Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble

I.1 Notion de cardinal

Déf. • Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini (contenant un nombre fini d'éléments). On appelle **cardinal de E** le nombre d'éléments de l'ensemble E. On le note **Card(E)**.

Notation ✐ On rencontre aussi les notations $\#E$ ou encore $|E|$ pour le cardinal d'un ensemble fini.

Attention ❢ E est un ensemble, $\mathrm{Card}(E)$ est un entier naturel : **jamais** de confusion entre les deux !

Ex. ✻ **1)** $\mathrm{Card}(\{a\}) = 1$, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

2) $\mathrm{Card}(\{a, b\}) = 2$ si $a \neq b$, 1 si $a = b$.

3) Si p et q sont deux entiers relatifs, $\mathrm{Card}(\llbracket p, q \rrbracket) = q - p + 1$.

I.2 Cardinal et inclusion

Propr. • Cardinal d'une partie d'un ensemble fini

Soit A et B deux ensembles.

On suppose que $A \subset B$ et que B est un ensemble fini. Alors :

1) A est également un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$.

2) Si, de plus, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, alors $A = B$.

Démo. ✐ Faits considérés comme évidents.

Illustr. ✐

Coroll. • Soit A et B deux ensembles finis. Parmi les propriétés suivantes, si deux sont vérifiées, la troisième est vraie également :

1) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ **2)** $A \subset B$ **3)** $B \subset A$.

I.3 Cardinal et applications

Propr. • Deux ensembles finis en bijection ont même cardinal

Soit E et F deux ensembles finis. On suppose qu'il existe une application $\varphi : E \to F$ qui est bijective. Alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Illustr. ✐

Compter les éléments d'un ensemble, c'est en fait construire une bijection entre cet ensemble et un intervalle entier de la forme $\llbracket 1, n \rrbracket$: n est alors le cardinal commun de ces deux ensembles.

Propr. • Applications entre ensembles de même cardinal

Soit E et F deux ensembles finis, φ une application de E dans F.

On suppose que $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$. Alors :

$$\varphi \text{ est injective} \iff \varphi \text{ est surjective} \iff \varphi \text{ est bijective.}$$

Démo. ✐ Sur les notes de cours

Coroll. • Soit E et F deux ensembles finis, $\varphi : E \to F$. Parmi les trois propriétés suivantes, si deux sont vérifiées, la troisième est vraie également :

1) $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ **2)** φ est injective **3)** φ est surjective.

Démo. ✐ C'est une synthèse des deux propriétés précédentes.

II Opérations sur les cardinaux

II.1 Cardinal de produits cartésiens

Propr. • Cardinal de produits cartésiens

Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est également un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

Coroll. • Soit n un entier naturel non nul.

1) Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est également un ensemble fini et $\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$.

2) Si E est un ensemble fini, alors E^n est également un ensemble fini et $\mathrm{Card}(E^n) = \big(\mathrm{Card}(E)\big)^n$.

***Exercice* 1** ► On appelle mot de 3 lettres un assemblage de trois lettres, de a à z, considéré indépendamment de son sens.

1) Combien y a-t-il de mots de trois lettres ?

2) Combien y en a-t-il qui contiennent une voyelle en deuxième position ?

Généralisation : le principe multiplicatif
Quand chaque élément d'un ensemble E est fabriqué :

- ► par une suite de choix successifs,
- ► où le nombre de choix possibles à chaque étape est le même pour tous les éléments,
- ► et où chaque élément est fabriqué d'une seule manière,

alors le nombre d'éléments de E est le produit du nombre de possibilités à chaque étape.

***Exercice* 2** ► Combien y a-t-il de mots de trois lettres contenant exactement une voyelle ?

II.2 Cardinal de réunions

Propr. • Cardinal d'une réunion d'ensembles disjoints
Soit A et B deux ensembles finis. On suppose A et B **disjoints**, (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$). Alors $A \cup B$ est également un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Rem. ◇ Cette propriété intervient lorsque, pour dénombrer un ensemble, on procède par disjonction de cas.

Illustr. ✐

***Exercice* 3** ► Combien y a-t-il de mots de trois lettres qui contiennent au plus un x ?

Coroll. • Cardinal d'une réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints
Soit n ensembles finis $A_1, A_2, \dots A_n$ **disjoints deux-à-deux,** c'est-à-dire tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ est également un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Démo. ☞ Par récurrence sur n, sur les notes de cours.

***Exercice* 4** ► Combien peut-on dessiner de carrés portés par un quadrillage régulier de 3 par 3 ?

Propr. • Formule de Poincaré
Soit A et B deux ensembles finis quelconques.
Alors $A \cup B$ est également un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Illustr. ✐

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

***Exercice* 5** ► Dans une classe de 35 élèves de terminale, seuls l'anglais et l'allemand sont enseignés comme langues étrangères. Chaque élève passe au moins une langue au bac. Sachant que 31 passent l'anglais et 13 passent l'allemand, combien passent les deux langues et combien passent l'allemand seul ?

II.3 Cardinal du complémentaire, de la différence ensembliste

Propr. • Cardinal du complémentaire
Soit E un ensemble fini.

1) Si A une partie de E. Alors $\overline{A}$ est également un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

2) Si A et B sont deux parties de E telles que $B \subset A$, alors $A \backslash B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(B).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **6** ► Combien y a-t-il de mots de trois lettres (de a à z) qui contiennent au moins un x ?

II.4 Cardinal de l'ensemble des parties de E

Propr. • Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E est également un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^{\operatorname{Card}(E)}.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Exercice **7** ► Dans festival de cinéma, 9 films sont projetés au rythme d'un par soir. Un cinéphile consulte le programme et décide quels films il ira voir. Combien y a-t-il de choix possibles ?

III Listes, arrangements, permutations et combinaisons

III.1 Listes

Déf. • Listes

Soit E un ensemble fini, p un entier naturel non nul.
Une **p-liste d'éléments de E** est un p-uplet d'éléments de E.

Ex. ✻ Si $E = \{0,1,4\}$, $(1,0,1,1,0,4,4)$ est une 7-liste d'éléments de E.

Important ✪ Dans une p-liste d'éléments de E, **l'ordre des éléments compte** et **il peut y avoir des répétitions.**
Une p-liste d'éléments de E est tout simplement un p-uplet d'éléments de E, autrement dit un élément de l'ensemble E^p.

Propr. • Nombre de p-listes

Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel non nul.
Alors le nombre de p-listes d'éléments de E vaut n^p.

Démo. Il s'agit de $\operatorname{Card}(E^p) = n^p$.

Exercice **8** ► Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire successivement 3 boules avec remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

III.2 Arrangements

Déf. • Arrangements

Soit E un ensemble fini, p un entier naturel non nul.
Un **p-arrangement d'éléments de E** est une p-liste d'éléments **distincts** de E, autrement dit une p-liste d'éléments de E où aucun élément de E n'apparaît plusieurs fois.

Important ✪ Dans un p-arrangement d'éléments de E, **l'ordre des éléments compte** et **il ne peut pas y avoir des répétitions.**

Ex. ✻ Si $E = \{0,1,4\}$:
- sont des 2-arrangements d'éléments de E :
- sont des 3-arrangements d'éléments de E :
- sont des 4-arrangements d'éléments de E :

Propr. • Nombre de p-arrangements

Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel non nul.
Alors le nombre de p-arrangements d'éléments de E vaut :

$$\mathrm{A}_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Démo. Application du principe multiplicatif.

Exercice **9** ► Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire successivement 3 boules sans remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

III.3 Permutations

Déf. • Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
Une **permutation de E** est un n-arrangement de E.

Une permutation de E est donc une liste d'éléments de E où chaque élément de E apparait une et une seule fois.

Exercice **10** ► Déterminer la liste de toutes les permutations de $E = \{a,b,c\}$.

Propr. • Nombre de permutations de E

Soit E un ensemble fini, de cardinal n.
Alors le nombre de permutations de E est de $n!$.

Démo. Il s'agit de $\mathrm{A}_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$.

Exercice **11** ► Déterminer le nombre d'anagrammes du mot PCSI.

Exercice **12** ► On mélange un jeu de 32 cartes. Combien de piles mélangées différentes peut-on obtenir ?

III.4 p-combinaisons

Déf. • **p-combinaisons d'éléments d'un ensemble fini**

Soit E un ensemble fini, $p \in \mathbb{N}$. Une **p-combinaison d'éléments de E** est une partie de E comportant exactement p éléments.

Important ✪ Dans une p-combinaison, l'ordre n'est pas pris en compte et les répétitions ne sont pas permises.

Ex. ✻ Si $E = [\![2,3,5,7]\!]$, les 1-combinaisons sont $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ et $\{7\}$; des exemples de 2-combinaisons : $\{2,3\}$, $\{3,7\}$ etc. il y a une seule 0-combinaison : l'ensemble vide $\varnothing$ et une seule 4-combinaison : E lui-même. Il n'y a pas de 5-combinaisons.

Propr. • **Nombre de p-combinaisons d'éléments de E**

Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel.
Alors le nombre de p-combinaisons d'éléments de E vaut

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Démo. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, après avoir démontré le lemme suivant :

Lemme • Formule de Pascal

Notons $\mathrm{C}(n,p)$ le nombre de p-combinaisons d'un ensemble E comportant n éléments.
Alors : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{C}(n+1,p+1) = \mathrm{C}(n,p) + \mathrm{C}(n,p+1)$.

Exercice **13** ► Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire simultanément 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice **14** ► Lors de n répétitions d'une épreuve à deux issues (succès ou échec), combien y a-t-il de façons d'obtenir exactement p succès ?

Exercice **15** ► Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANDANA.

IV Dénombrement d'applications

IV.1 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre

Propr. • Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre

Soit E et F deux ensembles finis. Alors le nombre d'applications de E à valeurs dans F est donnée par

$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{F}(E,F)\big) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Démo. Sur les notes de cours : une application du principe multiplicatif.

Astuce ➾ On rappelle que l'ensemble des fonctions de E dans F se note également F^E : la formule devient donc : $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Exercice **16** ► On répartit huit boules numérotées de 1 à 8 dans quatre sacs numérotés de 1 à 4. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

IV.2 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre

Propr. • Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre

Soit E et F deux ensembles finis. On note p le cardinal de E et n le cardinal de F.
Alors le nombre d'injections de E dans F est le nombre de p-arrangements d'éléments de F, soit

$$\mathrm{A}_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Démo. Sur les notes de cours. Application du principe multiplicatif : savoir refaire.

Rem. ◇ Si $p > n$, il n'y a pas assez d'éléments dans l'espace d'arrivée pour choisir une image différente pour chacun des p éléments de E, d'où ce nombre nul.

Exercice **17** ► Dans un hôtel où il reste 12 chambres simples libres, un groupe de 8 personnes se présente. Combien y a-t-il de manières de répartir les clients dans les chambres ?

Coroll. • **Nombre de bijections de E dans E**

Si E est un ensemble qui comporte n éléments, le nombre de bijections de E dans E est de $n!$.

Démo. Comme l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont tous deux l'ensemble fini E, les bijections de E dans E dont les injections de E dans E. D'après ce qui précède, il y en a $\mathrm{A}_n^n = n!$.

Pour fabrique un exemple de bijection de E dans E, on choisit successivement les images de chaque élément de E. Cela revient à choisir une permutation de E : pour cette raison, les bijections de E dans E sont également appelées des permutations de E.

Remarque. Dénombrer les *surjections* d'un ensemble fini dans un autre est beaucoup plus délicat.