SEMAINE 10

SÉRIES NUMÉRIQUES. FAMILLES SOMMABLES

EXERCICE 1 :

Soit a un nombre réel non nul, soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}\, e^{ia\,\ln t}$.

1. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$? Ses sommes partielles sont-elles bornées ?

On pourra commencer par majorer la différence $\left| \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt - f(k) \right|$.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{e^{ia\,\ln n}}{n \ln n}$?

- -

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(t) = \dfrac{ia-1}{t^2}\, e^{ia\,\ln t}$. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $|f'(t)| \leq \dfrac{M}{k^2}$ avec $M = |ia-1| = \sqrt{a^2+1}$, donc $|f(t) - f(k)| \leq \dfrac{M}{k^2}(t-k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $u_k = f(k)$ et $v_k = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$. Alors,

$$\begin{aligned} |v_k - u_k| &= \left| \int_k^{k+1} \big(f(t) - f(k)\big)\,dt \right| \leq \int_k^{k+1} |f(t) - f(k)|\,dt \\ &\leq \frac{M}{k^2} \int_k^{k+1} (t-k)\,dt = \frac{M}{2k^2}\ . \end{aligned}$$

La série de terme général $v_k - u_k$ étant absolument convergente, on en déduit que les séries $\displaystyle\sum_k u_k$ et $\displaystyle\sum_k v_k$ sont de même nature. Or,

$$\int \frac{1}{t}\, e^{ia\ln t}\,dt = \int e^{iau}\,du = \frac{1}{ia}\, e^{iau} = \frac{1}{ia}\, e^{ia\,\ln t}\ ,$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k = \int_1^{n+1} f(t)\,dt = \frac{1}{ia}\Big(e^{ia\ln(n+1)} - 1\Big)$. Or, cette dernière expression n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$: en effet, si la suite de terme général $z_n = e^{ia\,\ln n}$ convergeait, alors il en serait de même de sa suite extraite $z_{2^k} = e^{ika\,\ln 2} = (e^{ia\ln 2})^k$ (c'est une suite géométrique avec une raison de module 1), ce qui entraînerait $a \ln 2 \in 2\pi\,\mathbf{Z}$; en considérant la suite extraite (z_{3^k}), on aurait $a\,\ln 3 \in 2\pi\,\mathbf{Z}$, et le rapport $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ serait rationnel (absurde : de $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$, on tirerait $3^p = 2^q$). La série $\displaystyle\sum_n v_n$ est donc divergente, donc $\displaystyle\sum_n f(n)$ diverge aussi.

Posons maintenant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n v_k$. On a obtenu $T_n = \dfrac{1}{ia}\Big(e^{ia\ln(n+1)} - 1\Big)$, donc $|T_n| \leq \dfrac{2}{|a|}$: les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_k v_k$ sont bornées. Comme $|S_n - T_n| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^n |u_k - v_k| \leq \frac{M}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, les sommes partielles S_n sont aussi bornées.

2. Montrons plus généralement le **théorème d'Abel** :

Soit $\sum_n u_n$ *une série de nombres complexes dont les sommes partielles* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *sont bornées, soit* (a_n) *une suite de réels positifs décroissante et de limite nulle. Alors la série* $\sum_n a_n u_n$ *converge.*

En effet, soient deux entiers p et q avec $p < q$; une classique (*quoique hors programme*) **transformation d'Abel** donne

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k u_k = \sum_{k=p+1}^{q-1} S_k(a_k - a_{k+1}) + S_q a_q - S_p a_{p+1}$$

et, si on a $|S_n| \leq M$ pour tout n, on déduit la majoration

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k u_k \right| \leq M \Big(\sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} + a_q \Big) = M a_{p+1} \ .$$

Comme $\lim_{p\to\infty} a_{p+1} = 0$, la série de terme général $a_n u_n$ vérifie la condition de Cauchy, donc converge.

Il suffit d'appliquer le théorème d'Abel avec $u_n = \frac{1}{n} e^{ia\,\ln n}$ et $a_n = \frac{1}{\ln n}$ pour déduire que la série $\sum_n \frac{e^{ia\,\ln n}}{n\,\ln n}$ est convergente.

EXERCICE 2 :

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul m, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels positifs, de carré sommable (c'est-à-dire les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes). Montrer que la famille $\left(\frac{a_i b_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et montrer l'inégalité

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_i b_j}{i+j} \leq \pi \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

- -

1. En posant $t = mx$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{m} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+m)\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t+m)\sqrt{t}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout entier naturel n l'inégalité

$$\frac{1}{(n+m+1)\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+m)\sqrt{t}}$$

et, en sommant (ce qui est légitime, tout converge...), $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n+1)\sqrt{n+1}}\leq\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+m)\sqrt{t}}$, ce qui donne bien l'inégalité voulue. Comme

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int_0^{+\infty}\frac{2u\,du}{(u^2+1)u}=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi\ ,$$

on a prouvé, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)\sqrt{n}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $S_n=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{i+j}$. Posons $\|a\|_2=\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2\Big)^{\frac12}$ et $\|b\|_2=\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^2\Big)^{\frac12}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a (*hénaurme astuce*) :

$$S_n=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\sqrt[4]{i}\ a_i}{\sqrt[4]{j}\ \sqrt{i+j}}\ \frac{\sqrt[4]{j}\ b_j}{\sqrt[4]{i}\ \sqrt{i+j}}\leq\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\sqrt{i}\ a_i^2}{\sqrt{j}\ (i+j)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}\ b_j^2}{\sqrt{i}\ (i+j)}\right)^{\frac12}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ensuite,

$$S_n\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{j}\ (i+j)}\right)a_i^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{i}\ (i+j)}\right)b_j^2\right)^{\frac12}\leq\pi\ \|a\|_2\ \|b\|_2$$

d'après la question **1.** En posant, pour tout entier naturel n non nul, $J_n=[\![1,n]\!]^2$, on vient de montrer que $S_n=\displaystyle\sum_{(i,j)\in J_n}\frac{a_ib_j}{i+j}\leq\pi\ \|a\|_2\ \|b\|_2$. Comme les J_n forment une suite croissante de parties finies de $(\mathbb{N}^*)^2$ dont la réunion est $(\mathbb{N}^*)^2$, cela prouve la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{a_ib_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et le fait que sa somme, qui est $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}^*}S_n$, est inférieure ou égale à $\pi\ \|a\|_2\ \|b\|_2$, ce qu'il fallait prouver.

EXERCICE 3 :

La **fonction zéta de Riemann** est définie par $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ pour tout réel $x>1$. L'**indicateur d'Euler** d'un entier naturel non nul n est défini par

$$\varphi(n)=\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!]\mid k\wedge n=1\}\ .$$

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{d|n}\varphi(d)$.

2. Pour $x\in\,]2,+\infty[$, en déduire une expression de la somme $\Phi(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^x}$ à l'aide de la fonction ζ.

3. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_k(n) = 0$ s'il existe un nombre premier p tel que $p^k \mid n$ et $Q_k(n) = 1$ sinon. Démontrer la relation

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad \frac{\zeta(x)}{\zeta(kx)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{n^x} .$$

- -

Commençons par quelques compléments sur les familles sommables : du cours, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Si $(u_k)_{k \in A}$ est une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable A, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties finies de A, deux à deux disjointes et de réunion égale à A, si on note $s'_n = \sum_{k \in A_n} |u_k|$ et $s_n = \sum_{k \in A_n} u_k$, alors la famille $(u_k)_{k \in A}$ est sommable si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 0} s'_n$ est convergente et, dans ce cas, on a $\sum_{k \in A} u_k = \sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k \in A_n} u_k \Big)$.

Il suffit en effet de considérer la suite croissante (J_n) de parties finies avec $J_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ pour se ramener aux termes exacts du programme officiel.

Si $A = \mathbb{N}^2$, ce résultat est classiquement utilisé avec les parties $A_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$, ce qui conduit à la notion de **produit de Cauchy** de deux séries absolument convergentes $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$: la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$, avec $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=n} u_p v_q \Big) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} u_p \Big) \Big(\sum_{q=0}^{\infty} v_q \Big) .$$

Si $A = (\mathbb{N}^*)^2$, on peut aussi considérer les parties $A_n = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid pq = n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour arriver à la notion de **produit de Dirichlet** de deux séries absolument convergentes $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$: la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, avec $x_n = \sum_{pq=n} u_p v_q = \sum_{d \mid n} u_d \, v_{\frac{n}{d}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{pq=n} u_p v_q \Big) = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} u_p v_q = \Big(\sum_{p=1}^{\infty} u_p \Big) \Big(\sum_{q=1}^{\infty} v_q \Big) .$$

1. C'est un exercice classique d'arithmétique : $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$; en effet, on a $[\![1, n]\!] = \bigcup_{d \mid n} A_d$ (union disjointe), où

$$A_d = \Big\{ k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = \frac{n}{d} \Big\} = \{ q\frac{n}{d} \ ; \ q \in [\![1, d]\!] \text{ et } q \wedge d = 1 \} ,$$

donc $\mathrm{Card}(A_d) = \varphi(d)$, ce qui donne la relation demandée.

2. Pour $x > 2$, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{\varphi(p)}{p^x}$ est absolument convergente (car $\varphi(p) \leq p$), de même que la série $\displaystyle\sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^x}$ et leur produit de Dirichlet est la série

$$\sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{pq=n} \frac{\varphi(p)}{p^x q^x} \Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \Big(\sum_{pq=n} \varphi(p) \Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \Big(\sum_{d|n} \varphi(d) \Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x-1}} \ ,$$

et on a
$$\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^x} \Big) \Big(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^x} \Big) = \Phi(x)\, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \zeta(x-1) \ ,$$

donc $\Phi(x) = \dfrac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$ pour tout réel $x > 2$.

3. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{Q_k(n)}{n^x}$ est (absolument) convergente pour $x > 1$ et on a
$$\zeta(kx) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{n^x} \right) = \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}} \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{Q_k(q)}{q^x} \right) = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{Q_k(q)}{(p^k q)^x} \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la partie $A_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p^k q = n\}$. Les A_n sont des parties finies de $(\mathbb{N}^*)^2$, deux à deux disjointes et $(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. La suite double $\left(\dfrac{Q_k(q)}{(p^k q)^x} \right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ étant sommable comme famille-produit de deux suites sommables, sa somme $S(x)$ vérifie $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n(x)$ avec $s_n(x) = \displaystyle\sum_{(p,q)\in A_n} \frac{Q_k(q)}{(p^k q)^x} = \frac{1}{n^x} \sum_{(p,q)\in A_n} Q_k(q)$.

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition d'un entier n en produit de facteurs premiers distincts, alors le seul couple (p,q) appartenant à A_n et pour lequel $Q_k(q) = 1$ est celui pour lequel on choisit $p = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\nu_i = E\left(\dfrac{\alpha_i}{k}\right)$ est le quotient dans la division euclidienne de α_i par k. On a donc $\displaystyle\sum_{(p,q)\in A_n} Q_k(q) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $s_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

Récapitulons :
$$S(x) = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{Q_k(q)}{(p^k q)^x} = \zeta(kx) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{n^x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \ ,$$

ce qui donne bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(kx)}$ pour $x > 1$ et k entier, $k \geq 2$.

EXERCICE 4 :

Soit $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbf{Z}$ la fonction (**fonction de Möbius**) définie par

- $\triangleright$ $\mu(1) = 1$;
- $\triangleright$ $\mu(n) = 0$ si n a au moins un facteur carré ;
- $\triangleright$ $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r facteurs premiers distincts.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $s_n = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $q_n = \mathrm{Card}\,\big\{(u,v) \in [\![1,n]\!]^2 \mid u \wedge v = 1\big\}$. Démontrer la relation

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)\, E\left(\frac{n}{k}\right)^2 .$$

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

- -

1. On a $s_1 = \mu(1) = 1$ et, si $n \geq 2$, soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers ($r \geq 1$), avec les p_i distincts. Posons $m = p_1 \cdots p_r$. De la définition de la fonction μ, on déduit que $s_n = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|m} \mu(d)$ mais les diviseurs de m sont les entiers de la forme $d = \displaystyle\prod_{i\in I} p_i$, où I décrit l'ensemble des parties de $[\![1,r]\!]$ et, pour un tel entier d, on a $\mu(d) = (-1)^{\mathrm{Card}(I)}$ donc

$$s_n = \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{I\subset[\![1,r]\!]} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k = \big(1 + (-1)\big)^r = 0 .$$

En conclusion, $s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout couple $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $a_{k,l} = \dfrac{\mu(k)}{k^2 l^2}$. La famille ("suite double") $(a_{k,l})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable car c'est la famille produit de deux suites sommables, à savoir $\left(\dfrac{\mu(k)}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{1}{l^2}\right)_{l\in\mathbb{N}^*}$ et sa somme vaut

$$S = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} .$$

Mais on peut aussi sommer la suite double "à la Dirichlet" : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $J_n = \{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid kl \leq n\}$. Alors (J_n) est une suite croissante de parties finies de $(\mathbb{N}^*)^2$ dont la réunion est égale à $(\mathbb{N}^*)^2$, donc

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{(k,l)\in J_n} a_{k,l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{kl=n}\frac{\mu(k)}{k^2l^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n^2}=1$$

et cela donne le résultat.

2. Soit l'ensemble $Q_n=\big\{(u,v)\in[\![1,n]\!]^2 \mid u\wedge v=1\big\}$. Notons $p_1<p_2<\cdots<p_r$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour tout i $(1\le i\le r)$, soit A_i l'ensemble des couples $(u,v)\in[\![1,n]\!]^2$ tels que $p_i \mid u$ et $p_i \mid v$. Alors $Q_n=[\![1,n]\!]^2\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{r}A_i\right)$. On calcule alors le cardinal de Q_n par le **principe d'inclusion-exclusion**, appelé aussi **formule du crible** :

$$\begin{aligned} q_n &= \operatorname{Card}\big([\![1,n]\!]^2\big)-\sum_i \operatorname{Card}(A_i)+\sum_{i<j}\operatorname{Card}(A_i\cap A_j)-\cdots+(-1)^r\operatorname{Card}(A_1\cap\cdots\cap A_r)\\ &= n^2+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\sum_{i_1<\cdots<i_k}\operatorname{Card}\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\ . \end{aligned}$$

Or, pour tout k-uplet $(i_1,\cdots,i_k)$ avec $i_1<\cdots<i_k$, $\operatorname{Card}\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)=E\left(\dfrac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right)^2$.

Donc

$$q_n=n^2+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\sum_{i_1<\cdots<i_k}E\left(\frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\,E\left(\frac{n}{k}\right)^2$$

(*nous laissons le lecteur se convaincre de cette dernière égalité*).

3. On a $\dfrac{q_n}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mu(k)E\left(\frac{n}{k}\right)^2$ et, du fait que $|\mu(k)|\le 1$ pour tout k, on déduit la majoration

$$\begin{aligned}\left|\frac{q_n}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}\right| &= \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\ \left[\left(\frac{n}{k}\right)^2-E\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]\right|\\ &\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n}{k}\right)^2-E\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]\ .\end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x\ge 0$, on a

$$0\le x^2-E(x)^2=\big(x-E(x)\big)\big(x+E(x)\big)\le x+E(x)\le 2x\ ,$$

donc

$$\left|\frac{q_n}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{k}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\frac{2\ln n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ .$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}=\frac{6}{\pi^2}$.

On peut interpréter ce nombre $\dfrac{6}{\pi^2}$ *comme la "probabilité pour que deux entiers naturels non nuls soient premiers entre eux".*