Intégration

I Intégrale d'une fonction continue sur un segment

I.1 Fonctions en escalier

Déf. • Subdivision d'un segment

Soit $a < b$ deux réels.

1) On appelle **subdivision du segment** $[a, b]$ toute suite finie de nombres $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots < a_{n-1} < a_n = b.$$

2) La **subdivision régulière à** n **pas** de $[a, b]$ est la subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ donnée par : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.

Illustr. ✐

Ex. ✻ Subdivision régulière à n pas / à 2^n pas de $[0, 1]$, de $[1, 10]$.

Déf. • Fonctions en escalier

Soit deux réels $a < b$. Une **fonction en escalier sur** $[a, b]$ est une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, φ est constante sur $]a_{k-1}, a_k[$. Une telle subdivision (a_k) est dite **adaptée à la fonction** φ.

Illustr. ✐

Rem. ◇ Les fonctions constantes sont des fonctions en escalier : il suffit de prendre la subdivision $(a_0, a_1) = (a, b)$.

I.2 Intégrale d'une fonction en escalier

L'intégrale d'une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$ est **l'aire algébrique** de la région du plan comprise entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ et entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction. *Algébrique,* car les parties au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement et celle en dessous sont comptées négativement :

Déf. • Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier,
$(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

On définit l'**intégrale de** φ **sur le segment** $[a, b]$ **par**

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=1}^{n} y_k\,(a_k - a_{k-1})$$

où y_k est la valeur prise par φ sur l'intervalle $]a_{k-1}, a_k[$.

On note également cette intégrale $\int_{[a,b]} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. ✻ Intégrale de la fonction de Heaviside sur $[-2, 4]$.

I.3 Intégrale d'une fonction continue

On se donne une fonction f continue sur le segment $[a, b]$. Il s'agit de donner un sens précis à l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$. Ce nombre réel est censé représenter, comme pour les fonctions en escalier, l'aire algébrique au-dessus de l'intervalle $[a, b]$ comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f.

On s'appuie pour ce faire sur l'intuition géométrique : on souhaite à terme que si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$. Or, on a déjà donné un sens aux intégrales de fonctions en escalier.

Si la courbe de f est « coincée » entre deux fonctions en escalier φ et ψ, il faut donc que l'intégrale I de f sur $[a, b]$ vérifie :

... et ceci doit marcher pour **toutes** les fonctions en escalier φ et ψ encadrant f. On démontre qu'un seul nombre réel I convient :

Thm • Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Alors **il existe un unique réel I** tel que

1) Pour toute fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\varphi \leqslant f$, on ait $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant I$;

2) Pour toute fonction ψ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\psi \geqslant f$, on ait $\int_{[a,b]} \psi \geqslant I$.

Cet unique nombre I est appelé **intégrale de la fonction f sur le segment $[a,b]$**. Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démo. Ce théorème sera admis. Cela consiste à introduire les deux réels suivants :

$$I^- = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi,\ \ \varphi \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ telle que } \varphi \leqslant f\right\}$$
$$I^+ = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi,\ \ \psi \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ telle que } \psi \geqslant f\right\}$$

et à démontrer :

1) que I^- et I^+ sont bien définis : le théorème des bornes assure que f est bornée ; ceci permet de montrer que les ensembles dont on prend les bornes sup et inf sont non vides et majoré/minoré. On applique ensuite le théorème de la borne supérieure pour prouver l'existence du sup et de l'inf.

2) que $I^- \leqslant I^+$: c'est assez facile. Pour toutes fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on a $\varphi \leqslant \psi$. On vérifie en calculant sur les sommes que $\int_{[a,b]}\varphi \leqslant \int_{[a,b]}\psi$. On passe ensuite aux bornes supérieures et inférieures en utilisant leur définition en tant que plus petit majorant, resp. plus grand minorant.

3) que I^+ et I^- sont égaux : c'est beaucoup plus délicat. Cela repose sur le fait que l'on peut encadrer f par deux fonctions en escalier φ et ψ aussi rapprochées l'une de l'autre que l'on veut. Cette propriété utilise la notion d'uniforme continuité qui n'est pas au programme en PCSI.

4) que la valeur commune de I^+ et I^- convient pour jouer le rôle de I et que c'est la seule : découle facilement de la définition des bornes supérieures et inférieures.

I.4 Sommes de Riemann

On approche l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier construites au-dessus d'une subdivision régulière de $[a,b]$:

Thm • Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les **sommes de Riemann associées à la fonction f sur $[a,b]$:**

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\tfrac{b-a}{n}\right)$$
$$S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\tfrac{b-a}{n}\right).$$

Alors les suites (S_n) et (S'_n) tendent toutes les deux vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démo. Admise.

Ce théorème permet de calculer certaines sommes dont le terme général dépend à la fois de l'indice de sommation k et la borne n de la somme. Toute la difficulté consiste à remettre cette somme sous la bonne forme.

1) Par un changement d'indice, se ramener à $\sum_{k=1}^{n}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1}$.

2) Dans le terme sommé, factoriser pour que tous les k et tous les n soient regroupés sous la forme $\frac{k}{n}$.

3) Introduire les a_k : les valeurs extrêmes donnent l'intervalle $[a,b]$.

4) Introduire la fonction f, justifier qu'elle est continue sur $[a,b]$ et conclure à l'aide du théorème.

Exercice **1** ► Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1) $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$;

2) $V_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$;

3) $W_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^3+2kn^2+3k^2n}{n^4}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)$.

I.5 Généralisation de la notation

On abandonne vite la notation $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$, un peu lourde, au profit de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. À ce stade, les bornes a et b doivent toujours être « dans le bon sens » : on doit avoir $a < b$. En pratique, on s'autorise aussi les cas où $a = b$ et $a > b$ en adoptant les conventions suivantes :

Déf. • Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I, a et b deux éléments **quelconques** de I.

On définit $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x}$ par $\begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b\,; \\ 0 & \text{si } a = b\,; \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$

Astuce ➾ Ainsi, intervertir les bornes d'une intégrale la transforme en son opposé.

II Propriétés générales de l'intégrale

On étudie maintenant les propriétés formelles de l'intégrale, que l'on peut appliquer sans forcément être capable de calculer la valeur des intégrales. Toutes les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs réelles.

Propr. • Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c trois points de I.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Démo. Propriété admise. On la démontre d'abord pour les fonctions en escalier puis on utilise la définition de l'intégrale de f pour la démontrer dans le cas général.

Rem. ◇ Cette propriété fonctionne quelle que soit la position relative de a, b et c.

L'intégrale se comporte très simplement avec la somme et le produit par des constantes.

Propr. • Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux points de I, α et β deux réels.

Alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Démo. Propriété admise ; là encore démontrée d'abord pour les fonctions en escalier puis généralisée grâce à la définition de l'intégrale.

***Exercice* 2** ► Calculer $\int_{-1}^{1} |1+2x|\,\mathrm{d}x$.

Propr. • Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, a et b deux points de I **tels que $a \leqslant b$ (càd dans le bon ordre).**

Si $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Démo. Sous les hypothèses du théorèmes, la fonction constante nulle est une fonction en escalier φ qui minore f. D'après la définition de l'intégrale de f sur $[a,b]$, $0 = \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f = \int_a^b f$ car $a \leqslant b$.

Attention ! Quand on veut appliquer cette propriété, il faut toujours penser à **vérifier que les bornes sont dans le bon sens.** Cela n'est pas toujours évident quand les bornes dépendent d'un paramètre. Si ce n'est pas le cas on passe à l'opposé.

Rem. ◇ De manière similaire, on montre que si $f \leqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \leqslant 0$. On pourra utiliser ce corollaire.

***Exercice* 3** ► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.
Justifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle est à termes positifs.

***Exercice* 4** ► Étudier le signe de l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ qui s'annule en 0.

De même, les inégalités entre fonctions « passent à l'intégrale » :

Propr. • Croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I, a et b deux points de I **tels que $a \leqslant b$ (càd dans le bon ordre).**

Si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démo. Sur les notes de cours.

Attention ! Là encore, **attention à l'ordre des bornes !**

***Exercice* 5** ► (retour sur la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie plus haut)

1) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.
En déduire qu'elle est convergente.

2) Majorer I_n par un terme explicite de manière à prouver que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Coroll. • Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I,
a et b deux points de I **tels que $a \leqslant b$ (càd dans le bon ordre).**

Alors $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Démo. Sur les notes de cours.

Attention Attention encore une fois à l'ordre des bornes.

***Exercice* 6** ► Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant M$.
Montrer que $\left|\int_0^1 \big(f(x^2)+x f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{3M}{2}$.

Propr. • Fonctions continues, de signe constant, d'intégrale nulle

Soit f une fonction définie sur le segment $[a,b]$ (où $a<b$). On suppose que

1) f est continue sur $[a,b]$;
2) f est de signe constant sur $[a,b]$;
3) l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ est nulle.

Alors f est constante nulle sur le segment $[a,b]$.

Démo. Démonstration admise.

***Exercice* 7** ► Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leqslant 1$ et $\int_0^1 f = 1$.
Montrer que f est constante égale à 1.

III Liens entre intégrales et primitives

III.1 Existence et unicité des primitives à constante près

Dans le cours de calcul intégral, nous avions cité le théorème suivant :

Thm • Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, a un point de I.

On pose $\Phi : \ I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors Φ est une primitive de f sur I, et c'est la seule qui s'annule en a.

Démo. Démonstration dans le cas où f est k-lipschitzienne sur I. Admis pour les fonctions continues.

Rem. ◇ Les fonctions non continues n'admettent pas forcément de primitive. (voir l'exercice ci-dessous).

***Exercice* 8** ► Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x>0, \quad \varphi(x) = \int_{\ln(x)}^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

***Exercice* 9** ► Montrer que la fonction échelon $H = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

III.2 Théorème du calcul intégral

On utilise depuis longtemps le fait que l'intégrale d'une fonction est égale à l'accroissement d'une primitive de cette fonction sur le même segment. Nous pouvons maintenant justifier cette pratique.

Thm • Théorème du calcul intégral

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I,
F une primitive quelconque de f sur I.

Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Inversement, l'accroissement d'une fonction suffisamment régulière peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée.

Thm • Soit f une fonction **de classe $\mathscr{C}^1$** sur un intervalle I,
a et b deux points de I.

Alors $f(b)-f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Rem. ◇ Dans notre cadre d'étude, f doit être de classe $\mathscr{C}^1$ sur I pour que f' existe et soit continue, condition nécessaire pour pouvoir l'intégrer.

Démo. On pose $g = f'$, qui est une fonction continue. Il suffit d'appliquer le théorème du calcul intégral à la fonction g, en remarquant que f est une primitive de g.

IV Formules de Taylor

Thm • Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I,
a et b deux points de I. Alors :

$$f(b)-f(a) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Ex. ✻ Écriture de la formule aux ordres 0, 1 et 2.

Rem. ◇ Avantage : formule très précise qui donne une expression exacte du reste sous forme d'une intégrale. Inconvénient : lourd à manier. On écrira en général cette intégrale dans le but de majorer l'intégrale.

Démo. Sur les notes de cours.

La formule de Taylor avec reste intégral permet de démontrer une version de la formule de Taylor-Young qui est un des piliers des développements limités.

Thm • Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I,
a un point de I. Alors :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big).$$

Démo. Sur les notes de cours, dans le cas plus simple où l'on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. La preuve dans le cas $\mathscr{C}^n$ est accessible au niveau PCSI au prix d'un raisonnement plus subtil.

V Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Dans tout ce paragraphe, f sera une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs **complexes.** Il n'y a donc pas de changement du côté de l'espace de départ, alors qu'on remplace à l'arrivée $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Déf. • Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f: I\to\mathbb{C}$ continue sur I, a et b deux points de I.
On introduit u la partie réelle de f et v la partie imaginaire de f. Puisque u et v sont continues sur $[a,b]$, on peut définir l'intégrale de f entre a et b par

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x.$$

De nombreuses propriétés vues pour l'intégrale de fonctions continues à valeurs réelles restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes. Leur preuve est immédiate et appliquant les propriétés en questions séparément à la partie réelle et à la partie imaginaire puis en utilisant la définition ci-dessus.

Notamment, **restent vraies sans changement dans l'énoncé :**

1) La linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles ;
2) Le théorème fondamental de l'analyse, le théorème de calcul intégral ;
3) La formule d'intégration par partie, la formule de changement de variable (seule f est à valeurs complexes, pas φ) ;
4) La formule de Taylor avec reste intégral.

En revanche, il faut se souvenir qu'**il n'y a jamais d'inégalités entre nombres complexes** et qu'**il faut être prudent avec les propriétés de l'intégrale faisant intervenir des inégalités** quand il y a des fonctions à valeurs complexes.

1) On dit adieu à la positivité et à la croissance de l'intégrale **qui n'auraient aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes ;**
2) Mais on se console avec une version de l'inégalité triangulaire qui reste valable.

Propr. • Inégalité triangulaire pour l'intégrale de fonctions à valeurs complexes

Soit $f: I\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur I, $\underline{\boldsymbol{a\leqslant b}}$ deux éléments de I.

Alors : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x.$

Rem. ◇ Dans cette propriété, les barres verticales sont des **modules** et non des **valeurs absolues.** Dans le membre de gauche, on intègre une fonction à valeurs complexes et dans le membre de droite une fonction à valeurs réelles.

Démo. La preuve est assez astucieuse. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre complexe : on l'écrit sous forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un réel positif et θ un réel quelconque. Puisque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$:

1) d'une part $\boldsymbol{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = r}$
2) mais aussi :

$$r=\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}x$$

par linéarité de l'intégrale. La dernière intégrale porte sur une fonction à valeurs complexes. On intègre séparément sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$r=\int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\,\mathrm{d}x.$$

Mais r est un réel positif, donc dans le deuxième membre la partie imaginaire est nulle et la partie réelle est en fait positive. On en conclut que

$$r=\left|\int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Dans l'expression obtenue, la fonction à l'intérieur de l'intégrale est à valeurs réelles et $|\cdot|$ désigne la valeur absolue. Puisque $a<b$, on peut appliquer l'inégalité triangulaire pour les intégrales réelles, ce qui donne :

$$r\leqslant\int_a^b \Big|\mathrm{Re}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\Big|\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à se souvenir des propriétés des nombres complexes :

$$\forall x\in[a,b],\quad \Big|\mathrm{Re}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\Big|\leqslant\big|f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big|=|f(x)|$$

et comme toutes les fonctions impliquées sont à valeurs réelles, utiliser la croissance de l'intégrale (réelle) :

$$r\leqslant\int_a^b \Big|\mathrm{Re}\big(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)\Big|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Les deux points mis bout à bout donnent l'inégalité recherchée.

Thm • Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, a un point de I.

On pose $\Phi: \quad I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors Φ est une primitive de f sur I, et c'est la seule qui s'annule en a.

Démo. Montrons que Φ est dérivable sur I et que $\Phi' = f$.

Nous nous limiterons au cas particulier où f est k-lipschitzienne sur I.

Soit $x_0 \in I$. Appelons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de Φ en x_0 et montrons que $\tau(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$. Pour tout réel h non nul tel que $x_0 + h \in I$, ce taux d'accroissement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par la relation de Chasles.}
\end{aligned}$$

La constante $f(x_0)$ peut se mettre sous une forme similaire :

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \times f(x_0)h = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t.$$

Cet artifice nous permet d'exprimer l'écart entre $\tau(h)$ et $f(x_0)$ à l'aide d'une seule intégrale :

$$\begin{aligned}
\left|\tau(h) - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

Traitons séparément les cas $h > 0$ (limite à droite) et $h < 0$ (limite à gauche).

1) Si $h > 0$, on a $x_0 < x_0 + h$ donc les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens. En appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\left|\tau(h) - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-f(x_0)\right|\mathrm{d}t.$$

Or, f étant k-lipschitzienne sur I, on a

$$\forall\, t \in [x_0, x_0+h], \quad \left|f(t)-f(x_0)\right| \leqslant k\,|t-x_0| = k(t-x_0), \quad \text{puisque } t \geqslant x_0.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-f(x_0)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} k(t-x_0) = \left[\frac{k}{2}(t-x_0)^2\right]_{x_0}^{x_0+h} = \tfrac{k}{2}h^2.$$

On en déduit que :

$$\left|\tau(h)-f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{h}\times\frac{k}{2}h^2=\frac{k}{2}h.$$

Puisque $\frac{k}{2}h \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$, par le théorème d'encadrement, on obtient $\tau(h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x_0)$.

2) Si $h<0$, cette fois $x_0>x_0+h$ et les bornes de l'intégrale sont dans le mauvais sens. Quelques aménagements sont nécessaires :

$$\begin{aligned}
\left|\tau(h)-f(x_0)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| && \text{(on laisse } |h| \text{ car } h<0)\\
&= \frac{1}{|h|}\left|-\int_{x_0+h}^{x_0}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| && \text{(on remet les bornes dans l'ordre)}\\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0+h}^{x_0}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| && (\forall u\in\mathbb{R},\ |-u|=|u|)\\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\left|f(t)-f(x_0)\right|\mathrm{d}t && \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}k\,|t-x_0|\,\mathrm{d}t && (f\ k\text{-lip. et croissance de l'intégrale})\\
&= \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}k(x_0-t)\,\mathrm{d}t && (t\leqslant x_0 \text{ donc } x_0-t\leqslant 0)\\
&= \frac{1}{|h|}\left[-\frac{k}{2}(x_0-t)^2\right]_{x_0+h}^{x_0}\\
&= \frac{1}{|h|}\times\frac{k}{2}h^2\\
&= \frac{k}{2}|h|
\end{aligned}$$

On conclut encore, par le théorème d'encadrement, que $\tau(h) \xrightarrow[h\to 0^-]{} f(x_0)$.

Finalement, on a prouvé que $\tau(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$, càd que Φ est dérivable en x_0 et que $\Phi'(x_0)=f(x_0)$ et ce, pour tout $x_0\in I$.

En outre, $\Phi(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Φ est donc une primitive de f sur I qui s'annule en a. Si Ψ en est une autre, elle diffère de Φ d'une constante ; et comme $\Psi(a)=0=\Phi(a)$, cette constante est nulle donc $\Phi=\Psi$.