Inversion de matrice

Exercice 1 [01255] [correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$
Observer que
$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$$
A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Exercice 2 [01256] [correction]
Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 [01257] [correction]
Justifier que
$$A=\begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 4 [01258] [correction]
[Matrice à diagonale strictement dominante]
Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall 1\leqslant i\leqslant n,\ \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|<|a_{i,i}|$$
Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 5 [01259] [correction]
Soient $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $\omega=\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose
$$A=\left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$
Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6 [01260] [correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
a) Calculer $(A+I)^3$.
b) En déduire que A est inversible.

Exercice 7 [01261] [correction]
Soit $A=(1-\delta_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
a) Calculer A^2.
b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 8 [01262] [correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I+A$ soit inversible. On pose $B=(I-A)(I+A)^{-1}$.
a) Montrer que $B=(I+A)^{-1}(I-A)$.
b) Montrer que $I+B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Exercice 9 [03420] [correction]
Soient $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n\geqslant 2)$ non nulles vérifiant
$$ABC=O_n$$
Montrer qu'au moins deux des matrices A,B,C ne sont pas inversibles.

Exercice 10 [03422] [correction]
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$AB=A+B$$
Montrer que A et B commutent

Exercice 11 [02575] [correction]
Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
La relation $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$ est immédiate
Si $ad-bc\neq 0$ alors A est inversible et
$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}((a+d)I-A)=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.
Si $ad-bc=0$ alors $A^2-(a+d)A=0$.
Par l'absurde, si A est inversible, A est régulière donc $A=(a+d)I$ puis $A=O$.
Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Par la méthode du pivot, on opère sur les lignes d'une matrice de blocs A et I_n pour transformer A en I_n. On sait qu'alors le bloc I_n sera transformé en A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

On conclut

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

On conclut

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

c) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2\end{array}\right)$$

On conclut

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Exercice 3 : [énoncé]
A est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'équation $Y = AX$ équivaut à $X = A^{-1}Y$ or

$$\begin{cases} x_1 - (x_2 + \cdots + x_n) = y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 + \cdots + 2^{n-2}y_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = y_{n-2} + y_{n-1} + 2y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : [énoncé]
Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leqslant \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| \, |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leqslant m \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m.
Par suite, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre et donc A inversible.

Exercice 5 : [énoncé]
$A = (a_{k,\ell})$ avec $a_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$. $\bar{A} = (b_{k,\ell})$ avec
$b_{k,\ell} = \bar{a}_{k,\ell} = \bar{\omega}^{(k-1)(\ell-1)} = \omega^{-(k-1)(\ell-1)}$.

$A\bar{A} = (c_{k,\ell})$ avec

$$c_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} b_{m,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \omega^{-(m-1)(\ell-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^{k-\ell})^m$$

Si $k = \ell$ alors $\omega^{k-\ell} = 1$ et

$$c_{k,k} = n$$

Si $k \neq \ell$ alors $\omega^{k-\ell} \neq 1$ et

$$c_{k,\ell} = \frac{1 - (\omega^{k-\ell})^n}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0$$

Ainsi $A\bar{A} = nI_n$. On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{n} \bar{A}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $(A + I)^3 = O_3$.
b) $A^3 + 3A^2 + 3A + I = O$ donc A est inversible et $A^{-1} = -(A^2 + 3A + 3I)$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) $A = J - I_n$ avec $J^2 = nJ$ donc $A^2 = (n-2)J + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$.
b) $AB = I_n$ pour $B = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n)$ donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) Comme $(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A)$, on a, en multipliant à droite et à gauche par $(I + A)^{-1}$, la relation $(I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$.
b) $(I + A)(I + B) = (I + A) + (I - A) = 2I$ donc $I + B$ est inversible et
$(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A)$.
$(I - B)(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A - (I - A)) = A$.

Exercice 9 : [énoncé]
Supposons A et B inversibles. En multipliant à gauche par A^{-1} et B^{-1} on obtient $C = O_n$ ce qui est exclu.
En raisonnant de façon analogue, on exclut les autres cas où deux des trois matrices sont inversibles.

Exercice 10 : [énoncé]
On a
$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$$
On en déduit que $I_n - A$ est inversible et que $I_n - B$ est son inverse. L'égalité
$$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$$
entraîne alors
$$BA = A + B$$
et on peut conclure que A et B commutent.

Exercice 11 : [énoncé]
On a $A^2 = 3I + 2A$ donc
$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$$