# 1 Séries définies explicitement

**1** Étudier la nature des séries suivantes :

**1)** $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. **2)** $\sum \frac{n}{2^n+n}$. **3)** $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

**4)** $\sum \frac{1}{(n^2+1)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$. **5)** $\sum \frac{n^2\ln n}{4^n}$.

**6)** $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. **7)** $\sum \frac{n!^3}{(3n)!}$.

**8)** $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. **9)** $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(a\in\mathbb{R})$.

**10)** $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$. **11)** $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$.

**12)** $\sum \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$. **13)** $\sum \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{n}\ln k$.

**14)** $\sum \cos^n\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$. **15)** $\sum \int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}\,dx$.

**16)** $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^x\tan x\,dx$. **17)** $\sum \frac{n!^2}{2^{n^2}}$.

---

**2** Étudier la nature des séries suivantes :

**1)** $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$. **2)** $\sum (-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$.

**3)** $\sum \frac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$. **4)** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**5)** $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+\sin(n)}$. **6)** $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

**7)** $\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$.

---

**3** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes.

**1)** $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. **2)** $\sum \frac{n}{7^n}$.

**3)** $\sum \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

**4)** $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

---

**4** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n=\ln\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Montrer, sans utiliser la formule de Stirling, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

---

**5**

**1)** Justifier l'existence de : $\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**2)** Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive simple telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k.$$

**3)** En déduire que la suite $\left(\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

**6**

**1)** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que la série $\sum\frac{P(n)}{n!}$ converge. On notera $S(P)$ sa somme.

**2)** On rappelle que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$. On pose : $L_0=1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ :
$$L_k=X(X-1)\dots(X-p+1).$$
Calculer $S(L_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

**3)** Calculer : $S(X^3)$.

---

**7** Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

**1)** On suppose : $\alpha>1$. Trouver un réel $\gamma>1$ pour lequel : $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclusion ?

**2)** On suppose : $\alpha<1$. Trouver un réel $\gamma<1$ pour lequel : $\frac{1}{n^\gamma}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right)$. Conclusion ?

**3)** Déterminer la nature de la série $\sum\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.

**4)** Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries de Bertrand.

---

**8** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$u_n=\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}.$$

**1)** Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans le cas où : $\alpha\leqslant 0$ ou $\alpha>1$.

**2)** On suppose à présent que : $0<\alpha\leqslant 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n=u_{2n-1}+u_{2n}$.

**a)** Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

**a)** En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

---

# 2 Séries abstraites

**9** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle :

**1)** si la série $\sum u_n$ converge ?

**2)** si la série $\sum u_n$ converge absolument ?

---

**10** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**1)** On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum\frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

**2)** On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

---

**11** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positives. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

**1)** **a)** Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
**b)** Et sans l'hypothèse de positivité ?

**2)** Étudier la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

---

**12** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante.

**1)** On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer qu'alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

**2)** La réciproque est-elle vraie ?

---

**13**

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive. On suppose que pour un certain $\alpha > 1$ :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

**a)** Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $\left(n^\beta u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

**b)** En déduire que la série $\sum u_n$ converge — c'est la *règle de Raabe-Duhamel*.

**2)** Étudier la nature de la série $\sum \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n} n}$ sans utiliser les formules de Wallis et Stirling.

---

**14**

**1)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$

De quel résultat bien connu cette relation est-elle l'analogue ?

**b)** En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge — c'est la *règle d'Abel*.

**2)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge aussi.

**3)** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

**a)** Étudier la nature des séries $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$.

**b)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$|\sin x| \geqslant \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

**c)** Étudier la nature des séries $\sum \frac{\left|\sin(n\theta)\right|}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\left|\cos(n\theta)\right|}{n^\alpha}$.

---

**15**

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive décroissante. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont même nature. Ce résultat est parfois appelé le *critère de condensation*.

**2)** Redémontrer le théorème de convergence des séries de Riemann.

**3)** Montrer que pour tous $\beta \in \mathbb{R}$, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si : $\beta > 1$.

---

**16** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive de limite nulle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose la suite $\left(U_n - nu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée par un certain $M$ en valeur absolue.

**1)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\left|\frac{U_{n-1}}{n-1} - \frac{U_n}{n}\right| \leqslant M\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

**2)** En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

---