PCSI – TD_2

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Pour P et Q deux propositions, montrer que :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) = (P \text{ et non}(Q)).$$

Réponse

Il suffit de faire une table de vérité :

P	Q	non(Q)	non(P et non(Q))	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

En déduire la réciproque, la contraposée et la négation des affirmations suivantes :

1. « Si $2+2=5$ alors je suis le roi (la reine) d'Angleterre »,

Réponse

On pose P : « $2+2=5$ » et Q : « je suis le roi d'Angleterre », l'affirmation se réécrit alors :

$$P \Longrightarrow Q.$$

On en déduit :

(a) la réciproque :
« Si je suis le roi d'Angleterre alors $2+2=5$ »

(b) la contraposée :
« Si $2+2 \neq 5$ alors je ne suis pas le roi d'Angleterre »

(c) la négation :
« $2+2=5$ et je ne suis pas le roi d'Angleterre ».

2. « Si un réel est plus grand que 5, alors il est plus grand que 7 ».

Réponse

En termes mathématiques, la phrase se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant 7.$$

On en déduit :

(a) la réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 7 \Longrightarrow x \geqslant 5,$$

(b) la contraposée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 7 \Longrightarrow x < 5,$$

(c) la négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 5 \text{ et } x < 7.$$

Exercice 2 :

Donner la négation des propositions suivantes :

1. « Tous les soirs, je relis mon cours de mathématiques »

Réponse

« Il existe un soir pour lequel je n'ai pas relu mon cours de mathématiques »

2. « S'il neige demain, alors j'irai au ski tous les jours de la semaine »

Réponse

On utilise l'exercice précédent :
« Il neige demain et (mais) je n'irai pas au ski au moins un jour de la semaine »

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ |x| \leqslant \epsilon.$

Réponse

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ |x| > \epsilon.$$

Exercice 3 :

1. Montrer que si $p \in \mathbb{Z}$ vérifie que p^2 est pair alors p est pair.

Réponse

Montrons la contraposée : si p est impair, alors il s'écrit :

$$p = 2\,k + 1$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit :

$$p^2 = (2\,k+1)^2 = 2 \times (2\,k^2 + 2\,k) + 1$$

donc p^2 est impair.

2. En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut alors l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible :
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
On en déduit que : $2\,q^2 = p^2$ donc que p^2 est pair. Par la première question, p est donc pair. Écrivons-le $p = 2\,p'$ avec p' un entier. Alors $q^2 = 2\,p'^2$ donc q^2 est pair puis par la première question, q est pair. Comme p et q sont pair, la fraction n'est plus irréductible. Absurde ! Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles :

1. $y' - y = \cos(t)$

Réponse

Commençons par résoudre l'équation homogène :
$$y' + y = 0$$
L'ensemble des solutions est :
$$S_0 = \left\{t \mapsto C \times e^t, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$
Cherchons maintenant ne solution particulière du type $A \times \cos(t) + B \times \sin(t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve :
$$\begin{cases} B - A = 1 \\ -A - B = 0 \end{cases}$$
ce qui équivaut à $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :
$$\boxed{S = \left\{t \mapsto \frac{1}{2} \times (\sin(t) - \cos(t)) + C \times e^t, \quad C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

2. $y' - 2\,y = e^{-t}$

Réponse

Comme dans la question précédente, on commence par l'équation homogène, dont l'ensemble des solutions est :
$$S_0 = \left\{t \mapsto C \times e^{2\,t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$
Pour la solution particulière, on en cherche une du type $A \times e^{-t}$, et l'on trouve en remplaçant dans l'équation :
$$-A - 2\,A = 1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\boxed{S = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{3} \times e^{-t} + C \times e^{2\,t}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. $y' - y = 2 - e^t + \cos(t)$

Réponse

L'équation homogène admet pour solutions :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times e^t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière, en utilisant le principe de superposition. L'équation différentielle :

$$y' - y = 2$$

admet pour solution particulière la fonction constante égale à -2. Pour l'équation :

$$y' - y = e^t,$$

en cherchant une solution du type $B \times t \times e^t$, on trouve $B = 1$ donc $t \mapsto t \times e^t$ est une solution particulière. Enfin, pour l'équation différentielle :

$$y' - y = \cos(t)$$

on a déjà trouvé une solution dans la première question :

$$t \mapsto \frac{1}{2} \times (\sin(t) - \cos(t))$$

l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\boxed{S = \left\{ t \mapsto -2 - t \times e^t + \frac{1}{2} \times (\sin(t) - \cos(t)) + C \times e^t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Exercice 5 :

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + 2\,y = \cos(t) + \sin(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Réponse

On commence en résolvant l'équation homogène. On trouve :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times e^{-2\,t}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière du type $A\times\cos(t)+B\times\sin(t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\begin{cases} B+2\,A=1 \\ 2\,B-A=1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $A=\frac{1}{5}$, $B=\frac{3}{5}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S=\left\{t\mapsto \frac{1}{5}\times(\cos(t)+3\,\sin(t))+C\times e^{-2\,t},\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Cherchons maintenant la solution du problème de Cauchy. Une solution du type :

$$t\mapsto \frac{1}{5}\times(\cos(t)+3\,\sin(t))+C\times e^{-2\,t}$$

vérifie la condition initiale $y(0)=2$ si et seulement si $\frac{1}{5}+C=2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$\boxed{f:\quad t\in\mathbb{R}\mapsto \frac{1}{5}\times(\cos(t)+3\,\sin(t))+\frac{9}{5}\times e^{-2\,t}.}$$