Intégration

Sommes de Riemann

▷ 1

Déterminer les limites de (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ **3)** $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

2) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$ **4)** $u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} k\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

► 2

Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de la suite u définie par

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}.$$

► 3

1) Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie par

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Déterminer $\ln(v_n)$ et étudier la convergence de (v_n).

Propriétés générales de l'intégrale

▷ 4

Soit f et g deux fonctions définies sur le même segment $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose f et g continues. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses (preuve / contre-exemple) ?

1) f est identiquement nulle sur $[a,b]$ si et seulement si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2) Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors $f = g$.

► 5 Une suite d'intégrales

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

1) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2) Prouver que la suite (I_n) est monotone.

3) Montrer que la suite (I_n) est convergente. Conjecturer la valeur de sa limite puis démontrer.

4) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

5) Établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.$

En déduire que : $I_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right).$

► 6 Une autre…

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Calculer I_0 et I_1.

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis qu'elle converge.

4) À l'aide d'un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établir que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (I_n) et que $I_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

5) Montrer que :

$$\forall\, t\in[0,1],\quad 0 \leqslant \sqrt{2}-\sqrt{1+t} \leqslant \frac{1-t}{2}.$$

En déduire la limite de la suite $(n I_n)$ puis un équivalent de la suite (I_n).

► 7

Prouver que les suites (I_n) et (J_n) définies par

$$I_n = \int_0^1 t^n\sin^2 t\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad J_n = \int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont décroissantes et convergentes. Préciser leur limite.

▷ 8 Découpage

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x-1|\,\mathrm{d}x$, **3)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$,

2) $\displaystyle\int_{-3}^{5} \left|x^2-9\right|\,\mathrm{d}x$, **4)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin\theta-\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$.

▶ 9 Étude d'une primitive non calculable

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. On note F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1) Justifier l'existence de F et en donner une expression faisant intervenir des intégrales.

2) Justifier que F est impaire, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et étudier son sens de variation. Montrer qu'elle admet un unique point d'inflexion.

3) On montre ici que F admet une limite finie en $+\infty$.

a. Justifier que $\forall t \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Majorer la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$ par une constante.

b. En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ F(x) \leqslant 1 + \frac{1}{e} - \mathrm{e}^{-x}$.

c. En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$ et proposer un majorant de cette limite.

▷ 10 Une intégrale à bornes mobiles

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0, \quad \Phi(x) = \int_x^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier que Φ est bien définie.

2) Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer une expression de sa dérivée.

3) Étudier les variations de Φ.

4) Établir que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 2x\,\mathrm{e}^{-9x^2} \leqslant \Phi(x) \leqslant 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

En déduire la limite de Φ en $+\infty$.

▶ 11 Une autre

Soit F et G les fonctions définies par

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

1) Déterminer le domaine de définition de G, montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa dérivée.

2) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
Étudier son signe et sa parité.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.

4) Montrer que : $\forall x > 0,\ \frac{x}{16x^4+1} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x^4+1}$.
En déduire les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

▶ 12 ♠ Un peu plus astucieux

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant $f(0)=0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \left(\int_0^x f\right)^2 \geqslant \int_0^x f^3.$$

(Indication : introduire $F : x \mapsto \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$ et déterminer $F(0)$. Que pourrait-on prouver concernant F qui résoudrait le problème ?)

▶ 13

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{e}^{t/n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

2) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

▶ 14

Soit f continue, monotone sur $[0,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ où a est un réel fixé.

On pose $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$

1) Prouver que la suite (I_n) converge vers un réel que l'on précisera.

2) ♠ Cette conclusion reste-t-elle valable si l'on ne suppose plus f monotone ?

▶ 15

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Démontrer que

$$\int_0^1 x\,\varphi\left(\tfrac{x}{n}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\varphi(0)}{2}.$$

Formule de Taylor avec reste intégral

▷ 16

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à une fonction bien choisie...

1) montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2) montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leqslant \frac{5x^3}{81}.$$