Chapitre 13

Equations différentielles linéaires

1. Equations différentielles linéaires scalaires du 1$^{\text{ier}}$ ordre

(rappels et compléments)

1.1. Equations résolues

a) Définitions et notations

b) Solutions de l'équation homogène, structure de droite vectorielle

c) Solutions de l'équation générale

- $\boxed{\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^*}$ où $\tilde{x}$: une solution particulière de (**E**).
- Pratiquement : "**variation de la constante**".
- Equations du type $x' = k\,x + P(t)e^{mt}$ où $k, m \in \mathbb{C}^2$ et $P \in \mathbb{C}\,X$

d) Problème de Cauchy, propriétés des courbes intégrales

1.2. Equations non résolues

a) Définition

b) Résolution pratique : technique de raccordement

c) Exemples

2. Equations différentielles linéaires du 1$^{\text{ier}}$ ordre

2.1. Notations et définitions

- Ici $x' = a(t).x + b(t)$ où $a \in \mathcal{C}\ I, \mathcal{L}\ F$
- Ecriture matricielle $X' = A(t).X + B(t)$ et système différentiel.
- Exemple

2.2. Propriétés

- caractère $\mathcal{C}^1$ des solutions Démonstration
- structures algébriques des espaces de solutions Démonstration
- principe de superposition des solutions Démonstration

2.3. Le théorème de Cauchy linéaire Démonstration admise

2.4. L'espace des solutions de l'équation homogène

a) Dimension de l'espace des solutions

- Théorème fondamental : $\dim\ \mathcal{S}^* = \dim\ F$ Démonstration

b) Application : recherche d'une base de $\mathcal{S}^*$

- Théorème d'évaluation Démonstration

2.5. Méthode de variation des constantes pour l'équation complète

3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

3.1. Objet d'étude

3.2. Sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

a) Rappel et extension des résultats du Chapitre 6

b) Exemple

c) Méthode pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable

- Si $M = P\Delta P^{-1}$ alors $\exp(M) = P\exp(\Delta)P^{-1}$ Démonstration

d) Dérivation de $t \mapsto e^{tA}$ et de $t \mapsto e^{ta}$ Démonstration admise

3.3. Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

a) Trois théorèmes pour les résoudre

Théorème 1 : écriture de la solution du problème de Cauchy homogène

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = v \end{cases}$ où $(t_0, v) \in I \times F$.

L'unique solution est la fonction $\varphi : t \to \exp((t-t_0)a).v$

- Démonstration admise

Théorème 2 : base de solutions de l'équation homogène

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n vecteurs de F (où $n = \dim(F)$).

Soient les n fonctions $\varphi_i : t \to \exp((t-t_0)a).v_i$ définies sur $\mathbb{R}$.

Alors $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base de l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des solutions de $x' = a.x$ si et seulement si $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base de F.

- Démonstration

Lemme : base de solutions de l'équation homogène

Si v est un vecteur propres de associé à la valeur propre λ,

alors $e^{ta}.v = e^{\lambda t}.v$.

- Démonstration

Théorème 3 : écriture des solutions si A est diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable.

Soit donc $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de a.

Soit pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, λ_j la valeur propre associée à v_j ($\lambda_j \in \mathbb{K}$).

Les solutions de l'équation différentielle homogène $x' = a.x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \to \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\lambda_j t}.v_i$ où $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_j \in \mathbb{K}$.

- Démonstration

b) Quatre méthodes pour les résoudre : exemples et méthodes adaptées

c) Un exemple avec des coefficients non constante

4. Equations scalaires d'ordre n

4.1. Définitons et principes généraux

4.2. Représentation par un système différentiel linéaire

4.3. Théorème de Cauchy

4.4. Structure et dimension des espaces de solutions

5. Equation différentielle linéaires scalaires d'ordre 2

5.1. Système fondamental de solutions (S.F.S.), wronskien

5.2. Détermination d'un S.F.S par le wronskien

- Démonstration

5.3. Méthodes pratiques de résolution de (**E***)

- Exemples

5.4. Méthodes pratiques pour résoudre l'équation complète (**E**)

- Méthode de variation des deux constantes
- Méthode de variation de la constante

5.5. Cas de l'équation à coefficients constants (rappels de *M.P.S.I.* revisités)

a) Cas homogène

b) Cas général

- On résout ici : $\boxed{x'' + ax' + bx = P(t)e^{mt}}$ où $m \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}\ X$.
- La solution particulière est alors donnée par le tableau suivant :