TD agreg n°4

Coralie Renault

4 novembre 2016

Remarque 1

On prendra comme définition de la transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$$

et pour la transformée de fourier Inverse,

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x\xi} dx$$

Théorème 1 (*Rudin*)

A chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer une fonction $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

- *Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.*
- *$\forall f \in L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*
- *L'application $f \to \hat{f}$ est un iso sur L^2.*
- *Si on pose $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2i\pi xt} dx$ et $\psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{2i\pi xt} dx$ alors*

$$\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - f\|_2 = \lim_{A \to +\infty} \|\psi_A - \hat{f}\|_2 = 0$$

Exercice 1 (*LAAMRI*)

- *Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est bien définie et est uniformément bornée.*
- *Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-ax^2}$.*
- *Montrer que $\mathcal{F}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues qui tendent en 0 en l'infinie.*
- *Monter qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$*

Exercice 2 (*LAAMRI*)

Le but de cette exercice est de montrer que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est strictement inclue dans l'ensemble des fonctions continues qui tendent en 0 en l'infinie. Pour cela on suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est continue et tend vers 0 en l'infinie. On suppose de plus que g est impaire et vérifie

$$\int_1^X \frac{g(x)}{x} dx \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \quad \text{ou n'a pas de limites.}$$

— *Par l'absurde on suppose qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} = g$ pp partout et on pose $F(x) = -ix(f(x) - f(-x))$. Montrer que*

$$g(\xi) = \int_0^{+\infty} F(x) sin(2\pi x \xi) dx$$

— *Montrer que*

$$\int_1^X \frac{g(x)}{x} dx = \int_1^X \left(\int_0^{+\infty} F(t) \frac{sin(2\pi xt)}{x} dt \right) dx$$

— *Obtenir une contradiction*

— *Donner l'exemple d'une telle fonction g.*

— *En déduire la non surjectivité de $\mathcal{F}$.*

Exercice 3 (DVP)

Définition 1

On rappelle la définition de l'espace de Schwartz :

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^n f^{(p)}(x)| < +\infty\}$$

Pour $u \in S(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de u , notée $\mathcal{F}u$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

1. *Montrer que $S(\mathbb{R})$ est stable par $\mathcal{F}$.*
2. *Si on pose $\forall v \in S(\mathbb{R})$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi$$

alors $S(\mathbb{R})$ est stable par $\overline{\mathcal{F}}$ et on a $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = identitdeS$ On pourra considérer $\forall \epsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\epsilon t^2} \hat{f}(t) dt$

Exercice 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. on suppose qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < M(1+|x|)^{-\alpha}$. On suppose également que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n)|$$

On pourra s'intéresser à la série

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

montrer qu'elle est périodique et s'intéresser à sa série de Fourier.

Exercice 5

Calculer la transformée de Fourier de f définie sur $\mathbb{R}^*$ par$f(x) = Arctan(\frac{1}{x})$.