98 :**

98.1 Cherchons une relation de Bézout pour les entiers  $a = 1239$  et  $b = 735$ .

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1239 \\ 0 & 1 & 735 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 735 \\ 1 & -1 & 504 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 504 \\ -1 & 2 & 231 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 231 \\ 3 & -5 & 42 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 42 \\ -16 & 27 & 21 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} -16 & 27 & 21 \\ \star & \star & 0 \end{array} \right)$$

On en déduit la relation de Bézout :

$$21 = 1239 \times (-16) + 735 \times 27.$$

**Propriété(s) 9.2.41 :** Soit  $a$ ,  $b$  et  $d$  trois entiers naturels. Supposons que  $d|a$  et  $d|b$ . Alors  $d|PGCD(a, b)$ .

**Démonstration :** Par le lemme de Bézout, il existe des entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$PGCD(a, b) = a \times u + b \times v$$

comme  $d$  divise  $a$  et  $b$ , il divise donc  $PGCD(a, b)$ . ■

### 9.2.3 Entiers premiers entre eux

**Définition 9.2.54 :** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs. On dit qu'ils sont premiers entre eux si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ .

**Exemple(s) 99 :**

- 99.1 Pour montrer que deux entiers sont ou non premiers entre eux, on peut déterminer leurs diviseurs : soit  $p$  un nombre premier,  $k$  un entier naturel,  $k < p$ . Alors  $k$  et  $p$  sont premiers entre eux.  
 99.2 Ou utiliser l'algorithme d'Euclide : les entiers naturels 1239 et 735 ne sont pas premiers entre eux.

**Propriété(s) 9.2.42 :** Deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe  $u$  et  $v$  tels que

$$a \times u + b \times v = 1.$$

**Démonstration :** Le lemme de Bézout nous fournit le sens direct. Pour la réciproque, si  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b$ , alors s'il existe  $u$  et  $v$  des entiers relatifs tels que :

$$1 = a \times u + b \times v$$

$d$  divise aussi 1. Donc  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ . ■

**Propriété(s) 9.2.43 :** (lemme de Gauß) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ . On suppose que  $a|b \times c$ . Alors si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ ,  $a|c$ .

**Démonstration :** Écrivons une relation de Bézout pour  $a$  et  $b$  :  $a \times u + b \times v = 1$ . On a :

$$c = c \times 1 = a \times (c \times u) + (b \times c) \times v$$

donc  $a|c$ . ■

**Remarque(s) 61 :**

1. Évidemment, ce résultat est faux si  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux :  $4|2 \times 2$  mais 4 ne divise pas 2!
2. On déduit immédiatement de ce résultat le résultat suivant : si  $a|c$ ,  $b|c$  et que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $a \times b$  divise  $c$ .
3. Si  $n$  est un entier relatif et  $p$  un nombre premier, alors soit  $p$  divise  $n$ , soit  $p$  et  $n$  sont premiers entre eux. On en déduit, par le lemme de Gauß que si  $p$  divise  $n^2$ , alors  $p$  divise  $n$ .

**Exemple(s) 100 :**

100.1 Si  $p$  est un nombre premier, alors  $\sqrt{p}$  est irrationnel : en effet, si par l'absurde, il s'agissait d'un rationnel, il existerait deux entiers  $a$  et  $b$  premiers entre eux (quitte à les diviser par leur PGCD) tels que  $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ . On en déduit  $b^2 \times p = a^2$  donc par le lemme de Gauß,  $p$  divise  $a$  puis, en écrivant  $a = p \times a'$ , on a  $b^2 = p \times a'^2$  donc  $p$  divise  $b$  par le lemme de Gauß, ce qui contredit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

100.2 Soit  $p$  un nombre premier et  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ . On a, par le triangle de Pascal :

$$p \times \underbrace{\binom{k-1}{p-1}}_{\in \mathbb{Z}} = k \times \underbrace{\binom{p}{k}}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Donc, comme  $p$  et  $k$  sont premiers entre eux, par le lemme de Gauß,  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .

100.3 On peut déduire de l'Exemple précédent le *petit théorème de Fermat* :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad p | (a^p - a).$$

Montrons-le par récurrence sur  $a$  :

- (a) Initialisation : c'est clair si  $a = 0$  car 0 est un multiple de tous les entiers
- (b) Hérédité. Supposons le petit théorème de Fermat vrai pour  $A \in \mathbb{N}$  fixé. Alors, par la formule du binôme de Newton :

$$(A+1)^p - (A+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}}_{p | (2)} \times A^k + \underbrace{A^p - A}_{p | \text{ H.R.}}.$$

100.4 Le lemme de Bézout et le lemme de Gauß permettent de résoudre certaines équations Diophantiennes. Plus précisément, si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont deux entiers relatifs, alors l'équation :

$$a \times x + b \times y = c$$

admet une solution  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  si et seulement si  $\text{PGCD}(a, b) | c$  : c'est clairement une condition nécessaire, et c'est une condition suffisante par le lemme de Bézout.

100.5 En pratique, si l'on cherche à calculer les solutions entières de l'équation  $5 \times x + 3 \times y = 1$ , l'algorithme d'Euclide étendu nous donne la solution particulière (ou, dans ce cas simpliste, on peut la deviner)  $(-1, 2)$ . On en déduit, que si  $(x, y)$  est une solution entière :

$$5 \times (x+1) = 3 \times (2-y).$$

Le lemme de Gauß nous donne alors qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = 3k - 1$  et  $y = 2 - 5k$ . Une vérification plus tard, on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \{(3k - 1, 2 - 5k), \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

## 9.2.4 Décomposition en produit de facteurs premiers

**Théorème 9.2.19 (de décomposition en produit de facteurs premiers) :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Alors il existe une unique famille d'entiers naturels  $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$  tous nuls sauf un nombre fini tels que :

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}.$$

**Démonstration :** *Existence* : On prouve l'existence par récurrence forte sur  $n$  : si  $n = 1$ , c'est clair, si l'on suppose que la décomposition existe pour tout  $n \leq N$  alors, (on l'a prouvé quand on a parlé de récurrence forte) soit  $N+1$  est premier, et sa décomposition est alors claire, soit il admet un facteur premier  $q$  tel que  $N+1 = q \times n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et il suffit alors d'écrire la décomposition en facteurs premiers de  $n$  pour obtenir celle de  $N+1$

*Unicité* : On suppose par l'absurde que  $n$  admet deux décompositions différentes. Alors il existe un nombre premier  $q$  et  $a > b$  deux entiers naturels tels que  $q^a$  apparaisse dans une décomposition et  $q^b$  dans l'autre. On peut alors écrire :

$$q^a \times k = n = q^b \times k'$$

avec  $k$  et  $k'$ , ce qu'il reste de la décomposition en facteurs premiers, des entiers premiers avec  $q$ , par le lemme de Gauß. Mais alors, comme  $a > b$  que  $q$  divise  $k'$ . Absurde ! ■

### Exemple(s) 101 :

101.1 On a :  $260 = 2^2 \times 5^1 \times 13^1$ .



**Remarque(s) 62 :** 1. La décomposition en facteurs premiers peut permettre de calculer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels non nuls. Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^*$  et si :

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}, \quad m = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(m)}$$

alors :

$$PGCD(n, m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(n), v_p(m))}, \quad \text{et} \quad PPCM(n, m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(n), v_p(m))}.$$

2. On déduit immédiatement de ces deux formules la formule :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad PGCD(n, m) \times PPCM(n, m) = |n \times m|.$$

**Démonstration :** La formule est vraie si  $n$  et  $m$  sont strictement positifs car  $a + b = \max(a, b) + \min(a, b)$ . Si ils sont non nuls, on utilise  $PGCD(m, n) = PGCD(|m|, |n|)$  et  $PPCM(m, n) = PPCM(|m|, |n|)$ . Enfin si l'un des deux au moins est nul, il faut utiliser la convention  $PPCM(m, n) = 0$ . ■

## 9.3 Dénombrement

### 9.3.1 Ensembles fini, partitions

**Définition 9.3.55 :** Soit  $A$  un ensemble fini. On note  $|A|$ ,  $\#A$  ou  $\text{Card}(A)$  le nombre d'éléments de  $A$  et on l'appelle cardinal de  $A$ .

Pour compter les éléments de  $A$ , il est souvent utile de le « découper » ; le plus simple est de considérer un sous-ensemble  $B$  de  $A$  :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(A \setminus B).$$

**Propriété(s) 9.3.44 :** Soit  $A$  un ensemble fini,  $B \subset A$ . Alors  $A = B$  si et seulement si  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ .

**Démonstration :** Le sens direct est clair. Pour la réciproque, par la formule  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(A \setminus B)$ , si  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ , l'ensemble  $A \setminus B$  a zéro éléments, il s'agit donc de l'ensemble vide. Donc  $A = B$ . ■

**Définition 9.3.56 :** On appelle partition de  $E$  une famille d'ensemble  $(E_i)_{i \in I}$  non vides dont la réunion vaut  $E$  et tels que :

$$\forall i \neq j, \quad E_i \cap E_j = \emptyset.$$

**Exemple(s) 102 :**

102.1 Une partition des lettres de l'alphabet est donnée par les voyelles et les consonnes.

102.2 Une partition de l'ensemble des entiers naturels est donnée par les entiers pairs et les entiers impairs.

102.3 L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des multiples de trois n'est pas une partition : leur intersection contient tous les multiples de 6 !

Si  $E$  est un ensemble fini, et  $(E_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$ , la formule suivante se montre par une récurrence immédiate :

$$\text{Card}(E) = \sum_{i \in I} \text{Card}(E_i).$$

### 9.3.2 Cardinaux et fonctions

**Propriété(s) 9.3.45 :** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  $f : E \rightarrow F$ . Alors :

1.  $f$  est surjective si et seulement si

$$F = f(E) = \{f(x), \quad x \in E\}.$$

2.  $f$  est injective si et seulement si  $(\{f(x)\})_{x \in E}$  est une partition de  $f(E)$

**Démonstration :** Le premier point a déjà été vu. Pour le deuxième, si  $f$  est injective, les parties  $\{f(x)\}$  sont non nulles et elles sont disjointes car si  $f(x) = f(x')$  alors  $x = x'$  et réciproquement, si  $(\{f(x)\})_{x \in E}$  est une partition de  $f(E)$ , alors pour tous  $x, x'$  éléments de  $E$ ,  $f(x) = f(x') \in \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$  donc  $x = x'$ . ■

**Propriété(s) 9.3.46 :** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  $f : E \rightarrow F$ . Si  $f$  est bijective, alors  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ .

**Démonstration :** On utilise la propriété précédente : comme  $f$  est injective,  $(\{f(x)\})_{x \in E}$  est une partition de  $f(E)$  et  $f(E) = F$  car  $f$  est surjective. On en déduit :

$$\text{Card}(F) = \sum_{x \in E} \underbrace{\text{Card}(\{f(x)\})}_{=1} = \text{Card}(E).$$

**Propriété(s) 9.3.47 :** Soit  $E$  un ensemble fini. Soit  $f : E \rightarrow E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective,
2.  $f$  est surjective,
3.  $f$  est bijective.

**Démonstration :** Clairement, (3)  $\implies$  (1) et (3)  $\implies$  (2). Montrons les réciproques. Si  $f$  est injective, alors :

$$\text{Card}(f(E)) = \sum_{x \in E} \underbrace{\text{Card}(\{f(x)\})}_{=1} = \text{Card}(E).$$

Donc  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$  et clairement,  $f(E) \subset E$ . Donc  $E = f(E)$  :  $f$  est aussi surjective. Supposons maintenant que  $f$  n'est pas injective. Alors :

$$\text{Card}(f(E)) = \text{Card}\left(\bigcup_{x \in E} \{f(x)\}\right) \underset{f \text{ non inj.}}{\leq} \sum_{x \in E} \text{Card}(\{f(x)\}) = \text{Card}(E).$$

Donc  $f$  n'est pas surjective. Par contraposée, si  $f$  est surjective, elle est injective. ■

**Remarque(s) 63 :** 1. Attention ! Il est indispensable que  $E$  soit fini pour que le résultat soit vrai, comme le montrent les exemples :

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad g : n \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$$

$f$  est injective mais pas surjective et  $g$  est surjective mais pas injective.

2. Il est aussi indispensable que  $f$  soit à valeurs dans le même ensemble :  $f : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$  quelconque est par exemple injective mais pas surjective.

### 9.3.3 Cardinaux de certains ensembles

**Propriété(s) 9.3.48 :** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

**Démonstration :** Il suffit de considérer la partition de  $E \times F$  (par lignes) :

$$E \times F = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times F.$$

■

**Remarque(s) 64 :** Évidemment, ceci se généralise par une récurrence immédiate à  $n$  ensembles : si tous les ensembles  $E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont finis, on a :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_n).$$

**Exemple(s) 103 :**

103.1 Effectuer un tirage de  $p$  éléments **avec remise** dans un ensemble à  $n$  éléments revient à choisir un  $p$ -uplet  $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ . Il y a donc  $n^p$  tels tirages.

103.2 Il y a autant d'entiers à exactement  $n \geq 2$  chiffres que d'éléments dans l'ensemble  $\llbracket 1, 9 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket^{n-1}$ , donc  $9 \times 10^{n-1}$ .

**Propriété(s) 9.3.49 :** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Rappelons qu'on note  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$  l'ensemble des fonctions de  $E$  dans  $F$ . Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

**Démonstration :** Notons  $e_1, e_2, \dots, e_n$  les éléments de  $E$ . Alors une fonction  $f$  est exactement déterminée par le  $n$ -uplet  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \in F^n$  (c'est-à-dire qu'il y a bijection). Donc

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F^n) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

■

**Définition 9.3.57 :** Soit  $E$  un ensemble. On appelle ensemble des parties de  $E$  et on note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  :

$$\mathcal{P}(E) = \{A, \quad A \subset E\}.$$

**Exemple(s) 104 :**

104.1 Si  $E = \emptyset$ ,  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ .

104.2 si  $E = \{a\}$ ,  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$

104.3 si  $E = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

**Propriété(s) 9.3.50 :** Soit  $E$  un ensemble fini. On a :  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$ .

**Démonstration :** Un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est exactement déterminé par la fonction :

$$\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\},$$

donc  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(\mathcal{F}(E, \{0, 1\})) = 2^{\text{Card}(E)}$ . ■

### 9.3.4 Combinaisons

**Définition 9.3.58 :** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $p$ . On appelle  $k$ -combinaison d'éléments de  $E$  un sous-ensemble de  $E$  constitué de  $k$  éléments. On note  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des  $k$ -combinaisons de  $E$ .

**Remarque(s) 65 :** Pour construire une  $k$ -combinaison d'un ensemble  $E$ , il s'agit de tirer **simultanément, sans remise**  $k$  éléments dans l'ensemble  $E$ .

**Exemple(s) 105 :**

105.1 Soit  $E = \{a, b, c\}$ . Alors  $\{a, b\}$  est une 2-combinaison de  $E$  mais  $\{a, a\}$  n'est pas une deux combinaison de  $E$ .  
On a :

$$\mathcal{P}_2(E) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

105.2 Clairement, si  $k \geq p + 1$ ,  $\mathcal{P}_k(E) = \emptyset$ .

**Propriété(s) 9.3.51 :** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $p$  et  $k$  un entier naturel. Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{p}{k}.$$

**Démonstration :** La formule est clairement vraie si  $k \geq p + 1$ . Pour la prouver dans les autres cas, nous allons montrer que  $\text{Card}(\mathcal{P}_k(E))$ , que nous noterons provisoirement  $C_p^k$  vérifie les formules nécessaires à la construction du triangle de Pascal. Clairement :

$$C_p^0 = 1 = \binom{p}{0} \quad \text{et} \quad C_p^p = 1 = \binom{p}{p}.$$

De plus, si  $k \leq p - 1$ ; on a en fixant  $a$  un élément de  $E$  la partition<sup>1</sup>

$$\mathcal{P}_k(E) = \{X, \quad X \in \mathcal{P}_k(E \setminus \{a\})\} \cup \{Y \cup \{a\}, \quad Y \in \mathcal{P}_{k-1}(E)\}.$$

On en déduit :  $C_k^{p-1} + C_{k-1}^p = C_k^p$ , ce qui correspond à la formule de Pascal :  $\binom{p-1}{k} + \binom{p}{k-1} = \binom{p}{k}$ . ■

**Exemple(s) 106 :**

106.1 Il y a autant de couples de dates d'anniversaire dans une classe de 41 élèves que de 2-combinaisons d'élèves, c'est-à-dire :  $\binom{41}{2} = \frac{41 \times 40}{2} = 820$  (!).

106.2 Il y a autant de mains de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes que de 5-combinaisons de cartes, c'est-à-dire  $\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{120} = 2598960$ .

1. pensez : je classe les ensembles de  $E$  suivant si ils contiennent  $a$  ou non.

- 106.3 Comptons combien de mains de cinq cartes contiennent au moins une paire, c'est-à-dire au moins deux cartes identiques pour un jeu de 52 cartes. Se donner une telle main revient à se donner une paire puis à prendre 3 cartes quelconques dans les cartes restantes. Pour chacune des 13 valeurs de cartes, il y a  $\binom{4}{2} = 6$  paires différentes et il y a  $\binom{50}{3}$  possibilités de choisir les cartes restantes. Il y a donc :

$$13 \times 6 \times \binom{50}{3} = 1528800$$

telles mains... raisonnement intéressant mais... faux ! En comptant de cette façon, un brelan (par exemple) a été compté trois fois : une fois pour chacune des paires choisies qu'il contient. Le bon raisonnement est le suivant : on cherche les mains qui n'ont aucune paire. Pour constituer une telle main, il faut choisir 5 valeurs de cartes différentes :  $\binom{13}{5}$  puis pour chacune une couleur :  $4^5$  possibilités, il y a donc  $\binom{13}{5} \times 4^5$  mains sans aucune paire, c'est-à-dire :

$$\binom{52}{5} - \binom{13}{5} \times 4^5 = 1281072$$

telles mains.

- 106.4 On peut donner une démonstration combinatoire de la formule du binôme de Newton : si  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , lorsqu'on développe  $(a + b)^n$ , on obtient des termes de la forme  $a^k \times b^l$ . Nécessairement,  $k + l = n$  donc  $l = n - k$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Il s'agit alors de déterminer combien de fois peut apparaître le terme  $a^k$ , c'est-à-dire combien de fois parmi les  $n$  produits on a choisi  $k$  fois  $a$  : par la propriété, il s'agit de  $\binom{n}{k}$ . Finalement :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

- 106.5 La formule suivante (de Vandermonde) se prouve facilement par un argument combinatoire : pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , on a :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \times \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

en effet, choisir  $p$  éléments parmi  $n + m$  revient, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  à en choisir  $k$  parmi les  $n$  premiers puis à en choisir  $p - k$  parmi les  $m$  derniers.

### 9.3.5 Arrangements, permutations

**Propriété(s) 9.3.52 :** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $k$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $p$ . On suppose  $k \leq p$ . Alors il y a  $A_p^k = \frac{p!}{(p-k)!}$  injections de  $E$  dans  $F$ .

**Démonstration :** Fixons  $p$  et procédons par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 0$ , il n'y a qu'une seule application (injective) : l'application vide, le résultat est donc vrai. Si l'on suppose maintenant le résultat vrai pour tout ensemble de cardinal  $k$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $k + 1 \leq p$  fixons  $a \in E$  et posons  $E' = E \setminus \{a\}$ . Alors il y a autant de façons de prolonger une injection  $f$  de  $E'$  dans  $F$  en une injection de  $E$  dans  $F$  que de choix de l'image de  $a$  dans l'ensemble à  $p - k$  éléments  $F \setminus f(E')$ . Donc  $A_p^{k+1} = (p - k) \times A_p^k = \frac{p!}{(p-k-1)!}$ . ■

**Définition 9.3.59 :** Soit  $E$  un ensemble. On appelle  $k$ -arrangement de  $E$  un  $k$ -uplet  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  tel que si  $i \neq j$ ,  $e_i \neq e_j$ .

**Remarque(s) 66 :** Un  $k$ -arrangement est à voir comme un tirage de  $k$  éléments de  $E$  **successivement, sans remise**.

**Propriété(s) 9.3.53 :** Supposons que  $E$  est un ensemble à  $p$  éléments. Alors :

1. Si  $k$  est strictement supérieur à  $p$ , il n'y a pas de  $k$ -arrangements de  $E$ ,

2. si  $k \leq p$ , il y a  $A_p^k$   $k$ -arrangements de  $E$ .

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que se donner un arrangement revient à se donner une application injective  $f : [1, k] \rightarrow E$  et d'utiliser la propriété précédente. ■

**Remarque(s) 67 :** Pour cette raison, on pose parfois aussi  $A_p^k = 0$  si  $k > p$ .

**Exemple(s) 107 :**

- 107.1 Il y a autant de façons de distribuer une carte d'un jeu de 52 cartes à 5 joueurs différents que de 5-arrangements, c'est-à-dire  $A_{52}^5 = 311875200$  possibilités. Notez que c'est  $5! = 120$  fois plus que le nombre de mains de 5 cartes !
- 107.2 Comptons combien d'entiers naturels on peut écrire sans répétition de chiffres. Pour ceci, remarquons d'abord qu'il est impossible qu'un entier naturel de 11 chiffres ou plus s'écrive sans répétition. De plus, il y en a  $A_{10}^1 = 10$  à un chiffre,  $9 \times A_9^1$  à deux chiffres (il s'agit de ne pas commencer par un 0!),  $9 \times A_9^2$  à trois chiffres et ainsi de suite jusqu'à  $9 \times A_9^9$  à dix chiffres. Il y a donc :

$$10 + 9 \times \sum_{k=1}^9 A_9^k = 8877691$$

entiers que l'on peut écrire sans répétition de chiffres.

**Définition 9.3.60 :** Soit  $E$  un ensemble. On appelle permutation de l'ensemble  $E$  une application bijective de  $E$  dans  $E$ . On note  $\mathfrak{S}(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$ .

**Exemple(s) 108 :**

- 108.1 L'application  $\text{Id}_E$  est toujours une bijection de  $E$
- 108.2 en général, se donner une telle bijection revient à permuter les éléments de  $E$ , par exemple, l'application

$$f : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}, \quad f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$$

est une permutation de  $\mathfrak{S}(\{a, b, c\})$ .

**Propriété(s) 9.3.54 :** Supposons que  $E$  a  $p$  éléments. Alors :  $\text{Card}(\mathfrak{S}(E)) = p!$ .

**Démonstration :** Une application de  $E$  dans  $E$  est bijective si et seulement si elle est injective. Il y a donc exactement  $A_p^p = p!$  telles applications. ■

**Exemple(s) 109 :**

- 109.1 Il y a exactement  $\text{Card}(\mathfrak{S}([1, 9])) = 9! = 362880$  entiers que l'on peut écrire avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
- 109.2 Un jeu de 52 cartes peut être mélangé de  $52!$  façons différentes.

## Chapitre 10

# Continuité, dérivabilité

### 10.1 Limite d'une fonction

#### 10.1.1 Limites finies

**Définition 10.1.61 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soit  $l \in \mathbb{K}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  et on note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

**Proposition 10.1.11 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $I$ , qui tend vers  $a$ ,  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

**Démonstration :** Supposons que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$  et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $I$ , qui tend vers  $a$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par définitions :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |x_n - a| \leq \eta$$

on en déduit, pour  $n \geq n_0$  :  $|f(x_n) - l| \leq \epsilon$ . Donc  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

Supposons maintenant que  $f$  n'admet pas pour limite  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Alors :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta \in I, \quad |x_\eta - a| \leq \eta \text{ et } |f(x_\eta) - l| > \epsilon.$$

En particulier, en prenant  $\eta = 1/2^n$  et en posant  $x_n = x_\eta$  pour cette valeur de  $\eta$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $|x_n - a| \leq 1/2^n$  donc  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , mais pour tout entier naturel  $n$ ,  $|f(x_n) - l| > \epsilon$  donc  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $l$ . ■

**Remarque(s) 68 :** Cette proposition nous permet de transposer aux limites les résultats démontrés sur les suites.

En particulier :

1. La limite, si elle existe, est unique.
2. Les théorèmes algébriques sur les limites sont enfin justifiés.
3. On peut passer à la limite dans les inégalités larges.
4. On peut utiliser le théorème des gendarmes pour les fonctions.

Tous ses résultats se généraliseront également sans grand effort d'adaptation aux autres notions de limites que nous étudierons dans ce paragraphe.

**Exemple(s) 110 :**

110.1 Cette proposition est en particulier utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point. En particulier, la fonction partie entière n'admet pas de limite en tout point  $m \in \mathbb{Z}$  car :

$$\left\lfloor m - \frac{1}{2^n} \right\rfloor = m - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m - 1, \quad \text{et} \quad \left\lfloor m + \frac{1}{2^n} \right\rfloor = m \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m.$$

110.2 De même, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet pour limite 0 en 0, car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq f(x) \leq x.$$

Et il suffit alors d'utiliser le théorème des gendarmes.

110.3 Si  $a \in I$ , alors si  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , alors  $l = f(a)$ . Il suffit pour le voir d'utiliser la suite constante égale à  $a$ .

**Remarque(s) 69 :** On peut étendre la notion de limite à celle de limite à gauche et à droite : si  $f$  est définie sur  $]a, b[ \subset I$ , on dit que  $f$  admet  $l$  pour limite à droite en  $a$  et on note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad \underbrace{a < x \text{ et } |x - a| \leq \eta}_{\text{se réécrit } a < x \leq a + \eta} \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Et, de même on dit que  $f$  admet  $l$  pour limite à gauche en  $b$  et on note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} l$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad \underbrace{b > x \text{ et } |x - b| \leq \eta}_{\text{se réécrit } b > x \geq b - \eta} \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Si  $a \in I$ , on a alors immédiatement :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff \left[ f(a) = l, \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} l, \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l \right]$$

**Exemple(s) 111 :**

111.1 La fonction partie entière admet une limite à droite et à gauche en tout point.

111.2 Enfin, la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite à droite en 0, car, si  $n \geq 1$  :

$$f\left(\frac{1}{2\pi \times n}\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi \times n}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

111.3 On peut se servir des limites à droite et à gauche pour montrer l'existence d'une limite. Par exemple, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

admet une limite en tout  $m \in \mathbb{Z}$  :

$$(a) \quad \forall x \in ]m - 1, m[, \quad f(x) = m - 1 + \sqrt{x - m + 1} \xrightarrow{x \rightarrow m^-} m,$$

$$(b) \quad f(m) = m,$$

$$(c) \quad \forall x \in ]m, m + 1[, \quad f(x) = m + \sqrt{x - m} \xrightarrow{x \rightarrow m^+} m.$$



## 10.1.2 Notion de voisinage, limites infinies

**Notation(s) :** 1. Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $\bar{I}$ , l'ensemble des points *adhérents* à  $I$  et  $\overset{\circ}{I}$ , l'ensemble des points *intérieurs* à  $I$ , de la manière suivante :

$I$	$\bar{I}$	$\overset{\circ}{I}$
$[a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b[$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, +\infty[$	$[a, +\infty]$	$]a, +\infty[$
$]a, +\infty[$	$[a, +\infty]$	$]a, +\infty[$
$] - \infty, a]$	$[-\infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, a[$	$[-\infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, +\infty[$	$[-\infty, +\infty]$	$] - \infty, +\infty[$

2. Un voisinage de  $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$  dans  $I$ , est de la forme  $I \cap [a - \eta, a + \eta]$  ( $\eta > 0$ ).

3. Un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) est de la forme  $[A, +\infty[$  (resp.  $] - \infty, -A]$ ) où  $A \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 10.1.62 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $a \in \bar{I}$ , alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$  signifie :

Pour tout voisinage  $W$  de  $\lambda$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$ , tel que, si  $x \in V$  alors  $f(x) \in W$ .

De même,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda$  ( $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \lambda$ ) signifie :

Pour tout voisinage  $W$  de  $\lambda$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$ , si  $x \in V \cap ]a, +\infty[$  ( $x \in V \cap ] - \infty, a[$ ) on a  $f(x) \in W$ .

**Remarque(s) 70 :** On peut réécrire cette définition avec « des  $\epsilon$  et des  $\eta$  », par exemple :

1. ( $\lambda = +\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Et (limite à gauche)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ] - \infty, a[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Enfin (limite à droite)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ]a, +\infty[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

2. ( $\lambda = +\infty$ ,  $a = +\infty$ ) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

3. ... (les autres cas sont laissés en exercice)

**Exemple(s) 112 :**

112.1 Avec cette définition, on peut sans difficulté prouver l'unicité de la limite et les résultats algébriques du paragraphe 3.4.1. Montrons par exemple que si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \alpha > 0$$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$ . En effet, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , il existe  $B$  strictement positif tel que, si  $x \geq B$ ,  $f(x) \geq 2A/\alpha$ . Mais comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \alpha > 0$ , il existe  $B'$  strictement positif tel que, si  $x \geq B'$ ,  $|g(x) - \alpha| \leq \alpha/2$ , ce qui implique immédiatement  $g(x) \geq \alpha/2$ . On en déduit :

$$\forall x \geq \max(B, B'), \quad g(x) \times f(x) \geq (\alpha/2) \times (2A/\alpha) = A$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$ .

**Propriété(s) 10.1.55 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ ,  $a \in \bar{I}$ . On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty, \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$$

alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ .

**Démonstration :** Comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ , pour tout  $A \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $V$ , un voisinage de  $a$  tel que :

$$\forall x \in V, \quad g(x) \geq f(x) \geq A$$

donc  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ . ■

**Remarque(s) 71 :** Évidemment, on peut énoncer et prouver un résultat analogue pour  $-\infty$ , faites-le en exercice !

**Exemple(s) 113 :**

113.1 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - 1 \leq [x]$  donc, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty.$$

113.2 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\underbrace{e^{x-1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} \leq e^{x-\sin(x)}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$ .

**Définition 10.1.63 :** Soit  $a \in \bar{I}$ . Alors, on dit que  $f$  converge en  $a$  si  $f$  admet une limite finie en  $a$ . Sinon, on dit qu'elle diverge.

**Propriété(s) 10.1.56 :** Si  $f$  converge en  $a \in \bar{I}$ , alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$ .

**Démonstration :** Comme  $f$  converge vers  $l$ , une limite finie en  $a \in \bar{I}$  alors comme  $]l - 1, l + 1[$  est un voisinage de  $l$ , il existe  $V$  un voisinage de  $a$  tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \in ]l - 1, l + 1[.$$

En particulier,  $f$  est bornée sur  $V$ .

**Exemple(s) 114 :**

114.1 En général, il est possible que  $f$  diverge sans tendre vers  $\pm\infty$ , comme le montre la fonction définie pour  $x$  strictement positif par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Théorème 10.1.20 (de la limite croissante) :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application croissante. Alors :

1. (a) Si  $f$  est bornée sur un voisinage de  $b$ ,  $f$  admet une limite finie en  $b^-$  :  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \mathbb{R}$ ,  
 (b) sinon,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .
2. (a) Si  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$ ,  $f$  admet une limite finie en  $a^+$  :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ ,  
 (b) sinon,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

**Démonstration :** Nous ne prouverons que le premier point (le deuxième se prouve de la même façon) dans le cas  $b = +\infty$ . Supposons que  $f$  n'est bornée sur aucun voisinage de  $+\infty$ . Alors :

$$\forall B > 0, \forall M > 0, \exists x_0 \in ]B, +\infty[, \quad f(x_0) > M.$$

Comme  $f$  est croissante, ceci implique donc :

$$\forall M > 0, \exists x_0 > 0, \quad \forall x \in ]x_0, +\infty[, \quad f(x) \geq f(x_0) > M.$$

C'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .

Supposons maintenant  $f$  bornée sur un voisinage de  $+\infty$ , c'est-à-dire :

$$\exists M_0 > 0, \exists B_0 > 0, \quad \forall x \in ]B_0, +\infty[, \quad f(x) \leq B_0.$$

Alors, si l'on note  $l = \sup f(]B_0, +\infty[)$  (qui existe par le théorème de Dedekind et est un réel fini) et par définition de la borne supérieure,

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in ]B_0, +\infty[, \quad l - \epsilon \leq f(x_0)$$

donc comme  $f$  est croissante, :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 > 0, \forall x \in ]x_0, +\infty[ \quad \underbrace{l - \epsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq l}_{\text{donc } |f(x) - l| \leq \epsilon}$$

donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$ .

**Remarque(s) 72 :** 1. Évidemment, il existe une version de ce théorème pour les fonctions décroissantes. Sauriez-vous en donner un énoncé ?

2. Une fonction monotone admet donc en tout point une limite à droite et à gauche. Mais rien ne dit que ces limites sont les mêmes, comme l'indique l'exemple de la partie entière.

### 10.1.3 Notations de Landau

**Définition 10.1.64 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ ,  $x_0 \in \bar{I}$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $x_0$  on note :

1.  $f(x) \sim_{x_0} (g(x))$  si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ ,
2.  $f(x) = o_{x_0} (g(x))$  si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ,
3.  $f(x) = O_{x_0} (g(x))$  si  $\frac{f(x)}{g(x)}$  est bornée sur un voisinage de  $x_0$ .

- Remarque(s) 73 :**
1. Si  $x_0$  est clair dans le contexte (souvent,  $x_0 = 0$ ), on utilisera les notations sans l'indice  $x_0$ .
  2. La notation  $\sim$  (équivalent) est très dangereuse. En particulier, elle n'est pas compatible avec la somme :  $x \sim_{+\infty} x+1$ ,  $-x \sim_{+\infty} -x$  mais  $0 \not\sim_{+\infty} 1$ .
  3. La seule raison de préférer la relation  $\sim_{x_0}$  aux autres est qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur les fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage  $W$  de  $x_0$ .
  4. Heureusement, on n'en a pas vraiment besoin :

$$f(x) \sim_{x_0} g(x) \iff f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x)).$$

5. Clairement, si  $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ , alors  $f(x) = O_{x_0}(g(x))$ .

**Exemple(s) 115 :**

- 115.1 Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $x^\alpha \sim_{+\infty} x^\beta$  si et seulement si  $\alpha = \beta$ . De plus,  $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$  si et seulement si  $\alpha < \beta$ .
- 115.2 Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ , on rappelle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{a \times x}}{x^b} = +\infty \quad (1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b \times e^{a \times x} = 0 \quad (2),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \times |\ln(x)|^b = 0 \quad (4).$$

Ce qui se traduit, avec les notations de Landau :

$$x^b = o_{+\infty}(e^{a \times x}), \quad e^{a \times x} = o_{-\infty}(x^{-b})$$

$$(\ln(x))^b = o_{+\infty}(x^a), \quad (\ln(x))^b = o_{0^+}(x^{-a})$$

- 115.3  $x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O_0(x^2)$  mais également  $x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_0(x)$ .

- 115.4  $f(x) = o_{x_0}(1)$  signifie :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .  $f(x) = O_{x_0}(1)$  signifie : «  $f$  est bornée qu voisinage de 1 ».

**Propriété(s) 10.1.57 :** Les notations petit et grand  $O$  ont les propriétés suivantes :

1. somme et différence :

$$f_1 = O_a(\varphi) \text{ et } f_2 = O_a(\varphi) \implies f_1 \pm f_2 = O_a(\varphi)$$

$$f_1 = o_a(\varphi) \text{ et } f_2 = o_a(\varphi) \implies f_1 \pm f_2 = o_a(\varphi)$$

2. produits :

$$f_1 = O_a(\varphi_1) \text{ et } f_2 = O_a(\varphi_2) \implies f_1 \times f_2 = O_a(\varphi_1 \times \varphi_2)$$

$$f_1 = o_a(\varphi_1) \text{ et } f_2 = O_a(\varphi_2) \implies f_1 \times f_2 = o_a(\varphi_1 \times \varphi_2)$$

$$f_1 = O_a(\varphi_1) \text{ et } f_2 = o_a(\varphi_2) \implies f_1 \times f_2 = o_a(\varphi_1 \times \varphi_2)$$

$$f_1 = o_a(\varphi_1) \text{ et } f_2 = o_a(\varphi_2) \implies f_1 \times f_2 = o_a(\varphi_1 \times \varphi_2)$$

3. transitivité :

$$f = O_a(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = O_a(\varphi_2) \implies f = O_a(\varphi_2)$$

$$f = o_a(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = O_a(\varphi_2) \implies f = o_a(\varphi_2)$$

$$f = O_a(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = o_a(\varphi_2) \implies f = o_a(\varphi_2)$$

$$f = o_a(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = o_a(\varphi_2) \implies f = o_a(\varphi_2)$$

**Remarque(s) 74 :** Malheureusement, on ne peut rien dire pour les quotients en général, l'inverse d'une fonction bornée n'a aucune raison d'être bornée par exemple. Il faut cependant savoir « simplifier » :

$$\frac{o_{x_0}(f(x) \times g(x))}{f(x)} = o_{x_0}(g(x)) \quad \frac{O_{x_0}(f(x) \times g(x))}{f(x)} = O_{x_0}(g(x)).$$

## 10.2 Continuité

### 10.2.1 Définition et premières propriétés

**Définition 10.2.65 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  est continue en  $a \in I$  si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

et on dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

**Exemple(s) 116 :**

116.1 La fonction partie entière est continue sur tout intervalle du type  $]m, +1[$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) mais elle n'est continue sur aucun intervalle contenant un entier relatif.

**Remarque(s) 75 :** Parfois, on parlera de continuité à droite et à gauche en un point, ce qui est, bien-entendu relié aux limites à droite et à gauche.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de celles sur les limites :

**Propriété(s) 10.2.58 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ . Soit  $a \in I$ . On suppose  $f$  et  $g$  continues en  $a$  (resp. sur  $I$ ). Alors :

1.  $f + g$  est continue en  $a$
2.  $f \times g$  est continue en  $a$  (resp. sur  $I$ )
3. si  $g(a) \neq 0$  alors  $f/g$  est continue en  $a$  (resp. si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $f/g$  est continue sur  $I$ ).
4. si  $h$  est définie sur un intervalle contenant  $f(a)$  et continue en  $f(a)$  (resp. continue sur un intervalle contenant  $f(I)$ ) alors  $h \circ f$  est continue en  $a$  (resp.  $h \circ f$  est continue sur  $I$ ).

La caractérisation séquentielle de la limite se traduit également pour la continuité :

**Proposition 10.2.12 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x)$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $I$ , qui tend vers  $a$ ,  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ .

**Remarque(s) 76 :** Ceci justifie (avec un peu de retard) l'affirmation «  $f$  est continue en  $l$  » pour justifier que si  $u_n$  tend vers  $l$  est définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , alors  $l$  est un point fixe de  $f$ .

**Définition 10.2.66 :** Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I = [a, b[$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On suppose que  $f$  converge en  $b^-$ . On appelle prolongement par continuité de  $f$  en  $b$  le fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

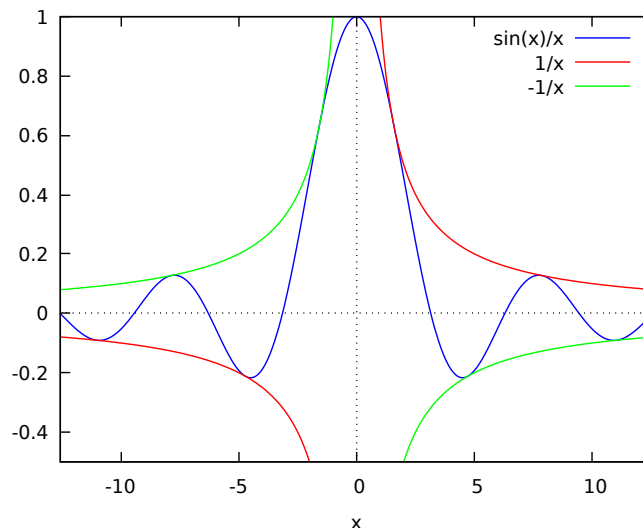
- Remarque(s) 77 :**
1. Évidemment, par définition, la fonction  $\tilde{f}$  est continue sur  $[a, b]$
  2. Il n'est pas possible de prolonger  $f$  en une extrémité en une fonction continue si  $f$  n'y admet pas de limite.
  3. Souvent, par abus, on notera encore  $f$  la fonction prolongée en  $a$ .
  4. Il est possible de prolonger de la même façon les fonctions continues sur un intervalle  $]a, b]$  et admettant une limite finie en  $a^+$ .

**Exemple(s) 117 :**

- 117.1 La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  (donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ ) par  $f(x) = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  se prolonge par continuité en 0 (à gauche et à droite) en posant  $f(0) = 0$ .
- 117.2 La fonction sinus cardinal, définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

se prolonge par continuité en 0 en posant  $g(0) = 1$ .



## 10.2.2 Continuité sur un intervalle

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  est noté  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I)$ .

**Théorème 10.2.21 (des valeurs intermédiaires v1) :** Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ ,  $a \leq b$  et  $f(a) \times f(b) \leq 0$ . Alors

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = 0$$

**Démonstration :** Notons que l'on peut toujours, quitte à remplacer  $f$  par  $-f$  supposer que  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \leq 0$ . Nous allons procéder par dichotomie. Pour ceci, on construit deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  de la façon suivante :

1. On pose  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$
2. si  $a_n$  et  $b_n$  existent, on pose :
  - (a) si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$ , on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ ,
  - (b) sinon, c'est-à-dire si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

On remarque alors que, par définition,  $(a_n)_{n \geq 0}$  est croissante et  $(b_n)_{n \geq 0}$  est décroissante, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \quad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

les trois premiers points nous assurent que les deux suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite  $l$  par le théorème des suites adjacentes. Quand aux dernières inégalités, comme  $f$  est continue en  $l$ , un passage à la limite nous assure que :  $f(l) \leq 0 \leq f(l)$  donc que  $f(l) = 0$ . ■

**Théorème 10.2.22 (des valeurs intermédiaires v2) :** Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle, c'est-à-dire, par la caractérisation des intervalles de  $\mathbb{R}$  si  $a$  et  $b$  sont deux éléments, de  $I$  et  $c$  un réel tel que  $f(a) \leq c \leq f(b)$  alors

$$\exists d \in I, f(d) = c.$$

**Démonstration :** Il suffit de considérer la fonction définie sur  $I$  par  $g(x) = f(x) - c$  et d'y appliquer le théorème précédent. ■

Voyons quelques applications classiques de ce théorème.

**Exemple(s) 118 :**

118.1 Soit  $n \geq 1$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = x^n + x - 1.$$

Montrons que  $f_n$  s'annule en un unique point de  $\mathbb{R}_+$ . En effet, cette fonction est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = n \times x^{n-1} + 1 > 0$$

elle est donc strictement croissante, donc elle s'annule au plus une fois sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, elle est continue sur  $[0, 1]$ , vaut  $-1$  en  $0$  et  $1$  en  $1$ . Donc par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists! u_n \in [0, 1], \quad f_n(u_n) = 0.$$

De plus, si  $0 \leq a < 1$ ,  $f_n(a)$  tend vers  $a - 1 < 0$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad f_n(a) < 0$$

mais alors, par croissance stricte de  $f_n$ , comme  $f_n(u_n) = 0$ ,  $1 \geq u_n \geq a$ , ce qui montre  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

118.2 Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Alors  $f$  admet un point fixe. En effet, la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$  est continue et vérifie  $g(0) = f(0) \geq 0$  et  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ , elle s'annule donc, c'est-à-dire :

$$\exists c \in [0, 1], \quad f(c) = c.$$

118.3 Soit  $P$  une application polynomiale de degré impair, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$  des réels tels que  $a_{2n+1} \neq 0$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \times x^k$$

alors  $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$  où  $\pm$  est le signe de  $a_{2n+1}$  et  $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \mp\infty$  où le signe qui apparaît est celui de  $-a_{2n+1}$  donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue sur  $\mathbb{R}$   $P$  s'annule en un point de  $\mathbb{R}$  :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad P(c) = 0.$$

**Théorème 10.2.23 (des bornes) :** Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . On suppose que  $I$  est un segment  $[a, b]$ . Alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et elle y atteint ses bornes :

$$\exists (u, v) \in [a, b]^2, \quad f([a, b]) = [f(u), f(v)].$$

**Démonstration :** Commençons par remarquer que par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f([a, b])$  est un intervalle. Notons  $\beta$  sa borne supérieure. Alors, il existe  $(y_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $f([a, b])$  telle que  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$ <sup>1</sup>. Mais comme ce sont des éléments de  $f([a, b])$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], \quad f(x_n) = y_n.$$

1. Il faut faire deux cas, suivant si  $\beta$  est fini ou infini

La suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite convergente, notons-la  $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ , qui tend vers une limite  $u$ , appartenant à  $[a, b]$  par passage à la limite dans les inégalités. Alors, comme  $f$  est continue en  $u$ ,

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(u)$$

mais  $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  est une suite extraite de  $(y_n)_{n \geq 0}$  donc elle tend aussi vers  $\beta$ . Ainsi,  $\beta = f(u)$  et l'on procède de même pour la borne inférieure. ■

**Remarque(s) 78 :** Attention! Le résultat de ce théorème est faux en général si la fonction  $f$  n'est pas définie sur un segment. On le voit par exemple en considérant la fonction définie que  $[0, 1[$  par  $f(x) = x$ .

### Exemple(s) 119 :

119.1 Montrons qu'une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  est bornée. En effet, par le théorème des bornes,  $f$  est bornée sur  $[0, P]$ , où  $P$  est sa période et comme elle est périodique,  $f(\mathbb{R}) = f([0, P])$ .

119.2 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrons que  $f$  admet un minimum global, c'est-à-dire que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(a).$$

Soit  $m = f(0)$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

il existe  $(c, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$  tels que :

$$\forall x \leq b, f(x) \geq m \text{ et } \forall x \geq c, f(x) \geq m.$$

On pose alors  $I = [b, c]$ . Clairement,  $0 \in I$ . Par le caractère borné des fonctions continues sur un segment, l'image de  $I$  par  $f$  est un segment, que l'on note  $[i, s]$ . En particulier, si on note  $a$  un élément de  $I$  tel que  $f(a) = i$ , on a :

$$\forall x \in I, f(x) \geq i = f(a)$$

Mais comme  $0 \in I$  :

$$\forall x \notin I, f(x) \geq f(0) \geq f(a).$$

Le réel  $a$  est donc un minimum global pour  $f$ .

119.3 Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et surjective. Montrons que  $f$  s'annule une infinité de fois.

Comme  $f$  est surjective, il existe  $a \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(a_0) = 0$ . Par le caractère borné des fonctions continues sur un segment, on a alors que  $f([0, a_0]) = [i, s]$  est un segment. Comme  $f$  est surjective, il existe alors  $b_0$  et  $c_0$  tels que  $f(b_0) = i - 1$  et  $f(c_0) = s + 1$ . Par définition de  $i$  et  $s$ ,  $b_0 > a_0$  et  $c_0 > a_0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'un  $a_1 > a_0$  tel que  $f(a_1) = 0$ . On itère alors l'opération, ce qui nous donne pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_0 < a_1 < \dots < a_n, f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0.$$

La fonction  $f$  s'annule donc une infinité de fois.

**Théorème 10.2.24 (continuité de la fonction réciproque) :** Soit  $f$  une application strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ . De plus,  $f^{-1}$  est également strictement monotone, de même monotonie que  $f$  et si  $f$  est continue,  $f^{-1}$  aussi.

**Démonstration :** On peut supposer, quitte à remplacer  $f$  par  $-f$  que  $f$  est strictement croissante. Elle est alors injective et surjective si on la co-restreint à  $f(I)$ . L'application  $f^{-1}$  existe donc. De plus,  $f$  est croissante donc :

$$\forall (a, b) \in I^2, a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

donc, en prenant, pour  $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$ ,  $a = f^{-1}(\alpha)$  et  $b = f^{-1}(\beta)$ , par contraposée :

$$\alpha = f(f^{-1}(\alpha)) > f(f^{-1}(\beta)) = \beta \implies f^{-1}(\alpha) > f^{-1}(\beta)$$



l'application  $f^{-1}$  est donc strictement croissante. Supposons de plus  $f$  continue. Il est alors légitime de se poser la question de la continuité de  $f^{-1}$  car  $f(I)$  est un intervalle. Soit  $\gamma \in f(I)$ . Alors, par le théorème de la limite monotone,  $f^{-1}$  admet une limite à droite et à gauche en  $\gamma$ . De plus, si  $y < \gamma < y'$ ,

$$f^{-1}(y) < \lim_{y \rightarrow \gamma^-} f^{-1} \leq f^{-1}(\gamma) \leq \lim_{y \rightarrow \gamma^+} f^{-1} < f^{-1}(y')$$

On en déduit, en appliquant  $f$  à cette inégalité :

$$y < f(\lim_{y \rightarrow \gamma^-} f^{-1}) \leq \gamma \leq f(\lim_{y \rightarrow \gamma^+} f^{-1}) < y'.$$

En faisant tendre  $y$  et  $y'$  vers  $\gamma$  dans cette inégalité (on utilise ici que  $f(I)$  est un intervalle), on en déduit :

$$f(\lim_{y \rightarrow \gamma^-} f^{-1}) = \gamma = f(\lim_{y \rightarrow \gamma^+} f^{-1}),$$

puis, en appliquant  $f^{-1}$  à cette égalité,  $\lim_{y \rightarrow \gamma^-} f^{-1} = f^{-1}(\gamma) = \lim_{y \rightarrow \gamma^+} f^{-1}$ . La fonction  $f^{-1}$  est donc continue. ■

**Remarque(s) 79 :** 1. Dans la preuve, l'hypothèse de continuité de  $f$  n'a servi que pour montrer que  $f(I)$  est un intervalle, il s'agit de la « bonne » hypothèse du théorème.

2. Il n'est pas nécessaire que  $f$  soit monotone pour qu'elle soit bijective, comme le montre par exemple la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + x \quad \text{si } x \in [-1, 0[, \quad f(x) = x - 1 \quad \text{si } x \in [0, 1].$$

### Exemple(s) 120 :

120.1 Les fonctions trigonométriques réciproques sont donc continues.

## 10.3 Dérivabilité

### 10.3.1 Définition et premières propriétés

Dans la suite,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Rappelons que :

**Définition 10.3.67 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On la note alors  $f'(x_0)$ . On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout  $x_0 \in I$ .

**Remarque(s) 80 :** On peut également prendre des limites à droite ou à gauche. on parle dans ce cas de dérivée à droite ou à gauche.

### Exemple(s) 121 :

121.1 La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0, de dérivée  $f'(0) = 0$ . En effet, si  $x \neq 0$  :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \times \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

par le théorème des gendarmes.

**Propriété(s) 10.3.59 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . Alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $\delta = f'(x_0)$  si et seulement si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + o_0(h).$$

**Démonstration :** Il s'agit essentiellement de poser  $h = x - x_0$ , puis de procéder par double implication. ■

**Remarque(s) 81 :** 1. En particulier, si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , elle est continue en  $x_0$ .

2. Attention cependant, il est possible qu'une fonction soit continue en un point mais qu'elle n'y soit pas dérivable ; considérons par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $f$  est continue en 0, comme nous l'avons déjà vu, mais elle n'y est pas dérivable, si  $x \neq 0$  :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite en 0.

Nous allons maintenant démontrer les propriétés algébriques de la dérivation, c'est-à-dire :

**Propriété(s) 10.3.60 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivables sur  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors

1.  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$ .
2.  $k.f$  est dérivable sur  $I$  et  $(k.f)' = k.f'$ .
3.  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

4. Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f/g$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

5. Si  $u : J \supset f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , est dérivable sur  $J$ , alors  $u \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(u \circ f)' = (u' \circ f) \times f'.$$

6. Si  $f$  est strictement monotone, et  $f'$  ne s'annule pas<sup>2</sup>, alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(I)$  et :

$$\forall y \in f(I), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Démonstration :** Dans toute la preuve, nous omettrons le 0 en indice des « petit et grands  $o$  ». Soit  $x_0 \in I$ . Alors, comme  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h), \quad g(x_0 + h) = g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h)$$

1. On en déduit :

$$f(x_0 + h) + g(x_0 + h) = f(x_0) + g(x_0) + h \times (f'(x_0) + g'(x_0)) + \underbrace{o(h) + o(h)}_{=o(h)}$$

donc  $f + g$  est dérivable en  $x_0$ , de dérivée  $f'(x_0) + g'(x_0)$

---

2. on peut montrer que, même si elle n'est pas continue, la dérivée d'une fonction vérifie le théorème des valeurs intermédiaires donc que cette hypothèse implique la stricte monotonie de  $f$

2. c'est un cas particulier de 3,

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) \times g(x_0 + h) &= (f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) \times (g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h)) \\ &= f(x_0) \times g(x_0) + (f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)) \times h + \underbrace{O(h^2) + o(h) \times O(h) + O(h) \times o(h)}_{=o(h)} \end{aligned}$$

donc  $f + g$  est dérivable en  $x_0$ , de dérivée  $f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)$ .

4. On a déjà vu au moment des fonctions complexes que cette formule est une conséquence de la précédente.

5. Il s'agit ici de remarquer que  $u$  est dérivable en  $f(x_0)$  donc que, pour  $k$  au voisinage de 0 :

$$u(f(x_0) + k) = u(f(x_0)) + u'(f(x_0)) \times k + o(k).$$

On en déduit :

$$u(f(x_0 + h)) = u(f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) = u(f(x_0)) + u'(f(x_0)) \times (h \times f'(x_0) + o(h)) + o(O(h))$$

Donc  $u(f(x_0 + h)) = u(f(x_0)) + h \times u'(f(x_0)) \times f'(x_0) + o(h)$ . Le fonction  $u \circ f$  est dérivable en  $x_0$ , de dérivée  $u'(f(x_0)) \times f'(x_0)$ .

6. On pose  $y_0 = f(x_0)$  et  $y = f(x)$  ( $y \neq y_0$ ). On a :

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}$$

mais comme  $x = f^{-1}(y)$  et comme  $f$  est continue (car dérivable), strictement monotone, lorsque  $y$  tend vers  $y_0$ ,  $x$  tend vers  $x_0$  donc comme  $f'(x_0) \neq 0$  :

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

■

### 10.3.2 Propriétés des fonctions dérivables

**Définition 10.3.68 :** Soit  $a \in I$ . On dit que  $a$  est un :

1. *maximum local* pour  $f$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \leq f(a)$$

2. *minimum local* pour  $f$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :

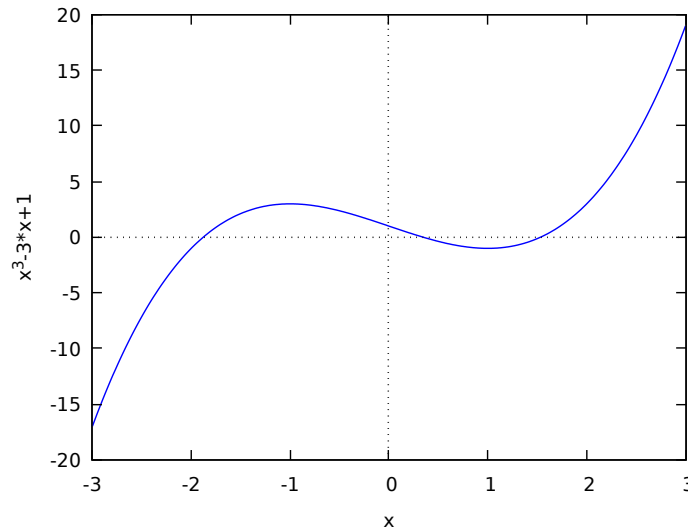
$$\forall x \in V, \quad f(x) \geq f(a)$$

3. *est un extremum local* si c'est un minimum ou un maximum local.

#### Exemple(s) 122 :

122.1 0 est un minimum local (et global) pour la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

122.2 La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  admet en  $-1$  un maximum local mais pas global et en  $1$  un minimum local mais pas global :



**Propriété(s) 10.3.61 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . Si  $a \in \overset{\circ}{I}$  est un extremum local de  $f$ , alors  $f'(a) = 0$ .

**Démonstration :** Supposons par exemple que  $a$  est un maximum local. Alors, il existe un voisinage de  $a$  (qui contient des réels de  $I$  inférieurs et supérieurs à  $a$  comme  $a \in \overset{\circ}{I}$ ) tel que :  $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ . On en déduit :

$$\forall x \in V \cap ]-\infty, a[, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in V \cap ]a, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

en passant à la limite ) gauche, puis à droite et en utilisant que le taux d'accroissement admet une limite en  $a$ , on en déduit  $f'(a) \geq 0$  et  $f'(a) \leq 0$  donc  $f'(a) = 0$ . ■

**Remarque(s) 82 :**

1. Attention, il est possible que la fonction  $f$  admette une dérivée nulle en un point mais que ce ne soit pas un extremum local, comme le montre l'exemple de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .
2. Attention aussi aux bornes, qui ne sont pas « vues » par le théorème. La fonction  $f : x \in [0, 1] \mapsto x$  admet par exemple un maximum et un minimum aux bornes de l'intervalle, et sa dérivée ne s'y annule pas.
3. Ce théorème nous donne une façon de limiter le nombre de points à traiter lorsqu'on cherche un maximum ou un minimum d'une fonction.

**Théorème 10.3.25 (Rolle) :** Soit  $a < b$  deux réels. Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = f(b)$ . Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, \quad f'(c) = 0$$

**Démonstration :** Par le théorème des bornes, la fonction  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $[a, b]$ . Si ce sont les mêmes, la fonction est constante et sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle. S'ils sont différents, comme  $f(a) = f(b)$ , au moins un des deux est à l'intérieur de l'intervalle. Par la propriété précédente, la fonction dérivée s'annule alors en ce point. ■

**Remarque(s) 83 :** N'oubliez pas que la fonction doit être continue sur  $[a, b]$  (et non  $]a, b[$ ), comme le montre la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Elle est continue et dérivable sur  $]0, 1[$ , de dérivée constamment égale à 1.

**Exemple(s) 123 :**

- 123.1 Une fonction périodique dérivable sur  $\mathbb{R}$  s'annule au moins une fois par période.
- 123.2 On peut aussi adapter un peu la preuve. Si une application dérivable sur  $\mathbb{R}$  admet pour limite  $+\infty$  en  $\pm\infty$ , elle admet un minimum global donc en ce point, sa dérivée s'annule.
- 123.3 On peut (parfois) repérer un exercice utilisant le théorème de Rolle par ses hypothèses. Par exemple soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soit  $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Montrons que :

$$\exists c \in ]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c - d}.$$

En effet, la fonction :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - d}$$

est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et  $g(a) = g(b) = 0$  donc par le théorème de Rolle,

$$\exists c \in ]a, b[, \quad \frac{f'(c) \times (c - d) - f(c)}{(c - d)^2} = g'(c) = 0$$

et le résultat s'en déduit immédiatement.

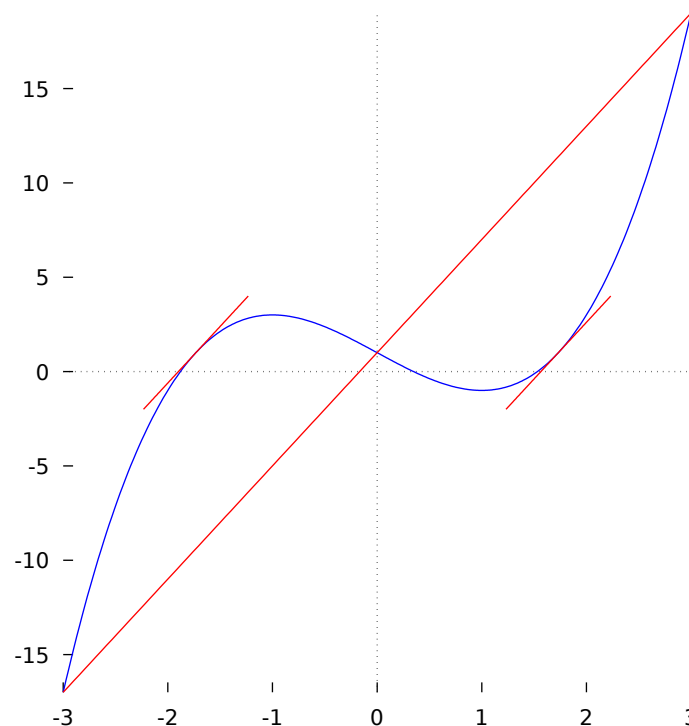
**Théorème 10.3.26 (égalité des accroissements finis) :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ , dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . Soit  $(a, b) \in I^2$ ,  $a < b$ . Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a).$$

**Démonstration :** Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a).$$

■



**Exemple(s) 124 :**

124.1 La première utilisation de ce résultat est qu'il justifie le lien entre dérivée et monotonie : soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I$ , dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . On a :

$$\begin{aligned} f' \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ croissante sur } I \\ f' \leq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ décroissante sur } I \\ f' = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ constante sur } I \\ f' > 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\implies f \text{ strictement croissante sur } I \\ f' < 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\implies f \text{ strictement décroissante sur } I \end{aligned}$$

124.2 L'égalité des accroissements finis permet aussi de démontrer des inégalités : montrons par exemple que :

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.$$

En effet, l'inégalité est clairement vraie si  $x = 0$  et si  $x \neq 0$ , en utilisant l'égalité des accroissements finis à la fonction continue sur  $[0, x]$ , dérivable sur  $]0, x[$  :

$$\exists c \in ]0, x[, \quad \arctan(x) = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c) \times (x - 0) = \frac{x}{1+c^2}$$

et il reste à remarquer que, comme  $c \in ]0, x[$  :

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq 1.$$

**Définition 10.3.69 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|.$$

**Propriété(s) 10.3.62 :** (Inégalité des accroissements finis) Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $|f'|$  est majorée par  $k$  sur  $]a, b[$ . Alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ .

**Démonstration :** Soit  $(x, y) \in I^2$ . Alors, par l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in I, \quad f(x) - f(y) = f'(c) \times (x - y)$$

on en déduit :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |x - y| \leq k \times |x - y|.$$

■

**Exemple(s) 125 :**

125.1 Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x, y \leq 2$ . Alors :

$$|e^x - e^y| \leq e^2 \times |x - y|$$

il suffit de remarquer que, si  $f(x) = e^x$ ,  $|f'(x)| = e^x \leq e^2$  pour tout  $x \leq 2$ .

125.2 Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

car pour tout réel  $x$ ,  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ .

**Propriété(s) 10.3.63 :** Soit  $f$  une application définie sur  $I$ ,  $k$ -lipschitzienne,  $\boxed{k < 1}$ . On suppose que l'intervalle  $I$  est stable par  $f$ . On suppose que  $l \in I$  est un point fixe de  $f$ . Alors les suites définies par :

$$u_0 \in I, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

tendent vers  $l$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Démonstration :** On montre par récurrence sur  $n$  que :

$$|u_n - l| \leq k^n \times |u_0 - l|$$

l'initialisation est claire et l'hérédité vient du fait que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne :

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k \times |u_n - l|$$

il suffit alors de remarquer que comme  $k$  est strictement inférieur à 1,  $k^n$  tend vers 0. ■

**Remarque(s) 84 :** 1. Cette propriété montre (indirectement) que le point fixe sur  $I$  est unique ; on peut cependant le remarquer directement : si  $l$  et  $l'$  sont deux points fixes, alors :

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| < k \times |l - l'|$$

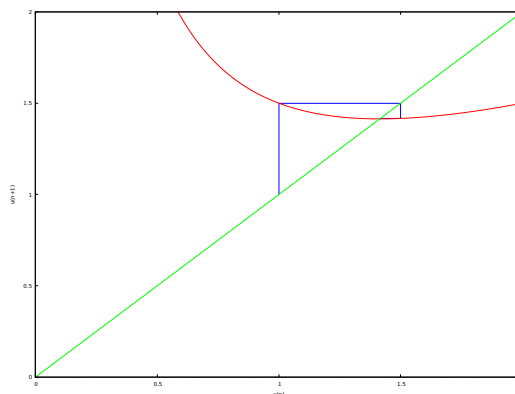
donc  $l = l'$ .

2. On peut de plus montrer grâce à une telle suite que  $f$  admet toujours un point fixe, mais ce résultat théorique nous sera inutile dans la pratique, nous calculerons toujours le point fixe explicitement pour déterminer la limite.
3. Notez que la convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $l$  est très rapide (en  $O(k^n)$ , on dit qu'elle est exponentielle).

### Exemple(s) 126 :

126.1 Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right).$$



Clairement,  $\mathbb{R}_+^*$  est stable pour  $f$ . De plus,  $f$  est dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right).$$

On remarque alors que  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  si  $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$  qu'il s'agit d'un intervalle stable et que si  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $u_1 \in [\sqrt{a}, +\infty[$ . Par l'inégalité des accroissements finis,  $f$  est alors continue,  $1/2$ -lipschitzienne sur cet intervalle donc, comme  $\sqrt{a}$  est le point fixe de  $f$  sur cet intervalle :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a}.$$

**Théorème 10.3.27 (de prolongement de la dérivée) :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ , dérivable en tout point de  $I \setminus \{a\}$ . On suppose que  $f'$  admet pour limite  $l$  en  $a$ . Alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

autrement dit,  $f$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $l$ .

**Démonstration :** Par le théorème des accroissements finis, que l'on peut appliquer car  $f$  est continue sur  $I$  et dérivable en tout point de  $I \setminus \{a\}$  si  $x \neq a$  est un élément de  $I$ ,

$$\exists c_x \in ]\min(x, a), \max(x, a)[ \cap I, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

notons en particulier que  $|c_x - a| \leq |x - a|$ . Comme  $f'$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , si  $\epsilon > 0$  est fixé,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f'(x) - l| \leq \epsilon.$$

En particulier, si  $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \eta$  :

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| = |f'(c_x) - l| \leq \epsilon.$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

■

### Exemple(s) 127 :

127.1 La fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \times \ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet, elle est continue sur  $\mathbb{R}_+$  par théorème de comparaison, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et toujours par comparaison :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2x \times \ln(x) + x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

## 10.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

**Définition 10.3.70 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  si  $f$  y est  $n$  fois dérivable et que  $f^{(k)}$ , sa dérivée  $n$ -ième, est continue sur  $I$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n$ , on dit qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### Exemple(s) 128 :

128.1 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est par une récurrence immédiate de classe  $\mathcal{C}^{(n-1)}$  sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $(n-1)$ -ième

$$f^{(n-1)}(x) = \begin{cases} n! \times x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

mais elle n'est pas  $n$  fois dérivable : le taux d'accroissement de  $f^{(n-1)}$  en 0 tend à droite vers  $n!$  et à gauche vers 0.



128.2 La fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée non continue en 0. En effet, par le théorème des gendarmes,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et pour tout  $x \neq 0$  :

$$f'(x) = \underbrace{2x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'a pas de limite en 0}}$$

128.3 Il existe de même pour tout  $n$  non nul des fonctions  $n$  fois dérivables, de dérivée  $n$ -ième non continue. Par exemple, si  $n = 2$ , la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} x^4 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  (par le théorème des gendarmes en 0), de plus, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f$  est dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = 4x^3 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc par le théorème de prolongement de la dérivée,  $f$  est dérivable en 0, puis de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, elle est deux fois dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$  et par le théorème des gendarmes :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 4x^2 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, pour tout  $x \neq 0$  :

$$f''(x) = \underbrace{12x^2 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 8x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'a pas de limite en 0}}.$$

Si l'on note  $\mathcal{D}^n$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$ , on a donc les inclusions suivantes, dont chacune n'est pas une égalité :

$$\boxed{\mathcal{C}(I) \supsetneq \mathcal{D}(I) \supsetneq \mathcal{C}^1(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{D}^n(I) \supsetneq \mathcal{C}^n(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{C}^\infty(I)}.$$

**Propriété(s) 10.3.64 :** Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , si  $k \in \mathbb{R}$  et si  $h$  est  $n$  fois dérivable sur un intervalle  $J \supset f(I)$ , alors

1.  $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,
2.  $k.f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,
3.  $f \times g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,
4. si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,
5.  $h \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,
6. si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

**Démonstration :** Il s'agit à chaque fois d'une récurrence bien posée. Montrons par exemple la propriété qui concerne la composition. Montrons par récurrence sur  $n$  que :

Pour toute fonctions  $f$  et  $h$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  (resp.  $J \supset f(I)$ )  $h \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

C'est vrai pour  $n = 1$ , c'est le résultat de dérivation et le fait que  $f' \times h' \circ f$  est continue car  $f'$ ,  $h'$  et  $f$  le sont. Pour l'hérédité, on remarque que, si  $f$  et  $h$  sont de classe  $\mathcal{C}^{N+1}$  alors :

$$(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$$

est de classe  $\mathcal{C}^N$  en utilisant l'hypothèse de récurrence pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^N$   $h'$  et  $f$  et le fait que le produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^N$  est de classe  $\mathcal{C}^N$ .

**Exemple(s) 129 :**

129.1 La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $n$ -ième :  $\exp^{(n)} = \exp$ ,

129.2 Les fonctions cos et sin sont infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $n$ -ième :

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n = 4k \\ \cos(x) & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\sin(x) & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\cos(x) & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } n = 4k \\ -\sin(x) & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\cos(x) & \text{si } n = 4k + 2 \\ \sin(x) & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}.$$

129.3 On en déduit que la fonction tangente, puis les fonctions logarithme et trigonométrique réciproque sont infiniment dérivables sur leur domaine de dérivabilité.

129.4 Les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  : il suffit en effet par les théorèmes généraux de le montrer pour les fonctions monômes :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k} \quad \forall k \geq n+1, \quad (x^n)^{(k)} = 0.$$

**Théorème 10.3.28 (formule de Leibniz) :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$ , alors

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

*Démonstration :* Si  $n = 0$ , c'est clair. Traitons l'hérédité. Si la formule est vraie pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, alors :

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}) \\ &= f^{(n+1)} \times g^{(0)} + f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{= \binom{n+1}{k} \text{ Pascal}} \times f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \times f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

**Remarque(s) 85 :** Notez que l'on peut retrouver la formule du binôme de Newton à partir de cette formule en prenant  $f(x) = \exp(a \times x)$  et  $g(x) = \exp(b \times x)$ .

**Exemple(s) 130 :**

130.1 Calculons la dérivée  $n$ -ième de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x^2 + 1) \times \exp(2x)$$

par la formule de Leibniz, on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (x^2 + 1)^{(k)} \times \exp(2x)^{(n-k)} = (4x^2 + 4x \times n + n^2 - n + 4) \times 2^{n-2} \times \exp(2x).$$

### 10.3.4 Extension aux fonctions complexes.

Nous avons déjà vu que les théorèmes généraux de dérivation s'étendent facilement aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes *via* la règle de calcul :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + \operatorname{Im}(f)'(x)i.$$

Il faut cependant faire attention pour les théorèmes qui concernent les propriétés des fonctions dérivables. Par exemple, le théorème de Rolle est faux, comme le montre la fonction :

$$f : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

qui est continue sur  $[0, 2\pi]$ , dérivable sur  $]0, 2\pi[$ , vérifie  $f(0) = f(2\pi) = 1$  mais :

$$\forall \theta \in ]0, 2\pi[, \quad f'(\theta) = ie^{i\theta} \neq 0.$$

Cependant, certaines applications de ces théorèmes sont encore vraies, par exemple, en utilisant le résultat réel sur ses parties réelles et imaginaires si  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  :

$$f' = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} \iff f \text{ constante sur } I.$$

De façon moins triviale :

**Théorème 10.3.29 (inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes) :** Soit  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose qu'il existe une constante  $k$  telle que :

$$\forall x \in ]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k.$$

Alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|.$$

**Démonstration :** Si  $f(x) = f(y)$ , il n'y a rien à faire. Sinon, soit  $\theta$  un argument de  $f(x) - f(y)$ . Alors :  $f(x) - f(y) = e^{i\theta} \times |f(x) - f(y)|$ . Alors : si l'on pose :

$$g(t) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \times f(t))$$

la fonction  $g$  est réelle, à valeurs réelles, et vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis car la partie réelle d'une fonction complexe dérivable est par définition dérivable. De plus :

$$|g'(t)| = |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} \times f'(t))| \leq |e^{-i\theta} \times f'(t)| = |f'(t)| \leq k$$

donc :

$$|f(x) - f(y)| = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \times (f(y) - f(x))) = g(y) - g(x) \leq k \times |x - y|.$$

■

Pour les applications à la physique, il est intéressant de se poser la question du passage en coordonnées polaires :

**Propriété(s) 10.3.65 :** (théorème de relèvement) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas. Alors il existe  $\rho$  et  $\theta$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) telles que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \rho(t) \times e^{i\theta(t)}$$

**Démonstration :** Posons  $u$  la partie réelle de  $f$  et  $v$  sa partie imaginaire. Clairement,  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$  convient. On peut donc supposer que  $f$  est de module égal à 1 dans la suite.

1. analyse : cherchons  $\theta$ . La formule :  $f(t) = e^{i\theta(t)}$  implique, après dérivation :

$$f'(t) = i\theta'(t) \times f(t)$$

ou encore  $\theta'(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)}$  mais cette fonction est continue sur  $I$  donc (on l'a déjà énoncé, on le démontrera dans le chapitre intégration) elle admet une primitive.

2. synthèse : notons  $\theta(t)$  une primitive de  $-i \frac{f'(t)}{f(t)}$  sur  $I$ . Alors, si  $g(t) = f(t) \times e^{-i\theta(t)}$ ,

$$g'(t) = (f'(t) - i\theta'(t) \times f(t)) \times e^{-i\theta(t)} = 0$$

il existe alors un complexe non nul, de module 1 :  $z_0 = e^{i\theta_0}$  tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i(\theta(t) + \theta_0)}.$$

■

**Remarque(s) 86 :** Attention,  $\theta$  n'est à priori pas à valeurs dans  $[0, 2\pi[$ , faire un tel choix créerait des « sauts » de discontinuité à chaque « tour de 0 » effectué par la fonction  $f$ .

## 10.4 Développements limités

### 10.4.1 Définition et premières propriétés

Dans tout le paragraphe, on notera simplement  $o$  pour  $o_0$  et  $O$  pour  $O_0$ .

**Définition 10.4.71 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $x_0 \in I$ , on dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , si, il existe des réels  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k \times h^k + o(h^n) = a_0 + a_1 \times h + \dots + a_n \times h^n + o(h^n).$$

On peut aussi écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \times (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

**Propriété(s) 10.4.66 :** Si  $f$  possède un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors celui-ci est unique.

**Démonstration :** Supposons connus deux développements distincts, on a alors :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k \times h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^n b_k \times h^k + o(h^n).$$

Comme les deux développements sont supposés distincts, on peut introduire :

$$p = \min \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq b_k\}.$$

On a alors, lorsque  $h \neq 0$  :

$$a_p - b_p = \sum_{k=p+1}^n (b_k - a_k) \times h^{k-p} + o(h^{n-p}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Donc ;  $a_p = b_p$ , ce qui est absurde par définition de  $p$ .

■

**Remarque(s) 87 :** 1. On en déduit que, si  $f$ , définie sur un voisinage  $I$  de 0, admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  et que de plus :

- (a)  $f$  est *paire* alors, les coefficients impairs du développement limité seront nuls ;
- (b)  $f$  est *impaire* alors, les coefficients pairs du développement limité seront nuls.
- 2.  $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en  $x_0$  si, et seulement si,  $f$  est continue en  $x_0$ .
- 3.  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $x_0$  si, et seulement si,  $f$  est dérivable en  $x_0$ .
- 4. En revanche, l'existence d'un développement limité d'ordre  $n \geq 2$  au voisinage de  $x_0$  ne garantit rien de plus que la dérivabilité en  $x_0$  ! En effet, la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \times \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , mais n'a pas de dérivée seconde en 0.

**Exemple(s) 131 :**

131.1 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(1-x) \times \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$$

on en déduit immédiatement le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

131.2 De ce développement limité, on déduit :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \times x^k + o(x^n)$$

**10.4.2 Théorèmes d'existence**

**Théorème 10.4.30 (primitivation de développements limités) :** Supposons que  $f$  admette en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$  :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k \times h^k + o(h^n).$$

Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors  $F$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$  en  $x_0$  :

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \times h^{k+1} + o(h^{n+1}).$$

**Démonstration :** On pose :

$$G(h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \times h^{k+1}$$

alors par définition,  $G$  est dérivable,  $G(0) = 0$  et

$$G'(h) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^n a_k \times h^k = o(h^n).$$

Mais, par l'égalité des accroissements finis, si  $h \neq 0$ ,

$$\exists c_h \in ]\min(0, h), \max(0, h)[, \quad G(h) = G(h) - G(0) = G'(c_h) \times h$$

Mais par définition,  $c_h = O(h)$  donc  $G'(c_h) = o((O(h))^n) = o(O(h^n)) = o(h^n)$  et l'on en déduit :  $G(h) = o(h^{n+1})$  ce qui est exactement le résultat attendu. ■

**Exemple(s) 132 :**

132.1 Ce théorème nous donne le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times x^k + o(x^n)$$

132.2 Ainsi que, comme :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \times x^{2k} + o(x^{n-1})$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} \times x^{2k+1} + o(x^n)$$

**Théorème 10.4.31 (Taylor-Young) :** Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable ( $n \in \mathbb{N}$ ) sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0 \in I$ , alors

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k + o(h^n),$$

ou, encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

**Démonstration :** Procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , il s'agit d'une caractérisation de la continuité en 0. Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}$  fixé et  $f$  une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$ . Posons :

$$G(h) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k$$

alors la fonction  $G$  est dérivable sur  $I$  et vérifie :

$$G'(h) = f'(x_0 + h) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \times h^{k-1} = f'(x_0 + h) - \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k.$$

donc par l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction  $f'$ , qui est  $n$  fois dérivable :  $G'(h) = o(h^n)$ . Par le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit :

$$f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k = G(h) = G(0) + o(h^{n+1}) = o(h^{n+1})$$

ce qui achève de montrer l'hérédité. ■

**Remarque(s) 88 :** 1. Attention ! Contrairement au théorème précédent, pour que celui-ci soit vrai, il est nécessaire que la fonction  $f$  soit  $n$  fois dérivable.

2. À condition que la fonction  $f$  soit  $n$  fois dérivable, il est donc possible de dériver un développement limité à l'ordre  $n$ . Mais c'est un résultat non trivial (il utilise ce théorème) et faux sans l'hypothèse que  $f$  est  $n$  fois dérivable.

De ce théorème, on déduit les développements limités classiques :

**Exemple(s) 133 :**

133.1 La fonction exponentielle a un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 (les autres s'en déduisent à l'aide de la relation  $e^{x_0+h} = e^{x_0} \times e^h$ ) :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

133.2 De même pour les fonctions sinus et cosinus, au voisinage de 0 :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n),$$

et

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \times \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n).$$

133.3 Profitons pour donner ceux, plus faciles, des fonctions cosh et sinh :

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n),$$

et

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n).$$

133.4 Enfin, au voisinage de 0, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \times \cdots \times (\alpha - k + 1)}{k!} \times x^k + o(x^n).$$

133.5 Cherchons enfin un développement limité à l'ordre 5 de la fonction tangente en 0. Comme elle est impaire et  $\tan'(0) = 1$ , il existe des réels  $a, b$  tels que

$$\tan(x) = x + a \times x^3 + b \times x^5 + o(x^5)$$

mais tangente est 5 fois dérivable donc  $\tan'$  admet pour développement limité en 0 :

$$\tan'(x) = 1 + 3a \times x^2 + 5b \times x^4 + o(x^4)$$

Enfin,  $\tan' = 1 + \tan^2$  donc :

$$1 + 3a \times x^2 + 5b \times x^4 + o(x^4) = 1 + (x + a \times x^3 + b \times x^5 + o(x^5))^2 = 1 + x^2 + 2a \times x^4 + o(x^4)$$

et l'on en déduit par unicité du développement limité :  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{2}{15}$ . Donc :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5).$$

### 10.4.3 Calculs pratiques

La formule de Taylor est souvent la pire méthode pour calculer un développement limité. Elle réclame le calcul de dérivées, ce qui est un calcul particulièrement laborieux. Le plus simple est presque toujours de procéder « par opérations ». Voyons comment faire sur des exemples :

1. Les combinaisons linéaires de développements limités sont particulièrement faciles à faire :

#### Exemple(s) 134 :

134.1

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \left( 2x^2 - \frac{2}{3} x^4 + o(x^5) \right) = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^5).$$

134.2

$$\cos(x) - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8} x^4 + o(x^5) = \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

134.3

$$\begin{aligned} \sin(a+h) &= \sin(a) \times \cos(h) + \cos(a) \times \sin(h) \\ &= \sin(a) \times \left( 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3) \right) + \cos(a) \times \left( h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right) = \sin(a) + \cos(a) \times h - \frac{\sin(a)}{2} \times h^2 - \frac{\cos(a)}{6} \times h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

2. Pour le produit, pour s'éviter des calculs inutiles, il est important de connaître la **forme normalisée** d'un développement limité :

$$f(a+h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \cdots + a_{n-p} \times h^{n-p}) + o(h^n), \quad a_0 \neq 0$$

Il est utile de calculer l'entier naturel  $p$  (qu'on appellera valuation du développement limité) avant de se lancer dans un produit. En effet, pour calculer le développement limité à l'ordre  $n$  du produit  $f \times g$ , où  $f$  et  $g$  ont pour forme normalisée :

$$f(a+h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \cdots), \quad g(a+h) = h^q \times (b_0 + b_1 \times h + \cdots)$$

il suffit de calculer celui de  $f$  à l'ordre  $n-q$  et celui de  $g$  à l'ordre  $n-p$ .

**Exemple(s) 135 :**

135.1  $\sin$  a pour valuation 1 en 0, il suffit donc pour calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\sin^2$  de calculer celui de  $\sin$  à l'ordre  $5 - 1 = 4$  :

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

135.2 Calculons un développement limité à l'ordre 8 en 0 de :

$$(\cosh(x) - \cos(x)) \times (\sinh(x) - \sin(x))$$

Pour ceci, on remarque que le premier membre du produit a pour valuation 2 et le second membre du produit 3. Il suffit donc d'écrire le premier membre à l'ordre  $8 - 3 = 5$  et le second à l'ordre  $8 - 2 = 6$  :

$$\cosh(x) - \cos(x) = x^2 + o(x^5) \quad \sinh(x) - \sin(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^6)$$

on en déduit :

$$(\cosh(x) - \cos(x)) \times (\sinh(x) - \sin(x)) = x^5 \times (1 + o(x^3)) \times \left(\frac{1}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^5}{3} + o(x^8).$$

135.3 Calculons un développement limité à l'ordre 5 en 0 du produit :

$$(\tan(x) - x) \times (\cos(x) - 1)$$

le premier membre du produit a pour valuation 3 et le second pour valuation 2, il suffit donc d'écrire les développements limités :

$$\tan(x) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

on en déduit :

$$(\tan(x) - x) \times (\cos(x) - 1) = \left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

3. Pour calculer un développement limité à l'ordre  $n$  du quotient  $f/g$ , où  $f$  et  $g$  ont pour forme normalisée :

$$f(a+h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \dots), \quad g(a+h) = h^q \times (b_0 + b_1 \times h + \dots)$$

il s'agit d'écrire :

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h^{p-q}}{b_0} \times \underbrace{\frac{a_0 + a_1 \times h + \dots}{1 - \frac{-b_1}{b_0} \times h + \dots}}_{(*)}$$

puis, en utilisant le développement limité de  $1/(1-x)$ , d'écrire un développement limité du quotient  $(*)$  à l'ordre  $n - (p - q)$ . Il s'agit donc d'écrire un développement limité de  $f$  à l'ordre  $n - (p - q) + p = n + q$  et un développement limité de  $g$  à l'ordre  $n - (p - q) + q = n - p + 2q$ .

**Exemple(s) 136 :**

136.1 Calculons un développement limité à l'ordre 4 en 0 du quotient :

$$\frac{\sinh(x) - \sin(x)}{\cosh(x) - \cos(x)}$$

pour ceci, il s'agit de calculer un développement limité à l'ordre  $4 + 2 = 6$  du numérateur et un développement limité à l'ordre  $4 + 4 - 3 = 5$  du dénominateur :

$$\frac{\sinh(x) - \sin(x)}{\cosh(x) - \cos(x)} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^6)}{x^2 + o(x^5)} = x \times \frac{\frac{1}{3} + o(x^3)}{1 + o(x^3)} = x \times \left(\frac{1}{3} + o(x^3)\right) \times (1 + o(x^3)) = \frac{x}{3} + o(x^4).$$



136.2 Calculons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$\frac{\sin^2(x)}{\sinh^2(x)}$$

pour ceci, on remarque que le numérateur et le dénominateur ont pour valuation 2, il s'agit donc de calculer un développement limité à l'ordre  $3+2=5$  du numérateur et un développement limité à l'ordre  $3-2+4=5$  du dénominateur. On a :

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sinh^2(x) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

Donc :

$$\frac{\sin^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)} = \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$$

136.3 Calculons d'une autre façon (moins efficace...) un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

la fonction sinus a pour valuation 1 en 0 et la fonction cosinus a pour valuation 0 en 0. Il s'agit alors d'écrire un développement limité de sin à l'ordre  $5+0=5$  et un développement limité de cos à l'ordre  $5-1+2 \times 0=4$  :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

et l'on retrouve :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

4. Enfin, on peut composer des développements limités. Il y a un seul grand piège à éviter lorsqu'on effectue un tel calcul pour calculer le développement limité de  $f \circ g$  à l'aide de ceux de  $f$  et  $g$  en  $a$ , il faut que  $\boxed{g(a)=0}$ . Concernant la prédiction des ordres, il faut remarquer que, si  $q$  est la valuation du développement limité de  $f(g(x)) - f(a)$  en  $g(a)$  et  $p$  celle de  $g$  en  $a$  (retenez que, contrairement à notre habitude, on écrit le développement limité de  $f$  avec un dernier terme en  $O$ ) :

$$f(g(a+h)) = a_0 + \underbrace{a_q \times h^{p \times q} \times (b_0 + b_1 \times h + \dots)^q}_{(1)} + \dots + \underbrace{h^{\alpha \times p} \times (b_0 + b_1 \times h + \dots)^\alpha}_{(2)} + \underbrace{O(h^{(\alpha+1) \times p})}_{=O(h^{(\alpha+1) \times p-1})}$$

- (a) Par (1), il suffit d'écrire le développement limité de  $g$  à l'ordre  $n - (p \times q) + p$ ,  
 (b) par (2), il suffit d'écrire celui de  $f$  à l'ordre  $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ .

### Exemple(s) 137 :

137.1 Calculons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\frac{1}{1 - \arctan(x)}$$

On vérifie immédiatement que  $\arctan(x) = 0$ . Dans ce cas,  $p = 1$  et  $q = 1$  donc il s'agit de composer les développements limités :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \arctan(x)} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + O(O(x^4)) \\ &= 1 + x + x^2 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)x^3 + o(x^3) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

137.2 N'oubliez pas de vérifier que  $g(a) = 0$  ! Par exemple, calculons un développement limité en 0 à l'ordre 3 de :

$$\frac{1}{1 + \cos(x)}$$

on aurait envie de procéder comme précédemment, mais  $\cos(0) = 1 \neq 0$  ! Heureusement, on peut écrire :

$$\frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1 - \cos(x)}{2}}.$$

Dans ce cas,  $q = 1$  et  $p = 2$  donc il suffit de composer les développements limités :

$$\frac{1 - \cos(x)}{2} = \frac{x^2}{4} + o(x^3), \quad \frac{1}{1 - x} = 1 + x + O(x^2)$$

on en déduit :

$$\frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2} \times \left( 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3) + O(O(x^2)^2) \right) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$$

137.3 Terminons par un grand classique. Cherchons un développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

encore une fois, cette expression nécessite une réécriture :

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + x)}{x}\right)$$

l'écriture du développement limité  $\ln(1 + x) = x + \dots$  nous montre que le quotient qui apparaît ne tend pas vers 0... il faut donc encore réécrire :

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \times \exp\left(\frac{\ln(1 + x)}{x} - 1\right)$$

Nous sommes maintenant dans les conditions d'utilisation de la composition de développements limités : ici,  $p = 1$  et  $q = 1$ , il s'agit donc de composer les développements limités :

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} - 1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

donc :

$$\begin{aligned} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= e \times \left( 1 + \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2 + O(O(x)^3) \right) \\ &= e \times \left( 1 - \frac{x}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) x^2 + o(x^2) \right) = e - \frac{e}{2} x + \frac{11e}{24} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

#### 10.4.4 Applications des développements limités

Il existe au moins trois applications des développements limités :

1. *le calcul de limites* : rappelons que  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 0. Il suffit donc de calculer un tel développement limité pour calculer une limite. Par exemple :

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1) \quad \text{donc} \quad (1 + x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e.$$

2. *le calcul d'équivalents* : vous verrez parfois dans un énoncé une question du type : « déterminez un équivalent simple en  $a$  de la fonction  $f$  ». Une façon de répondre est de remarquer que, si  $f$  admet en  $a$  la forme normalisée :

$$f(a + h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \dots + a_{n-p} \times h^{n-p}) + o(h^n), \quad a_0 \neq 0 \quad \text{alors} \quad \boxed{f(x) \sim_a a_0 \times h^p}.$$

Par exemple, on a :

$$\sin(x) - \tan(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + o(x) \sim_0 x$$

Dans tous les autres cas, il s'agit de se ramener à un calcul de développement limité. Par exemple :

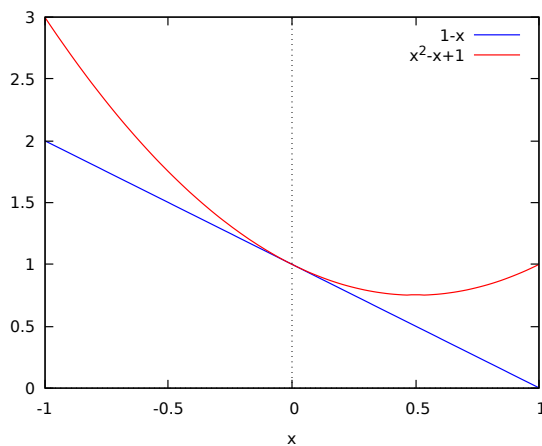
$$\ln(1 + x) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

3. *position locale par rapport à la tangente* : un développement limité peut servir à positionner localement la courbe par rapport à la tangente. En effet, si  $f$  vérifie, pour  $p \geq 2$   $a_p \neq 0$  et :

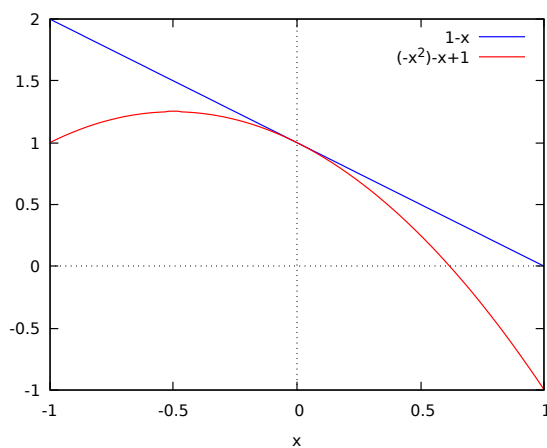
$$f(x) = f(a) + f'(a) \times (x - a) + a_p \times (x - a)^p + o((x - a)^p)$$

il y a trois cas :

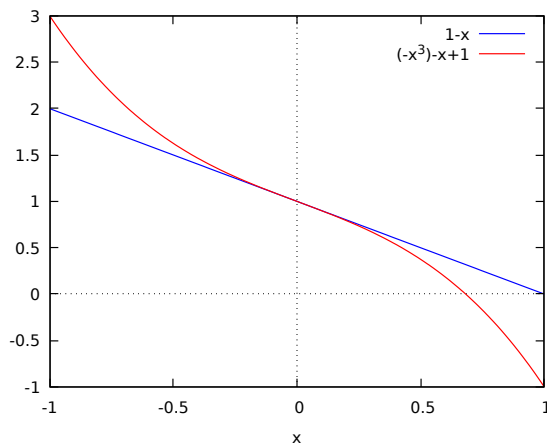
- (a)  $p$  est pair et  $a_p > 0$ , la fonction est au-dessus de sa tangente en  $a$  :



- (b)  $p$  est pair et  $a_p < 0$ , la fonction est en-dessous de sa tangente en  $a$  :



- (c)  $p$  est impair, dans ce cas,  $f$  traverse en  $a$  sa tangente (on parle de point d'inflexion)





# Chapitre 11

## Espaces vectoriels

### 11.1 Notion d'espace vectoriel

#### 11.1.1 Premières définitions

Dans ce chapitre, nous noterons  $\mathbb{K}$  les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 11.1.72 :** Soit  $E$  un ensemble non vide, on dit que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ) si :

1. Il est muni d'une opération interne<sup>1</sup>, notée  $+$ , appelée addition qui vérifie :

(a)  $+$  est associative :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z) \stackrel{Not}{=} x + y + z$$

(b)  $+$  possède un élément neutre noté  $0_E$  (ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$$

(c) Tout élément de  $E$  possède un opposé :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in E, x + y = y + x = 0_E, \text{ on note } y \stackrel{Not}{=} -x$$

de plus, on note  $-$  l'opération :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + (-y) \stackrel{Not}{=} x - y$$

(d)  $+$  est commutative :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$$

2. Il est muni d'une opération externe<sup>2</sup>, notée  $\cdot$ , appelée multiplication par un scalaire qui vérifie :

(a)  $\cdot$  est distributive par rapport à l'addition de  $E$  :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

(b)  $\cdot$  est distributive par rapport à l'addition de  $\mathbb{K}$  :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

(c)  $\cdot$  est distributive par rapport à la multiplication de  $\mathbb{K}$  :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

(d) L'unité du corps est respectée :

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x$$

Les éléments de  $E$  s'appellent alors vecteurs et les éléments de  $\mathbb{K}$  scalaires.

1. Cela signifie que si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ , alors  $x + y$  est dans  $E$ .

2. Cela signifie que si  $\lambda$  est un scalaire (il est dans  $\mathbb{K}$ ) et si  $x$  est dans  $E$ , alors  $\lambda \cdot x$  est dans  $E$ .

**Remarque(s) 89 :** On montre facilement que si  $-x$ , l'inverse de  $x$  existe alors il est unique.

Les ensembles suivants sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

**Exemple(s) 138 :**

138.1  $\mathbb{K}$  est clairement un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, ainsi que  $\mathbb{K}^n$ .

138.2 On de même immédiatement que  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

138.3 Si  $X$  est un ensemble et si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors

$$\mathcal{F}(X, E) \stackrel{\text{Not}}{=} \{f : X \rightarrow E\} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$$

**Démonstration :** Nous allons prouver que  $F = \mathcal{F}(X, E)$  vérifie les axiomes des espaces vectoriels pour les lois suivantes :

$$\forall f, g \in F, \forall x \in X, (f +_F g)(x) := f(x) +_E g(x) \text{ (addition)}$$

$$\forall f \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda \cdot_F f)(x) := \lambda \cdot_E f(x) \text{ (multiplication par un scalaire).}$$

La fonction  $f +_F g$  est un élément de  $F$ , la loi  $+_F$  est donc bien une loi de composition interne. Elle est clairement associative et commutative car la loi  $+_E$  l'est. Définissons l'élément  $0_F$  par

$$\forall x \in X, 0_F(x) = 0_E.$$

C'est un neutre de  $F$  car  $0_E$  est un neutre de  $E$ . On définit enfin pour une fonction  $f$  la fonction  $-f$  par

$$\forall x \in X, (-f)(x) := -f(x) \text{ (il y a une différence!).}$$

On vérifie alors aisément que  $-f$  est un opposé de  $f$  :

$$\forall x \in X, ((-f) +_F f)(x) = -f(x) +_E f(x) = 0_E = 0_F(x).$$

La fonction  $\lambda \cdot_F f$  est aussi un élément de  $F$ , la loi  $\cdot_F$  définit donc bien opération externe de  $F$ . Les propriétés 2. (a), (b), (c) et (d) de cette opération de  $F$  découlent toutes directement de la définition des opérations et du fait qu'elles sont vérifiées par celles de  $E$ . Montrons par exemple (b). Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des éléments de  $\mathbb{K}$  et  $f$  un élément de  $F$ . On a, pour tout  $x$  élément de  $X$  :

$$((\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_F f)(x) = (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E f(x),$$

mais  $\cdot_E$  est distributive par rapport à l'addition de  $\mathbb{K}$  donc :

$$(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E f(x) = \lambda \cdot_E f(x) +_E \mu \cdot_E f(x)$$

puis, par définition des lois  $+_F$  et  $\cdot_F$  :

$$\lambda \cdot_E f(x) +_E \mu \cdot_E f(x) = (\lambda \cdot_F f)(x) +_E (\mu \cdot_F f)(x) = (\lambda \cdot_F f +_F \mu \cdot_F f)(x).$$

Ces égalités étant valables pour tous les  $x$  de  $X$ , on en déduit :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}, \forall f \in F : (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_F f = \lambda \cdot_F f +_F \mu \cdot_F f.$$

■

138.4 De cet exemple, on déduit immédiatement que l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (prendre  $X = \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{K}$ ).

Comme nous avons pu le voir il est long en général de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Heureusement, nous ne le ferons (presque) jamais en pratique grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

**Définition 11.1.73 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F \subset E$ , on dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

1.  $0_E \in F$  ;
2.  $F$  est stable par  $+$  :  $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$  ;
3.  $F$  est stable par  $\cdot$  :  $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in F$ .

**Propriété(s) 11.1.67 :** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors c'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Démonstration :** Remarquons (c'est le point essentiel) que par les points 2 et 3, l'addition et le produit extérieur sont des opérations internes à  $F$ . Pour vérifier les différents points de la définition d'un espace vectoriel, on peut remarquer que pour presque tous, leur véracité pour tout élément de  $E$  implique leur véracité pour tout élément de  $F$ . Le seul point non trivial est de montrer que si  $x \in F$  alors,  $-x \in F$ . Mais, comme  $E$  est un espace vectoriel :

$$0_E = (1 + (-1)).x \iff -x = (-1).x \in F.$$



**Example(s) 139 :**

139.1 Tout espace vectoriel  $E$  admet pour sous-espace vectoriel  $E$  et  $\{0_E\}$ . On les appelle les sous-espaces vectoriels triviaux de  $E$ .

### 139.2 L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$

[illegible]

est un sous-espace vectoriel si et seulement si son second membre est nul.

139.3 En particulier, on rappelle que :

(a) les droites du plan ont pour équation cartésienne :

$$a \times x + b \times y = c ;$$

ce sont donc des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $c = 0$ , c'est-à-dire si elles passent par l'origine.

(b) les plans de l'espace ont pour équation cartésienne :

$$a \times x + b \times y + c \times z = d ;$$

ce sont donc des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $d = 0$ , c'est-à-dire s'ils passent par l'origine.

(c) les droites de l'espace peuvent être décrites comme l'intersection de deux plans non parallèles. Elles ont donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} a \times x + b \times y + c \times z = d \\ a' \times x + b' \times y + c' \times z = d' \end{cases} ;$$

ce sont donc des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $(d, d') = (0, 0)$ , c'est-à-dire si elles passent par l'origine.

139.4 L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (du premier ou second ordre) est un sous-espace vectoriel si et seulement si le second membre est la fonction nulle.

139.5 Attention à penser à vérifier qu'il s'agit d'un sous-ensemble avant de parler de sous-espace vectoriel. Dire que  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$  n'a par exemple aucun sens !

**Propriété(s) 11.1.68 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On a :

1.  $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ ;
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.0_E = 0_E$ ;
3.  $\forall x \in E, (-1).x = -x$ ;
4.  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$ .

*Démonstration :*

1. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Comme  $0_{\mathbb{K}}$  est un neutre de  $\mathbb{K}$  et  $\cdot$  est distributive par rapport à l'addition de  $\mathbb{K}$ , on a :

$$0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$$

puis, en ajoutant  $-0_{\mathbb{K}}.x$ , l'inverse de  $0_{\mathbb{K}}.x$  des deux côtés de l'égalité :

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}.x + (-0_{\mathbb{K}}.x) = (0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x) + (-0_{\mathbb{K}}.x)$$

on conclut alors en utilisant l'associativité de l'addition de  $E$  :

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}.x + (0_{\mathbb{K}}.x + (-0_{\mathbb{K}}.x)) = 0_{\mathbb{K}}.x .$$

2. La preuve de ce point est très similaire au point précédent. Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$ . On utilise que  $0_E$  est un neutre de  $E$  et  $\cdot$  est distributive par rapport à l'addition de  $E$  :

$$\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E,$$

puis, puis on ajoute  $-\lambda.0_E$ , l'inverse de  $\lambda.0_E$  des deux côtés de l'égalité et on conclut en utilisant l'associativité de l'addition de  $E$  :

$$0_E = \lambda.0_E + (-\lambda.0_E) = (\lambda.0_E + \lambda.0_E) + (-\lambda.0_E) = \lambda.0_E.$$

3. Soit  $x$  un élément de  $E$ . On a, d'après le premier point que  $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ . Comme  $\cdot$  est distributive par rapport à l'addition de  $\mathbb{K}$ , on a :

$$1.x + (-1).x = (1 + (-1)).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E.$$

On remarque alors que  $1.x = x$  ( $\cdot$  conserve le 1 de  $\mathbb{K}$ ) et donc, en ajoutant l'opposé de  $x$  des deux côtés de l'égalité que  $(-1).x = -x$ .

4. La réciproque de cette implication est exactement les points 1. et 2.. Montrons le sens direct. Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$  et  $x$  un élément de  $E$ . Supposons que  $\lambda.x = 0_E$ . Si  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$  il n'y a rien à prouver. Sinon, en utilisant la distributivité de  $\cdot$  par rapport à la multiplication de  $\mathbb{K}$  et que  $1.x = x$  on a :

$$x = 1.x = (\lambda^{-1} \times \lambda).x = (\lambda^{-1}).0_E,$$

et donc par le point 2,  $x = 0_E$ . ■

**Propriété(s) 11.1.69 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de  $F$  et  $F \subset E$ . Alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si :

1.  $F \neq \emptyset$
2.  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda.y \in F$ .

**Démonstration :** Le sens direct est clair. Pour la réciproque, remarquons qu'il suffit pour retrouver la stabilité par somme de prendre  $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$  et pour celle par le produit externe de prendre  $x = 0_E$ . Reste à montrer que  $0_E \in F$ . Mais comme  $F$  est non vide, il possède un élément  $x$  et donc, par le deuxième point pour  $\lambda = -1$  et  $x = y$  :

$$x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_E \in F$$

où l'on a utilisé la première règle de calcul de la propriété précédente pour la dernière égalité. ■

### 11.1.2 Construire des sous-espaces vectoriels

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **combinaison linéaire** de  $(x, y) \in E^2$  tout élément de  $E$  :

$$\lambda.x + \mu.y, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

Plus généralement, si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont des éléments de  $E$ , une combinaison linéaire de ces éléments s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k.e_k = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

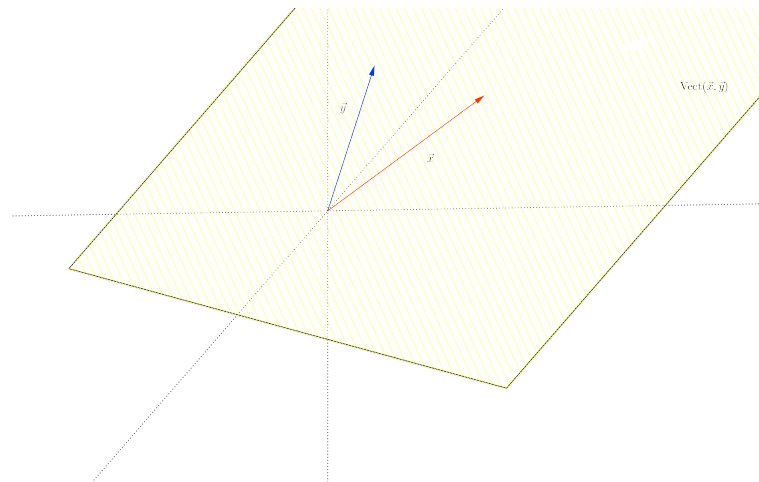
Dans la suite, on notera l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k.e_k \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$



**Exemple(s) 140 :**

140.1 Si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont des vecteurs non nuls non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$  est le plan passant par l'origine contenant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :



140.2 si ces deux vecteurs sont non nuls et colinéaires, alors il s'agit de la droite passant par l'origine et contenant  $\vec{x}$ .

**Proposition 11.1.13 :** Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$  des éléments de  $E$  alors  $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Démonstration :** Il y a deux choses à prouver :

1. C'est un sous-espace vectoriel :

(a)  $0_E \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  : il suffit de prendre  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

(b) stabilité par la somme : si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  alors :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k + \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\lambda_k + \mu_k)}_{\in \mathbb{K}} \cdot e_k$$

(c) stabilité par le produit externe : si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $\lambda$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ , alors :

$$\lambda \cdot \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k \right) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\lambda \times \lambda_k)}_{\in \mathbb{K}} \cdot e_k$$

2. Il s'agit du plus petit tel sous-espace-vectoriel : si  $F$  est un espace vectoriel contenant  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , alors par stabilité par les lois il contient toutes les combinaisons linéaires des ces éléments, donc :

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset F.$$

■

**Remarque(s) 90 :** Pour cette raison, on parle d'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Définition 11.1.74 :** Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$  des éléments de  $E$ . On dit que la famille  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  est génératrice de  $E$  si :

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

**Remarque(s) 91 :** En d'autres termes, la famille  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est génératrice de  $E$  si et seulement si on peut écrire tout élément de  $E$  comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

**Exemple(s) 141 :**

141.1 La famille  $\{(0, 1), (1, 1)\}$  est génératrice du plan, en effet :

$$(x, y) = (y - x) \cdot (0, 1) + x \cdot (1, 1)$$

141.2 La famille  $\{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$  est donc aussi génératrice du plan.

141.3 Trois vecteurs de l'espace sont générateurs si et seulement si ils ne sont pas coplanaires.

141.4 Il est bon de se rappeler du pivot de Gauß pour chercher les coefficients qui apparaissent ; par exemple, pour montrer que la famille  $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$  est génératrice, il s'agirait, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  de trouver trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$a \cdot (1, -1, 0) + b \cdot (0, 1, -1) + c \cdot (1, 0, -1) = (x, y, z) \iff \begin{cases} a + c = x \\ -a + b = y \\ -b - c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = x \\ b + c = x + y \\ 0 = x + y + z \end{cases}$$

le système est incompatible dès que  $x + y + z \neq 0$ , donc la famille n'est pas génératrice !

141.5 Soit  $a \in \mathbb{K}$ . L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle homogène :

$$y' + a \times y = 0$$

est  $S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times e^{-a \times t}, \quad C \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a \times t})$  donc la famille  $\{t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a \times t}\}$  est génératrice de cet espace vectoriel.

On peut également chercher à construire des sous-espaces vectoriels à partir d'autres espaces vectoriels. Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on note :

$$F + G = \{x + y, \quad (x, y) \in F \times G\}$$

De même, si  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on note :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \in F_i\}.$$

**Exemple(s) 142 :**

142.1 Si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$  alors :

$$F + G = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p).$$

142.2 La somme de deux plans de l'espace qui passent par l'origine est l'espace tout entier si ils ne sont pas confondus.

**Proposition 11.1.14 :** Soit  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est le plus petit espace vectoriel qui contient  $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$  et  $F_n$ .

**Démonstration :** Par stabilité par la somme, si un sous-espace vectoriel contient tous  $F_i$ , il contient  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ . Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

1. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0_E \in F_i$  donc :

$$0_E = \underbrace{0_E + 0_E + \dots + 0_E}_{n \text{ fois}} \in F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

2. Si  $x$  et  $y$  sont des éléments de la somme, il existe  $(x_i, y_i) \in F_i$  tels que :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

donc en faisant la somme de ces deux égalités :

$$x + y = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in F_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{(x_n + y_n)}_{\in F_n}$$

donc  $x + y \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$ .

3. Si  $x$  est un élément de la somme et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors, avec les mêmes notations que le point précédent :

$$\lambda.x = \underbrace{(\lambda.x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{(\lambda.x_2)}_{\in F_2} + \cdots + \underbrace{(\lambda.x_n)}_{\in F_n}$$

donc  $\lambda.x \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ .

■

**Remarque(s) 92 :** Attention ! Il ne faut pas confondre la somme de deux espaces vectoriels avec leur union : l'union de deux espaces vectoriels n'est presque jamais un espace vectoriel : pensez à l'exemple de deux droites du plan passant par l'origine.

### 11.1.3 Familles libres, sommes directes

**Définition 11.1.75 :** Une famille  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de vecteurs de  $E$  est dite libre si :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i = 0.$$

On dit alors que les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

**Remarque(s) 93 :** 1. Pour montrer qu'une famille n'est pas libre, il suffit de trouver une combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  dont au moins un des coefficients est non nul qui donne le vecteur nul.

2. Si la famille  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est libre alors on peut identifier les scalaires dans les égalités qui les font apparaître :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot e_k \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = \mu_k.$$

3. Clairement, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

**Exemple(s) 143 :**

143.1 Deux vecteurs non nuls de l'espace ou du plan  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires et liés sinon.

143.2 Comme pour les parties génératrices, le pivot de Gauß est un outil puissant pour montrer qu'une famille est libre. Par exemple, la famille :  $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  est libre car :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0$$

mais la famille  $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$  ne l'est pas, car :

$$(1, -1, 0) - (1, 0, -1) + (0, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

143.3 La famille des fonctions  $(x \mapsto x^k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est libre, c'est une conséquence immédiate de l'unicité des développements limités en 0.

143.4 Soit  $\lambda \neq \mu$  deux réels ou complexes. Alors les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_1(t) = e^{\lambda \times t} \quad f_2(t) = e^{\mu \times t}$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \times e^{\lambda \times t} + b \times e^{\mu \times t} = 0$$

alors en prenant  $t = 0$  puis en dérivant et en prenant  $t = 0$ ,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \lambda \times a + \mu \times b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \times b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0.$$

Il existe un concept analogue pour les sommes de sous-espaces vectoriels :

**Définition 11.1.76 :** Soit  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est directe et on note  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$  si pour tous  $(x_1, y_1) \in F_1^2, (x_2, y_2) \in F_2^2, \dots, (x_n, y_n) \in F_n^2$ ,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \implies x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n^3.$$

Dans le cas de la somme de deux sous-espaces vectoriels, il existe une caractérisation utile :

**Propriété(s) 11.1.70 :** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors :

$$F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

**Remarque(s) 94 :** Malheureusement, cette caractérisation ne s'étend pas facilement à une somme de plus de deux sous-espaces vectoriels. Il est bon pour éviter de dire des bêtises de se rappeler de l'exemple de trois droites du plan distinctes qui passent par l'origine, qui ne sont pas en somme directe.

*Démonstration :*

1. Si  $F \oplus G$ , alors si  $x \in F \cap G$ , on a :

$$\underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$$

donc par unicité de l'écriture en somme :  $x = 0_E$ , et donc comme  $0_E \in F \cap G$ ,  $F \cap G = \{0_E\}$ .

2. Réciproquement, si  $F \cap G = \{0_E\}$ , si  $(f_1, f_2) \in F^2$  et  $(g_1, g_2) \in G^2$  alors :

$$f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \implies \underbrace{f_1 - f_2}_{\in F \text{ car } F \text{ s.e.v.}} = \underbrace{g_2 - g_1}_{\in G \text{ car } G \text{ s.e.v.}}$$

donc  $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G = \{0_E\}$ , c'est-à-dire  $f_1 = f_2$  et  $g_1 = g_2$ . Donc  $F \oplus G$ . ■

**Exemple(s) 144 :**

144.1 Dans l'espace, un plan et une droite passant par l'origine sont en somme directe.

144.2 Si  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  est une famille libre, on a :

$$\forall k \in [1, n-1], \quad \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n).$$

Et la réciproque est aussi vraie si aucun des vecteurs n'est nul :

*Démonstration :* Le sens direct est clair. Montrons la réciproque. Supposons qu'il existe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  tels que :

$$\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n = 0_E$$

alors  $-\lambda_n.e_n \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) \cap \text{Vect}(e_n) = \{0_E\}$  donc  $\lambda_n.e_n = 0_E$  d'où, comme  $e_n \neq 0_E$ ,  $\lambda_n = 0$ . Puis  $-\lambda_{n-1}.e_{n-1} \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-2}) \cap \text{Vect}(e_n, e_{n-1}) = \{0_E\}$  donc  $\lambda_{n-1} = 0$  et on conclut en itérant ce procédé. ■

3. autrement dit, l'écriture en somme est unique

**Définition 11.1.77 :** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires (dans  $E$ ) si :  $E = F \oplus G$ .

**Remarque(s) 95 :** Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, il faut donc montrer que :

1.  $F \cap G = \{0_E\}$  (la somme est directe)
2.  $E = F + G$ , c'est-à-dire que tout élément de  $E$  s'écrit comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  :

$$\forall e \in E, \exists (f, g) \in F \times G, \quad e = f + g$$

#### Exemple(s) 145 :

145.1 Dans le plan, deux droites passant par l'origine non confondues sont supplémentaires. Dans l'espace, une plan passant par l'origine et une droite non contenue dans ce plan sont supplémentaires.

145.2 Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

*Démonstration :* On a déjà vu qu'il est possible d'écrire toute matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A = \underbrace{\frac{A + {}^t A}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{A - {}^t A}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

Si une matrice  $M$  est à la fois symétrique et antisymétrique, alors :  $M = {}^t M = -M$  donc  $M = O_n$ . Donc :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ . ■

145.3 Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

*Démonstration :* Supposons que  $f$  est paire et impaire. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f(x) = f(-x) = f(x).$$

Donc pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 0$ . Montrons maintenant que toute fonction  $f$  est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

(a) *analyse* : s'il existe  $p$  paire et  $i$  impaire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x)$$

alors :  $f(-x) = p(x) - i(x)$  et donc

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

(b) *synthèse* : on peut toujours écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}.$$

■

## 11.1.4 Bases

**Définition 11.1.78 :** Soit  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit que cette famille est une base si elle est libre et génératrice.

**Remarque(s) 96 :** Si  $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $E$  alors par définition :

$$\forall x \in E, \quad \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$$

on appelle la famille  $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  les **coordonnées** du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Les bases suivantes sont dites *canoniques* ; ce sont celles que l'on utilise le plus souvent :

**Exemple(s) 146 :**

146.1 Dans  $\mathbb{K}^n$ , la famille des vecteurs :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_k = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{le 1 au rang } k}$$

est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

146.2 On note  $\mathbb{K}_n[x]$  l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à  $n$ , c'est-à-dire :

$$\mathbb{K}_n[x] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \times x^k, \quad (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^{n+1} \right\}.$$

Alors  $\mathbb{K}_n[x]$  a pour base  $(x \mapsto x^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

146.3 Dans  $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$  la famille de matrices  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$ <sup>4</sup> est une base.

**Remarque(s) 97 :** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  et qui ont pour bases respectives  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . Alors, s'ils sont en somme directe,  $F \oplus G$  admet pour base  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ . On appelle une base de  $F \oplus G$  qui n'est constituée que d'éléments de  $F$  et de  $G$  une **base adaptée** à cette somme directe.

Attention : il n'y a à priori aucune raison pour qu'une base de  $F \oplus G$  soit adaptée, comme le montre l'exemple de la base  $\{(1,0), (0,1)\}$  qui n'est pas adaptée à la somme directe  $\text{Vect}(1,1) \oplus \text{Vect}(0,1)$ .

**Théorème 11.1.32 (de la base incomplète) :** Soit  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  une famille libre de  $E$  et  $(g_1, g_2, \dots, g_p)$  une famille génératrice de  $E$  non nul. Alors il est possible de compléter cette famille libre à l'aide d'éléments de la famille génératrice en une base de  $E$ , c'est-à-dire :

$$\exists q \leq p, \exists (i_k)_{k \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \llbracket 1, p \rrbracket^q, \quad (l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}) \text{ est une base de } E.$$

**Démonstration :** Nous allons commencer par prouver un lemme : si  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  est une famille libre de  $E$  et  $g \notin \text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ , alors  $(l_1, l_2, \dots, l_n, g)$  est encore une famille libre de  $E$ . En effet : s'il existe  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1}$  tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot l_k + \lambda \cdot g = 0_E$$

Alors, si  $\lambda \neq 0$ , on aurait :

$$g = \sum_{k=1}^n -\frac{\lambda_k}{\lambda} \cdot l_k \in \text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

ce qui est supposé faux ! Donc  $\lambda = 0$ , puis par liberté de la famille  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Nous pouvons maintenant prouver le théorème.

1. Si tous les éléments de la famille génératrice sont dans  $\text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ , alors il s'agit d'une famille génératrice donc d'une base.
2. Sinon,  $\exists i_1 \in \llbracket 1, q \rrbracket, g_{i_1} \notin \text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n)$  et la famille  $(l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1})$  est libre par ce qu'on vient de faire.

On recommence alors le même procédé pour cette famille libre, qui s'arrête forcément en un nombre fini d'étapes car la famille génératrice n'a qu'un nombre fini d'éléments.

4. On rappelle que cette matrice est la matrice nulle, sauf en  $(i, j)$ , où elle vaut 1.

Un cas particulier de ce théorème est celui dans lequel la famille libre n'a aucun élément :

**Théorème 11.1.33 (de la base extraite) :** Soit  $(g_1, g_2, \dots, g_p)$  une famille génératrice de  $E$  non nul. Alors il est possible d'extraire une base de cette famille génératrice, c'est-à-dire

$$\exists q \leq p, \exists (i_k)_{k \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \llbracket 1, p \rrbracket^q, \quad (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}) \text{ est une base de } E.$$

**Exemple(s) 147 :**

147.1 Bien souvent, on complète une famille libre par des éléments d'une base canonique. Par exemple, la famille  $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  est libre, et en la complétant par un élément de la base canonique,  $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$  est une base.

147.2 Dans  $\mathbb{R}^3$ , la famille  $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$  est liée, il ne s'agit donc pas d'une base du plan

$$\Pi = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)).$$

Mais la famille extraite  $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$  est une base de  $F$ .

147.3 Il est utile de pouvoir choisir les éléments qui complètent la famille libre dans une famille génératrice donnée pour trouver des bases adaptées à une décomposition. Par exemple, si  $D = \text{Vect}((1, 1, 0))$ , une base adaptée à la décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$$

est  $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$ .

## 11.1.5 Dimension finie

**Définition 11.1.79 :** Un espace vectoriel  $E$  est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

**Remarque(s) 98 :** Alors, par le théorème de la base extraite,  $E$  admet une base finie.

**Théorème 11.1.34 (lemme de Steinitz) :** Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie et  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ . Alors

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G}).$$

**Démonstration :** Notons  $n$  le cardinal de la famille génératrice et supposons par l'absurde que la famille libre a au moins  $n + 1$  éléments :  $(l_1, l_2, \dots, l_{n+1})$ . Tout élément de cette famille est combinaison linéaire d'éléments de la famille génératrice  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  donc il existe  $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$  tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad l_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} \cdot g_j$$

Il est alors utile de voir ces égalités de façon matricielle :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,n} & l_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n+1,1} & \cdots & \lambda_{n+1,n} & l_{n+1} \end{array} \right)$$

puis d'y appliquer le pivot de Gauß jusqu'à la forme semi-réduite. Comme le système a plus de lignes que de colonnes, il ne peut y avoir qu plus que  $n$  pivots donc la dernière ligne de la forme semi-réduite est forcément constituée de zéros. Donc il existe  $i_0$  (le rang initial de la ligne qui est maintenant la dernière) et des coefficients  $b_k$  (obtenus par les transvections effectuées) tels que :

$$l_{i_0} + \sum_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{i_0\}} b_k \cdot l_k = 0_E$$

la famille  $(l_1, l_2, \dots, l_{n+1})$  est donc liée. Absurde!

**Proposition 11.1.15 :** (*définition de la dimension*) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments. On appelle ce nombre dimension de  $E$  et on le note  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ .

*Démonstration :* Soit  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . Alors comme  $\mathcal{B}_1$  est libre et  $\mathcal{B}_2$  est génératrice donc  $\text{Card}(\mathcal{B}_1) \leq \text{Card}(\mathcal{B}_2)$  par le lemme de Steinitz et l'égalité s'obtient par symétrie. ■

En utilisant les bases canoniques, on en déduit :

**Exemple(s) 148 :**

148.1  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n,$

148.2  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1,$

148.3  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})) = n \times k.$

148.4 Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille libre de  $E$ , alors :  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = n.$

148.5  $E$  est de dimension 0 si et seulement si  $E = \{0_E\}$

148.6 Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** et un espace vectoriel de dimension 2 **plan vectoriel**. Par exemple :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$$

est un plan vectoriel.

**Propriété(s) 11.1.71 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

$$\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$$

de plus,  $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$  si et seulement si  $E = F$ .

*Démonstration :* Montrons l'égalité. Si  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ , alors c'est une famille libre de  $E$  donc par le lemme de Steinitz, si  $\mathcal{B}_E$  est une base (donc une famille génératrice) de  $E$ ,

$$\dim_{\mathbb{K}} F = \text{Card}(\mathcal{B}_F) \leq \text{Card}(\mathcal{B}_E) = \dim_{\mathbb{K}} E.$$

Procédons par contraposée pour montrer le deuxième point. Supposons que  $F$  est strictement inclus dans  $E$ , alors par le théorème de la base incomplète, on peut compléter  $\mathcal{B}_F$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  donc :

$$\dim_{\mathbb{K}} F = \text{Card}(\mathcal{B}_F) < \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E.$$

■

**Remarque(s) 99 :** En particulier, la dimension de l'espace vectoriel engendré par une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  est toujours inférieure ou égale à la dimension de  $E$ . On appelle cette dimension le **rang** de la famille et on note :

$$\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, e_2, \dots, e_k).$$

**Exemple(s) 149 :**

149.1 La famille  $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$  est de rang 2. En effet, la famille extraite  $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$  est une base de l'espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs.

**Propriété(s) 11.1.72 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre,
2.  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est génératrice,



3.  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base.

**Démonstration :** Clairement, le troisième point implique les deux premiers. Montrons les réciproques.

1. Si la famille est libre, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = n$$

donc par la propriété précédente,  $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . La famille est donc aussi génératrice.

2. Si la famille n'est pas libre, on peut grâce au théorème de la base extraite en extraire une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre donc :

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) < n$$

donc elle n'est pas génératrice. On conclut alors par contraposée. ■

On se sert souvent de cette propriété pour montrer que des familles sont des bases. En particulier :

#### Exemple(s) 150 :

- 150.1 La famille  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  est clairement libre dans  $\mathbb{R}^3$ , qui est de dimension 3. Comme elle est de cardinal 3, il s'agit donc d'une base.

- 150.2 Pour trouver une base d'un plan de l'espace, il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires. Par exemple, le plan d'équation :

$$x + y - z = 0$$

admet pour base  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

Maintenant que nous disposons d'un outil puissant pour montrer qu'une famille est une base sans nous intéresser à son caractère générateur, il est parfois nécessaire de résoudre un système pour trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

#### Exemple(s) 151 :

- 151.1 Comme nous l'avons vu, la famille  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Pour calculer les coordonnées  $(x, y, z)$  du vecteur  $(0, 0, 1)$  dans cette base, il s'agit de résoudre le système :

$$x \cdot (1, 1, 1) + y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

et l'on trouve immédiatement  $x = 1, y = -1$  et  $z = 0$ . Les coordonnées de  $(0, 0, 1)$  dans la base  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  sont donc  $(1, -1, 0)$ .

- 151.2 Prenons également le deuxième exemple de base que nous avons traité. Le vecteur  $(1, 1, 2)$  appartient également au plan. Ses coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  vérifient donc :

$$x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, 1) = (1, 1, 2)$$

et l'on trouve  $x = 1$  et  $y = 1$ . Le vecteur  $(1, 1, 2)$  a donc pour coordonnées  $(1, 1)$  dans la base  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

## 11.1.6 Sommes d'espaces vectoriels en dimension finie

**Propriété(s) 11.1.73 :** (existence d'un supplémentaire) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  admet un supplémentaire, c'est-à-dire il existe  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $E = F \oplus G$ .

**Démonstration :** On considère  $\mathcal{B}_F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$ . Alors  $\mathcal{B}_F$  est une famille libre de  $E$  donc on peut la compléter par des éléments de la famille génératrice  $\mathcal{B}_E$ , que l'on note  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Alors comme la famille obtenue est génératrice puis libre :

$$E = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n, e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n) \oplus \underbrace{\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)}_{=G} = F \oplus G.$$


**Exemple(s) 152 :**

- 152.1 La preuve de cette propriété nous permet d'obtenir explicitement un tel supplémentaire en complétant une base. Par exemple, le plan  $\Pi$  d'équation

$$x + y + z = 0$$

admet pour base  $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$  qui se complète en base de l'espace en  $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 0)\}$ . Un supplémentaire de  $\Pi$  est donc la droite vectorielle  $\text{Vect}((1, 0, 0))$  :

$$\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \text{Vect}((1, 0, 0)).$$

Notez bien qu'un tel supplémentaire n'est pas unique. Les droites vectorielles  $\text{Vect}((0, 1, 0))$  et  $\text{Vect}((0, 0, 1))$  conviennent aussi par exemple.

- 152.2 De même, cherchons un supplémentaire du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + y = 0\}$$

Commençons par déterminer la dimension de  $E$  :

- (a) *Méthode 1* : Les vecteurs  $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0)$  appartiennent à  $E$  et sont linéairement indépendants donc  $E$  est de dimension supérieure ou égale à 3. Cependant,  $(1, 1, 0, 0) \notin E$  donc  $E \neq \mathbb{R}^4$  donc  $E$  est de dimension inférieure ou égale à 3. On en déduit que  $E$  est de dimension 3 donc que la famille de ces trois vecteurs est une base de  $E$ .
- (b) *Méthode 2* : On peut réécrire :

$$E = \{(x, -x, z, t), \quad (x, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$$

la famille  $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0)$  est donc génératrice et elle est clairement libre, c'est donc une base de  $E$ . L'espace  $E$  est de dimension 3.

Pour construire un supplémentaire de  $E$ , il suffit alors de compléter cette famille de trois vecteurs en une base de  $\mathbb{R}^4$ . Mais, comme précédemment constaté :  $(1, 1, 0, 0) \notin E = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$  donc la famille  $((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (1, 1, 0, 0))$  est libre et a quatre éléments. C'est donc une base de  $\mathbb{R}^4$ . Un supplémentaire de  $E$  est donc la droite vectorielle :

$$F = \text{Vect}(1, 1, 0, 0).$$

**Théorème 11.1.35 (formule de Grassmann) :** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}F + \dim_{\mathbb{K}}G - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

*Démonstration :*

1. Commençons par remarquer que si  $F$  et  $G$  sont en somme directe, alors une base de  $F \oplus G$  est donnée par la réunion des bases de  $F$  et  $G$  donc :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}F + \dim_{\mathbb{K}}G.$$

2. Utilisons maintenant la propriété précédente. On considère  $F'$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$ , c'est-à-dire :  $F = F' \oplus F \cap G$ .

3. Montrons maintenant que  $F + G = F' \oplus G$  :

- (a) Si  $x \in F \cap G$  alors  $x \in F' \cap G$  et  $x \in F'$  donc comme ces deux espaces sont en somme directe,  $x = 0_E$ .
- (b) Clairement,  $F' + G \subset F + G$ . Si  $x \in F + G$  alors il existe  $(f, g) \in F \times G$  tels que  $x = f + g$ . De plus,  $F = F' \oplus F \cap G$  donc il existe  $f' \in F'$  et  $i \in F \cap G$  tels que  $f = f' + i$  mais alors :

$$x = f + g = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{i + g}_{\in G}.$$

- (c) On applique alors deux fois le premier point :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F' \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}F' + \dim_{\mathbb{K}}G = \dim_{\mathbb{K}}F - \dim_{\mathbb{K}}F \cap G + \dim_{\mathbb{K}}G.$$



**Remarque(s) 100 :** En particulier, si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et  $\dim F + \dim G > \dim E$ ,  $F \cap G$  n'est pas réduit au vecteur nul. En effet, par la formule de Grassmann :

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \geq \dim F + \dim G - \dim E > 0.$$

**Exemple(s) 153 :**

153.1 Soient  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t\}$ . Déterminons la dimension de  $E$ ,  $F$ ,  $E + F$  et  $E \cap F$ . On a :

$$E = \{(x, y, z, -x - y - z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$$

et la famille de ces trois vecteurs est clairement libre. Il s'agit donc d'une base. Donc  $\dim E = 3$ . De même :

$$F = \{(x, y, z, x + y - z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$$

et cette famille est clairement libre. Donc  $\dim F = 3$ . De plus,  $(1, 0, 0, 1) \notin E$  donc  $E + F = \mathbb{R}^4$ , d'où  $\dim E + F = 4$ . Enfin, par la formule de Grassmann,

$$\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

**Propriété(s) 11.1.74 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $E = F \oplus G$ ,
2.  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$ ,
3.  $F + G = E$  et  $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$ .

**Démonstration :** Clairement, le premier point implique les deux autres. Montrons les réciproques :

1. Si le deuxième point est vérifié, par la formule de Grassmann :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)} - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)}_{=0}.$$

donc  $F + G = E$ .

2. Si le troisième point est vérifié, toujours par la formule de Grassmann :

$$\dim_{\mathbb{K}} F \cap G = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(F + G)}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)} - \underbrace{(\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G)}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)} = 0$$

donc  $F \cap G = \{0_E\}$ .



**Exemple(s) 154 :**

154.1 Montrons d'une autre façon que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Pour ceci, on se rappelle que les matrices symétriques et antisymétriques s'écrivent respectivement :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors *directement* que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  est réduit à la matrice nulle, que l'ensemble des matrices symétriques admet pour base  $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2} + E_{2,1}, \dots, E_{n,1} + E_{1,n})$  donc est de dimension  $n + \frac{n \times (n-1)}{2} = \frac{n \times (n+1)}{2}$  et de même, l'ensemble des matrices antisymétriques admet pour base  $(E_{1,2} - E_{2,1}, \dots, E_{n,1} - E_{1,n})$  donc est de dimension  $\frac{n \times (n-1)}{2}$ . On conclut alors en remarquant que  $\frac{n \times (n+1)}{2} + \frac{n \times (n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## 11.2 Le cas euclidien

### 11.2.1 Produit scalaire, norme associée

**Définition 11.2.80 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée produit scalaire sur  $E$  si elle est :

1. symétrique :  $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
2. bilinéaire :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y, z) \in E^3, \quad \varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z), \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda x, z) = \lambda \times \varphi(x, z).$
3. définie positive :  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$

L'espace vectoriel  $E$  muni du produit scalaire  $\varphi$  est alors appelé espace préhilbertien réel et si il est de dimension finie, espace euclidien.

**Remarque(s) 101 :** 1. Par symétrie, un produit scalaire  $\varphi$  vérifie également :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y, z) \in E^3, \quad \varphi(z, x + y) = \varphi(z, x) + \varphi(z, y), \quad \text{et} \quad \varphi(z, \lambda x) = \lambda \times \varphi(z, x).$$

C'est pour cette raison que l'on parle de bilinéarité (linéarité en les deux variables).

2. Suivant les problèmes ou professeurs, on notera un produit scalaire  $\varphi$  de deux vecteurs  $x$  et  $y : \langle x, y \rangle, (x|y)$  ou (bien que votre professeur n'aime pas beaucoup cette notation)  $x \cdot y$ .

#### Exemple(s) 155 :

155.1 L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni d'un produit scalaire canonique :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k.$$

155.2 Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est muni d'un produit scalaire :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \langle z, z' \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z} \times z').$$

155.3 Si  $I = [a, b]$ , l'espace vectoriel  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  est muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) dt.$$

155.4 C'est souvent le caractère défini positif qui pose problème pour déterminer si l'on a un produit scalaire ou non. Par exemple, la fonction définie par :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = x \times x' + a \times x \times y' + b \times y \times x' + c \times y \times y'$$

est clairement symétrique et bilinéaire. Mais :

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + (a + b) \times x \times y + c \times y^2 = \left(x + \frac{a+b}{2} y\right)^2 + \left(c - \frac{(a+b)^2}{4}\right) \times y^2.$$

Il s'agit donc d'une forme définie positive si et seulement si :  $4c > (a+b)^2$ .

**Définition 11.2.81 :** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. La norme associée à ce produit scalaire sur  $E$  est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

#### Exemple(s) 156 :

156.1 L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni d'un produit scalaire canonique admet pour norme associée :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

156.2 Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est muni d'un produit scalaire que l'on vient de définir admet pour norme associée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \|z\| = |z|.$$

156.3 Si  $I = [a, b]$ , l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  est muni du produit scalaire :

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

**Remarque(s) 102 :** La norme associée à un produit scalaire provient, par définition, d'un produit scalaire. Il est possible d'aller dans l'autre sens grâce à l'identité de polarisation :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

**Démonstration :** Il s'agit essentiellement de savoir développer la partie droite de l'égalité :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Il suffit alors de faire la différence des deux lignes pour conclure. ■

## 11.2.2 Propriétés des produits scalaires

**Théorème 11.2.36 (inégalité de Cauchy-Schwarz) :** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Démonstration :** Si  $y = 0$  ou, de façon équivalente, par caractère défini du produit scalaire  $\|y\| = 0$ , il n'y a rien à faire : l'inégalité est vérifiée et les vecteurs sont colinéaires.

On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $\varphi$  par :  $\varphi(t) = \|x + ty\|^2$ . Remarquons que  $\varphi$  est positive (donc en particulier ne change jamais de signe). Mais :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t^2 \|y\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|x\|^2$$

Il s'agit donc d'une fonction polynomiale de degré deux. Comme elle ne s'annule pas, son discriminant est donc négatif :

$$\Delta = 4(\langle x, y \rangle^2 - \|y\|^2 \times \|x\|^2) \leq 0$$

Ceci montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Remarquons maintenant qu'il y a égalité si et seulement si le discriminant est nul, ou encore si et seulement si la fonction  $\varphi$  s'annule en un  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Ou encore par le caractère défini du produit scalaire, si et seulement s'il existe un réel  $t_0$  tel que  $x = t_0 y$ . ■

**Exemple(s) 157 :**

157.1 Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \times y_k \right| \leq \|x\| \times \|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Et l'on a égalité si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

157.2 Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$  :

$$\left| \int_a^b f(t) \times g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

avec égalité si et seulement si  $f$  et  $g$  sont colinéaires.

**Proposition 11.2.16 :** Soit  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire d'un espace préhilbertien  $E$ . Alors :

1. elle est définie :  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$
2. elle est homogène :  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda.x\| = |\lambda| \times \|x\|$
3. elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires, de même sens :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{(0, 0)\}, \lambda.x = \mu.y$ .

**Démonstration :** Le premier point est immédiat par la définition. Pour le deuxième, on remarque que, si  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\|\lambda.x\|^2 = \langle \lambda.x, \lambda.x \rangle = \lambda^2 \times \|x\|^2.$$

Pour le dernier point, il s'agit encore de comparer les carrés. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

et cette inégalité est une égalité si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \times \|y\| \iff \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| = \|x\| \times \|y\|.$$

La deuxième égalité équivaut à la colinéarité de  $x$  et  $y$  et la première au fait qu'ils sont de même sens. ■

### Exemple(s) 158 :

158.1 Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , on a :

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t)) dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g(t) dt}$$

avec égalité si et seulement si  $f$  et  $g$  sont colinéaires, de même sens.

## 11.2.3 Familles de vecteurs et orthogonalité

**Définition 11.2.82 :** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

### Exemple(s) 159 :

159.1 Pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , les éléments de la base canonique sont deux à deux orthogonaux : si  $i \neq j$   $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ .

159.2 Pour le produit scalaire  $\langle z, z' \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z} \times z')$ , les vecteurs 1 et  $i$  sont orthogonaux.

**Propriété(s) 11.2.75 :** (théorème de Pythagore) Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Démonstration :** Il suffit de se rappeler que :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle.$$

L'égalité est donc vraie si et seulement si  $\langle x, y \rangle = 0$  ou encore si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux. ■

**Définition 11.2.83 :** Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un espace préhilbertien. On dit que la famille est :

1. orthogonale si :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0$ ,
  2. orthonormale (ou orthonormée) si elle est orthogonale et si :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|v_i\| = 1$ .
- Si de plus, la famille est une base de  $E$ , on dit que c'est une base orthonormée de l'espace.

**Exemple(s) 160 :**

160.1 La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormée.

160.2 La famille des  $(x \mapsto \cos(k \times x))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une famille orthogonale de  $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire habituel : en effet, si  $i \neq j$  sont deux entiers compris entre 1 et  $n$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(i \times x) \times \cos(j \times x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((i+j) \times x) + \cos((i-j) \times x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((i+j) \times x)}{i+j} + \frac{\sin((i-j) \times x)}{i-j} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

**Propriété(s) 11.2.76 :** Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un espace préhilbertien. Alors :

1. Si elle est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est libre.
2. S'il s'agit d'une base orthonormée, alors :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle \cdot v_k$$

en particulier, les coordonnées de  $x$  dans cette base sont  $(\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle, \dots, \langle x, v_n \rangle)$ .

3. Réciproquement, si  $x$  et  $y$  ont pour coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  dans une base orthonormée :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k, \quad \text{donc} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

**Démonstration :**

1. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Supposons que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k = 0_E$$

Alors, comme la famille est orthogonale, si  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\lambda_i \times \|v_i\|^2 = \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \right\rangle = 0$$

donc comme  $v_i \neq 0_E$ ,  $\|v_i\| \neq 0$  d'où  $\lambda_i = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $i$ , la famille est donc libre.

2. Supposons que la famille est une base orthonormale. Alors, si  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  sont les coordonnées de  $x$  dans cette base :

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k$$

Alors, comme la famille est orthonormale, si  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\lambda_i \times \underbrace{\|v_i\|^2}_{=1} = \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \right\rangle = \langle x, v_i \rangle.$$

3. Le dernier point est un calcul direct. On a :

$$\left\langle \sum_{k=1}^n x_k \cdot v_k, \sum_{l=1}^n y_l \cdot v_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k \times y_l \times \underbrace{\langle v_k, v_l \rangle}_{=0 \text{ sauf si } k=l} = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k \times \underbrace{\|v_k\|^2}_{=1}.$$

■

**Théorème 11.2.37 (orthonormalisation de Gram-Schmidt) :** Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille libre de  $E$ , un espace préhilbertien réel. Alors il existe  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille orthonormée de  $E$  telle que :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

**Démonstration :** On procède par récurrence sur  $n$ .

1. si  $n = 1$ , il suffit de poser  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ .
2. supposons le résultat vrai pour toute famille libre de  $n$  vecteurs et considérons une famille libre de  $n+1$  vecteurs  $(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ . On applique le résultat à la famille des  $n$  premiers vecteur, ce qui nous donne une famille orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  telle que :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

De plus, le vecteur :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle v_{n+1}, e_k \rangle \cdot e_k \quad (11.1)$$

vérifie, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  :

$$\langle w_{n+1}, e_i \rangle = \langle v_{n+1}, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle v_{n+1}, e_k \rangle \times \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq k, =1 \text{ si } i=k} = \langle v_{n+1}, e_i \rangle - \langle v_{n+1}, e_i \rangle = 0$$

le vecteur  $w_{n+1}$  est donc orthogonal à tous les vecteurs de  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Pour le normaliser, on pose alors  $e_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|}$  en remarquant que  $w_{n+1}$  ne peut être nul car la famille est libre. Reste à remarquer que :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, v_{n+1}) \stackrel{11.1}{=} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, w_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}).$$

■

**Remarque(s) 103 :** 1. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base orthonormée.

2. La preuve de ce théorème nous donne en particulier une méthode pratique pour calculer la famille orthonormée à partir de la famille de départ.

### Exemple(s) 161 :

161.1 Utilisons ce procédé pour orthonormaliser la famille :

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1).$$

On pose :  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ . Puis :

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$



Enfin,

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2 = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

161.2 Remarquons maintenant que comme une fonction polynomiale de degré deux ou moins qui s'annule en trois points distincts est nulle, l'expression :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[x], \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=-1}^1 P(i) \times Q(i)$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[x]$ . Orthonormalisons la base canonique :

$$v_1 : x \mapsto 1, \quad v_2 : x \mapsto x, \quad v_3 : x \mapsto x^2$$

pour ce produit scalaire. On trouve :

$$e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1(x) = x - \langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1(x) = x, \quad e_2(x) = \frac{v_2(x)}{\|v_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

enfin,

$$w_3(x) = x^2 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1(x) - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2(x) = x^2 - \frac{2}{3}, \quad e_3(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( x^2 - \frac{2}{3} \right).$$

## 11.2.4 Orthogonal et supplémentaire

**Définition 11.2.84 :** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace préhilbertien réel  $E$ . On appelle orthogonal de  $A$  et on note  $A^\perp$  l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $A$ , c'est-à-dire :

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

### Exemple(s) 162 :

162.1 L'orthogonal à la droite du plan d'équation :

$$ax + by = 0$$

est l'espace vectoriel  $\text{Vect}((a, b))$ .

162.2 L'orthogonal au plan de l'espace d'équation :

$$ax + by + cz = 0$$

est l'espace vectoriel  $\text{Vect}((a, b, c))$ .

162.3 Attention ! L'orthogonal d'un ensemble dépend à priori du produit scalaire choisi. Par exemple, si l'on considère le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = x \times x' + 2y \times y' + x \times y' + y \times x'$$

le vecteur  $(1, 1)$  n'est pas orthogonal à la droite d'équation  $x + y = 0$  :  $\langle (1, 1), (1, -1) \rangle = -1 \neq 0$ .

**Propriété(s) 11.2.77 :** Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ ,  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration :** Clairement,  $0_E \in A^\perp$ . De plus, si  $(x, y) \in A^\perp$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall a \in A, \quad \langle x + y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \lambda x, a \rangle = \lambda \times \langle x, a \rangle = 0$$

donc  $x + y \in A^\perp$  et  $\lambda x \in A^\perp$ .

■

**Théorème 11.2.38 :** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  un espace préhilbertien réel. Alors  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$  :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

*Démonstration :* Procédons comme d'habitude :

1. Si  $x \in F \cap F^\perp$  alors par définition :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$$

donc  $x = 0_E$  par caractère défini de la norme.

2. Montrons maintenant que tout élément de  $E$  peut s'écrire comme la somme d'un élément de  $F$  et de son orthogonal. Soit  $x \in E$ . Alors par le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $F$ . On remarque que :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}_{\in F} + \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \right).$$

Et que le deuxième élément de cette somme appartient à l'orthogonal de  $F$  car :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left\langle e_k, x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0.$$

■

**Remarque(s) 104 :** 1. En particulier, si  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de

$E$ . Alors :  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ .

2. La quantité qui apparaît dans la preuve est appelé projeté du vecteur  $x$  sur  $F$ . Nous reviendrons dessus dans un chapitre ultérieur.

# Chapitre 12

## Intégration

### 12.1 Intégrales des fonctions en escalier

**Définition 12.1.85 :** Soit  $[a, b]$  un segment. On appelle subdivision de  $[a, b]$  un  $n$ -uplet de réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tel que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

**Définition 12.1.86 :** Soit  $[a, b]$  un segment. On appelle fonction étagée sur ce segment une fonction  $f$  telle qu'il existe une subdivision  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que :

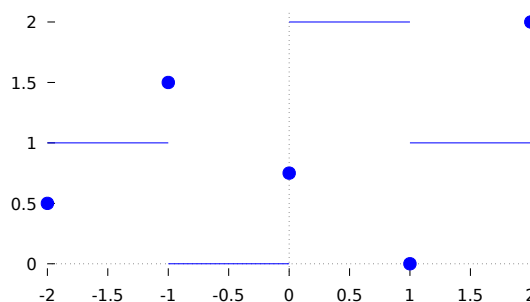
$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad f \text{ est constante sur } ]x_k, x_{k+1}[.$$

**Remarque(s) 105 :** On note  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ . Notez deux subtilités ici :

1. pour montrer qu'une fonction est en escalier, il s'agit de *trouver* une subdivision adaptée à  $f$ ,
2. on n'impose rien sur les valeurs de  $f$  aux bornes de l'intervalle de la subdivision.

**Exemple(s) 163 :**

163.1 La fonction suivante est en escalier :



163.2 Toute fonction constante est en escalier.

163.3 La fonction partie entière est en escalier sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

Comme on sait calculer l'aire d'un rectangle, il est possible de définir :

**Définition 12.1.87 :** Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$ . On définit par :

$$\int_a^b f(t) dt$$

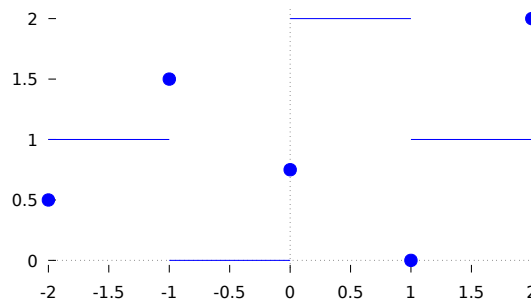
l'aire comprise entre l'axe  $O_x$  et la courbe de  $f$ , comptée positivement là où  $f$  est positive et négativement là où elle est négative.

**Remarque(s) 106 :** Il est parfois utile de quantifier la valeur de cette intégrale. Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une subdivision quelconque de  $[a, b]$  telle que  $f$  ait pour valeur constante  $a_k$  sur chaque intervalle  $]x_k, x_{k+1}[$ , alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \times (x_{k+1} - x_k).$$

**Exemple(s) 164 :**

164.1 L'intégrale sur  $[-2, 2]$  de la fonction  $f$  en escalier :



vaut  $\int_{-2}^2 f(t) dt = 4$ .

164.2 On a également :

$$\int_{-1}^2 [t] dt = 0.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates par définition :

**Propriété(s) 12.1.78 :** 1. (croissance de l'intégrale) Soit  $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ . Si  $f \leq g$  alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

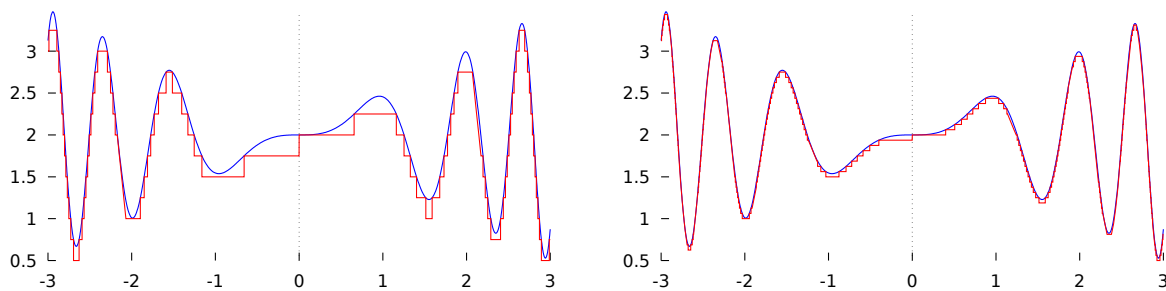
2. (relation de Chasles) Soit  $a \leq b \leq c$  et  $f \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{R})$ . Alors :  $f$  est aussi en escalier sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$  et :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

**Remarque(s) 107 :** En particulier, l'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive.

## 12.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , l'idée est de l'approcher par des fonctions en escalier.



Soit  $f$  une fonction définie sur le segment  $[a, b]$  et à valeurs réelles. On considère l'ensemble des fonctions étagées « en-dessous » de  $f$  et celles « au-dessus » de  $f$  :

$$\mathcal{E}_f^+ = \{g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}, \quad g \geq f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_f^- = \{g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}, \quad g \leq f\}.$$

**Définition 12.2.88 :** Une fonction  $f$  est dite Riemann-intégrable si les quantités :

$$\inf_{g \in \mathcal{E}_f^+} \int_a^b g(t) \, dt \quad \text{et} \quad \sup_{g \in \mathcal{E}_f^-} \int_a^b g(t) \, dt$$

sont égales. Cette valeur commune est alors notée  $\int_a^b f(t) \, dt$ .

**Exemple(s) 165 :**

165.1 Les fonctions en escalier sont intégrables : par croissance de l'intégrale, les inf et sup de la définition sont des max et min et leur intégrale au sens de Riemann est celle du paragraphe précédent.

**Propriété(s) 12.2.79 :** Les fonctions monotones sur  $[a, b]$  sont Riemann-intégrables.

**Démonstration :** Supposons  $f$  croissante, la preuve dans le cas décroissant est essentiellement la même. La subdivision que nous utiliserons est, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , celle donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_k = k \times \frac{b-a}{n} + a.$$

On considère les deux fonctions en escalier  $f_n^+ \in \mathcal{E}_f^+$  et  $f_n^- \in \mathcal{E}_f^-$  définies par la même valeur que  $f$  en chaque  $x_k$  et :

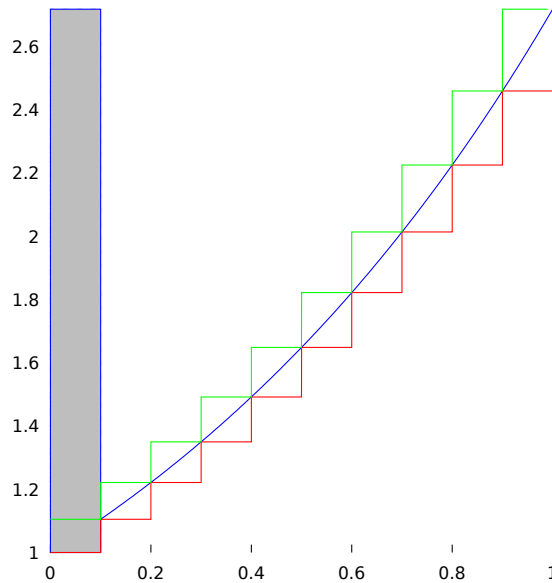
$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \forall x \in ]x_k, x_{k+1}[ , \quad f_n^+(x) = f(x_{k+1}) \quad \text{et} \quad f_n^-(x) = f(x_k).$$

Alors :

$$\int_a^b f_n^+(t) dt - \int_a^b f_n^-(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \times \frac{b-a}{n} = \frac{(f(b) - f(a)) \times (b-a)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

**Remarque(s) 108 :** Notez que toute la preuve se « lit » sur un dessin :



**Théorème 12.2.39 :** Les fonctions continues sur  $[a, b]$  sont Riemann-intégrables.

*Démonstration :* (hors programme) L'idée est exactement la même que pour les fonctions monotones. Commençons par prouver que, si  $\epsilon$  est strictement positif :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| \leq \frac{b-a}{n} \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \quad (12.1)$$

Dans le cas contraire, on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2, \quad |x_n - y_n| \leq \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\epsilon \times n}{b-a}.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il est alors possible d'extraire de la suite bornée  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  convergente puis de la suite bornée  $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  une suite extraite  $(y_{\psi(n)})_{n \geq 0}$  convergente. Comme  $|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \frac{b-a}{\psi(n)}$  ces deux suites ont même limite,  $c \in [a, b]$  et l'inégalité  $|f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| > \frac{\epsilon \times \psi(n)}{b-a}$  contredit alors la continuité de  $f$  en  $c$ .

Pour conclure, on prend la même subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  que pour les fonctions monotones et on pose (ce qui est possible par le théorème des bornes) :  $f_n^+ \in \mathcal{E}_f^+$  et  $f_n^- \in \mathcal{E}_f^-$  définies par la même valeur que  $f$  en chaque  $x_k$  et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \forall x \in ]x_k, x_{k+1}[ , \quad f_n^+(x) = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \quad \text{et} \quad f_n^-(x) = \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Alors par (12.1),

$$\left| \int_a^b f_n^+(t) dt - \int_a^b f_n^-(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right| \times \frac{b-a}{n} \leq \epsilon.$$

■

## 12.3 Propriétés de l'intégrale de fonctions continues

**Propriété(s) 12.3.80 :** 1. (*croissance de l'intégrale*) Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Si  $f \leq g$  alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

2. (*relation de Chasles*) Soit  $a \leq b \leq c$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, c], \mathbb{R})$ . Alors :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

**Démonstration :**

1. Soit  $u \in \mathcal{E}_f^-$  et  $v \in \mathcal{E}_g^+$ . Alors :  $u \leq f \leq g \leq v$  donc par croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$\int_a^b u(t) dt \leq \int_a^b v(t) dt$$

Ceci étant vrai pour toute  $u \in \mathcal{E}_f^-$  et  $v \in \mathcal{E}_g^+$ , on en déduit :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup_{u \in \mathcal{E}_f^-} \int_a^b u(t) dt \leq \inf_{v \in \mathcal{E}_g^+} \int_a^b v(t) dt = \int_a^b g(t) dt$$

2. Soit  $u \in \mathcal{E}_f^-$ . Alors par la relation de Chasles pour les fonctions en escalier :

$$\int_a^c u(t) dt = \int_a^b u(t) dt + \int_b^c u(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Ceci étant vrai pour tout  $u \in \mathcal{E}_f^-$ , on en déduit :

$$\int_a^c f(t) dt = \sup_{u \in \mathcal{E}_f^-} \int_a^c u(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

L'autre inégalité s'obtient de la même façon en considérant  $v \in \mathcal{E}_f^+$ . ■

**Remarque(s) 109 :** 1. Pour ne pas avoir à se poser la question du « sens » de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on pose, si  $b \leq a$  :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

et la relation de Chasles reste ainsi valable pour tout  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels.

2. En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive et celle d'une fonction négative est négative.

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Démonstration :** On remarque que  $f \leq |f|$  et que  $-|f| \leq f$ . Donc :

$$- \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

le résultat s'en déduit alors immédiatement. ■

**Exemple(s) 166 :**

166.1 Il faut savoir utiliser la croissance de l'intégrale pour calculer une limite. Par exemple :

$$0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times e^t dt \leq \frac{e}{n!}$$

donc par le théorème des gendarmes,  $I_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

166.2 Un peu plus subtil : une rapide étude sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $f(x) = x^n \times e^{-n \times x}$  montre qu'elle atteint un maximum en  $x = 1$ , donc :

$$0 \leq I_n = \int_0^n x^n \times e^{-n \times x} dx \leq \int_0^n e^{-n} dx = n \times e^{-n},$$

donc par le théorème des gendarmes,  $I_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Proposition 12.3.17 :** (caractère défini de l'intégrale) Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  **de signe constant**. Alors, si :

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

la fonction  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ .

**Démonstration :** Traitons le cas dans lequel  $f$  est positive. Alors si elle n'était pas l'absurde pas nulle sur  $[a, b]$  :

$$\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) > 0$$

Mais alors, par continuité en  $x_0$ ,

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [a, b], \quad f(t) \geq \frac{f(x_0)}{2}.$$

Donc, si l'on pose  $u$  la fonction en escalier valant  $\frac{f(x_0)}{2}$  sur  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [a, b]$  et 0 ailleurs,  $u \in \mathcal{E}_f^-$  donc :

$$0 < \eta \times \frac{f(x_0)}{2} \leq \int_a^b u(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$$

l'intégrale de la fonction  $f$  n'est donc pas nulle. Absurde ! ■

### Exemple(s) 167 :

167.1 Attention ! Ce théorème est faux si  $f$  n'est pas de signe constant. Par exemple, si  $f$  est continue, impaire sur  $[-a, a]$ ,  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .

167.2 Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Supposons que :

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

alors si  $f$  ne s'annulait pas, sur  $[a, b]$  elle serait de signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. Donc par la proposition, comme l'intégrale de  $f$  est nulle, le fonction  $f$  serait nulle, ce qui contredit (beaucoup) le fait qu'elle ne s'annule pas. Donc  $f$  s'annule en un point de  $[a, b]$ .

**Théorème 12.3.40 (théorème fondamental de l'analyse) :** Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in [a, b]$ . Alors la fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  sur  $[a, b]$  qui s'annule en  $x_0$ .

**Démonstration :** La seule chose non claire à montrer est que  $F$  est une primitive de  $f$ . Considérons  $x \in [a, b]$  et  $h$  positif tel que  $x + h \in [a, b]$ . Alors :

$$|F(x+h) - F(x) - h \times f(x)| = \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt.$$



Mais  $f$  est continue en  $x$ , donc si  $\epsilon$  est strictement positif :

$$\exists \eta > 0, \quad |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

donc, si  $h \leq \eta$  :

$$|F(x+h) - F(x) - h \times f(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq h \times \epsilon.$$

Ce qui implique :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \epsilon.$$

Et la même inégalité se montre de même si  $h$  est négatif, inférieur en valeur absolue à  $\eta$  (faites juste attention au « sens » des intégrales).

■

**Remarque(s) 110 :** Et la boucle est bouclée ! La définition de l'intégrale du chapitre « calcul de primitives » devient un théorème, ce qui nous permet de légitimer pour l'intégrale que nous venons de définir toutes les méthodes que nous avons alors utilisées :

1. linéarité de l'intégrale
2. calculs d'intégrales par recherche de primitives
3. intégration par parties
4. changement de variables

auxquelles se rajoutent maintenant l'interprétation géométrique de l'intégrale et ses conséquences.



## Chapitre 13

# Séries numériques

### 13.1 Généralités sur les séries

**Définition 13.1.89 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe. On dit que la série de terme général  $u_n$   $\sum u_n$  converge si la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge<sup>1</sup>. Dans ce cas, on note :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si elle ne converge pas, on dit que la série diverge.

**Exemple(s) 168 :**

168.1 Soit  $q \in \mathbb{C}$ . La série de terme général  $u_n = q^n$  converge si  $|q| < 1$ . En effet :

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - q}.$$

168.2 Cependant, la série  $\sum (-1)^n$  ne converge pas. En effet,

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = 1 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = 0$$

donc les suites extraites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  n'admettent pas la même limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Remarque(s) 111 :** Dans le cas où la série  $\sum u_n$  converge, on appelle suite des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \stackrel{\text{Not.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Propriété(s) 13.1.81 :** Si  $\sum u_n$  converge, alors :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que :  $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

1. c'est-à-dire admet une limite finie

**Remarque(s) 112 :** C'est surtout la contraposée que nous utiliserons en pratique. Si le terme général de la série ne tend pas vers 0, elle ne converge pas. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

**Exemple(s) 169 :**

169.1 La série  $\sum n$  diverge grossièrement.

169.2 Si  $|q| \geq 1$ , la série  $\sum q^n$  diverge grossièrement. Ceci inclut l'exemple de la série  $\sum (-1)^n$ .

169.3 Attention, certaines séries divergent bien qu'elles ne divergent pas grossièrement, comme le montre l'exemple (déjà traité) de la série  $\sum \frac{1}{n}$ . Notez cependant que l'idée pour montrer que cette série diverge est similaire, puisqu'on utilise que :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

**Propriété(s) 13.1.82 :** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes. Alors  $\sum (u_n + v_n)$  converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

De même, si  $\lambda$  est un scalaire,  $\sum \lambda \times u_n$  converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda \times u_k = \lambda \times \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que les deux identités sont vraies pour les sommes partielles puis de passer à la limite.

**Remarque(s) 113 :** Faites très attention ; le plus important est de retenir qu'il faut réfléchir avant de « séparer » une somme pour éviter de dire des bêtises ; dans le doute, écrivez toujours les sommes partielles.

## 13.2 Premières méthodes intégrales

### 13.2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule sert surtout à comparer une fonction à la série définie par ses développements limités.

**Théorème 13.2.41 (Formule de Taylor avec reste intégral) :** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ , soit  $a \in I$ . Alors, pour tout  $x \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \times (x-t)^n dt.$$

**Démonstration :** On raisonne par récurrence sur  $n$ , à l'aide d'intégrations par parties.

**Exemple(s) 170 :**

170.1 Bien souvent, on utilise le cas particulier suivant, dite inégalité de Taylor-Lagrange : si  $f^{(n+1)}$  est bornée (en  $n$ ) par une constante  $C$ , alors :

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \times (x-t)^n dt \right| \leq \frac{C \times (x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit les formules vraies pour tout réel  $x$  :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

### 13.2.2 Sommes de Riemann

Parfois, on reconnaît la subdivision « canonique » dans une série.

**Théorème 13.2.42 (sommes de Riemann) :** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Alors :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

**Démonstration :** Traitons le cas où  $f$  est  $K$ -lipschitzienne, ce qui est vrai en particulier si elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  par l'inégalité des accroissements finis. Notons :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad x_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \\ &\leq K \times \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = \frac{K}{2} \times \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

**Remarque(s) 114 :** On peut de même considérer les valeurs de  $f$  « à droite » plutôt qu'à gauche de chaque subdivision, ce qui donne :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

**Exemple(s) 171 :**

171.1 On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{4}.$$

171.2 On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3k^2}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{3t^2}{1+t^3} dt = [\ln(1+t^3)]_{t=0}^{t=1} = \ln(2).$$

## 13.3 Séries à termes positifs

**Propriété(s) 13.3.83 :** Soit  $\sum u_n$  une série à terme général positif. Alors  $\sum u_n$  converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

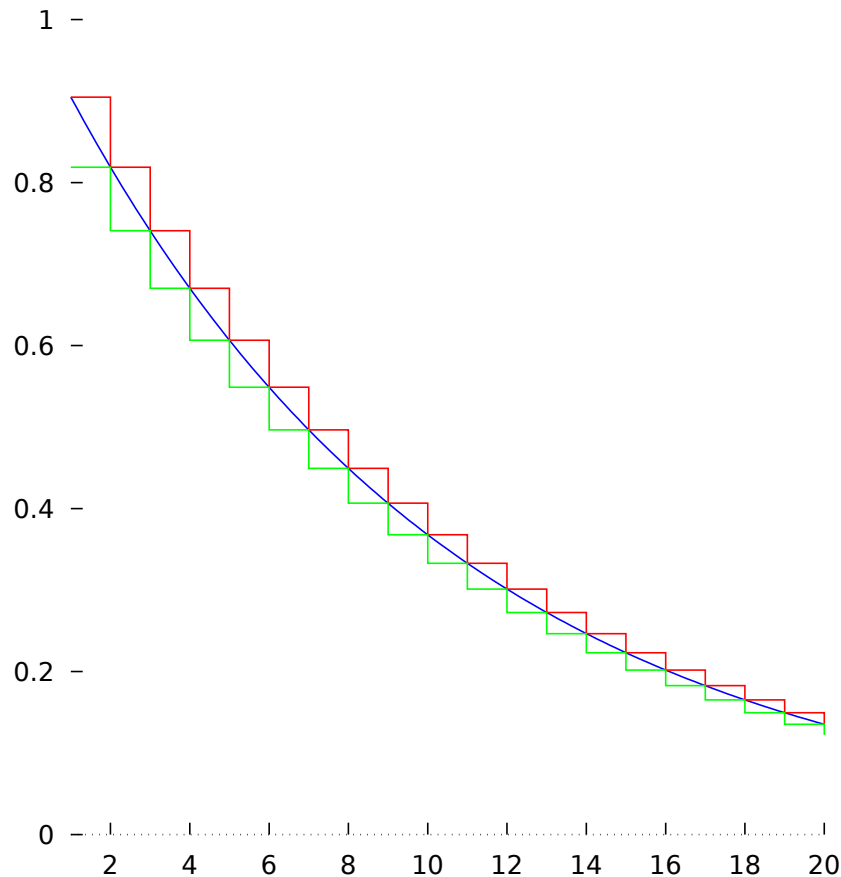
**Démonstration :** Concernant le sens direct, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

la suite des sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante, si elle est majorée, elle converge donc.

La réciproque est vraie car une suite convergente est bornée donc majorée. ■

Dans le cas où le terme général de la série est de la forme  $f(n)$  avec  $f$  positive, continue et décroissante sur  $[n_0, +\infty[$ , il est possible de comparer les sommes partielles de la série  $\sum f(n)$  (pour  $n \geq n_0$ ) à des intégrales de  $f$ . Tout est résumé par un dessin :



En effet, comme  $f$  est décroissante, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\forall x \in [n, n+1], \quad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n).$$

Puis, par la relation de Chasles :

$$S_{n+1} - f(n_0) = \sum_{k=n_0}^n f(k+1) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) = S_n.$$

Ces relations impliquent en particulier :

**Proposition 13.3.18 :** (séries de Riemann) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration :** Supposons que  $\alpha > 1$ . Alors la fonction  $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$  donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{t=1}^{t=n+1} = \frac{1 - (n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{1}{\alpha - 1}$$

La suite des sommes partielles de cette série à termes positifs étant majorée, elle converge donc. De même, si  $\alpha \leq 1$ , on a de même, par croissance de l'intégrale :

$$\ln(n+1) - \ln(2) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par théorème de comparaison, la suite des sommes partielles de la série tend vers  $+\infty$ . Elle ne converge donc pas. ■

### Exemple(s) 172 :

172.1 Étudions la convergence de la série  $\sum \frac{1}{n \times \ln(n)}$ . On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times \ln(k)} - \frac{1}{2 \ln(2)} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \times \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_{t=2}^{t=n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

Les sommes partielles de la série tendent donc vers  $+\infty$ , elle ne converge donc pas.

Nous disposons maintenant de deux types de séries « de référence » : les séries géométriques et les séries de Riemann, auxquelles nous allons comparer les autres séries pour en étudier la convergence. Commençons par un cas simple :

**Propriété(s) 13.3.84 :** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes **positifs**. On suppose que pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ . Alors si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  aussi et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que, pour tout entier naturel  $n$ , si  $\sum v_n$  converge :

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Donc la suite des sommes partielles de  $\sum u_n$  est bornée et puisque le terme général de la suite est positif, elle converge. L'inégalité des limites s'obtient alors par passage à la limite. ■

**Remarque(s) 115 :** Bien-entendu, le résultat de convergence reste vrai si l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. Attention cependant : il n'y a plus inégalité pour les sommes dans ce cas.

### Exemple(s) 173 :

173.1 La série  $\sum \frac{1}{n^2 \times \ln^2(n)}$  converge car, pour  $n \geq 3$  :  $\frac{1}{n^2 \times \ln^2(n)} \leq \frac{1}{n^2}$  et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites quelconques, on écrit :

$$\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \quad \text{s'il existe } (\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ qui tend vers } 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \epsilon_n \times v_n \\ u_n &\sim v_n \quad \text{si } u_n = v_n + o(v_n) \\ u_n &= O(v_n) \quad \text{s'il existe une constante } C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq C \times |v_n| \end{aligned}$$

**Propriété(s) 13.3.85 :** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes **positifs**. Alors :

1. Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  aussi.
2. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  aussi.
3. Si  $u_n \sim v_n$  alors  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $\sum u_n$  converge.

**Démonstration :** Le premier point est une conséquence immédiate de la propriété précédente. Le deuxième est une conséquence du premier. Quand qu troisième, on remarque que  $u_n \sim v_n$  implique  $u_n = O(v_n)$  donc par le premier point la convergence de  $\sum v_n$  implique celle de  $\sum u_n$  et  $v_n = O(u_n)$ , ce qui montre de même la réciproque. ■

### Exemple(s) 174 :

174.1 La série  $\sum \frac{n}{n^2+1}$  diverge. En effet :

$$\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$$

et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

174.2 La série  $\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$  est convergente. En effet :

$$\frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \sim \frac{1}{e^n}$$

et la série géométrique  $\sum e^{-n}$  de raison  $e^{-1} < 1$  converge.

174.3 La série  $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}+1}$  diverge. En effet :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n} \times \exp\left(\frac{1}{n} \times \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

174.4 La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge. En effet :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1} \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 2k}$$

et l'on reconnaît les sommes partielles de la série  $\sum \frac{1}{4n^2 - 2n}$  qui converge car

$$\frac{1}{4n^2 - 2n} \sim \frac{1}{4n^2}$$

et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. De plus :

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

donc  $(S_{2n+1})$  et  $(S_{2n})$  convergent vers la même limite.

174.5 Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites strictement positives vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

montrons que  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum v_n$  converge.

En effet, supposons que  $\sum u_n$  converge. Alors en particulier,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $v_n \sim u_n$ . Donc  $\sum v_n$  converge.

Réciproquement, si  $\sum v_n$  converge, alors  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , mais  $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$  (au moins à partir d'un certain rang) donc  $u_n \sim v_n$  puis  $\sum u_n$  converge.



## 13.4 Séries à termes quelconques

Pour traiter la convergence d'une série à termes quelconques, on essaye de se ramener au cas des séries à termes positifs grâce à la notion de convergence absolue :

**Définition 13.4.90 :** On dit que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Proposition 13.4.19 :** Une série absolument convergente est convergente.

**Démonstration :** Traitons le cas réel. Supposons que  $\sum |u_n|$  converge. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = -\min(u_n, 0).$$

Alors ces deux suites sont positives et vérifient pour tout entier naturel  $u_n^+ \leq |u_n|$  et  $u_n^- \leq |u_n|$ . Donc comme  $\sum |u_n|$  converge,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_n^+ - u_n^-$$

donc  $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$  converge.

Dans le cas complexe, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n)$$

et que par les inégalités géométriques  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  les suites réelles  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  sont absolument convergentes donc convergentes. ■

**Remarque(s) 116 :** Attention ! La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la série convergente  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  qui n'est pas absolument convergente car  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Exemple(s) 175 :**

175.1 La série  $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$  est absolument convergente. En effet :

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente. Donc  $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$  est convergente.

175.2 La série  $\sum \frac{j^n}{n^2}$  converge absolument donc converge. En effet :

$$\left| \frac{j^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

175.3 La série  $\sum u_n = \sum \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin \frac{1}{n} \right)$  est absolument convergente. En effet :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \times \left( \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

En particulier,  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$  donc la série est absolument convergente donc convergente.

**Remarque(s) 117 :** Ce dernier exemple nous inspire la réflexion suivante. Si l'on cherche à établir la convergence de la suite  $\sum u_n$  et qu'il existe une suite  $(v_n)$  **positive** telle que  $\sum v_n$  converge et :

$$u_n = O(v_n)$$

alors  $|u_n| = O(v_n)$  et donc  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Pour étudier la convergence d'une série numérique  $\sum u_n$  à termes quelconques, on peut :

1. vérifier si elle est grossièrement divergente puis,
2. analyser si elle est absolument convergente, en comparant  $|u_n|$  à une série de « référence » : de Riemann ou géométrique, ou plus rarement à une intégrale
3. si elle n'est pas absolument convergente, on ne peut pas conclure... on peut cependant revenir aux sommes partielles et utiliser une des « astuces » suivantes :
  - (a) reconnaître une somme télescopique
  - (b) reconnaître un développement limité (Taylor avec reste intégral)
  - (c) regrouper les termes deux à deux (séries du type  $\sum (-1)^n u_n$ ).

### Exemple(s) 176 :

176.1 Étudions, suivant les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la convergence de la série  $\sum u_n$ , où :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n \times n^\alpha}{n^{2\alpha}}.$$

- (a) Si  $\alpha \leq 0$ ,  $(u_n)$  ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
- (b) Analysons la convergence absolue. On a  $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$  et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ . La série est donc absolument convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- (c) Reste à étudier le cas  $\alpha \in ]0, 1]$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

- i. La série  $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$  est une série de Riemann qui converge si et seulement si  $\alpha \in ]1/2, 1]$ .
- ii. Montrons que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge ; on a :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(2k)^\alpha} - \frac{1}{(2k-1)^\alpha} \right)$$

Mais :

$$\frac{1}{(2k-1)^\alpha} - \frac{1}{(2k)^\alpha} = \frac{1}{(2k-1)^\alpha} \times \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2k} \right)^\alpha \right) = \frac{\alpha}{(2k-1)^\alpha \times (2k)} + o\left( \frac{1}{(2k-1)^\alpha \times (2k)} \right)$$

et  $\frac{1}{(2k-1)^\alpha \times (2k)} \sim \frac{1}{(2k)^{\alpha+1}}$  converge (car  $\alpha > 0$ ) donc  $(S_{2n})$  converge et comme le terme général de la série tend vers 0,  $(S_{2n+1})$  converge vers la même limite.

finalement la série converge dans ce cas si et seulement si  $\alpha \in ]1/2, 1]$ .

**Propriété(s) 13.4.86 :** Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. Alors :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

**Démonstration :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a, par l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$$

et le résultat se déduit par passage aux limites, qui existent car la convergence absolue implique la convergence.



**Remarque(s) 118 :** Attention ! Cette propriété n'a pas de sens si la série n'est pas absolument convergente.

## 13.5 Application aux suites

**Propriété(s) 13.5.87 :** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

**Démonstration :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On reconnaît dans les somme partielles une suite télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

et la propriété est maintenant immédiate.



**Exemple(s) 177 :**

177.1 Nous allons montrer la formule de Stirling (qu'il serait bon de connaître) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

- (a) Posons, pour  $n \geq 1$  :  $u_n = \frac{n! \times e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ . Pour montrer la convergence de  $(u_n)$ , il suffit de montrer celle de :  $(\ln(u_n))$  donc celle de la série  $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ . On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times e\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

cette série est absolument convergente, donc convergente.

- (b) On en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$n! \sim C \times \sqrt{n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Pour calculer cette constante, on considère les intégrales de Wallis :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ , ce qui sera fait dans le prochain DM.



## Chapitre 14

# Applications linéaires, matrices

### 14.1 Définition et premiers exemples

#### 14.1.1 Applications linéaires

**Définition 14.1.91 :** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est appelée **application linéaire** si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque(s) 119 :** 1. Si  $f$  est une application linéaire alors, (en prenant  $\lambda = 0$  dans le deuxième point par exemple) :  $f(0_E) = 0_F$ . C'est en particulier utile pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

2. Si l'on souhaite condenser un peu le travail lorsqu'on montre qu'une application  $f$  est linéaire, il suffit de montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

il suffit alors de prendre  $\lambda = 1$  pour obtenir la compatibilité avec la somme et  $x = 0_E$  pour avoir celle avec le produit externe.

3. On parle d'**endomorphismes** si  $E = F$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

#### Exemple(s) 178 :

178.1 Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . L'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

est linéaire si et seulement si  $b = 0$ .

178.2 L'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

n'est pas linéaire.

178.3 L'application  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y)$$

est linéaire.

178.4 L'application qui à une fonction associe sa dérivée est une application linéaire de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  dans  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ .

178.5 L'application qui à une fonction continue sur  $[a, b]$  associe son intégrale sur  $[a, b]$  est une application linéaire de  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ .

178.6 Plus généralement si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  préhilbertien, pour tout  $y \in E$  fixé, l'application

$$x \in E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

est linéaire.

178.7 Cependant, l'application  $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$  n'est pas linéaire.

**Propriété(s) 14.1.88 :** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, c'est-à-dire qu'il contient le fonction nulle et :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f + g \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{L}(E, F).$$

De plus, si  $G$  est un troisième  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F) \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

**Démonstration :** Montrons le dernier point, les deux autres se montrent de la même façon. Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$(g \circ f)(x + \lambda \cdot y) = g(f(x + \lambda \cdot y)) \underset{f \in \mathcal{L}(E, F)}{=} g(f(x) + \lambda \cdot f(y)) \underset{g \in \mathcal{L}(F, G)}{=} g(f(x)) + \lambda \cdot g(f(y)) = (g \circ f)(x) + \lambda \cdot g \circ f(y).$$

■

## 14.1.2 Matrices et applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe,  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie, donc on note  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_m)$  deux bases respectives. Commençons par remarquer qu'une **application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par l'image de  $\mathcal{B}_E$** , plus précisément :

$$\forall x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k \in E, \quad f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f(e_k)$$

donc il est nécessaire et suffisant de connaître les valeurs des  $f(e_k)$  pour  $1 \leq k \leq n$  pour connaître l'application  $f$ . Mais on peut aller plus loin : chacun des vecteurs  $f(e_k)$  est entièrement déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}_F$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists ! (a_{i,k})_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}, \quad f(e_k) = \sum_{i=1}^m a_{i,k} \cdot f_i \quad (14.1)$$

**Définition 14.1.92 :** On appelle *matrice de  $f$  dans le couple de bases  $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$*  et on note  $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$  la matrice :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = (a_{i,k})_{(i,k) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

**Remarque(s) 120 :** 1. Remarquez que cette matrice détermine entièrement l'application linéaire  $f$ . Plus précisément, si l'on note  $\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$  le vecteur colonne des coordonnées de  $x \in E$  dans la base  $\mathcal{B}_E$ , l'équation (14.1) se réécrit<sup>1</sup>

$$\forall x \in E, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

2. En particulier, si  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ , l'application :

$$u_A : X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \mapsto A \times X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

est une application linéaire, dont la matrice dans les bases canoniques est  $A$ .

1. pour le produit de matrices !

3. Une façon de se représenter la matrice de  $f$  est de l'écrire de la façon suivante :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

4. Si  $u$  est un endomorphisme, il est possible de choisir deux bases différentes de  $E$  pour calculer la matrice de  $u$  ou seulement une base, dans ce dernier cas, on écrit simplement  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

### Exemple(s) 179 :

179.1 L'application linéaire  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y)$$

admet pour matrice dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais attention ! Si l'on considère d'autres bases, par exemple :

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 0)),$$

on a :  $g((1, 1, 1)) = (3, 3) = 3.(1, 1) + 0.(1, 0)$ ,  $g((1, 1, 0)) = (2, 3) = 3.(1, 1) + (-1).(1, 0)$  et  $g((1, 0, 0)) = (1, 1) = 1.(1, 1) + 0.(1, 0)$  donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

179.2 Dans  $\mathbb{R}^2$ , la rotation  $r_\theta$  de centre  $(0, 0)$  et d'angle  $\theta$  est une application linéaire. Sa matrice dans la base canonique est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

179.3 Soit  $E$  de dimension  $n$ . La matrice de l'application linéaire  $\text{Id}_E$  est, pour toute base  $\mathcal{B}_E$  de  $E$  :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E) = I_n.$$

179.4 Considérons maintenant l'application linéaire  $\varphi$  de dérivation dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[x]$ . Si l'on note  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de cet espace vectoriel, alors  $e'_0 = 0$  et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (e_k)'(x) = k \times e_{k-1}(x).$$

Donc dans cette base, la matrice de la dérivation est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Propriété(s) 14.1.89 :** Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels,  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$  des bases respectives de ces espaces vectoriels. Alors :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u + v) = \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) + \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(v) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda.u) = \lambda. \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u).$$

De plus :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

**Démonstration :** Montrons le dernier point. Les autres se démontrent de la même façon. Par définition :

$$\forall x \in E, \text{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \quad \forall y \in F, \text{mat}_{\mathcal{B}_G}(g(y)) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$$

on en déduit, en prenant  $y = f(x)$  dans la deuxième expression :

$$\forall x \in E, \text{mat}_{\mathcal{B}_G}(g(f(x))) = \underbrace{(\text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))}_{=\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f)} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

■

**Remarque(s) 121 :** En particulier, l'application qui associe à un endomorphisme sa matrice dans un couple de bases donné est une application linéaire.

## 14.2 Noyau, image et rang d'une application linéaire

### 14.2.1 Noyau d'une application linéaire.

**Définition 14.2.93 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle noyau de  $u$  l'ensemble :

$$\text{Ker}(u) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\}.$$

**Remarque(s) 122 :** 1. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, il s'agit donc de résoudre l'équation  $f(x) = 0_F$  d'inconnue  $x \in E$ .

2. Par analogie, si  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  est une matrice, on appelle noyau de la matrice  $A$  l'ensemble :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{p,1}\}.$$

Si  $A$  est la matrice de  $u$  pour le couple de bases  $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ ,  $\text{Ker}(A)$  représente les coordonnées des éléments de  $\text{Ker}(u)$  dans la base  $\mathcal{B}_E$ .

**Exemple(s) 180 :**

180.1 L'application linéaire  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y)$$

admet pour noyau :

$$\text{Ker}(g) = \{(-2z, z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

plus généralement, pour déterminer un noyau d'une application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^q$ , il s'agit de résoudre un système, ce qui se fait à l'aide du pivot de Gauß.

180.2 On a :  $\text{Ker}(\text{Id}_E) = \{0_E\}$ ,  $\text{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ .

180.3 Le noyau de l'application linéaire de dérivation est constitué des fonctions constantes.

**Propriété(s) 14.2.90 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

1.  $\text{Ker}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
2.  $u$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ .



**Démonstration :**

1. (a)  $0_E \in \text{Ker}(u)$  car  $u(0_E) = 0_F$   
 (b) si  $(x, y) \in \text{Ker}(u)^2$ , alors  $u(x) = 0_F$  et  $u(y) = 0_F$  donc comme  $u$  est compatible avec la somme,  $u(x + y) = u(x) + u(y) = 0_F$ , d'où  $x + y \in \text{Ker}(u)$   
 (c) si  $x \in \text{Ker}(u)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $u(x) = 0_F$  donc par compatibilité de  $u$  avec le produit extérieur,  $u(\lambda.x) = \lambda.u(x) = \lambda.0_F = 0_F$ .
2. Clairement, si  $u$  est injective,  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ . Réciproquement, si  $x$  et  $y$  vérifient  $u(x) = u(y)$  alors comme  $u$  est linéaire :

$$u(x - y) = 0_F$$

donc  $x - y \in \text{Ker}(u) = \{0_E\}$  donc  $x - y = 0_E$  et finalement  $x = y$ . ■

### 14.2.2 Image et rang d'une application linéaire.

L'image d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est définie de la même façon que pour une application quelconque :

$$\boxed{\text{Im}(u) = u(E) = \{u(x), \quad x \in E\}.$$

**Remarque(s) 123 :** 1. Par analogie, si  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  est une matrice, on appelle image de la matrice  $A$  l'ensemble :

$$\text{Im}(A) = \{A \times X, \quad X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})\}.$$

Si  $A$  est la matrice de  $u$  pour le couple de bases  $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ ,  $\text{Im}(A)$  représente les coordonnées des éléments de  $\text{Im}(u)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .

2. Une méthode pour calculer une base de l'image d'une application linéaire est d'utiliser le fait suivant :

$$\boxed{\text{si } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est génératrice de } E \text{ alors } (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est génératrice de } \text{Im}(E)}$$

il suffit donc d'extraire de la famille génératrice  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  une famille libre pour trouver une base de l'image de  $u$ .

**Exemple(s) 181 :**

181.1 L'image de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est  $\text{Vect}({}^t(1, 0, 0, 0), {}^t(0, 1, 0, 0), {}^t(0, 0, 1, 1))$ . Comme la famille de ces trois vecteurs est clairement libre, il s'agit donc d'une base de l'image de  $A$ .

181.2 L'application linéaire  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y)$$

admet pour image  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ .

181.3 On a :  $\text{Im}(\text{Id}_E) = E$ ,  $\text{Im}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0_E\}$ .

**Propriété(s) 14.2.91 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
2.  $u$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(u) = F$ .

**Démonstration :** Le deuxième point est vrai pour toute application. Quand au premier :

1.  $0_F \in \text{Im}(u)$  car  $u(0_E) = 0_F$
2. si  $(y_1, y_2) \in \text{Im}(u)^2$ , alors il existe  $(x_1, x_2) \in E^2$ ,  $u(x_1) = y_1$  et  $u(x_2) = y_2$  donc comme  $u$  est compatible avec la somme,  $u(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ , d'où  $y_1 + y_2 \in \text{Im}(u)$
3. si  $y \in \text{Im}(u)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il existe  $x \in E$ , alors  $u(x) = y$  donc par compatibilité de  $u$  avec le produit extérieur,  $u(\lambda.x) = \lambda.u(x) = \lambda.y$  donc  $\lambda.y \in \text{Im}(u)$ .

■

**Définition 14.2.94 :** Si  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie, on dit que  $u$  est de rang fini et on appelle rang de  $u$  la quantité :

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)).$$

**Théorème 14.2.43 (théorème du rang) :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est de rang fini et :

$$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E).$$

**Démonstration :** Commençons par remarquer que comme  $E$  admet une famille génératrice finie,  $\text{Im}(E)$  admet pour famille génératrice finie l'image de cette famille. Donc  $u$  est de rang fini. Considérons maintenant deux bases :

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ de } \text{Ker}(u) \text{ et } (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_m = f(x_m)) \text{ de } \text{Im}(u).$$

Nous allons montrer que la famille  $(k_1, \dots, k_n, x_1, \dots, x_m)$  est une base de  $E$ , le théorème s'en déduit alors immédiatement.

1. Soit  $x \in E$ . Alors  $f(x) \in \text{Im}(u)$  donc :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad u(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k.y_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k.u(x_k) = u\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k\right).$$

Mais alors,  $x - \sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k \in \text{Ker}(u)$  donc :

$$\exists (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x - \sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k = \sum_{i=1}^n \mu_i.k_i.$$

Le vecteur  $x$  s'écrit donc comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille, qui est donc génératrice.

2. Supposons maintenant que, pour  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$  et  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k + \sum_{i=1}^n \mu_i.k_i = 0_E$$

alors, en appliquant  $u$  et en se souvenant que les  $k_i$  sont dans le noyau de  $u$  :

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k.\underbrace{u(x_k)}_{=y_k} = u\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k\right) = u\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k.x_k + \sum_{i=1}^n \mu_i.k_i\right) = 0_F$$

donc comme la famille  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  est libre, tous les  $\lambda_i$  sont nuls. On a finalement l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i.k_i = 0_E$$

qui implique la nullité de tous les  $\mu_i$  car la famille  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  est libre.

■

**Remarque(s) 124 :** Ce théorème nous permet, en dimension finie connue, de « réduire » un peu le travail à effectuer pour calculer un noyau et une image :

1. (le plus souvent) si l'on a calculé le noyau d'une application linéaire, on peut grâce au théorème du rang en déduire la dimension de l'image. Il suffit alors de trouver le bon nombre de vecteurs linéairement indépendants de l'image pour en obtenir une base,
2. (parfois) si l'on a calculé le rang ou l'image de l'application linéaire, le théorème peut nous permettre de réduire de même les calculs nécessaires à la détermination du noyau.

### Exemple(s) 182 :

182.1 Soit  $a$  un réel. On considère l'application linéaire définie par :

$$f((1, 0, 0)) = (1, 0, a) \quad f((0, 1, 0)) = (a, 0, a), \quad f((0, 0, 1)) = (a, a, 1)$$

sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a \times (1-a) & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

- (a) si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ ,  $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$  donc par le théorème du rang,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ ,
- (b) si  $a = 0$  alors :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1, 0))$  donc par le théorème du rang,  $\text{Im}(f)$  est de dimension deux. Donc, comme la famille  $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$  est libre,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ ,
- (c) si  $a = 1$ ,  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$  donc par le théorème du rang,  $\text{Im}(f)$  est de dimension deux. Donc, comme la famille  $(1, 0, 1), (1, 1, 1)$  est libre,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 1))$ .

182.2 Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'application linéaire :

$$\varphi_a : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_a(P) = P(a)$$

est clairement surjective : pour tout  $\lambda \in \mathbb{R} : \varphi_a(\lambda) = \lambda$ . Donc par le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(u)) = 4 - 1 = 3$ . Il suffit alors de remarquer que les fonctions : définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_1(x) = x - a, \quad f_2(x) = (x - a)^2, \quad f_3(x) = (x - a)^3$$

forment une famille libre à trois éléments de  $\text{Ker}(u)$ . Donc  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ .

## 14.3 Isomorphismes d'espaces vectoriels

### 14.3.1 Définition et premières propriétés

**Définition 14.3.95 :** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que  $u$  est un isomorphisme si  $u$  est bijectif. Si  $E = F$ , on parle d'automorphisme.

**Remarque(s) 125 :** 1. On note  $\mathcal{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel  $E$ .

2. Si  $u$  est un isomorphisme, alors  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$  et  $\text{Im}(u) = F$ .
3. Par le théorème du rang, si  $u$  est un isomorphisme et  $E$  ou  $F$  est de dimension finie, alors les deux espaces sont de dimension finie et :

$$\dim(E) = \dim(F).$$

4. On en déduit que le rang d'une application linéaire n'est pas modifié par la composition par un isomorphisme :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{GL}(F), \forall w \in \mathcal{GL}(E), \quad \text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u), \quad \text{rg}(u \circ w) = \text{rg}(u).$$

**Démonstration :** Dans le premier cas, comme  $v|_{\text{Im}(u)}$  est injective, par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(v \circ u)) = \dim(\text{Im}(v|_{\text{Im}(u)})) = \dim(\text{Im}(u)).$$

Dans le deuxième, comme  $\text{Im}(w) = E$  :

$$\dim(\text{Im}(u \circ w)) = \dim(\text{Im}(u|_{\text{Im}(w)})) = \dim(\text{Im}(u)).$$

■

### Exemple(s) 183 :

183.1 L'identité est un isomorphisme pour tout espace vectoriel  $E$ .

183.2 Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies  $\dim(E) = n$  et  $\dim(F) = m$ , de bases respectives  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Alors l'application linéaire :

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels (car la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases la détermine entièrement). En particulier :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

183.3 Soit  $(p, q) \in \mathbb{K}^2$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $S_0$  l'espace vectoriel :

$$S_0 = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \quad y'' + q \times y + p \times y = 0\}$$

Alors si  $t_0 \in I$  l'application linéaire :

$$\eta : \begin{cases} S_0 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est une simple réécriture du théorème qui affirme qu'un problème de Cauchy admet une unique solution. En particulier, on retrouve que :

$$\dim(S_0) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Sauriez-vous donner de même un isomorphisme pour les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un ?

183.4 Soit  $(p, q) \in \mathbb{K}^2$ . On note  $R$  l'espace vectoriel :

$$R = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + q \times u_{n+1} + p \times u_n = 0\}$$

Alors l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} R & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Démonstration :** En effet, si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + q \times u_{n+1} + p \times u_n = 0$$

et  $u_0 = u_1 = 0$  alors par une récurrence immédiate, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 0$ . Donc  $\text{Ker}(\varphi)$  est réduit à la suite nulle,  $\varphi$  est donc injective.

De plus, si  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ , alors les équations :

$$v_0 = a, v_1 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + q \times v_{n+1} + p \times v_n = 0$$

définissent une unique suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui vérifie  $\varphi((v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a, b)$ . Donc  $\varphi$  est surjective.

■

En particulier,  $\dim(R) = \dim(\mathbb{K}^2) = 2$ . Nous ne sommes plus qu'à un pas des théorèmes qui décrivent les suites récurrentes linéaires d'ordre deux. Traitons le cas complexe :

**Démonstration :** Comme  $R$  est de dimension deux, pour le décrire, il suffit de donner une famille libre à deux éléments de  $R$ . Il y a deux cas, suivant la valeur du déterminant  $\delta$  de l'équation caractéristique :

$$z^2 + q \times z + p = 0$$

- (a) Si  $\delta \neq 0$ , notons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux solutions (différentes!) de l'équation caractéristique. Alors les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (\lambda_1)^n, \quad b_n = (\lambda_2)^n$$

appartiennent à  $R$ ; en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} + q \times a_{n+1} + p = \lambda_1^{n+2} + q \times \lambda_1^{n+1} + p \times \lambda_1^n = \lambda_1^n \times (\lambda_1^2 + q \times \lambda_1 + p) = 0$$

et de même pour  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrons maintenant que la famille constituée de ces deux suites est libre. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a_n + \beta \times b_n = 0$$

alors c'est en particulier vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$  d'où :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \times \lambda_1 + \beta \times \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta \times (\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \end{cases}$$

donc comme  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\alpha = \beta = 0$ .

- (b) Si  $\delta = 0$ , on considère maintenant  $\lambda$  l'unique solution de l'équation caractéristique et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda^n, \quad b_n = n \times \lambda^{n-1}$$

Alors la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $R$  de même que dans le cas de discriminant nul. Pour  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on remarque que comme  $\lambda = -\frac{q}{2}$  est racine de l'équation caractéristique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} + q \times b_{n+1} + p \times b_n = n \times \lambda^{n-1} \times (\lambda^2 + q \times \lambda + p) + \lambda^n \times (2\lambda + q) = 0.$$

Reste à montrer que ces deux suites sont linéairement indépendantes. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a_n + \beta \times b_n = 0$$

alors c'est en particulier vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$  d'où :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha \times \lambda + \beta = 0 \end{cases}$$

donc  $\alpha = \beta = 0$ . ■

**Propriété(s) 14.3.92 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  et  $F$  ont de dimension finie et que  $\dim(E) = \dim(F)$ .

Alors sont équivalents :

1.  $u$  est injective,
2.  $u$  est surjective,
3.  $u$  est bijective.

**Démonstration :** Le point 3 implique par définition les deux premiers ; Pour les réciproques, on écrit le théorème du rang :

$$\dim(F) = \dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)).$$

1. Si  $u$  est injective,  $\dim(\text{Ker}(u)) = 0$  donc  $\text{rg}(u) = \dim(F)$ , l'application  $u$  est donc aussi surjective,
2. si  $u$  est surjective,  $\text{rg}(u) = \dim(F)$  donc  $\dim(\text{Ker}(u)) = 0$ , l'application  $u$  est donc aussi injective. ■

**Remarque(s) 126 :** 1. Un cas particulier de ce théorème est celui des endomorphismes en dimension finie.

2. Attention ! Ce théorème est faux si l'on n'est pas en dimension finie. Par exemple, l'application linéaire de dérivation sur  $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est surjective car toute fonction dérivable admet une primitive mais pas injective car les fonctions constantes sont de dérivée nulle.

**Propriété(s) 14.3.93 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  un isomorphisme. Alors  $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

*Démonstration :* Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(y_1, y_2) \in F^2$ . Alors comme  $u$  est surjective, il existe  $(x_1, x_2) \in E^2$  tels que :

$$y_1 = u(x_1) \quad \text{et} \quad y_2 = u(x_2).$$

On en déduit, comme  $u$  est linéaire :

$$u^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = u^{-1}(u(x_1) + \lambda u(x_2)) = u^{-1}(u(x_1 + \lambda x_2)) = x_1 + \lambda x_2 = u^{-1}(y_1) + \lambda u^{-1}(y_2).$$

■

**Propriété(s) 14.3.94 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie. Alors :

1.  $u$  est surjective si et seulement si l'image par  $u$  d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$ ,
2.  $u$  est injective si et seulement si l'image par  $u$  d'une famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ ,
3.  $u$  est bijective si et seulement si l'image par  $u$  d'une base de  $E$  est une base de  $F$ .

*Démonstration :*

Le premier point a déjà été vu et le troisième est clairement une conséquence du deuxième. Montrons le deuxième. Supposons que  $u$  est injective, et soit  $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ . Supposons que :

$$u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u(e_k) = 0_F$$

alors comme  $u$  est injective,  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = 0_E$  donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Réciproquement, supposons que l'image de toute famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ . Soit  $x \in \text{Ker}(u)$ . Alors  $u(x) = 0_F$  donc la famille  $u(x)$  n'est pas libre. Par contraposée la famille  $x$  n'est pas libre non plus. Donc  $x = 0_E$ .

■

**Exemple(s) 184 :**

184.1 En particulier, si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  sont deux bases de  $E$ , l'endomorphisme défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(e_i) = e'_i$$

est un automorphisme. On parle d'endomorphisme de « changement de base ».

## 14.3.2 Lien avec les matrices inversibles

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

**Propriété(s) 14.3.95 :** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est un isomorphisme si et seulement si Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$  est inversible. De plus, dans ce cas :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}).$$

*Démonstration :* Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est un isomorphisme, alors :

$$u \circ u^{-1} = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$$

donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F}(\text{Id}_F) = I_{\dim(F)}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E) = I_{\dim(E)}.$$

La matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$  est donc inversible et :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}).$$

La réciproque est essentiellement liée au fait que l'application  $\varphi$  qui à une application linéaire associe sa matrice dans un couple de bases est un isomorphisme. Si  $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$  est inversible, alors comme  $\varphi$  est surjective, il existe  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) = \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)^{-1}.$$

Puis, comme  $\varphi$  est injective

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) = I_{\dim(F)} = \text{mat}_{\mathcal{B}_F}(\text{Id}_F), \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = I_{\dim(E)} = \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)$$

implique  $u \circ v = \text{Id}_F$  et  $v \circ u = \text{Id}_E$ . ■

**Remarque(s) 127 :** En particulier, le rang d'une application linéaire est le même que celui de la matrice dans une base quelconque.

**Définition 14.3.96 :** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et on note  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  la matrice de l'automorphisme de changement de base  $u_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ , dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées dans l'ancienne base des vecteurs de la nouvelle base.

**Remarque(s) 128 :** Il existe une autre façon de voir la même matrice. Il s'agit également de la matrice de l'identité dans le couple de bases  $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$  :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

on en déduit :

$$(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

**Propriété(s) 14.3.96 :** formule de changement de base Soit  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  deux bases de  $F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}.$$

**Démonstration :** Écrivons le membre de droite de l'égalité :

$$P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E} = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F}(\text{Id}_F) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(\underbrace{\text{Id}_F \circ u \circ \text{Id}_E}_{=u}).$$

■

**Remarque(s) 129 :** La cas le plus utilisé est celui d'un endomorphisme. Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

**Exemple(s) 185 :**

185.1 Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathcal{C}$  une nouvelle base de  $\mathbb{R}^3$  constituée des vecteurs  $\varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (-1, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ . On a :

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un rapide pivot de Gauß nous donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ ,  $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$  et  $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$  donc la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la formule de changement de base, on a donc :

$$A = P \times B \times P^{-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \times B^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

## 14.4 Projections et symétries

### 14.4.1 Le cas général

**Définition 14.4.97 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose qu'il existe  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :  $E = E_1 \oplus E_2$ . Alors on appelle :

1. Projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  l'endomorphisme :

$$p : \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto x_1 \end{cases}$$

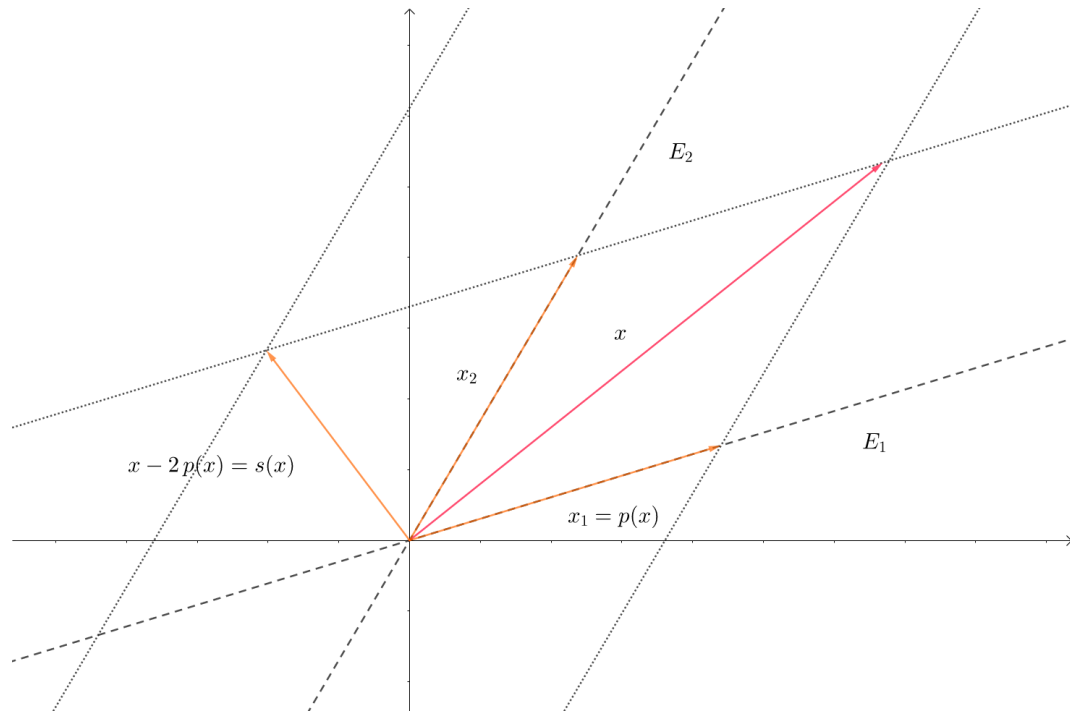
où  $x = x_1 + x_2$  est l'unique écriture de  $x$  comme somme d'un élément de  $E_1$  et d'un élément de  $E_2$ .

2. Symétrie par rapport à  $E_2$  parallèlement à  $E_1$  l'endomorphisme :

$$s = \text{Id}_E - 2p.$$

**Remarque(s) 130 :** 1. Tout se résume sur un dessin :





2. Nous dirons dans la suite que  $p$  est la projection associée à  $s$ .

**Propriété(s) 14.4.97 :** 1. Soit  $p$  une projection et  $s$  une symétrie. Alors :

- (a)  $p \circ p = p$ ,  $s \circ s = \text{Id}_E$ ,
- (b)  $\text{Ker}(p) = E_2$ ,  $\text{Im}(p) = E_1$ .

2. Réciproquement,

- (a) un endomorphisme  $p$  vérifiant  $p \circ p = p$  est une projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ ,
- (b) un endomorphisme  $s \circ s = \text{Id}_E$  est une symétrie de projection associée  $p = \frac{1}{2}(\text{Id}_E - s)$ .

**Démonstration :** Le seul point non immédiat est le point 2(a). Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p \circ p = p$ . Montrons que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .

1. Soit  $y \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$ . Alors comme  $y \in \text{Im}(p)$ , il existe  $x \in E$ ,  $y = p(x)$ . Mais alors comme  $y \in \text{Ker}(p)$  :  $p(y) = 0$  mais comme  $p \circ p = p$ ,  $y = p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$ .
2. Soit maintenant  $x \in E$ . Alors :

$$x = x - p(x) + p(x)$$

et  $p(x) \in \text{Im}(p)$ ,  $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$  donc  $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ . ■

**Exemple(s) 186 :**

186.1 Si un endomorphisme admet pour matrice dans une base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors  $P^2 = P$  donc c'est une projection. Réciproquement, si  $p$  est un projecteur, dans une base adaptée à la décomposition  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ , la matrice de  $p$  est de cette forme.

186.2 L'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une projection. En effet :  $M^2 = M$ . Pour déterminer ses éléments géométriques, on remarque que  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}((1, 1))$  et  $\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, 0))$  il s'agit donc de la projection sur  $\text{Vect}((1, 0))$  parallèlement à  $\text{Vect}((1, 1))$ .

186.3 L'endomorphisme  $p$  est un projecteur si et seulement si  $p' = \text{Id}_E - p$  est un projecteur. En effet, si  $p$  est un projecteur, alors :

$$(p')^2 = \text{Id}_E - 2p + p^2 = \text{Id}_E - p = p'$$

et réciproquement, si  $p'$  est un projecteur,  $p = \text{Id}_E - p'$  est aussi un projecteur par le sens direct.

## 14.4.2 Le cas euclidien

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace euclidien.

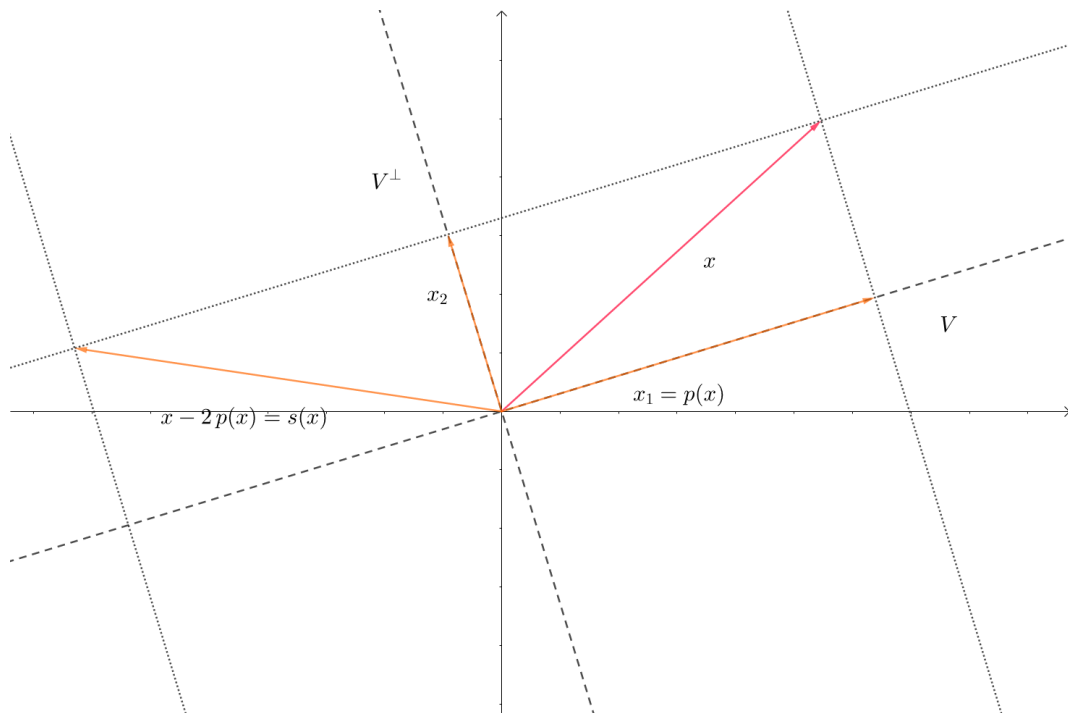
**Définition 14.4.98 :** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On rappelle que :

$$E = V \oplus V^\perp.$$

On appelle projection orthogonale sur  $V$  et on note  $p_V$  la projection sur  $V$  parallèlement à  $V^\perp$ .

**Remarque(s) 131 :** 1. On peut évidemment, comme dans le cas général parler de la symétrie associée au projecteur  $p_V$ .

2. Tout se résume sur un dessin :



3. Si un endomorphisme  $p$  vérifie  $p^2 = p$ , il s'agit d'un projecteur. Ce projecteur est orthogonal si et seulement si  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont orthogonaux.

4. L'inégalité suivante est appelée inégalité de Bessel :

$$\forall x \in E, \quad \|p_V(x)\| \leq \|x\|.$$

**Démonstration :** Écrivons  $x = p_V(x) + y$  avec  $y \in V^\perp$  ; alors :

$$\|x\|^2 = \|p_V(x)\|^2 + 2 \underbrace{\langle p_V(x), y \rangle}_{=0} + \|y\|^2 \geq \|p_V(x)\|^2.$$


**Exemple(s) 187 :**

187.1 Si  $e_1, e_2, \dots, e_p$  est une base orthonormée de  $V$  alors :

$$\forall x \in E, \quad p_V(x) = \sum_{k=1}^p \langle p_V(x), e_k \rangle \cdot e_k = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle \cdot e_k.$$

On peut se servir de cette formule pour calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un espace. Par exemple, si l'on considère le sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^4$  d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

On a  $V = \text{Vect}((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$ . Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt nous donne donc la base orthonormée :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0).$$

On en déduit la formule :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad p_V(x, y, z, t) = \frac{1}{2}((-x+t) \cdot (-1, 0, 0, 1) + (-y+z) \cdot (0, -1, 1, 0)) = \frac{1}{2}(x-t, y-z, z-y, t-x).$$

187.2 Dans l'exemple précédent, on peut se passer de l'orthonormalisation de Schmidt. Géométriquement, le vecteur  $p_V(x, y, z, t) = (a, b, c, d)$  vérifie :

$$\langle (x, y, z, t) - p_V(x, y, z, t), (-1, 0, 0, 1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (x, y, z, t) - p_V(x, y, z, t), (0, -1, 1, 0) \rangle = 0$$

Si l'on oublie pas que  $p_V(x, y, z, t) \in V$ , Ceci se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} -(x-a) + (t-d) = 0 \\ -(y-b) + (z-c) = 0 \\ a+b+c+d = 0 \\ a+2b+2c+d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-d = x-t \\ b-c = y-z \\ a+b+c+d = 0 \\ a+2b+2c+d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{x-t}{2} \\ b = \frac{y-z}{2} \\ c = \frac{z-y}{2} \\ d = \frac{t-x}{2} \end{cases}.$$

**Propriété(s) 14.4.98 :** Soit  $V$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $x \in E$ . Le vecteur  $y_0 = p_V(x)$  est l'unique vecteur tel que :

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

On appelle la distance  $\|x - y_0\|$  distance de  $x$  à  $V$  et on la note  $d(x, V)$ .

**Démonstration :** Soit  $y \in V$ . Alors :

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - y_0, y_0 - y \rangle}_{\in V^\perp \cdot \in V} + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2.$$


**Exemple(s) 188 :**

188.1 La distance du vecteur  $\vec{x} = (1, 1, 1, 1)$  au sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

est (en utilisant l'exemple précédent) :

$$d(\vec{x}, V) = \|\vec{x} - p_V(\vec{x})\| = 2.$$

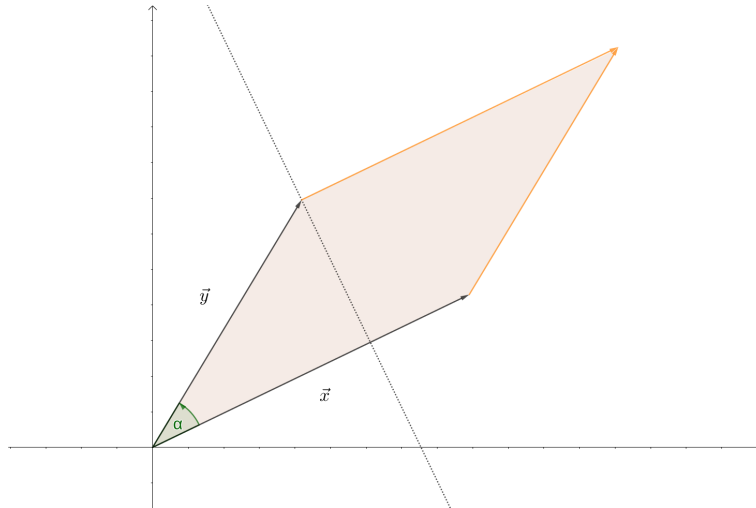
## 14.5 Déterminant d'une matrice

### 14.5.1 Aires, volumes, définition

#### 14.5.1.1 Aire définie par deux vecteurs du plan

Soit  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  deux vecteurs du plan. L'aire orientée du parallélogramme défini par  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  est définie par :

$$\text{Det}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\| \times \sin(\alpha).$$



Cette aire vérifie :

1.  $\text{Det}((1, 0), (0, 1)) = 1$ ,
2. *antisymétrie* :  $\text{Det}(\vec{x}, \vec{y}) = -\text{Det}(\vec{y}, \vec{x})$ ,
3. *linéarité en chacune des variables* : pour tous vecteurs du plan  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  et tout réel  $\lambda$  :

$$\text{Det}(\vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}, \vec{z}) = \text{Det}(\vec{x}, \vec{z}) + \lambda \times \text{Det}(\vec{y}, \vec{z}), \quad \text{Det}(\vec{z}, \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}) = \text{Det}(\vec{z}, \vec{x}) + \lambda \times \text{Det}(\vec{z}, \vec{y}).$$

On en déduit que, si  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  :

$$\text{Det}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1.$$

Pour simplifier une généralisation en dimension supérieure, nous allons regrouper les vecteurs sous la forme d'une matrice, de la façon suivante :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1.$$

#### 14.5.1.2 Le cas général

Dans le suite de ce sous-chapitre,  $n \geq 2$ . On notera souvent les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à l'aide de leurs colonnes :

$$A = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$$

**Théorème 14.5.44 :** Il existe une unique application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant :

1.  $f$  est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable,
2.  $f$  est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable, c'est-à-dire si  $1 \leq i < j \leq n$  :

$$f(C_1 \ \dots \ C_{i-1} \ C_i \ C_{i+1} \ \dots \ C_{j-1} \ C_j \ C_{j+1} \ \dots \ C_n) = -f(C_1 \ \dots \ C_{i-1} \ C_j \ C_{i+1} \ \dots \ C_{j-1} \ C_i \ C_{j+1} \ \dots \ C_n),$$

3.  $f(I_n) = 1$ .

On appelle cette application « déterminant » et on note, pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\text{Det}(A) = |A| = f(A).$$

**Démonstration :** Montrons l'existence. On peut pour ceci raisonner par récurrence sur  $n$ . Nous allons effectuer le passage de  $n = 2$  à  $n = 3$  puis expliquer en remarque l'argument essentiel du cas général de l'hérédité.

On pose :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On vérifie alors successivement les points de la définition.

a *linéarité* : c'est une conséquence immédiate de la linéarité du déterminant pour  $n = 2$ , montrons par exemple la compatibilité avec la somme pour la première colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (a_{11} + b_{11}) \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} + b_{21} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} + b_{21} & a_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} b_{21} & a_{23} \\ b_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} b_{21} & a_{22} \\ b_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

b *antisymétrique* : effectuons le cas des deux premières colonnes, les autres se traitent de la même façon :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}_{= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \\ &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

c enfin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

■

**Remarque(s) 132 :** 1. Pour  $n = 3$ , il est possible de donner une formule close. Si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors :

$$\text{Det}(A) = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{21} \times a_{32} \times a_{13} + a_{31} \times a_{12} \times a_{23}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31} + a_{23} \times a_{32} \times a_{11} + a_{33} \times a_{12} \times a_{21}).$$

On peut facilement retenir cette formule grâce à la règle mnémotechnique de Sarrus :

$$\begin{array}{ccccc} & + & & & \\ & + & & & \\ & + & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & - & & & \end{array}$$

2. Qu'en est-il de l'interprétation géométrique ? Faisons un emprunt à la physique. Si l'on voit les lignes<sup>2</sup> de la matrice comme les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , on reconnaît dans la formule de définition du déterminant :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle.$$

Le norme du produit vectoriel est la surface du parallélogramme engendré par  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , que l'on multiplie par la distance de la hauteur, qui correspond à celle de la projection de  $\vec{u}$  sur l'orthogonal du plan

2. on verra plus loin que le déterminant d'une matrice et de sa transposée est le même, ce choix des lignes n'est donc pas arbitraire

engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ . On reconnaît donc l'aire du parallélépipède construit à partir des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Le signe, quand à lui, s'interprète comme l'orientation des trois vecteurs. Si le déterminant est positif,  $\vec{u}$  est dans le sens de  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  donc l'orientation du triplet est positive et si il est négatif, l'orientation est négative.

3. En général, pour passer d'un déterminant de taille  $n$  à un déterminant de taille  $n - 1$ , on peut effectuer un développement suivant la première ligne comme nous l'avons fait pour passer de  $n = 3$  à  $n = 2$ . plus précisément, si l'on pose, pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

la matrice  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$  à laquelle on a supprimé la première ligne et la  $i$ -ème colonne, alors :

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \times a_{1,i} \times \text{Det}(A_i).$$

4. Dans la suite, nous admettrons sans jamais l'utiliser l'unicité du déterminant.

### Exemple(s) 189 :

189.1 On a :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2a \times b \times c$$

189.2 On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a - b^2 + 1 - a = a^2 - b^2 - 2a + 1.$$

- 189.3 Si  $T$  est une matrice triangulaire inférieure, alors le déterminant de  $T$  est la produit de ses éléments diagonaux. En effet, en développant suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \star & t_{2,2} & 0 & & \vdots \\ \star & \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \star & \ddots & 0 \\ \star & \star & \star & \star & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times \begin{vmatrix} t_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \ddots & 0 \\ \star & \star & \star & t_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Et l'on conclut par une récurrence immédiate.

## 14.5.2 Propriétés du déterminant

Commençons par quelques remarques d'ordre général. Le déterminant étant linéaire en chaque colonne de sa variable, on a comme pour toute application linéaire :

1. si l'une des colonnes d'un déterminant est nulle, alors le déterminant est nul
2. si l'on multiplie une colonne par un scalaire  $\lambda$ , alors le déterminant est multiplié par  $\lambda$ . En particulier :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \text{Det}(\lambda.A) = \lambda^n \times \text{Det}(A).$$

La remarque suivante est propre au caractère antisymétrique du déterminant :

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

**Démonstration :** Avec les notations du paragraphe précédent, si  $C_i = C_j$  :

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\text{Det}(A).$$

Donc  $\text{Det}(A) = 0$ . ■

**Propriété(s) 14.5.99 :** Les opérations (sur les colonnes) du pivot de Gauß ont les effets suivants sur le déterminant :

opération	le déterminant est
transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$	inchangé
dilatation $C_i \leftarrow \lambda.C_i$	multiplié par $\lambda$
permutation $C_i \leftrightarrow C_j$	multiplié par $-1$

**Démonstration :** Le deuxième point et le troisième sont immédiats par définition. Montrons le premier. Par linéarité, on a (si  $i < j$ , la preuve est la même dans l'autre cas) :

$$\text{Det}(C_1, \dots, C_i + \lambda.C_j, \dots, C_j, \dots, C_n) = \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) + \lambda \cdot \underbrace{\text{Det}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n)}_{=0 \text{ car cette matrice a deux colonnes égales}}.$$
■

### Exemple(s) 190 :

190.1 On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 19 \\ 1 & 2 & 12 & 56 \\ 1 & 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 19 \\ 2 & 12 & 56 \\ 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 18 \\ 3 & 6 & 60 \end{vmatrix} = 120 - 108 = 12.$$

190.2 Soit  $\Delta_n$  le déterminant de taille  $n$  suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Alors, par développement par rapport à la première ligne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n.$$

On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$ .

190.3 Si  $T$  est une matrice triangulaire supérieure, alors le déterminant de  $T$  est le produit de ses éléments diagonaux.

En effet :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & t_{2,2} & \star & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & t_{2,2} & \star & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix}$$

donc, en effectuant les opérations  $C_i \leftarrow C_i - t_{1,i}.C_1$  :

$$= t_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times \begin{vmatrix} t_{2,2} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Et l'on conclut par une récurrence immédiate.

190.4 On peut donc calculer les déterminants des matrices élémentaires :

- (a) de transvection :  $\text{Det}(L_{i,j}(\lambda)) = 1$ ,
- (b) de dilatation :  $\text{Det}(D_i(\lambda)) = \lambda$ ,
- (c) de permutation :  $\text{Det}(T_{i,j}) = -1$ .

**Propriété(s) 14.5.100 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{Det}(A) \neq 0$ .

*Démonstration :* Effectuons le pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $A$ . Une fois terminé, il y a deux cas :

- la matrice est de rang  $n$  (donc inversible) et le déterminant de la matrice est donc proportionnel (avec un rapport de proportion non nul) à celui de sa réduite, qui vaut 1, il est donc non nul.
- la matrice est de rang strictement inférieur à  $n$  (donc non inversible) et elle a donc une colonne nulle. Le déterminant de  $A$  est alors nul.

■

**Propriété(s) 14.5.101 :** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . On a :

$$\text{Det}(A \times B) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(B).$$

*Démonstration :* Il y a deux cas. Si  $B$  n'est pas inversible, alors  $A \times B$  non plus et les deux côtés de l'égalité sont nuls. Si  $B$  est inversible, alors par le pivot de Gauss  $B$  est un produit de matrices élémentaires  $E$ .

opération sur $A$	produit de matrices	valeur du déterminant
$C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$	$A \times L_{i,j}(\lambda)$	$\text{Det}(A \times L_{i,j}(\lambda)) = \text{Det}(A) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(L_{i,j}(\lambda))$
$C_i \leftarrow \lambda.C_i$	$A \times D_i(\lambda)$	$\text{Det}(A \times D_i(\lambda)) = \text{Det}(A) \times \lambda = \text{Det}(A) \times \text{Det}(D_i(\lambda))$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A \times T_{i,j}$	$\text{Det}(A \times T_{i,j}) = \text{Det}(A) \times (-1) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(T_{i,j})$

Donc :

$$\text{Det}(A \times B) = \text{Det}(A \times E) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(E) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(B).$$

■

**Remarque(s) 133 :** 1. En particulier, si  $A$  est inversible,  $\boxed{\text{Det}(A^{-1}) = \text{Det}(A)^{-1}}$ .

2. Attention,  $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$  en général !

**Propriété(s) 14.5.102 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a :  $\text{Det}({}^t A) = \text{Det}(A)$ .

*Démonstration :* Encore une fois, il y a deux cas : si  $A$  est non inversible, alors  ${}^t A$  aussi et les deux déterminant sont nuls. Sinon,  $A$  est un produit de matrices élémentaires  $E$  et on remarque que, pour toutes les matrices élémentaires donc tout produit de matrices élémentaires,  $\text{Det}(E) = \text{Det}({}^t E)$ .

■

**Remarque(s) 134 :** 1. Il est donc possible d'effectuer sur les lignes du déterminant de  $A$  les mêmes opérations que sur ses colonnes.

- Linéarité, caractère antisymétrique et alterné,
- opérations du pivot de Gauss sur les lignes.

Du théorème précédent, on en déduit également qu'il est possible de développer la déterminant suivant n'importe quelle ligne donc n'importe quelle colonne (en se ramenant à un développement suivant la première ligne). Plus précisément, si l'on pose, pour  $1 \leq i, j \leq n$  :



$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

la matrice  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  à laquelle on a supprimé la  $j$ -ème ligne et la  $i$ -ème colonne, alors :

$$\boxed{\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \times a_{j,i} \times \text{Det}(A_{i,j}) \quad \text{et} \quad \text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \times a_{j,i} \times \text{Det}(A_{i,j}).}$$

### 14.5.3 Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

**Définition 14.5.99 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , le déterminant de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est le déterminant de la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Propriété(s) 14.5.103 :** 1. Le déterminant de  $u$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ . On le note  $\text{Det}(u)$ .

2.  $u$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Det}(u) \neq 0$ ,
3. si  $u$  est un isomorphisme,  $\text{Det}(u^{-1}) = \text{Det}(u)^{-1}$ .
4. Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :  $\text{Det}(u \circ v) = \text{Det}(u) \times \text{Det}(v)$ .

**Démonstration :** Les points 2 à 4 sont des traductions immédiates des résultats sur les matrices. Pour le premier, on remarque que si  $\mathbb{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  et  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times P^{-1}$$

donc :

$$\text{Det}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Det}(P) \times \text{Det}(\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)) \times \underbrace{\text{Det}(P^{-1})}_{=\text{Det}(P)^{-1}} = \text{Det}(\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)).$$

■

**Exemple(s) 191 :**

- 191.1 Si  $p \neq \text{Id}_E$  est un projecteur, alors  $\text{Det}(p) = 0$ .
- 191.2 Le déterminant de l'application de dérivation de  $\mathbb{R}_n[x]$  vaut 0.

**Définition 14.5.100 :** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . On appelle déterminant de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  le déterminant de la matrice de l'endomorphisme  $u$  défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = u_i$$

et on le note  $\text{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

**Propriété(s) 14.5.104 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors cette famille est une base de  $E$  si et seulement si :

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0.$$

*Démonstration :* Ce déterminant est en effet non nul si et seulement si  $u$  est un isomorphisme si et seulement si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ . ■

**Remarque(s) 135 :** On remarque que l'intuition des dimensions deux et trois se poursuit : le déterminant est nul si et seulement si l'(hyper)parallélépipède a un (hyper)volume nul.

# Chapitre 15

## Probabilités

### 15.1 Espaces probabilisés

#### 15.1.1 Vocabulaire probabiliste

Les probabilités servent à modéliser les expériences aléatoires. La première étape consiste à traduire le vocabulaire de la théorie des ensembles :

En théorie des ensembles	En probabilités	Sens pratique
$\Omega$	univers	toutes les issues possibles de l'expérience
$A \subset \Omega$	évènement	un ensemble d'issues possibles de l'expérience
$\{\omega\}$	évènement élémentaire	lorsqu'on s'intéresse à une seule issue
$\emptyset$	évènement impossible	une expérience a toujours une issue
$\Omega$	évènement certain	$\Omega$ contient toute les issues de l'expérience
$\bar{A} = \Omega \setminus A$	évènement complémentaire	le contraire de l'évènement $A$
$A \cap B$	« $A$ et $B$ »	l'issue est $A$ et $B$ en même temps
$A \cup B$	« $A$ ou $B$ »	l'issue est soit $A$ soit $B$ soit les deux
$A \subset B$	« $A$ implique $B$ »	si le résultat de l'expérience est dans $A$ alors il est dans $B$

Voyons maintenant quelques exemples classiques :

Vocabulaire	Un jet de pièce	Un jet de dé	Un jet de deux dés	
univers	$\{P, F\}$	$\llbracket 1, 6 \rrbracket$	$\llbracket 1, 6 \rrbracket^2$	$\llbracket 2, 12 \rrbracket$
évènement	$\emptyset \{P\} \{F\}$ ou $\{P, F\}$	un résultat pair	une paire	un résultat impair
élémentaire	$\{P\}$ ou $\{F\}$	un 6	un double 6	un « 12 »
impossible	$\emptyset$	aucune face		
certain	$\{P, F\}$	une face		
complémentaire	$\overline{\{P\}} = \{F\}$	$\overline{\text{pair}} = \text{impair}$		
« $A$ et $B$ »	« pile et face » : impossible	« pair et $\{2, 3\}$ » = « 2 »		
« $A$ ou $B$ »	« pile ou face » : certain	« pair ou $\{2, 3\}$ » = « $\{2, 3\}$ »		
« $A$ implique $B$ »	« si pile alors pile ou face »	« si $\{6\}$ alors pair »		

#### 15.1.2 Notion de probabilité

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, nous supposons l'univers  $\Omega$  fini et non vide.

**Définition 15.1.101 :** Une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  est une application :

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}(A) \end{cases}$$

qui vérifie :

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tous évènements  $A$  et  $B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  (on dit qu'ils sont incompatibles),  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

Le couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  est alors appelé espace probabilisé.

**Exemple(s) 192 :**

192.1 Par définition, on a alors :  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

192.2 L'exemple le plus courant de probabilité est la la **probabilité uniforme** sur  $\Omega$  :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Cette probabilité sert à modéliser les événements « équiprobables », comme le jet d'une pièce ou d'un dé « non pipés ».

192.3 Il ne s'agit cependant pas de la seule probabilité. Par exemple, lorsqu'on jette une pièce « pipée » qui a une probabilité  $p$  de tomber sur « pile », il est naturel de considérer la probabilité sur  $\Omega = \{P, F\}$  définie par :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\{P\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{F\}) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

**Propriété(s) 15.1.105 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On a, pour tous événements  $A$  et  $B$  :

1.  $A \subset B$  implique  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (la probabilité  $\mathbb{P}$  est croissante),
2.  $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$  ; en particulier,  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ,
3.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

**Démonstration :**

1. On a  $B = A \cup (B \setminus A)$  donc comme  $A$  et  $B \setminus A$  sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$

2. Comme les événements  $A \cap B$  et  $A \setminus B$  sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B).$$

3. Enfin, on peut écrire  $A \cup B$  comme la réunion d'événements incompatibles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup A \cap B,$$

donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) \underbrace{=}_2 \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

■

**Exemple(s) 193 :**

193.1 Dix paires de chaussettes sont rangées dans une armoire. On prend quatre chaussettes au hasard dans l'armoire. Utilisons le langage des probabilités.

- (a) *Modélisation* : l'univers adapté à l'expérience est  $\Omega = \mathcal{P}_4(C)$ , où  $C = \{D_1, G_1, \dots, D_{10}, G_{10}\}$ , muni de la probabilité uniforme.
- (b) *Calculs numériques* : il s'agit ici de faire des raisonnements de dénombrement. On a :

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{20}{4}.$$

Calculons la probabilité de certains événements :

- i.  $A$  : « obtenir deux paires de chaussettes » autant que de façons de choisir deux numéros parmi 10 :  $\binom{10}{2}$ .  
On en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323} \simeq 0,009.$$

- ii.  $B$  « obtenir au moins une paire de chaussettes » le plus simple ici est de dénombrer l'événement complémentaire : « ne pas obtenir une paire de chaussettes », ce qui revient à choisir 4 numéros parmi 10 puis ne pas oublier que pour chaque numéro, il y a deux chaussettes :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{2^4 \times \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{99}{323} \simeq 0,307.$$

iii.  $C$  : « obtenir exactement une paire de chaussettes ». On a  $C = B \setminus A$  donc :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \frac{96}{323} \simeq 0,297.$$

193.2 On lance  $n$  fois un dé à  $M$  faces équilibré. Cherchons la probabilité qu'une face apparaisse au moins deux fois.

(a) *Modélisation* : l'univers adapté à l'expérience est  $\llbracket 1, M \rrbracket^n$ , que l'on muni de la probabilité uniforme  $\mathbb{P}$ . Il semble plus facile de considérer l'évènement contraire :

$\bar{A}$  : « une face n'apparaît pas deux fois ».

(b) *Calculs numériques* : un raisonnement de dénombrement donne :

$$\text{Card}(\Omega) = M^n, \quad \text{Card}(\bar{A}) = A_M^n$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{A_M^n}{M^n}.$$

Voyons une application. Calculons la probabilité que dans une classe de 41 élèves, deux aient la même date d'anniversaire (en supposant que personne n'est né le 29 février). Ici  $n = 41$  et  $M = 365$  donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{A_{365}^{41}}{365^{41}} = 1 - \frac{365!}{324! \times 365^{41}} \simeq 0.89.$$

**Propriété(s) 15.1.106 :** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

En particulier, s'il s'agit d'une partition de  $\Omega$ , que l'on appelle dans le cadre des probabilités un système complet d'évènements

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

*Démonstration :* On procède par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , c'est immédiat. Si le résultat est vrai pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i).$$

■

### Exemple(s) 194 :

194.1 Pour définir une probabilité sur un univers fini  $\Omega$ , il suffit donc de la définir sur les évènements élémentaires, en s'assurant que la probabilité de tous les évènements fait bien 1. Une fois ceci fait, il suffit de poser, pour tout évènement  $A$  :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

194.2 Par exemple, la probabilité qui modélise la somme du lancé de deux dés est définie par :

Somme des dés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

La probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 3 est donc  $1/36 + 2/36 = 1/12$ .

### 15.1.3 Probabilités conditionnelles

**Définition 15.1.102 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Soit  $B$  un évènement de  $\Omega$  de probabilité non nulle. On appelle probabilité de  $A$  sachant  $B$  la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Remarque(s) 136 :** 1. Si la probabilité  $\mathbb{P}$  est uniforme, cette probabilité désigne la proportion du nombre d'éléments de  $A$  à l'intérieur de  $B$ .  
2. On utilise souvent la définition de la probabilité conditionnelle « à l'envers », on l'appelle alors **formule des probabilités composées** :

$$\text{si } \mathbb{P}(B) > 0, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B).$$

**Exemple(s) 195 :**

195.1 On jette un dé à 6 face. La probabilité de l'évènement « on obtient un 6 » sachant que « on n'a pas obtenu un 1 » vaut :  $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$ .

195.2 On considère une famille de deux enfants. Alors :

(a) la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille est :  $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ,

(b) la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille est :  $\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ .

195.3 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement trois boules sans remise. On note  $N_i$  : « les  $i$  premières boules tirées sont noires ». Alors par la formule des probabilités composées :

(a)  $\mathbb{P}(N_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ,

(b)  $\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_2|N_1) \times \mathbb{P}(N_1) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ ,

(c)  $\mathbb{P}(N_3) = \mathbb{P}(N_3|N_2) \times \mathbb{P}(N_2) = \frac{2}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30}$ .

Une façon agréable de se rappeler de la formule des probabilités composées est de faire un arbre de probabilités.

**Propriété(s) 15.1.107 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $B$  un évènement de  $\Omega$  de probabilité non nulle. L'application :

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}_B(A) \end{cases}$$

est une probabilité sur  $\Omega$ .

**Démonstration :**

1. Comme  $A \cap B \subset B$ , on a :  $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ . Donc  $\mathbb{P}_B(A) \in [0, 1]$ .

2. On a :

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

3. Enfin, si  $C$  et  $D$  sont deux évènements incompatibles alors  $C \cap B$  et  $D \cap B$  aussi, donc :

$$\mathbb{P}_B(C \cup D) = \frac{\mathbb{P}((C \cup D) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((C \cap B) \cup (D \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(D \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(C) + \mathbb{P}_B(D).$$

■

**Propriété(s) 15.1.108 :** (formule des probabilités totales) Supposons que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soit un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement  $B$  :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k).$$

**Démonstration :** Les événements  $B \cap A_i$  sont deux à deux incompatibles et :  $B = \bigcup_{k=1}^n B \cap A_k$  donc par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k).$$

■

**Exemple(s) 196 :**

196.1 Dans une usine, trois machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  fabriquent un composant. La première machine en fabrique  $2/3$ , la deuxième  $1/6$  et la dernière  $1/6$ . Un ingénieur qualité a mesuré que 5% des composants de la première machine sont défectueux alors que 2% de ceux des deux autres machines le sont. Par la formule des probabilités totales, la proportion totale de composants défectueux est :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{100} = \frac{4}{100}.$$

196.2 Un jeu télévisé se déroule de la façon suivante : une voiture est cachée derrière une des trois portes offertes au candidat, il n'y a rien derrière les deux autres. Le candidat gagne ce qu'il y a derrière la porte qu'il choisit. On demande au candidat de choisir une porte. Le présentateur ouvre alors une porte derrière laquelle la voiture n'est pas, puis propose au candidat de changer de choix. Doit-il le faire ?

(a) *Probabilité de gagner en changeant de porte :*

$$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

(b) *Probabilité de gagner sans changer de porte<sup>1</sup>*

$$\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}.$$

Le candidat doit donc changer d'avis.

**Propriété(s) 15.1.109 :** (formules de Bayes) Soit  $A$  et  $B$  des événements de probabilités non nulle. Alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Démonstration :** Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A).$$

■

**Remarque(s) 137 :** 1. Donc, par la formule des probabilités totales, si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)}.$$

---

1. ou, plus simplement :  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ .

2. Le cas particulier le plus important de la formule précédente est celui dans lequel le système complet d'événements est composé de  $A$  et  $\bar{A}$ . On a alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A})}.$$

#### Exemple(s) 197 :

- 197.1 R. Nadal gagne 70% de ses matches en grand-chelem et 90% à Roland Garros. Il y a 4 grand-chelem. R. Nadal vient de gagner. Avec quelle probabilité a-t-il joué à Roland Garros ? Notons  $N$  : « Nadal a gagné » et «  $RG$  la rencontre s'est déroulée à Roland Garros ». Alors :

$$\mathbb{P}(RG|N) = \frac{\mathbb{P}(N|RG) \times \mathbb{P}(RG)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{90}{100} \times \frac{1}{4}}{\frac{70}{100}} = \frac{45}{140} \simeq 0.32.$$

- 197.2 Un policier arrête un étudiant au retour d'une « soif ». Il sait qu'en moyenne un étudiant sur 10 revient ivre de ce genre de fête. Il dispose d'un test d'alcoolémie qui donne les résultats suivants :

- (a) dans 99% des cas, si la personne est ivre, le test est positif,
- (b) dans 2% des cas, si la personne est sobre, le test est positif.

L'étudiant effectue le test, qui est positif. Quelle probabilité a-t-il d'être ivre ? Notons  $I$  : « l'étudiant est ivre » et «  $P$  : « le test est positif ». Alors :

$$\mathbb{P}(I|P) = \frac{\mathbb{P}(P|I) \times \mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(P|I) \times \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(P|\bar{I}) \times \mathbb{P}(\bar{I})} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \times \frac{9}{10}} = \frac{99}{117} \simeq 0.85$$

Il arrête alors un étudiant d'une classe plus sérieuse, dont il sait qu'en moyenne 1/100 revient ivre. Le test est également positif. Quelle est la probabilité que l'étudiant soit ivre ?

$$\mathbb{P}(I|P) = \frac{99}{3 \times 99} = \frac{1}{3}.$$

### 15.1.4 Événements indépendants

**Définition 15.1.103 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

- Remarque(s) 138 :**
- Comme nous l'avons vu en  $TD$ , si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $(A \text{ et } \bar{B})$ ,  $(\bar{A} \text{ et } B)$  et  $(\bar{A} \text{ et } \bar{B})$  aussi.
  - On peut reformuler l'indépendance en termes de probabilités conditionnelles. Si  $b$  est de probabilité non nulle, les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

#### Exemple(s) 198 :

- 198.1 Les événements « pile » et « face » sont dépendants si l'on jette une pièce,
- 198.2 cependant, « la première pièce tombe sur pile » et la « deuxième pièce tombe sur face » sont indépendants si l'on jette deux pièces.



**Définition 15.1.104 :** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  évènements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ . on dit que ces évènements sont indépendants si pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

**Exemple(s) 199 :**

199.1 Attention ! L'indépendance deux à deux des évènements ne suffisent pas, comme le montre l'exemple suivant, pour le jet de deux dés :

- (a)  $A_1$  : « le résultat du premier dé est pair »
- (b)  $A_2$  : « le résultat du deuxième dé est pair »
- (c)  $A_3$  : « la somme des deux lancers est impair »

les évènements considérés sont deux à deux indépendants, mais l'évènement  $A_3$  n'est pas indépendant de  $A_1 \cap A_2$ .

## 15.2 Variables aléatoires sur un univers fini

Comme précédemment, dans cette partie,  $\Omega$  est supposé fini.

### 15.2.1 Loi, espérance, variance

**Définition 15.2.105 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $E$  un ensemble. Une variable aléatoire sur  $\Omega$  est une fonction  $X : \Omega \rightarrow E$ . Si  $E \subset \mathbb{R}$ , on dit qu'il s'agit d'une variable aléatoire réelle.

**Exemple(s) 200 :**

200.1 Deux joueurs lancent des dés équilibrés. Ils gagnent chacun la somme de leur lancé. La variable aléatoire qui modélise les gains du premier joueur est :

$$X : \begin{cases} \Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 & \longrightarrow \llbracket -5, 5 \rrbracket \\ \omega = (x, y) & \longmapsto x - y \end{cases}$$

200.2 Un joueur mise sur les « impairs » d'une roulette. Si le résultat est impair, il gagne 1, sinon, il perd 1. La variable aléatoire qui modélise ses gains est :

$$Y : \begin{cases} \Omega = \llbracket 0, 36 \rrbracket^2 & \longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ impair} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

**Définition 15.2.106 :** Soit  $X$  une variable aléatoire et  $A$  une partie de  $E$ . On note <sup>2</sup>

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in A\}.$$

De plus, on note  $\{X = a\} = \{X \in \{a\}\}$  et si  $X$  est une variable aléatoire réelle et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\{X \leq \alpha\} = \{X \in ]-\infty, \alpha]\}, \quad \{X \geq \alpha\} = \{X \in [\alpha, +\infty[), \quad \{X < \alpha\} = \{X \in ]-\infty, \alpha[), \quad \{X > \alpha\} = \{X \in ]\alpha, +\infty[).$$

2. Attention ! Rien ne dit que  $X$  est bijective !



- Remarque(s) 140 :**
1. Remarquez que comme  $\Omega$  est fini, la somme qui apparaît n'est prise que sur un nombre fini de termes.
  2. L'espérance ne dépend que de la loi de la variable aléatoire.
  3. Il s'agit d'une moyenne pondérée des valeurs de la variable aléatoire réelle  $X$  par leurs probabilités.

**Exemple(s) 203 :**

203.1 Avec les deux exemples du paragraphe,

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{E}(Y) = (-1) \times \frac{19}{37} + \frac{18}{37} = -\frac{1}{37}.$$

203.2 Un cas essentiel est celui des variables aléatoires constantes :  $Z = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). On a :

$$\mathbb{E}(Z) = a \times \mathbb{P}(Z = a) = a.$$

203.3 Un autre cas important est celui des indicatrices d'ensembles  $1_A$ . on a :

$$\mathbb{E}(1_A) = 1 \times \mathbb{P}(A) + 0 \times \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A).$$

**Propriété(s) 15.2.111 :** L'espérance est linéaire et croissante : si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles définies sur  $\Omega$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

1.  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ,
2.  $\mathbb{E}(\lambda \times X) = \lambda \times \mathbb{E}(X)$ ,
3. si  $X \leq Y$  (comme fonctions) alors  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ .

**Démonstration :** Toutes ces propriétés sont des conséquences immédiates de la reformulation :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\} = X(\omega)} \underbrace{x}_{=X(\omega)} \times \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in X(\Omega)} X(\omega) \times \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

■

**Définition 15.2.108 :** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle variance de  $X$  la quantité :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2),$$

et on appelle écart type de la variable aléatoire  $X$  la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

**Remarque(s) 141 :** La variance quantifie l'écart à la moyenne pondérée. En d'autres termes, il s'agit d'un indicateur de dispersion. Elle est toujours positive par croissance de l'espérance, ce qui justifie la définition de l'écart-type.

**Exemple(s) 204 :**

204.1 Pour le premier exemple du paragraphe, on a :

$$\text{Var}(X) = 1 \times \frac{10}{36} + 4 \times \frac{8}{36} + 9 \times \frac{6}{36} + 16 \times \frac{4}{36} + 25 \times \frac{2}{36} = \frac{35}{6}.$$

**Propriété(s) 15.2.112 :** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors :

1.  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$  (formule de König-Huygens)
2. Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ .

**Démonstration :** Par la linéarité de l'espérance :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X) \times X + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Pour le deuxième point, on remarque que, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Donc :

$$\text{Var}(aX + b) = \mathbb{E}((aX + b) - (a\mathbb{E}(X) + b))^2 = a^2 \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2 \text{Var}(X).$$

■

**Exemple(s) 205 :**

205.1 Pour le deuxième exemple du paragraphe, on a :

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1 - \frac{1}{37^2}.$$

**Propriété(s) 15.2.113 :** (formules de Markov et Bienaymé-Tchebichev) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

1. (inégalité de Markov) Si  $X$  est positive et  $a > 0$  alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{m}{a}.$$

2. (inégalité de Bienaymé-Tchebichev) Si  $\alpha > 0$  alors :

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

**Démonstration :** On a, comme  $X$  est positive :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x \times \mathbb{P}(X = x) \geq a \times \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} \mathbb{P}(X = x) = a \times \mathbb{P}(X \geq a).$$

Pour l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on remarque qu'il est légitime d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive  $|X - m|^2$  donc :

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) = \mathbb{P}(|X - m|^2 \geq \alpha^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - m|^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

■

## 15.2.2 Exemples essentiels

### 15.2.2.1 Loi uniforme

**Définition 15.2.109 :** Une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $E$ , de cardinal  $n$  si  $X(\Omega) = E$  et :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}.$$

Si  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on écrit alors  $X \sim \mathcal{U}(n)$ .

**Exemple(s) 206 :**

206.1 Les variables aléatoires uniformes servent à modéliser les situations d'équiprobabilités. Par exemple :

- (a) Lorsqu'on tire au hasard une boule dans une urne contenant  $n$  numérotées, la variable aléatoire qui donne le numéro de la boule tirée suit une loi uniforme que  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,
- (b) lorsqu'on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, la variable aléatoire qui associe à la carte sa hauteur est une loi uniforme sur  $\{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$ .

**Propriété(s) 15.2.114 :** Soit  $X \sim \mathcal{U}(n)$ . On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

*Démonstration :* On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1) \times (2n+1)}{6}.$$

Donc par la formule de Huygens :

$$\text{Var}(X) = \frac{(n+1) \times (2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12} \times (4n+2-3n-3) = \frac{n^2-1}{12}.$$

■

**15.2.2.2 Loi de Bernoulli**

**Définition 15.2.110 :** Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

**Exemple(s) 207 :**

207.1 L'exemple « canonique » d'une loi de Bernoulli est celui qui compte si l'on a obtenu « pile » avec une pièce pipée qui tombe sur pile avec probabilité  $p$ .

207.2 Les variables aléatoires de Bernoulli servent à modéliser les situations à deux issues. Par exemple :

- (a) la variable aléatoire qui associe à un jet de dé pair 1 et à un jet de dé impair 0 suit une loi  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ,
- (b) si l'on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, la variable aléatoire qui associe 1 à une carte de hauteur supérieure ou égale à 10 et 0 sinon suit une loi  $\mathcal{B}\left(\frac{5}{3}\right)$ .

207.3 Toutes les variables aléatoires  $\mathbf{1}_A$  suivent des lois de Bernoulli  $\mathcal{B}\left(\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}\right)$ .

**Propriété(s) 15.2.115 :** Soit  $X \sim \mathcal{B}(p)$ . On a :

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p \times (1 - p).$$

**Démonstration :** On a :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X = 0) = p, \quad \mathbb{E}(X^2) = 1 \times \mathbb{P}(X^2 = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X^2 = 0) = p.$$

Donc par la formule de Huygens :

$$\text{Var}(X) = p - p^2 = p \times (1 - p).$$

■

### 15.2.2.3 Loi binomiale

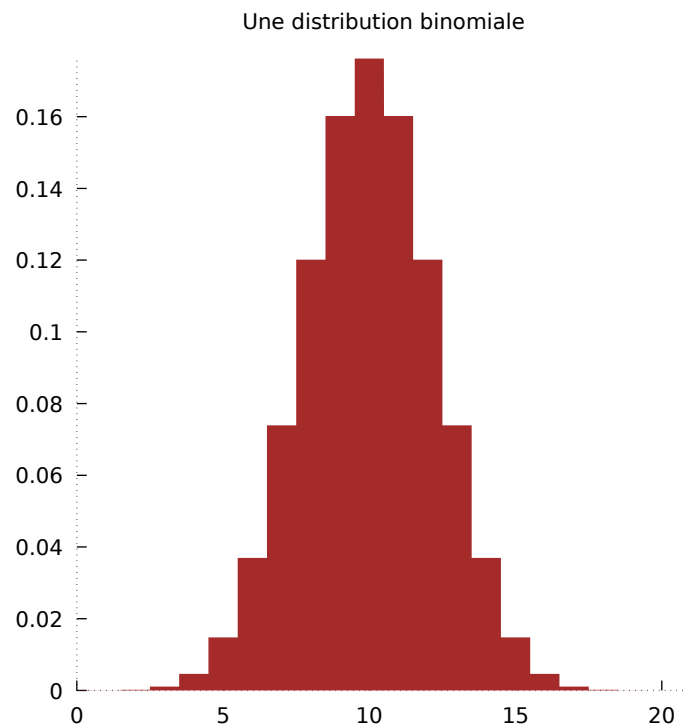
**Définition 15.2.111 :** Une variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in ]0, 1[$  si  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

**Remarque(s) 142 :** Contrairement aux lois précédentes, il n'est pas évident à priori que ces quantités définissent une probabilité, mais remarquons que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \times (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p))^n = 1.$$



#### Exemple(s) 208 :

208.1 L'exemple « canonique » d'une loi de Binomiale est celui qui compte le nombre de « pile » obtenus en jetant  $n$  pièces pipées qui tombent sur pile avec probabilité  $p$ . En effet, pour dénombrer les possibilités d'obtenir  $k$  fois pile, il s'agit de choisir  $k$  pièces « piles » (et donc  $n - k$  « faces ») parmi les  $n$  pièces.

208.2 En particulier, une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  est une loi binomiale  $\mathcal{B}(1, p)$ .

208.3 Des étudiants passent un  $DS$  qui a 20 questions, notées chacune sur 1. Pour chaque question, l'étudiant a une probabilité  $1/2$  de réussir à répondre. La distribution des notes suivra donc une loi  $\mathcal{B}(10, 1/2)$ .

**Propriété(s) 15.2.116 :** Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Alors :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p, \quad \text{Var}(X) = n \times p \times (1 - p).$$

*Démonstration :* On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times p \times \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \times (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= n \times p \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \times (1-p)^{n-1-k} = n \times p \times (p + (1-p))^{n-1} = n \times p. \end{aligned}$$

De même :

$$\mathbb{E}(X^2 - X) = n \times (n-1) \times \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times (n-1) \times p^2.$$

Donc par la formule de Huygens :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = n \times (n-1) \times p^2 + n \times p - n^2 \times p^2 = n \times p \times (1-p).$$

■

## 15.2.3 Constructions de variables aléatoires

### 15.2.3.1 Fonctions de variables aléatoires

Si  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire et  $f : E \rightarrow F$  une fonction. Alors  $f(X)$  est une variable aléatoire, réelle si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Propriété(s) 15.2.117 :** Soit  $y \in f(X)(\Omega)$ . Alors  $\mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}(X \in \{f = y\}) = \sum_{x \in \{f=y\}} \mathbb{P}(X = x)$ .

*Démonstration :* Il suffit de remarquer que l'on a la réunion disjointe :  $\{f = y\} = \bigcup_{x \in \{f=y\}} \{x\}$ .

■

### Exemple(s) 209 :

209.1 Soit  $X \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$ . Alors  $\frac{1}{2}(-X^2 + 3X) \sim \mathcal{B}(\frac{3}{4})$ .

**Propriété(s) 15.2.118 :** (théorème de transfert) Si  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

*Démonstration :* Il suffit de remarquer que  $f(X)$  prend pour valeurs les éléments de  $f(X(\Omega))$  puis que :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} \sum_{x \in \{f=y\}} y \times \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} y \times \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{E}(f(X)).$$


**Exemple(s) 210 :**

210.1 Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . On considère la variable aléatoire  $Y = \cos(\pi \times X)$ . Alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n \cos(\pi \times k) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-p)^k \times (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n.$$

**15.2.3.2 Couples de variables aléatoires**

On considère maintenant deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$ . Le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  est alors une variable aléatoire, dont on appelle la loi **loi conjointe** et celles de  $X$  et  $Y$  les **lois marginales**. Pour déterminer sa loi, on peut faire un tableau :

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$					
		$X = x_1$	$\dots$	$X = x_i$	$\dots$	$X = x_n$
$Y = y_1$		$\mathbb{P}((X, Y) = (x_1, y_1))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_1))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_n, y_1))$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$Y = y_j$		$\mathbb{P}((X, Y) = (x_1, y_j))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_n, y_j))$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$Y = y_m$		$\mathbb{P}((X, Y) = (x_1, y_m))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_m))$	$\dots$	$\mathbb{P}((X, Y) = (x_n, y_m))$
		$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X = x_n)$

Faisons quelques remarques liées à ce tableau :

- la connaissance de la loi de  $(X, Y)$  détermine celle des lois marginales  $X$  et  $Y$ . Plus précisément :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j)), \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j)).$$

- la réciproque est fautive : connaître les sommes des lignes et des colonnes d'un tableau ne détermine pas ce tableau !

**Exemple(s) 211 :**

211.1 Si  $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$  et  $Y \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . Le couple  $(X, Y)$  peut avoir pour loi :

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$			
		$X = 0$	$X = 1$	
$Y = 0$		1/4	1/4	1/2
$Y = 1$		1/4	1/4	1/2
		1/2	1/2	

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$			
		$X = 0$	$X = 1$	
$Y = 0$		1/2	0	1/2
$Y = 1$		0	1/2	1/2
		1/2	1/2	

- chaque ligne/colonne détermine une probabilité, à condition qu'elle n'est pas constituée de 0, que l'on appelle loi conditionnelle sachant  $X = x_i$  (en colonnes) ou sachant  $Y = y_j$  (en ligne) ; on note alors, si  $\mathbb{P}(Y = y_j) \neq 0$  puis si  $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$  :

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j))}{\mathbb{P}(Y = y_j)}, \quad \mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j))}{\mathbb{P}(X = x_i)}$$

**15.2.4 Indépendance de variables aléatoires**
**15.2.4.1 Le cas de deux variables aléatoires**

**Définition 15.2.112 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. On dit que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , on a :

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$



**Remarque(s) 143 :** En particulier, comme les événements élémentaires suffisent pour définir une probabilité,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

**Démonstration :** Pour le sens direct, il suffit de prendre les événements élémentaires  $A = \{a\}$  et  $B = \{b\}$ . Pour la réciproque, si la propriété d'indépendance est vraie pour tous événements élémentaires, on a :

$$\mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \times \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{(x, y) \in A \times B} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B).$$

■

**Exemple(s) 212 :**

212.1 Reprenons les exemples du paragraphe précédent. Si l'on considère les couples  $(X, Y)$  de lois :

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$			$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$		
	$X = 0$	$X = 1$			$X = 0$	$X = 1$	
$Y = 0$	1/4	1/4	1/2	$Y = 0$	1/2	0	1/2
$Y = 1$	1/4	1/4	1/2	$Y = 1$	0	1/2	1/2
	1/2	1/2			1/2	1/2	

alors le premier couple est indépendant alors que le deuxième ne l'est pas.

212.2 Bien souvent, l'indépendance est implicitement donnée par l'énoncé. Par exemple « on lance deux pièces » donne deux variables aléatoires : celle qui modélise le premier lancer et celle qui modélise le deuxième, qui sont indépendantes. Attention cependant aux énoncés du type : « on lance une pièce et dépendant du premier résultat, on en lance une deuxième » qui, eux, donnent des variables aléatoires non indépendantes.

**Propriété(s) 15.2.119 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  et  $g$  une fonction définie sur  $Y(\Omega)$ . Alors

$f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

**Démonstration :** Soit  $(x, y) \in f(X(\Omega)) \times g(Y(\Omega))$ . On a :

$$\mathbb{P}((f(X), g(Y)) = (x, y)) = \mathbb{P}((X, Y) \in \{f = x\} \times \{g = y\})$$

donc comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$= \mathbb{P}(X \in \{f = x\}) \times \mathbb{P}(Y \in \{g = y\}) = \mathbb{P}(f(X) = x) \times \mathbb{P}(g(Y) = y).$$

■

**Remarque(s) 144 :** Cette propriété est à comprendre de la façon suivante : si l'on effectue deux expériences aléatoires indépendantes, alors les résultats dépendants uniquement de la première et uniquement de la deuxième sont aussi indépendants.

**Propriété(s) 15.2.120 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

**Démonstration :** On a :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$

donc par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) \times \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

■

**Remarque(s) 145 :** Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse. Si l'on considère le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  dont la loi conjointe est définie par la table :

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$			
	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$	
$Y = -1$	1/6	0	1/6	1/3
$Y = 0$	0	1/3	0	1/3
$Y = 1$	1/6	0	1/6	1/3
	1/3	1/3	1/3	

Alors  $X$  et  $Y$  ne sont clairement pas indépendantes, mais  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X \times Y) = 0$ .

#### 15.2.4.2 Indépendance mutuelle

**Définition 15.2.113 :** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires définies sur  $\Omega$ . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tous événements  $A_i \subset X_i(\Omega)$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) :

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

**Remarque(s) 146 :**

1. Bien entendu, si  $n$  variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, elles le sont deux à deux. Comme dans le cas des événements, la réciproque est malheureusement fausse.
2. Par définition, toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires indépendantes est indépendante.
3. On modélise  $n$  expériences aléatoires indépendantes par une famille  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes.

#### Exemple(s) 213 :

213.1 On considère  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes suivant des lois  $\mathcal{B}(p)$ . Alors :

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

**Démonstration :** On procède par récurrence sur  $n$ . Le résultat est clair si  $n = 1$ . Supposons-le vrai pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Considérons  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$   $n+1$  variables aléatoires indépendantes suivant des lois  $\mathcal{B}(p)$ . Alors par hypothèse de récurrence :

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad X_{n+1} \sim \mathcal{B}(p).$$

Donc par indépendance puis la formule du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((Y = k \cap X_{n+1} = 0) \cup (Y = k - 1 \cap X_{n+1} = 1)) \\ &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k+1} + \binom{n}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n-k+1} = \binom{n+1}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k+1} \end{aligned}$$

enfin, toujours par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y + X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 \cap X_{n+1} = 0) = (1-p)^{n+1} \quad \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}(Y = n \cap X_{n+1} = 1) = p^{n+1}$$

ce qui achève de montrer l'hérédité.

Il est aussi aisé de voir le résultat à l'aide de la modélisation suivante : lancer  $n$  pièces pipées une fois et compter le nombre de « pile » revient à lancer une pièce pipée  $n$  fois indépendamment et compter le nombre de « pile ».

213.2 Montrons la « loi faible des grands nombres » : si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes, de mêmes lois, alors si  $m = \mathbb{E}(X_1)$  :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad \forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration :** Commençons par remarquer que, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = m$$

donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on a :

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \alpha) \leq \frac{\text{Var}(\overline{X_n})}{\alpha^2}.$$

De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\text{Var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left( \left( \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \right)^2 \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i)) \times (X_j - \mathbb{E}(X_j))).$$

Mais, comme les lois sont deux à deux indépendantes et si  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$  :

$$\mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i)) \times (X_j - \mathbb{E}(X_j))) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \sigma^2 & \text{si } i = j \end{cases},$$

finalement :

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \alpha) \leq \frac{1}{n} \times \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$