Trigonométrie

Dans toutes les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

Calcul de cosinus, sinus et tangente

▷ 1

1) Représenter graphiquement, à la règle et au compas, les grandeurs suivantes :
a. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
b. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

2) Calculer leurs valeurs exactes. (Indication : on pourra exprimer $\frac{5\pi}{12}$ à l'aide de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.)

► 2

Calculez les valeurs suivantes :

1) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$,

2) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$,

3) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$,

4) $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$,

5) $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ puis $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

► 3

On veut calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose $\theta = \frac{2\pi}{5}$, $s = \cos(\theta) + \cos(3\theta)$ et $p = \cos(\theta) \times \cos(3\theta)$.

1) Comparez $\cos(\theta)$ et $\cos(4\theta)$, $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

2) Montrez que $s = 2p$.

3) Montrez que $s^2 = \frac{1}{2}(2 + 3s)$.

4) Déduisez-en les valeurs de s et de p.

5) Concluez.

► 4

1) Sans calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ individuellement, calculer les valeurs de

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► 5

On suppose que a appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin(a) = \frac{1}{3}$.
Calculer $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\sin(3a)$ et $\sin(4a)$.

Calcul algébrique

▷ 6

Soit a et b deux réels. Montrer que

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2(a) - \sin^2(b)$$

et que $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2(a) - \sin^2(b)$.

► 7

Déterminer l'ensemble de définition des expressions suivantes, puis les simplifier :

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}, \quad \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}.$$

▷ 8

À l'aide notamment des angles associés, montrer que

1) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 0$,

2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 2$,

3) ♠ $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}$.

► 9

Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\cos(2x)$:

1) $2\cos^2(x) + 4\sin^2(x)$,

2) $\cos^4(x) - 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^4(x)$,

3) $\cos^4(x) - \sin^4(x)$.

► 10

Factoriser les expressions suivantes :

1) $1 + \cos(2x) + \cos(x)$,

2) $1 - \cos(2x) + \sin(x)$,

3) $1 + \cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$,

4) $1 + \cos(x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

▷ 11 Linéarisation

Soit x un réel quelconque.

1) Linéariser $\cos^2(x)\sin(2x)$, $\cos(x)\sin^2(x)$ et $\cos^4(x)$.

2) En déduire l'intégrale de ces quantités sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

► 12

Un mouvement périodique vérifie

$$\forall t \geqslant 0, \quad x(t) = 2\cos(\omega t) - 3\sin(\omega t)$$

où ω est une constante strictement positive.

1) Déterminer $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ pour que

$$\forall t \geqslant 0, \quad x(t) = A\cos(\omega t - \varphi).$$

2) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale prises par x.
En quels instants ces valeurs sont-elles atteintes ?

Équations trigonométriques

▷ 13 Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$; écrire l'ensemble des solutions et le représenter graphiquement.

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

2) $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\cos(2x) = \sin(3x)$;

4) $\cos(x) = -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan(x)$;

6) $\cos(x) - \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (indic. : transf. amplitude-phase).

7) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$.

► 14

Soit x un nombre réel.

1) Factoriser l'expression $1 - \cos(x) + \sin(x)$.

2) Résoudre l'équation $1 - \cos(x) + \sin(x) = 0$.

► 15

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) \quad \cos(3x) - 2\cos(2x) = 0.$$

1) Exprimer le premier membre de l'équation en fonction de $\cos(x)$ seulement.

2) Résoudre l'équation (E).

► 16

Résoudre l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.

Arc-cosinus, arc-sinus, arc-tangente

▷ 17

1) Donner la valeur de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ sous l'hypothèse que

a. $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$;

b. $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$;

c. $\sin(\theta) = \frac{1}{4}$ et $\tan(\theta) > 0$;

d. ♠ $\tan(\theta) = \sqrt{5}$ et $\cos(\theta) < 0$.

2) Dans chaque cas, écrire une relation impliquant θ et un arc-cosinus / un arc-sinus / un arc-tangente.

► 18

Calculez les quantités suivantes :

1) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{9}\right)\right)$ et $\arccos\left(\cos\left(\frac{13\pi}{5}\right)\right)$,

2) $\arctan\left(\tan\left(\frac{21\pi}{8}\right)\right)$ et $\arccos\left(\cos\left(\frac{13\pi}{5}\right)\right)$,

3) $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ et $\arcsin\left(\cos\left(\frac{21\pi}{8}\right)\right)$.

► 19

Calculez les valeurs suivantes :

1) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ et $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$,

2) $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{7}\right)\right)$,

3) $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ et $\tan\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{13}}{7}\right)\right)$,

4) $\cos\left(\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)\right)$ et $\sin\left(\arctan(\sqrt{2})\right)$.

► 20

Démontrez les relations suivantes :

1) $\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$,

2) $\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,

3) $\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$.
Que devient cette relation lorsque $x < 0$?

(Indication : quelles sont les définitions d'$\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$?)