1. Révisions oraux : Groupes

Exercice 1.1 [X]. Soit E un ensemble fini muni d'une loi interne associative. Montrer qu'il existe alors au moins un élément s de E vérifiant $s^2 = s$.

Exercice 1.2 [Centrale 07]. Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.
Indications: Le groupe $[\mathbb{Z};+]$ en fait-il partie? Que dire du sous-groupe engendré par un élément d'un tel groupe?

Exercice 1.3 [Ulm]. Soit f un endomorphisme d'un groupe fini. Vérifier l'équivalence entre les égalités $\ker f = \ker f^2$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
Indications: trouver une relation entre les cardinaux de G, $\ker g$ et $\mathrm{Im}\, g$ pour un endomorphisme g du groupe fini G.

Exercice 1.4 [TPE 06]. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et G un sous-groupe fini du groupe $GL(E)$ des automorphismes de E. On note $f = \sum_{g \in G} g$.

a) Montrer que $f^2 = \mathrm{card}(G)\, f$
b) Montrer que $\mathrm{tr}(f) = 0$ impose $f = 0$.

Exercice 1.5 [Centrale 2012]. Soit $[G;\cdot]$ un groupe fini de cardinal $n \geqslant 2$, d'élément neutre e et p un nombre premier divisant n.
On note $E = \{(x_1;\ldots,x_p) \in G^p \mid x_1 \cdot \cdots \cdot x_p = e\}$, et pour tout $\gamma \in S_p$ et tout $X = (x_1;\ldots;x_p) \in G^p$, on note $\gamma \cdot X = (x_{\gamma(1)};\ldots;x_{\gamma(p)})$.
On définit alors $\sigma \in S_p$ par $\sigma(i) = i+1$ pour tout i de 1 à $p-1$ et $\sigma(p) = 1$, et on pose $o(X) = \{\sigma^k \cdot X \mid k \in \mathbb{Z}\}$ pour tout X dans G^p.

1) Vérifier que E a pour cardinal n^{p-1}.
2) Montrer que l'orbite $o(X)$ de $X \in E$ est incluse dans E.
3) Montrer que si X et Y sont dans E alors $Y \in o(X)$ impose $o(X) = o(Y)$.
4) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et une famille $(X_1;\ldots;X_m) \in E^m$ telle que $(o(X_i))_{i=1\ldots m}$ forme une partition de E. Vérifier que pour tout X de E, l'ensemble $o(X)$ a pour cardinal 1 ou p.
5) En déduire que G admet un élément d'ordre p.

2. Révisions oraux : Anneaux

Exercice 2.1 [Ulm]. Un anneau A est dit **principal** quand tout idéal est du type $aA = \{ax \mid x \in A\}$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal.

Indications : comment montre-t-on que $K[X]$ est un anneau principal pour tout corps K ?

b) Soit A un anneau commutatif intègre. A quelle condition (nécessaire et suffisante) $A[X]$ est-il un anneau principal?

Exercice 2.2 [X]. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux est un anneau principal (i.e. tout idéal est engendré par un singleton).

Exercice 2.3 [Mines 05]. Montrer que l'ensemble E suivant est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix} \text{ avec } (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2.4 [TPE 06]. Soit A un anneau commutatif et I un idéal premier de A, J et K des idéaux de A. Un idéal I est premier quand $xy \in I$ avec $(x;y) \in A^2$ impose x ou y dans I.

a) Montrer que si $I = J \cap K$ alors $I = J$ ou $I = K$.

b) Montrer que A est un corps dès que tout idéal de A est premier. On pourra considérer l'idéal a^2A.

Exercice 2.5 [Centrale 07]. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{Q})$ et μ_A son polynôme minimal supposé irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

1) Montrer que $\mathbb{Q}[A] = \{P(A) | P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un corps.

2) Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^n$ stables par A en supposant μ_A de degré n.

3) Soit $\mu_A = X^n - 2$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A?

b) Montrer que $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

4) Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{Q})$ dont le polynôme caractéristique $X^n - 2$.

Exercice 2.6 [CCP 07]. Soit $E = \{M(a;b) | (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $M(a;b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension?

2) Montrer que $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto M(\mathrm{Re}(z); \mathrm{Im}(z)) \in E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Est-ce un isomorphisme d'anneaux?

Exercice 2.7 [CCP 07]. 1) Déterminer toutes les fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un groupe. Est-il commutatif?

3) Déterminer les morphismes de groupes de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E.

Exercice 2.8. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $(f \circ f)(n) = 2007 + n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 2.9. Montrer que pour tout entier p premier, il existe un entier naturel n non nul pour lequel $6n^2 + 5n + 1 = 0[p]$.

Exercice 2.10 [Centrale 08]. Soit A un anneau commutatif. Montrer l'équivalence entre :
(i) Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.
(ii) Pour tout idéal I de A, il existe un nombre fini d'éléments a_1, ... a_n de A avec $I = a_1A + \cdots + a_nA$.

Exercice 2.11 [X 13]. Montrer que 19 divise un nombre de la forme $222\ldots22$.

3. Révisions oraux : Polynômes

Exercice 3.1 [Centrale 05]. Soit x_1, x_2 et x_3 les racines d'un polynôme unitaire de degré 3 de $\mathbb{C}[X]$. Donner en fonction de ses coefficients la valeur de la somme

$$S = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2}.$$

Exercice 3.2. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 3.3 [Centrale 05]. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. On définit les ensemble de polynômes

$$A(K) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(K) \subset K\} \text{ et } B(K) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(K) = K\}.$$

Montrer que $A(K) = K[X]$ puis déterminer $B(\mathbb{C})$, $B(\mathbb{R})$ et $B(\mathbb{Q})$.
Indications : rappeler sommairement pourquoi K contient $\mathbb{Q}$. On pourra alors observer que les coefficients de P (supposé élément de $A(K)$) vérifient un système de Cramer.

Exercice 3.4 [X]. Dans quels corps a-t-on l'égalité $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 1)(X^2 + 5X + 1)$?

Exercice 3.5. Déterminer les polynômes à coefficients complexes P pour lesquels il existe deux entiers naturels p et q tels que $(P')^p$ divise P^q.

Exercice 3.6 [Mines 07-15]. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que X^n divise $X + 1 - P_n^2$. *On pourra penser au développement limité de $\sqrt{1+x}$.*
Soit N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $I + N$ est le carré d'une matrice.

Exercice 3.7 [TPE 07]. Que dire de l'application qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A où A est un polynôme fixé.

Exercice 3.8 [X 07]. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $n+1$ valeurs de λ telles que $A + \lambda B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont alors nilpotentes.

Exercice 3.9 [Mines 07]. **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme A_n de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$A_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}.$

b) Déterminer les racines de A_n, **c)** Décomposer $\frac{1}{A_n}$ en éléments simples.

Exercice 3.10 [CCP 07]. Factoriser $P_n = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.11 [X]. Déterminer tous les couples $(P;Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P^2 = 1 + (X^2-1)Q^2$.

Exercice 3.12 [X]. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) \geqslant 0$ pour tout x réel si et seulement si P s'écrit $A^2 + B^2$ avec A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.13 [X]. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ avec $P(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $[-1;1]$.
1) On suppose ici que P est de degré au plus 2. Montrer qu'alors P s'écrit $\alpha(X-a)^2 + \beta(1-X^2)$ avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $a \in [-1;1]$.
2) On revient au cas général. Montrer l'existence de deux polynômes A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + (1-X^2)B^2$.

Exercice 3.14 [X 2009] Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ avec $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1/2}}$ pour tout t. Quel est le degré de P_n? Vérifier que P_n n'admet que des racines simples.

Exercice 3.15 [*1/3 sujet* **Centrale 2011**] Soit E l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont les racines sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et E_n l'ensemble des éléments de E de degré n.

1) Soit $P_n = X^n + \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k}$ un élément de E_n. Montrer que pour tout k, on a $|a_k| \leqslant \binom{n}{k}\cdot$

2) Démontrer que les ensembles E_n sont finis et déterminer E_1.

3) Montrer que les racines non nulles d'un élément de E_n sont toutes de module 1. *On pourra utiliser le produit des telles racines.*

Exercice 3.16 [Mines 2012]. Soit $n \geqslant 1$. Trouver l'unique n-uplet $(a_0; \cdots; a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a

$$P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k)$$

Exercice 3.17 [X16]. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Prouver $P'^2 \geqslant PP''$.

4. Révisions oraux : Algèbre linéaire

Exercice 4.1 [Lyon]. Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Indication : Que dire de l'espace vectoriel engendré par les puissances d'une fonction f ? Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 4.2 [X]. Résoudre l'équation $X +^t X = \mathrm{tr}(X)\, A$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3 [Mines 05]. Soit A une matrice carrée réelle non nulle d'ordre 3 vérifiant $A^3 = -A$. Vérifier que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.4 [Mines 05]. Soit une matrice M dans $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + I = 0$. Montrer que n est nécessairement pair. Que vaut le déterminant de M?

Exercice 4.5 [Centrale 05]. Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que A et B commutent.
b) Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que l'espace vectoriel engendré par I, A et B est un anneau. Est-ce un corps?

Exercice 4.6 [CCP 06]. Calculer A^n pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.7 [Mines 06]. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme Q vérifiant $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$. Est-il unique?

Exercice 4.8 [Mines 06]. Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *On pourra remarquer que X est nilpotente.*

Exercice 4.9 [Mines 06]. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $3A^3 = A^2 + A + I$. Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection L. Calculer L en fonction de A.

Exercice 4.10 [CCP 06]. Soit E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E pour lequel il existe un polynôme $P \in K[X]$ avec $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont en somme directe.

Exercice 4.11 [TPE 06]. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$ avec A matrice carrée diagonalisable.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de B.
b) Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 4.12 [Centrale 06]. Calculer A^q avec q dans $\mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C}$ pour $A \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 1 & a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.13 [Centrale 06]. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe des droites ou des plans de $\mathbb{R}^n$ stables par A.
1) Cas où A admet une valeur propre réelle.
2) Dans le cas contraire, en considérant A comme matrice à coefficients complexes, montrer qu'il existe un complexe λ et deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(X+iY) = \lambda(X+iY)$ avec $X \neq 0$. En déduire qu'il existe des réels α et β vérifiant $A^2X = \alpha AX + \beta X$. Conclure.

Exercice 4.14 [CCP12]. Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 4.15 [TPE 06]. Montrer que la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \frac{i}{j}$ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 4.16 [TPE 06]. Les deux matrices A et B écrites ci-dessous sont-elles semblables? Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{Z}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.17 [CCP 06]. Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, admettent une base commune de vecteurs propres. Que pensez-vous de la réciproque?

Exercice 4.18 [CCP 06]. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2. On note $\mathcal{E} = (e_1; e_2; e_3)$ la base duale de la base canonique de E.

a) Montrer que $v : P \mapsto P(1)$ et $w : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,dt$ sont des éléments du dual E^* de E.
b) Vérifier que $\mathcal{E}' = (e_1; v; w)$ est base de E^*.
c) Donner la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et la base pré-duale de $\mathcal{E}'$.

Exercice 4.19. Soient A et B dans $K[X]$ et f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel. On note $U = A \wedge B$ le pgcd de A et B, et $V = A \vee B$ son ppcm. Exprimer $\ker(U(f))$, $\mathrm{Im}(U(f))$, $\ker(V(f))$ et $\mathrm{Im}(V(f))$ à l'aide des noyaux et images de $A(f)$ et $B(f)$.

Exercice 4.20. Soit $A \in M_{3n}(\mathbb{R})$ de rang $2n$ vérifiant $A^3 = -A$. Montrer que 0 est valeur propre de A de multiplicité n et que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.21. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si pour tout complexe z, on a $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im} z|^{\deg P}$.

b) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes diagonalisables de E convergeant vers $u \in L(E)$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable? trigonalisable?

Exercice 4.22. Soit $E = M_p(\mathbb{R})$ muni d'une norme d'algèbre $\|.\|$ Soient A et B deux éléments de E et $K = \max\{\|A\|; \|B\|\}$. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \|A^n - B^n\| \leqslant nK^{n-1}\|A - B\|$. En déduire la limite de $(\exp(A/n)\exp(B/n))^n$.

Exercice 4.23. Soit $E = \mathcal{C}^\infty$ et $D : f \in E \mapsto f' \in E$. Existe-il T dans $L(E)$ avec $D = T \circ T$?

Exercice 4.24 [Centrale 98]=4.35. Soit u un endomorphisme de E, K-espace vectoriel de dimension finie. Établir l'équivalence entre les propositions

(i) Les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont $\{0\}$ et E.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est irréductible dans $K[X]$.

Exercice 4.25 [ENS 06]. Pour A et B dans $M_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On donne U et V dans $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $[U, [U, V]] = 0$.

a) Montrer $[U, V]^k = [U, V[U, V]^{k-1}]$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $[U, V]$ est nilpotente.

c) Vérifier $[U^k, V] = k[U, V]U^{k-1}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

d) On suppose de plus U nilpotente. Montrer que UV est nilpotente.

Exercice 4.26 [ENS 06]. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout (i, j) et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour tout i.

a) Vérifier que 1 est valeur propre de A.

b) Montrer que les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont toutes de module au plus 1.

c) Montrer que les valeurs propres de A de module 1 sont des racines de l'unité.

Exercice 4.27 [ENS 06]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les propositions $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ et $a(A+aI_n)^{-1}$ admet une limite quand a tend vers 0, sont des propositions équivalentes.

Exercice 4.28 [CCP 06]. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et G un sous-groupe fini de $GL_{\mathbb{R}}(E)$ de cardinal r.

1) Soit $f \in L_{\mathbb{R}}(E)$, montrer que $\tilde{f} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{g\in G} gfg^{-1}$ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément de G.

2) Vérifier que $f = \tilde{f}$ si et seulement si f commute avec tous les éléments de G.

3) Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par G i.e. par tous les éléments de G. Montrer que V admet un supplémentaire G-stable. *On pourra introduire p un projecteur sur V et montrer que $\tilde{p}$ est aussi un projecteur.*

Exercice 4.29 [Centrale 07]. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes de E, K-espace vectoriel (avec K un sous-corps de $\mathbb{C}$), et $x_1, \ldots, x_n$ des scalaires distincts deux à deux. On considère un endomorphisme f de E vérifiant $f^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^m p_i$ pour tout entier naturel m, $f^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^m p_i$

1) Montrer que pour tout polynôme Q de $K[X]$, on a $Q(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\, p_i$. Que dire de f?

2) Calculer $p_k \circ p_l$ pour tout $(k; l)$ de $\mathbb{N}_n^2$ (*On pourra utiliser des polynômes interpolateurs.)* .

3) Quel est le spectre de f?

4) Montrer que p_k est le projecteur sur $\ker(f - x_k \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\oplus_{i \in I_k} \ker(f - x_j \mathrm{Id}_E)$ où I_k est $\mathbb{N}_n$ privé de k.

Exercice 4.30 [Mines 07]. Soit $u \in L_{\mathbb{C}}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
1) Soit $k \geqslant 2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que, si u^k est diagonalisable alors u aussi.
2) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ avec $m_{i,j} = a_i$ si $i+j = n+1$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 4.31 [Mines 07]. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(A + X) = \det A + \det X$ pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que A n'est pas inversible puis que $A = 0$.

Exercice 4.32 [Mines 07]. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes simples, et soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul. On considère l'équation $P(A) = B$ avec A dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que cette équation n'admet au plus qu'un nombre fini de solutions, que l'on majorera à l'aide de n est du degré de P.

Exercice 4.33 [TPE 07]. a) Montrer que si A est une matrice de rang 1 alors A est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.
b) Soit $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est-elle diagonalisable?

Exercice 4.34 [CCP 07]. Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ c & -c & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? et dans $M_3(\mathbb{C})$?

Exercice 4.35 [TPE 07]. Soit $f \in L_K(E)$ avec E un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E et $\{O_E\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par f si et seulement si le polynôme caractéristique de f est irréductible dans $K[X]$.

Exercice 4.36 [Mines 07]. Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $A^3 = {}^t A\, A$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? et dans $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4.37 [Centrale 07]. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $(u; v)$ de $L_{\mathbb{C}}(E)^2$, on définit le crochet de Lie par $[u, v] = uv - vu$.

1) Quelles sont les propriétés de cette loi?

2) Si $[u, v] = 0$, montrer que u et v sont co-trigonalisables i.e. il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

3) Même question si $[u, v]$ est dans $\mathbb{C}u$.

4) Même question si $[u, v]$ est dans l'espace vectoriel engendré par u et v.

Exercice 4.38 [X - ENS 15]. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et une famille $(u_i)_{i=1\ldots n}$ d'endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux. Que dire du produit $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$?

Exercice 4.39. Soient a et b deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie n.
1) Comparer $\mathrm{rg}(a + b)$ à $\mathrm{rg}(a) + \mathrm{rg}(b)$ et $\mathrm{rg}(a) - \mathrm{rg}(b)$.
2) Prouver l'équivalence $\mathrm{rg}(a + b) = \mathrm{rg}(a) + \mathrm{rg}(b) \iff [\ \mathrm{Im} a \cap \mathrm{Im} b = \{0_E\}$ et $\ker a + \ker b = E\ ]$
3) Montrer l'inégalité de Sylvester : $\mathrm{rg}(a) + \mathrm{rg}(b) - n \leqslant \mathrm{rg}(a \circ b) \leqslant \min(\mathrm{rg}(a); \mathrm{rg}(b))$.

Exercice 4.40. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
1) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :
(i) $\ker u = \ker u^2$ (ii) $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$ $E = \ker u + \mathrm{Im} u$
2) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions.
3) Le résultat subsiste-t-il quand E n'est plus de dimension finie?

Exercice 4.41 [TPE 08]. Soit u et v des endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie.
1) Montrer l'inégalité $\dim(\ker(v \circ u)) \leqslant \dim(\ker v) + \dim(\ker u)$.
On pourra s'intéresser à $\tilde{v} : x \in Imu \mapsto v(x)$.
2) Montrer que la suite de terme général $\dim(\ker u^{k+1}) - \dim(\ker u^k))$ est monotone.

Exercice 4.42 [CCP 08]. Soit $M(a) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux valent a et les autres 1.
1) Montrer que $\det(M(a)) = (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$ par un calcul direct.
2) Déterminer les valeurs propres de $M(a)$ ainsi que son polynôme minimal.
3) Quel est le rang de $M(a)$?

Exercice 4.43 [TPE 08]. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle les endomorphismes canoniquement associés à A et B ont des matrices triangulaires supérieures (i.e. A et B sont co-trigonalisables).

Exercice 4.44 [Centrale 08]. Soit a et b deux complexes non nuls. On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a+b & b & & & \\ a & a+b & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & a & a+b \end{pmatrix}$$

1) Résoudre $M_n\, X = 0$ et montrer que M_n est inversible sauf si $a^{b+1} = b^{n+1}$.
2) Calculer le déterminant de M_n. (On vérifiera le résultat pour $n = 5$ et $a = b = 1$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel).

Exercice 4.45 [Ens Lyon 08]. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et T l'endomorphisme de E défini par

$$T : u \in E \mapsto T(u) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
2) Déterminer $\ker((T - p\mathrm{Id})^2)$ pour tout entier naturel p non nul.

Exercice 4.46 [CCP 08]. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E non inversible.
1) Montrer l'équivalence des trois propositions :
(i) $\mathrm{Im}\, u \oplus \ker u = E$
(ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A matrice inversible.
(iii) Il existe un polynôme P dont zéro est racine simple annulant u.

2) Montrer que les propositions précédentes sont équivalentes à $\ker u = \ker u^2$.

Exercice 4.47 [TPE 08]. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.48 [CCP 08]. Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et E le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par J et I_n.

1) Montrer que E est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $A = aI_n + bJ$ avec $b \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P unitaire de degré 2 annulant A. Puis prouver que le polynôme Q annule A si et seulement si P divise Q.

Exercice 4.49 [CCP 08]. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et f et g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g - g \circ f = f$.

1) Déterminer $\mathrm{tr} f$ et $\det f$.

2) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$. En déduire $\mathrm{tr} f^k$.

3) Soit λ_1, ...,λ_p les p valeurs propres distinctes de f. Montrer $p = 1$, puis que f est nilpotente.

Exercice 4.50 [CCP 08]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base $(e_1; e_2; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$

$$A(n) = \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha - n^2 \\ 0 & 1 & -1 - n^2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer (selon les valeurs de α) le rang, le noyau et l'image de f.

2) Quelles sont les valeurs propres de f? ses sous-espaces propres? existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f?

Exercice 4.51 [CCP 08]. 1) Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si λ est une valeur propre de f d'ordre de multiplicité m alors la dimension de $\ker(f - \lambda I)$ est comprise entre 1 et m.

2) Trouver le plus simplement possible les valeurs propres de la matrice A suivante. Est-elle diagonalisable?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.52 [Centrale 08]. Montrer qu'une matrice M de $M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M^2) = \cdots = \mathrm{tr}(M^n) = 0$.

Exercice 4.53 [CCP 08]. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$(\varphi(P))(x) = \int_0^{+\infty} (ax^2 + bxt + ct^2)P(t)\mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall x \in \mathbb{R}$$

1) Pour quelle valeur de x, le réel $\varphi(P)(x)$ est-il bien défini?

2) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

4) Est-ce que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 4.54 [CCP 08]. Soit $N : M_n(C) \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

(i) $N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A)$ $\forall(\lambda; A) \in \mathbb{C} \times M_n(\mathbb{C})$,

$(ii) N(AB) = N(BA) \quad \forall (A;B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$,
et $(iii) N(A+B) \leqslant N(A) + N(B) \quad \forall (A;B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$.
1) Déterminer $N(E_{i,j}$ pour $i \neq j$ (matrices élémentaires).
2) Montrer par récurrence sur n qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle. On détaillera le cas $n=2$. Montrer qu'alors $N(M)=0$.
3) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour lequel $N(A) = \alpha\,|\mathrm{tr}(A)|$ pour tout A de $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4.55 [Mines 08]. On munit E, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de la norme $N_1 : f \in E \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$. et note $G : f \in E \mapsto \left\{ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(x+t)\,dt \right\}$.
1) Vérifier que G définit un endomorphisme continu de E.
2) L'endomorphisme G appartient-il dans $GL(E)$?

Exercice 4.56 [Centrale 08]. Soit S_n le groupe symétrique d'ordre n. On définit pour tout σ de S_n la matrice $M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $\sigma \in S_n \mapsto M_\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$ est un morphisme.
2) En déduire que S_n est isomorphe à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
3) Montrer que M_σ laisse stable la droite vectorielle engendrée par ${}^t(1 \cdots 1)$ pour tout σ de S_n.
4) Vérifier que S_n est isomorphe à un sous-groupe de $O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.57 [CCP 09 (12 points) **- X 15**(directement c)**].** Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$
a) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A\,P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} \text{ où } P' \text{ est le polynôme dérivé de } P$$

b) Montrer que si B est diagonalisable alors A aussi puis $A = 0$.
c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 4.58 [CCP 09 (exercice à 12 points) **].** Soit M dans $M_n(\mathbb{C})$, on dit que X est une comatrice de M quand elle vérifie ${}^tMX = X{}^tM = \det M\, I_n$.
a) Soit A et B dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $ComA\,.ComB = Com(AB)$ et $Com(A^{-1}) = (ComA)^{-1}$.
b) Pour A et B dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer que $ComA\,.ComB$ est une comatrice de AB. Que vaut $Com{}^tA$?
c) Y-a-t'il toujours unicité de la comatrice?

Exercice 4.59 [TPE 09]. Trouver toutes les matrices symétriques B pour lesquelles B^2 vaut $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 4.60 [TPE 2009]. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Exercice 4.61 [TPE 2009]. Soit f et g deux endomorphismes de E espace vectoriel de dimension n. Montrer que $\dim\ker(g \circ f) \leqslant \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$. *On pourra s'intéresser à la restriction de g à Imf.*

Exercice 4.62 [Mines 2009]. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ vérifiant $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u^2) = n$. Déterminer la dimension de $V(u) = \{v \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{3n}) \mid v \circ u = u \circ v\}$.

Exercice 4.63. [CCP 2011 (12 points)**].** On pose $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ avec $m_{i,i+1} = 1$ et $m_{i,j} = 0$ dans les autres cas.
1) Montrer que M est nilpotente. Est-elle diagonalisable?
2) Montrer que M est semblable à $2M$.
3) Prouver que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que A et $2A$ sont semblables, est nilpotente.

Exercice 4.64. [CCP 2011 (12 points)**].**
1) Soit N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + N) = 1$.
2) Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ avec A inversible, B nilpotente. Si A et B commutent, vérifier $\det(A+B) = \det(A)$.
3) Montrer que le résultat précédent reste valable si A n'est pas inversible.

Exercice 4.65 [Centrale 2011]. Soit F l'ensemble des matrices de trace nulle de $M_n(\mathbb{K})$ et N le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.
1) Montrer que si $f \in L(\mathbb{K}^n)$ vérifie $(x; f(x))$ est une famille liée pour tout x de $\mathbb{K}^n$, alors f est une homothétie.
2) Montrer que tout élément de F est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.
3) Déterminer la dimension de N en montrant que $N = F$.
4) Montrer que pour tout $M \in N$, il existe A et B de $M_n(\mathbb{K})$ avec $M = AB - BA$.

Exercice 4.66 [Mines 2012, exo 2**].** Soit λ un réel. trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par
$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.67 [Centrale 2012]. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de cardinal n de $GL(E)$.
1) Donner un exemple de sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^2)$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
2) Montrer que $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$ est un projecteur. Exprimer son rang avec des traces d'éléments de G.
3) Vérifier $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g) = \dim\left(\cap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\right)$.

Exercice 4.68 [CCP 2012, 8 points**].** Soit $f : M \in M_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in M_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle surjective? Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4.69 [Petites Mines 2012]. Pour tout $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a; b; c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a+2c & b \\ b & 2b+c & a+2c \end{pmatrix}$
On considère alors $E = \{M(a; b; c) \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$ et $A = M(0; 1; 0)$.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
2) Montrer que $E = \mathbb{R}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$. En déduire que toute matrice M de E est diagonalisable et donner une matrice diagonale semblable à M.
3) Montrer que $M(a; b; c)$ est non inversible si et seulement si le point $(a; b; c)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ appartient à la réunion de 3 plans dont on donnera une équation cartésienne.

Exercice 4.70 [Petites Mines 2012, exo 1**].** Montrer que A et sa transposée sont semblables avec

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 4.71 [**Mines 2010**, exo 1.] Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = B^2 = I_n$ et $AB = -BA$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 4.72 [**CCP 2013**, 12 points]. **1)** Déterminer les réels a, b et c pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A - \mathrm{I}_n)^2 = 0$.

a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est la matrice d'un projecteur.

b) Vérifier que A est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = n$.

c) Montrer que si $\mathrm{tr}(A)$ vaut 0 ou 1 alors A est diagonalisable.

Exercice 4.73 [**X 2013**]. Soient p matrices $A_1, \ldots, A_p$ de $M_n(\mathbb{R})$ avec $A_1 + \cdots + A_p = I_n$. Montrer que A_i est un projecteur pour tout i si et seulement si $A_i\, A_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

Exercice 4.74 [**X 2013**]. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de même dimension de E, espace vectoriel de dimension finie. Existe-t-il un supplémentaire commun à F et à G?

Exercice 4.75 [**X 2013**]. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $A^2B = A$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Prouver $B^2A = B$.

Exercice 4.76 [**X 2013**]. Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A\overline{A}$ admet une valeur propre λ réelle positive. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{C}^n$ avec $v \neq 0$ tel que $A\overline{v} = \sqrt{\lambda}\, v$.

Exercice 4.77 [**X 2013**]. Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$ avec A non inversible.

1) Montrer $\dim(\ker(A^2)) \leqslant 2 \dim(\ker(A))$.

2) Prouver l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) $\dim(\ker(A^2)) = 2 \dim(\ker(A))$, (ii) $\ker(A) \subset \mathrm{Im} A$, (iii) $A(\ker A^2) = \ker(A)$,

(iv) $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Exercice 4.78 [**X 2013**]. Soit a un réel. Résoudre avec A dans $M_2(\mathbb{C})$:

$$\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.79 [**X 2013**]. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour u et v dans $L(E)$, on note (P) la propriété $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

1) Montrer que si E est de dimension finie, aucun couple (u, v) ne vérifie (P).

2) Si E est un espace vectoriel normé, montrer qu'aucun couple d'endomorphismes continus ne vérifie (P).

3) Sur $\mathbb{R}[X]$, vérifier que $u : P \mapsto P'$ et $v : P \mapsto XP$ satisfont (P) et trouver des normes pour lesquelles soit u soit v soit continu.

Exercice 4.80 [**X 2013**]. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ avec n impair, vérifiant $AB + BA = A$.

1) Montrer que A et B admettent un vecteur propre en commun.

2) Ce résultat reste-t-il valable si on enlève l'hypothèse n impair?

Exercice 4.81 [X2014]. Soit V un espace vectoriel et s un endomorphisme de V vérifiant $\mathrm{rg}(s-\mathrm{Id}) = 1$.
1) Donner une expression simple de s.
2) On suppose que G est un sous-groupe de $GL(V)$ contenant s, tel que les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les éléments de G sont $\{0\}$ et V. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de G est constitué d'homothéties.

Exercice 4.82 [ENS 2014] Une matrice de permutation de $M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de la forme $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

Exercice 4.83 [Cent. 2014]. Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. On pose $\Delta(M) = AM - MA$ pour tout M de $M_p(\mathbb{R})$.
1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $M_p(\mathbb{R})$ puis

$$\forall (M,N) \in M_p(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(M)\, \Delta^{n-k}(N) \text{ avec } \Delta^0 = \mathrm{Id}_{M_p(\mathbb{R})}.$$

2) Soit $B = \Delta(H)$ qui commute avec A. Montrer $\Delta^2(H) = 0$, en déduire $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$.
3) Montrer que $\Delta^n(H^n) = n!B^n$.
4) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} ||B^n||^{\frac{1}{n}} = 0$.
5) Vérifier que B est nilpotente.

Exercice 4.84 [Cent. 2014]. Soit $n \geqslant 2$. On considère deux sous-espaces vectoriels V et W de $M_n(\mathbb{R})$, supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$, tels que pour toutes matrices A et B appartenant respectivement à V et W, on ait $AB = BA$. De plus on pose $\mathbb{R}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$ et $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$.
Soit J la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sur la surdiagonale, égaux à 1.
1) Calculer le polynôme minimal de J. Montrer que $\mathbb{R}[J] = C(J)$.
2) On pose alors J_V et J_W des matrices dans V et W telles que $J = J_V + J_W$. Montrer qu'il existe deux uniques polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $J_V = P(J)$ et $J_W = Q(J)$.
3) Que vaut $P + Q$?
4) Montrer que $C(J_V) = C(J_V - \lambda I_n) = \mathbb{R}[J]$.
5) Montrer que nécessairement V ou W est égal à $\mathrm{vect}(I_n)$.

Exercice 4.85 [Telecom Sud-Paris 2015 - exercice 1]. On pose $u(P) = P(1)X + P(2)X^2$ pour tout polynôme P à coefficients réels. Étudier les valeurs propres et les espaces propres de cet endomorphisme.

Exercice 4.86 [CCP 15 (12 points partiel)**].** Soit $A \neq 0$ et B inversible deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $BA = \omega AB$ avec $\omega^n = 1$.
1) Vérifier que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$
2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si BA l'est.

Exercice 4.87 [Mines 15 (exo 2)**].** Soient A, B et M trois matrices de $M_n(\mathbb{C})$ avec $AM = MB$. Montrer que A et B ont au moins $\mathrm{rg}(M)$ valeurs propres en commun (comptées avec ordre de multiplicité).

Exercice 4.88 [CCP 15 (12 points)**].** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $L(E)$, tels que pour tout (u,v) dans $L_1 \times L_2$, $u \circ v + v \circ u = 0$.
1) Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 dans L_1 respectivement L_2 tels que $\mathrm{id} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$.

2) Montrer que $n = \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2)$.
3) Soit u dans L_1.
  a) Pour tout x dans $\mathrm{Im}(p_2)$, montrer que $u(x) = 0$.
  b) Montrer que $\ker(p_2)$ est stable par u.
  c) En déduire que $\dim(L_1) \leqslant (n - \mathrm{rg}(p_2))^2$
  d) Quelle inégalité peut-on avoir pour $\dim(L_2)$?
4) En justifiant que $\dim(L(E)) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$, montrer que $\mathrm{rg}(p_1)(n - \mathrm{rg}(p_1)) \leqslant 0$. En déduire que $\mathrm{rg}(p_1) = 0$ ou $\mathrm{rg}(p_1) = n$ puis que L_1 ou L_2 est réduit au singleton $\{0\}$.

Exercice 4.89 [X 15]. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives et celles de B négatives.
Montrer que pour tout C de $M_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ avec $C = AM + MB$.

Exercice 4.90 [Télécom 16]. Soit $(u; v) \in (L(E; F))^2$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

Exercice 4.91 [Télécom 16]. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, dont une base est (e_1, e_2, e_3). Soit $f \in L(E)$ défini par : $f(e_i) = \frac{e_1+e_2+e_3}{3}$ pour tout i de $\{1, 2, 3\}$
1) Montrer que f est un projecteur, et déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2) Soit $\varphi_{a,b} = a\,f + b\,\mathrm{id}_E$ et $S = \{\varphi_{a,b} |\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que S est une sous-algèbre de $L(E)$.
3) Déterminer une base de S.
4) Quels sont les éléments inversibles de S?

Exercice 4.92 [Mines 16]. Soit A et B de $M_n(\mathbb{C})$ avec $AB = BA^2$.
En supposant que A admet des valeurs propres de module différent de 1, montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

Exercice 4.93 [TPE 16]. La matrice suivante est-elle diagonalisable? Si oui, donner les matrices de passage

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ & & & & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$$

Exercice 4.94 [Ensea 16]. Soit E et F deux espaces vectoriels. Soient $f \in L(E; F)$ et $g \in L(F; E)$ avec $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
1) Montrer $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.
2) Si E est de dimension finie, comparer $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

Exercice 4.95 [X 16]. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $M' \in M_n(\mathbb{R})$ avec $M\,M'\,M = M$.
Soit U dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A = U{}^tU$. Montrer que $W ={}^tU(A' -{}^tA')U = 0$.

Exercice 4.96 [Cent 16]. Soit la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{k,k} = 0$ pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ et $a_{k,j} = j$ pour tout $k \neq j$ de $\{1, \ldots, n\}$. On note P le polynôme caractéristique de A.
1) Calculer $P(0)$ et $P(-\ell)$ pour tout ℓ de $\{1, \ldots, n\}$.
2) Déterminer P.
3) Que dire des racines de P?

4) La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 4.97 [CCP 16, 12pts]. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension n. On note T l'endomorphisme de $L(E)$ défini par $T(g) = f \circ g - g \circ f$.
1) Si f est nilpotente, montrer que T est aussi nilpotente.
2) Soit u, respectivement v un vecteur propre de f pour la valeur propre a, respectivement b. On choisit G un supplémentaire de $\mathbb{R}u$ dans E et on note g l'endomorphisme de E défini par $g(u) = v$ et sa restriction à G est nulle. Calculer $T(g)(u)$.
3) Si f est diagonalisable, T est-il aussi diagonalisable?

5. Révisions oraux : Espaces euclidiens

Exercice 5.1 [CCP 06]. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E euclidien. Montrer
a) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$ **b)** $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.

Exercice 5.2 [Centrale 06]. On considère $[E, (\cdot|\cdot)]$ un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme u de E est dit presque-orthogonal quand on a : $\forall x \in (\ker u)^\perp,\ \ \|u(x)\| = \|x\|$.
On considère u un endomorphisme presque-orthogonal,
a) Montrer : $(x|y) = (u(x)|u(y))\ \ \forall (x;y) \in \left((\ker u)^\perp\right)^2$.
b) Vérifier que $u^* \circ u$ est le projecteur orthogonal sur $(\ker u)^\perp$.
c) Montrer que u^* est presque-orthogonal et calculer $u \circ u^*$.

Exercice 5.3 [CCP 06]. Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes de E.
a) Montrer que $u^* \circ u$ est symétrique et que toutes ses valeurs propres sont positives.
b) Soit $\lambda_{\min}$ respectivement $\lambda_{\max}$ la plus petite, respectivement la plus grande, valeur propre de $u^* \circ u$. Montrer que pour tout vecteur x de E, on a $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leqslant \|u(x)\|^2 \leqslant \lambda_{\max} \|x\|^2$.
c) On note $\mu_{\min}$ et $\mu_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de $v^* \circ v$. Montrer que toute valeur propre α de $v \circ u$ vérifie $\mu_{\min}\, \lambda_{\min} \leqslant \alpha^2 \leqslant \mu_{\max}\, \lambda_{\max}$.

Exercice 5.4 [CCP]. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ usuel, vérifiant que pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, on a $(x|f(x)) > 0$.
Pour u fixé dans $\mathbb{R}^n$, on définit $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{(f(x)|x)}{2} - (u|x)$.
Montrer que g admet des dérivées partielles, les expliciter. En déduire que g admet un unique point critique et qu'il correspond à un minimum global de g.

Exercice 5.5 [Mines 06]. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(1) = \int_{-1}^1 \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 5.6 [Mines 06]. Soit $q(M) = \mathrm{tr}({}^tMM) + (\mathrm{tr}(M))^2$. Vérifier que q est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$. Est-elle positive?

Exercice 5.7. Soit A l'ensemble des endomorphismes f d'un espace euclidien E vérifiant $ff^*f = f$.
a) Montrer que f appartient à A si et seulement si f^*f est un projecteur orthogonal.
b) Montrer que le groupe orthogonal est à la fois un ouvert et un fermé relatif de A.

Exercice 5.8. On met sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire $(A|B) = \int_0^1 AB$. On définit sur E l'application u par

$$(u(P))(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, dt$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E, symétrique et bijectif.
b) Soit $(P_0, \cdots P_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, P_i étant relatif à la valeur propre λ_i. Vérifier la relation $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$. Calculer $\mathrm{tr}u$. Comment aurait-on pu obtenir ce résultat directement?
c) Calculer $\mathrm{tr}(u^2)$.

Exercice 5.9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}A$ pour toute matrice orthogonale U. Montrer que

A est symétrique positive c'est à dire que A est symétrique et vérifie $\langle AX|X\rangle \geqslant 0$ pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$. Étudier la réciproque.

Exercice 5.10 [X 06]. Soit E un espace euclidien et p et q des projecteurs orthogonaux de E. Montrer que pq est diagonalisable et que ses valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 5.11 [ENS 06]. On pose $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^tY)$ pour tout X et tout Y de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Vérifier que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire euclidien sur $M_n(\mathbb{R})$.

b) Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note ad_A l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ définit par $\mathrm{ad}_A(X) = AX - XA$ pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adjoint de ad_A pour $\langle .,.\rangle$ i.e. l'endomorphisme ad_A^* défini par $\langle \mathrm{ad}_A(X), Y\rangle = \langle X, \mathrm{ad}_A^*(Y)\rangle$ pour tout X et Y de $M_n(\mathbb{R})$.

c) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A \in \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}_A$.

d) Montrer que A est nilpotente si et seulement si A est semblable à $2A$.

Exercice 5.12 [X 06]. Soit A et B des matrices symétriques réelles positives. On définit une matrice C en posant $c_{i,j} = a_{i,j}\, b_{i,j}$ pour tout (i,j). Montrer que C est symétrique positive. Que dire de C si A et B sont définies positives?

Exercice 5.13 [X 06]. a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que A est orthosemblable à une matrice diagonale par bloc du type

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_p \\ -\lambda_p & 0 \end{pmatrix}, ,0,\dots,0\right).$$

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $2S = M +^t M$ est positive i.e ${}^tXSX \geqslant 0$ pour tout X. Montrer que $\det M \geqslant \det S$.

Exercice 5.14 [Centrale 06]. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible, et plus précisément une matrice orthogonale.

Exercice 5.15. Soient a_0,..., a_n des réels.

a) Montrer que $(P;Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, \cdots, P_n)$ orthonormale pour ce produit scalaire et telle que chaque P_i est de degré i et de coefficient dominant positif.

c) Calculer $P_i^{(k)}(a_k)$.

Exercice 5.16 [Centrale]. Déterminer le plus petit réel λ vérifiant

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \int_R (P'(x))^2\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx \leqslant \lambda \int_{\mathbb{R}} (P(x))^2\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$$

Indication : Soit $f \in L_{\mathbb{R}}(E)$ symétrique, quel est le plus petit λ vérifiant $< f(x), x > \leqslant \lambda < x, x >$? On raisonnera à partir des valeurs propres de f.

Exercice 5.17 [Centrale 07].

$$\text{Soit } A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \cdot & s\cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A_n est une matrice symétrique définie positive en utilisant $\int_0^1 t^\alpha t^\beta dt = \frac{1}{1+\alpha+\beta}$.
2) Montrer que la série $\sum \det(A_n)$ est convergente. *On pourra comparer avec $tr(A_n)$.*

Exercice 5.18 [X 07]. Soit q une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $q(XY) = q(X)q(Y)$ pour tout $(X;Y)$ de $M_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $q(X) \neq 0$ équivaut à l'inversibilité de X.

Exercice 5.19 [CCP 11]. Pour tout u et v de $\mathbb{R}^n$, on pose $u \otimes v : x \in \mathbb{R}^n \mapsto < x|v > \ u$ où $< .|. >$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit u et v fixés. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $u \otimes v$. Quand $u \otimes v$ est-il diagonalisable?
2. Déterminer une condition sur $(u_1; v_1; u_2; v_2)$ sous laquelle $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$.
3. Montrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ et $u \otimes v$ commutent si et seulement s'il existe un réel α vérifiant $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Exercice 5.20 [Centrale 07]. Soit B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ i.e. une matrice symétrique avec ${}^tXBX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure T dont tous les termes diagonaux sont strictement positifs, vérifiant $B ={}^t TT$.
Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S}_n^+ \mid \det A \geqslant \alpha\}$ où $\alpha > 0$ est fixé. Montrer que $\min_{A\in\mathcal{A}}(\operatorname{tr}(AS)) \geqslant n\alpha^{1/n} \det(S)^{1/n}$ pour tout S de $\mathcal{S}_n^{++}$.

Exercice 5.21 [Mines 07]. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : (A;B) \in E^2 \mapsto \operatorname{tr}({}^tA\,B)$.
1) Vérifier que Φ est un produit scalaire.
2) Pour tout A de E, on pose $f_A : M \in E \mapsto MA$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit dans $O(E)$.

Exercice 5.22 [Centrale 07]. Soit u et v deux endomorphismes autoadjoints positifs de l'espace euclidien $(E, (.|.))$.
1) Montrer que $u + v$ est autoadjoint positif.
2) Désormais, u est défini positif. Montrer que $< x|y >= (u(x)|y)$ définit un produit scalaire.
3) En posant $w = u^{-1} \circ v$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, pour tout x de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ on a $(u(x)|x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$ et $(v(x)|x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n t_i x_i^2$.

Exercice 5.23 [Mines 07]. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ et α dans $]0;1[$.
Montrer que $\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha}$. *On pourra montrer l'existence d'une matrice P avec $A ={}^t PDP$ et $B ={}^t PP$ où D est une matrice diagonale.*

Exercice 5.24 [Centrale 08]. **1)** Montrer que pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe un réel λ tel que $A + \lambda I_n$ appartienne à $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2) Soit $A = \displaystyle\sum_{k=1}^p \lambda_k A_k$ avec $(A_k; \lambda_k) \in S_n^{++} \times \mathbb{R}$ pour tout k. Notons $B = \displaystyle\sum_{k=1}^p |\lambda_k| A_k$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $|{}^tXAX| \leqslant{}^t XBX$, en déduire $|\det A| \leqslant \det B$. Que dire du cas d'égalité?

Exercice 5.25 [Mines 08]. Soit A et B deux matrices symétriques réelles vérifiant pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $0 \leqslant{}^t XAX \leqslant{}^t XBX$. Montrer que $\det A \leqslant \det B$.

Exercice 5.26 [Mines 08]. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
1) Trouver le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques).

2) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et tout réel x, la matrice $\exp(xB)$ est orthogonale.

Exercice 5.27 [Mines 08]. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, montrer que la matrice A ci-après est une rotation si et seulement si p, q et r sont solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + \lambda = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

Exercice 5.28 [Centrale]. Soit Φ un endomorphisme de E, espace euclidien.
0) Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme Ψ vérifiant $\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Psi(y) \rangle$ pour tout $(x; y) \in E^2$. Vérifier que $\ker(\Psi)$ a pour orthogonal $\mathrm{Im}\Phi$.
1) Exprimer $\ker(\Psi \circ \Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Psi \circ \Phi)$ à l'aide de $\ker \Phi$ et $\mathrm{Im}\Phi$.
2) Montrer que $\Psi \circ \Phi$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\Phi \circ \Psi \circ \Phi = \Phi$.

Exercice 5.29 [Cachan 08]. Soit E un espace euclidien. Montrer qu'une matrice M est symétrique positive si et seulement s'il existe x_1, ..., x_n dans E avec $M = \mathrm{Gram}(x_1; \cdots; x_n) = (< x_i | x_j >)_{i,j}$.

Exercice 5.30 [CCP 08]. Soit E un espace euclidien de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$. Soit q la forme quadratique définie par $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 4xz - 2yz$.

1) Quelle est la matrice associée à q dans $\mathcal{B}$?
2) Quelles sont les valeurs propres de cette matrice?
3) Expliquer comment "rendre plus simple" l'expression de q.

Exercice 5.31 [TPE 08]. 1) Montrer que $< A|B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$.
2) Calculer la distance de M à $S_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques, avec M dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.32 [TPE 08]. Donner toutes les matrices symétriques réelles B vérifiant $B^2 = A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.33 [TPE 08]. Soient n réels x_1, .., x_n vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = n$ et $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n$. Vérifier qu'alors $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

Exercice 5.34 [Centrale 06]. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
1) Montrer que $N : P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur E.
On suppose maintenant $n = 2$.
2) Montrer que l'ensemble S des polynômes scindés sur $\mathbb{R}_2[X]$ est fermé.
3) Calculer la distance de $X^2 + 1$ à S. En quels points est-elle atteinte?
4) On revient au cas général: n est quelconque. Comparer N et $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n |a_k|$.

Exercice 5.35 [CCP 09]. Soit A un sous-espace vectoriel de E euclidien. Montrer $A \oplus A^\perp = E$ puis $A^{\perp\perp} = A$

Exercice 5.36 [Enstim 09]. Soit E un espace euclidien et u, v deux vecteurs non nuls orthogonaux de E. On pose $f(x) = \langle u|x \rangle v + \langle v|x \rangle u$.

1) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Que remarque-t-on?
2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 5.37 [CCP (12 points)**].** Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E euclidien tels que $q-p$ est un projecteur orthogonal.
a) Montrer : $\forall x \in E,\ \langle p(x)|x\rangle = \|p(x)\|^2$
b) En déduire $\forall x \in \mathrm{Im} p,\ \ \langle q(x)|x\rangle = \|x\|^2$
c) Montrer que $q \circ p = p$ puis $p \circ q = p$.

Exercice 5.38 [Petites Mines 2011] (exercice 1/2) **].** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $[E, \langle\ |\ \rangle]$. Montrer que si $\langle x|y\rangle = 0$ impose $\langle f(x)|f(y)\rangle = 0$ alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f(x)\| = k\|x\|$ pour tout $x \in E$. Que pensez-vous de la réciproque?

Exercice 5.39 [Petites Mines 2012] (exo 1). Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique, positive.
1) Montrer qu'il existe une et une seule matrice B de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique, positive, de carré A.
2) Montrer que B est un polynôme en A.

Exercice 5.40 [Centrale 2012]. Dans E un espace euclidien, on considère l'ensemble
$\Gamma = \{u \in L_{\mathbb{R}}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)| \leqslant \|x\|\ \}$.
1) Vérifier que Γ est une partie convexe de $L_{\mathbb{R}}(E)$ contenant le groupe orthogonal $O(E)$.
2) Soit u dans Γ, s'écrivant $u = \frac{f+g}{2}$ avec $f \neq g$ dans Γ. Montrer que u n'appartient pas à $O(E)$.
3) Soit $v \in GL(E)$. Montrer qu'il existe $\rho \in O(E)$ et s symétrique avec $v = \rho \circ s$ et $\langle s(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout x de E.
4) Même question sans supposer v bijectif.

Exercice 5.41 [Mines 2013, exo 1**].**
On définit sur $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation d'ordre $A \prec B \Longleftrightarrow [\ \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t AX \leqslant {}^t XBX\ ]$.
1) Vérifier rapidement que cette relation est bien une relation d'ordre sur E.
2) Montrer que toute suite croissante majorée de E est convergente dans E.

Exercice 5.42 [Mines 2013]. Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ symétrique avec ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
On note $\widetilde{A}$ la transposée de la co-matrice de A.
1) Montrer $0 <^t X\widetilde{A}X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
2) Est-ce encore vrai avec des inégalités larges?

Exercice 5.43 [TPE 2014] on se place sur $E = M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $\varphi : (A; B) \in E^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E.
2) Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto \Omega\, M$. Déterminer Ω pour que f soit un endomorphisme orthogonal.

Exercice 5.44 [Cent1 2015] On considère l'ensemble $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M}\, M = I_n\}$.
1) Soient u et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$, montrer que tout espace propre de l'un est stable par l'autre.
2) Soit M dans $U_n(\mathbb{C})$ tel que ${}^tM = M$. Montrer qu'il existe U et V symétriques réelles telles que :
a) $M = U + iV$
b) $UV = VU$
c) $U^2 + V^2 = I_n$
3) Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $M = \exp(iS)$.
4) Montrer que M est dans $U_n(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe P orthogonale (réelle), S symétrique réelle telle que $M = P \exp(iS)$.

Exercice 5.45 [Mines 2016, exo1] Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, telle que 1 n'est pas valeur propre de A.

1) Convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Convergence de $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. Révisions oraux : Géométrie

Exercice 6.1 [Mines 05]. Caractériser l'application affine qui envoie $(0;0;0)$ sur $(2;3;4)$ et dont la partie linéaire a pour matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.2 [Mines 05]. Soit A et A' deux points distincts d'un plan euclidien $\mathcal{P}$. On pose $r = AA'/3$ et note respectivement $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et rayon r, et $\mathcal{C}'$ celui de centre A' et rayon $2r$. Décrire le lieu Σ des points équidistants de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 6.3. Paramétrer le lieu $\mathcal{L}$ d'équations $x^2+y^2+z^2=1$ et $x+y+z=1$ (*Quelle est sa nature?*). Calculer alors $\int_{\mathcal{L}}((y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(y-x)\,dz)$ en précisant l'orientation choisie pour $\mathcal{L}$.

Exercice 6.4 [Mines 06]. Déterminer l'endomorphisme de l'espace euclidien de dimension 3 représenté par la matrice

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.5 [Mines 05-07]. Soit s une symétrie orthogonale et r une rotation vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3. Que dire de $s \circ r \circ s$?

Exercice 6.6 [Mines 05]. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la quadruplet $(a;b;c;d)$ pour que le plan d'équation $ax+by+cz=d$ soit tangent à la surface d'équation $27xyz=1$. *Pourquoi est-ce bien une surface?*

Exercice 6.7 [Mines 06]. Que dire de la conique d'équation $(x-y)^2-2x+4y+1=0$. La tracer.

Exercice 6.8 [CCP 06]. Tracer le lieu (E) d'équation $x^2+2x+4y^2-8y+1=0$ de $\mathbb{R}^2$. Donner la pente des tangentes de cette courbe aux points d'intersection avec l'axe (Oy).

Exercice 6.9 [TPE 06]. Soient D_1 et D_2 deux droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le lieu des points équidistants de D_1 et D_2.

Exercice 6.10. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, B le point de ce cercle d'abscisse -1 et A celui de coordonnées $(0;1)$. On considère un point M_0 de ce cercle qui n'est pas sur l'axe des ordonnées. Montrer qu'il existe un unique point M_1 sur $\mathcal{C}$ tels que la droite (AM_1) et la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 se coupent sur l'axe des abscisses. Par récurrence, on construit de même le pont M_{n+1} à partir de M_n. La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle? vers quelle limite le cas échéant?

Exercice 6.11 [CCP 06]. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et rayon 1. Soit M un point de $\mathcal{C}$, on considère A et B les projetés orthogonaux de M sur deux diamètres perpendiculaires fixés de $\mathcal{C}$, puis N le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). Déterminer le lieu des points N quand M décrit $\mathcal{C}$ puis le construire.

Exercice 6.12 [Centrale 07]. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=x^3-x^2+x+1$. Montrer que les droites coupant $\mathcal{C}$ en trois points dont un est milieu des deux autres passent par un point fixe.

Exercice 6.13 [Mines 07]. Déterminer la nature de la surface d'équation $xy+yz+xz=1$.

Exercice 6.14 [Mines 07]. **a)** Soit $M : t \in I \mapsto (x(t); y(t)) \in \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1 ne passant pas par O. Montrer qu'il existe $\rho : I \to \mathbb{R}_+$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 avec $x(t) = \rho(t)\, \cos(\theta(t))$ et $y(t) = \rho(t)\, \sin(\theta(t))$ pour tout t de I.
b) Déterminer puis tracer les arcs tels que $M' = V(M)$ où V est le champ de vecteurs défini par $V(x; y) = (y - x(x^2 + y^2); -x - y(x^2 + y^2)) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6.15 [CCP 07]. Etude et tracé de $r(\theta) = \tan\theta$.

Exercice 6.16 [TPE 07]. Exprimer analytiquement la rotation d'angle θ autour de l'axe Δ d'équations $x = z$ et $y = 0$ orienté par $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{k}$ où $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.17 [TPE 07]. Soit la courbe $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t); 2\sin(t) - \sin(2t)$. Faire l'étude de la courbe et la tracer.

Exercice 6.18 [Int 07]. Soit E un espace préhilbertien réel. On considère un convexe A inclus dans $B_o(O, d + \delta) \backslash B_o(O, d)$. Majorer au mieux son diamètre.

Exercice 6.19 [Centrale 07]. Donner l'équation de la parabole de foyer $F(1; 1)$ et de directrice D : $x - y + 1 = 0$.

Exercice 6.20 [CCP 07]. Etudier la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{1 - \cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$.

Exercice 6.21 [Mines 08]. Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminer l'ensemble des points du plan desquels on peut mener deux tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}$ faisant entre-elles un angle de $\pi/2$.

Exercice 6.22 [CCP 08]. Soit la courbe définie en coordonnées polaires par $r(\theta) = \sqrt{4\cos^2\theta - 1}$.
1) Tracer la courbe.
2) Comment calculer la longueur de cet arc?
3) Calculer l'aire située entre la courbe et le cercle centré en O et de rayon 1.

Exercice 6.23 [Mines 2009] Soit $\vec{w}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note r la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{w}$ dirigé par $\vec{w}$ et d'angle θ autour de cet axe.
a) Montrer que pour tout $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$

$$r(\vec{x}) = \cos\theta\, \vec{x} + (1 - \cos\theta)\langle \vec{w} | \vec{x} \rangle \vec{w} + \sin\theta(\vec{w} \wedge \vec{x})$$

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \vec{x}$ et $u_{n+1} = \vec{a} \wedge u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ avec $\vec{a}$ fixé dans $\mathbb{R}^3$. Calculer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n, $\vec{a}$ et $\vec{x}$. Que peut-on dire de $\sum \frac{u_n}{n!}$?

Exercice 6.24 [Mines 2013]. Soit $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Donner l'équation de la normale en un point de l'ellipse.

Exercice 6.25 [X 2013]. Soit Γ la courbe décrite par $M(\theta)$ de coordonnées polaires (ρ, θ) avec $\rho = \mathrm{e}^{\theta}$. Soit P un point du plan différent de l'origine 0.
1) Montrer qu'il existe une infinité de tangentes à Γ passant par P. Montrer que les points de contact sont sur un cercle qui passe par 0 et P.
2) Calculer la longueur $\ell(\theta, \theta'$ de l'arc de courbe $M(\theta')\, M(\theta)$. On note $\ell(\theta)$ la limite de $\ell(\theta', \theta)$ quand θ' tend vers $-\infty$. Soit $C(\theta)$ le cercle de centre $M(\theta)$ et de rayon $\ell(\theta)$. Montrer que $\theta < \theta'$ implique que

$C(\theta)$ est intérieur à $C(\theta')$.

Exercice 6.26 **[TPE 2014]** Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.27 Tracé l'arc paramétré $t \mapsto (t - 3\sin(t); 3\cos(t))$.

7. Révisions oraux : Algèbre divers

Exercice 7.1 [Centrale 06]. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit inversible. Calculer alors son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ (b) & \ddots & (b) \\ & & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7.2 [Mines 06]. Soit A_n la matrice carrée dont les coefficients sont donnés par :
$a_{i,i} = 2i \ \ \forall i \in \{1,..,n\}$, $a_{i,j} = \sqrt{ij}\ \forall (i,j)$ tq $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
a) Montrer que $\Delta_n = \det(A_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à partir du rang 4.
b) A l'aide de la série entière $\sum \frac{\Delta_n}{n!} t^n$ déterminer Δ_n en fonction de n.

Exercice 7.3 [Mines 06]. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
a) Montrer que l'on peut trouver des réels a_0,..., a_{n-1} vérifiant pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, la relation $P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X+k) = 0$. *On pourra utiliser l'endomorphisme* $P \mapsto P(X+1)$ *de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
b) Trouver une telle suite de nombres.
c) Rayon de convergence puis somme de la série $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

Exercice 7.4. Soit E l'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0. On note $u(f) : x \mapsto f(x) + f(x/2)$ quand f est dans E. Montrer que u est un endomorphisme de E, inversible, quelles sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres?

Exercice 7.5 [Mines 06]. Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si n et m sont deux entiers naturels non nuls distincts alors F_n et F_m sont premiers entre-eux.

Exercice 7.6 [TPE 06]. Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre (où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers).

Exercice 7.7 [CCP 06]. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$\begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x^2+y^2+z^2 & = 9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} & = 1 \end{cases}$$

Exercice 7.8. Déterminer puis dessiner l'ensemble $\{(a;b) \in \mathbb{R}^2 |\ \lim_{n\to\infty} A(a;b)^n = 0\}$ où on a posé

$$A(a;b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.9. On considère 1000 points dans le plan affine. Montrer qu'il existe une droite partageant l'espace en deux demi-espaces contenant chacun 500 des points considérés.

Exercice 7.10. Quel est le chiffre des unités de 2004^{2007}?

Exercice 7.11. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un seul couple d'entiers naturels $(a_n; b_n)$ vérifiant $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer qu'alors $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ puis que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 7.12 [Centrale 07]. Calculer avec le minimum de calculs le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & 3 & & n & 1 \\ \vdots & 2 & x & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & 1 \\ 1 & 2 & & & n & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 7.13 [Centrale 07]. Donner le rang de $\tilde{A}$ en fonction de celui de A où $\tilde{A}$ est la comatrice de A. Exprimer $\det(\tilde{A})$ à l'aide de $\det A$.

Exercice 7.14. Montrer qu'un nombre premier distinct de 2 et de 5, divise une infinité de nombres dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1.

Exercice 7.15 [TPE 08]. Existe-t'il un entier naturel p non nuls, pour lesquels il existe $a \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ tel que $ap + 1$ et p soient simultanément premiers?

Exercice 7.16 [TPE 08]. Soit E un ensemble fini de cardinal n et F un ensemble fini de cardinal p. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F. Montrer les égalités:

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p) \text{ puis } S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

Exercice 7.17 [X]. Montrer que $10^{10^n} = 4 \mod 7$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 7.18. 1) Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\dfrac{5^{n+1}+6^{n+1}}{5^n+6^n}$ est irréductible.
2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^4$ pour que la fraction $\dfrac{\lambda\,\alpha^{n+1} + \mu\,\beta^{n+1}}{\lambda\,\alpha^n + \mu\beta^n}$ soit irréductible pour tout n.

Exercice 7.19 [Petites Mines 2012] (exercice 1). Résoudre $3x^2 - 5x + 4 = 0$ dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$.

Exercice 7.20 [X 2013]. Soit $2n$ réels $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$. Trouver $\displaystyle\max_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{\sigma(k)}\right)$.

Exercice 7.21 [X 2013]. Soit α et β deux réels. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers relatifs n tels que $\sqrt{\alpha^2 + (\beta-n)^2}$ est un entier naturel. Montrer que α est nul et β est entier.

Exercice 7.22 [X 2013]. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel r_n tel que le disque ouvert de centre $A = (\sqrt{2}, 1/3)$ et de rayon r_n contienne exactement n points à coordonnées entières. Peut-on remplacer le point A par un point à coordonnées rationnelles ? Donner un équivalent du rayon r_n.

Exercice 7.23 [**Mines 2014**] Montrer par un raisonnement combinatoire l'égalité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.
Redémontrer cette relation par une autre méthode.
Indication orale : dériver n fois le polynôme $(X^2-1)^n$ *de deux manières différentes.*

Exercice 7.24 [Mines 2015]. Pour tout entier $n > 0$, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs. Montrer l'inégalité $S(n) \leqslant n + n \ln n$.

Exercice 7.25 [Centrale 2016]. Soit P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ de degré respectifs p et q. On pose $\phi(S,T) = PS + TQ$ pour tout $(S,T) \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
1) Donner la matrice Res de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $\mathbb{R}_{p+q-1}[X]$.
2) Montrer l'équivalence $P \wedge Q = 1 \Leftrightarrow \det(Res) \neq 0$.

Exercice 7.26 [CCP 2015]. On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9 et considère une matrice carrée de taille 3×3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.
1) Soit $A = (a_{i,j})_{(i;j)\in[\![1;n]\!]} \in M_n(\mathbb{Z})$, avec $n \geqslant 2$.
Montrer que la classe du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne de $a_{i,j}$ par 2.
2) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\mathrm{card}(\mathcal{M})$.
3) On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M}, \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\mathrm{card}(\Omega)$ et $\mathrm{card}(\Delta)$.
4) Détermination de $\mathrm{card}(\Delta)$.
  a) Quel est le nombre K_1 des matrices de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1?
  b) Combien de matrices de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul?
  c) Calculer $\mathrm{card}(\Delta)$ et en déduire $\mathrm{card}(\Omega)$
5) Déterminer la probabilité p.

10. Révisions oraux : Suites et séries numériques

Exercice 10.1 [Mines 05]. Quelle est la nature de la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$?

Exercice 10.2 [TPE 05]. Soit $u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite l et donner un équivalent de $l - u_n$.

Exercice 10.3 [Mines 05]. Soit $u_n = \ln n + (-1)^n n^\alpha$ avec α réel. Nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 10.4 [Centrale 01]. Quelle est la nature de la suite de terme général $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)\right)^n$? Donnez, le cas échéant, sa limite.

Exercice 10.5 [Mines 05]. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivable. Nature de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 10.6 [Mines 05]. Nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n}\right)$.

Exercice 10.7 [Centrale 01]. Nature de la série $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Exercice 10.8 [Mines 06]. Nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 10.9 [Centrale 06]. Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ avec $a > 0$.

Exercice 10.10 [X]. Soient f et g dans $C^0([0;1];\mathbb{R}_+^*)$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 g(x)\, f(x)^n\, dx$. Etudier la suite de terme général $v_n = u_{n+1}/u_n$.
On pourra tout d'abord étudier l'existence, la monotonie de v puis la majorer. Ensuite, grâce au théorème de Césaro, on montrera que $(v_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de v que l'on déterminera.

Exercice 10.11 [X]. Pour f dans $C^1([a;b];\mathbb{R})$, on pose pour tout n de N^*, $u_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.
Etudier la limite de la suite de terme général $v_n = n\left(u_n - \int_a^b f(t)\, dt\right)$.
Indications : introduire une primitive de f.

Exercice 10.12 [X]. Soit f dans $C^0([a;b];\mathbb{R}_+^*)$ et n dans $\mathbb{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0;\ldots;x_n)$ de $[a;b]$ telle que pour tout k de $\{1;\ldots;n\}$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\, dt.$$

b) Trouver la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. *On introduira la primitive F de f qui s'annule en a.*

Exercice 10.13. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)}$. Etudier la série $\displaystyle\sum \frac{u_n^\alpha}{n^\beta}$.
Indications : déterminer un équivalent de u_n (en deviner un, puis montrer qu'il convient).

Exercice 10.14. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$. Déterminer la limite, puis un équivalent et un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 10.15 [Mines 06]. Etudier la convergence et donner la somme de la série $\displaystyle\sum \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)^{-1}$.
On pourra utiliser les sommes partielles et faire une décomposition en éléments simples.

Exercice 10.16 [TPE 06]. Nature de la série $\sum \frac{u_n}{n}$ quand la série de terme général $u_n \geqslant 0$ est convergente?

Exercice 10.17 [Mines 07]. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique de $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\sqrt{2}+1}}}$.

Exercice 10.18 [CCP 07]. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs. Montrer que si u et v sont deux suites équivalentes alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
La série $\displaystyle\sum \frac{(i-1)\sin(1/n)}{\sqrt{n}\ -1}$ est-elle absolument convergente?

Exercice 10.19 [Mines 06]. Nature de la série $\displaystyle\sum \cos\left(\frac{\pi(2n^2+n+a\ln n)}{2(n+b)}\right)$ avec a un réel et b un réel non entier relatif.

Exercice 10.20 [Mines 06]. Soit A_n l'ensemble des entiers de $[10^n; 10^{n+1}[$ sans le chiffre 5 dans leur écriture décimale.
a) Déterminer le cardinal de A_n.
b) Montrer que la série $S_5 = \sum \left(\sum_{k\in A_n} \frac{1}{k}\right)$ est convergente et de somme inférieure à 72.
c) En définissant de même S_i pour $i = 0, 1...9$ (un chiffre). Que dire de $S_0 + S_1 + ...S_9$? Que peut-on en conclure?

Exercice 10.21 [Mines 07]. Nature de la série $\sum \sin\left(\pi(3+\sqrt{5})^n\right)$.

Exercice 10.22 [CCP 07]. On pose $a_n = \cos(n\theta)$.
1) Trouver $\sum a_n x^n$ pour $x \in]-1;1[$.
2) Montrer que la série $\sum a_n$ diverge.

Exercice 10.23 [Télécom 16]. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ où α est un réel strictement positif.

Exercice 10.24 [X 07]. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante positive qui diverge vers $+\infty$ et telle que $|u_{n+1}-u_n|$ tend vers 0. Montrer que $\{u_n - [u_n]\ |n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0;1]$.

Exercice 10.25 [TPE 06]. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ en fonction du réel α. Etudier la continuité de l'équivalent en $\alpha = 1$.

Exercice 10.26 [Centrale 06]. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique réel x_n dans $[n; n+1]$ solution de $\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt$. Déterminer un équivalent pour un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 10.27 [CCP 08]. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2}\right)^n dt$.

1) Justifier que I_n est bien définie.
2) Montrer que $((-1)^n I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone. Déterminer sa limite.
3) La série $\sum I_n$ est-elle convergente?

Exercice 10.28 [CCP 08]. **a)** Développer à l'ordre 2 en 0 la fonction $f : x \mapsto \ln(1+\sin x)$.
b) En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ suivant la valeur du paramètre réel $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 10.29 [Mines 08]. Trouver un équivalent (à l'infini) de la plus petite racine de l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-\sqrt{k}} = 0$$

Exercice 10.30 [Mines 08]. Trouver un équivalent (quand n tend vers l'infini) à la plus grande solution réelle de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k} = 0$.

Exercice 10.31 [CCP 08]. **1)** Démontrer le critère de D'Alembert pour les séries (dans le cas $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ avec $u_n > 0$ pour tout n.)
2) Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n}{(3n+1)!}$.

Exercice 10.32 [Centrale 08]. **1)** Convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k!)^{1/k!}$.

2) Soit $u_n(\alpha) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k^\alpha)^{1/k^\alpha}$. **(i)** Pour quelle valeur de α, la suite $u(\alpha)$ converge-t-elle? **(ii)** Déterminer un équivalent de $u_n(1)$ sous la forme $A\, a_n$ avec A une constante qu'on en cherchera pas à déterminer.

Exercice 10.33 [Mines 08]. Déterminer l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 10.34 [TPE 08]. La série $\sum (n^2+3n)^{-1}$ est-elle convergente? Calculer sa somme.

Exercice 10.35 [TPE 08]. Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente. Que dire de $\sum \frac{a_n}{n}$?

Exercice 10.36 [TPE 08]. Soit $\sum u_n$ une série convergente avec $u_n > 0$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Que dire de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$?

Exercice 10.37 [TPE 08]. On pose $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite L.
2) Déterminer un équivalent de $u_n - L$.
3) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, généralisation à $v_{n,p} = \dfrac{p!+(p+1)!+\cdots+(p+n-1)!}{(p+n-1)!}$.

Exercice 10.38 [Mines 08]. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$. Montrer $u_n = \ln n - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + o(1)$

Exercice 10.39 [Centrale 08]. On pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx$.

1) Démontrer l'existence des u_n.

2) Calculer u_0, u_1 et u_2.

3) Montrer que $(u_n)_n$ converge et trouver sa limite.

4) Calculer $(n+1)u_n - nu_{n-1}$.

5) Donner la nature de $\sum u_n\,x^n$ et un équivalent de $u_n R^n$ avec R le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Exercice 10.40 [Centrale 08]. Nature des séries $\sum \cos(n\pi\sqrt{1+n^2}\,)$ puis de $\sum x^n \cos(n\pi\sqrt{1+n^2}\,)$.

Exercice 10.41 [CCP 09 (8 points) **].** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$

b) Donner le domaine des x pour que $\sum u_n x^n$ converge.

Exercice 10.42 [Centrale 09] Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f(0) = 0$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite ℓ.

2) Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ à l'infini (sous des hypothèses à formuler).

3) Généralisation?

Exercice 10.43 [Centrale 09]. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)}{p}\right)$ existe et est strictement positive.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+p^2}\right)\right)$

Exercice 10.44 [TPE 09 (2ème exercice) **].** Soit $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $x_1 > 0$ et $x_{n+1} = f_n(x_n)$.

a) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $x_n \leqslant 1/n$.

c) Montrer que $(n\,x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

d) Déterminer un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10.45 [Mines 09 (2ème exercice)**].** Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 10.46 [Mines 12 (2ème exercice)**].** Convergence et somme de $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 10.47 [Petites Mines 12 (2ème exercice)**].** Soit $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + a\tan\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ pour tout $n \geqslant 2$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 10.48 [Mines 2010 (exo 1)**].** Trouver la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$ avec $u_n = n\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Exercice 10.49 [Mines 2013, exo 2**].** Soit $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x) - 1$ et $x_0 > 0$. On note x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n. Etudier la convergence de la série $\sum x_n$.

Exercice 10.50 [Petites Mines 2013, exo 1**].** Nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n^2+(n-p)^2}$

Exercice 10.51 [X 2013]. Déterminer le développement asymptotique à 2 termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 10.52 [X 2013].: Soit $a_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On pose $b_n = \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_n}\cdot$ Montrer que les séries de terme général a_n et b_n sont de même nature.

Exercice 10.53 [X 2013]. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

1) Combien P_n a-t-il de racines réelles?

2) Soit x_n la racine réelle de P_{2n+1}. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Exercice 10.54 [X 2013]. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = \frac{z^n}{1+z^{2n+1}}$

1) Etude de la convergence de la série de fonctions $\sum u_n(z)$

2) On note $U(z)$ la somme de cette série. Montrer que U est paire pour $|z| < 1$ et impaire pour $|z| > 1$.

Exercice 10.55 [Ensea 16]. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue décroissante de limite nulle en $+\infty$. Montrer que la série $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ converge .

Exercice 10.56 [Cent16]. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum na_n$ converge.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} ka_k$ et $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k,\ L = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} ka_{k+p}\right)$

1. Exprimer S puis L si elle existe pour $a_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout n.

2. exprimer A_n en fonction des S_k à l'aide d'une somme. En déduire que la série $\sum a_n$ converge.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} na_{n+p}$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n - p\sum_{n=p}^{\infty} na_n$.

11. Révisions oraux : Topologie

Exercice 11.1 [CCP 12]. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

a) Pour quelle valeur de a, l'application $N_a : P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k p_k|$ est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?
b) A quelle condition les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes?
c) Peut-on choisir la suite a de manière à ce que la dérivation soit continue?

Exercice 11.2 [Mines 05]. Vérifier que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 11.3 [Mines 05]. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ son graphe dans $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que si f est continue, son graphe G_f est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que si f est bornée et G_f fermé alors f est continue.
c) Ce résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée?

Exercice 11.4 [Centrale 07]. Soit $E = \mathcal{C}^2([0;\pi];\mathbb{R}) \cap \{f | f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour tout réel a, on pose $N_a(f) = \sup_{[0;\pi]} |f'' - af|$.
a) Quelle valeur de a, N_a est-elle une norme sur E?
b) La norme N_a et la norme infinie sont-elles équivalentes?

Exercice 11.5 [CCP 07]. Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0;1];\mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0) = 0\}$. Pour tout f de E, on pose $\|f\|_E = \sup_{[0;1]} |f'' + 2f' + f|$.
a) Vérifier que $\|.\|_E$ est une norme sur E.
b) Soit $g = f'' + 2f' + f$. Déterminer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale en g.
c) Montrer qu'il existe a tel que $\|f\|_\infty \leqslant a\|f\|_E$ pour tout f de E.
c) Les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes?

Exercice 11.6 [Mines 07]. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note pour tout $0 < \rho < R$,

$$N_{\infty,\rho}(f) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|, \qquad N_{1,\rho}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_n|\rho^n, \qquad \text{et } N_{2,\rho}(f) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}}$$

a) Montrer que l'on a bien des normes.
b) Démontrer l'inégalité $N_{2,\rho} \leqslant N_{\infty,\rho} \leqslant N_{1,\rho}$.

Exercice 11.7 [Centrale 07]. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0;1];\mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0) = 0\}$.
a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Montrer que N_∞ est une norme sur E, où $N_\infty(f) = \sup_{[0;1]} |f|$.
c) On pose $N_1(f) = \sup_{[0;1]} |f| + \sup_{[0;1]} |f''|$, et $N(f) = \sup_{[0;1]} |f + f''|$. Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur E.
d) Montrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
e) Montrer qu'en revanche N et N_1 sont équivalentes sur E.

Exercice 11.8 [CCP 07]. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme par $\|A\| = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$

1) Montrer $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrice A et B, puis $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$ pour tout A et p.

2) Montrer que $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Cette série est-elle convergente dans $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 11.9 [Centrale 08]. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout $x \neq y$.
1) Montrer que f admet un unique point fixe a dans K. *On pourra poser* $\lambda : x \mapsto \|x - f(x)\| \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que le point fixe a est la limite (simple) des itérés de f. *On pourra montrer que* $\|f^n(x) - a\|$ *est le terme général d'une suite décroissante.*
3) Étudier les exemples suivants: **a)** $\sin : [0; \pi] \to [0; \pi]$.
b) Soit $g : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$. Que dire de la suite de ses itérés? Conclure.

Exercice 11.10 [Centrale 08]. Soit E un espace vectoriel normé.
1) Montrer qu'un hyperplan de E est soit dense soit fermé.
2) Donner deux exemples d'hyperplans fermés, et deux exemples d'hyperplans denses.
3) Quels sont les sous-espaces vectoriels ouverts de E?
4) Vérifier qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 11.11 [Mines 08]. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0; 1]$. Pour toutes fonctions f et g continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\varphi(f; g) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(s_n)\, g(s_n)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ définisse un produit scalaire sur $C^0([0; 1]; \mathbb{R})$.

Exercice 11.12 [Centrale 2009] Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $N(x; y) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$.
Montrer que N est bien définie, que c'est une norme et définir la sphère unité.

Exercice 11.13 [Mines 2009] Soit $[E, \|\cdot\|]$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux compacts (respectivement connexes) non vides de E. On note $C = \cup_{(a;b) \in A \times B} [a; b]$. Montrer que C est compact, respectivement connexe.

Exercice 11.14 [CCP 2011 (12 points)**].** Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.
1) Montrer que $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f" + 2f' + f|$ définit une norme sur E.
2) Soit $g = f" + 2f' + f$ avec f dans E. A l'aide méthode de la variation des constantes, montrer

$$\forall x \in [0; 1;],\ f(x)\mathrm{e}^x = \int_0^x (x - t) g(t) \mathrm{e}^t \, dt$$

3) Montrer qu'il existe $a > 0$ avec $\|f\|_\infty \leqslant a\|f\|$ pour tout f de E.
4) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont-elles équivalentes? *On pourra introduire* $f_n(x) = \sin(nx^2)$.

Exercice 11.15 [X 2013]. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme linéaire sur E. On suppose que la borne supérieure de $\{|\varphi(x)|;\ \|x\| = 1\}$ existe et vaut 1 mais n'est pas atteinte.
1) Que dire de E?
2) Soit $F = \ker \varphi$. Montrer que $\sup\left(\{\mathrm{d}(x, F)/\ \|x\| = 1\}\right)$ n'est pas atteint.
3) Donner un exemple d'une telle situation.

Exercice 11.16 [X 2014]. Soit n un entier naturel non nul et $C_n = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \pi_M = \chi_M\}$.
1) Montrer que C_n est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.
2) L'application qui à une matrice associe son polynôme minimal est-elle continue?

3) Vérifier que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 11.17 [Centrale 15]. Une valeur absolue N sur un corps $\mathbb{K}$ est une fonction $N : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés

(i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}}$

(ii) $\forall (x; y) \in \mathbb{K}^2$, $N(x \cdot y) = N(x)\, N(y)$

(iii) $\forall (x; y) \in \mathbb{K}^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

Cette valeur absolue est :

- ultra-métrique quand elle vérifie : $\forall (x; y) \in \mathbb{K}^2,\ N(x + y) \leqslant \max(N(x), N(y))$
- non-archimédienne quand elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z},\ N(n.1_{\mathbb{K}}) \leqslant 1$

1) Soit N une valeur absolue. Exprimer $N(1_{\mathbb{K}})$ puis $N(-1_{\mathbb{K}})$ et enfin $N\left(\frac{x}{y}\right)$ pour tout $(x; y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$

2) Prouver que le caractère ultra-métrique d'une valeur absolue implique son caractère non-archimédien.

3) Montrer la réciproque.

Exercice 11.18. Soit ρ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\quad \rho^*(A) = \sup\left(\{\mathrm{tr}(AB) | B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et } \rho(B) = 1\}\right)$$

a) Vérifier que ρ^* définit une norme sur $M_n(R)$.

b) Montrer que $f : X \in B_\rho \mapsto \det(X)$ admet un maximum, où B_ρ est la sphère unité pour la norme ρ.

c) Soit A_0 un point où f atteint son maximum. Montrer que A_0 est inversible.

12. Révisions oraux : Suites et séries de fonctions

Exercice 12.1 [Mines 01]. Soit $I_n = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. La suite de terme général I_n est-elle convergente? si oui, quelle est sa limite? Quelle est la nature de $\sum I_n$?

Exercice 12.2 [Mines 01]. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{x^2+t^2} dt$. Déterminer l'ensemble de définition, de continuité de f, sa parité éventuelle. La fonction f est-elle de classe C^1? Donner la limite de f en ∞. Énoncer avec précision les théorèmes utilisés.

Exercice 12.3 [Mines 05]. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, croissante, qui diverge vers $+\infty$. Montrer la relation

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-a_n x} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 12.4. Soit f_0 continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On définit une suite de fonctions par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a;b],\quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$$

Etudier et évaluer la fonction $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_n$. *Indication : on pourra raisonner par analyse-synthèse.*

Exercice 12.5 [X] On note $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$

1. Étudier les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2. Déterminer un équivalent en 1^- de f.

Exercice 12.6 [Mines 06]. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier la suite de terme général $\int_0^1 f(t^n) dt$.

Exercice 12.7 [CCP 06]. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. On note alors $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\, dt$ son intégrale. Soit $K = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$. Justifier rapidement l'existence de K puis montrer que nI_n tend vers K quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12.8 [Centrale 07]. Soit z un complexe de module strictement inférieur à 1.

a) Intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - z}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en fonction du réel α.

b) Vérifier que pour tout $\alpha > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{z\, t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - z}\, dt = \Gamma(\alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}.$

Exercice 12.9 [CCP 07]. On pose $u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout réel $x > -1$.

1) Montrer la convergence simple et normale de la série $\sum u_n$.

2) Soit S la somme de la série. Montrer que S est continue puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

3) Montrer que S est croissante, puis déterminer une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$. En déduire $S(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et un équivalent de S en -1.

Exercice 12.10 [CCP 07]. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (x^2+1) \times \dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}.$

1) Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.

b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 12.11 [Mines 07]. On pose $g_0(x) = 1$ et $g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(t-t^2)\,dt$ pour x dans $[0;1]$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement sur $[0;1]$.

Exercice 12.12 [TPE 07]. On pose $u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1) Quel est le domaine de définition de S? Que valent $S(0)$ et $S(1)$?
2) On pose $T = \exp \circ S$. Montrer que $T(x+1) = (x+1)\,T(x)$.

Exercice 12.13 [CCP 08]. Soit $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$.
1) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement? quelle est sa limite?
2) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$ et $]-\infty;-a]$ pour tout $a>0$?
3) La suite $(f_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}+^*$?

Exercice 12.14 [CCP 08]. Soit $f_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$.
1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2) Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a;a]$ pour tout $a>0$.
3) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. *On pourra utiliser la suite* $(n+1)\pi$.

Exercice 12.15 [Mines 08]. Soit $f_n : x \mapsto nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{\pi}}$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? normalement sur $\mathbb{R}_+$? uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 12.16 [CCP 08]. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}$

Quel est le domaine de définition de f? Vérifier que la série converge uniformément mais pas normalement sur ce domaine. *On pourra penser au critère spécial à certaines séries alternées, critère dont on donnera la trame de la démonstration.*

Exercice 12.17 [ENSEA 08]. Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\,f(t)}{1+n^2t^2}\,dt$.

Exercice 12.18 [TPE 08]. On pose $f_0 = 0$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$ pour tout x de $[0;1]$ et n de $\mathbb{N}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-telle simplement sur $[0;1]$? vers quelle fonction?

Exercice 12.19 [Centrale 2013]. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel M avec

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[a;b],\quad |f_n'(x)| \leqslant M$$

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur le segment $[a;b]$ alors la convergence est uniforme.

Exercice 12.20 [X 15]. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite strictement croissante d'entiers telle que $(n/p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^{p_n}$ tend vers 0 quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
On pourra considérer la suite $(nk)_{n\in\mathbb{N}}$ avec k dans $\mathbb{N}^*$ bien, qu'elle ne vérifie pas les hypothèses.

Exercice 12.21 [CCP 16]. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1) Montrer que f est continue.

2) Vérifier que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

3 Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-xt}\right) \mathrm{d}t$ existe pour tout $x>0$.

Prouver pour tout $x>0$, l'inégalité $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-xt}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \ln 2+\int_0^{\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-xt}\right) \mathrm{d}t$

4) En déduire $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^{+}} \dfrac{a}{x}$ avec $a>0$. Déterminer a en sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 12.22 [Télécom 16]. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de $\sum f_n$ avec

$$f_n(x)=n x^2 \mathrm{e}^{-x \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{+}$$

Exercice 12.23 [Mines 16]. On note H_n les sommes partielles de la série harmonique.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x) \mathrm{d}x=-\frac{H_{n+1}}{n+1}$.

Exercice 12.24 [Mines 16]. Soit $u_n: x \mapsto \arctan(n+x)-\arctan(n)$.

1) Étudier la convergence simple et normale de $\sum u_n$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est bien définie, continue et C^1 sur $\mathbb{R}$.

13. Révisions oraux : Séries entières

Exercice 13.1 [Mines 05]. Développer $t \mapsto \arctan(t+1)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 13.2 [Mines 05]. Développer en série entière $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1-x\sin(t)}dt$.

Exercice 13.3 [Mines 01]. Déterminer $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^3+1)x^n}{(2n)!}$.

Exercice 13.4 [Mines 01] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée non nulle, et les séries entières $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$

a) Donner les domaines de définition de f et g.

b) Vérifier que pour tout $x > 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} g(t)\,dt$.

Exercice 13.5 [X]. a) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

b) Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\right)$.

Exercice 13.6 [X]. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(5k)!}$.

Exercice 13.7 [X]. Déterminer le domaine de définition et calculer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right) \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1-x)^n\right)$$

Indications : pour les domaines de définition, on pourra d'abord chercher une condition nécessaire, puis vérifier qu'elle est suffisante. On pourra aussi introduire la série entière $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

Exercice 13.8 [Un théorème de Bernstein]. Soit $a < b$ deux réels et $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On dit que f est absolument monotone sur $]a;b[$ si f et toutes ses dérivées sont positives sur $]a;b[$.

1. Donner des exemples de fonctions absolument monotones.

2. Montrer qu'une fonction absolument monotone est analytique (i.e. développable en série entière)

Exercice 13.9 [X]. Soit $a < b$ deux réels et $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ développable en série entière. On suppose que f admet une infinité de zéros dans un segment de $]a;b[$. Montrer que f est identiquement nulle.
Indications : vérifier qu'il existe un point où f s'annule ainsi que toutes ses dérivées. En considérant l'ensemble de tels points, montrer alors la nullité de f.

Exercice 13.10 [Mines 06]. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \exp(\sqrt{2n+1})x^{3n+1}$ en précisant les théorèmes utilisés.

Exercice 13.11 [CCP 06]. Décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \frac{1}{2+x-x^2}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro (avec quel rayon de convergence). Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Exercice 13.12 [CCP 06]. Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n\,a_n x^n$ ont même rayon de convergence R. Montrer alors que si $R \neq 0$ alors $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R;R[$.

Exercice 13.13 [CCP 06]. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$
Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont f est solution.
Montrer alors que f est développable en série entière, en précisant le développement et le rayon de convergence de ce dernier.

Exercice 13.14 [CCP 06]. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2+t^4}\,dt$.

Exercice 13.15. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $g = \exp \circ f$.

1) Donner les domaines de définition, continuité et dérivabilité de g.
2) Montrer que g est développable en série entière sur l'intérieur de son domaine de définition.

Exercice 13.16 [TPE 07]. Soit la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\,u_{n-k}$ pour tout entier naturel n. Calculer u_n pour tout n.

Exercice 13.17 [Centrale 07]. On pose $L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\cdot$ Déterminer l'ensemble de définition de L, son domaine de continuité et de dérivabilité. Que valent L', $L(0)$ et $L(1)$?

Exercice 13.18 [Centrale 06]. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif, et que la série $\sum a_n R^n$ diverge.

1) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers R.
2) Montrer que arcsin est développable en série entière et donner son développement sur $[-1;1]$.
3) Même question avec $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\,\right)$.

Exercice 13.19 [Mines 08]. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \int_0^{\infty} t^{2n} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$. En déduire que pour tout z de $\mathbb{C}$, $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(zt)\,dt$ existe et déterminer sa valeur.

Exercice 13.20 [ENSEA 08]. En utilisant un développement en série entière, montrer que pour tout x de $[0;1]$, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant (\mathrm{e}-2)\,x^2$. En déduire la limite de la suite de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$.

Exercice 13.21 [CCP 09 (8 points)**].** Développer en série entière et donner le rayon de convergence de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 13.22 [CCP 09]. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt$

a) Montrer que f est développable en série entière sur un disque à préciser.
b) Vérifier que f satisfait une équation différentielle simple.
c) En déduire le développement en série entière de f.

Exercice 13.23 [Mines 07-11]. On considère $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2^k}$.

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière?
b) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$.
c) Que dire de la limite de f en 1 si elle existe?
d) S'il existe $x_0\in]-1;1[$ tel que $f(x_0)>1/2$, montrer que f n'a pas de limite en 1.
e) On a $f(0,995)>0,5008$. Qu'en conclure? Comment a-t-on pu vérifier cette inégalité?

Exercice 13.24 [Centrale 13]. On pose $a_n=\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$ pour tout $n\geqslant 1$.

1) Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n et montrer pour tout $n\geqslant 1$, la relation $a_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

2) Soit $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}x^{2n}$. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f.

3) Déterminer $S:x\in]-1;1[\mapsto 1+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^{2n}$ à l'aide d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

4) Exprimer une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$ à l'aide d'un seul logarithme (logiciel à disposition).

5) Montrer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=2\ln(2)$.

6) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n}\cdot$

Exercice 13.25 [CCP 16]. Déterminer le rayon de convergence des séries entières
1) $\sum n\,x^n$, **2)** $\sum 2nx^{2n}$, **3)** $\sum n^{(-1)^n}x^n$

Exercice 13.26 [Mines 16]. On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière.
2) Montrer que f est solution de l'équation $x(4-x)y'-(2+x)y=x$.
3) Résoudre cette équation différentielle (sur un intervalle bien choisi).
4) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$

Exercice 13.27 [TPE 16]. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n+1}$ à l'aide de celui de $\sum a_n x^n$.

Exercice 13.28 [Cent16]. Soit $S:x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}\cdot$

1) Trouver I.
2) Étudier les variations de S sur $I\cap\mathbb{R}_+$ et les limites (existence et valeur) de S aux bornes de $I\cap\mathbb{R}_+$.
3) Exprimer $(1-x)S'(x)$ sous la forme d'une somme d'une série.
4) Montrer que S est strictement croissante sur I tout entier.

14. Révisions oraux : séries de Fourier

Exercice 14.1 [X]. Développer en série de Fourier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$$

Indication : Exprimer f comme série entière en e^{ix} et en déduire le développement en série de Fourier.

Exercice 14.2 [Centrale 07]. Soit $K_r(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx)$.

1) Existence et valeur de $K_r(x)$.

2) Pour tout f de E, ensemble des fonctions continues, 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit

$$T_r(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_r(x-t) f(t)\, dt$$

a) Montrer que T_r est un endomorphisme de E.

b) Développer $T_r(f)$ en série de Fourier; exprimer ses coefficients trigonométriques en fonction de ceux de f.

Exercice 14.3 [X]. On pose $f(x,\theta) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\theta\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Pour θ dans $]0;\pi/2[$, développer en série entière $x \mapsto f(x,\theta)$.

c) Soit x dans $]-1;1[$. Développer $\theta \mapsto f(x,\theta)$ en série de Fourier.

Indications : pour b), on pourra commencer par développer en série entière $\frac{\partial f}{\partial x}$. Pour c), on utilisera au maximum la question b).

Exercice 14.4 [CCP 07]. Soit f impaire, 2π périodique, avec $f(x) = x(\pi - x)$ pour x dans $[0;\pi]$.

1) Donner les valeurs de f, f', f'' et $f^{(3)}$ sur $[0;\pi]$.

2) Développer f, f', f'' et $f^{(3)}$ en série de Fourier.

Exercice 14.5 [ENSIIE 07]. Soit $K(x;y) \in [0;\pi]^2 \to \mathbb{R}$ avec $K(x;y) = x(\pi - y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x;y) = y(\pi - x)$ sinon. Montrer que l'on a

$$K(x;y) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\ \sin(ny)}{n^2}$$

Exercice 14.6 [Mines 08]. Soit $r \in]0;1[$ et E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe une fonction P_r vérifiant :

$$\forall f \in E,\ \ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, c_n(f)\, \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, P_r(\theta - t)\, dt.$$

2) Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt$.

3) Soit f dans E, montrer qu'alors $f_r : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, c_n(f)\, \mathrm{e}^{in\theta}$ admet une limite quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

Exercice 14.7 [Centrale 09]. Soit f paire, 2π-périodique avec $f(t) = \sqrt{t}$ pour $t \in [0; \pi]$.
1) Montrer que les coefficients de Fourier de f vérifiant $a_n(f) = O(n^{-3/2})$.
2) La fonction f est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?
3) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que sa limite vaut f.
4) Que nous apprend ce résultat?

Exercice 14.8 [TPE 09]. Soit $a \in]-1; 1[$. Déterminer la série de Fourier de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a \sin x}{1 - a \cos x}\right)$$

Exercice 14.9 [Petites Mines 2011 (exercice 2/2)**].** Soit a un réel distinct de 1 et -1. Déterminer la série de Fourier de

$$f(x) = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

Exercice 14.10 [ENSEA 2011]. Soit λ un réel. Déterminer toutes les fonctions 2π-périodiques, dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'(x) = f(x + \lambda)$

Exercice 14.11 [Mines 2012]. Soit $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, et $f(x) = \cos(tx)$ pour tout $x \in [-\pi; , \pi]$.
1) Développer la périodicisée de f en série de Fourier.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{\pi}{\tan(t\pi)} = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - p^2}$
3) En déduire $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(t\pi)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2}$.

Exercice 14.12 [Mines 2012]. Soit f une fonction de $C^1([0; \pi]; \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} (f'(t))^2 \, dt = 1$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de réels vérifiant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \text{ et } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nt) \ \forall t \in [0; \pi]$$

15. Révisions oraux : intégration

Exercice 15.1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$. *On fera intervenir* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u$.

Exercice 15.2. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \exp\left(-\int_0^x \frac{dt}{3+\sqrt{t^2+4t}}\right)$.

Exercice 15.3. Soit E l'ensemble des fonctions de $C^1([0;1];\mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 et 1.
a) Montrer que pour toute fonction f de E, les intégrales $I_1 = \int_0^1 f(t)\,f'(t)\cot\text{an}(\pi t)\,dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{(\tan(\pi t))^2}\,(1+(\tan(\pi t))^2)dt$ existent. Les comparer.
b) En déduire que toute fonction f de E vérifie l'**inégalité de Wirtinger** : $\displaystyle\int_0^1 (f')^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2$.
c) Quels sont les cas d'égalité?

Exercice 15.4 [X]. Soit f dans $C^0([0;1];\mathbb{R}_+^*)$. Pour tout $\alpha>0$, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\left(\int_0^1 (f(t))^\alpha\,dt\right)^{1/\alpha}$
Etudier les limites de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0 par valeurs supérieures et quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 15.5 [X]. Soit f dans $C^0([0;1],\mathbb{R})$ avec $f(0)\neq 0$.
a) Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx}\,dx$.
b) Majorer la différence entre g et cet équivalent quand f est de classe C^1.

Exercice 15.6 [X]. Chercher un équivalent en $+\infty$ de $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^t}$.

Exercice 15.7 [X]. Soit ε dans $]0;1[$.
1. On pose $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \varepsilon\cos^2 x}}\,dx$. Calculer I et en donner un équivalent en 0.
2. On pose $J(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + \varepsilon\cos^2 x}}\,dx$. Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique de J quand ε tend vers 0.

Exercice 15.8 [Mines 06]. Calculer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{\cos(x)+\cos(3x)}$.

Exercice 15.9 [Mines 06]. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

- **a)** Montrer que la série $\sum a_n$ converge avec $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,dt$.
- **b)** Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,dt$ est bien définie.
- **c)** Démontrer l'équivalence entre l'intégrabilité de $t\mapsto f(t)\sin(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ et celle de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.10 [Mines 07]. **a)** Calculer pour tout z de module non égal à 1, la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z+\mathrm{e}^{it}}$.
b) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{Q(\mathrm{e}^{it})}$ où $Q\in\mathbb{C}[X]$ est à racines simples qui n'appartiennent pas au cercle unité.

Exercice 15.11 [Mines 07]. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$ est-elle convergente?

Exercice 15.12 [Mines 07]. Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel s_0 pour lequel l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}\,dt$ est convergente. Montrer qu'alors $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$ est convergente pour tout $s > s_0$.

Exercice 15.13 [TPE 07]. Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt\cdot$

a) Vérifier que G est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $G(x) - G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$

Quelle est la limite de G en $+\infty$?

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$

Exercice 15.14 [Mines 07]. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt$ pour tout x de $]-1;1[$.

Exercice 15.15 [Mines 07]. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}\cdot$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}\cdot$

Exercice 15.16 [Centrale 07]. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t|x|}\frac{\sin t}{t}\,dt.$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Pour tout $x > 0$, montrer $f(x) - f(0) = x\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{+\infty}^{u} \mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)du.$

4) La fonction f est-elle continue en 0?

5) Calculer $f'(0)$.

Exercice 15.17 [Mines 08]. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx = -i\int_0^{\pi} P^2(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta.$

En déduire $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \frac{a_k\,a_l}{k+l+1} \leqslant \pi\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$

Exercice 15.18 [TPE 08]. Déterminer un équivalent en 0 de $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin t}\,dt.$

Exercice 15.19 [Mines 08]. Soit $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\cdot$ Déterminer le domaine de définition D de F; F y-est-elle continue? dérivable? Déterminer la limite de F en 0. Montrer que F est en fait C^1 sur son domaine définition prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Exercice 15.20 [Mines 08]. Déterminer $f : x \in]-1;1[\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1+x\sin t)\,dt$, en calculant f'.

Exercice 15.21 [TPE 08]. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{x-\cos t}\cdot$ Montrer que f est impaire et calculer f.

Exercice 15.22 [Centrale 08]. **1)** Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n\,du$.

a) Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}, et calculer I_0.

b) Exprimer I_nI_{n+1} à l'aide de I_nI_{n-1}.
c) Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2) Montrer que la série $\sum \int_0^{\pi} (n\pi + u)|\cos(u)|^{(n\pi+u)^5}\, du$ converge.

3) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x|\cos(x)|^{x^5}\, dx$?

4) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^4}\, dx$?

Exercice 15.23 [Centrale 08]. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 < a < b$.

1) Calculer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

2) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\, dt$.

Exercice 15.24 [Centrale 2011]. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$

1) Montrer que v_n est bien défini et calculer $u_n + v_n$.

2) Vérifier la relation $\mathrm{e}^n - u_n = \displaystyle\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{e}^{nu}\, du$

3) Sachant que $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n \mathrm{e}^{nu}\, du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ pour n tendant vers ∞.

4) En déduire un équivalent de v_n et de u_n.

Exercice 15.25 [Mines 2012]. On pose $F(x) = \int_0^x (|\sin(t)| - a)\, dt$.

1) Trouver a tel que F soit π-périodique.

2) Montrer qu'il existe un réel b tel que $\displaystyle\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt = a\ln x + b + o_\infty(1)$

Exercice 15.26 [Centrale 2012].

1) Montrer l'existence de $a = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{\sin(t)}\, dt$.

2) On pose pour tout $\lambda > 0$:

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \lambda \mathrm{e}^t \sin(t)}\, dt \quad \text{et} \quad K(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \lambda \sin(t)}\, dt$$

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs divergeant vers $+\infty$. Trouver un équivalent de $I(\lambda_n) - K(\lambda_n)$ à l'aide de λ_n et de a.

3) On admet $K(\lambda) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} \ln\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-1} - \lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda + 1} \times \frac{\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda}{\sqrt{\lambda^2-1} - \lambda}\right)$ pour $\lambda > 1$. Montrer que $K(\lambda)$ est équivalent à $\ln(\lambda)/\lambda$ quand λ tend vers l'infini.

Exercice 15.27 [Centrale 2013]. Soit f continue par morceaux sur $[a;b]$ à valeurs réelles, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour n assez grand, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right) \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$

2) Si f est croissante sur $[a;b]$, montrer pour n assez grand, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\pi}{n} \max(|f(a)|, |f(b)|)$.

Exercice 15.28 [X 2013]. Soit f dans $C^1([a;b];\mathbb{R})$. Existence (et valeur dans le cas d'existence) de la limite quand n tend ver s$+\infty$ de la suite de terme général $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\,\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15.29 [X 2013]. Pour $x > 1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{it^x}\,\mathrm{d}t$

1) Étudier l'existence de l'intégrale impropre.
2) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 15.30 [Mines 2014].(exercice 2) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2\,(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 15.31 [ENS dossier 2015]. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que g et g'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $t > 0$, montrer que $g'(t)\,g(t) = g'(0)\,g(0) + \displaystyle\int_0^t (g'(s))^2\mathrm{d}s + \int_0^t g''(s)\,g(s)\mathrm{d}s$
En déduire l'existence de $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} (g(t)\,g'(t))$.

2) Montrer que $\ell = 0$.*On pourra raisonner par l'absurde et étudier la limite en* $+\infty$ *de* $\displaystyle\int_0^t g'(s)\,g(s)\mathrm{d}s$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g'(s))^2\mathrm{d}s = -g'(0)\,g(0) - \int_0^{+\infty} g's)\,g'' - s)\mathrm{d}s$.

En déduire une formule similaire pour $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (g'(s))^2\mathrm{d}s$.

4) Montrer que g' est de carrée intégrable sur $\mathbb{R}$ puis la relation

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (g'(s))^2\mathrm{d}s\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} (g(s))^2\mathrm{d}s\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (g''(s))^2\mathrm{d}s\right)$$

Exercice 15.32 [CCP 15(12 points)**].** Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+t)^n}$ pour tout entier naturel n.

1) Existence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et limite en $+\infty$.
2) Calculer f_n' et en déduire une relation simple entre J_n et J_{n+1} pour tout n. En déduire un équivalent de J_n en $+\infty$.
3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière d'un variable complexe $\sum J_n\,z^n$. Montrer que la somme de cette série peut se mettre sous la forme d'une intégrale.

Exercice 15.33 [Mines 15]. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)\,(\ln(1-t^x))\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie et que f est la somme d'une série de fractions rationnelles.
2) Trouver la limite de f en 0 et un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 15.34 [X 15]. Trouver un équivalent de $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-\lambda(x^2+x^4)}\,\mathrm{d}t$ quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 15.35 [CCP16 12pts]. Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et donner l'expression de F' sous forme intégrale.
4. On admet que l'on montrerait de même que F' est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de F'' sous forme intégrale.

5. Vérifier que $F''(x)+F(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$.

Exercice 15.36 [Magistère ENS 16]. Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$

2) Trouver a et b tels que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{b+n^2}$

3) Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 15.37 [Centrale 16].

1) On pose : $\forall x\in\left]-\mathrm{e}^{-\pi/2};+\infty\right[,\ \ f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+x\mathrm{e}^t\sin(t)}\mathrm{d}t$

Montrer que f est définie, de classe C^∞, décroissante et convexe.

2) On pose : $\forall x>0,\ g(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$

Montrer que $f(x)-g(x)=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 15.38 [Mines 16].

Soient f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\displaystyle\int_0^1 g(x)(f(x))^n\mathrm{d}x$

Etudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. *On pourra penser à utiliser un produit scalaire.*

16. Révisions oraux : Équations différentielles

Exercice 16.1 [Mines 05]. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $t^2x' + (1-2t)x - t^2 = 0$.

Exercice 16.2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

Exercice 16.3. Soit le système différentiel

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

a) Montrer que le symétrique par rapport à l'origine d'une trajectoire de (S) est encore une trajectoire de (S).
b) Soit P une solution non constante de (S). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda;\mu)$ pour que $t \mapsto \lambda\, P(\mu t)$ soit solution de (S).

Exercice 16.4 [CCP 06]. Résoudre $y'' + y = \cos(x)$ par la méthode de variation des constantes.

Exercice 16.5 [TPE 2]. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x - y + \mathrm{e}^t \\ y' = -x - 3y + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Exercice 16.6 [Mines 06]. Résoudre $x(1-x)y' + y = x$ puis regarder s'il existe une solution sur $]-\infty;1[$.

Exercice 16.7 [CCP 07]. Résoudre $y' - \frac{x}{x^2-1}\,y = 2x$.

Exercice 16.8 [Mines 08]. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([-1;1];\mathbb{R}) \mid ; f(0) = 0\}$. On note $T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt$.
1) Montrer que T est un endomorphisme de E.
2) Quels sont les éléments propres de T?
3) L'endomorphisme T est-il continu pour la norme $N(f) = \sup\{|f'(t)|, t \in [-1;1]\}$?

Exercice 16.9 [Centrale 08]. Résoudre $(1+x^2)y'' + 2xy' + \dfrac{1}{1+x^2}\,y = 1$. *On pourra poser* $x = \tan t$.

Exercice 16.10 [TPE 2009] Soit $y' = \frac{1}{1+xy}$ et $y(0) = 0$. Montrer l'existence et l'unicité d'une telle fonction. Montrer qu'elle est impaire, croissante et définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 16.11 [Centrale 2011]. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle $y'' + y = f$.
1) Soit h une solution de (E). Exprimer h en fonction de f et d'une intégrale.
2) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$. Exprimer cette solution.
Soit $f_0 : x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$
3) On suppose f paire ou impaire, discuter de la parité de f_0.
4) On suppose f 2π-périodique, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_0 le soit.

Exercice 16.12 [CCP 2011 (12 points)**].** On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$$

1) Trouver les solutions de (E) développables en série entière.
2) Déterminer les solutions de (E) respectivement sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.
3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16.13 [Petites Mines 2012]. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

Exercice 16.14 [Mines 2015 - exercice 1]. On souhaite résoudre (E) : $xy'' + y' + xy = 0$ dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les solutions développable en série entière en 0.
3) Si f_0 est solution de (E) avec $f_0(0) = 1$ et f est une solution de (E), montrer que (f, f_0) est une famille libre de l'espace vectoriel des solutions de (E) si et seulement si f est non bornée.

Exercice 16.15 [ENS 2016]. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(r) = O_{+\infty}(r^{-b-2})$ avec $b > 0$. Soit $u : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ bornée, vérifiant :$\forall r \in [1,+\infty[,\ -u''(r) - \frac{u'(r)}{r} + \frac{u(r)}{r^2} = f(r)$. Montrer que u tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 16.16 [Télécom 16]. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $E_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) |\ \forall x, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f'(x)-f'a)}{2} \right\}$.
1) Si f est dans E_a, montrer que $g = f - f(a)$ vérifie une équation différentielle.
2) Résoudre cette équation et en déduire l'ensemble E_a.

17. Révisions oraux : analyse divers

Exercice 17.1. Soit f continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et de moyenne nulle. On note α respectivement β son minimum, respectivement maximum, sur $[0;1]$. Montrer $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leqslant -\alpha\beta$.

Exercice 17.2 [X]. Soit f une fonction continue, concave sur $[0;1]$ avec $f(0)=1$. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{2}{3}\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big)^2$$

Exercice 17.3 [X]. Soit f une fonction réelle continue sur $[0;1]$. On pose $F(0)=f(0)$ et pour tout t de $]0;1]$, $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que

$$\int_0^1 F^2(x)\,dx \leqslant 4\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Indications : Exprimer F' en fonction de F et f, en déduire une majoration de $\int_0^1 F^2$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir f et F et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 17.4 [X]. Déterminer le minimum de $\|f''\|_2^2$ dans l'ensemble des fonctions f de $C^2([0;1];\mathbb{R})$ vérifiant $F(0)=f(1)=0$ et $f'(0)=a$ avec a un réel donné.
Indications: estimer $f(1)$ à l'aide d'une formule de Taylor et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour comparer a et $\|f''\|_2$.

Exercice 17.5 [X]. Soient $a<b$ deux réels, E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[a;b]$, et F l'ensemble des fonctions de $C^2([a;b];\mathbb{R})$ qui s'annulent ainsi que leurs dérivées en a et b.
a) Soit f dans E. Montrer $\exists g\in F,\ g''=f \iff \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b t\,f(t)dt = 0$.
b) Soit h dans E avec $\int_a^b h(t)f''(t)\,dt = 0$ pour tout g de F. Montrer que h est affine.
Indication : interpréter le résultat obtenu à la question 1 à l'aide d'un produit scalaire, et démontrer le résultat de la question 2 en utilisant cette interprétation.

Exercice 17.6 [X]. Soit f dans $C^0([0;1],\mathbb{R})$.
a) On suppose que pour tout k de $\{0;\dots,n\}$, on a $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros dans $[0;1]$.
b) Montrer que si pour tout entier naturel k, $\int_0^1 x^k f(x)\,dx=0$ alors f est identiquement nulle.
Indications : utiliser le théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues.

Exercice 17.7 [Mines 07]. Développez $f(x)=\Big(\tan\Big(x+\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)^{-\frac{1}{\tan 2x}}$ en 0 à l'ordre 4.

Exercice 17.8 [Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes]. Soit f dans $C^2([a;b],\mathbb{R})$. Montrer la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}(f(a)-f(b))\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

18. Révisions oraux : Fonctions d'une variables réelle

Exercice 18.1. Trouver les couples de fonctions réelles f et g définies et de classe C^1 sur un intervalle réel I, vérifiant pour tout x de I

$$\begin{cases} f(x)\,g(x) = x \\ f'(x)\,g'(x) = 1 \end{cases}$$

Exercice 18.2 [CCP 05]. Trouver les fonctions de $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ avec $(f \circ f)(x) = 3 + x/2$ pour tout réel x.

Exercice 18.3 [CCP 06.] Soit f une fonction numérique continue sur $[0; +\infty[$ admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice 18.4 [Mines 06]. Calculer pour x dans $[0; \pi]$, la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{t}\ \ln(t^2 - 2t\cos(x) + 1)\,dt$.

Exercice 18.5 [X 07]. Représenter $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.
Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

Exercice 18.6 [TPE 08]. Soit f une fonction croissante de $[a; b]$ dans lui-même. Montrer que f admet au moins un point fixe. *On pourra considérer l'ensemble* $E = \{x \in [a; b] \mid f(x) \geqslant x\}$.

Exercice 18.7 [TPE 08]. Pour f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on pose $F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ pour $x \neq 0$.
1) Rappeler pourquoi F est continue sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle prolongeable par continuité en 0?
2) Prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que si f est dérivable en 0 alors F est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18.8 [X 2013]. Soit f dans $C^2([0; 1];\mathbb{R})$ avec $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$. Vérifier que $\max\limits_{[0;1]} |f''| \geqslant 4$.

Exercice 18.9 [X 2013]. Trouver toutes les applications f et g continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (t; x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(tx) = f(x)\,g(t)$$

Exercice 18.10 [X 2013]. Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, minorée. Montrer qu'il existe un réel x_0 avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0 \Longleftrightarrow f(x_0) - f(x) < |x - x_0|$$

Exercice 18.11 [Mines 2016]. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$

Exercice 18.12 [CCP 2016 (12 pts)]. Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1];\mathbb{R})$. On définit pour tout f de E la fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par : pour tout x de $]0, 1]$ on a $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(0) = f(0)$.
1) Montrer que l'application définit un endomorphisme ϕ sur E.
2) On suppose f vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre μ. Montrer que f satisfait une équation différentielle et la résoudre.
3) En déduire les vecteurs propres et valeurs propres de ϕ.

19. Fonctions de plusieurs variables

Exercice 19.1 [CCP 06]. Calculer $\int\int_D (x^2+y^2+1)dx\,dy$ où $D = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1<0\}$.

Exercice 19.2 [CCP 06]. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0;0)=0$ et $f(x;y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x;y)\neq(0;0)$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19.3 [CCP 06]. Soit $C(R)$ le quart de disque défini par $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ et $x^2+y^2\leqslant R^2$.
1) Vérifier l'inégalité

$$\int\int_{C(R)} \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy \leqslant \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)^2 \leqslant \int\int_{C(\sqrt{2}\,R)} \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

2) Calculer $\int\int_{C(R)} \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy$ en fonction de R.
3) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt$.

Exercice 19.4 [Mines 07]. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ avec $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$ On définit $\Phi(t)=f(t;0)$ si $t\geqslant 0$, et $f(0;-t)$ sinon. Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que $\Phi(x-y)=f(x;y)$ pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19.5 [Petites Mines 07]. Etudier $f:(x;y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \arctan x+\arctan y-\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)\cdot$

Exercice 19.6 [Centrale 06]. Soit $f:(x;y)\mapsto\frac{\cos x-\cos y}{x-y}$ si $x\neq y$.
  1) Montrer qu'il existe une fonction $\hat{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ qui prolonge f. On donnera $\hat{f}(x;x)$.
  2) Montrer que $\hat{f}$ est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On poura penser à écrire $\hat{f}$ à l'aide de séries entières.

Exercice 19.7 [TPE 08]. Soit $f(x;y)=2x(y-1)dx-(x^2-1)dy$.
a) La forme f est-elle exacte?
b) Trouver ϕ ne dépendant que de x telle que ϕf soit une forme fermée sur des ouverts à préciser.

Exercice 19.8 [Mines 08]. Etudier la différentiabilité de $P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto\displaystyle\int_0^1 \sin(t+P(t))\,dt$.

Exercice 19.9 [TPE 08]. Trouver toutes les fonctions de classe C^1 vérifiant $2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0$. *On pourra penser à un changement de variables affine.*

Exercice 19.10 [CCP 08]. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et x_0 dans $]a;b[$.
1) Montrer que $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{u}(u-v)^n f(v)\,dv\right)du = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-u)^{n+1}}{n+1}f(u)\,du$.
2) En déduire que $g:x\mapsto\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-v)^{n-1}f(v)\,dv$ est une primitive d'ordre n de f.

Exercice 19.11 [CCP 08]. On considère $f(x;y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.
1) Déterminer les extremas de f.
2) Retrouver le résultat précédent en considérant la surface d'équation $z^2=4-x^2-y^2$.

Exercice 19.12 [CCP 08]. Calculer $\iint_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy$ avec $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$.

Exercice 19.13 [TPE 09]. Soit $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0, y > 0, x + y + z - 1 = 0\}$. Déterminer les extremas de $g : (x; y; z) \in E \mapsto x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Exercice 19.14 [Petites Mines 2012]. Soit $F : (x; y) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto \varphi(y/x)$ avec φ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions F de laplacien nul.

Exercice 19.15 [Mines 2013 - 1er exercice**].** Soit $f : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2xy^2 + \ln(4 + y^2)$.
1) Montrer que f est de classe C^1.
2) Déterminer les extremums de f.

Exercice 19.16 [Ecoles Mines 2014] : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $f : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi\left(\frac{\cos x}{chy}\right)$
Déterminer les fonctions φ telles que f soit harmonique i.e. $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 19.20 [TPE 2016] : extrêmums (locaux) de $f : (x; y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

20. Révisions oraux : divers

Exercice 20.1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique (avec $n \geqslant 2$), donner un équivalent du nombre de points de Z^n de norme inférieure à r quand r tend vers $+\infty$.
Indication : on pourra faire intervenir le volume de la boule unité.

Exercice 20.2 Soit θ dans $]0; \pi/2[$.

1) Pour tout entier n, trouver un polynôme P_n (indépendant de θ) tel que

$$\frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin\theta)^{2n+1}} = P_n(\text{cotan}^2\theta)$$

2) Déterminer les racines de P_n et la somme de ces dernières.
3) Montrer que $\text{cotan}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \text{cotan}^2\theta$.
4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

30. Révisions oraux : Probabilités

Exercice 30.1. Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans son placard un pantalon, une chemise et une paire de chaussettes; l'armoire contient ce jour-là 5 pantalons dont 2 noirs, 6 chemises dont 4 noires et 8 paires de chaussettes dont 5 paires noires. Quelle probabilité l'étudiant a-t-il d'être tout de noir vêtu? D'avoir exactement une pièce noire sur les trois?

Exercice 30.2. Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements "tirer un pique" et "tirer une roi" sont-ils indépendants? Quelle est la probabilité de "tirer un pique ou un roi"?

Exercice 30.3. En cas de migraine, trois patients sur cinq prennent de acide acétylsalicylique (plus connu sous le nom d'aspirine) et deux sur cinq un médicament M. Avec l'acide acétylsalicylique, 75% des patients sont soulagés alors qu'avec le médicament M, 90 % le sont.
1) Quel est le taux global de personnes soulagées?
2) Quelle est la probabilité qu'un patient ait pris le médicament M sachant qu'il est soulagé?

Exercice 30.4. Un constructeur aéronautique équipe ses avions d'un moteur central de type C et de deux moteurs (un par aile) de type A; chaque moteur tombe en panne indépendamment des autres et on estime à p la probabilité qu'un moteur de type C tombe en panne et à q pour un moteur de type A. L'avion ne peut voler que si le moteur central ou les deux moteurs des ailes fonctionnent. Quelle est la probabilité que l'avion puisse voler?

Exercice 30.5. On suppose qu'il y a une probabilité p d'être contrôlé quand on prend le tram. Monsieur Loco fait n voyages par an avec ce tram. On prendra $p = 0,1$ et $n = 700$.
1) Quelle est la probabilité que Monsieur Loco soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année?
2) Monsieur Loco voyage toujours sans ticket. Le prix d'un ticket pour un voyage est de $1,12$ euros. Quelle amende minimale la compagnie de tram doit-elle fixer pour que, sur une année, Monsieur Loco est une probabilité supérieure à 75% d'être perdant?

Exercice 30.6. On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage. Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.
1) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2) Déterminer l'espérance des variables aléatoires $\inf(T_1, T_2)$ et $\sup(T_1, T_2)$.
3) Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\text{Cov}(T_1, T_2)$.
4) Établir pour tout $i \in [\![2, 6]\!]$, la relation : $E(T_1 \mid X_1 = i) = 7$.
5) Montrer que pour tout $i \in [\![3, 6]\!]$, on a : $E(T_1T_2 \mid X_1 = i) = E\left((1 + T_1)(1 + T_2)\right)$.
6) Calculer $E(T_1T_2)$. En déduire $\text{Cov}(T_1, T_2)$.
7) Trouver un réel α tel que les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.
8) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 30.7. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}$.
2) En déduire que $P(X > n) = o_{n \to \infty}\left(P(X = n)\right)$.
3) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, telle que $Y - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Quelle est la probabilité que XY prenne des valeurs paires ?

Exercice 30.8. Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère np variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_{np}$. Pour tout k, la variable aléatoire X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 si $k \leqslant p$ et λ_2 sinon. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{np} X_k$, $A = \sum_{k=1}^{p} X_k$, et $B_n = \sum_{k=1+p}^{np} X_k$.

1) Déterminer les lois des variables aléatoires A et B_n.
2) Quelle est la loi de S_n ?
3) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Expliciter et reconnaître les lois des variables aléatoires Y_ℓ et Z_ℓ avec
$P(Y_\ell = m) = P_{(S_n=\ell)}(A = m)$ et $P(Z_\ell = m) = P_{(Sn=\ell)}(B_n = m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. On fixe p. Montrer que la suites des variables aléatoires $U_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+(n-1)\lambda_2} S_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante à déterminer.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X quand la suite de terme général $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ converge vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 30.9. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1) Montrer $P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$ et en déduire $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
2) Soit Z une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrée et de variance σ^2.
  a) Montrer $\forall a > 0, \forall x \geqslant 0,\ \ P(Z \geqslant a) \leqslant P\left((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\right)$
  b) Vérifier $\forall a > 0, \forall x \geqslant 0,\ \ P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$ puis $\forall a > 0,\ \ P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$
  c) En déduire $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{1+\lambda}$
3) Montrer que la fonction génératrice G_X de X vérifie : $\forall t \geqslant 1, \forall a > 0,\ P(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$
En déduire $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda$.

Exercice 30.10. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant un moment d'ordre 2.
1. Déterminer la valeur qui minimise l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto E((X - x)^2)$ où E désigne l'espérance.
On suppose maintenant Ω fini et $\mathcal{A}$ est l'ensemble de ses parties. Pour tout réel t, on définit

$$P_t : A \in \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \frac{E(\mathbf{1}_A \times \mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})} \in \mathbb{R} \text{ où } \mathbf{1}_A \text{ est la fonction indicatrice de } A.$$

2. Montrer que P_t est une probabilité sur Ω.
3. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_t)$. Calculer son espérance $E_t(Y)$. Que peut-on en dire si X et Y sont indépendantes ?
4. Montrer $4E_t((X - E_t(X))^2) \leqslant \left(\sup_\Omega X - \inf_\Omega X\right)^2$.