

# MP: Sujet 10

Coralie RENAULT

5 juin 2015

## Exercice

Soient l'espace  $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$  et  $N$  l'application définie sur  $E$  par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

- a) Montrer que  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé puis qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$ .
- b) Les normes  $N_\infty$  et  $N$  sont-elles équivalentes ?

## Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .

a) Montrer que  $A^n = 0$ .

b) Calculer  $\det(A + I_n)$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $AM = MA$ .

c) Calculer  $\det(A + M)$  (on pourra commencer par le cas où  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ).

d) Le résultat est-il vrai si  $M$  ne commute pas avec  $A$  ?