Polynômes

Dans tout le cours, le symbole $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suivant que l'on travaillera avec des polynômes réels ou complexes.

I Calcul algébrique sur les polynômes

I.1 Polynômes et indéterminée X

Déf. • **1)** Un **polynôme réel** est une fonction $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on peut écrire

$$P:\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles.

2) Un **polynôme complexe** est une fonction $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui peut s'écrire de la même manière, mais avec des constantes a_k complexes.

3) L'ensemble des polynômes réels est noté **$\mathbb{R}[X]$.**
L'ensemble des polynômes complexes est noté **$\mathbb{C}[X]$.**

Important ✪ Dans un polynôme, la variable est élevée à des puissances **entières positives.** Ainsi, $x \mapsto x + 2\sqrt{x}$ **n'est pas** un polynôme, $x \mapsto x - 1 + \frac{3}{x}$ non plus.
L'exposant 0 est autorisé : il donne lieu à des constantes ; l'exposant 1 également et $x^1 = x$.

Rem. ◇ Les coefficients a_k peuvent s'annuler. Ainsi $P: x \mapsto x^2 - 1$ est un polynôme réel puisqu'il s'écrit aussi $P: x \mapsto 1\,x^2 + 0\,x + (-1)$.

Vocabulaire ✐ Le **polynôme nul** est le polynôme $x \mapsto 0$. Un **polynôme constant** est un polynôme qui peut s'écrire $x \mapsto k$. Un **monôme** est un polynôme qui peut s'écrire $x \mapsto \lambda\, x^k$.

Déf. • Écriture des polynômes à l'aide de l'indéterminée

1) On notera **X l'application identité de $\mathbb{R}$:** $X: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x. \end{cases}$
X sera appelé l'**indéterminée.**
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, X^k désigne donc la fonction puissance $x \mapsto x^k$.

2) Ainsi, un polynôme réel est une fonction P qui peut s'écrire
$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ ou encore $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des coefficients réels.

3) Pour les polynômes complexes, X désignera **l'application identité de $\mathbb{C}$:** $X: \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z. \end{cases}$ Tout polynôme complexe P pourra alors s'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $a_0, \ldots, a_n$ sont des coefficients complexes.

***Exercice* 1** ► **1)** Écrire le polynôme $P: x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ à l'aide de l'indéterminée X.
2) P étant maintenant un polynôme quelconque, dire ce que signifient :

$$P = 0, \quad P(x) = 0, \quad P = X + 1, \quad P(x) = x + 1, \quad P = 3.$$

Comment écrire l'affirmation « P prend la valeur 3 » ?

Attention ❢ **L'indéterminée X est une fonction : ce n'est pas un nombre.**
- X ne doit pas être vue comme l'inconnue dans une équation : on ne cherche jamais la « valeur » de X.
- Un polynôme P peut être évalué en un nombre a : sa valeur $P(a)$ s'obtient en remplaçant l'indéterminée X par a.

I.2 Coefficients d'un polynôme

Propr. • Égalité de deux polynômes
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes P et Q sont égaux si et seulement si les fonctions P et Q sont égales en tout point :

$$\boxed{P = Q \iff \forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = Q(x).}$$

Démo. ⇝ P et Q sont des fonctions qui ont même espace de départ et d'arrivée. Dire qu'elles sont égales revient juste à dire que tous les éléments ont même image par P et Q.

Thm • Théorème d'identification des coefficients
Deux polynômes sont égaux (en tout point) si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Démo. ⇝ On procède par récurrence sur n.

***Exercice* 2** ► Soit $P = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 4X + 4$. Déterminer un polynôme Q tel que $Q^2 = P$.

Une conséquence de ce théorème est que l'on peut désormais parler des coefficients d'un polynôme sans ambiguïté.

Déf. • Coefficients d'un polynôme
Soit P un polynôme réel ou complexe. Il peut donc s'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Soit d un entier naturel **quelconque.**
Si $d \leqslant n$, on appelle **coefficient de degré d du polynôme P** le nombre a_d qui apparait devant X^d dans l'écriture de P. Si $d > n$, ce coefficient a_d est nul.

***Exercice* 3** ► Donner la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients du polynôme $P = 2X^3 - X^2 + 1$.

I.3 Degré d'un polynôme

Déf. • Degré d'un polynôme

Soit P un polynôme dont on note les coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1) Si P n'est pas le polynôme nul, on appelle **degré de P** le plus grand entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $a_k\neq 0$.

2) Par convention, on décide que le **degré du polynôme nul** vaut $-\infty$.

3) Tout polynôme P admet donc un degré. On le note **deg(P)**. C'est un élément de $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$.

Astuce ➽ Le degré d'un polynôme est aussi le plus grand exposant de X qui apparait effectivement dans ce polynôme.

Exercice **4** ► **1)** Soit a, b, c trois nombres complexes quelconques. Quel est le degré du polynôme aX^2+bX+c ?

2) Comment peut s'écrire P lorsqu'il s'agit d'un polynôme réel de degré 3 ? De degré $2n+1$?

Déf. • Coefficient dominant, terme de plus haut degré, polynôme unitaire

Soit P un polynôme **distinct du polynôme nul.** On note **n son degré** et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ses coefficients.

1) Le **coefficient dominant de P** est a_n, le coefficient de degré n de P.

2) Le **terme de plus haut degré de P** est a_nX^n.

3) On dit que **P est unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

Ex. ✻ $-X^3+X-2$ a pour coefficient dominant -1 (ce n'est pas un polynôme unitaire) et son terme de plus haut degré est $-X^3$.

Rem. ◇ Ces notions ne sont pas définies pour le polynôme nul.

Propr. • Soit P un polynôme réel ou complexe quelconque, $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\deg(P)=n &\iff P \text{ s'écrit } \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \text{ où } a_n\neq 0\\
\deg(P)\leqslant n &\iff P \text{ s'écrit } \sum_{k=0}^{n} a_kX^k\\
\deg(P)=0 &\iff P \text{ est un polynôme constant non nul}\\
\deg(P)\leqslant 0 &\iff P \text{ est un polynôme constant}
\end{aligned}$$

Déf. • $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$

Soit n un entier naturel quelconque. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels dont le degré est **inférieur ou égal à n.** De même, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes complexes dont le degré est inférieur ou égal à n.

Ex. ✻ **1)** $\mathbb{R}_2[X]$ comprend donc les polynômes X^2-1 et $3X^2-X+1$ mais aussi $X+2$, le polynôme constant 5 et le polynôme nul.

2) $\mathbb{R}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes réels constants.

I.4 Opérations sur les polynômes

Déf. • Somme, produit par un scalaire, produit, composée de polynômes

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

1) La fonction $x\mapsto P(x)+Q(x)$ est un polynôme, que l'on note $\boldsymbol{P+Q}$.

2) La fonction $x\mapsto \lambda P(x)$ est un polynôme, que l'on note $\boldsymbol{\lambda P}$.

3) La fonction $x\mapsto P(x)Q(x)$ est un polynôme, que l'on note $\boldsymbol{PQ}$.

4) La fonction $x\mapsto P\big(Q(x)\big)$ est un polynôme, que l'on note $\boldsymbol{P\circ Q}$ ou encore $\boldsymbol{P\big(Q(X)\big)}$.

Méthode ✐ Dans les calculs algébriques, les développements, factorisations, calculs sur les puissances de X s'effectuent comme si l'indéterminée X était un nombre.
Pour calculer le polynôme composé $P\big(Q(X)\big)$, il suffit, dans l'expression de P, de remplacer l'indéterminée X par l'expression de Q.

Exercice **5** ► Soit $P=2X^3+X-1$ et $Q=X^2-2$. Calculer $P+2Q$, PQ, $Q\big(P(X)\big)$ et $P(X+1)$.

Attention ❢ Quand on travaille avec des polynômes, **on évite de les diviser entre eux :** le résultat ne serait pas un polynôme mais une fonction rationnelle.
On peut toutefois diviser un polynôme par une constante non nulle α (cela revient à le multiplier par $\frac{1}{\alpha}$), ou alors poser la division euclidienne de deux polynômes (paragraphe suivant).

Propr. • Degré d'un polynôme résultant d'une opération

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, λ une constante.

1) $\deg(\lambda P)=\deg(P)$ à condition que $\lambda\neq 0$.

2) $\deg(P+Q)\leqslant \max\{\deg(P),\deg(Q)\}$ avec égalité lorsque P et Q sont de degré différent.

3) $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Propr. • Intégrité du produit de polynômes

Un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un au moins des polynômes est nul :

$$\forall (P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\quad (PQ=0)\iff (P=0 \text{ ou } Q=0).$$

Coroll. • Simplification de polynômes

Soit P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Alors : $\quad (PQ=PR \text{ et } P\neq 0)\implies (Q=R)$.

Démo. ☞ Intégrité et simplification.

I.5 Division euclidienne de polynômes

Déf. • Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que ***A* peut se factoriser par *B*** ou que ***B* divise *A*** quand $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ A = BQ$.

Rem. ◇ On peut dire aussi **« *B* est un diviseur de *A* »** ou **« *A* est un multiple de *B* »**.

Exercice **6** ► Dire quels sont les diviseurs de X^2-1, X^2+1, et X^4-1, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Thm • Division euclidienne des polynômes

Soit A et B deux polynômes tels que B n'est pas le polynôme nul.

Alors il existe un **unique** couple (Q,R) de polynômes vérifiant les **deux** conditions suivantes :

1) $A = BQ + R$

2) $\deg(R) < \deg(A)$.

Une telle écriture est appelée **division euclidienne de *A* par *B*.**

Q est le **quotient,** R est le **reste** de cette divison.

Démo. ↪ Admise.

Il existe un algorithme pour déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne, que l'on expose en traitant l'exercice qui suit.

Exercice **7** ► Poser la division euclidienne de $A = X^4 - X^3 + X + 1$ par $B = 2X^2 - X + 1$.

Propr. • Diviseurs et division euclidienne

Soit A et B deux polynômes tels que $B \neq 0$.

B est un diviseur de A si seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

Démo. ↪ À l'aide d'une division euclidienne.

Exercice **8** ► Factoriser complètement dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = 2X^3 + 5X^2 + X - 2$.

II Racines d'un polynôme

II.1 Notion de racine, nombre de racines d'un polynôme

Déf. • Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que **α est une racine de *P*** (ou un **zéro de *P***) quand $P(\alpha) = 0$.

Exercice **9** ► À quelle condition -1, puis i sont-ils racines de $X^n + 1$?

Propr. • Division euclidienne par $X - \alpha$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque.

Alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q + P(\alpha)$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Propr. • Racine et factorisation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si P se factorise par $(X-\alpha)$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Ainsi, $X^n - 1$ se factorise par $X - 1$ si et seulement si
et par $X - i$ si et seulement si

Propr. • Généralisation au cas de n racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ **deux-à-deux distincts.** Alors :

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ sont tous racines de } P \iff P \text{ se factorise par } \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j).$$

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

II.2 Nombre de racines d'un polynôme et conséquences

Thm • Nombre de racines d'un polynôme

Soit P un polynôme non nul. Alors le nombre de racines de P est majoré par le degré de P.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Exercice **10** ► Que peut-on dire du nombre de racines de $P = X^2 + 2X - 7$? Du polynôme $P = X^5 - 3X^2 + X - 2$?

Coroll. • Preuve qu'un polynôme est nul à l'aide du nombre de racines

1) Si P est un polynôme tel que $\deg(P) \leqslant n$ et que P admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

2) Si un polynôme admet une infinité de racines, c'est obligatoirement le polynôme nul.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Exercice **11** ► Soit $P = X^3 - 2X^2 + X - 1$ et Q un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$.

1) Que peut-on dire du polynôme Q si P et Q prennent la même valeur en -1, 0, 1 et 2 ?

2) Même question si on a seulement $P(2) = Q(2)$ et $P(-1) = Q(-1)$.

Thm • Théorème d'identification des coefficients amélioré

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si P et Q prennent la même valeur en une infinité de points, alors P et Q sont égaux et on peut identifier leurs coefficients.

Démo. Sous l'hypothèse du théorème, $P-Q$ s'annule en une infinité de points, donc c'est le polynôme nul. Autrement dit, $P=Q$.

III Polynômes dérivés Ordre de multiplicité d'une racine

III.1 Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

Déf. • Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$.

On dit que **α est une racine d'ordre r de P** quand r est le plus grand entier tel que $(X-\alpha)^r$ divise le polynôme P.

Rem. ◇ Si α est une racine de P (i.e. $P(\alpha)=0$), c'est un racine d'ordre $r \geqslant 1$ de P. Une racine d'ordre 0 de P est un nombre qui n'est pas racine de P.

Vocabulaire Une racine d'ordre 1 d'un polynôme est appelée une **racine simple** de ce polynôme, d'ordre 2 est une racine double etc. Une racine d'ordre $r \geqslant 2$ est une **racine multiple** du polynôme.

Exercice **12** ► Que peut-on dire des racines du polynôme $P=2(X-1)^3(X-5)(X+4)^2$?

Propr. • Ordre d'une racine et factorisation du polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \exists\, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P=(X-\alpha)^r Q \\ Q(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme non nul est toujours inférieur au degré du polynôme.

Démo. Sur les notes de cours.

III.2 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Déf. • Polynôme dérivé

Soit P un polynôme réel ou complexe, s'écrivant $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On définit le **polynôme dérivé de P** par $P'=\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Rem. ◇ Pour les polynômes réels, le polynôme dérivé P' n'est autre que la dérivée du polynôme P vu comme une fonction.

Pour les polynômes complexes, on ne sait pas, a priori, dériver une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{C}$. P' est donc un nouvel objet, un polynôme dont les coefficients se calculent « comme si » P était une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Propr. • Propriétés calculatoires concernant les polynômes dérivés

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $\mathbf{deg(P')}=\deg(P)-1$ si $\deg(P) \geqslant 1$, $\quad \mathbf{deg(P')}=-\infty$ si $\deg(P) \leqslant 0$.

2) $(P+Q)'=P'+Q'$.

3) $(\lambda P)'=\lambda P'$.

4) $(PQ)'=P'Q+PQ'$.

5) $(P \circ Q)'=P' \circ Q \,.\, Q'$.

Démo. Propriété du degré seulement. Pour les polynômes réels, ces propriétés découlent de celles de la dérivation des fonctions numériques. On admet qu'elles sont valables aussi pour les polynômes complexes.

Déf. • Dérivée d'ordre supérieur

Soit P un polynôme quelconque, $r \in \mathbb{N}$.

Le **polynôme dérivé d'ordre r de P** est le polynôme obtenu en dérivant P r fois successivement. On le note **$P^{(r)}$**. Plus précisément, ces polynômes sont définis par récurrence :

$$P^{(0)}=P, \quad \text{et} \quad \forall\, r \in \mathbb{N}, \ P^{(r+1)}=(P^{(r)})'.$$

Les propriétés calculatoires pour les dérivées d'ordre r sont les mêmes que pour les fonctions réelles (notamment la formule de dérivation de Leibniz s'applique). Nous admettrons que ces résultats s'étendent aux polynômes complexes.

Exercice **13** ► Déterminer toutes les dérivées successives de $P=3X^2-X+1$ et du polynôme $P=(X^2-X+2)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

III.3 Formule de Taylor pour les polynômes Lien entre ordre d'une racine et dérivées successives

La dérivation des polynômes ne sert pas uniquement à étudier leurs variations dans le cas réel. Elle permet aussi d'étudier l'ordre des racines. La théorie s'appuie sur une adaptation de la formule de Taylor-Young aux polynômes.

Thm • Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors $P=\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.

Démo. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Rem. ◇ Par rapport à la formule de Taylor-Young, cette formule est
- spécifique aux polynômes ;
- une égalité exacte (il n'y a pas de reste $o(x^n)$) ;
- écrite obligatoirement à un ordre supérieur ou égal au degré du polynôme décomposé.

Important ✪ La formule de Taylor permet d'écrire P comme une combinaison linéaire des polynômes $\left(1,(X-\alpha),\dots,(X-\alpha)^n\right)$ et fournit une expression des coefficients à l'aide des dérivées successives.

Exercice **14** ► Appliquer la formule de Taylor au polynôme $P=3X^2+X-1$ en $\alpha=1$ puis en $\alpha=0$.

On peut maintenant établir le lien entre dérivations successives et ordre des racines.

Propr. • Caractérisation de l'ordre d'une racine par les dérivées successives du polynôme

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ non nul, $\alpha\in\mathbb{K}$, $r\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \begin{cases} P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(r-1)}(\alpha)=0 \\ P^{(r)}(\alpha)\neq 0. \end{cases}$$

Exercice **15** ► Déterminer, sans poser de divisions euclidiennes, l'ordre de multiplicité de $\alpha=1$ dans $P=X^6-6X^4+4X^3+9X^2-12X+4$.

Exercice **16** ► Racines doubles du polynôme $P=aX^2+bX+c$.

Et quand on connait plusieurs racines ainsi que leur ordre ?

Propr. • Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ distincts et $(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{N}^n$. Alors les α_j sont des racines de P d'ordre de multiplicité r_j si et seulement si P se factorise par $\prod_{j=1}^n (X-\alpha_j)^{r_j}$ et le quotient ne s'annule en aucun des α_j.

Démo. En utilisant les dérivées successives.

IV Factorisation des polynômes

IV.1 Polynômes factorisables, irréductibles, scindés

Dans tout ce paragraphe, on n'étudie que des polynômes non constants, c'est-à-dire dont le degré est au moins égal à 1.

Déf. • Polynôme factorisable, polynôme irréductible

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant.

1) On dit que ***P* est factorisable dans $\mathbb{K}[X]$** s'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{K}[X]$, **tous deux non constants**, tels que $P=Q_1Q_2$.

2) On dit que ***P* est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$** lorsque P n'est pas factorisable dans $\mathbb{K}[X]$.

Quand on souhaite factoriser un polynôme, on peut tenter :

1) de trouver une racine α de ce polynôme puis de factoriser par $X-\alpha$,

2) d'utiliser des formules de factorisation (notamment pour les polynômes bicarrés),

3) de chercher les racines complexes d'un polynôme en se ramenant à un calcul de racine n-ièmes complexes (même s'il s'agit d'un polynôme réel).

Exercice **17** ► Factoriser les polynômes suivants : X^3+2X^2+2X+1, X^4+6X^2-16, X^4+2X^2+4, et X^6-1.

Nous retiendrons les deux propriétés suivantes :

Propr. • Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2.
Si P admet une racine, alors P est factorisable.

Attention ❢ **La réciproque est fausse.** Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P=X^4+1$ n'admet pas de racine et pourtant il est factorisable puisque $P=(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$.

Propr. • Polynômes de degré 1 et 2

1) Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Les polynômes de degré 2 :
- sont toujours factorisables dans $\mathbb{C}[X]$;
- sont factorisables dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si leur discriminant est positif ou nul.

Démo. Sur les notes de cours.

Déf. • Polynômes scindés

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant. On dit que ***P* est scindé sur $\mathbb{K}$** s'il est possible d'écrire P comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ du premier degré.

Rem. ◇ Un polynôme peut être scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$: ainsi X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ donc non scindé sur $\mathbb{R}$, mais il est scindé sur $\mathbb{C}$ puisque $X^2+1=(X+i)(X-i)$.

Exercice **18** ► Dans l'exercice précédent, dire quels polynômes sont scindés.

IV.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Thm • **Théorème fondamental de l'algèbre**

Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.

Démo. Théorème admis. Se démontre à l'aide de techniques d'analyse.

Important Ce théorème prouve l'existence de racines mais ne donne pas de méthode pour les calculer. Il est parfois impossible d'en obtenir une expression explicite !

Coroll. • **Conséquences du théorème fondamental de l'algèbre**

1) Les <u>**seuls**</u> polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

2) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 est factorisable.

3) Tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Démo. Sur les notes de cours.

Thm • **Décomposition primaire d'un polynôme complexe**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ distinct du polynôme nul.
Alors P peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P = a\,(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p} = a\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)^{r_j}.$$

Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près. En effet :

- $a \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P ;
- $p \in \mathbb{N}$ est le nombre de racines distinctes de P ;
- $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{C}$ sont les racines complexes distinctes de P ;
- $r_1,\ldots,r_p \in \mathbb{N}^*$ sont les ordres de multiplicité de ces racines.

Démo. Conséquences immédiates de ce qui précède.

Important La décomposition primaire n'est pas toujours accessible en pratique : obtenir une expression explicite des racines du polynôme P n'est pas toujours possible.

IV.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Thm • **Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$**

Les <u>**seuls**</u> polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

1) les polynômes de degré 1 ;

2) les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Démo. Sur les notes de cours.

Coroll. • Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 est factorisable dans $\mathbb{R}[X]$.

Thm • **Décomposition primaire d'un polynôme réel**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ distinct du polynôme nul.
Alors P s'écrit de manière unique, à l'ordre des facteurs près :

$$P = a\,(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p}\,Q_1^{s_1}\cdots Q_\ell^{s_\ell}$$

où interviennent :

- $a \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P ;
- $p \in \mathbb{N}$ est le nombre de racines distinctes de P ;
- $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ sont les racines réelles distinctes de P ;
- $r_1,\ldots,r_p \in \mathbb{N}^*$ les ordres de multiplicité de ces racines ;
- $Q_1,\ldots,Q_\ell$ sont des polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif ;
- $s_1,\ldots,s_\ell \in \mathbb{N}^*$.

Démo. Admise.

Important Comme dans $\mathbb{C}[X]$, il n'est pas toujours possible d'obtenir explicitement la décomposition primaire d'un polynôme donné, même si le théorème ci-dessus garantit son existence et son unicité.

IV.4 Relations entre coefficients et racines

Pour des polynômes de degré 2, on a vu que si on note u et v les racines complexes du polynôme $P = aX^2 + bX + c$, alors

$$u + v = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad u \times v = \frac{c}{a}.$$

Nous allons généraliser ces résultats à des polynômes *scindés* de degré quelconque.

Propr. • Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que $\deg(P) = n$ et que P est scindé. On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ses racines en répétant chacune d'entre elles suivant son ordre de multiplicité (une racine double apparait deux fois dans la liste etc.).

Alors la somme et le produit des racines de P s'expriment à l'aide des coefficients de P de la manière suivante :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Démo. Sur les notes de cours.

***Exercice* 19** ► Déterminer la somme et le produit des racines des polynômes

$$P = 4X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 1 \quad \text{et} \quad Q = X^n - 1.$$