SEMAINE 17

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, ESPACES HERMITIENS

EXERCICE 1 :

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure affine euclidienne orientée canonique, on note $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 1.

Si A, B, C sont trois points de $\mathcal{S}$, supposés non coplanaires, la configuration constituée des trois arcs de "grands cercles" AB, BC et CA tracés sur la sphère $\mathcal{S}$ est appelée un **triangle sphérique**.

On notera a, b, c respectivement les longueurs des arcs BC, CA et AB ("côtés du triangle").

Les angles aux sommets A, B, C sont notés α, β, γ. Précisons : l'angle α est l'angle au point A entre les deux arcs de cercle AB et AC, c'est-à-dire entre les tangentes au point A de ces deux arcs de cercle. On les considère comme des angles non orientés de vecteurs.

On définit les vecteurs $i = \overrightarrow{OA}$, $j = \overrightarrow{OB}$ et $k = \overrightarrow{OC}$.

1. Rester calme.

2. Faire un dessin.

3. Démontrer la relation

$$\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos \alpha$$

(*on pourra évaluer de deux façons le produit scalaire* $(k \wedge i \mid i \wedge j)$).

4. En introduisant un triangle sphérique $A'B'C'$ "dual" du précédent, démontrer la relation

$$\cos \alpha = -\cos \beta\ \cos \gamma + \sin \beta\ \sin \gamma\ \cos a\ .$$

5. Que peut-on dire de la somme des angles d'un triangle sphérique ?

Source : Marcel BERGER, Géométrie, Tome 2, Éditions Nathan, ISBN 209 191 731-1

- -

1. Passons directement à la question **3.**

3. Les grands cercles de la sphère $\mathcal{S}$ ayant pour rayon 1, la longueur d'un arc de cercle est égale à la mesure (en radians) de l'angle au centre, donc a est aussi une mesure de l'angle non orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (j, k)$, ou encore, puisque les vecteurs i, j, k sont unitaires :

$$\cos a = (j|k) \quad ; \qquad \cos b = (k|i) \quad ; \qquad \cos c = (i|j)\ .$$

La formule de Gibbs (ou "du double produit vectoriel") donne alors

$$\begin{aligned}(k \wedge i \mid i \wedge j) &= \mathrm{Det}(k, i, i \wedge j) = \big(k \mid i \wedge (i \wedge j)\big)\\ &= \big(k \mid (i|j)\, i - (i|i)\, j\big)\\ &= (i|j)\,(k|i) - (i|i)\,(k|j)\\ &= \cos c\ \cos b - \cos a\ .\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P}_A$ le plan affine tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point A, c'est-à-dire le plan passant par A et orthogonal au vecteur $i = \overrightarrow{OA}$, que nous orientons corrélativement au vecteur normal i. La tangente en A à l'arc de cercle AB est la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}_A$ avec le plan OAB. Le vecteur tangent orienté à cet arc de cercle admet pour vecteur directement orthogonal dans le plan $\mathcal{P}_A$ le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = i \wedge j$. De même, le vecteur $i \wedge k$ est directement orthogonal, dans le même plan $\mathcal{P}_A$ orienté, à l'arc de cercle orienté AC au point A. Les angles géométriques α et $(i \wedge j, i \wedge k)$ sont donc égaux, d'où $(k \wedge i, i \wedge j) = \pi - \alpha$ et

$$(k \wedge i | i \wedge j) = \|k \wedge i\|\ \|i \wedge j\|\ \cos(\pi - \alpha) = -\sin b\ \sin c\ \cos \alpha\ ,$$

ce qui prouve la relation à démontrer.

4. Soient A', B', C' les points de $\mathcal{S}$ définis par

$$i' = \overrightarrow{OA'} = \frac{j \wedge k}{\|j \wedge k\|} = \frac{j \wedge k}{\sin a} \quad ; \quad j' = \overrightarrow{OB'} = \frac{k \wedge i}{\|k \wedge i\|} = \frac{k \wedge i}{\sin b} \quad ; \quad k' = \overrightarrow{OC'} = \frac{i \wedge j}{\|i \wedge j\|} = \frac{i \wedge j}{\sin c} \ .$$

Notons a', b', c' les mesures des angles (j', k'), (k', i') et (i', j'), c'est-à-dire aussi les longueurs des côtés (arcs de cercles tracés sur $\mathcal{S}$) $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$ du triangle sphérique $A'B'C'$.

Notons enfin α' une mesure de l'angle que font au point A' les deux arcs de cercles $A'B'$ et $A'C'$, définissons de même β' et γ'.

Notons que le triangle dual $A'B'C'$ est toujours "direct" puisqu'un calcul classique donne

$$\mathrm{Det}(j \wedge k, k \wedge i, i \wedge j) = \big(\mathrm{Det}(i, j, k)\big)^2 \ , \quad \textit{donc} \quad \mathrm{Det}(i', j', k') > 0 \ .$$

Le raisonnement de la question **3.** montre l'égalité d'angles $a' = (j', k') = (k \wedge i, i \wedge j) = \pi - \alpha$. De même, $b' = \pi - \beta$ et $c' = \pi - \gamma$.

Par ailleurs,

$$(k \wedge i) \wedge (i \wedge j) = (k \wedge i \mid j)\, i - (k \wedge i \mid i)\, j = (k \wedge i \mid j)\, i = \mathrm{Det}(i, j, k)\, i \ ,$$

donc $\dfrac{j' \wedge k'}{\|j' \wedge k'\|} = \dfrac{(k \wedge i) \wedge (i \wedge j)}{\sin b \ \sin c \ \sin a'} = \dfrac{\mathrm{Det}(i, j, k)}{\sin \alpha \ \sin b \ \sin c}\, i$, ce qui prouve que :

(*) : $|\,\mathrm{Det}(i, j, k)| = \sin \alpha \ \sin b \ \sin c = \sin a \ \sin \beta \ \sin c = \sin a \ \sin b \ \sin \gamma$ par permutation des sommets ;

(**) : le triangle "dual" du triangle $A'B'C'$ est le triangle ABC si $\mathrm{Det}(i, j, k) > 0$ et c'est son symétrique par rapport à O si $\mathrm{Det}(i, j, k) < 0$;

(***) : on a $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$ et $\gamma' = \pi - c$ (*conséquence de la propriété* **(**)**).

La relation du **3.** appliquée au triangle dual $A'B'C'$ donne $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$, c'est-à-dire

$$\cos \alpha = -\cos \beta \ \cos \gamma + \sin \beta \ \sin \gamma \ \cos a$$

(**relation fondamentale de la trigonométrie sphérique**).

5. De la relation ci-dessus, on déduit que $\cos \alpha < -\cos \beta \ \cos \gamma + \sin \beta \ \sin \gamma = \cos\big(\pi - (\beta + \gamma)\big)$, d'où $\alpha > \pi - (\beta + \gamma)$: la somme des angles d'un triangle sphérique est donc strictement supérieure à π.

De la relation **(*)** *ci-dessus, on déduit* $\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma}$ *et la valeur commune de ces trois quotients est égale au quotient des produits mixtes* $\dfrac{|\,\mathrm{Det}(i, j, k)|}{\mathrm{Det}(i', j', k')}$.

EXERCICE 2 :

1. Soient x_1, $\cdots$, x_k des points de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine euclidienne canonique. Pour tout couple (i,j), on note $d_{ij} = d(x_i, x_j) = \|\overrightarrow{x_i x_j}\|$.

Montrer que les k points x_1, $\cdots$, x_k sont affinement dépendants (c'est-à-dire les $k-1$ vecteurs $\overrightarrow{x_1x_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{x_1x_k}$ sont linéairement dépendants) si et seulement si le déterminant d'ordre $k+1$:

$$\Gamma(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1k}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & \dots & d_{2k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d_{k1}^2 & d_{k2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

est nul.

2. Montrer que $n+2$ points x_1, $\cdots$, x_{n+2} de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à un même hyperplan affine ou à une même hypersphère si et seulement si le déterminant des $(d_{ij}^2)_{1\le i,j\le n+2}$ est nul.

- -

1. Quelques "rappels" sur les matrices et déterminants de Gram : si $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_p)$ est une famille de p vecteurs d'un espace euclidien E, la matrice $G(\mathcal{V}) = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $g_{ij} = (v_i|v_j)$ est appelée **matrice de Gram** de la famille de vecteurs $\mathcal{V}$. Son déterminant $\mathrm{Gram}(\mathcal{V}) = \det G(\mathcal{V})$ est le **déterminant de Gram** de cette famille de vecteurs.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E et si $V = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{V}$ relativement à la base $\mathcal{B}$, on a $G(\mathcal{V}) = {}^tVV$, donc le rang de la matrice de Gram $G(\mathcal{V})$ est égal au rang de la famille de vecteurs $\mathcal{V}$ (puisqu'il est classique que $\mathrm{Ker}({}^tVV) = \mathrm{Ker}\, V$). En particulier, la famille $\mathcal{V}$ est libre si et seulement si $\mathrm{Gram}(\mathcal{V}) \neq 0$.

Pour tout couple $(i,j) \in [\![2,k]\!]^2$, on a, par une identité de polarisation,

$$(\overrightarrow{x_1x_i}|\overrightarrow{x_1x_j}) = \frac{1}{2}\big(\|\overrightarrow{x_1x_i}\|^2 + \|\overrightarrow{x_1x_j}\|^2 - \|\overrightarrow{x_1x_i} - \overrightarrow{x_1x_j}\|^2\big) = \frac{1}{2}(d_{i1}^2 + d_{1j}^2 - d_{ij}^2)$$

ou encore $d_{ij}^2 - d_{1j}^2 - d_{i1}^2 = -2(\overrightarrow{x_1x_i}|\overrightarrow{x_1x_j})$. Effectuons donc des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes du déterminant $\Gamma(x_1, \cdots, x_k)$ pour faire apparaître un déterminant de Gram.

Numérotons de 0 à k les $k+1$ lignes et colonnes du déterminant $\Gamma(x_1, \cdots, x_k)$. Effectuons

$C_j \leftarrow C_j - d_{1j}^2\, C_0 \qquad (2 \le j \le k)$, puis

$L_i \leftarrow L_i - d_{i1}^2\, L_0 \qquad (2 \le i \le k)$.

Ainsi,

$$\Gamma(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -2\,d_{12}^2 & d_{23}^2 - d_{13}^2 - d_{21}^2 & \dots & d_{2k}^2 - d_{1k}^2 - d_{21}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & d_{k2}^2 - d_{12}^2 - d_{k1}^2 & d_{k3}^2 - d_{13}^2 - d_{k1}^2 & \dots & -2\,d_{1k}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \quad -(-2)^k \,\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_1x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_1x_k})$$

en développant par rapport à la deuxième ligne, puis par rapport à la première colonne dans le nouveau déterminant obtenu. Le résultat en découle immédiatement.

2. Si les coordonnées d'un point x de $\mathbb{R}^n$ sont notées $x^{(1)}$, $\cdots$, $x^{(n)}$, l'équation générale d'une hypersphère ou d'un hyperplan affine est de la forme $a\|x\|^2 + \varphi(x) = 0$, où φ est une forme affine sur $\mathbb{R}^n$ (on a un hyperplan si $a = 0$, une hypersphère sinon). Cette équation cartésienne peut s'écrire

$$a\|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^{(i)} + c = 0 \ ,$$

où a, c, b_1, $\cdots$, b_n sont des constantes réelles non toutes nulles. La condition d'appartenance de $n+2$ points x_1, $\cdots$, x_{n+2} à un même hyperplan ou une même hypersphère est donc que les $n+2$ vecteurs

$$\begin{pmatrix} \|x_1\|^2 \\ \\ \vdots \\ \\ \|x_{n+2}\|^2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n+2}^{(1)} \end{pmatrix} , \cdots \quad , \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n+2}^{(n)} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

soient liés, c'est-à-dire la nullité du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_{n+2}\|^2 & 1 & x_{n+2}^{(1)} & \dots & x_{n+2}^{(n)} \end{pmatrix} .$$

Notons $D \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ la matrice de coefficient générique d_{ij}^2. De la relation

$$d_{ij}^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_i^{(k)} x_j^{(k)} \ ,$$

on déduit que $D = A\,{}^tB$, avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \|x_1\|^2 & -2x_1^{(1)} & \dots & -2x_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \|x_{n+2}\|^2 & -2x_{n+2}^{(1)} & \dots & -2x_{n+2}^{(n)} \end{pmatrix} .$$

Or, $\det B = -(-2)^n \ \det A$, donc $\det D = -(-2)^n \ (\det A)^2$ et le déterminant de D est nul si et seulement si celui de A l'est aussi, ce qui mène à la conclusion.

EXERCICE 3 :

Soit E un espace hermitien. Un endomorphisme de E est dit **normal** lorsque $uu^* = u^*u$.

1. Si u est normal, montrer que $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence entre les assertions :

(i) : u est normal ;

(ii) : u est unitairement diagonalisable ;

(iii) : $\exists P \in \mathbb{C}[X] \quad P(u) = u^*$;

(iv) : $\operatorname{tr}(uu^*) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |\lambda|^2$.

Dans cette dernière assertion, chaque valeur propre de u est comptée avec son ordre de multiplicité.

3. Si u, v et uv sont des endomorphismes normaux, montrer que vu est normal.

- -

1. On sait que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, donc $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u^*)^{\perp}$. Il suffit donc de prouver l'égalité $\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Ker} u$. Or, si $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|^2 &= \big(u^*(x)|u^*(x)\big) = \big(uu^*(x)|x\big) = \big(u^*u(x)|x\big) \\ &= \big(u(x)|u(x)\big) = \|u(x)\|^2 , \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Ker} u$.

2. • **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** : si u est unitairement diagonalisable, c'est-à-dire diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale et la matrice adjointe $M_{\mathcal{B}}(u^*)$ est aussi diagonale, donc les deux matrices commutent et $uu^* = u^*u$.

Prouvons la réciproque **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** par récurrence forte sur $n = \dim E$:

▷ pour $n = 1$, c'est immédiat ;

▷ soit $n \geq 2$, supposons la proposition vraie en dimension $< n$. Si $\dim E = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, soit λ une valeur propre de u, soit $v = u - \lambda\, \mathrm{id}_E$; alors v est aussi normal, donc $\operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} v)^{\perp}$. Le sous-espace $\operatorname{Im} v$ est stable par u et de dimension strictement inférieure à n, donc l'endomorphisme de $\operatorname{Im} v$ induit par u se diagonalise dans une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Im} v$. Si $\mathcal{B}_2$ est une quelconque base orthonormale de $\operatorname{Ker} v$, alors la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de E obtenue par concaténation est une base orthonormale de diagonalisation de u.

Nous disposons ainsi de l'équivalence **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)**. Traduction matricielle : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $AA^* = A^*A$ si et seulement si il existe $U \in U(n)$ unitaire et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = UDU^*$.

• L'implication **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** est immédiate.

Réciproquement, si u est normal, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale : $M_{\mathcal{B}}(u) = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Dans une telle base, on a $M_{\mathcal{B}}(u^*) = D^* = \overline{D} = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_n})$. Il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (*considérer un polynôme d'interpolation de Lagrange*), alors $P(D) = D^*$, donc $P(u) = u^*$.

Ainsi, **(i)** $\iff$ **(iii)**.

• Si u est normal, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $M_{\mathcal{B}}(u^*) = D^* = \overline{D}$. Alors $M_{\mathcal{B}}(uu^*) = D\overline{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \cdots, |\lambda_n|^2)$ et $\mathrm{tr}(uu^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, donc **(i)** $\Longrightarrow$ **(iv)**.

Pour la réciproque, démontrons le lemme suivant :

Soit E un espace hermitien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque. Alors u est trigonalisable dans une base orthonormale de E.

Démonstration du lemme : Traduisons matriciellement. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on sait que la matrice A est trigonalisable, donc $A = PT_1P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet d'écrire $P = UT_2$ avec $U \in U(n)$ et T_2 triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, finalement $A = UTU^{-1}$ avec U unitaire et $T = T_2T_1T_2^{-1}$ triangulaire supérieure (A est "unitairement trigonalisable").

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = T = (t_{ij})$ soit triangulaire, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = T^* = {}^t\overline{T}$ et

$$\mathrm{tr}(uu^*) = \mathrm{tr}(TT^*) = \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |t_{ii}|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|^2 \ .$$

Si l'égalité a lieu, alors T est diagonale, donc u est unitairement diagonalisable, donc normal, ce qui achève de prouver **(iv)** $\Longrightarrow$ **(i)**.

3. Si u et v sont normaux, alors

$$\mathrm{tr}\left(uv(uv)^*\right) = \mathrm{tr}(uvv^*u^*) = \mathrm{tr}(vv^*u^*u) = \mathrm{tr}(v^*vuu^*) = \mathrm{tr}(vuu^*v^*) = \mathrm{tr}\left(vu(vu)^*\right) \ .$$

Notons λ_1, $\cdots$, λ_n les valeurs propres de uv (comptées avec leur multiplicité). Ce sont aussi les valeurs propres de vu $^{(\star)}$. Si uv est normal, alors $\mathrm{tr}\left(uv(uv)^*\right) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, donc $\mathrm{tr}\left(vu(vu)^*\right) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, donc vu est normal, puisque **(i)** $\iff$ **(iv)**.

$^{(\star)}$ *Le fait que, si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, alors uv et vu ont les mêmes valeurs propres, est un petit exercice classique, que l'on traite en considérant à part le cas de l'éventuelle valeur propre 0. On peut aussi l'obtenir comme conséquence de l'égalité $\chi_{uv} = \chi_{vu}$ qui se retrouve en constatant que*

$$\begin{pmatrix} XI_n & A \\ XB & XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n - AB & A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & A \\ 0 & XI_n - BA \end{pmatrix} ,$$

et en égalant les déterminants des deux derniers membres.

EXERCICE 4 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à la fois unitaire et symétrique. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $A = \exp(iS)$. *On commencera par écrire* $A = U + iV$ *avec* U *et* V *matrices réelles.*

2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire. Prouver qu'il existe une matrice réelle orthogonale Ω et une matrice symétrique réelle S telles que $U = \Omega\ \exp(iS)$. *Considérer la matrice* ${}^tUU$.

Source : Jean-Marie ARNAUDIÈS et Henri FRAYSSE, Algèbre bilinéaire et géométrie, Éditions Dunod, ISBN 2-04-016550-9

- -

1. On a les relations ${}^tA = A$ et $A^*A = {}^t\overline{A}A = I$. En transposant cette dernière relation, on obtient $A\overline{A} = I$.

En posant $A = U + iV$ avec U et V matrices réelles, il vient

$$A\overline{A} = (U + iV)(U - iV) = (U^2 + V^2) + i(VU - UV) = I\ ,$$

donc $U^2 + V^2 = I$ et $UV = VU$. Par ailleurs, ${}^tA = {}^tU + i\,{}^tV = A$, donc les matrices U et V sont symétriques réelles. Or, **deux matrices symétriques réelles qui commutent sont simultanément orthogonalement diagonalisables** (*cf.* semaine 16, exercice 4, question 2). Il existe donc une matrice $P \in O(n)$ et deux matrices diagonales réelles $D_1 = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ et $D_2 = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_n)$ telles que

$$U = PD_1P^{-1} = PD_1\,{}^tP \qquad \text{et} \qquad V = PD_2P^{-1} = PD_2\,{}^tP\ .$$

En posant $D = D_1 + iD_2 = \mathrm{diag}(z_1, \cdots, z_n)$ avec $z_k = x_k + iy_k$, on a $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$. Les z_k ($1 \leq k \leq n$) sont les valeurs propres de A et, A étant unitaire, on a $|z_k| = 1$ pour tout k, on peut donc écrire $z_k = e^{i\theta_k}$ avec θ_k réel. En posant $T = \mathrm{diag}(\theta_1, \cdots, \theta_n)$, on a $D = \exp(iT)$, puis

$$A = P\ \exp(iT)\ P^{-1} = \exp\big(P\ (iT)\ P^{-1}\big) = \exp(iS)\ ,$$

où $S = PTP^{-1} = PT\,{}^tP$ est symétrique réelle.

2. Soit U unitaire, alors la matrice ${}^tUU$ est symétrique (*évident*) et unitaire :

$${}^tUU({}^tUU)^* = {}^tUUU^*\,{}^tU^* = {}^tU\,{}^tU^* = {}^t(U^*U) = I\ ,$$

donc il existe S symétrique réelle telle que ${}^tUU = \exp(2iS)$.

Posons $\Omega = U\ \exp(-iS)$.

Nous laissons le lecteur se <u>*convaincre*</u> *du* <u>*fait*</u> *que, pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, on a* ${}^t\big(\exp(A)\big) = \exp({}^tA)$; $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$ *et* $\big(\exp(A)\big)^* = \exp(A^*)$.

Donc

$${}^t\Omega\Omega = {}^t\big(\exp(-iS)\big)\ {}^tUU\ \exp(-iS) = \exp(-iS)\ \exp(2iS)\ \exp(-iS) = I$$

et

$$\Omega^*\Omega = \big(\exp(-iS)\big)^*\ U^*U\ \exp(-iS) = \exp(iS)\ I\ \exp(-iS) = I\ ,$$

donc $\Omega^{-1} = {}^t\Omega = \Omega^*$, soit encore $\overline{\Omega} = \Omega$: la matrice Ω est à coefficients réels, donc $\Omega \in O(n)$.

On obtient finalement $U = \Omega\ \exp(iS)$.

EXERCICE 5 :

Soient E et F deux espaces hermitiens (ou euclidiens), soit u une application linéaire de E vers F.

1. Définir la notion d'adjoint (noté u^*) de l'application linéaire u. Préciser $\operatorname{Ker} u^*$ et $\operatorname{Im} u^*$.

2. Montrer l'existence et l'unicité d'une application linéaire u' de F vers E telle que

$$\begin{cases} (\mathbf{1}) & : uu'u &= u \\ (\mathbf{2}) & : u'uu' &= u' \\ (\mathbf{3}) & : \operatorname{Ker} u' &= (\operatorname{Im} u)^\perp \\ (\mathbf{4}) & : \operatorname{Im} u' &= (\operatorname{Ker} u)^\perp \end{cases} .$$

3. Montrer que, pour tout $y_0 \in F$, le vecteur $x_0 = u'(y_0)$ est “la meilleure solution approchée en norme” de l'équation $u(x) = y_0$, ce qui signifie que

- $\forall x \in E \qquad \|u(x) - y_0\|_F \geq \|u(x_0) - y_0\|_F$;
- $\forall x \in E \setminus \{x_0\} \qquad \|u(x) - y_0\|_F = \|u(x_0) - y_0\|_F \Longrightarrow \|x\|_E > \|x_0\|_E$.

4. Simplifier les expressions u^*uu' et $u'uu^*$.

En déduire une expression de u' à l'aide de u et u^* :

a. lorsque u est injectif ;

b. lorsque u est surjectif.

Source : RAMIS, DESCHAMPS, ODOUX, Algèbre, Éditions Masson, ISBN 2-225-81314-0

- -

1. On cherche à construire une application linéaire u^* de F vers E vérifiant

$$\forall (x,y) \in E \times F \qquad \big(u^*(y)|x\big)_E = \big(y|u(x)\big)_F .$$

Or, pour tout $y \in F$, l'application $f_y : x \mapsto \big(y|u(x)\big)_F$ est une forme linéaire sur E, donc il existe un unique z de E tel que $\forall x \in E \quad f_y(x) = (z|x)_E$. *En effet, le produit scalaire hermitien de E définit un semi-isomorphisme de E vers son dual E^*, c'est-à-dire une application semi-linéaire (linéaire dans le cas euclidien) et bijective.* Notons $z = u^*(y)$, nous avons ainsi défini une application u^* de F vers E répondant à la condition imposée, et nous avons prouvé qu'une telle application est unique. Il reste à prouver qu'elle est linéaire. Si on se donne $y_1 \in F$, $y_2 \in F$, $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors

$$\begin{aligned} \forall x \in E \qquad \big(u^*(\lambda y_1 + y_2)|x\big)_E &= \big(\lambda y_1 + y_2|u(x)\big)_F \\ &= \overline{\lambda}\big(y_1|u(x)\big)_F + \big(y_2|u(x)\big)_F \\ &= \overline{\lambda}\big(u^*(y_1)|x\big)_E + \big(u^*(y_2)|x\big)_E \\ &= \big(\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)|x\big)_E , \end{aligned}$$

donc $u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)$: $u^* \in \mathcal{L}(F,E)$.

Remarque : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases orthonormales dans E et F respectivement, si on pose $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, on a alors $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^*) = A^* = {}^t\overline{A}$ ("transconjuguée" de A ; remarquons que ce ne sont pas nécessairement des matrices carrées).

Comme pour l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien ou hermitien, on obtient sans difficulté

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{dans } F \quad ; \qquad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp \quad \text{dans } E\ .$$

2. Raisonnons d'abord par conditions nécessaires : si une telle application linéaire u' existe, alors, de **(1)**, on déduit que uu' est un projecteur q dans l'espace F et que les vecteurs de $\operatorname{Im} u$ sont invariants par ce projecteur q, donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} q$. De **(3)**, on déduit que u' est nul sur $(\operatorname{Im} u)^\perp$ qui est un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F. Donc $q = uu'$ est nécessairement, dans F, le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$. Si $y \in F$, le vecteur $u'(y)$ doit être un antécédent par u de $q(y) \in \operatorname{Im} u$ appartenant à $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ d'après **(4)**. Or, nous savons que l'application linéaire u induit un isomorphisme ω de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ sur $\operatorname{Im} u$, donc nécessairement $u'(y) = \omega^{-1}\big(q(y)\big)$. Cela prouve l'unicité de u'.

Réciproquement, soit q le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ dans F, soit ω l'isomorphisme de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ sur $\operatorname{Im} u$ induit par u. Pour tout $y \in F$, posons $u'(y) = \omega^{-1}\big(q(y)\big)$. La linéarité de u' est immédiate. On vérifie ensuite $uu' = q$, d'où on tire facilement **(1)** et **(2)**. Comme ω est un isomorphisme, on a $\operatorname{Ker} u' = \operatorname{Ker} q = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u' = \omega^{-1}(\operatorname{Im} u) = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

3. En posant $x_0 = u'(y_0)$, le vecteur $u(x_0) = uu'(y_0) = q(y_0)$ est le projeté orthogonal de y_0 sur $\operatorname{Im} u$, donc

$$\|u(x_0) - y_0\|_F = \min_{y \in \operatorname{Im} u} \|y - y_0\|_F = \min_{x \in E} \|u(x) - y_0\|_F\ .$$

Si un autre vecteur x vérifie $\|u(x) - y_0\|_F = \|u(x_0) - y_0\|_F$, alors $u(x)$ est aussi le projeté orthogonal de y_0 sur $\operatorname{Im} u$, donc $u(x) = u(x_0)$, donc $x - x_0 \in \operatorname{Ker} u$; mais $x_0 \in \operatorname{Im} u' = (\operatorname{Ker} u)^\perp$, donc la relation de Pythagore donne $\|x\|_E^2 = \|x - x_0\|_E^2 + \|x_0\|_E^2 > \|x_0\|_E^2$.

L'application linéaire u' est appelée **pseudo-inverse** de u. Notons que, lorsque u est un isomorphisme, on a $u' = u^{-1}$.

4. • $q = uu'$ est, dans F, le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ (*cf.* question **2.**), donc $\mathrm{id}_F - uu'$ est, dans F, le projecteur orthogonal sur $(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker} u^*$, d'où $u^*(\mathrm{id}_F - uu') = 0$, c'est-à-dire $u^*uu' = u^*$.

• On peut noter que u et u' jouent des rôles symétriques (examiner les conditions **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)** de la question **2.** qui déterminent u' de manière unique ; on a donc aussi $u'' = (u')' = u$), donc $p = u'u$ est, dans E, le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u' = (\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im} u^*$; les vecteurs de $\operatorname{Im} u^*$ sont donc invariants par $u'u$, ce qui donne $u'uu^* = u^*$.

• Remarquons d'abord que, sans hypothèse sur u, nous avons

$$\operatorname{Ker}(u^*u) = \operatorname{Ker} u \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(uu^*) = \operatorname{Im} u\ .$$

En effet, $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(u^*u)$ *et* $u^*u(x) = 0 \Longrightarrow \big(u^*u(x)|x\big)_E = \|u(x)\|_F^2 = 0 \Longrightarrow u(x) = 0_F$. *Enfin,*

$$\operatorname{Im}(uu^*) = u(\operatorname{Im} u^*) = u\big((\operatorname{Ker} u)^\perp\big) = \operatorname{Im} u$$

puisque u induit un isomorphisme de $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ *sur* $\operatorname{Im} u$.

- Supposons u injectif. Alors u^*u est aussi injectif puisque $\operatorname{Ker}(u^*u) = \operatorname{Ker} u$, mais u^*u est un endomorphisme de l'espace de dimension finie E, donc u^*u est bijectif. De la relation $u^*uu' = u^*$, on tire $u' = (u^*u)^{-1}u^*$.

  Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases orthonormales de E et F respectivement, et si $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$, alors $A' = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u') = (A^*A)^{-1}A^*$.

- Supposons u surjectif. Alors uu^* est surjectif, donc est un automorphisme de l'espace F. De la relation $u'uu^* = u^*$, on tire $u' = u^*(uu^*)^{-1}$.

  Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases orthonormales de E et F respectivement, et si $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$, alors $A' = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u') = A^*(AA^*)^{-1}$.

EXERCICE 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

1. Démontrer l'**inégalité de Schur** :

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A) .$$

2. Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Prouver les relations

(*) $$\sum_{i<j} |z_i - z_j|^2 = n \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 - \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|^2 .$$

(**) $$\max_{i,j} |z_i - z_j|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j} |z_i - z_j|^2 .$$

3.En déduire l'**inégalité de Mirsky** :

$$\max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \leq 2\Big(\operatorname{tr}(A^*A) - \frac{1}{n} |\operatorname{tr} A|^2 \Big) .$$

4. Étudier les cas d'égalité dans les questions **1.** et **3.**

Source : Jean-Marie MONIER, Algèbre, Tome 2, Éditions Dunod, ISBN 2-10-000006-3

- -

1. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitairement trigonalisable (*cf.* exercice **3**) : on peut donc écrire $A = UTU^{-1} = UTU^*$ avec $U \in U(n)$ (groupe unitaire) et $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Alors $A^*A = UT^*TU^* = UT^*TU^{-1}$, donc

$$\operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(T^*T) = \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |t_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

puisque les éléments diagonaux t_{ii} de T sont les valeurs propres de A.

2. • Développons dans la joie et la bonne humeur :

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}|z_i-z_j|^2 &= \sum_{i<j}\Big(|z_i|^2+|z_j|^2-(\,\overline{z_i}\,z_j+z_i\,\overline{z_j}\,)\Big)\\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-\Big(\big|\sum_{i=1}^{n}z_i\big|^2-\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\Big)\\ &= n\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-\big|\sum_{i=1}^{n}z_i\big|^2\,.\end{aligned}$$

- Soit $(r,s)\in[\![1,n]\!]^2$ un couple d'indices avec $r<s$; alors la somme $\displaystyle\sum_{i,j}|z_i-z_j|^2$ est plus grande que la somme sur les couples (i,j) tels que $\{i,j\}\cap\{r,s\}\neq\emptyset$, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}|z_i-z_j|^2 &\geq \sum_{k\notin\{r,s\}}\Big(|z_r-z_k|^2+|z_k-z_r|^2+|z_s-z_k|^2+|z_k-z_s|^2\Big)+|z_r-z_s|^2+|z_s-z_r|^2\\ &= 2\sum_{k\notin\{r,s\}}\Big(|z_r-z_k|^2+|z_k-z_s|^2\Big)+2\,|z_r-z_s|^2\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs l'identité du parallélogramme $|u+v|^2+|u-v|^2=2\big(|u|^2+|v|^2\big)$ donne $2\big(|u|^2+|v|^2\big)\geq|u+v|^2$, donc

$$\sum_{i,j}|z_i-z_j|^2\geq\sum_{k\notin\{r,s\}}|z_r-z_s|^2+2\,|z_r-z_s|^2=n\,|z_r-z_s|^2\,.$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout couple (r,s), cela prouve **(**)**.

3. En utilisant **(**)**, puis **(*)**, puis la question **1.**, on obtient

$$\max_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|^2\leq\frac{1}{n}\sum_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|^2=2\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-\frac{2}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right|^2\leq 2\left(\operatorname{tr}(A^*A)-\frac{1}{n}\,|\operatorname{tr}A|^2\right)\,.$$

4. • Il y a égalité dans **1.** (Schur) si et seulement la matrice T est diagonale, à savoir si et seulement si A est unitairement diagonalisable, c'est-à-dire normale ($AA^*=A^*A$), *cf.* exercice **3**.

- L'égalité dans **3.** (Mirsky) se produit si et seulement si on a les deux conditions

  (a) : $\displaystyle\max_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|^2=\frac{1}{n}\sum_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|^2$;

  (b) : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\operatorname{tr}(A^*A)$ (Schur).

La condition **(b)** signifie que la matrice A est normale. En reprenant les calculs conduisant à l'inégalité **(**)** de la question **2.**, on voit que la condition **(a)** est réalisée si et seulement si :

- d'une part, il existe un couple (r,s) avec $r<s$ tel que $|\lambda_i-\lambda_j|=0$ pour tout couple $(i,j)\in\big([\![1,n]\!]\setminus\{r,s\}\big)^2$;

- on a l'égalité $2\big(|u|^2+|v|^2\big)=|u+v|^2$ avec $\begin{cases} u=\lambda_r-\lambda_k \\ v=\lambda_k-\lambda_s \end{cases}$, et ceci pour tout $k\in[\![1,n]\!]\setminus\{r,s\}$... mais ceci équivaut à $u=v$, soit $\lambda_k=\dfrac{\lambda_r+\lambda_s}{2}$.

En conclusion, les matrices de permutation étant unitaires, l'égalité a lieu dans **3.** si et seulement si la matrice A est unitairement semblable à une matrice diagonale de la forme $\operatorname{diag}\big(\lambda,\mu,\dfrac{\lambda+\mu}{2},\cdots,\dfrac{\lambda+\mu}{2}\big)$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.