# Matrices et systèmes d'équations

## *Applications du pivot de Gauss*

### ▷ 1 Des matrices à inverser

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

**1)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ;

**2)** $M_t=\begin{pmatrix} t & 2t \\ -1 & t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$ est fixé ;

**3)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ ;

**4)** $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

### ▷ 2

**1)** Inverser la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

**2)** Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x+y+z+2t=2 \\ x-2y+z-t=0 \\ x+y+2z+t=-1 \\ -2x+y-z-t=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y+z+2t=-3 \\ x-2y+z-t=2 \\ x+y+2z+t=1 \\ -2x+y-z-t=4 \end{cases}$$

### ▷ 3

**1)** Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

**2)** Montrer que le rang de la matrice suivante est supérieur ou égal à 2 :

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de $a$, $b$ veut-il 2 exactement ?

### ▷ 4

**1)** Déterminer une décomposition $ER$ de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2)** Déterminer une décomposition $R'E'$ de cette même matrice.

### ▷ 5 Rang et nombre de solutions

**1)** Déterminer le rang de la matrice $A$ lorsque

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**2)** Soit $x$, $y$, $z$ trois inconnues réelles et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B$ une matrice-colonne quelconque de taille appropriée pour que l'équation matricielle $AX=B$ ait un sens.

Déterminer le nombre de solutions de cette équation (si nécessaire, on pourra distinguer des cas suivant la valeur de la matrice $B$).

## *Éléments théoriques*

### ▷ 6

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. Écrire de six manières différentes l'affirmation « $A$ n'est pas inversible ».

### ► 7

Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ telles que $A+B=AB$.

**1)** Que vaut $I_n+AB-A-B$ ?

**2)** Montrer alors que $(I_n-A)$ est inversible et donner son inverse.

**3)** Montrer que $A$ et $B$ commutent.

### ► 8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. En utilisant des arguments précis issus du cours, démontrez que

**1)** Si $A$ comporte une colonne nulle, alors $A$ n'est pas inversible.

**2)** Si $A$ comporte deux colonnes identiques, alors $A$ n'est pas inversible.

**3)** Si $A$ comporte une colonne multiple d'une autre, alors $A$ n'est pas inversible.

**4)** Si $A$ est inversible et qu'une combinaison linéaire de ses colonnes est nulle, alors tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls.

### ► 9 Matrices triangulaires non inversibles

Soit $T=(t_{i,j})$ une matrice triangulaire supérieure de taille $n$, présentant au moins un zéro sur la diagonale. On note $p+1$ l'indice de la première ligne où apparait un zéro sur la diagonale (ainsi $p \in [\![0, n-1]\!]$).

**1)** Justifier que si $p=0$, $T$ n'est pas inversible.

On suppose désormais que $p \geqslant 1$, c'est-à-dire que le premier zéro de la diagonale n'apparait pas en première position. On note $M$ la matrice obtenue en ne conservant que les lignes et les colonnes de $T$ d'indices 1 à $p$.

**2)** Justifier que $M$ est une matrice inversible de taille $p$.

**3)** Justifier qu'on peut trouver des nombres $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t_{1,p+1} \\ -t_{2,p+1} \\ \vdots \\ -t_{p,p+1} \end{pmatrix}.$$

**4)** En utilisant la matrice-colonne de taille $n$

$$X_0=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

démontrer que la matrice $T$ n'est pas inversible.

### ► 10 Matrices de rang 1

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.

Montrer que $M$ est de rang 1 si et seulement si $M$ est non nulle et que toutes ses lignes sont proportionnelles.

(Indication : on procédera par double implication, et pour l'un des deux sens, on utilisera la décomposition $ER$)