Séries numériques

I Notions générales

I.1 Définitions et premiers exemples

Déf. • Série numérique et sommes partielles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1) La **série de terme général (u_n)** est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

2) Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ pris séparément, le nombre S_n est appelé **somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$.**
3) La série de terme général (u_n) est notée $\sum u_n$**.**
4) Quand la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0, les sommes partielles commencent en $k=n_0$ et la série de terme général (u_n) est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$**.**

Rem. ⋄ L'écriture $\sum u_n$ n'est qu'une notation pour désigner la série de terme général (u_n). Elle ne sera pas utilisée pour faire des calculs.

Déf. • Convergence d'une série et somme d'une série convergente

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1) On dit que **la série $\sum u_n$ est convergente** lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente.
2) Si la série $\sum u_n$ est convergente, on appelle **somme de la série $\sum u_n$** la limite de ses sommes partielles S_n quand n tend vers $+\infty$.

   La somme de la série $\sum u_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$**.**

Attention ❢ 1) **Ne surtout jamais confondre la convergence de la suite (u_n) et la convergence de la série $\sum u_n$.** Ce sont deux notions bien distinctes.

2) La notation $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ n'est autorisée que lorsque la série $\sum u_n$ est convergente. Aucun calcul ne doit faire intervenir cette écriture avant d'avoir prouvé la convergence de la série.

Ex. ✻ 1) Séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum 2^n$.
2) Série $\sum n$.
3) Séries télescopiques $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.
4) Série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

Déf. • Reste d'une série convergente

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le **reste d'indice n de la série $\sum u_n$** est la différence entre la somme de la série et sa somme partielle d'indice n :

$$R_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k-\sum_{k=0}^{n}u_k.\qquad \text{Le reste } R_n \text{ est également noté } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Propr. • Propriétés du reste d'une série convergente

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et on note S_n sa somme partielle, R_n son reste d'indice n. Alors :

1) Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{k\geqslant n}u_k$ est convergente, de somme R_n.
2) $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

I.2 Propriétés générales des séries

Propr. • Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) tend vers 0.

Attention ❢ La réciproque de cette propriété est fausse : lorsque le terme général u_n tend vers 0, on ne peut pas conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Que peut-on dire, à la lumière de cette propriété, des séries suivantes :

$$\sum n,\quad \sum(-1)^n,\quad \sum\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\quad\text{et}\quad\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\ ?$$

Propr. • Linéarité de la somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, λ et μ deux scalaires.

1) Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum(\lambda\, u_n)$ converge également et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda\, u_n)=\lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$.
2) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(u_n+v_n)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n$.

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Propr. • Séries télescopiques
Soit (a_n) une suite réelle ou complexe.
Alors la suite (a_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1}(a_n - a_{n-1})$ est convergente. En cas de convergence, on aura

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n-1}) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) - a_0.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Astuce Il vaut mieux refaire la preuve à chaque fois pour éviter les erreurs sur les indices.

Rem. ◇ L'équivalence peut être utilisée dans les deux sens : on peut se servir de cette propriété pour étudier la convergence d'une série **mais aussi** pour établir la convergence d'une suite problématique en écrivant cette suite comme somme de ses accroissements.

I.3 Étude des séries géométriques

Parmi toutes les séries, certaines sont des séries de référence. Leur convergence est connue et elles permettent par comparaison d'étudier d'autres séries. Les plus simples sont les séries géométriques.

Déf. • Série géométrique de raison q
Soit q un nombre réel ou complexe. La **série géométrique de raison q** est la série $\sum q^n$.

Propr. • Convergence des séries géométriques
Une série géométrique est convergente si et seulement si sa raison q vérifie $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démo. Sur les notes de cours.

II Étude des séries à termes positifs

II.1 Principe général

Pour la plupart des séries, il n'est pas possible de déterminer une expression de la somme partielle qui permette simplement d'étudier sa limite. On utilise alors d'autres techniques qui permettent d'étudier la convergence de très nombreuses séries mais sans donner la valeur de leur somme.

Propr. • Soit (u_n) une suite de réels **positifs.** Alors :
1) La suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante.
2) La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

II.2 Comparaison série-intégrale et séries de Riemann

À partir d'une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[n_0, +\infty[$, on peut former la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$.

Lorsque la fonction f est continue et monotone, on peut encadrer les sommes partielles de la série à l'aide d'intégrales de f. Cette technique s'inspire de la méthode des rectangles et permet d'étudier la convergence (ou divergence) de la série, mais aussi des équivalents de restes ou de sommes partielles.

Deux exemples fondamentaux :

1) La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$;
2) Un équivalent des sommes partielles de la série $\sum n^2$.

Les séries de Riemann sont des séries de référence dont la convergence peut s'établir par comparaison série-intégrale.

Déf. • Séries de Riemann
Soit α un nombre réel quelconque. La **série de Riemann d'exposant α** est la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

Thm • Convergence des séries de Riemann
Soit α un nombre réel quelconque. Alors :

$$\text{La série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha > 1.$$

Rem. ◇ Dans les cas de convergence, le théorème ne donne pas la valeur de la somme de ces séries.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geqslant 1}1$.

II.3 Comparaison de deux séries par inégalités et équivalents

Thm • Théorème de comparaison des séries

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

1) (u_n) et (v_n) sont des suites positives ;

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

Alors si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Dans ce cas, leurs sommes vérifient : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démo. Sur les notes de cours.

Important ✪ La contraposée est également utilise : si la série $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum v_n$ est divergente également.

Ex. ✻ Étude des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$ et $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$.

Lorsque les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang n_0, les résultats concernant la convergence des séries demeurent mais il faut être prudent quant à leurs sommes. Nous retiendrons :

Coroll. • Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

1) (u_n) et (v_n) sont des suites positives à partir d'un certain rang ;

2) $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Alors si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Démo. Sur les notes de cours.

Une conséquence très importante de ce théorème est la suivante : **si deux suites positives sont équivalentes, les deux séries qui leur sont associées sont de même nature.** On peut ainsi chercher un équivalent simple du terme général pour se ramener à une série usuelle dont on connait la convergence.

Thm • Théorème de comparaison des séries par équivalents

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

1) (u_n) et (v_n) sont des suites positives ;

2) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente **si et seulement si** la série $\sum v_n$ est convergente.

Démo. Sur les notes de cours.

Coroll. • Le théorème précédent reste vrai en affaiblissant la première hypothèse et en la remplaçant par :

1) (v_n) (seulement) est une suite de signe constant.

Démo. Il suffit de remarquer que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Donc (u_n) est également de signe constant – le même que celui de (v_n) – à partir d'un certain rang. S'il s'agit du signe plus, il suffit de relire la preuve écrite ci-dessus pour constater qu'elle fonctionne dans ce cadre. S'il s'agit du signe moins, on pose $\tilde{u}_n = -u_n$ et $\tilde{v}_n = -v_n$. On vient de prouver que les séries $\sum \tilde{u}_n$ et $\sum \tilde{v}_n$ sont de même nature ; il en est de même pour les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Ex. ✻ Étude de $\sum \frac{1}{n^2-n+5}$, $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$.

III Séries absolument convergentes

L'inconvénient des théorèmes de comparaison vus ci-dessus est qu'ils imposent de connaître le signe du terme général des séries étudiées. La notion de **série absolument convergente** permet très souvent de s'affranchir de cette contrainte.

Déf. • Séries absolument convergentes

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

On dit que **la série $\sum u_n$ est absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Ex. ✻ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^3}}$.

Thm • Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Attention ❢ La réciproque est fausse : certaines séries sont convergentes sans être absolument convergentes. C'est le cas de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Démo. **1)** Soit (u_n) une suite <u>réelle</u> telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Cela signifie que $\sum |u_n|$ est convergente. On sépare la « partie positive » de la « partie négative » de la suite (u_n) en introduisant

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0. \end{cases}$$

Les deux suites (u_n^+) et (u_n^-) sont intéressantes à plus d'un titre. On constate immédiatement qu'elles sont **positives.** De plus, pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, on a simultanément $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

La positivité de u_n^- permet de voir que $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$. Puisque $\sum |u_n|$ est convergente, $\sum u_n^+$ l'est aussi par le théorème de comparaison des séries. On raisonne de même pour prouver que $\sum \left|u_n^-\right|$ est convergente.

Mais puisque $u_n = u_n^+ - u_n^-$, par linéarité la série $\sum u_n$ est convergente.

2) Si (u_n) est une suite <u>complexe</u> telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente, on sépare partie réelle et partie imaginaire : on pose $x_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(u_n)$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + i\, y_n$. Puisque $0 \leqslant |x_n| \leqslant |u_n|$, le théorème de comparaison des séries (réelles) donne que $\sum |x_n|$ est convergente. Autrement dit, $\sum x_n$ est une série (réelle) absolument convergente. En appliquant le point précédent elle est convergente. On raisonne de même pour $\sum y_n$ puis on conclut que $\sum u_n$ est convergente en utilisant la linéarité.

Propr. • Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. **On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.**

Alors : $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démo. En écrivant l'inégalité triangulaire pour les sommes finies puis en passant à la limite dans les inégalités.

On ajoute deux autres théorèmes de comparaison, qui permettent d'obtenir qu'une série est absolument convergente en utilisant des relations de domination ou de négligeabilité.

Thm • Théorème de comparaison des séries par suites dominées

Soit (u_n) une suite réelle quelconque, (v_n) une suite réelle. On suppose que :

1) la suite (v_n) est positive ;

2) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$;

3) la série $\sum v_n$ est convergente.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Démo. Sur les notes de cours.

Coroll. • Théorème de comparaison des séries par suites négligeables

On peut, dans le théorème précédent, remplacer la deuxième hypothèse par

2) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$;

et la conclusion est identique.

Démo. Si une suite est négligeable devant une autre, elle est en particulier dominée par cette dernière : le théorème précédent s'applique.

Les théorèmes de comparaison des séries sont beaucoup utilisés pour comparer des séries aux séries de Riemann. Pour produire l'hypothèse de comparaison de ces théorème (la deuxième), on peut employer la « **technique du n^α** » :

- Si on conjecture que la série $\sum u_n$ est convergente, on étudie la limite de $n^2 u_n$ en espérant trouver une limite finie. En cas d'échec, on recommence avec $n^\alpha u_n$ pour un autre exposant $\alpha \in]1,2[$.
- Si on conjecture que la série $\sum u_n$ est divergente, on étudie la limite de $n u_n$ en espérant trouver une limite non nulle (par exemple infinie).

Cette technique n'est pas un théorème à elle seule : c'est une méthode pour utiliser efficacement les théorèmes de comparaison.

Ex. ✻ Étude des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{\ln(n)}{n^3}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{\ln(n)}{n}$.

IV Développement décimal d'un nombre réel

Les nombres décimaux (éléments de $\mathbb{D}$) peuvent s'écrire sous forme d'un développement décimal fini, par exemple :

$$\frac{4578}{10000} = 0{,}4578 = 4\,.\,10^{-1} + 5\,.\,10^{-2} + 7\,.\,10^{-3} + 8\,.\,10^{-4}.$$

Les chiffres $d_1 = 4$, $d_2 = 5$, $d_3 = 7$ et $d_4 = 8$ sont les **décimales** de $\frac{4578}{10000}$.

Tous les réels de l'intervalle $[0,1[$ peuvent se décomposer ainsi si l'on se permet un nombre infini de décimales. Cela revient à écrire chaque nombre réel comme la somme d'une série faisant intervenir ses décimales.

Thm • Développement décimal propre d'un nombre réel

Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0,1[$. Alors il existe une unique suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n est un entier compris entre 0 et 9 ;

2) la suite (d_n) n'est pas stationnaire à la valeur 9 ;

3) $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n\,10^{-n}$.

Dans cette situation, les nombre d_n sont appelés les **décimales de x** et l'écriture de x comme somme de la série est appelée **développement décimal propre du réel x.**

Démo. Démonstration admise.

Rem. ◇ **1)** Ce théorème dit de manière formelle que x peut s'écrire

$$x = 0{,}d_1d_2d_3d_4d_5\ldots.$$

2) Il faut s'interdire les suites de décimales stationnaires à 9 pour garantir l'unicité de l'écriture. Sans cela, on aurait deux développements possibles pour les nombres décimaux, par exemple, pour $\frac{1}{10}$,

$$\frac{1}{10} = 0{,}100000\ldots \quad \text{mais aussi} \quad \frac{1}{10} = 0{,}099999\ldots$$

La deuxième écriture est qualifiée de développement décimal **impropre** de x.

3) Un nombre réel de $[0,1[$ est un nombre rationnel (élément de $\mathbb{Q}$) si et seulement si la suite (d_n) est périodique à partir d'un certain rang.

4) Un nombre réel x quelconque s'écrit comme la somme de sa partie entière d_0 (élément de $\mathbb{Z}$) et d'un réel de $[0,1[$: ce dernier admet un développement décimal propre :

$$x = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n\,10^{-n}.$$