Chapitre 12

Intégration sur un intevalle quelconque

II. Les grands théorèmes

1. Convergence des intégrales d'une suite de fonctions

1.1. Sur un segment (rappel) : la convergence unfiforùm suffit

1.2. Sur un intervalle : le théorème de convergence dominée

Théorème 1 de **convergence dominée**

Soient $f_n \ {}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}\ I,\mathbb{K}^{\ \mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{CM}\ I,\mathbb{K}$ (**CM**) . Si

❋ la suite $f_n \ {}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f (**C S**)

❋ il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1\ I,\mathbb{R}_+$ telle que $\left| f \right| \leqslant \varphi$ (**D**)

Alors :

❑ $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n \in \mathcal{L}^1\ I,\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}^1\ I,\mathbb{K}$

❑ la suite des intégrales $\left(\int_I f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$.

- Démonstration admise ☺

1.3. Exemples

2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

2.1. Deux situations intéressantes

a) Sur un segment : encore la convergence uniforme (rappel)

b) Une application intéressante du théorème de convergence dominée

Proposition : **cas où le terme général est à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$

Soit $f_n \ {}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}\ I,\mathbb{R}_+^{\ \mathbb{N}}$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ (de somme S)

et si $S \in \mathcal{L}^1\ I,\mathbb{K}$,

alors la série $\sum \int_I f_n(t)dt$ converge et a pour somme $\int_I S(t)dt$.

- Démonstration

2.2. Le théorème fondamental

> Théorème 2 : **intégration terme à terme d'une série de fonctions**
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
>
> Si ❋ la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme une fonction $S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$,
>
> ❋ la série des intégrales $\sum \int_I |f_n|\,dt$ converge
>
> alors $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et la série $\sum \int_I f_n(t)dt$ converge et a pour somme $\int_I S$

- Démonstration admise ☺
- Exemple

3. Intégrales à paramètre

3.1. Continuité

> Théorème 3 : **"continuité sous le signe intégrale"**
>
> Soit $f : \begin{cases} A\times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$ où $\begin{vmatrix} A \subset F \text{ avec } F \text{ e.v.n. de dimension finie} \\ I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \end{vmatrix}$
>
> Si ① f est continue par rapport à la première variable (**C1**)
>
> i.e. $\forall t \in I : f(.,t) \in \mathcal{C}(A,\mathbb{K})$
>
> ② f est continue par morceaux par rapport à la 2^{nde} variable (**CM2**)
>
> i.e. $\forall x \in A : f(x,.) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$
>
> ③ $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\, x \in A : |f(x,.)| \leqslant \varphi$ (**D**)
>
> alors la fonction $g : x \to \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

- Démonstration facultative.
- Exemples
- Divers prolongements, notamment:

  ☺ si $A = J$, intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit satisfaite **sur tout segment inclus dans J** ; ②(**D**) s'écrit alors :

> ③ $\forall\, [a,b] \in J : \exists\, \varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}_+) \;/\; \forall\, x \in [a,b], \forall\, t \in I : |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

3.2. Dérivabilité

a) Prérequis : dérivées partielles

b) Le théorème pour la classe $\mathcal{C}^1$

> Théorème 4 : **"dérivabilité sous le signe intégrale"**
>
> Soit $f : \begin{cases} J \times I \to & \mathbb{K} \\ \ x,t \ \to f\ x,t \end{cases}$ où J et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
>
> Si ① $\forall x \in J \ : \ f \ x,. \ \in \mathcal{L}^1 \ I,\mathbb{K}$
>
> ② f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui vérifie les hypothèses (**C1**), (**CM2**) et (**D**) du théorème de continuité sous le signe intégrale.
>
> alors la fonction $g : x \to \displaystyle\int_I f \ x,t \ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :
>
> $$\forall x \in J \ : \ g' \ x \ = \int_I \frac{\partial f}{\partial x} \ x,t \ dt \ .$$

- **Démonstration admise.**
- Prolongement intéressant (ici encore) :

  ☺ il suffit que l'hypothèse de domination soit satisfaite **sur tout segment inclus dans J** ; ②(**D**) s'écrit alors :

$$③ \ \forall \ a,b \ \in J : \exists \varphi \in \mathcal{L}^1 \ I,\mathbb{R}_+ \ / \ \forall \ x \in \ a,b \ , \forall \ t \in I : \left| \frac{\partial f}{\partial x} \ x,t \right| \leqslant \varphi(t)$$

3.3. Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

a) Prérequis sur la classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions de deux variables (repris en Ch. 16)

b) Le théorème

> Théorème 4-bis : **"dérivabilité k fois le signe intégrale"**
>
> Soit $f : \begin{cases} J \times I \to & \mathbb{K} \\ \ x,t \ \to f\ x,t \end{cases}$ où J et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$
>
> Si f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ de manière que :
>
> ① $\forall i \in \ 0,k-1 \quad \forall x \in J \ : \ \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i} \ x,. \ \in \mathcal{L}^1 \ I,\mathbb{K}$
>
> ② $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie les hypothèses (C1), (CM2) et (D)* du théorème de continuité sous le signe intégrale.
>
> alors la fonction $g : x \to \displaystyle\int_I f \ x,t \ dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et vérifie :
>
> $$\forall x \in J \ : \ g^{\ k} \ x \ = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \ x,t \ dt \ .$$

- Démonstration admise.
- ☺ * ici encore il suffit que l'hypothèse de domination soit satisfaite **sur tout segment inclus dans $\boldsymbol{J}$**
- Exemple : voir ci-dessous § 3.4.b la fonction $\mathbf{\Gamma}$.

3.4. Exemples