Analyse asymptotique

Limites et équivalents

▷ 1 Quelques questions basiques

Soit f, g et φ des fonctions définies au voisinage de a, non nulles au voisinage de a.

1) Reformuler en langage plus usuel :

a. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 1$,

b. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$,

c. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(1)$.

2) Montrer que si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(\varphi(x)\big)$, alors $f(x)\,g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\,\varphi(x)\big)$.

▷ 2 Théorèmes généraux, composition, croissances comparées

Déterminer les limites des expressions suivantes :

1) $2x^3-10x^2-x+1$ en $+\infty$,

2) $\dfrac{2x^2+x-5}{x-3}$ en $+\infty/0$,

3) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ en $\dfrac{1}{3}$,

4) $x-\sqrt{x}$ en $+\infty/0$,

5) $\ln(x^2)$ en $+\infty/0$,

6) $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty/0$,

7) $\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty/0$,

8) $\dfrac{x-2\sqrt{x}}{3x-1}$ en $+\infty/\dfrac{1}{3}$,

9) $\sin\!\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$,

10) $x\,\sin\!\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0,

11) $\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ en $+\infty/1$,

12) $\dfrac{x+\sin(x)}{2x+1}$ en $+\infty$,

13) $(\mathrm{e}^{-x})^2$ en $+\infty/0$,

14) $\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^x$ en $\pm\infty$,

15) $\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$ en $+\infty/0$,

16) $\sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$,

17) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$,

18) $\cos\!\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ en $+\infty$,

19) $\dfrac{\cos(\pi x)}{x+1}$ en $+\infty/-1$,

20) $x-\ln(x)$ en $+\infty/0$,

21) $2\sqrt{x}-\ln(x)$ en $+\infty/0$,

22) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $+\infty$,

23) $x^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty/0$,

24) $\dfrac{\ln x}{x^{1/3}}$ en $+\infty/0$,

25) $\dfrac{2^x}{x^2}$ en $+\infty$,

26) 2^x-x^2 en $+\infty$,

27) $\dfrac{2^x-x^2}{3^x+x^3}$ en $+\infty$,

28) $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x}}$ en $0^{\pm}$,

29) $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ en $0/+\infty$,

30) $x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ en $0/+\infty$.

▷ 3 Équivalents gentils

Déterminer un équivalent des expressions suivantes puis leur limite aux points indiqués :

1) $\dfrac{\sin(3x)}{x^3+2x}$ en 0,

2) $\dfrac{\tan(x^2)}{x}$ en 0,

3) $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$ en 0,

4) $\dfrac{\ln(1-x)}{1-\cos(x)}$ en 0,

5) $\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}$ en 0,

6) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-1-x}{2x}$ en 0,

7) $\dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}$ en 0^+,

8) $\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin x}{x^2+x^3}$ en 0,

9) $\dfrac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$ en 0,

10) $\dfrac{(1+\sqrt{x})^5-1}{x-\sqrt{x}}$ en 0^+.

► 4 En un autre point que 0

Étudier les limites suivantes (on effectuera un changement de variable puis on utilisera des équivalents) :

1) $\dfrac{x^{12}-1}{x^{33}-1}$ en 1,

2) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\tan(x-1)}$ en 1.

3) $\dfrac{2\sin x-1}{\sin^2(6x-\pi)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$,

► 5 Équivalents qui grognent

À l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :

1) $\ln\big(1+\sin(x)\big)\,\mathrm{cotan}(2x)$ en 0,

2) $\dfrac{1-\sin\!\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)}{x+\sqrt{x^2+2x}}$ en 0,

3) $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ en $0^{\pm}$,

4) $\ln(x)\,\tan\big(\ln(1+x)\big)$ en 0,

5) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$.

6) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ en $+\infty$,

7) $(\cos x)^{1/(\sin x)^2}$ en 0,

8) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(2x)}-\mathrm{e}^{\sin(x)}}{\tan(x)}$ en 0,

9) $\cos(x)\,\cos\!\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+,

► 6 ♠ Un peu plus subtil

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\!\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)$;

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2}$;

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin x)^x-1}{x^x-1}$ (on déterminera d'abord un équivalent du numérateur quand $x\to 0^+$) ;

4) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\tan\!\left(\tfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

► 7 Avec des paramètres

Étudier les limites suivantes :

1) $x\left(a^{1/x}-1\right)$ (où $a>0$) en $+\infty$,

2) $\dfrac{\ln\big(\cos(ax)\big)}{\ln\big(\cos(bx)\big)}$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$) en 0,

3) $\sqrt{x^3+a\,x^2}-m\,x\,\sqrt{x+2}$ (où $(a,m)\in\mathbb{R}^2$) en $+\infty$.

► 8 Restons calmes

1) Déterminer un équivalent simple de $\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$ en $+\infty$.

2) Calculer la limite en 0 de $\big(\ln(\mathrm{e}+x)\big)^{1/x}$.

3) Soit f, g et h les trois fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=x^x,\quad g(x)=x^{f(x)}\ \text{ et }\ h(x)=x^{g(x)}.$$

Déterminer les limites en 0 de ces trois fonctions.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1}$.

Suites implicites

► 9 Équivalent et développement asymptotique de suites implicite

On considère la fonction $f:\ x\longmapsto x-\ln x$.

1) Pour tout entier $n\geqslant 2$, montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique dans $]0,1[$, notée u_n, et une autre dans $]1,+\infty[$, notée v_n.

2) Montrer que la suite u converge et préciser sa limite. Déterminer un équivalent de u_n quand $n\to+\infty$.

3) Déterminer un équivalent de la suite v.

4) Montrer que $v_n=n+\ln(n)+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(\ln(n)\big)$.

► 10

1) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand, l'équation

$$(x-n)\ln(n)=x\ln(x-n)$$

d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une et une seule solution x_n, et que $x_n\in\,]n+1,n+2[$.

2) Montrer que $x_n\underset{+\infty}{\sim}n$ et que $(x_n-n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.

3) En étudiant $\ln(x_n-n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-n)=1$ puis que

$$x_n-n-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n}.$$