MP*: Probabilités

Coralie Renault

19 septembre 2014

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
a) Déterminer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.
c) Observer que la loi de Z est géométrique.

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Reconnaître la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques de paramètres p et q.
Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.
a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x \in \mathcal{X}$, on pose

$$p(x) = P\left(X = x\right)$$

On appelle entropie de la variable X le réel

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\left(p(x)\right)$$

où l'on convient $0\log 0 = 0$.

a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. A quelle condition celui-ci est-il nul ?

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

b) On appelle entropie conjointe de X et Y , l'entropie de la variable $Z = (X, Y)$ simplement notée $H(X, Y)$.

On suppose les variables X et Y indépendantes, vérifier

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

c) On appelle entropie de X sachant Y la quantité

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Vérifier

$$H(X \mid Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y = y)H(X \mid Y = y)$$

avec

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X = x \mid Y = y)\log\left(P(X = x \mid Y = y)\right)$$

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice

On vous propose le jeu suivant. Une pièce de monnaie parfaitement équilibrée est lancée plusieurs fois jusqu'à ce qu'elle tombe sur "face". S'il a fallu un seul lancé pour obtenir face vous recevez 2 ducats. Si l'en a fallu 2 vous recevez 4 ducats ect... S'il a fallu k lancé vous recevez 2^k ducats. Pour évaluez les droits d'entré dans le jeu (ou la mise de départ) qui permettront un jeu équilibré (ou juste), on imagine que ceux-ci devront être égaux aux gains moyens, c'est-à-dire à l'espérance du gain. Montrer que la probabilité que l'on reçoive 2^k ducats devient vite très petite dès lors que k grandit, alors que paradoxalement, l'espérance du gain est infinie

Exercice

Exercice (*Théorème de Bernstein*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. On va montrer que :

1. B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Pour cela :

- Soit $x \in [0,1]$ et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
- On définit la variance de X, lorsqu'elle existe, par : $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$. Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
- Montrer l'inégalité de Tchébytchev : Soit X une variable aléatoire réelle alors montrer que :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$
- Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées tel que $Var(X_1)$ existe. Montrer que :
$$Var(S_n) = nVar(X_1)$$
- Calculer $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$
- Montrer que $\forall \delta > 0$ on a :
$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta)$$
- Conclure

Exercice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies les variables aléatoires indépendantes U et V, à valeurs dans$\{-1, 1\}$ et de meme loi définie par les relations :

$$P_U(-1) = \frac{1}{3} \text{ et } P_U(1) = \frac{2}{3}$$

Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X = U \text{ et } Y = \text{sign}(U)V$$

- Quelle est la loi de la variable aléatoire (X,Y) ?
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- Et X^2 et Y^2 le sont-elles ?