1 MANIPULATION DES MATRICES

1 ◷ Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A - \det(A)\, I_2.$$

---

2 ◷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\exists\, z \in \mathbb{R}/ \quad M(x)M(y) = m(z).$$

---

3 ◷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si : $AB = BA$.

---

4 ◷ On dit qu'une matrice carrée est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

---

5 ◷◷ Déterminer tous les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ pour lesquels : $AB - BA = I_n$.

---

6 ◷◷ On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* si : $M^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Le plus petit de ces entiers p est alors appelé l'*indice de nilpotence de M*.

1) Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de même taille, **QUI COMMUTENT**, sont aussi nilpotentes.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice de nilpotence p. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

---

7 ◷◷ Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note A la matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$. Montrer que $\big\{AM - MA\big\}_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

8 ◷◷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre en fonction de A et B l'équation : $X + \operatorname{tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

---

9 ◷◷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la matrice $\big(a_{n+1-i,n+1-j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.
2) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\widetilde{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}.$$

---

2 CALCULS DE PUISSANCES

10 ◷◷ Calculer les puissances des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. 9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

---

11 ◷◷ Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

---

12 ◷◷◷ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = w_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n. \end{cases}$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

---

13 ◷◷◷ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n. \end{cases}$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

---

3 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

14 ◷ Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 3. \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2. \end{array}\right.$

---

15 Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & cz & = & 0 \\ bx & + & cy & - & 3z & = & 1 \\ ax & + & 2y & + & bz & = & 5 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ admet-il $(3, -1, 2)$ pour solution ?

---

16 Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est-il compatible ?

---

17 Déterminer les coefficients de l'unique polynôme P de degré 2 pour lequel : $P(1) = 2$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 2$.

---

18 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $p \in \mathbb{R}$:

1) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2px & + & y & = & 1 \\ 2x & + & py & = & p. \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & py & + & 2z & = & 1 \\ px & + & y & + & 2z & = & p \\ x & + & 2py & + & 3z & = & 0. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} px & + & py & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & pz & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1-p \\ px & + & (1+p)y & + & (1+p)z & = & p-p^2 \\ px & + & (1-p)y & + & (1-p)z & = & p^2. \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & py & + & 6z & = & 6 \\ -x & + & 3y & + & (p-3)z & = & 0. \end{array}\right.$

---

4 MATRICES INVERSIBLES

19 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pourquoi la notation fractionnaire $\dfrac{A}{B}$ est-elle interdite ?

---

20 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **f)** $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$.

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.
