Chapitre 11

Fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre :
- F désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Dérivée en un point

1.1. Définition

Définition : **fonction dérivable, vecteur dérivé**

Soient une fonction $f : I \to F$, $a \in I$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet pour dérivée (ou vecteur dérivé) ℓ au point a

si la fonction $t_a : \begin{cases} I - \{a\} \to & F \\ t \quad \to & \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{cases}$ admet ℓ pour limite en a.

On dit aussi que f est dérivable en a et on note $\ell = f'(a)$

- Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ admet en tout t_0 un vecteur dérivé égal à $f'(t_0) = (-\sin(t_0), \cos(t_0))$.
- Définition équivalente : $\boxed{\ell = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

1.2. Interprétations

a) Existence d'un développement limité d'ordre 1 (caractérisation)

Théorème : Soit une fonction $f : I \to F$ et soit $a \in I$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ❑ f est dérivable au point a
- ❑ Il existe un voisinage V de a, un vecteur $A \in F$ et une fonction $\varepsilon : V \to F$ vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_F$ tels que

$$\boxed{(❋) \quad \forall x \in V \ : \ f(x) = f(a) + (x-a).A + (x-a).\varepsilon(x)}$$

Dans ce cas $f'(a) = A$.

- Démonstration $\boxed{\mathbf{1}}$.
- (❋) constitue un développement limité d'ordre 1 au point a.
- (❋) peut s'écrire aussi : $\boxed{f(x) = f(a) + (x-a).A + o(x-a)}$

  ou encore $\boxed{f(a+h) = f(a) + h.A + o(h)}$.
- Retenons que $\boxed{f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + (x-a).\varepsilon(x)}$

- Il y a donc équivalence entre dérivabilité et existence d'un développement limité d'ordre 1. Ceci ne marche plus dès $n \geqslant 2$.

  Contre exemple $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \ ; \ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

b) Interprétation graphique (ici $F = \mathbb{R}$)

- Dans l'écriture précédente, posons : $g(x) = f(a) + (x-a)f' \ a$.
- On obtient une fonction affine dont la représentation graphique est une **droite d'équation** $\boxed{y = f(a) + (x-a)f'(a)}$. C'est la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a. Elle a pour **pente** $\boxed{f'(a)}$ et donc pour **vecteur directeur** $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}}$

c) Interprétation cinématique (ici $F = \mathbb{R}^2$, généralisable à $\mathbb{R}^n$)

- Soit $\vec{f} : \begin{cases} I \to \quad \mathbb{R}^2 \\ t \to (X(t), Y(t)) \end{cases}$.
- La courbe constituée par les points $M(t)$ qui, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, vérifient : $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$ autrement dit : $M(t)$ de coordonnées $(X(t), Y(t))$ s'appelle un $\boxed{\text{arc paramétré}}$. Il est donné par les équations $\boxed{\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y \ t \end{cases}}$

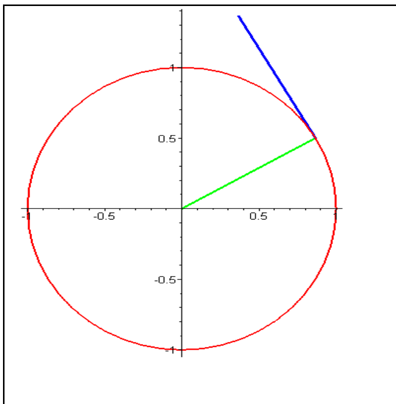
  ⇨ Le vecteur $\vec{f}\,'(t_0)$, **lorsqu'il n'est pas nul**, dirige la tangente à cet arc au point $M(t_0)$.

- Si t désigne le temps, la courbe correspond au parcours d'un point mobile dans le temps, $M(t_0)$ désignant la position du point à l'instant t_0.

  ⇨ Le vecteur $\vec{f}\,'(t_0)$ désigne alors la **vitesse instantanée** à l'instant t_0.

- Exemple : La fonction vectorielle $\vec{f} : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \quad \mathbb{R}^2 \\ \quad t \quad \to (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$

  est associée à l'arc paramétré $\boxed{\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]}$



A l'instant $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, on a :

- $M(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

  vecteur $\overrightarrow{OM(t_0)}$ en vert

- $\vec{f}\,'(t_0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  vecteur $\vec{f}\,'(t_0)$ en bleu

1.3. Extension : dérivée à droite, à gauche

<u>Définition</u> : **dérivée à droite**

Soient une fonction $f : I \to F$, $a \in I$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet pour dérivée à droite ℓ au point a si la fonction

$$t_a : \begin{cases} I - \{a\} \to & F \\ t \quad \to & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{cases}$$ admet ℓ pour limite à droite en a.

On dit que f est dérivable à droite en a et on note $\ell = f_d'(a)$

- Exemple : La fonction abs (valeur absolue) est dérivable à droite et à gauche en 0 : $abs_g'(0) = -1$ et $abs_d'(0) = 1$.
- On notera que continue $\Leftrightarrow$ continue à droite et continue à gauche mais qu'on a seulement :

  dérivable $\Rightarrow$ dérivable à droite et dérivable à gauche

  Pour avoir la réciproque, il faut de plus que $f_g'(a) = f_d'(a)$.

2. Opérations sur les fonctions dérivables

2.1. Combinaisons linéaires

<u>Proposition 1</u> :

Soit f et g deux fonctions dérivables en a et soit λ un réel. Alors :

- $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- λf est dérivable en a et $(\lambda.f)'(a) = \lambda.f'(a)$

- Démonstration identique à celle vue en M.P.S.I. (réviser)
- Traduction structurelle : ▪ $(\mathcal{D}(I,F),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

  ▪ $D : \begin{cases} \mathcal{D}(I,F) \to & \mathcal{F}(I,F) \\ f \quad \to & f' \end{cases}$ est linéaire.

2.2. Dérivation et linéarité

a) <u>La propriété</u>

<u>Proposition 2</u> :

Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable en a et $L \in \mathcal{L}(F,G)$

où F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $L \circ f$ est dérivable en a et $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$

- Démonstration **2**.
- Traduction structurelle :

$$\boxed{[L \in \mathcal{L}(F,G) \text{ et } f \in \mathcal{C}^1(I,F)] \Rightarrow [(L \circ f) \in \mathcal{C}^1(I,G) \text{ et } (L \circ f)' = L \circ f']}$$

b) Application aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ **3**.

- Si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{C})$ alors $\overline{f} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{C})$ et $\overline{f}' = \overline{f'}$

  $(\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2$, $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f')$ et $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f')$
- Ainsi si $f = u + iv$ avec $u,v \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2$: $f' = u' + iv'$

c) Raisonnement coordonnée par coordonnée

> Proposition 3 :
>
> Soit $f : I \to F$ où F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.
>
> Ainsi $\forall t \in I$: $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t).e_i$ où $f_i : I \to \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
>
> Alors $[f$ est dérivable en $a] \Leftrightarrow [\forall i \in [\![1,n]\!]$: f_i est dérivable en $a]$
>
> Et dans ce cas $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t).e_i$.

- Démonstration **4**.
- En particulier : pour $F = \mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$: $f' = (f_1', f_2', \dots, f_n')$

2.3. Dérivation et bilinéarité

a) La propriété

> Proposition 4 :
>
> Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire
>
> où F, G et H sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
>
> Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$, dérivables toutes deux en a.
>
> Alors l'application $B(f,g) : I \to H$ définie par $t \to B(f(t),g(t))$ est dérivable en a et $\boxed{B(f,g)'(a) = B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a))}$.

- Démonstration **5**.
- Structurellement : $[B \in \mathcal{BL}(F \times G, H)$ et $(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,F) \times \mathcal{C}^1(I,G)]$

  $\Rightarrow [B(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,H)$ et $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')]$

b) Exemples **6**.

- $[(u,v) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2] \Rightarrow [u \times v \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v']$
- $[\alpha \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(I,F)] \Rightarrow [\alpha.f \in \mathcal{D}(I,F)$ et $(\alpha.f)' = \alpha'.f + \alpha.f']$
- $[(f,g) \in \mathcal{D}(I,F)^2] \Rightarrow [(f \mid g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')]$
- $[(f,g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}^2)^2] \Rightarrow [\mathrm{dét}(f,g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(\mathrm{dét}(f,g))' = \mathrm{dét}(f',g) + \mathrm{dét}(f,g')]$
- $\left[(u,v,w) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^3\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u \times v \times w \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \\ (u \times v \times w)' = u' \times v \times w + u \times v' \times w + u \times v \times w' \end{array}\right]$
- $\left[(f,g,h) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}^3)^3\right]$

  $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} dét(f,g,h) \in \mathcal{D}\ I,\mathbb{R} \\ dét(f,g,h)' = dét(f',g,h) + dét(f,g',h) + dét(f,g,h') \end{array}\right]$

2.4. Dérivation et composition

Proposition 5 : Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable en a et $g : J \to F$ une fonction dérivable en $b = f(a)$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a))$.

- Démonstration $\boxed{7}$. Structurellement ⇙

$$\left[f \in \mathcal{C}^1(I,J) \text{ et } g \in \mathcal{C}^1(J,F)\right] \Rightarrow \left[g \circ f \in \mathcal{C}^1(I,F) \text{ et } (g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)\right]$$

- Exemple : $x \to \operatorname{Arctan}(x^2)$ admet pour fonction dérivée $x \to \dfrac{2x}{1+x^4}$

3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3.1. Définition

Définitions 2 :

On définit l'ensemble $\mathcal{C}^k(I,F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par la récurrence :

- $\mathcal{C}^0(I,F) = \mathcal{C}(I,F)$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $[f \in \mathcal{C}^k(I,F)] \Leftrightarrow [f$ est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^{k-1}(I,F)]$

On définit aussi par récurrence : $f^{(0)} = f$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = (f')^{(k-1)}$

On définit l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I,F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par

- $[f \in \mathcal{C}^\infty(I,F)] \Leftrightarrow [\forall k \in \mathbb{N} : f$ est k fois dérivable$]$.

- Ainsi : $\mathcal{C}^\infty(I,F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,F)$

3.2. Structures algébriques

- $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: $(\mathcal{C}^k(I,F),+,.)$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $D^k : \begin{cases} \mathcal{C}^k(I,F) \to \mathcal{C}(I,F) \\ \quad f \quad \to \quad f^{(k)} \end{cases}$ est linéaire.
- $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: $(\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K}),+,\times,.)$ est une $\mathbb{K}$- algèbre.

- Démonstration en exercice (sous-structure de $\mathcal{C}(I,F)$) ; pour la dernière affirmation, on utiliser ⇙ .

3.3. Formule de Leibniz

Proposition 6 :

Si $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})^2$ alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ et $\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$.

- Démonstration $\boxed{8}$. (à mettre en parallèle avec la formule du binôme)

4. Intégration

4.1. Définition

Définition 3 : **intégration coordonnée par coordonnée**

Soit une fonction continue par morceaux $f:[a,b]\to F$

où F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Ainsi $\forall t\in[a,b]$: $f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t).e_i$ où $f_i:I\to\mathbb{R}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le vecteur de F défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f \overset{déf^\circ}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)dt\right).e_i}.$$

- En particulier : pour $F=\mathbb{R}^n$ et $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt\right)}$$

- Pour $F=\mathbb{C}$: $\boxed{\int_a^b (u+iv)(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt}$

D'où $\boxed{\mathrm{Re}\left(\int_a^b z(t)dt\right)=\int_a^b \mathrm{Re}(z(t))dt}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\left(\int_a^b z(t)dt\right)=\int_a^b \mathrm{Im}(z(t))dt}$

4.2. Propriétés

a) Linéarité de l'intégrale

Propriété 1 : L'application $I:\begin{cases}\mathcal{CM}([a,b],F) & \to & F\\ f & \to & \int_a^b f(t)dt\end{cases}$ est linéaire.

- Démonstration en exercice : découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles.

b) Relation de Chasles

Propriété 2 : Soient $f\in\mathcal{CM}([a,b],F)$ et $c\in[a,b]$.

Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

- Démonstration en exercice : découle immédiatement de la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions à valeurs réelles.

c) Intégrale et norme

Propriété 3 : Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b],F)$. Alors $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|_F \leqslant \int_a^b \|f(t)\|_F\,dt$

- Démonstration 9.
- Démarche : commencer par les fonctions en escalier puis utiliser la densité de $\mathcal{E}([a,b],F)$ dans $\mathcal{CM}([a,b],F)$ pour la convergence uniforme.

4.3. Sommes de Riemann

a) La propriété

Théorème : Soient $f \in \mathcal{CM}([a,b],F)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)}$ la "somme de Riemann" de f sur $[a,b]$ associée à la subdivision de $[a,b]$ en n segments de même longueur.

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt}$.

- On peut aussi sommer de 1 à n.
- Démonstration identique à celle vue en M.P.S.I. (la revoir).

  On la démontre pour les fonctions continues en utilisant la **continuité uniforme** de telles fonctions sur un segment via le **théorème de Heine**.

  Elle s'étend ensuite aux fonctions continues par morceaux.
- Premier intérêt : elle permet de justifier la méthode des rectangles **10**.

b) Son utilisation pratique

- On utilise cette propriété en particulier pour démontrer la convergence de certaines suites rebelles : en général, on se ramène à l'intervalle $[0,1]$.

  La formule s'écrit alors simplement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(t)dt}$.
- Exemple : **11**.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+i}\right) = \ln(2)$$

- Méthode pratique utilisée dans l'exemple

Utilisation de sommes de Riemann pour la limite d'une suite
❈ On "intuite" la présence d'une somme de Riemann dans la forme donnée.   ❈ On fait apparaître $\frac{1}{n}$ en tête   ❈ On ramène la somme de 1 à n.   ❈ On met en évidence dans le terme de la somme du $\frac{i}{n}$ ❈ On met en évidence la fonction f, on argumente sa continuité et on applique le théorème.

4.4. Intégrale fonction de sa borne supérieure

a) La propriété

Théorème : Soit une fonction continue $f : I \to F$ et $a \in I$.

Soit $F : I \to F$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

De plus : F est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.**

Corollaire 1 : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives qui, toutes, s'écrivent : $x \to k + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ où $k \in F$.

Corollaire 2 : Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b .$$

- Démonstration identique à celle vue en M.P.S.I. (la revoir) ⬋.

  On utilise à trois reprises la continuité de f.

Pour les fonctions non continues, tout est possible ⬋

- Une fonction non continue peut admettre des primitives : il suffit de choisir la dérivée d'une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

  ⇨ Exemple : soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

  F est dérivable mais $F' = f$ n'est pas continue en 0.

  $\boxed{f \text{ admet donc pour primitive } F \text{ sans être continue} \ldots}$

- On rappelle (théorème de Darboux) que la dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires ; ainsi une fonction qui ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de primitive.

  ⇨ Exemple : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $x \to \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$

  $\boxed{f \text{ n'admet pas de primitive} \ldots}$

b) Exercice traité : Soient $f \in \mathcal{C}(I,F)$, $(u,v) \in \mathcal{C}^1(J,I)^2$.

Soit la fonction G définie sur J par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

Montrer que $G \in \mathcal{C}^1(J,F)$ et déterminer G'.

4.5. Inégalité des accroissements finis

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ et soit k est un majorant de $t \rightarrow \|f'(t)\|$ sur I.

Alors $\forall (a,b) \in I^2$: $\boxed{\| f(b)-f(a) \| \leqslant k \mid b-a \mid}$

- En particulier : $\boxed{\| f(b)-f(a) \| \leqslant \underset{t\in[a,b]}{Max}(\|f'(t)\|) \times \mid b-a \mid}$ Démo **12**.

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ où I est un intervalle.

[f est constante sur I] $\Leftrightarrow$ [$f'=0$]

- Démonstration **13**.

5. Particularités des fonctions à valeurs réelles (révisions de M.P.S.I.)

5.1. Dérivabilité et extremum

Théorème : Soit I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$.

Si f admet sur I un extremum en a, alors nécessairement $f'(a)=0$.

- Démonstration à revoir (cours M.P.S.I.)
- Conséquence : les extremums d'une fonction $f \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$ sont atteints
  - ou bien aux bornes de l'intervalle
  - ou bien aux points où la dérivée s'annule
- La réciproque du théorème est fausse

  ⇨ la fonction $x \rightarrow x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0, $\mathbb{R}$ est ouvert, et pourtant f n'admet pas d'extremum en 0.
- Il s'agit ici d'extremums (implicitement) relatifs.

5.2. Théorème de Rolle

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$ telle que $f(a)=f(b)$.

Alors $\exists\, c \in]a,b[\;/\; f'(c)=0$.

- Démonstration à revoir (cours M.P.S.I.) ↙.
- Le point c n'est pas unique.
- ☺ Le fait que c appartienne à l'intervalle ouvert $]a,b[$ est souvent utile dans les exercices : il est donc important de bien connaître cet énoncé.

5.3. Formule des accroissements finis (CCP n° 4 Q.1)

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$.

Alors $\exists\, c \in]a,b[\;/\; f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

- Démonstration **14**.
- Le point c n'est pas unique.
- ☺ Il est remarquable que la démonstration découle du théorème de Rolle , qui est lui-même un cas particulier du théorème !

5.4. Les théorèmes de la limite de la dérivée

a) Le théorème standard

Lemme : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I-\{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est notée ℓ

alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut ℓ.

- Démonstration (CCP n° 4 Q.2)

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I-\{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$: f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$: f n'est pas dérivable en a.

- Elle est aussi valable en se plaçant seulement à droite ou à gauche de a.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$: la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pourtant une tangente verticale au point d'abscisse a.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$, f peut encore être dérivable en a !

  ⇨ Il suffit de sortir de sa poche une fonction dérivable et non $\mathcal{C}^1$:

  Exemple : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

  F' n'admet pas de limite en 0 et pourtant $F'(0) = 0$

b) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^k$) par prolongement

Théorème 2 : Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(I-\{a\},\mathbb{R})$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et donc $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

- Démonstration : conséquence immédiate du corollaire précédent !

- Prolongement :

Théorème 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^k(I-\{a\},\mathbb{R})$. Si pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie en a, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

- Ce théorème précise le précédent dans le cas où $k = 1$
- Démonstration par réitération du précédent à revoir (cours M.P.S.I.).
- Exemple $f : x \mapsto \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{vmatrix}$
  - Si $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}$ où $P_n \in \mathbb{K}[X]$ avec $d°(P_n) = 2n$
  - Ce qui permet d'établir par le théorème 3 que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

5.5. Sur les variations des fonctions

En bref : soit I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

- Si $f' \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

La réciproque est fausse ! Néanmoins … $\boxed{\swarrow}$

- Si $f' \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points (voire une infinité de points isolés*), alors f est strictement croissante sur I.
- Si I est de plus ouvert : f admet un extremum (relatif) en un point $a \in I$ si et seulement si f' s'annule et change de signe en a.

* Les zéros de f' doivent être isolés ce qui signifie, en notant

$$Z = \{x \in I \,/\, f'(x) = 0\}\text{, que } \forall x \in Z,\ \exists \alpha > 0 \,/\,]x-\alpha, x+\alpha[\cap Z = \{x\}$$

5.6. Sur l'intégration

a) Positivité, croissance

Propriété 1 : **positivité de l'intégrale**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Si $f \geqslant 0$ (resp. > 0) alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$ (resp. > 0)

- Démonstration à revoir (cours M.P.S.I.) on doit avoir $a < b$!

Propriété 2 : **croissance de l'intégrale**

Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})^2$. Si $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

- Démonstration immédiate :

  utiliser la propriété précédente et la linéarité de l'intégrale. (exercice)

b) Précision : "positivité améliorée"

Propriété 3 : **positivité améliorée (version 1)** (CCP)

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est la fonction nulle.

- Démonstration : raisonner par contraposée et utiliser la primive de f.
- Bien noter les 3 points : f doit être continue, positive et d'intégrale nulle

Propriété 4 : **positivité améliorée (version 2)**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+)$.

S'il existe un point $t_0 \in [a,b]$ où $f(t_0) > 0$ alors $\int_a^b f(t)dt > 0$

- Simple contraposition de la propriété précédente.

5.7. Formules de Taylor

- Pour simplifier les choses, on suppose pour les lignes 1 à 4 du tableau ci-dessous $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ même si des hypothèses plus faibles existent pour le théorème de Taylor-Young.

  Pour la ligne 5 : f est une fonction polynôme de degré $\leqslant n$.

  Pour la ligne 6 : f est développable en série entière et $n = +\infty$

- On pose alors, pour $(a,b) \in I^2$:

$$\boxed{R_n(f,a,b) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}$$

	Les diverses formules de Taylor	
1	Taylor avec reste intégral	$R_n(f,a,b) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$
2	Taylor-Lagrange (inégalité)	$\lvert R_n(f,a,b)\rvert \leqslant K.\frac{\lvert b-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$ où $K = \underset{[a,b]}{Sup}\lvert f^{(n+1)}\rvert$
3	Taylor-Lagrange (comparaison)	$R_n(f,a,x) = O((x-a)^{n+1})$
4	Taylor-Young	$R_n(f,a,x) = o((x-a)^n)$
5	Taylor pour les polynômes	$R_n(f,a,b) = 0$
6	Développement en série de Taylor	$R_\infty(f,x,0) = 0$

- Conditions minimalistes pour le théorème de Taylor-Young :

  il suffit que $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I-\{a\},\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}(a)$ existe.

- Application : développements limités

  ❋ Réviser les formules usuelles

  Il suffit en fait de "tronquer" le développement en série entière !

  ❋ Réviser les méthodes opératoires sur les développements limités.

  Somme, produit, primitivation, dérivation, composition, division.

6. Quelques exemples d'arcs paramétrés

6.1. Le b.a.ba des arcs paramétrés (Revoir le § 1.2.c)

- L'arc paramétré $\boxed{\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \quad t \in I}$ est dit **de classe $\mathcal{C}^1$** si $(X,Y) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$

- A cet arc est associé la fonction vectorielle $\vec{f} : \begin{cases} I \to \quad \mathbb{R}^2 \\ t \to (X(t),Y(t)) \end{cases}$.

- On a alors $\vec{f}\,'(t) = (X'(t),Y'(t))$

- Le paramètre est dit **régulier** si $\forall t \in I \ : \ \vec{f}\,'(t) \neq (0,0)$.

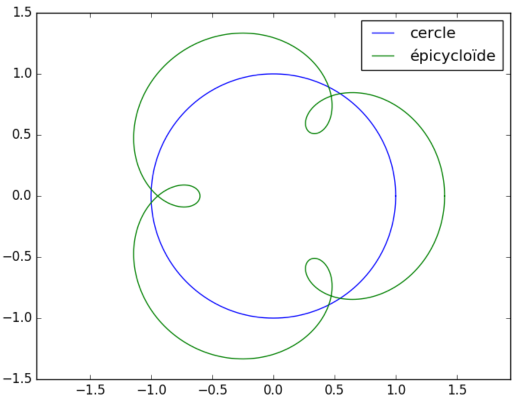
- Dans ce cas $\boxed{\text{le vecteur } \vec{f}\,'(t) \text{ dirige la tangente}}$.

6.2. Exemples de tracés de courbes paramétrées en Python

```
from math import *
from matplotlib.pyplot import *

def Apollonius(r,omega,nbPoints,nbTours):
    # nbPoints représente le nombre de points sur un tour du centre sur le déférent
    figure("Système d'Apollonius : r = {0}, omega = {1}.".format(r,omega))
    pas=1/nbPoints
    figure("Cercle et epicycoloïde")
    axis('equal')                          #repère orthonormé
    # tracé du cercle
    liste_x, liste_y = [],[]
    for k in range((nbPoints+1)*nbTours):
        t=k*pas
        x,y = cos(2*pi*t),sin(2*pi*t)
        liste_x.append(x)
        liste_y.append(y)
    plot(liste_x,liste_y,label="cercle")
    # tracé de l'épicycloïde
    liste_x, liste_y = [],[]
    for k in range((nbPoints+1)*nbTours):
        t=k*pas
        x,y =cos(2*pi*t)+r*cos(2*pi*omega*t), sin(2*pi*t)+r*sin(2*pi*omega*t)
        liste_x.append(x)
        liste_y.append(y)
    plot(liste_x,liste_y,label="épicycloïde")
    legend()
    show()

>>> Apollonius(0.4,4,1000,1)
```



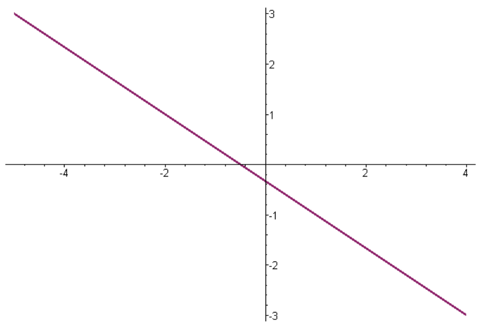
6.3. Exemples **16**.

a) Exemple 1 : la droite

$$\begin{cases} x = x_0 + a\ t \\ y = y_0 + b\ t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ici : $\boxed{\rightarrow}$

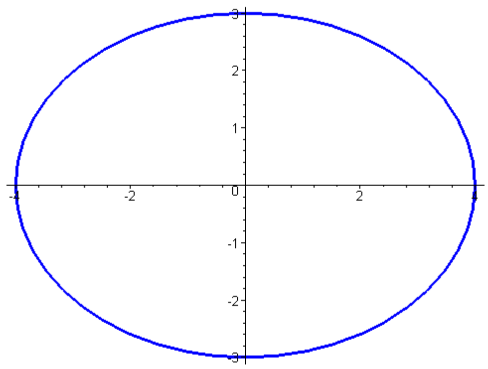
$$\begin{matrix} (x_0, y_0) = (-2,1) \\ (a,b) \ = (3,-2) \end{matrix}$$



b) Exemple 2 : l'ellipse, dilatée d'un cercle

$$\begin{cases} x = a\ \cos(t) \\ y = b\ \ \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Ici : $\boxed{(a,b) = (4,3)}$ $\boxed{\rightarrow}$



c) Exemple 3 : l'hyperbole et ses coordonnées

$$\begin{cases} x = a\ \mathrm{ch}(t) \\ y = b\ \ \mathrm{sh}(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ici : $\boxed{(a,b) = (4,3)}$ $\boxed{\rightarrow}$