Colle MP 12: Espaces préhilbertiens et séries entières

6 janvier 2017

Colle 1

MAJOET Pierre (8/20) : ne se souvient pas du tout du thm spectral (ni l'énoncé, ni la preuve). Un peu perdu sur l'exercice.
Abdel (14/20) : ne se souvient plus de la preuve de cours, mais bien pour l'exo. A de l'assurance.

Exercice 1. Théorème spectral pour les endomorphisme symétriques

Exercice 2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$ est développable en série entière sur un voisinage de 0 et trouver son rayon de convergence.
Aide : montrer que f vérifie l'ED $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$.

Exercice 3. $O_n(\mathbb{R})$ est-il compact ? connexe par arc ?

Colle 2

BRUGGER Martin (13/20) : Ecrit $r \leq min(R_a, R_b)$ au lieu de $r \geq min(R_a, R_b)$.
NADAL Julien (11/20) : Très lent.

Exercice 1. Somme et produit de Cauchy

Exercice 2. Soit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
- Calculer $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
- En déduire a_n, $\forall n$.

Exercice 3.
- Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Mq :
$$|\sum a_{i,j}| \leq n$$
Indice : utiliser vecteur avec que des 1.
- Que connait tu comme produit scalaire sur les matrices ? Quels sont ses propriétés ?

— Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Mq :

$$\sum |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$$

Indice : utiliser $(A, B) \longmapsto tr({}^t AB)$.

Colle 3

Xavier (14/20) : Bien
Schwarz Thibaut (12/20) : pas très rigoureux.

Exercice 1. Lemme d'Abel.

Exercice 2. Soit u un endomorphisme symétrique positif. Montrer que u a une unique racine carré.
Aide pour l'unicité : montrer que si $u = v^2$ alors v stabilise les espaces propres de u.

Exercice 3. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.