Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

1. Normes

1.1. Norme, espace vectoriel normé

Définition 1 : **norme, espace vectoriel normé**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. (dans tout le chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On appelle **norme** toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

- ❖ $\forall x \in E \ : \ [N(x)=0] \Rightarrow [x=0_E]$
- ❖ $\forall (x,y) \in E^2 \ : \ N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$
- ❖ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \, , \ \forall x \in E \ : \ N(\alpha.x) = |\, \alpha \,|\, N(x)$

Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel muni d'une norme.

- Une norme N est souvent notée $\left\| . \right\|$
- Propriété (seconde inégalité triangulaire) :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \ : \ \left| \|x\| - \|y\| \right| \leqslant \|x-y\|} \quad \text{Démo. } \boxed{\mathbf{1}}.$$

- Conséquence : l'application $x \to \left\| x \right\|$ est 1-lipschitienne donc continue.

1.2. Exemples de normes

a) Sur $\mathbb{R}$: la valeur absolue ; sur $\mathbb{C}$: le module.

b) Sur $\mathbb{R}^2$: $\boxed{\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|}$, $\boxed{\| x,y \|_2 = \sqrt{x^2+y^2}}$, $\boxed{\|(x,y)\|_\infty = Max(|x|,|y|)}$

c) Sur $\mathbb{K}^n$: $\|(x_1,..,x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|(x_1,..,x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|(x_1,..,x_n)\|_\infty = \underset{i=1..n}{Max}(|x_i|)$

d) Sur un espace préhilbertien réel : la norme euclidienne $\boxed{\| x \|_2 = \sqrt{(x \mid x)}}$

e) Sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$: $\boxed{\|f\|_\infty = \underset{x\in X}{Sup}\ |f(x)|}$

f) Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$: $\boxed{\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt}$, $\boxed{\|f\|_2 = (\int_a^b |f(t)|^2\, dt)^{1/2}}$, $\boxed{\|f\|_\infty = \underset{x\in [a,b]}{Max}(|f(x)|)}$

1.3. Distance associée

a) Définition

Définition 2 : **distance** sur un ensemble E.

On appelle distance sur E toute application $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ telle que

- ❖ $\forall (x,y) \in E^2 \ : \ [d(x,y)=0] \Rightarrow [x=y]$
- ❖ $\forall (x,y,z) \in E^3 \ : \ d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$
- ❖ $\forall (x,y) \in E^2 \ : \ d(x,y) = d(y,x)$

- Conséquence seconde identité triangulaire : $|d(x,y)-d(x,z)| \leqslant d(y,z)$

b) Distance associée à une norme

> Proposition :
>
> Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\| \ \|$.
>
> On munit naturellement E d'une distance en posant : $\boxed{d(x,y)=\|x-y\|}$.
>
> d s'appelle la **distance associée** à la norme $\| \ \|$

- Démonstration $\boxed{\mathbf{2}}$.
- Exemple :
  - dans $\mathbb{R}$: $d(x,y)=|x-y|$; $\boxed{|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow [a-\varepsilon<x<a-\varepsilon]}$
  - dans $\mathbb{C}$: $d(z,z')=|z-z'|$
- Exercice : résoudre $1\leqslant|x+5|\leqslant 2$ dans $\mathbb{R}$ et $1\leqslant|z+i|\leqslant 2$ dans $\mathbb{C}$.

c) Distance d'un point à une partie

> Définition 3 : distance d'un point x à une partie non vide A de E.
>
> On appelle **distance de x à A** le nombre $\boxed{d(x,A)=\underset{a\in A}{Inf}(d(x,a))}$

- Justification de l'existence de ce nombre $\boxed{\mathbf{3}}$.
- Propriété : $\boxed{\forall (x,y)\in E^2 \ : \ |d(x,A)-d(y,A)|\leqslant \|x-y\|}$
- Conséquence : l'application $x\rightarrow d(x,A)$ est lipchitzienne donc continue

1.4. Boules

a) Boules ouvertes, fermées

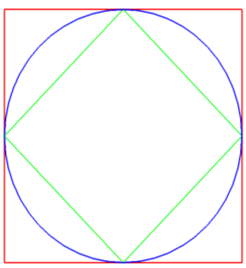
> Définition 4 : **boules ouvertes, fermées**
>
> Soient $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$
>
> ❖ La boule ouverte de centre a et de rayon r est définie par :
>
> $$B(a,r)=\{x\in E\,/\,d(a,x)<r\}=\{x\in E\,/\,\|a-x\|<r\} \ :$$
>
> ❖ La boule fermée de centre a et de rayon r est définie par :
>
> $$B_f(a,r)=\{x\in E\,/\,d(a,x)\leqslant r\}=\{x\in E\,/\,\|a-x\|\leqslant r\}$$
>
> ❖ La sphère de centre a et de rayon r est définie par :
>
> $$S(a,r)=\{x\in E\,/\,d(a,x)=r\}=\{x\in E\,/\,\|a-x\|=r\}$$

b) Convexité

> Propriété : toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{4}}$.

c) Exercice : dans $\mathbb{R}^2$ **sphère unité** pour chacune des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$.



$S(0,1)$

---- pour $\| \ \|_\infty$

---- pour $\| \ \|_2$

---- pour $\| \ \|_1$

1.5. Parties bornées, fonctions bornées

Définition 5 : Soit E un espace vectoriel normé, X un ensemble.

- Une **partie** A de E est dite **bornée** si

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x \in A : \ \|x\|_{\mathbb{E}} \leqslant K}.$$

- Une **application** $f : X \to E$ est dite **bornée** si

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x \in X \ : \ \|f(x)\|_E \leqslant K}$$

Propriété : L'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des applications bornées de X dans E est un espace vectoriel normé pour la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X,E) : \boxed{\|f\|_\infty = \underset{x\in X}{Sup}\|f(x)\|_E}$$

- Démonstration $\boxed{\textbf{5}}$.
- Exemple : toute boule est une partie bornée

1.6. Normes équivalentes

a) Définition

Définition 6 : soient deux normes N_1 et N_2 sur un K-espace vectoriel E.

- On dit que N_1 est **dominée par** N_2 si

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R}_+ \ / \forall x \in E : N_1(x) \leqslant k.N_2(x)}$$

- N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si elles se dominent mutuellement, ou encore si $\boxed{\exists(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 / \forall x \in E : \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)}$

- [N_1 est **dominée par** N_2] $\Leftrightarrow$ [sur $E - \{0_E\}$, $\dfrac{N_1}{N_2}$ est bornée]

b) Importance de cette notion : les notions topologiques définies pour les espace vectoriels normés E (borné, continue, convergente, ouverts, fermés…) dépendent a priori (voir les définitions) de la norme choisie dans E : ce n'est plus le cas si on munit E de deux normes équivalentes $\boxed{\textbf{6}}$.

c) Exemples $\boxed{\textbf{7}}$.

- Exemple 1 : $\mathbb{R}^2$

  La suite d'inégalités $\boxed{Max(|x|,|y|) \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \leqslant 2\,Max(|x|,|y|)}$ permet de montrer que les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

- Exemple 2 : sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a les inégalités :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \ \leqslant \ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \ \|f\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{Max}\ |f(x)|$$

  ainsi $\| \ \|_1$ est **dominée** par $\| \ \|_2$ elle-même dominée par $\| \ \|_\infty$

  Mais ces normes ne sont pas équivalentes…

- On verra que les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie sont toutes équivalentes : $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ n'est donc pas de dimension finie (exercice : rechercher un autre argument)

2. Suites dans un espace vectoriel normé

2.1. Convergence, divergence

a) Définition

Définitions 1 : **suite convergente, divergente, limite**

- ❖ Une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E est dite **convergente** s'il existe $\ell\in E$ tel que $\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \text{si}\ n\in\mathbb{N}\ \text{et}\ n\geqslant n_0,\ \text{alors}\ \left\|u_n-\ell\right\|_E<\varepsilon}$.
- ❖ Le vecteur ℓ est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
- ❖ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

- La limite est unique **8**.
- La définition dépend de la norme choisie : il faut donc la préciser (sauf si l'espace vectoriel normé est de dimension finie …).
- Propriété 1 : toute suite convergente est bornée. Démonstration **9**.
- Propriété 2 : $\boxed{[u_n\xrightarrow[\|\ \|_E]{}l]\Leftrightarrow[\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|u_n-l\right\|_E=0]}$ Démonstration **10**.

b) Exemples **11**.

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)=1}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e}$
- Sur $\mathcal{C}(0,1,\mathbb{K})$, $f_n:t\to t^n$: la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle au sens de la norme $\|\ \|_1$ mais pas au sens de la norme $\|\ \|_\infty$.

c) Propriétés algébriques

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes de limites ℓ et ℓ'.
Soit $\lambda\in K$ et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite scalaire de limite α.
Alors les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\ell+\ell'$, $\lambda\ell$ et $\alpha\ell$.

- Démonstration **12**. $\boxed{\swarrow}$

Corollaire : La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

- Attention : on ne peut rien conclure a priori si les deux suites divergent

2.2. Cas des espaces produits

Proposition : **raisonnement coordonnée par coordonnée**

Soit un espace vectoriel normé produit $E=\prod\limits_{i=1}^{p}E_i$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E avec $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=(u_n^1,u_n^2,\ldots,u_n^p)$.

Soit $\ell\in E$ avec $\ell=(\ell^1,\ell^2,\ldots,\ell^p)$. Alors $\boxed{\left[u_n\xrightarrow[\|\ \|_E]{}\ell\right]\Leftrightarrow\left[\forall i\in[\![1,p]\!] : u_n^i\xrightarrow[\|\ \|_{E_i}]{}\ell^i\right]}$

- Préalable : norme sur l'espace-produit
- Démonstration et application à $\mathbb{R}^2$, à $\mathbb{C}$ **13**.

2.3. Suites extraites

a) Définition

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé E.
On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

- Exemples : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n!})_{n\in\mathbb{N}}$

Une propriété intéressante à connaître (exercice : récurrence…)
Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ :\ n\leqslant\varphi(n)}$$

- On rappelle les propriétés suivantes (MPSI) :

Propriété 1 :
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite

- Intérêt : utiliser la contraposée pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge
- Exemple : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car …
- Exercice : montrer que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge **12**.
  Indication : que vaut $\sin(n+1)-\sin(n-1)$? et $\sin(2n)$?

Propriété 2 :
Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2.4. Valeurs d'adhérence

Définition : On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Exemple : 1 et -1 sont deux valeurs d'adhérences de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- La contraposée de la propriété 1 entraîne que :
  $\boxed{\text{toute suite ayant deux valeurs d'adhérence diverge}}$.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'écrit de même :
  $\boxed{\text{toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence}}$

3. Eléments de topologie

3.1. Voisinages, ouverts, fermés

a) Définitions et exemples

Définitions 1 : **voisinage, ouvert**

Soit E un espace vectoriel normé et $a\in E$.

- ❖ Une partie V de E est un voisinage de a si $\boxed{\exists r>0\,/\ \mathcal{B}(a,r)\subset V}$.
- ❖ Une partie U de E est un ouvert de E si elle est voisinage de chacun de ses points, autrement dit si : $\boxed{\forall a\in U,\ \exists r>0\,/\ \mathcal{B}(a,r)\subset U}$.

- Exemple 1 : toute boule ouverte est un ouvert (!)
  - Démonstration $\boxed{\mathbf{14}}$.
- Exemple 2 : dans $\mathbb{R}$, $]a,b[$, $]a,+\infty[$ et $]-\infty,b[$ sont des ouverts $\boxed{\mathbf{15}}$.

> Définition 2 : **fermé**
>
> On dit que A est un fermé si son complémentaire $E \setminus A = \mathcal{C}_E A$ est ouvert.

- Exemple 1 : toute boule fermée est fermée (!) $\boxed{\mathbf{16}}$.
- Exemple 2 : tout singleton est fermé. $\boxed{\mathbf{17}}$.
- Exemple 3 : dans $\mathbb{R}$, $[a,b]$, $]-\infty,b]$ et $[a,+\infty[$ sont des fermés. $\boxed{\mathbf{18}}$.

b) Propriétés

> Proposition : **propriétés des ouverts, des fermés**
>
> - $\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
> - Toute réunion quelconque et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
> - Toute intersection quelconque et toute réunion finie de fermés est un fermé.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{19}}$. ⇙
- Exemples et contre-exemples :

$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n},1\right[=]0,1[}$ $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n},1\right] =]0,1]}$ $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] = \{0\}}$ $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}}$

c) Caractérisation séquentielle des fermés

> Théorème : **Caractérisation séquentielle des fermés**
>
> Une partie A d'un espace vectoriel normé E est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{20}}$. ($\Leftarrow$ par contraposition) ⇙
- Exemple 1 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue.
  Le graphe de f, $\mathcal{C}_f = \{(x,f(x))\ ;\ x \in a,b\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\mathbf{21}}$.
- Exemple 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ.
  L'ensemble $A = \{u_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un fermé de E. $\boxed{\mathbf{22}}$.

d) Ouverts et fermés relatifs de A

> Définition 3 : **Ouvert, fermé, voisinage relatifs** d'une partie A de E
>
> On dit que U est un ouvert (resp.fermé, resp.voisinage) relatif de A s'il existe un ouvert (resp.fermé, resp.voisinage) Ω de E tel que $U = \Omega \cap A$.

- Exemple : $]0,1]$ est ouvert relatif de $]-\infty,1]$ et un fermé relatif de $\mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\mathbf{23}}$.

3.2. Intérieur, adhérence, frontière

a) Adhérence

> Définition 4 : **point adhérent, adhérence**
>
> Un point $x \in E$ est dit adhérent à une partie A de E si $\boxed{\forall r > 0,\ \mathcal{B}(a,r) \cap A \neq \varnothing}$
> autrement dit si toute boule ouverte de centre x rencontre A.
>
> L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A. Elle est notée $\overline{A}$

- Exemples : $\overline{\mathcal{B}(a,r)} = \mathcal{B}_f(a,r)$, $\overline{0,1} = 0,1$ …. Intuitivement : …
- $\boxed{x \text{ est adhérent à } A}$ s'écrit donc $\boxed{x \in \overline{A}}$

> Théorème : **caractérisation séquentielle d'un point adhérent**
>
> $$\boxed{\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow [x \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A]}.$$

- Démonstration **24**.
- Exemple : si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et si $M = Sup(A)$,

  alors $M \in \overline{A}$, et en particulier $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ **25**.
- Exercice : $\boxed{\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow d(x,A) = 0}$

b) Intérieur

> Définition 5 : **point intérieur, intérieur**
>
> Un point $x \in E$ est dit intérieur à une partie A de E si A est un voisnage de x
> autrement dit si $\boxed{\exists r > 0,\ \mathcal{B}(a,r) \subset A}$.
>
> L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A. Il est notée $\mathring{A}$

- Exemples : $\overset{\circ}{\mathcal{B}_f(a,r)} = \mathcal{B}(a,r)$, $\overset{\circ}{[0,1]} =]0,1[$
- Intuitivement : c'est l'ensemble moins sa frontière. Effectivement … (voir § d)

c) Propriétés de l'adhérence et de l'intérieur

> **1**. $\mathcal{C}_E\overline{A} = \overset{\circ}{\mathcal{C}_E A}$ et $\mathcal{C}_E\mathring{A} = \overline{\mathcal{C}_E A}$
>
> **2**. $A \subset B \Rightarrow \left[\ \mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}\ \right]$
>
> **3**. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
>
> **4**. A est ouvert $\Leftrightarrow \left[\mathring{A} = A\right]$ et A est fermé $\Leftrightarrow \left[\overline{A} = A\right]$
>
> **5**. $\mathring{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A.
>
> **6**. $\overline{A}$ est fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.

- Démonstration **26**. **CCP oral…**

d) Frontière

Définition 6 : La **frontière** de A est définie par $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \complement_E \overset{\circ}{A}$

- On a aussi $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$ et donc $\boxed{Fr(A) \text{ est un fermé}}$.
- Exemple : $Fr(\mathcal{B}(a,r)) = S(a,r)$
- Exercice facultatif : $\boxed{\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus Fr(A)}$ $\boxed{\overline{A} = A \cup Fr(A)}$

e) Parties denses

Définition : On dit que A est dense dans B si $\overline{A} \supset B$.

En particulier, si $A \subset E$: A est dense dans E $\Leftrightarrow \boxed{\overline{A} = E}$

- Exemples :
  - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R} : \boxed{x = \lim\limits_{n\to+\infty} (10^{-n} E(10^n x))}$ **27**.
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ **28**.
  - Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est du type $n\mathbb{Z}$ ou est dense dans $\mathbb{R}$.
  - L'ensemble des fonctions polynômes $P : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme $\| \; \|_\infty$ (théorème de Stone-Weierstrass).
  - L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est aussi dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme $\| \; \|_\infty$ (théorie de l'intégration).

4. Etude locale des applications

4.1. Limite en un point, continuité

a) Définition

Définition 1 : Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E.

Soit une application $f : A \to F$. Soit $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet pour limite ℓ en a si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, [x \in A \text{ et } \|x-a\|_E \leqslant \alpha] \Rightarrow \left[\; \|f(x) - \ell\|_E \leqslant \varepsilon \; \right]}.$$

On écrit $\boxed{\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)}$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté $\boxed{\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)}$ ou $\boxed{\ell = \lim\limits_{a} f}$

- La limite, si elle existe est unique **29**.
- Exemples (liste non exhaustive…) **30** :

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}}$

- Si $a \in A$, la limite si elle n'existe ne peut être que $f(a)$ (exercice).

  On dit alors que $\boxed{f \text{ est continue en } a}$. Ainsi :

Définition 2 : Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E.

Soit une application $f : A \to F$ et soit $a \in A$.

On dit que f est continue en a si f admet une limite en a ou encore si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, [x \in A \text{ et } \|x-a\|_E \leqslant \alpha] \Rightarrow \left[\; \|f(x) - f(a)\|_E \leqslant \varepsilon \; \right]}.$$

b) Prolongement par continuité

Définition 3 : Soit $f : A \to F$ qui admet une limite ℓ en $a \in \overline{A}$.

Le " prolongement par continuité en a " est la fonction $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ définie par : $\boxed{\forall x \in A :\ \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \ell}$

- $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ est alors continue en a (exercice).

c) Cas des espaces produits

Proposition : **raisonnement coordonnée par coordonnée**

Soit $f : E \to F$ où E est un espace vectoriel normé E et F est un espace produit $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$ muni de la norme-produit.

Ainsi $\forall x \in E : f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ où $\forall i \in [\![1, n]\!] :\ f_i : E \to F_i$

Soit $\ell \in F$ avec $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ où $\forall i \in [\![1, n]\!] :\ \ell_i \in F_i$. Alors :

$$\boxed{\left[\ell = \lim_{x \leftrightarrow a} f(x)\right] \Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, n]\!] : \ell_i = \lim_{x \leftrightarrow a} f_i(x)\right]}$$

- Démonstration **31**.

d) Extensions de la notion de limite

Définition : Soit une application $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a et on écrit $\boxed{\lim_{a} f = +\infty}$ si

$$\boxed{\forall B > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, [x \in A \ \text{ et } \ \|x - a\|_E \leqslant \alpha] \Rightarrow [f(x) \geqslant B]}.$$

Définition : Soit une application $f : [a, +\infty[\to F$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ on écrit $\boxed{\lim_{+\infty} f = \ell}$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \,/\, [x \geqslant K] \Rightarrow \left[\ \left\|f(x) - \ell\right\|_E \leqslant \varepsilon\ \right]}.$$

- De même $\boxed{[\lim_{+\infty} f = +\infty] \Leftrightarrow [\forall B > 0, \exists A > 0 \,/\, (x \geqslant A) \Rightarrow (f(x) \geqslant B)]}$
- Exemples : $\boxed{\lim_{x \leftrightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$ $\boxed{\lim_{x \leftrightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty}$

4.2. Caractérisation séquentielle

Théorème 1 : Soient $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Alors

$[\ f$ admet pour limite ℓ en $a\ ]$

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{c}\text{pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } a \\ \text{la suite } (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell\end{array}\right]$

- Démonstration **32**. ($\Leftarrow$ par contrapisition)
- On a donc notamment : $\boxed{\left[\begin{array}{c}\lim_{x \to a} f(x) = \ell \\ u_n \to a\end{array}\right] \Rightarrow [f(u_n) \to \ell]}$
- La contraposée permet de démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite ; par exemple : $\boxed{\text{sin n'admet pas de limite en } +\infty}$ **33**.
- En adaptant ce théorème à la continuité, on obtient :

Théorème 2 : Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. Alors

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } a \\ \text{la suite } (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f(a)\end{array}\right]$$

- On a donc notamment : $\boxed{\left[\begin{array}{c} f \text{ continue en } a \\ u_n \to a \end{array}\right] \Rightarrow f(u_n) \to f(a)}$
- **Exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$** 34.

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ et $f(0) = 0$

4.3. Opérations algébriques

Proposition 1 : Soient $f, g : A \to F$, $\alpha \in K$, $a \in \overline{A}$ et $\ell, \ell' \in F$.

On suppose que $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$.

Alors $\boxed{\lim_a (f+g) = \ell + \ell'}$ et $\boxed{\lim_a (\alpha f) = \alpha\ell}$

Si de plus $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $\boxed{\lim_a (f \times g) = \ell \times \ell'}$

- Revoir les démonstrations (MPSI) et les adapter.
- Conséquence : si f et g sont continues en a, alors $f+g$ et αf le sont aussi. De même, lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour $f \times g$

Proposition 2 : Soient $f : A \to B$, $g : B \to G$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $\ell \in G$.

Si $\lim_{x \leftrightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$, alors $\boxed{\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell}$

- Revoir la démonstration (MPSI) et l'adapter.
- Conséquence : si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors

  alors $g \circ f$ est continue en a.

4.4. Continuité sur une partie A

a) Définition

Définition : **continuité sur A**

On dit que $f : A \to F$ est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

- Exemple : toute application lipschitzienne est continue (voir § 4.5) ; ainsi :
  - $x \longrightarrow \|x\|_E$ est continue sur E.
  - $p_i : x = (x_1, \dots, x_n) \to x_i$ est continue sur $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ (norme-produit).

b) Structures algébriques

- Les propriétés algébriques vues en § 4.3 montrent immédiatement que :

  $\boxed{\mathcal{C}(A, F) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}}$, sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(A, F), +, .)$

  $\boxed{\mathcal{C}(A, \mathbb{K}) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre}}$, sous-algèbre de $(\mathcal{F}(A, F), +, .)$

c) Continuité et densité

Théorème : fonctions égales sur une partie dense

Soit B une partie de E dense dans A. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(A,F)^2$.

Si $f_{|B} = g_{|B}$ alors $f = g$

autrement dit : deux fonctions continues sur A et qui coïncident sur une partie dense dans A sont égales

- Démonstration **35**. **CCP oral…**
- Exemple d'application

Algorithme de recherche des morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$
○ On pose $a = f(1)$ ○ On montre que $f(0)=0$ et que f est impaire. ○ On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ f(nx) = nf(x)$ ○ On montre que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ f(n) = an$ ○ On montre que $\forall n \in \mathbb{Z}\ :\ f(n) = an$ (utiliser l'imparité) ○ On montre que $\forall r \in \mathbb{Q}\ :\ f(r) = ar$ (astuce …) ○ On conclut par le théorème précédent … en n'oubliant pas la réciproque.
Conclusion : les seuls morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont les fonctions linéaires $x \to kx$ $(k \in \mathbb{Z})$

d) Continuité et topologie

Théorème : image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue

Soit $f : E \to F$. Alors :

$f \in \mathcal{C}(E,F) \Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E

$\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E

- Démonstration **36**.
- Exemple : pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le graphe $\mathcal{C}_f = \{(x,f(x))\,;\, x\in\mathbb{R}\}$ est fermé
- Remarque : pour $f \in \mathcal{C}(A,F)$, préciser "ouvert (fermé) relatif" de A

  Exemple : pour la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$,

  $$\tan^{-1}(\mathbb{R}_+) = [0,\frac{\pi}{2}[\text{ est un fermé relatif de }]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ .$$

4.5. Uniforme continuité

a) Un exemple : applications k-lipschitziennes

Définition : fonction lipschitzienne, contractante

Soit $f : A \to F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ f est dite k-lipschitzienne si

$$\boxed{\forall\ (x,y) \in A^2\ :\ \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E}\ .$$

Si de plus $k<1$, f est dite contractante.

Exemples :

- $x \longrightarrow |x|$, $x \longrightarrow \|x\|_E$ sont 1-lipschitzienne

  $\boxed{\to}$ utiliser la 2[nde] inégalité triangulaire **37**.

- toute fonction $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ de dérivée bornée est lipschitzienne

  $\boxed{\to}$ utiliser l'inégalité des accroissements finis **38**.

b) Applications uniformément continues

Définition : Une application $f : A \to F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ f est dite uniformément continue sur A si $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \left[\ (x,y) \in A^2 \text{ et } \|x-y\|_E \leqslant \alpha\ \right] \Rightarrow \left[\ \|f(x)-f(y)\|_E \leqslant \varepsilon\ \right]}$.

- Noter la différence avec la continuité en tout $a \in E$.

Propriété : Toute fonction uniformément continue sur A est continue sur A.

- Démo **39**.

Exemple : toute fonction lipschitzienne est uniformément continue donc continue

- Démo **40**.

- Ainsi dérivable à dérivée bornée

  $\underset{1}{\Rightarrow}$ lipschitzienne

  $\underset{2}{\Rightarrow}$ uniformément continue

  $\underset{3}{\Rightarrow}$ continue

  contre-exemple pour les réciproques

  $\boxed{1}$ $x \longrightarrow |x|$ sur $\mathbb{R}$

  $\boxed{2}$ $x \longrightarrow \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

  $\boxed{3}$ exp sur $\mathbb{R}$

- Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue (Heine).

4.6. Applications linéaires continues

a) Théorème fondamental

Théorème : **caractérisation des applications linéaires continues**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.

$$\boxed{u \text{ est continue } \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in E : \|u(x)\|_F \leqslant \|x\|_E\right]}$$

- Démonstration **41**. **CCP oral…**

- Exemple 1 : $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$; $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = \int_a^b f(t)dt$.

  Que l'on munisse E de n'importe laquelle des normes (pourtant non équivalentes) $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ ou $\|\ \|_\infty$, l'application Φ est continue. **42**.

- Exemple 2 : $\ell^1(\mathbb{C}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum u_n \text{ converge}\}$.

  On peut munir $\ell^1(\mathbb{C})$ des normes $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ ou $\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{Sup} |u_n|$.

  $\Phi : \ell^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par $\forall u \in \ell^1\ \mathbb{C}\ : \Phi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue pour la norme $\|\ \|_1$, mais pas pour la norme $\|\ \|_\infty$ **43**.

- On verra que si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

b) Généralisation à la bilinéarité

Proposition : **condition suffisante pour la continuité des applications n-linéaires**

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Si une application bilinéaire $B : E \times F \to G$ vérifie :

$$\boxed{\left[\exists k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall (x,y) \in E \times F : \|B(x,y)\|_G \leqslant k \|x\|_E \|y\|_F\right]},$$

alors B est continue.

- Démonstration $\boxed{\textbf{44}}$.
- Noter la similarité et la différence avec le théorème 4.6.a

5. Compacité

5.1. Introduction(rappels)

Théorème de Bolzano-Weierstarss

De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente.

- Ou encore :

Toute suite réelle ou complexe bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

- Démonstrations
  - Dans $\mathbb{R}$: par dichotomie (voir cours de MPSI)
  - Dans $\mathbb{C}$: par deux extractions successives $\boxed{\textbf{45}}$.
- Prolongement : de même par n extractions successives, on peut montrer que le théorème de Bolzano-Weierstrass reste vrai dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et plus généralement dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

5.2. Définition et premiers exemples

Définition : **partie compacte** d'un espace vectoriel normé E

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérnce appartenant à A.

- Ou encore :

$$A \text{ est compacte } \Leftrightarrow \left[\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^n : \exists (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{extraite et } \exists \ell \in \underline{A} \,/\, u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right]$$

- Exemples tirés de l'introduction : $\boxed{\textbf{46}}$.
  - Tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.
  - Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et plus généralement dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie : toute partie fermée et bornée est compacte.

5.3. Propriétés

Propriété 1 : Tout compact est fermé et borné.

- Démonstration **47**.
- Attention, la réciproque est fausse (sauf si E est de dimension finie)

  Contre-exemple : $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\|_\infty = \underset{i=0..n}{Max} |a_i|$

  $\mathcal{B}_f(0,1)$ est fermée et bornée mais non compacte. **48**.
- Néanmoins :

  $\boxed{\text{Si } \dim_{\mathbb{K}}(E) \text{ est finie et } A \in \mathcal{P}(E) : \ [A \text{ compacte}] \Leftrightarrow [A \text{ fermée et bornée}]}$

Propriété 2 : Toute partie fermée d'un compact est compacte.

- Démonstration **49**.

Propriété 3 : Soient A compacte et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Alors :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une et une seule valeur d'adhérence

- Démonstration **50**.

Propriété 4 : Tout produit (cartésien) fini de compacts est compact.

- Démonstration **51**.
- Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, tout pavé $[a,b]\times[c,d]$ est compact.
- Application : autre démonstration du caractère compact des parties fermées et bornées de $\mathbb{R}^n$ et notamment de $\mathbb{C}$ (sans extraction successive).

5.4. Compacité et continuité

a) Image d'un compact par une fonction continue

Théorème : Soit $f : E \to F$ une application continue.

Si A est une partie compacte de E, $f(A)$ est une partie compacte de F.

- Démonstration **52**.

Corollaire : toute fonction à valeurs réelles continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

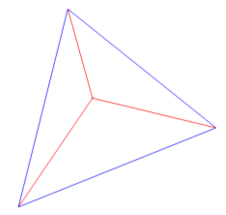
- Démonstration **53**.
- Plus particulièrement encore $\boxed{\text{si } f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \text{ , alors } f([a,b]) = [m,M]}$ **54**.

  autrement dit :

  $\boxed{\text{l'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment}}$

b) Application : optimisation

❖ Problème de Fermat et point de Torricelli



Il existe un point M du triangle ABC pour lequel la quantité $MA + MB + MC$ est minimale.

Ce point s'appelle le point de Toricelli.

❖ Problèmes de distance : soient A et B deux compacts et $a \in E$

- Distance d'un point à un compact : $\boxed{\exists b \in A \,/\, d(a,A) = d(a,b)}$
- Distance entre deux compacts : $\boxed{\exists\,(a,b) \in A \times B \,/\, d(a,b) = d(A,B)}$
- Diamètre d'un compact : $\boxed{\exists\,(a,b) \in A^2 \,/\, d(a,b) = diam(A)}$

c) Théorème de Heine

Théorème : toute application continue sur un compact est uniformément continue

- Démonstration **55**.
- Application : sommes de Riemann $\boxed{S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)dt}$

6. Parties connexes par arcs

6.1. Introduction : rappels de MPSI

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $(a,b) \in I^2$.

Toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte sur I.

ou encore : $\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in]f(a), f(b)[\ ,\ \exists c \in]a,b[\,/\ f(c) = \lambda}$

- Exercice : le 5 janvier 2019 à 19 h 56, il existe deux points de l'Equateur aux antipodes l'un de l'autre pour lesquels la température est la même.

Corollaire : **image d'un intervalle par une fonction réelle continue**

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Il s'agit ici d'adapter ces notions au cas des espaces vectoriels normés.

6.2. Définitions

Définition 1 : **arc, chemin**

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle arc (ou chemin) de A toute application continue $f : [\alpha,\beta] \to A$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \alpha < \beta$.

Définition 2 : **partie connexe par arcs**

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe par arcs si pour tout couple $(a,b) \in A^2$, il existe un arc reliant a à b,

c'est-à-dire $\boxed{\forall (a,b) \in A^2\ ,\ \exists f \in \mathcal{C}([\alpha,\beta], A) \,/\ \ f(\alpha) = a \ \text{ et } \ f(\beta) = b}$.

- On peut toujours choisir $[\alpha,\beta] = [0,1]$ (Justification)

6.3. Exemples

a) Partie convexe : $\boxed{\text{toute partie convexe est connexe par arcs}}$ **56**.

b) Couronne : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \,/\, r \leqslant OM \leqslant R\}$ où $(r, R) \in \mathbb{R}^2 \,/\, r < R$

La couronne $\mathcal{C}$ est connexe par arcs mais non convexe **57**.

c) Partie étoilée :

- Définition : A est dite **étoilée** si $\exists a \in A \,/\, \forall b \in A : [a,b] \subset A$.
- Noter la différence avec la notion de partie convexe ; néanmoins :
- Propriété : $\boxed{\text{toute partie étoilée est connexe par arcs}}$. **58**.

d) Composante connexe par arcs d'une partie X de E **59**.

- La relation définie sur X par $[a \mathcal{R} b] \Leftrightarrow$ [il existe un chemin joignant a à b] est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalence s'appellent les **composantes connexes** par arcs de X

6.4. Connexité par arcs et continuité

> **Théorème : image d'une partie connexe par arcs par une application continue**
>
> Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$ où E et F sont des espaces vectoriels normés et $A \in \mathcal{P}(E)$.
>
> Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

- Démonstration **60**.

6.5. Etude du cas réel

a) Connexité par arcs et intervalles

> Proposition : Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

- Démonstration **61**.
- Ce sont donc aussi les parties convexes de $\mathbb{R}$ (cf Chapitre 1)

b) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

> **Théorème des valeurs intermédiaires généralisé**
>
> Soient E un espace vectoriel normé, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.
>
> Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Démonstration immédiate par § 6.4 et § 6.5.a (rédiger)

c) Deux belles applications

- Toute application de I dans $\mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) continue et injective est strictement monotone. **62**.
- La dérivée de toute application $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux) **63**.
- Conséquence : $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \;\; \to 0 \text{ si } x \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ et } 1 \text{ sinon} \end{cases}$ n'a pas de primitive.

7. Espaces vectoriels normés de dimension finie

7.1. Equivalence des normes

Théorème 1 (de Riesz) Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

- Démonstration **64**.
- Importance de ce théorème : inutile dans un e.v.n. de dimension finie de préciser la norme choisie mais attention pour les caractères borné ou lipschitzien à la valeur de la borne ou du coefficient de Lipschitz.

7.2. Parties compactes d'un espace normé de dimension finie

Théorème 2 : **parties compactes d'un espace normé de dimension finie**

Une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Théorème 3 : **suites convergentes d'un espace normé de dimension finie.**

Une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une seule valeur d'adhérence.

- Application immédiate de § 5.3 Propriété 3 (rédiger)

7.3. Sous-espaces de dimension finie

Théorème 4 : **fermeture d'un sous-espace de dimension finie**

Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

- Démonstration **65**.

7.4. Continuité des applications linéaires

a) Théorème fondamental

Théorème 5 : **continuité des applications linéaires**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

- Démonstration **66**.

b) Généralisation à la multilinéarité

Théorème 6 : **continuité des applications n-linéaires**

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Alors toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est continue.

- Démonstration **68**.
- Exemples : tous les " produits " (multiplication usuelle, produit scalaire, produit d'un vecteur par un scalaire) sont continus **69**.
- Généralisation : les applications " déterminant " sont continues **70**.