Topologie sur les matrices

Marc SAGE

11 avril 2006

Table des matières

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les matrices seront toujours prises non vides, *i.e.* dans un $M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$.

Les exercices visent surtout à illustrer la remarquable interaction entre réduction, polynômes, et topologie matricielle. C'est important !

1 Continuité du polynôme caractéristique

Soit n un entier naturel non nul. On se place dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme produit

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}| .$$

L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes complexes de degré $\leq n$ sera vu comme un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n+1$ muni de la norme produit.

Montrer la continuité de la fonction polynôme caractéristique

$$\chi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A = \det(XI_n - A) \end{cases} .$$

Solution proposée.

χ est continue ssi chacune de ses applications composantes est continue, *i.e.* ssi chacun des coefficients devant les différentes puissances de X dans χ_A est une fonction continue en les coefficients de A. Or, cela est clair car un déterminant n'utilise que des opérations polynomiales (on a plus précisément

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{|I|=k} \det A_I \right) X^{n-k}$$

où A_I est la matrice extraite de A en ne prenant que les termes indicés par une partie $I \subset \{1, ..., n\}$, mais il n'est nul besoin d'établir la formule ci-dessus – dont une preuve se trouve dans les feuilles sur le déterminant et la réduction – pour comprendre ce qui se passe).

2 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour *deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$.*

Solution proposée.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On va approcher A par des matrices inversibles. On cherche pour cela à perturber A de sorte que le déterminant de la matrice perturbée soit non nul, et ce pour une perturbation infiniment petite.

Plus précisément, considérons $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$ pour un ε tout petit. Le déterminant de A_ε est un polynôme en ε sur le corps $\mathbb{K}$, donc admet un nombre fini de racines. Il y a par conséquent un voisinage $\left]-\frac{1}{N}\frac{1}{N}, \right[$ de 0 qui ne contient aucune racine de P (sauf peut-être 0). La suite $\left(A_{\frac{1}{p}}\right)_{p>N}$ est alors dans $GL_n(\mathbb{K})$ et tend clairement vers A :

$$\left\| A_{\frac{1}{p}} - A \right\| = \left\| \frac{1}{p} I_n \right\| = \frac{1}{p} \|I_n\| \longrightarrow 0.$$

Le résultat sur les polynômes caractéristiques s'établit aisément si A est inversible :

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \det(XI_n - AB) = \det\left[A\left(XA^{-1} - B\right)\right] = (\det A)\det\left(XA^{-1} - B\right) \\ &= \det\left(XA^{-1} - B\right)(\det A) = \det\left[\left(XA^{-1} - B\right)A\right] = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}. \end{aligned}$$

On conclut en invoquant la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ et la continuité de χ : soit (A_n) suite de matrices inversibles qui tend vers A. On donc $A_n B \longrightarrow AB$, d'où

$$\chi_{AB} = \lim \chi_{A_n B} = \lim \chi_{BA_n} = \chi_{BA}.$$

3 Densité de $GL_n(\mathbb{Q})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$

Montrer que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution proposée.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ que l'on cherche à approcher par des matrices inversibles rationnelles. On considère pour cela une matrice de perturbation ε à choisir convenablement. Puisque $\det P \neq 0$, et par continuité du déterminant, pour ε assez petit la matrice $P+\varepsilon$ est inversible. Il suffit ensuite de prendre les $\varepsilon_{i,j}$ de sorte que les $p_{i,j}+\varepsilon_{i,j}$ soient rationnels, ce qui est toujours possible par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

4 Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

Montrer que les matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ sont denses. Qu'en est-il du cas réel ?

Solution proposée.

• Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Quitte à la trigonaliser, on peut la supposer de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A. On va perturber la diagonale pour que les nouvelles valeurs propres soient deux à deux distinctes, ce qui est un critère bien connu de diagonalisabilité.

Plus précisément, fixons-nous un entier p qui va servir à borner la perturbation par $\frac{1}{p}$. On construit de proche en proche des réels $\varepsilon_1^{(p)}, ..., \varepsilon_n^{(p)}$ de la manière suivante : on prend $\varepsilon_1^{(p)} = \frac{1}{p}$, puis en supposant posés $\varepsilon_1^{(p)}, ..., \varepsilon_{k<n}^{(p)}$, on prend un $0 \leq \varepsilon_{k+1}^{(p)} < \frac{1}{p}$ distincts des k valeurs $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)} - \lambda_{k+1}$ pour $i = 1, ..., k$. Ainsi, la matrice

$$A_p = A + \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

a toutes ses valeurs propres $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)}$ deux à deux distinctes par construction des $\varepsilon_i^{(p)}$, donc est diagonalisable. Comme de plus

$$\|A_p - A\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1,...,n} \left| \varepsilon_i^{(p)} \right| \leq \frac{1}{p} \longrightarrow 0,$$

la suite (A_p) tend vers A. Ceci conclut la démonstration.

• Le résultat tombe en défaut dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit en effet A une matrice 2×2 compagnon d'un polynôme caractéristique sans racines réelles, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ compagnon de X^2+1. En notant δ_M le discriminant du polynôme caractéristique d'une matrice M, qui s'exprime par

$$\begin{aligned} \delta_{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} &= \operatorname{disc} \begin{vmatrix} X-a & -c \\ -b & X-d \end{vmatrix} = \operatorname{disc}\left[X^2 - (a+d)X + ad - bc\right] = (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ \delta_M &= (\operatorname{tr} M)^2 - 4 \det M \end{aligned}$$

et qui est donc continu, on a $\delta_A < 0$; si A s'approchait par des matrices D_k diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$, χ_{D_k} serait scindé (dans $\mathbb{R}$), donc δ_{D_k} serait positif, et par continuité on aurait $\delta_A \geq 0$, *absurde*.

5 Cayley-Hamilton par la densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit A une matrice complexe diagonalisable. Montrer que $\chi_A(A) = 0$. Généraliser le résultat à toute matrice complexe.

Solution proposée.

Soit A une telle matrice. On peut écrire

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ et donc

$$\chi_A(A) = \prod_{i=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_{i-1} - \lambda_i & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_{i+1} - \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

car un zéro apparaît dans chaque produit formant un coefficient diagonal.

Remarquer que l'on n'utilise nullement ici les propriétés topologiques de $\mathbb{C}$, le résultat est valable sur un corps quelconque.

Soit maintenant A quelconque dans $M_n(\mathbb{C})$. On sait que l'on peut l'approcher par une suite de matrices diagonalisables :

$$A = \lim D_k$$

où chaque D_k vérifie par ce qui précède

$$\chi_{D_k}(D_k) = 0.$$

Puisque $\left\{ \begin{array}{l} \chi_{D_k} \longrightarrow \chi_A \\ D_k \longrightarrow A \end{array} \right.$, un exercice classique affirme que $\chi_{D_k}(D_k) \longrightarrow \chi_A(A)$, d'où $\chi_A(A) = 0$ par unicité de la limite.

6 Frontière de $SL_n(\mathbb{K})$

On appelle frontière *d'une partie A d'un evn la partie* $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. *Calculer dans $M_n(\mathbb{K})$ la frontière de $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K})\,;\ \det A = 1\}$.*

Solution proposée.

En écrivant $SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, on voit que $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé par continuité du déterminant, d'où $\overline{SL_n(\mathbb{K})} = SL_n(\mathbb{K})$.

Montrons à présent que $SL_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide. Soit par l'absurde A_0 dans cet intérieur ; on peut trouver une boule $\mathcal{B} := \mathcal{B}(A_0, r_0)$ qui reste dans $SL_n(\mathbb{K})$. La matrice $A_t := A_0 + tA_0$ est alors dans $\mathcal{B}$ pour $t < \frac{r_0}{\|A_0\|}$ ($\|A_0\|$ est non nul car $\det A_0 = 1$), donc le polynôme $\det(A_t) - 1$ possède une infinité de racines, d'où $\det(A_t) = 1$ pour tout t, en particulier pour $t = -1$, d'où $1 = \det(A_0 - A_0) = 0$, *absurde.*

Il en résulte que $SL_n(\mathbb{K})$ est égal à sa frontière.

7 Croissance local du rang

Montrer que la fonction "rang" est localement croissante sur $M_n(\mathbb{K})$:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \ \exists r > 0, \ \|M - A\| < r \implies \operatorname{rg} M \geq \operatorname{rg} A.$$

Solution proposée.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et r son rang. Il existe une matrice extraite P inversible de taille $\geq r$, donc de déterminant δ_A non nul. Il existe alors un voisinage de A où δ_A (qui est continu en A car polynomial en ses coefficients) est non nul, de sorte que, pour toute matrice M dans ce voisinage, la matrice extraite de M à la même place que P a un détermimant δ_M non nul, d'où $\operatorname{rg} M \geq p$.

8 Matrices de rang $\leq r$

Soit $1 \leq r \leq n$. On se place dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices de rang $\leq r$ forment un ensemble fermé. En déduire l'adhérence des matrices de rang exactement r.

Solution proposée.

• On dispose de l'équivalence

$$(\exists E \text{ inversible de taille } > r \text{ extraite de } A) \iff (\operatorname{rg} A > r),$$

ce qui se contrapose en

$$(\operatorname{rg} A \leq r) \iff (\forall E \text{ de taille } > r \text{ extraite de } A,\ E \text{ non inversible}).$$

En définissant une application continue f par

$$f(A) = \sum_{\substack{E \text{ extraite de } A \\ \text{taille de } E > r}} |\det E|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(A) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{\substack{E \text{ extraite de } A \\ \text{taille de } E > r}} |\det E| = 0 \\ &\iff \quad \forall E \text{ extraite de } A \text{ de taille } > r,\ |\det E| = 0 \\ &\iff \quad \operatorname{rg} A \leq r, \end{aligned}$$

d'où $\{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\ \operatorname{rg} A \leq P\} = f^{-1}(\{0\})$ qui est clairement fermé.

• Soit $\left\{ \begin{array}{l} R_r = \{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\ \operatorname{rg} A = r\} \\ R_r^- = \{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\ \operatorname{rg} A \leq r\} \end{array} \right.$. R_r^- contient R_r et est fermé par ce qui précède, donc $\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$. Montrons l'inclusion réciproque $R_r^- \subset \overline{R_r}$.

Soit $A \in R_r^-$, que l'on écrit $A = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ avec P et Q inversibles et $r' \leq r$. On perturbe la diagonale pour obtenir un rang égal à r, en posant par exemple $A_k = P \begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & \frac{1}{k} I_{r-r'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q$, de sorte que (A_k) est une suite dans R_r qui tend vers A et donc $A \in \overline{R_r}$.

On a ainsi prouvé que

$$\overline{\{A \in M_n(\mathbb{K})\ ;\ \operatorname{rg} A = r\}} = \{A \in M_n(\mathbb{K})\ ;\ \operatorname{rg} A \leq r\}.$$

9 Sur les matrices racines de l'identité

Soit $q \geq 1$ un entier et $\mathcal{M}_q = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \; ; \; A^q = I_n\}$. Montrer que le spectre est localement constant sur $\mathcal{M}_q$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_q, \; \exists \varepsilon > 0, \; \forall M \in M_q, \; \|M - A\| < \varepsilon \implies \operatorname{Sp} M = \operatorname{Sp} A.$$

Solution proposée.

Soit $A \in \mathcal{M}_q$ et supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a une matrice A_ε de M_q dans la boule $\mathcal{B}(A, \varepsilon)$ telle que $\operatorname{Sp} A_\varepsilon \neq \operatorname{Sp} A$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on obtient une suite (A_n) dans M_q qui tend vers A. Les A_n étant annulées par le polynôme $X^q - 1$ scindé simple, elles sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ de spectre inclus dans l'ensemble μ_q des racines q-ièmes de l'unité, mettons $A_n = P_n D_n P_n^{-1}$ où les D_n sont à valeurs dans μ_q. Les D_n sont donc en nombre fini (chaque coefficient de la diagonale ne peut prendre qu'au plus q valeurs), donc on peut en extraire une sous-suite stationnaire $D_{\varphi(n)} = D$. En utilisant la continuité du polynôme caractéristique (dont les racines forment le spectre), on trouve

$$\chi_D = \chi_{D_{\varphi(n)}} = \chi_{A_{\varphi(n)}} \longrightarrow \chi_A,$$

de sorte que $\chi_{A_{\varphi(n)}}$ est constamment égal sa limite χ_A, d'où l'égalité des spectres $\operatorname{Sp} A_{\varphi(n)} = \operatorname{Sp} A$, qui est *absurde* vues les hypothèses sur la suite (A_n).

10 Les cycliques forment un ouvert connexe (et dense pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

On rappelle qu'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$ est dit *cyclique* s'il y a un vecteur $x \in E$ dont les n premiers termes de l'orbite selon l'action de u forment une base, *i.e.* tel que $\left(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ soit libre.

Montrer que les endomorphismes cycliques forment un ouvert connexe, qui est de plus dense pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (on pourra montrer que les endomorphismes de polynôme caractéristique scindé simple sont cycliques).

Solution proposée.

• La condition "$\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ libre" peut se réécrire sous la forme $\det_{\mathcal{B}}\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right) \neq 0$ où $\mathcal{B}$ est une base arbitraire de E, ce qui est une condition continue en les coordonnées de la matrice de u. Le déterminant ci-dessus restera donc non nul pour une petite perturbation de u, ce qui montre que les endomorphismes cycliques forment un ensemble ouvert.

• Quant à la connexité, il s'agit de remarquer que la matrice de u dans la base $\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ s'écrit sous la forme $C := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $\overrightarrow{a} \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur de scalaires, d'où

$$\operatorname*{Mat}_{B} u = PCP^{-1}$$

où P désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ de référence à la base cyclique, laquelle peut toujours être prise de déterminant 1 quitte à la diviser par son déterminant. Réciproquement, s'il y a un vecteur $\overrightarrow{a} \in \mathbb{K}^n$ et une matrice $P \in SL_n(\mathbb{K})$ tels que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = PCP^{-1}$, P peut s'interprêter comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{X} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})$, d'où $\operatorname{Mat}_{\mathcal{X}} u = C$, ce qui montre en lisant C que $x_i = u(x_{i-1})$ pour tout $i = 1, ..., n-1$, d'où une base cyclique pour u engendrée par le vecteur x_0.

Par conséquent, les endomorphismes cycliques sont exactement l'image de la composée

$$\left\{ \begin{array}{ccc} SL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ (P, a) & \longmapsto & P \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u & \longmapsto & u \end{array} \right. .$$

L'ensemble de départ étant connexe ($SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par des transvections que l'on envoie chacune continûment sur l'identité en étouffant leur coefficient hors diagonale) et l'application considérée continue, l'image reste connexe, *CQFD*.

• Pour la densité, suivons l'énoncé. L'intérêt est que tout endomorphisme diagonalisable est approchable par des endomorphismes à polynôme caractéristique scindé simple (il suffit de perturber les valeurs propres pour les rendre deux à deux distinctes), ce qui conculera dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ au vu de l'exercice 4.

Soit donc $(e_1,...,e_n)$ une base de vecteurs propres pour u dont on note $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ les valeurs propres respectivement associées. Il faut exhiber un vecteur cyclique pour u. Il est raisonnable d'essayer d'en créer un à partir des e_i. Comme ces derniers sont symétriques, il vaut mieux prendre une expression symétrique, par exemple la somme $x:=e_1+...+e_n$. Une récurrence immédiate montre que $u^k x=\lambda_1^k e_1+...+\lambda_n^k e_n$, d'où la matrice de la famille $\left(x,ux,...,u^{n-1}x\right)$ dans la base $(e_1,...,e_n)$: c'est un Vandermonde, inversible par hypothèse sur les λ_i, ce qui montre que la famille $\left(x,ux,...,u^{n-1}x\right)$ dont on lit les coordonnées dans la base $(e_1,...,e_n)$ est libre, *CQFD*.

Dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on peut juste dire que l'adhérence des cycliques contient les trigonalisables. ? ? ? ? ?

11 Intérieur et adhérence des matrices diagonalisables

Déterminer l'adhérence, l'intérieur, et la frontrière des matrices diagonalisables sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On pourra utiliser la continuité des racines telle qu'elle énoncée dans la feuille 2 sur les polynômes.

Solution proposée.

• Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, l'adhérence est connue (cf. exercice 4). Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, soit A limite de matrices D_k diagonalisables. χ_{D_k} est alors scindé pour tout n, donc sa limite χ_A l'est aussi (chaque racine complexe λ de χ_A est approchable par une suite de λ_k racine de χ_{D_k}, mais les λ_k étant réelles il en est de même pour λ), ce qui montre que A est trigonalisable. Réciproquement, on fait comme le cas complexe en perturbant la diagonale pour avoir n valeurs propres distinctes.

Finalement, l'adhérence des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables. On retrouve le fait (remarqué dans un cas particulier lors de l'exercice 4) que les matrices réelles dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé (par exemple X^2+1) ne sont pas approchables pas des matrices diagonalisables.

• Soit à présent $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1\,\mathrm{Id} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p\,\mathrm{Id}\end{pmatrix}P^{-1}$ dans l'intérieur des diagonalisables. Il est bon de se souvenir de l'argument montrant pourquoi la matrice $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable : son spectre $\{\lambda\}$ se lit sur la diagonale, donc la réduite diagonale ne peut être que λI_2, d'où $\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}=P\lambda P^{-1}=\lambda I_2$: *contradiction*. Ainsi, s'il y a une valeur propre multiple, en perturbant par un ε au-dessus de la diagonale, on a un matrice extraite de la forme $\begin{pmatrix}\lambda & \varepsilon\\ & \lambda\end{pmatrix}$ qui doit rester diagonalisable, ce qui est *absurde* par ce qui précède. Par conséquent, χ_A est scindé simple.

Montrons réciproquement que cela est suffisant pour être dans l'intérieur. Soit D une telle matrice : χ_D est alors scindé simple. En perturbant D, on perturbe χ_D (continuité de χ), et on peut raisonnablement espérer qu'une petite perturbation des coefficients de χ_D ne va pas trop faire bouger ses racines, ce qui donnera encore un polynôme scindé simple (et donc une matrice diagonalisable).

Montrons cela par l'absurde, à savoir d'une limite de scindés multiples (dans $\mathbb{C}$) ne peut être scindée simple. Soit $P=(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$ le polynôme limite, supposé scindé simple, et $P_k=\left(X-\lambda_1^{(k)}\right)\ldots\left(X-\lambda_n^{(k)}\right)$ les approximations de P avec $\lambda_i^{(k)}\longrightarrow\lambda_i$ pour tout i. Pour un $\varepsilon>0$ donné, on aura pour k assez grand $\left|\lambda_i^{(k)}-\lambda_i\right|<\varepsilon$ pour tout i, et il s'agit de choisir ε pour que $\lambda_1^{(k)},...,\lambda_n^{(k)}$ n'aient aucune chance de se rencontrer ; ce sera le cas si les boules $\lambda_i+\varepsilon\mathbb{B}$ sont deux à deux disjointes, et il suffit pour cela de prendre $\varepsilon<\frac{1}{2}\min_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|$.

Finalement, l'intérieur des matrices diagonalisables est formé des matrices (diagonalisables) dont toutes les valeurs propres sont simples.

• Pour répondre à la question, la frontière des diagonalisables s'obtient en prenant les trigonalisables ayant au moins une valeur propre multiple.

Les cinq exercices qui suivent visent à étudier les différentes propriétés topologiques des classes de similitudes et leur lien avec la réduction des matrices considérées.

On notera $\operatorname{Sim} A$ la classe de similitude d'une matrice A.

12 Une classe de similitude n'est jamais ouverte

Montrer que l'intérieur d'une classe de similitude est toujours vide.

Solution proposée.

La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{Sim} A$ est incluse dans l'hyperplan affine $\operatorname{tr} = \operatorname{tr} A$, lequel est d'intérieur vide.

13 Matrices dont 0 ou I_n adhère à la classe de similitude

Montrer qu'une matrice est nilpotente ssi 0 *adhère à sa classe de similitude.*
En déduire qu'une matrice est unipotente ssi I_n *adhère à sa classe de similitude.*

Solution proposée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit A une matrice nilpotente. Quitte à la trigonaliser (on reste dans $\operatorname{Sim} A$), on peut supposer A triangulaire supérieure stricte. On conjugue alors par un produit de dilatations $\operatorname{Diag}\left(C^1, C^2, ..., C^n\right)$ où C est une constante arbitrairement grande. Multiplier à gauche multiplie la i-ligne par C^i et diviser à droite divise la j-colonne par le même facteur C^j. Finalement, le terme $a_{i,j}$ se trouve transformé en $a_{i,j}C^{i-j}$. Comme on ne regarde que les termes pour $i < j$, la nouvelle matrice tend vers 0 lorsque C tend vers ∞.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pour l'autre sens, le polynôme caractéristique est un invariant continu de similitude, donc $\chi_A = \chi_{\overline{\operatorname{Sim} A}} = \chi_0 = X^n$, ce qui une condition bien connue de nilpotence.

Quant aux matrices unipotentes, il s'agit d'observer que

$$\operatorname{Sim}(A + I_n) = \left\{P(A + I_n)P^{-1}\right\} = \left\{PAP^{-1} + I_n\right\} = (\operatorname{Sim} A) + I_n.$$

Le résultat tombe alors en appliquant ce qui précède.

14 Matrices dont la classe de similitude est bornée

Déterminer toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ *dont la classe de similitude est bornée,* i.e. *les* A *telles que*

$$\exists M > 0,\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \left\|PAP^{-1}\right\| < M.$$

Solution proposée.

Montrons déjà que $\operatorname{Sim} A$ ne contient que des matrices diagonales.

Dans le cas contraire, soit A' une matrice semblable à A ayant un coefficient a'_{i_0,j_0} non nul avec $i_0 \neq j_0$. On dilate ce coefficient à l'aide d'une matrice de dilatation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où le λ est à la i_0-ième place. On a alors $\left[PAP^{-1}\right]_{i_0,j_0} = \lambda a'_{i_0,j_0}$ qui n'est pas bornée, d'où *absurdité.* En particulier, A est diagonale.

Montrons à présent que $\operatorname{Sim} A$ ne contient que des matrices scalaires. Si une telle matrice, diagonale par ce qui précède, n'est pas scalaire, elle contient deux valeurs propres λ et μ distinctes. On conjugue alors par une transvection :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda-\mu \\ & \mu \end{pmatrix},$$

ce qui donne une matrice non diagonale, *contradiction* puisqu'on doit rester dans $\operatorname{Sim} A$. En particulier, A doit être scalaire.

On aurait pu également dire que, étant donnée un vecteur $x \in K^n$ non nul, on peut le compléter en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de K^n et dans cette base la matrice de A est diagonale, ce qui montre que (x, Ax) est liée pour tout x et il est connu que A est alors scalaire.

Réciproquement, la classe de similitude d'une matrice scalaire est réduite à un point (elle-même), donc est bornée.

Finalement, les matrices scalaires répondent au problème et sont les seules.

15 Matrices dont la classe de similitude est fermée

Montrer qu'un matrice complexe est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée.

On pourra montrer que la classe de similitude d'une matrice A diagonalisable est l'ensemble des matrices B telles que $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$*. Pour l'autre sens, on pensera aux matrices de dilatation.*

Solution proposée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit A diagonalisable. Montrons qu'une matrice B est semblable à A ssi $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$. Le sens direct est immédiat. Soit maintenant B vérifiant $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$. Puisque A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé simple ; B est ainsi annulé par $\mu_B = \mu_A$ scindé simple, donc est diagonalisable et de même spectre que A. La condition $\chi_A = \chi_B$ montre alors les valeurs propres de A et B ont même multiplicité, d'où la similitude de A et B.

On transforme à présent la condition $\mu_A = \mu_B$ en $B \in \mu_A^{-1}(\{0\})$. En effet, le sens direct est clair, et si $\mu_A(B) = 0$, alors $\mu_B \mid \mu_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A}(X - \lambda)$, mais la condition $\chi_A = \chi_B$ implique $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$, d'où l'égalité $\mu_B = \mu_A$.

On peut donc écrire la classe de similitude de A comme $\chi^{-1}(\{\chi_A\}) \cap \mu_A^{-1}(\{0\})$, la continuité de polynôme caractéristique et celle de μ_A assurant que ce que l'on vient d'écrire est fermé.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons à présent que $\operatorname{Sim} A$ est fermée. On dilate A de façon asymétrique, après l'avoir trigonalisée, en conjugant par la matrice diagonale $D = \operatorname{Diag}(1, 2, ..., n)$. Puisque $\left[D^k A D^{-k}\right]_{i,j} = \left(\frac{i}{j}\right)^k a_{i,j}$, la suite $D^k A D^{-k}$ tend vers $\operatorname{Diag}(a_{1,1}, ..., a_{n,n})$, et cette limite est semblable à A par hypothèse, ce qui prouve que A est diagonalisable.

Remarques. Il aurait été tentant de conclure en affirmant que la classe de similitude de A peut se décrire comme l'image réciproque du fermé $\{(\chi_A, \mu_A)\}$ par l'application continue (χ, μ). Mais l'application "polynôme minimal" $\mu : A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue ! Considérer par exemple

$$\mu_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}} = X\left(X - \frac{1}{n}\right) \text{ et } \mu_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = X.$$

Observer par ailleurs que la démarche pour le sens réciproque est la même que pour montrer que 0 est dans l'adhérence de $\operatorname{Sim} N$ pour N nilpotente : on a simplement dilaté d'une autre manière.

16 Matrices 2×2 dont la classe de similitude est connexe

Soit A une matrice réelle de taille 2×2. Montrer que A est diagonalisable ssi sa classe de similitude est connexe. On pourra, pour l'un des sens, montrer que la classe de similitude de A contient une matrice symétrique à l'aide d'une application continue gentille.

Qu'en est-il des matrices de taille plus grande ? Des matrices complexes ?

Solution proposée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$ et soit $P \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ dans sa classe de similitude.
Si $\det P > 0$, par connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$, on relie P à I_n.
Si $\det P < 0$, on conjugue par $D := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$:

$$P \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = PD \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -(-\mu) \end{pmatrix} D^{-1} P^{-1} \text{ avec } \det PD > 0,$$

ce qui nous ramène au cas précèdent.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Essayons de suivre l'énoncé : une bonne application est celle qui à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ semblable à A associe $b - c$. Son image est l'image continue d'un connexe, donc un connexe de $\mathbb{R}$, symétrique (car toute matrice est semblable à sa transposée), donc contient 0, ce qui correspond à une matrice symétrique donc diagonalisable, *CQFD.*

Pour $n \geq 3$, le premier sens fonctionne toujours, mais le second tombe en défaut : il suffit de considérer une matrice non diagonalisable pour laquelle le raisonnement du premier sens s'applique, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Si le corps de base est $\mathbb{C}$, alors le groupe linéaire devient connexe par arcs, donc toutes les classes de similitudes également. Et l'argument précédent ne fonctionne évidemment plus, puisqu'on y utilise le fait que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ce qui est faux dans $\mathbb{C}$).

17 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{K})$

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Le but du problème est de montrer que G est un sous-groupe d'un certain groupe orthogonal.

On admettra que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte en dimension finie (conséquence du théorème de *Carathéodory*).

On admettra qu'une application affine stabilisant un corps convexe K (compact convexe non vide) a un point fixe sur K (théorème de *Markov-Kakutani*).

• *Montrer que le problème revient à trouver une matrice symétrique définie positive S telle que $\forall g \in G,\ g^* S g = S$. On va chercher S sous la forme $g^* g$, et plus généralement dans l'enveloppe convexe K de tels éléments.*

• *Pour $g \in G$, on définit $\widehat{g} : S \mapsto g^* S g$. Montrer que $\widehat{G}$ est un sous-groupe compact de $GL(S_n(\mathbb{R}))$ qui stabilise K. Le problème revient à présent à chercher un point (de K) fixe par tous les $\widehat{g}$.*

• *On définit une application sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par $\|S\| = \sup_{g \in G} \|\widehat{g}(S)\|_2$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme $\widehat{G}$-invariante ($\|\widehat{g} S\| = \|S\|$ pour tout $g \in G$) et étudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.*

• *En raisonnant par l'absurde, trouver des $g_1, \ldots, g_k \in G$ n'admettant pas de point fixe commun dans K. Notons $F_g := \operatorname{Fix} \widehat{g}_{|K}$. En utilisant Markov-Kakutani, obtenir une contradiction.*

Solution proposée.

• Un groupe orthogonal est un groupe d'applications préservant un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur $M_n(\mathbb{R})$, un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ étant la donnée d'une matrice S symétrique définie positive – pour laquelle $\langle a, b\rangle = a^* S b$. Le problème revient donc à trouver un S tel que

$$\begin{aligned} & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ \langle ga, gb\rangle = \langle a, b\rangle \\ \iff & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ (ga)^* S (gb) = a^* S b \\ \iff & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ a^* (g^* S g) b = a^* S b \\ \iff & \forall g \in G,\ g^* S g = S. \end{aligned}$$

• $\widehat{G}$ est clairement un groupe pour la loi $\widehat{g}\widehat{h} = \widehat{gh}$, de neutre $\widehat{I_n} = \mathrm{Id}$, donc un sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$. Les applications

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & S \mapsto A^* S \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) \\ u & \longmapsto & S \mapsto u(S) A \end{array} \right.$$

sont linéaires donc continues (on est en dimension finie), donc l'image $\widehat{G}$ du compact G par leur composée est un compact de $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$. En remarquant que $\widehat{G}$ stabilise $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a finalement que $\widehat{G}$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Montrons que $\widehat{G}$ stabilise K : pour $a = \sum_{g \in G} \lambda_g g^* g$ dans K et g_0 dans G, on a

$$\widehat{g_0}(a) = g_0^* a g_0 = \sum_{g \in G} \lambda_g (g g_0)^* (g g_0) = \sum_{g \in G} \lambda_{g g_0^{-1}} g^* g \in K.$$

• $\widehat{G}$ étant compact, à S fixé l'application $\widehat{g} \mapsto \|\widehat{g}(S)\|_2$ atteint son supremum, donc $\|S\|$ s'écrit $\|\widehat{g_S}(S)\|_2$ pour un certain $g_S \in G$. Ainsi, on a toujours, en allégant $g := g_{S+T}$:

$$\|S+T\| = \|\widehat{g}(S+T)\|_2 = \|\widehat{g}(S) + \widehat{g}(T)\|_2 \leq \|\widehat{g}(S)\|_2 + \|\widehat{g}(T)\|_2 \leq \|S\| + \|T\|,$$

et le cas d'égalité force le cas d'égalité pour la norme euclidienne, *i.e.* $\lambda \widehat{g}(T) + \mu \widehat{g}(S) = 0$ avec $\lambda\mu \leq 0$, d'où $\lambda T + \mu S = 0$ par injectivité de $\widehat{g}$. Les deux autres propriétés d'une norme sont immédiates. Comme de plus $\widehat{G}$ est stable par composition, $\|\cdot\|$ est $\widehat{G}$-invariante.

• Supposons que $\bigcap_{g \in G} F_g = \emptyset$. Par compacité de K, on en extrait une intersection finie $F_{g_1} \cap \ldots \cap F_{g_k} = \emptyset$. On pose $f = \frac{1}{n}(\widehat{g_1} + \ldots + \widehat{g_k})$, application affine stabilisant K par convexité de ce dernier. Pour appliquer Markov-Kakutani à f, il faut prouver que K est un corps convexe. Il est trivialement non vide et convexe, et c'est un compact comme enveloppe convexe du compact $\{g^* g\ ;\ g \in G\}$ (le voir par exemple en extrayant des suites). f admet donc un point fixe $a \in K$, et en prenant la norme introduite précédemment on trouve

$$\|a\| = \|f(a)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{g_i}(a)}{n} \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \|\widehat{g_i}(a)\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \|a\| = \|a\|.$$

Le cas d'égalité impose à tout le monde d'être sur la même demi-droite, mettons $\widehat{g_i}(a) = \lambda_i \widehat{g_1}(a)$ avec $\lambda_i > 0$ (observer que a est non nul car dans K). En reprenant la norme, on obtient $\|a\| = \lambda_i \|a\|$, d'où $\lambda_i = 1$ pour tout i. On a donc $\widehat{g_i}(a) = \widehat{g_j}(a)$ pour tous i, j, d'où $a = f(a) = \sum_j \frac{1}{n} \widehat{g_i}(a) = \widehat{g_i}(a)$, ce qui montre que $a \in F_{g_1} \cap \ldots \cap F_{g_k}$, *contradiction.*

Remarque. Il est clair que les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{C})$ sont des sous-groupes d'un groupe unitaires, la même démonstration s'appliquant en rajoutant des barres de conjugaison au besoin.

On a finalement décrit tous les sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{K})$: ce sont les groupes orthogonaux/unitaires.