MP*: ensemble dénombrable, familles sommables et probabilités

Coralie Renault

15 septembre 2014

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^\star$. Etudier la nature de la séries de terme général :

$$\frac{1}{n\sigma(n)}$$

Exercice

Soit (z_n) une suite de complexes non nuls telles que

$$n \neq m \Rightarrow |z_n - z_m| \geqslant 1$$

Montrer la convergence de la série de terme général $1/z_n^3$.

Exercice

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommables.
a) Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
b) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $(u \star v)_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$$

c) Montrer que la loi $\star$ ainsi définie est commutative, associative et possède un neutre.
d) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ est-elle un groupe ?

Exercice

On pose

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

La famille est-elle sommable ?

Exercice

Existence et calcul de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$$

Exercice

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère l'évènement
$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant p} A_n$$
dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements A_n sont réalisés.
a) On suppose la convergence de la série $\sum P(A_n)$.
Montrer que $P(A) = 0$.
b) A l'inverse, on suppose la divergence de la série $\sum P(A_n)$.
Montrer que $P(A) = 1$.
Ce résultat s'appelle la loi du zéro-un de Kolmogorov.

Exercice

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Montrer
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$

Exercice

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Quelle est la probabilitée qu'une boule rouge figure dans ce tirage ?

Exercice

Deux entreprises asiatiques produisent des « langues de belle-mère »en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !
a) Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?
b) Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?