
Stage M1 Mathématiques

Sur la modélisation des pucerons

Coralie RENAULT

22 août 2013



sous la direction de Cédric WOLF, à Ecobio

Table des matières

1	Éléments de modélisation	3
1.1	Des informations sur les pucerons	3
1.2	Introduisons le modèle	3
1.2.1	L'espace et les densités	3
1.2.2	La convection	3
1.2.3	La diffusion	4
1.2.4	Les coefficients de dépôts et d'envols	4
1.2.5	Le système d'équation	4
2	Une première approche du problème	5
2.1	L'équation de diffusion	5
2.1.1	Le problème découplé	6
2.1.2	Un problème auxiliaire et quelques majorations	11
2.1.3	Méthode de point fixe	12
2.2	L'équation de convection	15
3	L'équation de réaction-diffusion-convection	15
3.1	Le problème découplé	16
A	Appendice sur la théorie utilisée pour résoudre l'équation de diffusion	17
B	Appendice sur les équations de transport avec conditions mixtes	19
B.1	Le cas de la dimension un	19
B.2	Le cas de la dimension deux	21
B.2.1	Les coefficients sont constants	21
B.2.2	Les coefficients dépendent du temps et de l'espace	24
C	Remerciements	24

Nombres de cultures, dont en particulier les champs de blés, sont souvent attaqués par des pucerons au printemps. Afin de limiter les ravages que peuvent causer ces insectes, des mesures préventives sont souvent prises. Cependant, il apparaît que ces mesures préventives ne sont justifiées qu’une fois tous les cinq ans. La thèse de Mamadou Ciss vise donc à proposer une modélisation pour prévoir quand les pucerons seront véritablement présents dans les champs de blé. Le domaine étudié est la France. Mon stage consistait à étudier le système d’équations aux dérivées partielles introduit dans sa thèse.

1 Eléments de modélisation

1.1 Des informations sur les pucerons

Les pucerons sont des petits insectes qui se nourrissent de la sève des plantes. En se nourrissant, ils peuvent transmettre des maladies aux épis de blés ce qui les affaiblit. Il existe plusieurs types de pucerons, on considère ici deux types : les aptères et les ailés.

Les aptères ne possèdent pas d’ailes et sont donc condamnés à rester dans le champs de blé contrairement aux ailés qui eux peuvent s’envoler. Les pucerons peuvent se reproduire via deux modes de reproductions : la reproduction sexuée et la reproduction asexuée. La reproduction sexuée a lieu en automne, se traduit par la ponte d’œufs qui va donner naissance à des femelles parthénogénétiques qui sont appelées les fondatrices et cela favorise la diversité génétique.

La reproduction des pucerons qui entrera en jeu ici sera la reproduction asexuée. Les petits produits seront des clones de la mère c’est à dire qu’ils auront les mêmes gènes qu’elle. Chaque puceron peut donner à la fois un ailé ou un aptère. Pour des raisons mathématiques de modélisation, on considère qu’un puceron est un aptère s’il n’a pas d’ailes ou bien si c’est un puceron avec des ailes qui s’est posé dans le champ. En effet, les ailés peuvent alternativement se trouver dans le ciel puis se poser dans le champ.

1.2 Introduisons le modèle

1.2.1 L’espace et les densités

On se placera dans un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ qui est borné. Les frontières de ce domaine seront notés Γ_1 et Γ_2 avec :

- Γ_1 représente les frontières marines
- Γ_2 représente les frontières terrestres ainsi que les frontières avec des plaines et des montagnes.
- Les frontières vérifient : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

De plus, on notera la densité de pucerons aptères au temps t et à la position x par $A(t, x) \in \mathbb{R}$. Leur taux d’accroissement sera modélisé par la fonction $r(t, x) \in \mathbb{R}$ qui vérifiera :

$$-1 \leq r(t, x) \leq 1$$

La densité des pucerons ailés sera quand à elle notée $C(t, x) \in \mathbb{R}$ au temps t et à la position x .

1.2.2 La convection

Le vol des pucerons dépend de la vitesse du vent. Lorsque le vent est trop fort (à partir de 2 km/h) les pucerons ne dirigent plus leurs vols, on parle de vols passifs. On a donc un terme de convection qui apparaît dans notre équation. Le terme de convection est donc $v(t, x) \nabla_x C$ où $v(t, x) \in \mathbb{R}^2$ représente le vent.

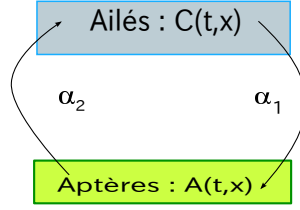


FIGURE 1 – Les pucerons peuvent s’envoler ou se déposer dans le champ

1.2.3 La diffusion

Le terme de diffusion apparaît lorsque le vent est inférieur à 2 km/h et que les pucerons peuvent se diriger comme ils le souhaitent, on parle alors de vols actifs. Le terme de diffusion est donc noté $d(t, x) \in \mathbb{R}$. Dans notre modélisation, on supposera que la convection et la diffusion ne peuvent pas avoir lieu en même temps donc dans le système d’équation (1), on aura :

- $\lambda_v = 0$ si $v(t, x) \geq 2$ km/h
- $\lambda_v = 1$ sinon

1.2.4 Les coefficients de dépôts et d’envols

On a mentionné le fait que certains aptères avaient des ailes, ils vont donc pouvoir s’envoler. Le coefficient d’envol des pucerons sera donc noté α_2 et dépendra de la densité d’aptère au temps t et au point x de l’espace.

De plus, les pucerons qui seront dans le ciel pourront se déposer dans une parcelle de champs, on notera donc α_1 le coefficient de dépôt.

De plus, ces coefficients vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_1(t, x) \leq 1 \\ 0 \leq \alpha_2(t, x, A(t, x)) \leq 1 \end{cases}$$

1.2.5 Le système d’équation

On arrive donc au système d’équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} + (1 - \lambda_v)v(t, x)\nabla_x C &= \lambda_v \operatorname{div}(d(t, x)\nabla_x C) - \alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, A(t, x))A \\ \frac{dA}{dt} &= (r(t, x) - \alpha_2(t, x, A(t, x)))A + \alpha_1(t, x)C \end{cases} \quad (1)$$

On considérera les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} C(0, x) &= C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0, x) &= A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Ainsi que les conditions au bords :

$$\begin{cases} C(t, x) &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma_1 \\ A(t, x) &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma_1 \\ \frac{dC}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma_2 \\ \frac{dA}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma_2 \end{cases}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normale à la frontière extérieur orienté vers l’extérieur.

Remarque 1

La condition de Dirichlet imposée sur l'un des bords traduit une frontière inhospitalière, la concentration des pucerons y est nulle tandis que la condition de Neumann signifie une population isolée. Le flux de pucerons sera nul sur cette frontière, aucun puceron ne peut entrer ou sortir du domaine par cette frontière.

Le système précédent était celui établi dans la thèse ([1]). Cependant, nous avons modifié les conditions de bords pour faciliter la résolution. On s'intéresse donc toujours au même système d'équation qui possède les mêmes données initiales. On suppose maintenant qu'il n'y a plus qu'un seul type de condition à la frontière. On note Γ cette frontière et la nouvelle condition est une condition de Neumann :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dn} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ \frac{dA}{dn} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases}$$

2 Une première approche du problème

Dans un premier temps, on va chercher à montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le système d'équation en supposant qu'il y a uniquement le terme de diffusion (ie $\lambda_v = 1$). Ensuite nous nous intéresserons à l'équation avec uniquement le terme de convection (ie $\lambda_v = 0$).

Les hypothèses que nous utiliserons dans toute la suite du rapport seront :

- d est une fonction qui est strictement positive et qui est bornée ie $\exists d_{inf} > 0$ et $\exists d_{max} < +\infty$ tel que :

$$d_{inf} \leq d(t, x) \leq d_{max}, \forall t \in]0, T[, \forall x \in \Omega$$

- $d \in \mathcal{C}(\overline{(\mathbb{R}^+ \times \Omega)})$

- Pour tout $R > 0$, $\exists K_{\alpha_2}(R) > 0$ tel que pour $0 \leq |\xi|, |\hat{\xi}| \leq R$, on a :

$$\forall t \in]0, T[, \forall x \in \Omega, |\alpha_2(t, x, \xi) - \alpha_2(t, x, \hat{\xi})| \leq K_{\alpha_2}(R)|\xi - \hat{\xi}|$$

- De plus les données initiales seront positives et bornées ie

$$\begin{cases} C_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ et } C_0 \in L^\infty(\Omega) \\ A_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ et } A_0 \in L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

2.1 L'équation de diffusion

On va chercher ici à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \lambda_v \operatorname{div}(d(t, x) \nabla_x C) - \alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, A(t, x))A \\ \frac{dA}{dt} = (r(t, x) - \alpha_2(t, x, A(t, x))A + \alpha_1(t, x)C \end{cases} \quad (2)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} C(0, x) = C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0, x) = A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Ainsi que les conditions au bords :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dn} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ \frac{dA}{dn} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases}$$

2.1.1 Le problème découplé

On va introduire deux nouvelles fonctions dans le but de découpler les équations afin de faciliter la résolution du système.

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} &= \lambda_v \operatorname{div}(d(t, x) \nabla_x C) - \alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))\hat{A} \\ \frac{dA}{dt} &= (r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x)))A + \alpha_1(t, x)\hat{C} \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} C(0, x) &= C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0, x) &= A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Ainsi que les conditions au bords :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ \frac{dA}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases}$$

On supposera que :

- $\hat{A}(t, x) \in L^2(0, T \times \Omega)$
- $\hat{C} \in L^2(0, T \times \Omega)$
- $\exists \hat{A}^* \in L^\infty(\Omega)$ tel que $0 \leq \hat{A}(t, x) \leq \hat{A}^*(t)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0, T[$
- $\exists \hat{C}^* \in L^\infty(\Omega)$ tel que $0 \leq \hat{C}(t, x) \leq \hat{C}^*(t)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in]0, T[$

L'équation en C. On veut résoudre :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} &= \lambda_v \operatorname{div}(d(t, x) \nabla_x C) - \alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))\hat{A} \\ C(0, x) &= C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \frac{dC}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases} \quad (3)$$

Nous allons définir :

$$a(t; C, w) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 d(t, x) \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \alpha_1(t, x)Cw \right) dx$$

Nous allons appliquer les résultats expliqués dans l'appendice mais pour cela il nous faut définir un nouvel espace :

Définition 1

On pose :

$$\delta(x) = \min(\operatorname{dis}(x, \Gamma), 1) \text{ où } \operatorname{dis}(x, \Gamma) = \text{distance de } x \text{ à } \Gamma$$

On définit donc :

$$\Xi^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \delta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right\}$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\| \cdot \|_{\Xi^1(\Omega)} = \left(|v|^2 + \sum_{i=1}^2 \left| \delta \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1

$(\Xi^1(\Omega), ||\cdot||_{\Xi^1(\Omega)})$ est un Hilbert.

Proposition 2

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\Xi^1(\Omega)$

Démonstration : Voir [2] ■

On peut donc définir son dual :

Définition 2

$$\Xi^{-1}(\Omega) = (\Xi^1(\Omega))'$$

Remarque 2

On peut noter que $H^1(\Omega) \subset \Xi^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et donc on a $L^2(\Omega) \subset \Xi^{-1}(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$

On a donc le résultat suivant :

Théorème 1

On considère l'équation différentielle (3) muni de ses conditions initiales et de bords.

Si $f = \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))\hat{A}(t, x) \in L^2(0, T; \Xi^{-1}(\Omega))$ alors il existe un unique $C \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que :

$$\int_0^T a(t; C(t), w(t)) dt - \int_0^T \left[C(t), \frac{dw}{dt} \right] dt = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle dt + [C_0, w(0)]$$

et ce

$$\forall w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \text{ avec } \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))' \text{ et } w(T) = 0$$

Démonstration : Il faut commencer par vérifier que :

- $d \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$
- $\alpha_1 \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$ et $\alpha_1(t, x) \geq 0$
- $t \mapsto a(t; C(t), w(t))$ est mesurable et continue.

Or ces conditions sont vérifiées : par hypothèse pour les deux premières et en appliquant Cauchy-Schwarz on montre la troisième.

De plus il faut vérifier que $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^2 d(t, x) |\lambda_i|^2 \geq \alpha \sum_{i=1}^2 |\lambda_i|^2, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall x \in \Omega, \forall t \in]0, T[$$

Or on a supposé que d était strictement positive donc

$$\sum_{i=1}^2 d(t, x) |\lambda_i|^2 \geq d_{\min} \sum_{i=1}^2 |\lambda_i|^2, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall x \in \Omega, \forall t \in]0, T[$$

Avec les hypothèses sur \hat{A} on a bien f qui est dans le bon espace. On peut donc appliquer le théorème 4 ce qui nous donne l'existence et l'unicité. ■

L'équation en A. On veut résoudre :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = (r(t, x) - \alpha_2(t, x, A(t, x)))A + \alpha_1(t, x)\widehat{C} \\ A(0, x) = A_0(x) & \forall x \in \Omega \\ \frac{dA}{dn} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases} \quad (4)$$

L'équation n'est finalement qu'une équation différentielle ordinaire par rapport au temps donc en supposant que $\widehat{C} \in L^2((0, T) \times \Omega)$ on a :

$$A(t, x) = \lambda(t) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \widehat{A}(s, x)) ds \right) + A_0(x) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \widehat{A}(s, x)) ds \right)$$

avec :

$$\lambda(t) = \int_0^t \widehat{C}(\tau, x) \alpha_1(\tau, x) \exp \left(\int_0^\tau -r(s, x) + \alpha_2(s, x, \widehat{A}(s, x)) ds \right) d\tau$$

Proposition 3

Avec les hypothèses faites sur les fonctions A_0 , \widehat{C} et α_2 on a les résultats suivant :

$$A \in L^2((0, T) \times \Omega)$$

$$\frac{dA}{dt} \in L^2((0, T) \times \Omega)$$

Remarque 3

Ce résultat n'est probablement pas optimal mais suffisant pour appliquer le théorème de point fixe utilisé dans la suite.

Démonstration : En reprenant l'expression de A, sachant que α_2 est une fonction positive et que r est majorée par 1 on a :

$$|A(t, x)| \leq |\lambda(t)| \exp(t) + |A_0(x)| \exp(t)$$

On applique l'inégalité triangulaire à l'intérieur de λ et on obtient :

$$|A(t, x)| \leq \int_0^t |\widehat{C}(\tau, x)| |\alpha_1(\tau, x)| \exp(\tau + \|\alpha_2\|_\infty \tau) d\tau \exp(t) + |A_0(x)| \exp(t)$$

En appliquant Cauchy-Schwarz puis en majorant t par T dans l'intégrale de \widehat{C} on obtient :

$$\int_0^t |\widehat{C}(\tau, x)| |\alpha_1(\tau, x)| \exp(\tau + \|\alpha_2\|_\infty \tau) d\tau \exp(t) \leq \|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2} \|\alpha_2\|_\infty \left(\int_0^t \exp(2\tau + 2\|\alpha_2\|_\infty \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

or :

$$\int_0^t \exp(2\tau + 2\|\alpha_2\|_\infty \tau) d\tau \leq \frac{\exp(2t + 2\|\alpha_2\|_\infty t)}{2 + 2\|\alpha_2\|_\infty}$$

Donc finalement :

$$|A(t, x)| \leq \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2} \|\alpha_2\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} \exp(2t + \|\alpha_2\|_\infty t) + |A_0(x)| \exp(t)$$

Donc :

$$|A(t, x)|^2 \leq \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2}^2 \|\alpha_2\|_\infty^2}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)} \exp(4t + 2\|\alpha_2\|_\infty t) + |A_0(x)|^2 \exp(2t) + 2 \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2} \|\alpha_2\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} |A_0(x)| \exp(3t + \|\alpha_2\|_\infty t)$$

On veut maintenant majorer la quantité suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega |A(t, x)| \, dx \, dt$$

Or on remarque que :

$$\int_0^T \int_\Omega |A_0(x)|^2 \exp(2t) \, dx \, dt \leq \frac{1}{2} \|A_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp(2T)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2}^2 \|\alpha_2\|_\infty^2}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)} \exp(4t + 2\|\alpha_2\|_\infty t) \leq \frac{\|\widehat{C}(\cdot, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\alpha_2\|_\infty^2}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)(4 + 2\|\alpha_2\|_\infty)} \exp(4T + 2\|\alpha_2\|_\infty T)$$

$$\int_0^T \int_\Omega 2 \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_{L^2} \|\alpha_2\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} |A_0(x)| \exp(3t + \|\alpha_2\|_\infty t) \leq \frac{2\|\alpha_2\|_\infty \|\widehat{C}(\cdot, \cdot)\|_{L^2} \|A_0\|_{L^2}}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}(3 + \|\alpha_2\|_\infty)} \exp(3T + \|\alpha_2\|_\infty T)$$

On a réussi à majorer les trois éléments de la somme par trois quantités finies d'où le résultat.

Maintenant que l'on a ce résultat, on utilise le fait que A est solution de l'équation différentielle pour majorer la norme $L^2((0, T) \times \Omega)$ de $\frac{dA}{dt}$ et le deuxième résultat est démontré. ■

Théorème 2

L'équation 4 admet une unique solution faible $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ telle que $\frac{du}{dt} \in L^2((0, T) \times \Omega)$ c'est-à-dire vérifie :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega A(t, x) \frac{dw}{dt} \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega [r(t, x) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}(t, x))] A(t, x) w(t, x) \, dt \, dx \\ + \int_\Omega A_0(x) w(0, x) \, dx + \int_0^T \int_\Omega \alpha_1(t, x) \widehat{C}(t, x) w(t, x) \, dt \, dx = 0 \end{aligned}$$

$\forall w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ tel que $\frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ et $w(T) = 0$

Démonstration : On démontre l'existence en montrant que A est solution faible. On va calculer la quantité :

$$\int_0^T \int_\Omega [A(t, x) \frac{dw}{dt} + \alpha_1(t, x) \widehat{C}(t, x) w(t, x) + [r(t, x) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}(t, x))] A(t, x) w(t, x)] \, dt \, dx + \int_\Omega A_0(x) w(0, x) \, dx$$

Pour cela on va utiliser l'expression de A et la remplacer. On commence par regarder :

$$\int_0^T \int_\Omega [\lambda(t) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \widehat{A}(s, x)) \, ds \right) + A_0(x) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \widehat{A}(s, x)) \, ds \right)] \frac{dw}{dt} \, dx \, dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \lambda(t) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right) \frac{dw}{dt} \, dx \, dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} [\lambda(t) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right)]' w(t, x) \, dx \, dt + \text{crochet de l'IPP nul} \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} [\lambda(t)' + \lambda(t)(r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x)))] \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right) w(x, t) \, dx \, dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} [\hat{C}(t, x) \alpha_1(t, x) + \lambda(t)(r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x)))] \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right) w(x, t) \, dx \, dt
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on a :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} A_0(x) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right) \frac{dw}{dt} \, dx \, dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} A_0(x)(r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))) \exp \left(\int_0^t r(s, x) - \alpha_2(s, x, \hat{A}(s, x)) \, ds \right) w(t, x) \, dx \, dt - \int_{\Omega} A_0(x) w(0, x) \, dx
\end{aligned}$$

Si l'on remplace maintenant les expressions dans celle de départ et qu'on remplace A par son expression dans le terme :

$$\int_0^T \int_{\Omega} [r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))] A(t, x) w(t, x) \, dt \, dx$$

On remarque que la quantité de départ est nulle.

Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il y a deux solutions A_1 et A_2 , on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (A_1(t, x) - A_2(t, x)) \frac{dw}{dt}(t, x) \, dt \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} [r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))] (A_1(t, x) - A_2(t, x)) w(t, x) \, dt \, dx = 0$$

On a donc :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |A_1(t, x) - A_2(t, x)| \left| \frac{dw}{dt}(t, x) \right| \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} |r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))| |A_1(t, x) - A_2(t, x)| |w(t, x)| \, dt \, dx \geq 0$$

D'où par IPP en prenant $w \neq 0$ pp :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))| |A_1(t, x) - A_2(t, x)| \, dt \, dx \geq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{d|A_1 - A_2|}{dt}(t, x) \, dt \, dx$$

On peut donc appliquer le lemme de Gronwall et on obtient que $A_1 = A_2$. ■

2.1.2 Un problème auxiliaire et quelques majorations

On introduit un problème auxiliaire :

$$\begin{cases} \frac{dC^*}{dt} &= \|\alpha_2\|_\infty \|\widehat{A}(t, \cdot)\|_\infty \\ C^*(0) &= \|C_0\|_\infty \end{cases}$$

Cette équation différentielle possède une unique solution C^* telle que $C^*(t) \in L^\infty(0, T)$

On introduit maintenant la proposition suivante :

Proposition 4

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \operatorname{div}(h(t, x) \cdot \nabla_x u) + \mu(t, x) \cdot u &= f(t, x) \\ u(0, x) &= u_0(x) \\ (h(t, x) \cdot \nabla_x u(t, x)) \cdot n(x) &= 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec les hypothèses :

- $u_0 \in L^2(\Omega)$ et à valeurs positives ou nulles
- $\mu \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ et est à valeurs positives ou nulles
- $b \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ et est valeurs positives
- $f \in L^2((0, T) \times \Omega) \cap L^\infty((0, T) \times \Omega)$ et à valeurs positives ou nulles
- h est strictement positive et bornée

Si :

- $f_1(t, x) \geq f_2(t, x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega \text{ et } \forall t \in]0, T[$
- $u_{01}(x) \geq u_{02}(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$
- $\mu_2(t, x) \geq \mu_1(t, x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega \text{ et } \forall t \in]0, T[$

Alors les solutions du système 5 sont telles que $u_1 \geq u_2 \geq 0 \ \forall x \in \Omega \text{ et } \forall t \in]0, T[$.

On déduit de la proposition le corollaire suivant :

Corollaire 1

$$0 \leq C(t, x) \leq C^*(t) \ \forall x \in \Omega \text{ et } \forall t \in]0, T[$$

On voudrait maintenant borner A . Au vu de l'expression de A et des différentes hypothèses que nous avons faites, il est clair que A est positive.

On a donc en reprenant une inégalité trouvée lorsque l'on cherchait à borner la norme L^2 de A :

$$0 \leq A(t, x) \leq \frac{\|\widehat{C}(\cdot, x)\|_2 \|\alpha_1\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} \exp(2t + \|\alpha_2\|_\infty t) + |A_0(x)| \exp(t)$$

Or :

$$0 \leq \widehat{C}(t, x) \leq \widehat{C}^*(t)$$

Donc :

$$0 \leq \|\widehat{C}(\cdot, x)\|_L^2 \leq \|\widehat{C}^*\|_L^2 \text{ et } |A_0(x)| \leq \|A_0\|_\infty$$

D'où :

$$0 \leq A(t, x) \leq A^*(t)$$

Avec :

$$A^*(t) = \frac{\|\widehat{C}^*\|_2 \|\alpha_1\|_\infty}{(2 + 2\|\alpha_2\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} \exp(2t + \|\alpha_2\|_\infty t) + \|A_0\|_\infty \exp(t)$$

Comme $t \in]0, T[$, on a : $A^* \in L^\infty(0, T)$

2.1.3 Méthode de point fixe

Les paragraphes précédents nous ont permis de majorer les solutions de notre système d'équations découplées. Nous allons maintenant utiliser un théorème de point fixe pour réussir à revenir à notre système couplé et à obtenir une unique solution faible.

On souhaite montrer que l'application :

$$\phi : X \longrightarrow X \text{ définie par } \phi(\widehat{A}, \widehat{C}) = (A, C)$$

où :

$$X = \{(C, A) \in L^2((0, T) \times \Omega) \times L^2((0, T) \times \Omega), \quad 0 \leq C(t, x) \leq C^*(t) \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ \text{et } 0 \leq A(t, x) \leq A^*(t) \text{ dans } (0, T) \times \Omega\}$$

et A et C sont solutions de notre système d'équation 2 est strictement contractante.

Remarque 4

On a supposé que \widehat{A} et \widehat{C} étaient des fonctions bornées par des fonctions qui ne dépendaient que du temps. Or ces fonctions nous pouvons les choisir de sorte que :

$$\widehat{A}^*(t) \leq A^*(t) \text{ et } \widehat{C}^*(t) \leq C^*(t)$$

Nous allons commencer par montrer le lemme suivant :

Lemme 1

Il existe deux constantes k_1 et k_2 dépendant uniquement de $\|A^*\|_\infty$, $\|\alpha_2\|_\infty$, $\|\alpha_1\|_\infty$ et $\|\widehat{A}_1^*\|_\infty$ telles que pour $t \in (0, T)$, on ait :

$$\frac{d}{dt} (\|(C_1 - C - 2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2) \leq k_1 (\|(C_1 - C_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2) \\ + k_2 (\|(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 + \|(\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2)$$

Démonstration : On a en reprenant l'expression de A :

$$\frac{d}{dt} (A_1 - A_2) = r(t, x)(A_1 - A_2) + \alpha_1(t, x)(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}_1(t, x))A_2 + \alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x))A_1$$

On multiplie par $(A_1 - A_2)$ des deux côtés de l'équation et il en vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d(A_1 - A_2)^2}{dt} - \alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x))(A_2 - A_1)(A_1 - A_2) = \alpha_1(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(A_1 - A_2) \\ + A_1(\alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x)) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}_1(t, x)))(A_1 - A_2)$$

Donc on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A_1 - A_2)^2 dx + \int_{\Omega} \alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x))(A_2 - A_1)^2 dx = \int_{\Omega} \alpha_1(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(A_1 - A_2) dx + \\ \int_{\Omega} A_1(\alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x)) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}_1(t, x)))(A_1 - A_2)$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A_1 - A_2)^2 dx \leq \int_{\Omega} \alpha_1(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(A_1 - A_2) dx + \int_{\Omega} A_1(\alpha_2(t, x, \widehat{A}_2(t, x)) - \alpha_2(t, x, \widehat{A}_1(t, x)))(A_1 - A_2)$$

On passe aux valeurs absolues, on majore A_1 et on utilise $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A_1 - A_2)^2 dx \leq \frac{\|\alpha_1\|_{\infty}}{2} (\|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t, \cdot)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_2^2) + \frac{A^*(t)}{2} (\|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_2^2 + \|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t, \cdot)\|_2^2)$$

Puis on majore par $\|A^*\|_{\infty}$.

On va faire de même avec C :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (C_1 - C_2)^2 dx + \int_{\Omega} d(t, x) |\nabla_x (C_1 - C_2)| dx + \int_{\Omega} \alpha_1(t, x) (C_1 - C_2)^2 dx \\ = & - \int_{\Omega} \widehat{A_1}^*(t, x) (C_1 - C_2) (\alpha_2(t, x, \widehat{A_2}(t, x)) - \alpha_2(t, x, \widehat{A_1}(t, x))) dx - \int_{\Omega} \alpha_2(t, x, \widehat{A_2}(t, x)) (C_1 - C_2) (\widehat{A_2} - \widehat{A_1}) dx \end{aligned}$$

On en sort :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (C_1 - C_2)^2 dx \leq \int_{\Omega} K_{\alpha_2} \widehat{A_1} |\widehat{A_2} - \widehat{A_1}| |C_1 - C_2| dx + \int_{\Omega} \|\alpha_2\|_{\infty} |C_1 - C_2| |\widehat{A_2} - \widehat{A_1}| dx$$

On majore par $\widehat{A_1}^*$ puis par sa norme infinie et on utilise la même inégalité que précédemment et on arrive à :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (C_1 - C_2)^2 dx \leq \frac{\|\widehat{A_1}^*\|_{\infty} + \|\alpha_2\|_{\infty}}{2} \|(C_1 - C_2)(t, \cdot)\|_2^2 + \frac{K_{\alpha_2} \|\widehat{A_1}^*\|_{\infty} + \|\alpha_2\|_{\infty}}{2} \|(\widehat{A_2} - \widehat{A_1})(t, \cdot)\|_2^2$$

En rassemblant les deux équations et en prenant k_1 et k_2 des constantes adaptées (ceux seront le max entre différentes constantes que l'on vient d'exhiber) on obtient le résultat souhaité. ■

On peut donc en déduire le lemme suivant :

Lemme 2

L'application ϕ est strictement contractante sur $L^2((0, \tau^) \times \Omega) \times L^2((0, \tau^*) \times \Omega)$ avec τ^* petit, ie il existe $\rho(\tau^*) < 1$ tel que :*

$$(\|(C_1 - C_2)(t, \cdot)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_2^2) \leq \rho(\tau^*) (\|(\widehat{C_1} - \widehat{C_2})(t, \cdot)\|_2^2 + \|(\widehat{A_1} - \widehat{A_2})(t, \cdot)\|_2^2)$$

Démonstration : On peut commencer par remarquer que si y est solution de :

$$\begin{cases} y'(t) & \leq k_1 y(t) + k_2 z(t), \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

avec comme hypothèse $k_1 \geq 0$ et $k_2 \geq 0$ alors on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \int_0^t \exp(k_1(t-s)) z(s) ds$$

si on a z qui est une fonction croissante on peut donc tirer l'inégalité :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \left(\int_0^t \exp(k_1(t-s)) \, ds \right) z(t) \leq \frac{k_2}{k_1} \exp(k_1 t - 1) z(t)$$

on va donc poser :

$$\begin{aligned} y(t) &= \|(C_1 - C_2)(t, \cdot)\|_2^2 + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot)\|_2^2 \\ z(t) &= \|(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)(t, \cdot)\|_2^2 + \|(\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2)(t, \cdot)\|_2^2 \end{aligned}$$

on obtient la relation souhaitée avec $\rho(t) = \frac{k_1}{k_2} \exp(k_1 t - 1)$ inférieur à 1 si t petit.

On peut donc majorer $\frac{k_1}{k_2}(\exp(k_1 t - 1))$ par $\frac{k_1}{k_2} \exp(k_1 \tau^* - 1)$ puis intégrer l'inégalité par rapport au temps. ϕ est donc contractante sur $L^2((0, \tau^*) \times \Omega)$. ■

L'espace $L^2((0, \tau^*) \times \Omega)$ étant complet, on peut appliquer le théorème de point fixe de Picard et on a un unique point fixe.

Il faudrait montrer maintenant que le point fixe obtenu est solution faible de notre problème de départ. On ne fera ici qu'une partie de la preuve, pour plus de détails voir ([5])

Considérons une suite (A_n, C_n) qui tend vers (A, C) dans X . On va alors montrer que A et C sont solutions faibles. On sait que A_n est solution faible :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} A_n(t, x) \frac{dw}{dt} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} [r(t, x) - \alpha_2(t, x, A_{n-1}(t, x))] A_n(t, x) w(t, x) \, dt \, dx + \\ \int_{\Omega} A_0(x) w(0, x) \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_1(t, x) C_{n-1}(t, x) w(t, x) \, dt \, dx = 0 \end{aligned}$$

On va regarder maintenant :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} (A_n(t, x) - A(t, x)) \frac{dw}{dt} \, dx \, dt \right| \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} |A_n(t, x) - A(t, x)| \left| \frac{dw}{dt} \right| \, dt \, dx \end{aligned}$$

Puis par Cauchy-Schwarz :

$$\leq \|A_n - A\|_{L^2} \left\| \frac{dw}{dt} \right\|_{L^2}$$

On peut obtenir de la même manière :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_1(t, x) (C_{n-1}(t, x) - C(t, x)) w(t, x) \, dt \, dx \right| \\ & \leq \|C_{n-1} - C\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} [r(t, x) (A_n(t, x) - A(t, x)) w(t, x) \, dt \, dx \right| \\ & \leq \|A_n - A\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [-\alpha_2(t, x, A_{n-1}(t, x))A_n(t, x) + \alpha_2(t, x, A(t, x))A(t, x)]w(t, x) dt dx \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (A(t, x) - A_{n-1}(t, x))\alpha_2(t, x, A_{n-1}(t, x)) + A(t, x)w(t, x)[\alpha_2(t, x, A_{n-1}(t, x)) - \alpha_2(t, x, A(t, x))] dt dx \end{aligned}$$

Donc en passant à la valeur absolue , en utilisant la continuité de α_2 et les mêmes outils qu'avant on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} [-\alpha_2(t, x, A_{n-1}(t, x))A_n(t, x) + \alpha_2(t, x, A(t, x))A(t, x)]w(t, x) dt dx \right| \\ & \leq \|A_n - A\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|A^*\|_{\infty} K_{\alpha_2}^2 \|A_n - A\|_{L^2} \end{aligned}$$

On fait tendre n vers l'infini et toutes nos majorations tendent vers 0 ce qui montre que A et C sont solutions faibles de la deuxième équation.

On fait de même pour la première équation et on obtient que le point fixe est solution faible.

2.2 L'équation de convection

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} + v(t, x)\nabla_x C &= -\alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, A(t, x))A \\ \frac{dA}{dt} &= (r(t, x) - \alpha_2(t, x, A(t, x)))A + \alpha_1(t, x)C \end{cases}$$

On considérera les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} C(0, x) &= C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0, x) &= A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Ainsi que les conditions au bords :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ \frac{dA}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases}$$

Cette partie a été finalement abandonnée. Après avoir effectué un travail de recherche, nous n'avons pas réussi à trouver de référence qui pouvait nous aider à conclure sur cette partie. La plupart des références actuelles s'intéressent en effet à des problèmes non linéaire. Ce qui rend difficile la résolution de ce problème est la présence d'un domaine borné en espace. En effet, si nous souhaitons appliquer la méthode des caractéristiques, nous avons un problème lorsque les caractéristiques ressortent du domaine. Nous avons des contraintes à la fois lorsqu'elles entrent et lorsqu'elles sortent. La référence [3] expliquait certains points de la théorie que j'ai repris dans l'annexe 2.

3 L'équation de réaction-diffusion-convection

On s'intéresse maintenant au système d'équation (1) avec ses conditions au bords et ses conditions initiales. De la même manière que précédemment nous allons découpler les équations à l'aide des fonctions \hat{A} et \hat{C} qui vérifieront les mêmes hypothèses que dans la partie 2.

3.1 Le problème découplé

On s'intéresse donc à :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} + (1 - \lambda_v)v(t, x)\nabla_x C &= \lambda_v \operatorname{div}(d(t, x)\nabla_x C) - \alpha_1(t, x)C + \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))\hat{A} \\ \frac{dA}{dt} &= (r(t, x) - \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x)))A + \alpha_1(t, x)\hat{C} \end{cases} \quad (6)$$

On considérera les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} C(0, x) &= C_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\ A(0, x) &= A_0(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

et les conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ \frac{dA}{dn} &= 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases}$$

L'équation en A : On obtient les mêmes résultats que précédemment, se reporter à la partie 2 sur l'équation de diffusion.

l'équation en C : On va poser une nouvelle hypothèse dans cette partie, on suppose maintenant que :

$$d_{min} > \max\left(\frac{\|v_1\|_\infty}{2}, \frac{\|v_2\|_\infty}{2}\right)$$

On pose :

$$a(t, C, w) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 d(t, x) \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + v(t, x) \cdot \nabla_x C w + \alpha_1(t, x) C w \right) dx$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3

On considère l'équation différentielle (6) munie de ses conditions initiales et de bords.

Si $f = \alpha_2(t, x, \hat{A}(t, x))\hat{A}(t, x) \in L^2(0, T; \Xi^{-1}(\Omega))$ alors il existe un unique $C \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que :

$$\int_0^T a(t; C(t), w(t)) dt - \int_0^T \left[C(t), \frac{dw}{dt} \right] dt = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle dt + [C_0, w(0)]$$

et ce

$$\forall w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \text{ avec } \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))' \text{ et } w(T) = 0$$

Démonstration : Il faut montrer que a vérifie les conditions 1 et 2 de l'appendice 1 :

- a est mesurable et continue : on utilise Cauchy-Schwarz pour le montrer.
- Pour la condition 2, on a :

$$a(t, u, u) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (d(t, x)(\nabla_x u)^2 + v(t, x) \cdot \nabla_x u \times u + \alpha_1(t, x)u^2) dx$$

On a :

$$v(t, x) \cdot \nabla_x u \times u = v_1(t, x) \frac{du}{dx_1} u + v_2(t, x) \frac{du}{dx_2} u$$

On utilise ensuite que :

$$(u + v_i(t, x) \frac{du}{dx_i})^2 = u^2 + (v_i(t, x) \frac{du}{dx_i})^2 + 2uv_i(t, x) \frac{du}{dx_i}, \forall i \in \{1, 2\}$$

Donc :

$$\int_{\Omega} v(t, x) \cdot \nabla_x u u \, dx \geq \int_{\Omega} -u^2 - \left(\frac{v_1(t, x)^2}{2} \frac{du^2}{dx_1} + \frac{v_2(t, x)^2}{2} \frac{du^2}{dx_2} \right) dx$$

D'où :

$$a(t; u, u) \geq \int_{\Omega} \left(d(t, x) - \max\left(\frac{\|v_1\|_{\infty}^2}{2}, \frac{\|v_2\|_{\infty}^2}{2}\right) |\nabla_x u|^2 + (\alpha_1 - 1)u^2 \right) dx$$

On peut ajouter α qui sera positif des deux côtés de l'inégalité pour tomber sur la condition deux.

On applique après le théorème 4 de l'appendice A pour obtenir ce que l'on souhaite. ■

Pour pouvoir conclure cette partie, il aurait fallu pouvoir trouver un moyen de contrôler C par une fonction C^* comme précédemment. Cependant, les techniques obtenues précédemment ne sont plus valables. Il aurait donc fallu trouver un autre moyen.

Les points qui restent à améliorer sont donc :

- Trouver une manière de contrôler C par une fonction qui ne dépendraient que de t et qui serait borné.
- Finir la méthode de point fixe pour l'équation de réaction-diffusion-convection.
- Essayer d'affaiblir les hypothèses sur d .

A Appendice sur la théorie utilisée pour résoudre l'équation de diffusion

Soit V et H deux espaces de Hilbert avec V dense dans H . On identifie H à son dual, on a donc :

$$V \subset H \subset V'$$

On définit donc :

$$\mathcal{V} = L^2((0, T); V)$$

et

$$\mathcal{H} = L^2((0, T); H)$$

Pour $t \in [0, T]$, soit $a(t; u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur un espace V que l'on suppose séparable. On voudra parfois vérifier des conditions sur a :

condition n°1

$$\begin{cases} \forall u, v \in V, \text{ la fonction } t \mapsto a(t; u, v) \text{ est mesurable} \\ \text{et} \\ |a(t; u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \text{ où } c = Cst, \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

condition n°2

$$\begin{cases} (\text{coercivité uniforme sur } V), \exists \lambda \\ \Re(a(t; v, v)) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \alpha > 0, \forall v \in V, \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Comme, pour t fixé, la forme anti-linéaire $v \mapsto a(t; u, v)$ est continue sur V , on a :

$$a(t; u, v) = [A(t)u, v], \quad A(t)u \in V'$$

On a donc défini une application :

$$A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$$

On souhaite résoudre :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u &= f \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

Le théorème central que l'on a utilisé est :

Théorème 4

On suppose que les hypothèses sur a sont vérifiées et que

$$\begin{cases} \Lambda u = \frac{du}{dt} = u' \\ D(\Lambda; V') = \{u | u \in V', \frac{du}{dt} \in V', u(0) = 0\} \end{cases}$$

Soient u_0 donné dans H et f donné par :

$$f = f_* + f_{**}, \quad f_* \in \Xi', \quad f_{**} \in L^2((0, T); V')$$

Alors il existe u unique dans \mathcal{V} tel que :

$$\begin{aligned} A(t)u + u' &= f \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Avant de démontrer ce théorème, on en énonce un autre qui ne sera pas démontré.

Théorème 5

On suppose que les quatre conditions précédentes sont respectées. Alors pour L donné dans $(\mathcal{V} \cap D(\Lambda^; \mathcal{V}'))'$, il existe un unique $u \in \mathcal{V}$ qui vérifie :*

$$(u, A^*(t)v - v') = (L, v)$$

Remarque 5

On va éclaircir certaine notation :

$$\mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}') = \left\{ v | V \in L^2((0, T); V), \quad v' = \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V'), \text{ avec } v(T) = 0 \text{ si } T < \infty \right\}$$

Ainsi :

$$\overline{\mathcal{D}([0, T]; V)} = \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}') \cap D(\Lambda; \mathcal{V}') \subsetneq \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')$$

On énonce maintenant une proposition qui découle du théorème précédent :

Proposition 5

Dans le théorème précédent on peut choisir (L, v) sous la forme :

$$(L, v) = (f_*, v) + (f_{**}, v) + [u_0, v(0)]$$

avec :

$$f_* \in \Xi', f_{**} \in \mathcal{V}' = L^2((0, T); V'), u_0 \in H$$

On énonce un dernier théorème de densité qui nous sera utile dans la démonstration du théorème :

Théorème 6

$\mathcal{D}([0, T[; V)$ est dense dans Y où :

$$Y = \{v | v \in \mathcal{V}, v' \in \Xi' + \mathcal{V}'\}$$

De plus, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{D}([0, T[; V) & \rightarrow & V \\ u & \mapsto & u(0) \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application :

$$\begin{cases} Y & \rightarrow & H \\ u & \mapsto & u(0) \end{cases}$$

On peut maintenant démontrer le théorème qui nous intéresse.

Démonstration : On commence par prendre L comme dans la proposition 5. On a alors $u \in Y$ et donc par définition de $u(0)$ et par le théorème précédent on a :

$$[u(0), v(0)] = -(u', v) - (u, v') \text{ si } v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')$$

De plus on a :

$$(A(t)u, v) + (u', v) = (f, v) = (L, v) - [u_0, v(0)]$$

On en sort :

$$(u, A^*(t)v - v') - [u(0), v(0)] = (L, v) - [u_0, v(0)]$$

On utilise maintenant le théorème 5 et on obtient :

$$[u(0), v(0)] = [u_0, v(0)] \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')$$

Or comme $v(0)$ parcourt H lorsque v parcourt $\mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')$, on obtient :

$$u(0) = u_0$$

Pour démontrer l'unicité il suffit de remonter les calculs. ■

B Appendice sur les équations de transport avec conditions mixtes

B.1 Le cas de la dimension un

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + a \frac{du}{dx} = 0 & x > 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \geq 0, \quad . \end{cases}$$

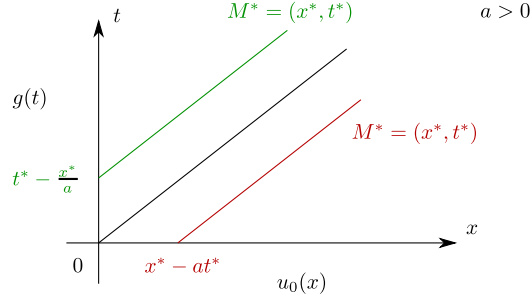


FIGURE 2 – La solution peut rencontrer la frontière $x = 0$ ou $t = 0$

Dans notre cas, on remarque que lorsque l'on remonte les caractéristiques (dans le cas $a > 0$), notre solution peut rencontrer la frontière $x = 0$ et non $t = 0$ (voir figure 2). Il est donc nécessaire de prescrire une valeur sur ce bord :

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

où g est une fonction donnée. Si $M = (x, t)$ est un point du domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ la valeur de u au point M est déterminée de manière unique. La solution de notre problème est donc donnée grâce à la méthode des caractéristiques par :

$$\begin{cases} u(x, t) = u_0(x - at) & \text{si } x - at > 0, \\ u(x, t) = g(t - \frac{x}{a}), & \text{si } x - at < 0. \end{cases}$$

La solution obtenue est de classe \mathcal{C}^1 si les données initiales et au bords sont \mathcal{C}^1 et satisfont les relations de compatibilités :

$$\begin{cases} u_0(0) = g(0) \\ u'_0(0) = -\frac{g'(0)}{a}. \end{cases}$$

Si ces conditions ne sont pas remplies, nous avons une solution faible qui satisfait la condition de saut de Rankine-Hugoniot de chaque côté de la discontinuité $x = at$

Si $a < 0$ les caractéristiques rencontrent le bord lorsqu'elles sortent du domaine. L'information est donc entièrement contenue dans la donnée initiale et l'on ne peut pas préciser la solution sur la frontière. La solution est donc :

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad x \geq 0, t \geq 0,$$

En particulier :

$$u(0, t) = u_0(-at)$$

Dans le cas où $a = 0$, les caractéristiques sont verticales et il n'y a pas besoin de conditions au bord.

Supposons maintenant que $0 < x < 1$. les conditions au bords qui doivent être spécifiées pour les caractéristiques qui entrent sont :

$$\begin{cases} u(0, t) = g(t) & t > 0 \quad \text{si } a > 0 \\ u(1, t) = h(t) & t > 0 \quad \text{si } a < 0. \end{cases}$$

On obtient les figures obtenues en figure 3.

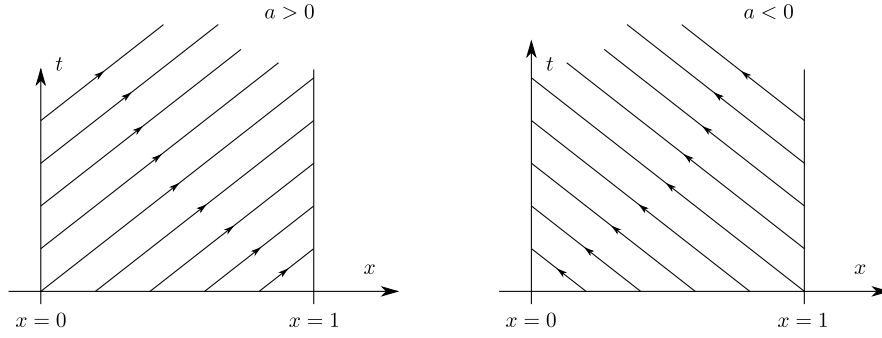


FIGURE 3 – Si on considère un domaine borné pour x : $0 < x < 1$

B.2 Le cas de la dimension deux

B.2.1 Les coefficients sont constants

On considère maintenant le problème :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + a \frac{du}{dx} + b \frac{du}{dy} = 0, & (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$$

et est constante sur les caractéristiques $x - at = \text{constante}$ et $y - bt = \text{constante}$. Si on suppose maintenant que l'on se place sur un domaine borné, il va falloir introduire des conditions de bords. On pose $\mathcal{Q} = \mathcal{O} \times \mathbb{R}_+^*$ qui est inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec pour frontière Σ . \mathcal{Q} est donc un cylindre et on définit deux types de données sur la surface Σ :

- des données initiales sur l'ensemble \mathcal{O} qui correspond donc à $t = 0$
- des données aux bords sur la surface Γ où $\Gamma = \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}_+^*$

Sur la surface Γ , $n_t = 0$, et on dit que la frontière de \mathcal{O} est caractéristique en un point si :

$$an_x + bn_y = 0$$

en ce point où $n = (n_x, n_y)^T$ est la normale unitaire sortante à $\partial\mathcal{O}$ dans le plan $t = 0$.

Pour comprendre ce qui se passe, on commence par regarder un problème sur le demi-espace. On pose donc $\mathcal{O} = \{(x, y)/x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{Q} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ainsi Σ est composée de deux demi-plans :

- le demi-plan $t = 0, x \geq 0$ où les solutions initiales seront prescrites
- $\Gamma = x = 0, t > 0$

On va suivre le même raisonnement qu'en dimension un. Soit un point $M^* = (x^*, y^*, t^*) \in \mathcal{Q}$ et introduisons la ligne caractéristique : $t \rightarrow (x(M^*, t), y(M^*, t))$ définie par

$$\begin{cases} x - at &= x^* - at^* \\ y - bt &= y^* - bt^* \end{cases} \quad (7)$$

La solution est déterminée par la valeur au point où la ligne caractéristique, sur laquelle u est constant, intersecte Σ . Deux cas sont possibles :

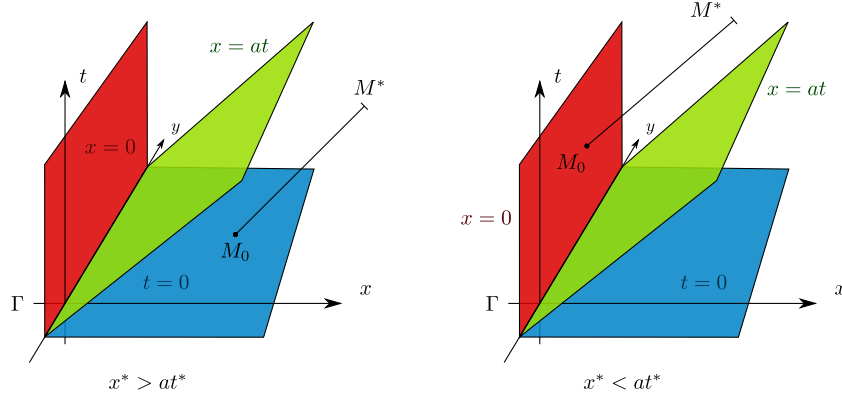


FIGURE 4 – Le cas de la dimension 2 en considérant a positif

- La ligne intersecte le plan $t = 0$ et la donnée initiale déterminera la valeur.
- La ligne intersecte le plan $x = 0$ et c'est la condition au bord qui est prise en compte.

La droite 7 intersecte la frontière $x = 0$ au point t_0 définie par :

$$t_0 = t^* - \frac{x^*}{a}$$

Le cas où $a > 0$.

- Si $x^* > at^*$ alors $t_0 < 0$ mais la droite 7 intersecte la frontière $t = 0$ au point $(x_0, y_0, 0)$ avec $x_0 = x^* - at^*$ et $y_0 = y^* - bt^*$ et la solution est donnée par :

$$u(x^*, y^*, t^*) = u(x^* - at^*, y^* - bt^*, 0) = u_0(x^* - at^*, y^* - bt^*)$$

- Sinon on a $0 \leq t_0 < t^*$ et donc si $0 \leq x^* < at^*$ et le point d'intersection $M_0 = (0, y_0, t_0)$ appartient à $\Gamma = \{x = 0, t \geq 0\}$ et u est donnée par la formule suivante :

$$u(x^*, y^*, t^*) = u(0, y_0, t_0) = u(0, y^* - b(t^* - t_0), t^* - \frac{x^*}{a})$$

Ceci montre que l'on a besoin de prescrire des conditions de bord sur la frontière $x = 0$ lorsque les caractéristiques partent du bord donc on pose :

$$u(0, y, t) = g(y, t), \quad t > 0$$

et on a donc :

$$u(x^*, y^*, t^*) = g(y^* - b\frac{x^*}{a}, t^* - \frac{x^*}{a})$$

La solution u est donc déterminée de manière unique dans ce domaine. La figure 4 permet de visualiser cette explication.

Le cas $a < 0$. Dans ce cas, la droite caractéristique intersecte la frontière $x = 0$ au temps $t_0 > T$, et la frontière $t = 0$ en $x_0 = x^* - at^*$ et $y_0 = y^* - bt^*$. Ainsi on ne peut pas spécifier la solution sur la frontière $x = 0$, la solution est uniquement déterminée par la donnée initiale.

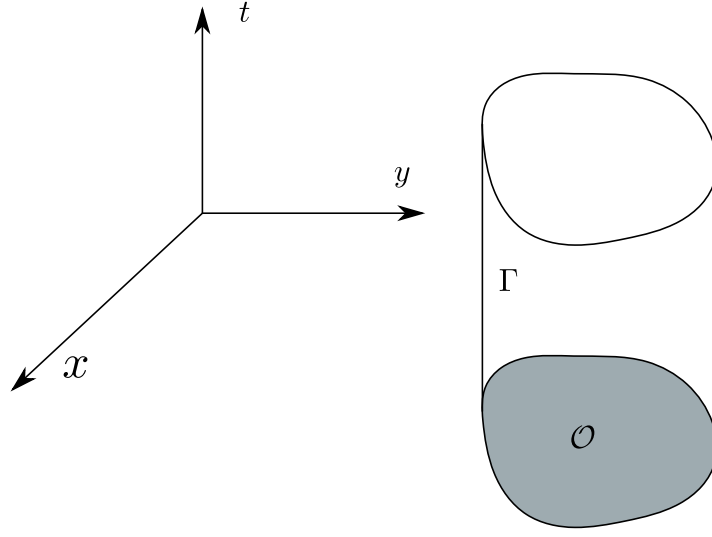


FIGURE 5 – On se place sur un nouveau domaine

Le cas $a=0$ On se retrouve avec les mêmes phénomènes que si $a < 0$ et si la frontière est caractéristique

Finalement on a donc prescrit les conditions de bords sur les parties de Γ où les caractéristiques partent, on note cette frontière $\Gamma_- = \partial\mathcal{O}_- \times \mathbb{R}^+$ où $\partial\mathcal{O}_- = \{(x, y) \in \partial\mathcal{O}, c.n < 0\}$. Dans ce cas particulier la normale unitaire à $\partial\mathcal{O}$ est donnée par $n = (-1, 0)^T$ et on a donc $\Gamma_- = \Gamma = \{x = 0, t > 0\}$ si $a > 0$ et $\Gamma_- = \emptyset$ si $a < 0$

On va maintenant regarder le cas général en considérant $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$ (voir figure 5). Pour savoir si la solution peut être définie au point $(x^*, y^*, t^*) \in \mathcal{Q} = \mathcal{O} \times \mathbb{R}_+^*$, on dessine comme précédemment les droites caractéristiques 7 et on regarde son intersection avec la frontière ϵ de \mathcal{Q} .

Deux cas apparaissent alors :

- Si la droite reste dans \mathcal{Q} et intersecte le plan $t = 0$ au point $x_0 = x^* - at^*$ et $y_0 = y^* - bt^*$ qui se situe à l'intérieur de \mathcal{O} alors la solution est déterminée par la donnée initiale :

$$u(x^*, y^*, t^*) = u_0(x_0, y_0) = u_0(x^* - at^*, y^* - bt^*)$$

- Dans l'autre cas, la droite intersecte Γ au point (x_0, y_0, t_0) au temps t_0 qui vérifie $0 \leq t_0 < t^*$. D'une part, les points sont sur une même droite caractéristique ce qui entraîne :

$$(x^* - x_0, y^* - y_0)^T = (t^* - t_0)c$$

D'autre part, puisque $(x^*, y^*) \in \mathcal{O}$ et que $(x_0, y_0) \in \partial\mathcal{O}$, on obtient en admettant que \mathcal{O} n'est pas caractéristique au point $m_0 = (x_0, y_0)$:

$$(x^* - x_0, y^* - y_0).n < 0$$

où n est la normale unitaire sortante à \mathcal{O} dans le plan (x, y) .

Ainsi, les conditions au bords doivent être prescrites sur la partie de la frontière Γ_- qui correspond à la partie de la frontière où les caractéristiques entrent.

$$\partial\mathcal{O}_- = \{(x, y) \in \partial\mathcal{O}, c.n(x, y) < 0\}$$

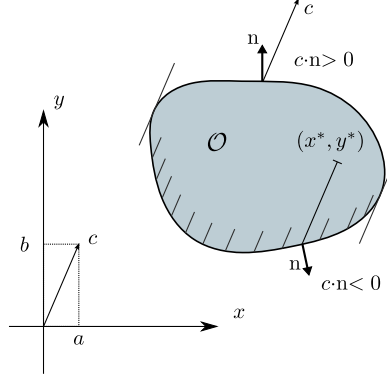


FIGURE 6 – On regarde si les caractéristiques entrent ou sortent du domaine

$$u(., t) = g(., t) \iff u = g \text{ sur } \Gamma_- = \partial\mathcal{O}_- \times \mathbb{R}_+$$

On ne doit cependant pas les prescrire sur $\partial\mathcal{O}_+ = \{(x, y) \in \partial\Omega, c \cdot n(x, y) > 0\}$ qui correspond à la frontière où les droites caractéristiques sortent (voir figure 6).

On peut noter que si \mathcal{O} est caractéristique au point $m_0 = (x_0, y_0)$, on peut voir que u ne peut pas être spécifié sur cette partie de la frontière.

On note t_0 l'instant lorsque la caractéristique intersecte Σ , $t_0 = \inf\{t \geq 0 / (x(M^*, t), y(M^*, t), t) \in \overline{\mathcal{Q}}\}$ et (x_0, y_0) les coordonnées du point d'intersection. On a donc :

$$u(x^*, y^*, t^*) = u_0(x_0, y_0) = u_0(x^* - at^*, y^* - bt^*) \text{ si } t_0(x^*, y^*, t^*) = 0$$

$$u(x^*, y^*, t^*) = g(x_0, y_0, t_0) = g(x^* - a(t^* - t_0), y^* - b(t^* - t_0), t_0), \text{ si } t_0(x^*, y^*, t^*) > 0$$

La condition $t_0 > 0$ implique que $x(M^*, t_0), y(M^*, t_0) \in \partial\mathcal{O}_-$ et $(x(M^*, t_0), y(M^*, t_0), t_0) \in \Gamma_-$

On peut obtenir une régularité \mathcal{C}^1 sur la solution u si les données sont assez régulières et si elle satisfait des relations de compatibilités. En particulier, u est continue des deux côtés de la surface $S = \{M^*/(x(M^*, 0), y(M^*, 0)) \in \partial\mathcal{O}_-\}$ (ce qui correspondait à la droite $x = at$ dans le cas de la dimension 1) où $(x(M^*, 0), y(M^*, 0))$ est le point d'intersection lorsque l'on remonte la caractéristique depuis M^* avec le plan $t = 0$. S est donc un cylindre oblique (de base $\partial\mathcal{O}_-$) de direction le vecteur $C = (c, 1)$. De plus, la continuité de u à travers S suppose que :

$$u_0(x, y) = g(x, y, 0) \text{ sur } \partial\mathcal{O}_-$$

Autrement, nous avons une solution faible : comme l'équation est linéaire la relation de Rankine-Hugoniot est simplement :

$$an_x + bn_y + n_t = 0$$

où $(n_x, n_y, n_t)^T$ est le vecteur normal à S . Par définition de S , c'est en effet une relation qui est satisfaite.

B.2.2 Les coefficients dépendent du temps et de l'espace

C Remerciements

Mon travail enfin achevé, je tiens à remercier Cédric Wolf sans qui ce stage n'aurait pas pu voir le jour ainsi que Nicolas Parisey et Mamadou Ciss pour leur aide en biologie. Leurs précieux conseils m'ont permis de mener à bien mon travail. Je remercie aussi Basile Pillet pour l'aide graphique qu'il m'a apporté.

Références

- [1] *Modélisation spatio-temporelle de la multiplication de puceron des épis de blé à la surface de la France* de Mamadou Ciss
- [2] *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol1* par J.L. Lions et E. Magenes
- [3] *Numerical Approximation Hyperbolic Systems of Conservation Laws* par E. Godlewski et P-A Raviart
- [4] *A multi-structured epidemic problem with direct and indirect transmission in heterogeneous environments* de S.Madec et Cédric Wolf
- [5] *Modélisation et analyse mathématiques de la propagation d'un microparasite dans une population structurée en environnement hétérogène* de Cédric Wolf