Colles de mathématiques en PCSI 5

13 mars 2012

Programme

Calcul intégral et développements limités.

Exercice n° 1

Pour $x > 1$, on se propose de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I est bien définie.
2. On décide alors d'approcher I par des sommes de Riemann à pas constant. En utilisant l'identité : $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\alpha})(X - \mathrm{e}^{-i\alpha})$, prouver que la n-ième somme s'écrit :

$$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(x-1)(x^{2n}-1)}{x+1}\right).$$

Conclure.

Exercice n° 2

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Prouver que :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice n° 3

Simplifier

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t.$$

Exercice n° 4

On pose ici $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Conparer I_n et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $(I_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Chercher une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} pour tout k.
4. Prouver que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$. Donner alors un équivalent simple de (I_n).

Exercice n° 5

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\,,\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\,,\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^{n}\,.$$

Exercice n° 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x\,,\quad \int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x\,,\quad \int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\,.$$

Solution. $2(\ln 2)^2-4\ln 2+2$, $\frac{\pi(b-a)^2}{8}$, $\frac{\pi^2}{4}$. □

Exercice n° 7

Déterminer les primitives des fonctions suivantes, en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x^2\mathrm{e}^x\sin x$;

2. $\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$;

3. $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$;

4. $\frac{\tan x}{1+\sin^2 x}$.

Exercice n° 8

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{x^x-1}}\,,\quad \lim_{x\to0^+}\frac{(\sin x)^x-1}{x^x-1}\,,\quad \lim_{x\to1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\,,\quad \lim_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,.$$

Solution. $+\infty$, 1, $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $-\frac{\pi}{6}$. □

Exercice n° 9

Donner :

1. Un DL_2 en 0 de

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

2. Un DL_5 en 0 de

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2 x}.$$

3. Un DL_{10} en 0 de

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

4. Un DL_{100} en 0 de

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{98}\frac{x^k}{k!}\right).$$

Solution. **1.** $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}(1-\frac{1}{60}x^2+o(x^2))$;

2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+\frac{31}{945}x^4+o(x^5)\,;$

3. $-x+2x+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{24}x^9-\frac{1}{10}x^{10}+o(x^{10})\,;$

4. $x-\frac{x^{99}}{99!}+\frac{x^{100}}{98!100}+o(x^{100}).$

$\square$