

# Colle MP : Séries et suites de fonctions

26 novembre 2018

## Colle 1

Colin (14) : bien  
Solène (17) : Très bien

**Exercice 1.** Comparaison modes convergences.

**Exercice 2.** Convergence simple et uniforme de  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$  ?

Calculer  $\lim \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} dx$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que, pour tout  $k \geq 0$ , on a  $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$ .

Démontrer que  $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$ .

En déduire que  $f$  est la fonction nulle.

## Colle 2

PIERRE Alexandre (14) : petites confusions de quantificateurs, dans la démonstration

Manon (12) : des difficultés pour trouver un contre-exemple (pourtant assez simple)

**Exercice 1.** Conservation continuité. Contre exemple si la CV n'est pas uniforme ?

**Exercice 2.** Montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$$

En déduire  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$ .

**Exercice 3.** Soit  $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$  si  $x \in [0, 1/n]$  et  $f_n(x) = 0$  sinon. Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .

Calculer  $\int_0^1 f_n(t)dt$ . Y-a-t-il convergence uniforme sur  $[0,1]$ ? Étudier la convergence uniforme sur  $[a, 1]$  pour  $a \in ]0, 1]$ .

### Colle 3

GAUBERT Baptiste (13) : erreurs de calcul  
Juliette (13) : erreurs de calcul

**Exercice 1.** Théorème : limite d'une suite d'intégrales. Contre-exemple si la convergence n'est pas uniforme?

**Exercice 2.** Convergence simple et uniforme sur  $\mathbb{R}$  de  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$