SEMAINE 21

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXERCICE 1 :

On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' + p(x)\,y = 0\ ,$$

où p est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit f une solution non nulle de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier l'ensemble des zéros de f, puis de f'.

2. Dans cette question, on suppose p dérivable. En considérant la fonction h définie par

$$h(x) = f(x)^2 + \frac{f'(x)^2}{p(x)}\ ,$$

montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, si a et b sont deux extremums consécutifs de f, on a $|f(b)| \leq |f(a)|$.

- -

1. Notons $E = f^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f, et $E' = (f)'^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f'. On a $E\ \cap\ E' = \emptyset$ puisque, si une solution f de **(E)** n'est pas la fonction nulle, on a $\big(f(x), f'(x)\big) \neq (0,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les zéros de f sont isolés : en effet, si $a \in \mathbb{R}_+$ était un point d'accumulation de E, c'est-à-dire s'il existait une suite (a_n) de points de E distincts de a et convergeant vers a, on aurait alors $a \in E$ car E est fermé, puis $f'(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = 0$ puisque ces taux d'accroissement sont tous nuls et $a \in E\ \cap\ E'$, ce qui est absurde.

On montre de même que les zéros de f' sont isolés (car $f''(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0$).

L'ensemble E des zéros de f est infini. Nous allons montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad E\ \cap\ [a, +\infty[\neq \emptyset$. Pour cela, démontrons le lemme suivant :

Soient p_1 et p_2 deux fonctions réelles continues sur un intervalle I, vérifiant $p_2 \geq p_1$ sur I.

Soit f_1 une solution de $(\mathbf{E}_1)$: $y'' + p_1(x)\,y = 0$ sur I, on suppose que a et b ($a < b$) sont deux éléments de I tels que $f_1(a) = f_1(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[\quad f_1(x) \neq 0$.

Soit f_2 une solution de $(\mathbf{E}_2)$: $y'' + p_2(x)\,y = 0$ sur I.

Alors f_2 admet au moins un zéro sur $[a, b]$.

<Démonstration du lemme> : supposons $f_1 > 0$ sur $]a, b[$, ce qui entraîne $f_1'(a) > 0$ et $f_1'(b) < 0$. Supposons que f_2 ne s'annule pas sur $[a, b]$, par exemple que $f_2 > 0$ sur $[a, b]$. Considérons le "wronskien croisé" $W = f_1 f_2' - f_2 f_1'$. La fonction W est dérivable avec

$$W' = f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = (p_1 - p_2) f_1 f_2 \leq 0 \quad \text{sur} \quad [a, b]\ ,$$

donc W est décroissante sur cet intervalle. Or, $W(a) = -f_2(a) f_1'(a) < 0$ et $W(b) = -f_2(b) f_1'(b) > 0$, d'où une contradiction. En faisant d'autres hypothèses sur les signes de f_1 et f_2 dans $]a, b[$, on aboutit aussi à des contradictions. En conclusion, f_2 ne peut garder un signe constant sur $[a, b]$, donc s'annule sur cet intervalle.
</Démonstration du lemme>

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}_+$, soit $p_0 = p(a) > 0$. L'équation (à coefficients constants) $y'' + p_0\,y = 0$ admet pour solution sur $I = [a, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \sin\sqrt{p_0}(x - a)$, qui admet les réels

a et $b = a + \dfrac{\pi}{\sqrt{p_0}}$ comme zéros consécutifs. La fonction p étant croissante, on a $p(x) \geq p_0$ sur I, ce qui permet d'appliquer le lemme : la fonction f admet au moins un zéro dans l'intervalle $[a, b]$.

Les zéros de f peuvent donc être ordonnés en une suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque f admet au moins un zéro, et chaque zéro de f admet un zéro "consécutif".

Par le théorème de Rolle, entre deux zéros consécutifs de f, il y a au moins un zéro de f'. Mais, entre deux zéros de f', il y a au moins un zéro de f'' qui est aussi un zéro de f. En conclusion, les zéros de f' peuvent aussi être ordonnés en une suite strictement croissante $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les deux suites (x_n) et (x'_n) sont "entrelacées", c'est-à-dire que l'on a

$$\text{soit} \quad 0 \leq x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \cdots \,, \qquad \text{soit} \quad 0 \leq x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 < \cdots$$

2. Dérivons h : $h' = 2ff' + \dfrac{2f'f''}{p} - \dfrac{f'^2p'}{p^2} = -f'^2\,\dfrac{p'}{p^2} \leq 0$, donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc majorée. A fortiori, f^2 est majorée, donc f est bornée. Enfin, si a et b sont deux zéros consécutifs de la dérivée (ce sont des extremums car la dérivée seconde ne peut s'annuler en ces points), alors $h(b) \leq h(a)$, c'est-à-dire $f(b)^2 \leq f(a)^2$, ou encore $|f(b)| \leq |f(a)|$.

EXERCICE 2 :

Soient f et g continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, avec $f \leq 0$ sur $[a, b]$. Montrer que l'équation différentielle **(E)** : $y'' + f(x)\,y = g(x)$ admet une unique solution sur $[a, b]$ vérifiant les conditions aux limites $y(a) = y(b) = 0$.

- -

Montrons d'abord que toute solution (autre que la fonction nulle) de l'équation sans second membre $y'' + f(x)y = 0$ s'annule au plus une fois sur $[a, b]$: soit y une telle solution, supposons qu'elle admette au moins deux zéros distincts dans $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$ un de ces zéros, supposons $x_0 \neq \max\big(y^{-1}(\{0\})\big)$. On a alors $y'(x_0) \neq 0$, sinon y serait identiquement nulle par le thórème de Cauchy-Lipschitz. Supposons $y'(x_0) > 0$. Les zéros de y étant isolés (*cf.* exercice 1), soit x_1 le zéro de y consécutif à x_0. On a alors $y > 0$ sur l'intervalle $]x_0, x_1[$, donc $fy \leq 0$ et $y'' = -fy \geq 0$ sur $[x_0, x_1]$; sur cet intervalle, la fonction y' est donc croissante, d'où $y' \geq y(x_0) > 0$, et y est strictement croissante sur $[x_0, x_1]$, ce qui est absurde.

Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre $y'' + f(x)y = 0$. On sait que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de dimension deux de $\mathcal{C}^2\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Soit l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}_0 & \to \ \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto \ \big(y(a), y(b)\big) \end{cases}$. L'application Φ est linéaire, injective d'après ce qui précède, donc Φ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_0$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'on a égalité des dimensions.

Soit alors y une quelconque solution de l'équation **(E)** sur $[a, b]$ (*il en existe, la méthode de variation des constantes permet de les exprimer à partir d'un système fondamental de* $\mathcal{S}_0$).

Posons $\alpha = y(a)$ et $\beta = y(b)$. Soit y_0 l'unique élément de $\mathcal{S}_0$ tel que $\begin{cases} y_0(a) &= -\alpha \\ y_0(b) &= -\beta \end{cases}$, c'est-à-dire $y_0 = \Phi^{-1}(-\alpha, -\beta)$. La fonction $y_1 = y + y_0$ vérifie l'équation différentielle **(E)** et les conditions aux limites imposées, et c'est la seule solution du problème posé.

EXERCICE 3 :

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une application continue telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

On suppose que la fonction $\dfrac{1}{g}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, il existe une unique fonction h_λ, définie et continue sur un intervalle de la forme $I_\lambda =]-\infty, b_\lambda[$ (avec $b_\lambda \in]0, +\infty]$), telle que

$$\textbf{(I)} \qquad \forall t \in I_\lambda \qquad h_\lambda(t) = \lambda + \int_0^t g\big(h_\lambda(u)\big)\,\mathrm{d}u\ .$$

Dans quel cas a-t-on $b_\lambda = +\infty$?

- -

Si une fonction h_λ, continue sur un intervalle I contenant 0, vérifie l'équation intégrale **(I)**, alors h_λ est dérivable sur I et est solution du problème de Cauchy **(*)** : $\begin{cases} y' &= g(y) \\ y(0) &= \lambda \end{cases}$, et h_λ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Réciproquement, si $h_\lambda : I \to \mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$, est solution du problème **(*)**, alors elle vérifie **(I)** sur l'intervalle I.

Résolvons donc le problème de Cauchy **(*)** :

Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et solution du problème de Cauchy **(*)**. On a alors, pour tout $t \in I$, $\dfrac{h'(t)}{g\big(h(t)\big)} = 1$ soit, en notant G une primitive de la fonction $\dfrac{1}{g}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\left(\text{par exemple } G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{g(u)}\right)$, la relation $(G \circ h)' = 1$ sur I, d'où $G\big(h(t)\big) = t + C$.

Or, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = -\infty$ puisque la fonction positive $\dfrac{1}{g}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Posons $\omega = \lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$: on a $\omega = +\infty$ si la fonction $\dfrac{1}{g}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction G est alors un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image $J =]-\infty, \omega[$.

Ce qui précède montre que, nécessairement, $t + C \in]-\infty, \omega[$ et $h(t) = G^{-1}(t + C)$; la condition initiale enfin permet de déterminer la constante : $C = G(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}u}{g(u)}$. La fonction h_λ est donc nécessairement donnée par l'expression

$$h_\lambda(t) = G^{-1}\left(t + \int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}u}{g(u)}\right) = G^{-1}\big(t + G(\lambda)\big)$$

et on vérifie (réciproque) qu'une telle fonction est bien solution de **(*)** sur l'intervalle $I_\lambda =]-\infty, b_\lambda[$ avec $b_\lambda = \omega - G(\lambda)$. Une telle solution ne peut être prolongée puisque $\lim\limits_{t\to b_\lambda} h_\lambda(t) = \lim\limits_{x\to\omega} G^{-1}(x) = +\infty$.

On a donc $b_\lambda = +\infty$ si et seulement si la fonction $\dfrac{1}{g}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

EXERCICE 4 :

On note (I, f) la solution maximale du problème de Cauchy

$$(\mathbf{E})\ :\ y'' = \frac{1}{2}(1 - 3y^2)\ ; \qquad y(0) = 0\ ; \quad y'(0) = 0\ .$$

1. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $[0, a] \subset I$, f est strictement croissante sur $[0, a]$ et $f'(a) = 0$.

2. Montrer que $I = \mathbb{R}$, que f est paire et $2a$-périodique.

- -

1. Si (I, f) est la solution maximale, alors la fonction g définie sur $-I$ par $g(-x) = f(x)$ vérifie le même problème de Cauchy, donc $-I \subset I$ (ce qui signifie en fait que $-I = I$: l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et $g = f$. On a donc prouvé la parité de f.

- **Analyse :** L'intervalle I est de la forme $]-\omega, \omega[$ avec $0 < \omega \leq +\infty$. On a $f''(0) = \dfrac{1}{2}$, donc f' est strictement positive à droite de 0. Considérons le plus grand intervalle de la forme $J =]0, a[$ sur lequel f' reste strictement positive ($0 < a \leq +\infty$) : l'ensemble $\{x \in I \mid f'(x) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]0, \varepsilon[$ et J est la composante connexe par arcs de cet ensemble contenant $]0, \varepsilon[$.

Sur l'intervalle J, la fonction f est solution de $2y'y'' = (1 - 3y^2)y'$; en intégrant cette relation de 0 à t avec $t \in J$, on obtient

$$\forall t \in J \qquad f'(t)^2 - f'(0)^2 = f(t) - f(0) - f(t)^3 + f(0)^3\ ,$$

soit $f'(t)^2 = f(t) - f(t)^3$ et, comme $f' > 0$ sur J, cela entraîne que $f - f^3$ est strictement positive sur le même intervalle, puis que

$$\forall t \in J \qquad \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t) - f(t)^3}} = 1\ .$$

En intégrant de 0 à x (avec $x \in J$), on a $\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t) - f(t)^3}}\,\mathrm{d}t = x$ soit, en posant $u = f(t)$, ce qui est légitime puisque f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J sur son image,

$$\forall x \in J \qquad \int_0^{f(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u - u^3}} = x\ .$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u-u^3}}$ *est intégrable dans un voisinage de* 0*, ce qui justifie l'existence des intégrales ci-dessus.*

On a donc, pour tout $x \in J$, $\varphi\big(f(x)\big) = x$, en posant $\varphi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u-u^3}}$ pour tout $y \in f(J)$.

- **Synthèse :** Soit φ l'application définie sur $[0,1]$ par $\varphi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u-u^3}}$. L'intégrabilité de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u-u^3}}$ sur $]0,1[$ garantit l'existence et la continuité de φ sur $[0,1]$. La fonction φ est strictement croissante sur $[0,1]$ et établit donc une bijection de $[0,1]$ vers $[0,a]$, avec $a = \varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u-u^3}}$. On peut préciser que φ est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0,1[$, avec $\varphi'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-y^3}} > 0$ et φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]0,1[$ vers $]0,a[$. Notons $f : [0,a] \to [0,1]$ l'application réciproque, continue sur $[0,a]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,a[$. Sur $]0,a[$, on peut écrire $f'(t) = (\varphi^{-1})'(t) = \sqrt{f(t)-f(t)^3}$. En élevant au carré, en dérivant et en simplifiant par $f'(t)$ non nul, on obtient $\forall t \in]0,a[\quad f''(t) = \dfrac{1}{2}\big(1 - 3\,f(t)^2\big)$. Enfin, des relations écrites ci-dessus, on déduit que $\lim\limits_0 f' = 0$, $\lim\limits_a f' = 0$, et que f'' aussi admet des limites finies en 0^+ et en a^-, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,a]$. En posant $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in [-a,0[$, on prolonge f en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-a,a]$ qui est solution du problème de Cauchy posé, mais qui n'est certainement pas la solution maximale (l'intervalle de définition n'étant pas ouvert).

2. On a $f(-a) = f(a) = 1$ et $f'(-a) = f'(a) = 0$, ce qui permet de "translater la solution" (par exemple, la fonction g, définie sur $[a,3a]$ par $g(x) = f(x-2a)$ vérifie le même problème de Cauchy que la solution maximale f au point a, donc coïncide avec f sur cet intervalle). Donc la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$; elle est paire et $2a$-périodique.

EXERCICE 5 :

Étude de l'équation du pendule

Soit l'équation différentielle **(E)** : $y'' + k^2\,\sin y = 0 \qquad (k > 0 \text{ donné})$.

Étudier le comportement de la solution maximale satisfaisant aux conditions initiales

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = v \qquad (v > 0 \text{ donné}) .$$

Interpréter physiquement.

- -

Analyse : Notons (I,f) la solution maximale correspondant aux conditions initiales imposées. Constatons d'abord que la fonction $g : -I \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = -f(-t)$ est solution du même problème de Cauchy, donc $-I \subset I$ ce qui entraîne en fait $-I = I$ (l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et $g = f$: la fonction f est impaire.

On a donc $I =]-\omega, \omega[$ avec $0 < \omega \leq +\infty$. On a $f'(0) = v > 0$ et f' est continue, soit $J =]-a, a[$ avec $0 < a \leq +\infty$ le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $f' > 0$ (*l'ensemble* $\{t \in I \mid f'(t) > 0\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0*,* J *est sa composante connexe par arcs contenant* 0).

Sur l'intervalle J, f est solution de $y'y'' = -k^2\, y' \sin y$; en intégrant cette relation de 0 à t (avec $t \in J$), on a $\dfrac{1}{2}(y'^2 - v^2) = k^2(\cos y - 1)$, soit $y'^2 = v^2 - 2k^2 + 2k^2 \cos y$, donc, puisque $f' > 0$ sur J,

$$\forall t \in J \qquad f'(t) = \sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos f(t)}\ .$$

"Séparons les variables" : $\dfrac{f'(t)}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos f(t)}} = 1$ pour $t \in J$ donc, en intégrant de 0 à x avec $x \in J$,

$$\forall x \in J \qquad \int_0^x \frac{f'(t)\, \mathrm{d}t}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos f(t)}} = \int_0^x \mathrm{d}t = x$$

ou, en posant $u = f(t)$, ce qui est légitime puisque la fonction f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle J sur son image,

$$\forall x \in J \qquad \int_0^{f(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos u}} = x\ .$$

On a donc, pour tout $x \in J$, $\varphi\big(f(x)\big) = x$ en posant $\varphi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos u}}$ pour tout $y \in f(J)$.

Synthèse : Soit U le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel l'expression $v^2 - 2k^2 + 2k^2 \cos u$ reste strictement positive. L'application $\varphi : y \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\, \cos u}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante sur U, donc réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de l'intervalle U vers son image $V = \varphi(U)$. Notons $f = \varphi^{-1} : V \to U$ l'application réciproque. Sur V, on a $f'(t) = \dfrac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)} = \sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2 \cos\big(f(t)\big)}$. En élevant au carré, en dérivant, puis en simplifiant par $f'(t)$ qui est non nul, et enfin en vérifiant les conditions initiales, on voit que (V, f) est une solution du problème de Cauchy posé (*mais ce n'est peut-être pas la solution maximale*).

Étude des différents cas :

- si $v = 2k$, on a $v^2 - 2k^2 + 2k^2 \cos u = 2k^2(1 + \cos u)$ donc, avec les notations ci-dessus (*cf. synthèse*), $U =]-\pi, \pi[$ et, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos u}}$ n'étant pas intégrable sur $[0, \pi[$ puisque $\sqrt{1 + \cos u} = \sqrt{2}\, \cos\dfrac{u}{2} \sim \dfrac{\pi - u}{\sqrt{2}}$ au voisinage de π, on a $V = \varphi(U) = \mathbb{R}$. La solution maximale est donc dans ce cas (V, f) et f est un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi, \pi[$.

  Ce cas est "physiquement" improbable, le pendule tend vers sa position d'équilibre instable.

Remarquons qu'ici, le calcul peut être complètement explicité : $\varphi(y) = \dfrac{1}{k}\ \ln\tan\left(\dfrac{\pi+y}{4}\right)$ *pour* $y \in\,]-\pi,\pi[$*, puis* $f(t) = \varphi^{-1}(t) = 4\ \arctan(e^{kt}) - \pi$ *pour* $t \in \mathbb{R}$*.*

- si $v > 2k$, alors $U = \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\ \cos u}}$ n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a $V = \varphi(U) = \mathbb{R}$. Ici encore, la solution maximale est (V, f) et f est un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Posons $T_0 = \varphi(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\ \cos u}}$. On a alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \varphi(y+2\pi) = \varphi(y) + \int_y^{y+2\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\ \cos u}} = \varphi(y) + T_0\ ,$$

donc la bijection réciproque $f = \varphi^{-1}$ vérifie $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+T_0) = f(t) + 2\pi$.

Le pendule tourne indéfiniment et repasse par sa position d'équilibre à intervalles réguliers et à la même vitesse : le mouvement est périodique.

- si $v < 2k$, posons $y_0 = \arccos\left(1 - \dfrac{v^2}{2k^2}\right)$. On a $U = \,]-y_0, y_0[\,$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\ \cos u}}$ est intégrable sur $[0, y_0[$ *(en effet, en posant* $u = y_0 - h$*, on obtient facilement l'équivalent* $v^2 - 2k^2 + 2k^2\cos(y_0 - h) \sim (2k^2 \sin y_0)h$ *lorsque* h *tend vers* 0). Posons $a = \displaystyle\int_0^{y_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v^2 - 2k^2 + 2k^2\ \cos u}}$; on a alors $V = \varphi(U) =]-a, a[$, mais ici (V, f) n'est pas la solution maximale : en effet, en posant $f(a) = y_0$, la fonction f est continue sur $]-a, a]$ et dérivable au point a avec $f'(a) = 0$ car $\displaystyle\lim_{y \to y_0^-} \varphi'(y) = +\infty$; la solution maximale f peut donc être prolongée au-delà du point a, et de même à gauche du point $-a$.

Soit I l'intervalle de définition de la solution maximale, on sait que $[-a, a] \subset I$. Notons $J = 2a - I$ l'intervalle symétrique de I par rapport à la valeur a. La fonction $g : J \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(2a - x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J avec $g''(x) = f''(2a - x)$, donc elle vérifie $\begin{cases} g'' &= -k^2\ \sin g \\ g(a) &= f(a) = y_0 \\ g'(a) &= -f'(a) = 0 = f'(a) \end{cases}$, problème de Cauchy aussi vérifié par la solution (I, f) ; on a donc $J \subset I$ (ce qui signifie en fait que $J = I$) et $g = f$, autrement dit la solution maximale f (qui est maintenant définie au moins sur $[-a, 3a]$) possède la symétrie $f(2a - x) = f(x)$.

Enfin, $f(3a) = f(a)$ et $f'(3a) = -f'(a) = 0 = f'(a)$, ce qui permet de "translater la solution obtenue", autrement dit la fonction $4a$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et coïncidant avec f sur $[0, 3a]$ est la solution maximale.

Le pendule effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre stable, la période de ces oscillations est $T = 4a$ *et l'angle maximal atteint est* y_0*.*

EXERCICE 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

1. Montrer que l'application $b : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{tA}x \mid e^{tA}y\right) \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\begin{cases} f(0) &= 0 \\ \mathrm{d}f(0) &= A \end{cases}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $\|x_0\|$ suffisamment petit, la solution maximale x du problème **(*)** : $\begin{cases} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Source : François ROUVIÈRE, Petit guide de calcul différentiel, Éditions Cassini, ISBN 2-84225-008-7

- -

1. Utilisons la réduction de A suivant ses sous-espaces caractéristiques. Notons $E = \mathbb{C}^n$, notons u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A. Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, avec $E_j = \mathrm{Ker}(u - \lambda_j\, \mathrm{id}_E)^{r_j}$. *Rappelons que r_j est ici l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j en tant que racine du polynôme minimal de A, et c'est aussi l'indice de nilpotence de la restriction à E_j de l'endomorphisme $u - \lambda_j\, \mathrm{id}_E$.*

Si $x \in E$, on le décompose en $x = x_1 + \cdots + x_m$ avec $x_j \in E_j$ pour tout j. Alors, en notant $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$, on a $\|e^{tA}\, x\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \|e^{tA}\, x_j\|$, mais

$$e^{tA}\, x_j = e^{t\lambda_j}\, e^{t(A-\lambda_j I)}\, x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I)^k x_j \right).$$

Ainsi,

$$\|e^{tA}\, x_j\| \leq e^{t\lambda_j} \left(\sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!}\, \|(A - \lambda_j I)^k x_j\|\, |t|^k \right) \leq P_j(|t|)\, e^{t\lambda_j},$$

où P_j est un polynôme. On a $|e^{t\lambda_j}| = e^{t \cdot \mathrm{Re}(\lambda_j)}$ donc, en notant $\displaystyle\max_{1 \leq j \leq m} \mathrm{Re}(\lambda_j) = -a < 0$ et $r = \displaystyle\max_{1 \leq j \leq m} (r_j) - 1$, chaque terme $\|e^{tA}\, x_j\|$ est un $O(t^r\, e^{-at})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc $\|e^{tA}\, x\| = O(t^r\, e^{-at})$ lorsque $t \to +\infty$.

À partir de maintenant, notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$\left| \left(e^{tA}x \,|\, e^{tA}y\right) \right| \leq \|e^{tA}\, x\|\, \|e^{tA}\, y\| = O(t^{2r}\, e^{-2at})$$

lorsque t tend vers $+\infty$, donc la fonction $t \mapsto \left(e^{tA}x \,|e^{tA}y\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'existence de $b(x,y)$.

La bilinéarité, la symétrie et la positivité de b sont immédiates. Si $b(x,x)=0$, alors $e^{tA} \;\; = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc $x=0$.

La forme quadratique définie positive $q : x \mapsto b(x,x)$ est appelée **fonction de Liapounov**. *Nous poserons désormais $N(x)=\sqrt{q(x)}$: ainsi, N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.*

2. Soit $x : I \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale du problème de Cauchy **(*)**. On sait que $I \cap \mathbb{R}_+ = [0,\omega[$ avec $0 < \omega \leq +\infty$.

Notons que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{tA}\,y\big) = A\,e^{tA}\,y$, d'où

$$\begin{aligned} b(y,Ay) &= \int_0^{+\infty} \big(e^{tA}\,y \mid A\,e^{tA}\,y\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\|e^{tA}\,y\|^2\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\|e^{tA}\,y\|^2\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\,\|y\|^2\,. \end{aligned}$$

Les normes N et $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes :

$$\exists (C_1,C_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \qquad C_1\|y\| \leq N(y) \leq C_2\|y\|\,.$$

La fonction f étant différentiable en 0 avec $f(0)=0$ et $\mathrm{d}f(0)=A$, si on se donne $\rho>0$, on peut trouver $r>0$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \qquad N(y) \leq r \Longrightarrow N\big(f(y)-Ay\big) \leq \rho\,N(y)\,.$$

Supposons $N(x_0) < r$ et soit $J = \{t \in I \cap \mathbb{R}_+ \mid \forall s \in [0,t] \quad N\big(x(s)\big) < r\}$. Alors J est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$, contenant 0 et non réduit à $\{0\}$. Pour $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q\big(x(t)\big) &= 2\,b\big(x(t),x'(t)\big) \\ &= 2\,b\big(x(t),A\,x(t)\big) + 2\,b\Big(x(t),f(x(t))-A\,x(t)\Big) \\ &\leq -\|x(t)\|^2 + 2\,N\big(x(t)\big)\,N\big(f\big(x(t)\big)-A\,x(t)\big) \\ &\leq -\frac{1}{C_2^2}\,q\big(x(t)\big) + 2\,\rho\,q\big(x(t)\big) = \left(2\rho - \frac{1}{C_2^2}\right)\,q\big(x(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Choisissons ρ tel que $0 < \rho < \dfrac{1}{2C_2^2}$ et posons $m = \dfrac{1}{C_2^2} - 2\rho > 0$. On a alors

$$\forall t \in J \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q\big(x(t)\big) \leq -m\,q\big(x(t)\big)\,.$$

La fonction $z : t \mapsto z(t) = e^{mt}\,q\big(x(t)\big)$ est alors décroissante sur J puisque $z' \leq 0$ sur J, donc $\forall t \in J \quad q\big(x(t)\big) \leq e^{-mt}\,q(x_0)$ **(**)**.

Soit $\beta = \sup J$. On a $0 < \beta \leq \omega$ car $J \subset I$. Si on avait $\beta < \omega$, alors nécessairement $\beta < +\infty$ et, de $\forall t \in \left[\dfrac{\beta}{2},\beta\right[\quad N\big(x(t)\big) \leq e^{-m\frac{\beta}{4}}\,r$, on tire $N\big(x(\beta)\big) < r$ et, par continuité, $\sup J > \beta$, ce qui est contradictoire. Donc $\beta = \omega$.

On a $\omega = +\infty$: si on avait $\omega < +\infty$, alors la fonction x resterait bornée dans $[0, \omega[$, ainsi que la fonction $x' = f \circ x$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$; la fonction x serait donc lipschitzienne sur $[0, \omega[$ donc prolongeable par continuité en ω (elle vérifie le critère de Cauchy en ce point), et le théorème de Cauchy-Lipschitz permettrait de "prolonger la solution" au-delà de ω, ce qui contredit la maximalité de cette solution.

Enfin, l'inégalité **(**)** montre que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$. *L'origine est un point fixe* **asymptotiquement stable** *(ou "point d'équilibre attractif") du système différentiel non linéaire* $x' = f(x)$.