MP Programme de colle n° 16

Cours :

Chapitre 10
Variables aléatoires discrètes

6. Fonction génératrice

Chapitre 11
Fonctions vectorielles

1. Dérivée en un point

2. Opérations sur les fonctions dérivables

3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

4. Intégration sur un segment

5. Particularités des fonctions à valeurs réelles (§ 5.1 à 5.4)

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes ou délicates)

Chapitre 10

6.1

Propriété préliminaire Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit la série entière $\sum P(X=n)t^n$.

- Son rayon de convergence vérifie $R \geqslant 1$.
- Elle converge normalement sur $[-1,1]$.
- Sa somme G_X est continue sur $[-1,1]$ et si $R>1$ sur $]-R,R[$.
- $\forall t \in]-R,R[\cup [-1,1]$, t^X est d'espérance finie et $\boxed{G_X(t)=E(t^X)}$

6.2

Loi de X	Notation	Fonction génératrice	Rayon
de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$G_X(t)=q+pt$	$+\infty$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$G_X(t)=(q+pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$G_X(t)=\dfrac{pt}{1-qt}$	$\dfrac{1}{q}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

Chapitre 11

2.2

Proposition 2 :

Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable en a et $L \in \mathcal{L}(F,G)$

où F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $L \circ f$ est dérivable en a et $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$

2.3

Proposition 4 :

Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire

où F, G et H sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$, dérivables toutes deux en a.

Alors l'application $B(f,g) : I \to H$ définie par $t \to B(f(t),g(t))$ est dérivable en a et $\boxed{B(f,g)'(a) = B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a))}$.

2.5

Proposition 5 : Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable en a et $g : J \to F$ une fonction dérivable en $b = f(a)$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a))$.

3.3

Proposition 6 :

Si $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})^2$ alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ et $\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$.

5.3

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$.

Alors $\exists\, c \in]a,b[\;/\; f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

- En supposant acquis le théorème de Rolle

5.4

Lemme : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I - \{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est notée ℓ

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et vaut ℓ.

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I - \{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$: f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$: f n'est pas dérivable en a.

- La démonstration du théorème comprend la démonstration du lemme