Cours de mathématiques – 2017/2018

PCSI

Vésale Nicolas

LYCÉE D'ENSEIGNEMENT
GÉNÉRAL & TECHNOLOGIQUE
VICTOR HUGO

Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation
	α	Alpha
	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
	ϵ	Epsilon
	ζ	Zeta
	η	Eta
Θ	θ	Theta
	ι	Iota
	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
	μ	Mu
	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
	τ	Tau
	υ	Upsilon
Φ	φ	Phi
	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Table des matières

Chapitre 1

Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Rudiments de logique

La logique est la grammaire des mathématiques. Elle permet d'articuler des *propositions*, qui sont des énoncés mathématiques supposés vrais ou faux (on écrira V ou F) à l'aide de connecteurs logiques. Le tableau suivant résume les règles d'utilisation des principaux opérateurs logiques :

P	Q	non(P)	P ou Q	P et Q	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V

Remarque(s) 1 : Presque tout le contenu de ce tableau devrait vous paraître naturel, à l'exception d'un point : le *ou* mathématique n'est pas exclusif. Plus précisément, la proposition :

« il fait beau aujourd'hui » *ou* « il n'y a pas de nuages »

est une proposition vraie s'il fait beau et qu'il n'y a pas de nuages.

Les autres opérations logiques se définissent à partir de celles-ci, par exemple, l'équivalence est définie par :

$$P \Longleftrightarrow Q \overset{Def.}{=} (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P).$$

En particulier, une équivalence se prouve presque toujours en montrant deux implications successives, que l'on appelle implication directe ($P \Longrightarrow Q$) et réciproque ($Q \Longrightarrow P$). Notez qu'on peut vérifier en utilisant la table ci-dessus que l'équivalence logique correspond bien à l'égalité des valeurs de vérité des propositions.

1.2 Rudiments de théorie des ensembles

Les ensembles, quand à eux, sont le vocabulaire de base des mathématiques. On les note souvent avec des lettres majuscules : « soit E un ensemble », ou, lorsqu'ils sont particuliers, avoir leur lettre dédiée. Par exemple :

1. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs,
3. $\mathbb{Q}$ celui des rationnels,
4. $\mathbb{R}$ celui des réels.

Un ensemble est souvent décrit par ses *éléments* ; si x est un élément d'un ensemble E, on écrira $x \in E$, si ce n'est pas le cas, $x \notin E$. Par exemple :

$$2 \in \mathbb{N}, \quad , -3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Si E est un ensemble fixé, on dit qu'un ensemble A est *inclus* ou *une partie* de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E ; on écrit alors :

$$A \subset E.$$

Par exemple :

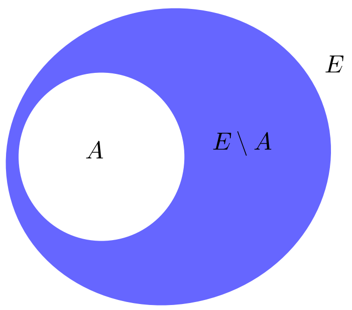
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

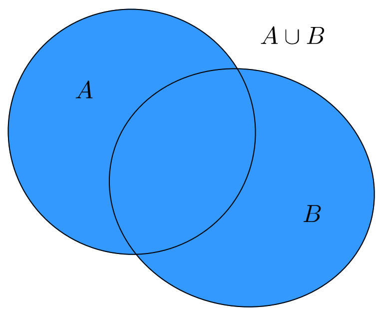
Un autre ensemble joue un rôle particulièrement important : l'ensemble vide. Il s'agit de l'ensemble qui ne contient aucun élément, noté $\boxed{\varnothing}$.
Pour A et B deux parties d'un ensemble E, il est possible de définir des opérations sur A et B en utilisant la table suivante, pour x un élément de E :

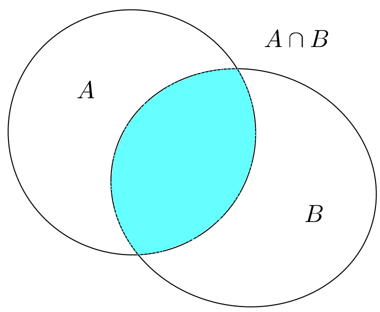
$x \in A$	$x \in B$	$x \in E \setminus A$	$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

ou, autrement dit :

$$x \in E \setminus A \iff \text{non}(x \in A), \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B), \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$







On appelle ces ensembles :

1. $E \setminus A = \overline{A} = \complement_A^E$, le *complémentaire* de A dans E,
2. $A \cup B$, *l'union* de A et B,
3. $A \cap B$, *l'intersection* de A et B.

1.3 Quantificateurs, premiers raisonnements

Pour formuler des propositions mathématiques, il est souvent utile d'utiliser des quantificateurs. Ils sont au nombre de deux :

$$\forall : \text{ « pour tout »}, \quad \exists : \text{ « il existe »}.$$

Traitons un exemple ; la proposition « tout réel élevé au carré est positif » peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0.$$

Les quantificateurs sont particulièrement agréables pour travailler avec les négations ; en effet :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) = \exists x \in E, \ \text{non}(P(x)) \quad \text{et} \quad \text{non}(\exists x \in E, P(x)) = \forall x \in E, \ \text{non}(P(x)).$$

Exemple(s) 1 :

1.1 La proposition

« Tout réel est inférieur à 10^{99} »

est fausse ! Elle s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 10^{99}$ et sa négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 10^{99}$ est clairement vraie en prenant $x = 10^{99} + 1$. C'est ce qu'on appelle une recherche de contre-exemple ; ce type de raisonnement se résume en :

Pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, il suffit d'en trouver un contre-exemple.

1.2 Dans une proposition logique, l'ordre des quantificateurs est primordial. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est vraie ; il suffit de prendre $x = y$ mais :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est clairement fausse : un contre exemple est donné par $y = x + 1$.

Terminons cette partie par trois types de raisonnements couramment utilisés :

1. *Le raisonnement par implication directe :* c'est le plus simple à utiliser, pour prouver $P \Longrightarrow Q$ on suppose P vrai et on en déduit qu'alors Q aussi. Par exemple :

   « Si x est positif, alors x est le carré d'un réel »

   Est une proposition vraie. En effet, si x est positif, alors $\sqrt{x}$ existe donc on peut écrire : $x = (\sqrt{x})^2$.

2. *Le raisonnement par contraposée :* qui se base sur la constatation suivante :

P	Q	non(P)	non(Q)	non(Q)$\Longrightarrow$ non(P)	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

   Ou, autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)).$$

   La méthode consiste donc à supposer que Q est faux et à en déduire que P est faux. Par exemple :

   « Si $\forall \epsilon > 0,\ x \leqslant \epsilon$ alors $x \leqslant 0$ »

   est une proposition vraie. En effet, sa contraposée est :

   « Si $x > 0$ alors $\exists \epsilon > 0,\ x > \epsilon$ » et elle est vraie car si $x > 0$ alors $\epsilon = x/2 > 0$ et $x > x/2 = \epsilon$.

3. *Le raisonnement par l'absurde :* qui part du principe qu'il est équivalent de dire que P est vraie et que non(P) est fausse. Vous en avez sans-doute déjà vu deux : la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et celle de l'infinité des nombres premiers. Voyons un autre exemple ; montrons que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{Q}$$

   Supposons pour ceci par l'absurde que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

   Alors en particulier, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ aussi. Mais alors, pour les irrationnels $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, on trouve :

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q},$$

   ce qui est absurde ! La proposition est donc vraie. Notez le côté particulièrement frustrant d'une telle preuve ; il est impossible de décider qui de $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ est l'exemple ici. On sait donc qu'il existe un exemple, mais on est incapable de dire lequel...

Il reste un dernier « raisonnement » : l'analyse-synthèse. Il s'agit par ce raisonnement de montrer qu'un objet ayant certaines propriétés existe. On commence (souvent au brouillon) par supposer que l'objet existe avec ses propriétés, puis on raisonne par *conditions nécessaires* jusqu'à trouver un exemple. On termine en vérifiant (sur la copie) que l'exemple trouvé a bien les bonnes propriétés (on parle de *conditions suffisantes*). Par exemple, si un exercice nous demande de trouver s'il existe un paramètre m tel que l'équation :

$$x^2 + m \times x + 11 = 0$$

admet une solution entière, on commence par supposer (ce qui se fait, j'insiste, au brouillon !) que m est tel quel ceci est vrai. L'équation admet alors deux solutions, x_1 et x_2 qui vérifient :

$$x_1 \times x_2 = 11$$

dont au moins l'une est un entier. Comme 11 est un nombre premier, on en déduit que $x_1 = 1$ ou 11. Supposons par exemple que $x_1 = 1$ et remplaçons dans l'équation ; on trouve :

$$1 + m + 11 = 0$$

et l'on en déduit $m = -12$. Ceci termine l'analyse et notre travail au brouillon. Sur la copie, il s'agit seulement d'écrire :

Prenons $m = -12$. *Alors* 1 *est un entier racine de l'équation* $x^2 + m \times x + 11$. *Il existe donc un tel paramètre* m.

Notez que si l'énoncé avait demandé *tous* les paramètres m tels que cette équation admette une solution entière, la rédaction aurait été différente...

Chapitre 2

Équations différentielles : quelques cas simples pour la physique

2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 2.1.1 : *Soit I un intervalle et b une fonction définie sur I. Soit a un réel. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une expression du type :*

$$y' + a \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f définie et dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du premier ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de $t_0 \in I$ et de y_0 un réel ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y' + a \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$.

Remarque(s) 2 :
1. La fonction b est appelée **second membre** de l'équation différentielle.
2. Lorsqu'on travaille avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = b(t),$$

on est souvent amené à travailler aussi avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0$$

on l'appelle **équation différentielle homogène associée**.
3. Il y a deux questions à se poser systématiquement lorsqu'on travaille avec un problème de Cauchy : une solution existe-t-elle (**existence**) ? Est-elle unique (**unicité**) ?
4. En mathématiques, il est important de bien distinguer l'équation différentielle et le problème de Cauchy ; souvent, un problème de Cauchy admet une unique solution (c'est ce qui semble intuitif en physique ; par exemple, le mouvement doit être unique) mais une équation différentielle une infinité.

Propriété(s) 2.1.1 : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène : $y' + a \times y = 0$ est :

$$\boxed{S = \left\{t \in I \mapsto C \times e^{-a\times t},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Le problème de Cauchy associé, pour la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution :

$$\boxed{f :\ t \in I \mapsto y_0 \times e^{-a\times(t-t_0)}.}$$

Démonstration : Commençons par le premier point. Appelons S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0.$$

Il s'agit de montrer que les ensembles S et $S_0 = \left\{t \in I \mapsto C \times e^{-a\times t},\ C \in \mathbb{R}\right\}$ sont égaux. Procédons par double inclusion :

1. Si $f \in S_0$ alors il existe un réel C tel que pour tout t de I, $f(t) = C \times e^{-a\times t}$. Alors $f'(t) = -a \times f(t)$ donc $f \in S$.
2. Si $f \in S$, alors si pour tout t de I, $g(t) = f(t) \times e^{a\times t}$, on a :

$$g'(t) = \big(f'(t) + a \times f(t)\big) \times e^{a\times t} = 0$$

Donc la fonction g est constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \times e^{a\times t} = g(t) = C.$$

Donc $f(t) = C \times e^{-a\times t}$, $f \in S_0$.

Pour le deuxième point, procédons par analyse et synthèse. Si f est une solution du problème de Cauchy, c'est une solution de l'équation différentielle. Il existe donc une constante C telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = C \times e^{-a\times t}.$$

On utilise maintenant la condition initiale : $y_0 = f(t_0) = C \times e^{-a\times t_0}$ donc $f(t) = y_0 \times e^{-a\times(t-t_0)}$. Donc si il existe une solution au problème de Cauchy, c'est celle-ci. Effectuons maintenant la synthèse : si $f(t) = y_0 \times e^{-a\times(t-t_0)}$, alors $f(t_0) = y_0$ et f est solution de l'équation différentielle. La solution existe donc.

■

Comment passer d'une équation homogène à une équation quelconque ? On peut utiliser, pour ceci, le **principe de superposition** : si f est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t)$$

et g une solution de

$$y' + a \times y = c(t)$$

alors $f + g$ est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t) + c(t).$$

De ce principe, on déduit immédiatement que :

Propriété(s) 2.1.2 : S'il existe f_0, une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + a \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est :

$$\boxed{S = \left\{t \in I \mapsto f_0(t) + C \times e^{-a\times t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

En particulier, la solution du problème de Cauchy est unique.

Il reste une dernière chose à régler : comment trouver cette solution particulière ? Nous verrons des méthodes plus générales dans un chapitre ultérieur, mais pour le moment, nous nous contenterons de quelques cas particuliers :

Forme de b	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A \times e^{\lambda \times t}$	si $-a \neq \lambda$, $B \times e^{\lambda \times t}$ sinon $B \times t \times e^{\lambda \times t}$
$A \times \cos(\omega \times t) + B \times \sin(\omega \times t)$	$D \times \cos(\omega \times t) + E \times \sin(\omega \times t)$

Exemple(s) 2 :

2.1 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$y' + y = e^{-t}.$$
Commençons par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$. Les solutions sont :
$$S_0 = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$
Cherchons maintenant une solution particulière ; le tableau nous dit qu'elle sera de la forme $B \times t \times e^{-t}$. Un calcul direct nous donne que cette fonction est solution de l'équation différentielle si et seulement si :
$$B \times e^{-t} = e^{-t}$$
il faut et il suffit donc que $B = 1$, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :
$$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto (C + t) \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2.2 Résolvons sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y' + y = \cos(3\,t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
On connaît déjà les solutions de l'équation homogène. Cherchons maintenant une solution particulière. Le tableau nous dit d'essayer $t \mapsto D \times \cos(3\,t) + E \times \sin(3\,t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une telle fonction est solution si et seulement si :
$$\begin{cases} 3\,E + D = 1 \\ -3\,D + E = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} D = \frac{1}{10} \\ E = \frac{3}{10} \end{cases}$$
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :
$$S = \left\{t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t)) + C \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$
Résolvons maintenant le problème de Cauchy. Une solution du type :
$$t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t)) + C \times e^{-t}$$
est solution du problème de Cauchy pour la condition initiale $y(0) = 0$ si et seulement si $\frac{1}{10} + C = 0$. La solution du problème de Cauchy est donc :
$$f:\ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t) - e^{-t}).$$

2.3 Terminons en cherchant les solutions de l'équation différentielle :
$$y' + y = \cos(3\,t) + e^{-t}.$$
Pour ceci, noua allons utiliser le principe de superposition ; on a déjà calculé une solution particulière de :
$$y' + y = e^{-t}$$
et une solution particulière de :
$$y' + y = \cos(3\,t),$$
on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :
$$S = \left\{t \mapsto \frac{1}{10} \times (\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t)) + (C + t) \times e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 2.2.2 : *Soit I un intervalle et b une fonction définie sur I. Soit p et q deux réels. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une expression du type :*

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f définie et dérivable sur I, telle que f' soit aussi dérivable sur I et qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du second ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de $t_0 \in I$ et de (y_0, z_0) des réels ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y'' + p \times y' + q \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = z_0$.

Remarque(s) 3 :

1. Comme pour l'équation de degré un, on parle de second membre pour b et d'équation homogène pour :
$$y'' + p \times y' + q \times y = 0.$$
2. Il existe une quantité essentielle pour ces équations différentielles : **l'équation caractéristique associée** :
$$x^2 + p \times x + q = 0$$
dont on notera dans ce cours le discriminant $\delta = p^2 - 4\,q$.

Théorème 2.2.1 : *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y'' + p \times y' + q \times y = 0$$

est :

$$\boxed{S = \left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\},}$$

avec :

1. *Si $\delta > 0$:*
$$f_1(t) = \exp\left(\frac{-p + \sqrt{\delta}}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \exp\left(\frac{-p - \sqrt{\delta}}{2} \times t\right),$$
2. *Si $\delta = 0$:*
$$f_1(t) = \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = t \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right),$$
3. *Si $\delta < 0$:*
$$f_1(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right).$$

De plus, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.

Démonstration : Faisons la preuve dans le premier cas. Dans le deuxième, la preuve est exactement la même et pour le troisième, elle sera exactement la même une fois qu'on saura dériver l'exponentielle complexe. Commençons par remarquer que comme :

$$f_1(t) = \exp(x_1 \times t)$$

où x_1 est une racine de l'équation

$$x^2 + p \times x + q = 0$$

alors :

$$f_1''(t) + p \times f_1'(t) + q \times f_1(t) = (x_1^2 + p \times x_1 + q) \times \exp(x_1 \times t) = 0.$$

Donc f_1 donc de même f_2 (car elle est définie par la deuxième racine de l'équation, x_2) puis par principe de superposition tout l'ensemble de fonctions $\left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}$ sont solutions de l'équation différentielle. Montrons que ce sont les seules. Si f est une solution de l'équation différentielle, posons pour tout t :

$$g(t) = f(t) \times \exp(-x_1 \times t) \Longleftrightarrow f(t) = g(t) \times \exp(x_1 \times t).$$

Comme f est solution de l'équation différentielle, on a :

$$f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = 0 \Longleftrightarrow ((x_1^2 + p \times x_1 + q) \times g(t) + (2\,x_1 + p) \times g'(t) + g''(t)) \times e^{x_1 \times t} = 0$$

on utilise une nouvelle fois que x_1 est racine de l'équation caractéristique et on en déduit que g' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + \sqrt{\delta} \times y = 0.$$

Donc par ce qu'on a déjà vu sur les équations différentielles d'ordre un, il existe un réel A tel que :

$$g'(t) = A \times e^{-\sqrt{\delta} \times t}$$

donc comme $\delta \neq 0$, il existe une constante B telle que :

$$g(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{-\sqrt{\delta} \times t} + B \Longleftrightarrow f(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{x_2 \times t} + B \times e^{x_1 \times t}.$$

La fonction f appartient donc à l'ensemble de fonctions $\left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Parlons maintenant du problème de Cauchy : une solution $C \times f_1 + D \times f_2$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si :

$$\begin{cases} C \times f_1(t_0) + D \times f_2(t_0) = y_0 \\ C \times x_1 \times f_1(t_0) + D \times x_2 \times f_2(t_0) = z_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D \times \sqrt{\delta} \times f_2(t_0) = y_0 \times x_1 - z_0 \\ C \times \sqrt{\delta} \times f_1(t_0) = y_0 \times x_2 - z_0 \end{cases}$$

ce qui montre, comme $\sqrt{\delta}$, $f_1(t_0)$ et $f_2(t_0)$ sont non nuls que C et D existent et sont uniques, donc la solution au problème de Cauchy aussi.

■

Exemple(s) 3 :

3.1 L'équation différentielle :

$$y'' - y' - 6\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto C \times e^{3\,t} + D \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3.2 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C \times t + D) \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3.3 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 13\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C \times \cos(3\,t) + D \times \sin(3\,t)) \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre un, on peut utiliser le principe de superposition ; on en déduit :

Propriété(s) 2.2.3 : Si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation sont :

$$\boxed{S = \{f_0 + f, \quad f \in S_0\}}$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. En particulier, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.

Terminons, comme dans la partie précédente, par quelques méthodes pour trouver des solutions particulières :

Forme de b	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A \times e^{\lambda \times t}$	si λ n'est pas racine, $B \times e^{\lambda \times t}$; si λ est racine simple $B \times t \times e^{\lambda \times t}$ sinon $B \times t^2 \times e^{\lambda \times t}$
$A \times \cos(\omega \times t) + B \times \sin(\omega \times t)$	$D \times \cos(\omega \times t) + E \times \sin(\omega \times t)$ sauf si $p = 0$ et $q = \omega^2$: $D \times t \times \cos(\omega \times t) + E \times t \times \sin(\omega \times t)$

Exemple(s) 4 :

4.1 Considérons l'équation différentielle :

$$y'' + 2\,y' + y = e^{-t}.$$

L'équation caractéristique $x^2 + 2\,x + 1$ a pour racine double -1, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S_0 = \left\{t \mapsto (C + D \times t) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Recherchons maintenant une solution particulière. Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, il s'agit de trouver une solution du type $B \times t^2 \times e^{-t}$. En remplaçant dans l'équation, on a qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$2\,B \times e^{-t} = e^{-t}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{t \mapsto \left(\frac{t^2}{2} + D \times t + C\right) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

4.2 Soit $\omega \neq \omega_0$ deux réels strictement positifs. Cherchons la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 \times y = \cos(\omega_0 \times t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Commençons par remarques que les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_0 = \{t \mapsto C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle. Chance ! Comme $\omega \neq \omega_0$, il s'agit de trouver une solution du type $A \times \cos(\omega_0 \times t) + B \times \sin(\omega_0 \times t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} A \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 1 \\ B \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Le solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant la solution du problème de Cauchy. Une solution f du problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle, donc il existe des réels C et D tels que

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t).$$

Utilisons maintenant les conditions initiales, qui nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + C = 1 \\ D \times \omega = 0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donc le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t) - \cos(\omega \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega \times t).$$

4.3 Cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(t)$$

Les solutions de l'équation homogène sont immédiatement :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, nous sommes dans le cas où il faut chercher une solution du type $D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$-2\,D \times \sin(t) - D \times t \times \cos(t) + 2\,E \times \cos(t) - E \times t \times \sin(t) + D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t) = \cos(t).$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2\,D = 0 \\ 2\,E = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4.4 Enfin, si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2 + \cos(t)$$

On peut utiliser le principe de superposition et remarquer que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2$$

pour conclure que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ t \mapsto 2 + \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Chapitre 3

Études de fonctions

3.1 Généralités sur les fonctions

Définition 3.1.3 : *Une fonction f est la donnée de deux ensembles E et F et, pour chaque $x \in E$ d'un unique élément $f(x) \in F$. On la note :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

1. *On appelle E l'ensemble de définition de f,*
2. *on dit que f est à valeurs dans F,*
3. *et que $f(x)$ est l'image de x par f.*

On notera $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans F.

Remarque(s) 4 :

1. Pour une fonction g réelle à valeurs réelle que l'on souhaite définir par une formule, il est parfois utile de chercher le domaine de définition **maximal**, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \text{ existe}\}.}$$

   Par exemple :

   (a) la fonction ln admet pour domaine de définition maximal $\mathbb{R}_+^*$

   (b) la fonction racine carrée admet pour domaine de définition maximal $\mathbb{R}_+$

   (c) si l'on souhaite définir g par la formule $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, le domaine de définition maximal de g est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. Concernant l'ensemble F, il est souvent utile de le choisir aussi **petit** que possible, c'est-à-dire **l'ensemble image** :

$$\boxed{f(E) = \{f(x), \quad x \in E\}.}$$

   Par exemple :

   (a) La fonction exponentielle : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour ensemble image $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8$ admet pour ensemble image $[-8, +\infty[$.

3. Notez que, par définition, l'image de x par f est unique. Si $y \in F$, on appelle **antécédent** de y par f un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors :

   (a) -1 n'a pas d'antécédent,

   (b) 0 a un unique antécédent : 0,

   (c) 1 admet deux antécédents : -1 et 1.

Exemple(s) 5 :

5.1 La fonction

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

est appelée **identité de E.**

5.2 Si $G \subset E$, alors :

$$\mathbb{1}_G : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 1 \text{ si } x \in G, \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction, appelée **indicatrice de** G.

5.3 Si $f : \ E \to F$ est une fonction et $G \subset E$ alors :

$$f_{|G} : \begin{cases} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **restriction de f à** G.

5.4 (Hors programme) Si $f : \ E \to F$ est une fonction et $G \subset f(E)$ alors :

$$f^{|G} : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **co-restriction de f à** G.

3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 3.2.4 : *Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F)$. Supposons que $F \subset \mathbb{R}$. On définit les fonctions :*

1. *somme de f et g, notée $f + g \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
2. *produit de f et g, notée $f \times g \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.*
3. *si g ne s'annule pas sur E, le quotient de f par g, noté $\frac{f}{g} \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Exemple(s) 6 :

6.1 Attention ! Il est important de vérifier que la fonction g ne s'annule pas avant d'écrire un quotient. Par exemple, si $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2 - 1$, le quotient $\frac{f}{g}$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$! Son domaine de définition maximal est :

$$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Définition 3.2.5 : *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(G, H)$ Alors si $\boxed{F \subset G}$, on peut définir le composition de f par g, notée $g \circ f \in \mathcal{F}(E, H)$ par :*

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple(s) 7 :

7.1 Dans la définition, l'inclusion est indispensable ! Par exemple, si f est la fonction logarithme et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est définie par $g(x) = x$, alors $f \circ g$ n'existe pas !

7.2 Si :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

Alors :

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x| \end{cases} \quad \text{et} \quad g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

En particulier, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux fonctions très différentes.

3.3 Tangentes et dérivées

Considérons maintenant une courbe $\mathcal{C}$ du plan (intuitivement, quelque chose que l'on peut tracer avec un crayon). Un cas particulier nous sera celui des courbes définies par des fonctions f définies sur un intervalle I :

$$\mathcal{C} = \{(x, y), \quad y = f(x), \ x \in I\}$$

on parle alors de **graphe** de la fonction f. Une information intéressante pour tracer le graphe de la fonction f est donnée par la définition suivante :

Définition 3.3.6 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dur un intervalle I. On dit que :*

1. *f est croissante sur I si :*
$$\forall (x, y) \in I, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y),$$
2. *f est décroissante sur I si :*
$$\forall (x, y) \in I, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y),$$
3. *f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I,*
4. *f est strictement croissante sur I si :*
$$\forall (x, y) \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y),$$
5. *f est strictement décroissante sur I si :*
$$\forall (x, y) \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y),$$
6. *f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

La définition suivante est aussi souvent utile :

Définition 3.3.7 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dur un intervalle I. On dit que :*

1. *f est majorée si :*
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M$$
2. *f est minorée si :*
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leqslant f(x)$$
3. *f est bornée si f est majorée et minorée.*

Exemple(s) 8 :

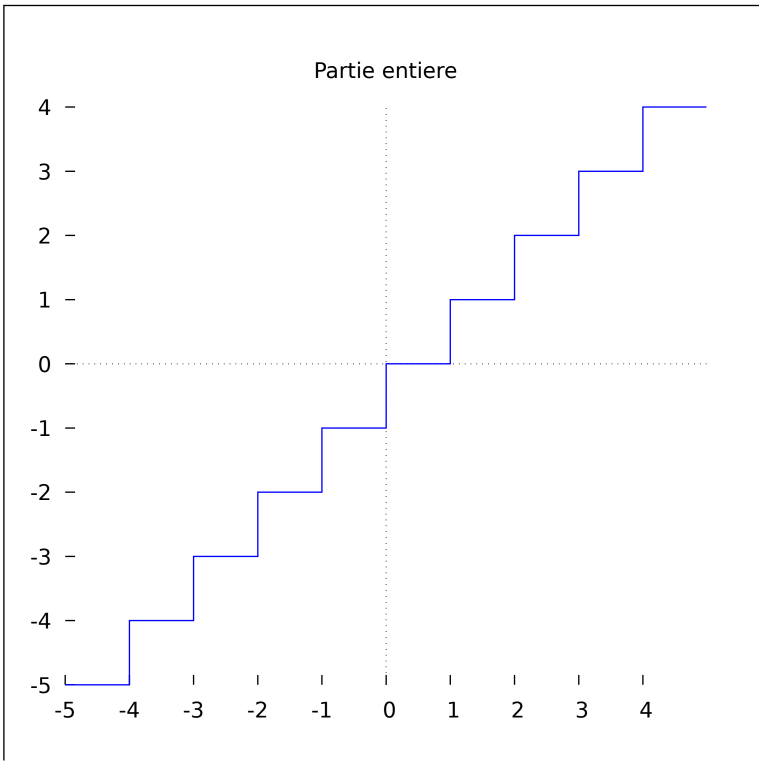
8.1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est :
   (a) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
   (b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$,
   (c) non monotone sur $\mathbb{R}$
   (d) ni majorée ni minorée sur $\mathbb{R}$.

8.2 La fonction sin et la fonction cos sont bornées sur $\mathbb{R}$.

8.3 On définit la fonction partie entière pour tout réel x par :

$$\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow k \leqslant x < k+1$$

Le graphe de cette fonction est (attention, l'ordinateur ne « voit » pas bien ce qui se passe à chaque entier) :



Alors :
   (a) La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$,
   (b) elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.3.1 Droites du plan, pentes

On peut définir une droites du plan de plusieurs façons différentes :

1. Par un *lieu géométrique* :
   (a) la droite passant par deux points distincts,
   (b) la droite passant par un point et dirigée par un vecteur non nul,

(c) la droite parallèle à une autre passant par un point, ou perpendiculaire...

2. Par une équation *paramétrique*, qui est souvent la façon algébrique la plus simple de décrire une droite à partir d'un lieu géométrique ; par exemple la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A = (a, b)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (u, v) \neq (0, 0)$ a pour équation paramétrique :

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad M = A + t.\vec{u}.$$

Ou encore :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases}.}$$

3. Par une équation *cartésienne*, qui est souvent la formulation la plus simple à manier pour les calculs ; si l'on reprend le cas de l'exemple précédent, comme $u \times v \neq 0$, on a :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases} \iff \boxed{v \times (x - a) - u \times (y - b) = 0.}$$

Remarque(s) 5 : Il est important de savoir passer d'une écriture à l'autre dans ces définitions ; par exemple si l'énoncé vous donne l'équation cartésienne ($\beta \neq 0$) :

$$\alpha \times x + \beta \times y + \gamma = 0$$

il faut savoir immédiatement dire que cette droite est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ et passe par le point $\left(0, \frac{-\gamma}{\beta}\right)$.

Définition 3.3.8 : *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, que l'on suppose dirigée par un vecteur $\vec{u} = (u, v)$, $u \neq 0$. On appelle pente de la droite $\mathcal{D}$ la valeur v/u.*

Remarque(s) 6 :

1. Parfois, il est commode de quand même parler de pente d'une droite si $u = 0$. On dira dans ce cas que la droite à une pente infinie.
2. Il semble *à priori* que changer de choix de vecteur $\vec{u}$ pourrait changer la valeur de la pente de la droite $\mathcal{D}$. Ce n'est pas le cas ! Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$ ($\lambda \neq 0$) donc $\vec{v} = (\lambda \times u, \lambda \times v)$ et
$$\frac{\lambda \times v}{\lambda \times u} = \frac{v}{u}$$
on dit que la pente est une propriété intrinsèque de la droite (et non du vecteur).
3. Considérons la droite d'équation $y = a \times x + b$; la pente de cette droite est alors égale à a, si l'on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = a \times x + b$, on remarque immédiatement que sur $\mathbb{R}$:
   (a) f est croissante si et seulement si $a \geqslant 0$,
   (b) f est décroissante si et seulement si $a \leqslant 0$,
   (c) f est strictement croissante si et seulement si $a > 0$
   (d) f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$

   une des idées de la tangente est de généraliser ce fait aux courbes en utilisant en chaque point une droite « meilleure approximation » de la courbe.

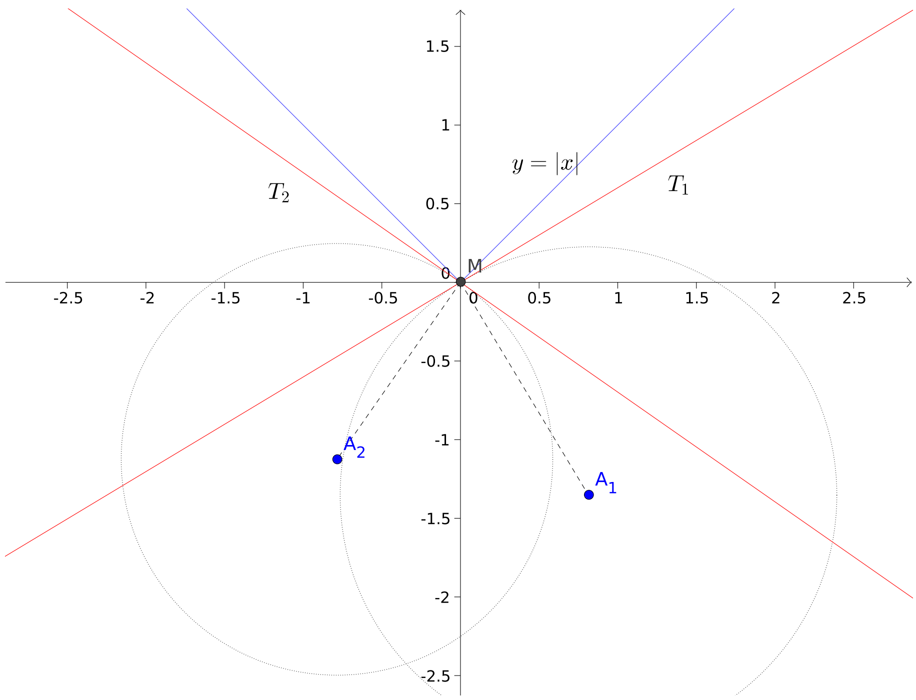
3.3.2 Tangentes, nombre dérivé, version géométrique (hors programme, non fait en cours)

Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie. (Descartes, sur la tangente d'une courbe en un point)

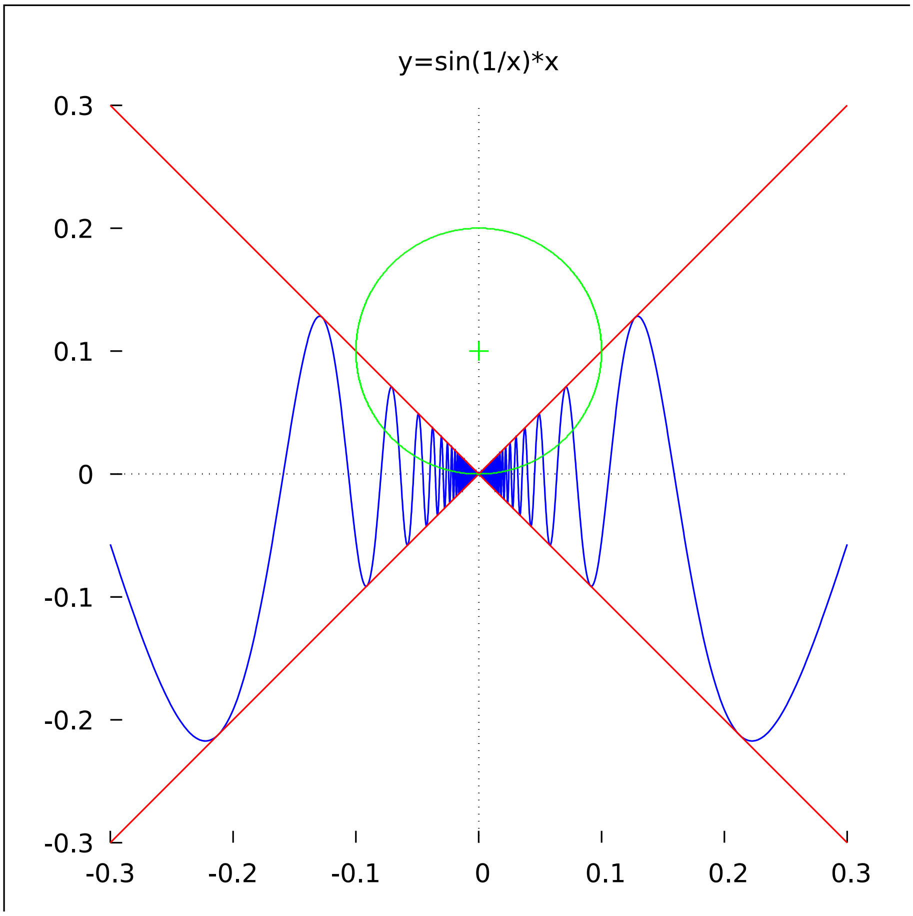
La définition suivante est, pour une fois, **à ne pas retenir** : elle montre la difficulté qu'il existe à définir une tangente de façon géométrique :

Définition 3.3.9 : *(Descartes) Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ admet une tangente au point M si il existe un cercle de centre A différent de M dont l'intersection avec $\mathcal{C}$ est réduite à M. Une tangente à $\mathcal{C}$ au point M est alors la droite passant par M orthogonale à la droite (AM).*

Remarque(s) 7 : 1. Notez qu'à priori, rien ne dit que la tangente en un point d'une courbe est unique ; parfois, c'est même faux :

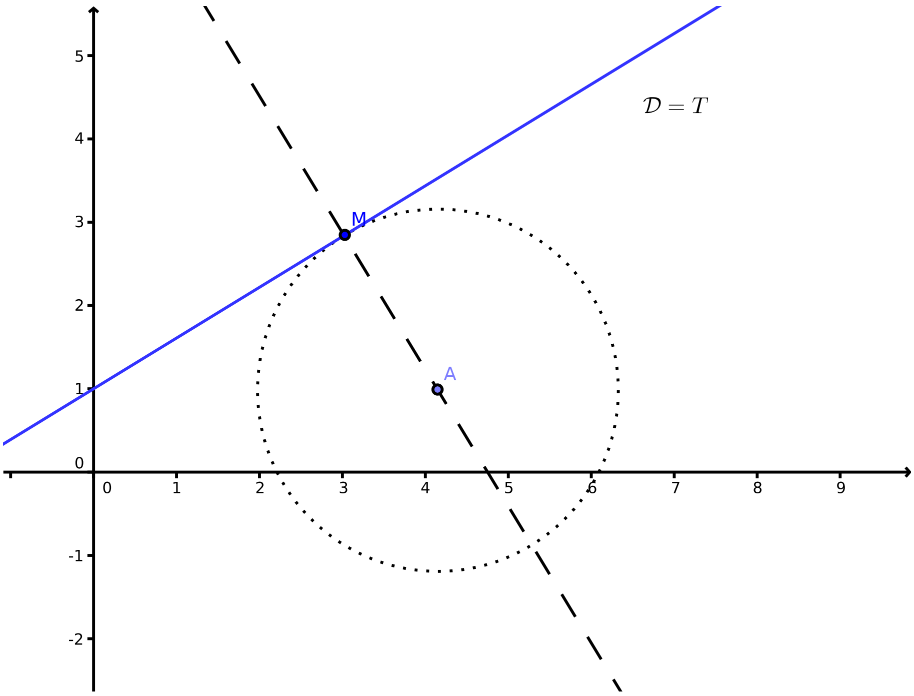


2. Il est même possible qu'une courbe n'admette pas en un point de tangente ; ici, il est impossible de tracer un cercle qui n'intersecte la courbe qu'en le point $(0, 0)$:

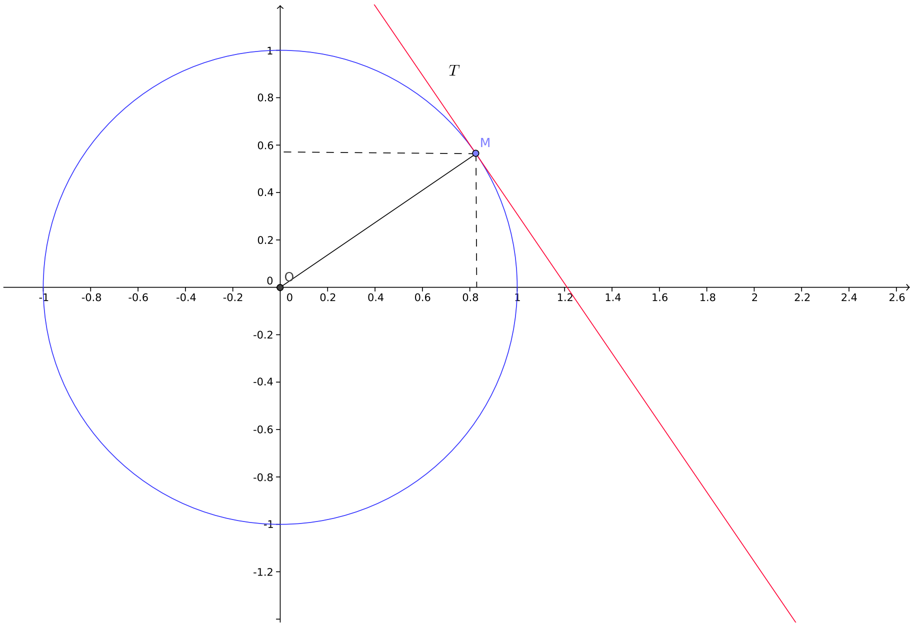


3. Il est cependant important de connaître certains résultats :

(a) Dans la cas d'un point M appartenant à une droite $\mathcal{D}$, il n'y a qu'une seule droite tangente T à $\mathcal{D}$ au point M : la droite $\mathcal{D}$ elle-même !



(b) Dans le cas d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O la tangente T du cercle $\mathcal{C}$ au point M est unique ; c'est la droite perpendiculaire à (OM) qui passe par M.



La méthode géométrique donnée par la définition est particulièrement mauvaise pour faire des calculs. Heureusement, il existe une meilleure méthode méthode pour certaines courbe. Tout part de la remarque suivante : elle est unique, pour connaître la tangente en un point M d'une courbe, il suffit d'en connaître la pente, puisqu'on en connaît déjà un point : M.

Définition 3.3.10 : *Soit $f : I =]a,b[\to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est dérivable en $x \in I$ si la courbe $\mathcal{C} = \{(x,y), \quad y = f(x), \ x \in I\}$ admet en $(x, f(x))$ une unique tangente de pente finie. On note alors $f'(x)$ la pente de cette tangente.*
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et on note f' et on appelle fonction dérivée de f la fonction définie sur I qui à x associe $f'(x)$.

Exemple(s) 9 :

9.1 On commence à s'approcher de ce que vous connaissez : la fonction f' ! Ce qu'il faut retenir de ce paragraphe est la chose suivante : il n'est absolument pas évident, à priori, que donnée une fonction, cette fonction soit dérivable ; on a par exemple montré que les fonctions :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases} \qquad \text{et} \quad f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

ne sont pas dérivables en 0.

9.2 Cependant, on sait déjà calculer un type de fonction dérivée ; si f est définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a \times x + b$$

alors $f'(x) = a$, puisque la tangente d'une droite est la droite elle-même !

3.3.3 Le grand prêt : calculs pratiques de dérivées

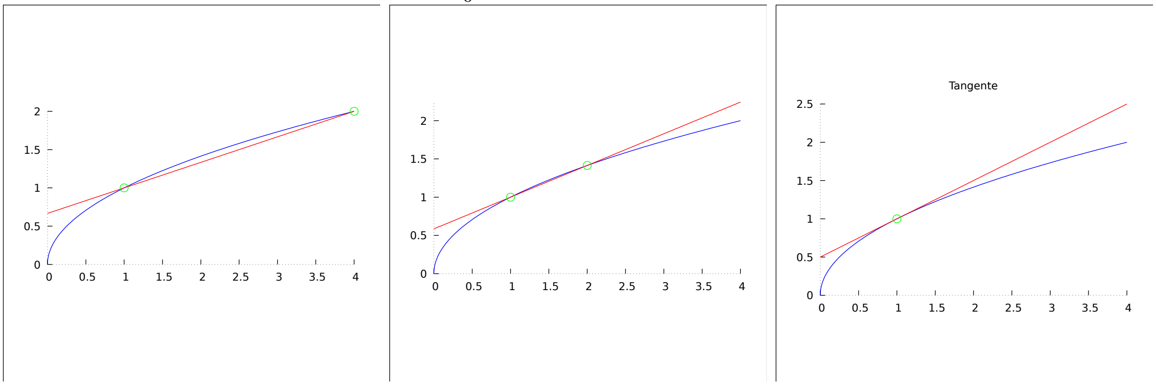
Pour réussir à utiliser quand-même la notion de dérivée, nous allons temporairement emprunter les résultats d'une centaine d'années de recherche mathématique ; l'idée est d'utiliser une définition analytique de la dérivée :

Définition 3.3.11 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On la note alors $f'(x_0)$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Remarque(s) 8 :

1. D'où vient cette idée ? On peut faire un dessin pour essayer de l'expliquer. Si une droite passe par $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$, alors elle a pour pente :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
l'idée est d'ensuite faire tendre x vers x_0 :


2. Notez que par définition, si elle existe, l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est donnée par :
$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a).}$$
3. Rappelez vous que toutes les fonctions ne sont pas dérivables, même avec cette définition. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

On a le tableau suivant des dérivations des fonctions usuelles sur $\mathbb{R}$:

$f(x)$	$f'(x)$	dérivable sur
$x^n,\ (n \in \mathbb{N})$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^{-n},\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$(-n) \times x^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exemple(s) 10 :

10.1 Dans tous les exemples précédents, le domaine de dérivabilité est le même que celui de définition. Mais la fonction :
$$f : x \longmapsto \sqrt{x}$$
est définie sur $\mathbb{R}_+$ et n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$!

Propriété(s) 3.3.4 : Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors

1. $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)' = k.f'$.
3. $f \times g$ est dérivable sur I et
$$\boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.}$$
4. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable sur I et :
$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}}$$
5. Si $h : J \supset f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est dérivable sur I et
$$\boxed{(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'.}$$

Exemple(s) 11 :

11.1 Par soucis de cohérence, on peut vérifier qu'avec les autres formules, on peut retrouver la formule de dérivation d'un quotient ; on montre d'abord avec la formule de dérivation des composées et celle de $x \mapsto \frac{1}{x}$ que la dérivée de $\frac{1}{g}$ est $-\frac{g'}{g^2}$, puis on utilise la formule de dérivation des produits pour obtenir :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \times g'}{g^2} = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}.$$

11.2 On définit, pour α un réel quelconque **la fonction puissance** α par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$x^\alpha = \exp(\alpha \times \ln(x)).$$
Alors, cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée :
$$\alpha \times \frac{1}{x} \times \exp(\alpha \times \ln(x)) = \alpha \times x^{\alpha - 1}.$$

11.3 On définit la fonction tangente par :
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
Son domaine de définition maximal est :
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi,\ k \in \mathbb{R}\right\},$$
et l'on peut calculer sa dérivée en tout x de son ensemble de définition :
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

11.4 Un exercice de calcul de dérivée commence souvent par la détermination du domaine de dérivation. Par exemple, si l'on cherche à calculer la dérivée de :
$$f :\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$
l'ensemble de définition maximal de cette fonction est $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ mais son ensemble de dérivation est seulement $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$! Pour tout x de ce domaine, on a alors :
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

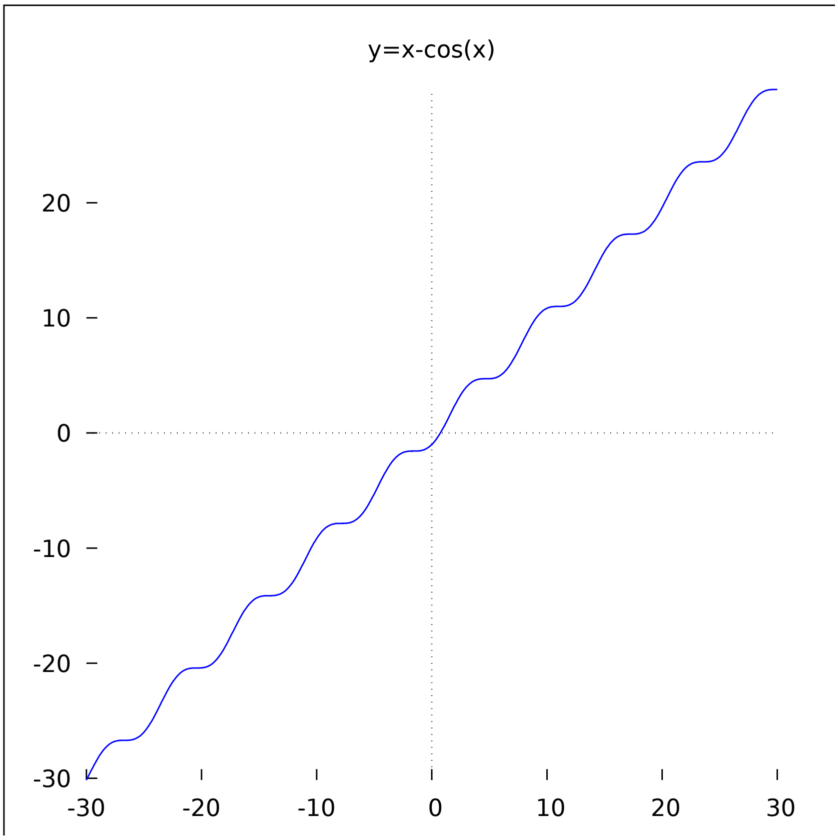
Et tant qu'on est à faire des prêts, en voici un dernier, essentiel :

Propriété(s) 3.3.5 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{lcl} f' \geq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ croissante} \\ f' \leq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ décroissante} \\ f' > 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement croissante} \\ f' < 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement décroissante} \end{array}$$

Remarque(s) 9 :

1. Grâce aux deux premières affirmations, on en déduit :
$$f' = 0 \iff f \text{ constante}$$
2. Il est possible de relâcher légèrement les hypothèses pour obtenir une monotonie stricte ; il suffit que la dérivée soit strictement positive, sauf en un nombre fini de points. C'est par exemple pratique de s'en souvenir pour montrer qu $x \mapsto x^n$, n impair est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Notez qu'il n'y a pas de réciproque dans les deux dernières implications, il est même possible qu'une fonction soit strictement croissante alors que sa dérivée s'annule une infinité de fois, comme le montre la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$x \mapsto x - \cos(x).$$



3.3.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 3.3.12 : *1. Si f est dérivable et si f' est dérivable, on dit que f est* deux fois dérivable. *On note f'' la dérivée seconde de f (la dérivée de f').*

2. De manière itérative, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on dit que f est n fois dérivable si f est $n-1$-fois dérivable et si la dérivée $(n-1)$-ième, notée $f^{(n-1)}$ est dérivable. On note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

3. Une fonction n fois dérivable pour tout entier n est dite infiniment dérivable (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$).

On a les propriétés immédiates suivantes :

Propriété(s) 3.3.6 : Si f et g sont des fonctions n fois dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $k \in \mathbb{R}$ et si h est n fois dérivable sur un intervalle $J \supset f(I)$, alors

1. $f+g$ est n fois dérivable,
2. $k.f$ est n fois dérivable,
3. $f \times g$ est n fois dérivable,
4. si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable,
5. $h \circ f$ est n fois dérivable.

Exemple(s) 12 :

12.1 Les fonctions usuelles (données par leur expression en x) suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine de dérivation donné.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} & \text{sur} & \mathbb{R}^* \\ e^x,\ \sin(x),\ \cos(x), & \text{sur} & \mathbb{R} \\ \ln(x) & \text{sur} & \mathbb{R}_+^* \\ \tan(x) & \text{sur} & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{array}$$

3.4 Limites

Pour compléter un tableau de variations, on a besoin de calculer des limites.

3.4.1 Rappels de lycée

Dans ce paragraphe, on notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Commençons par quelques exemples à connaître :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} & \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} & 0 \\ \dfrac{1}{x} & \xrightarrow[x\to 0^+]{} & +\infty \\ \dfrac{1}{x} & \xrightarrow[x\to 0^-]{} & -\infty \\ \forall \alpha > 0,\ x^\alpha & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & +\infty \\ \ln(x) & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & +\infty \\ \ln(x) & \xrightarrow[x\to 0^+]{} & -\infty \\ e^x & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & +\infty \\ e^x & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & 0 \end{array}$$

Exemple(s) 13 :

13.1 Notez qu'à priori, il est tout à fait possible qu'une fonction n'admette pas de limite en un point. Par exemple, ni la fonction sinus ni la fonction cosinus n'admet de limite en $+\infty$.

Propriété(s) 3.4.7 : 1. Si f et g définies sur I admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite) λ et μ réelles en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f+g$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda+\mu$ en a.

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque λ et μ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \text{« } x+\infty \text{ »} = \text{« } \infty + x \text{ »} = \text{« } +\infty+\infty \text{ »} = +\infty, \\ & \text{« } x-\infty \text{ »} = \text{« } -\infty + x \text{ »} = \text{« } -\infty-\infty \text{ »} = -\infty,\end{aligned}$$

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\text{« } +\infty-\infty \text{ » et « } -\infty+\infty \text{ »}.$$

2. Si f et g définies sur I admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite) λ et μ réelles en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f \times g$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \times \mu$ en a.

   Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque les limites sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \qquad & \text{« } x \times +\infty \text{ »} = \text{« } +\infty \times x \text{ »} = \text{« } +\infty \times +\infty \text{ »} \\ & = \text{« } -\infty \times -\infty \text{ »} = +\infty \\ \forall x < 0, \qquad & \text{« } x \times +\infty \text{ »} = \text{« } +\infty \times x \text{ »} = \text{« } +\infty \times -\infty \text{ »} \\ & = \text{« } -\infty \times +\infty \text{ »} = -\infty\end{aligned}$$

   En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\text{« } 0 \times (+\infty) \text{ » et « } 0 \times (-\infty) \text{ »}.$$

3. Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, si g est définie au voisinage de λ et admet une limite $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ en λ, alors $g \circ f(x)$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) μ en a.

Exemple(s) 14 :

14.1 La fonction définie par $f(x) = x^2 - x$ vérifie :

$$f(x) = x^2 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Elle admet donc pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

14.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ admet pour limite 0 en $+\infty$ et comme limite 1 en 0^+ et 0^-.

14.3 À partir des limites de la fonction $\frac{1}{x}$ et des limites de produit et d'une composition, on en déduit facilement la limite d'un quotient $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas au voisinage de a (en ligne, les limites de f, en colonnes celles de g) :

	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\pm\infty$	0	0	FI	FI	0
0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
0^+	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

14.4 La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

admet pour limite 0 en $+\infty$.

3.4.2 Quelques méthodes pour lever une indétermination

Donnons ici quelques méthodes utiles pour lever une indétermination lorsqu'on recherche une limite. Commençons par quelques rappels de lycée :

1. La factorisation : il est parfois utile de factoriser les expressions avec lesquelles on travaille. Par exemple :

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$

donc la fonction définie par cette expression admet pour limite 4 en 2.

2. La multiplication par une « quantité conjuguée », qui consiste essentiellement à se débarrasser de racines dans l'expression grâce à l'identité remarquable $(a-b)\times(a+b) = a^2 - b^2$. Par exemple, pour $x > 1$:

$$\sqrt{x^2-1} - x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

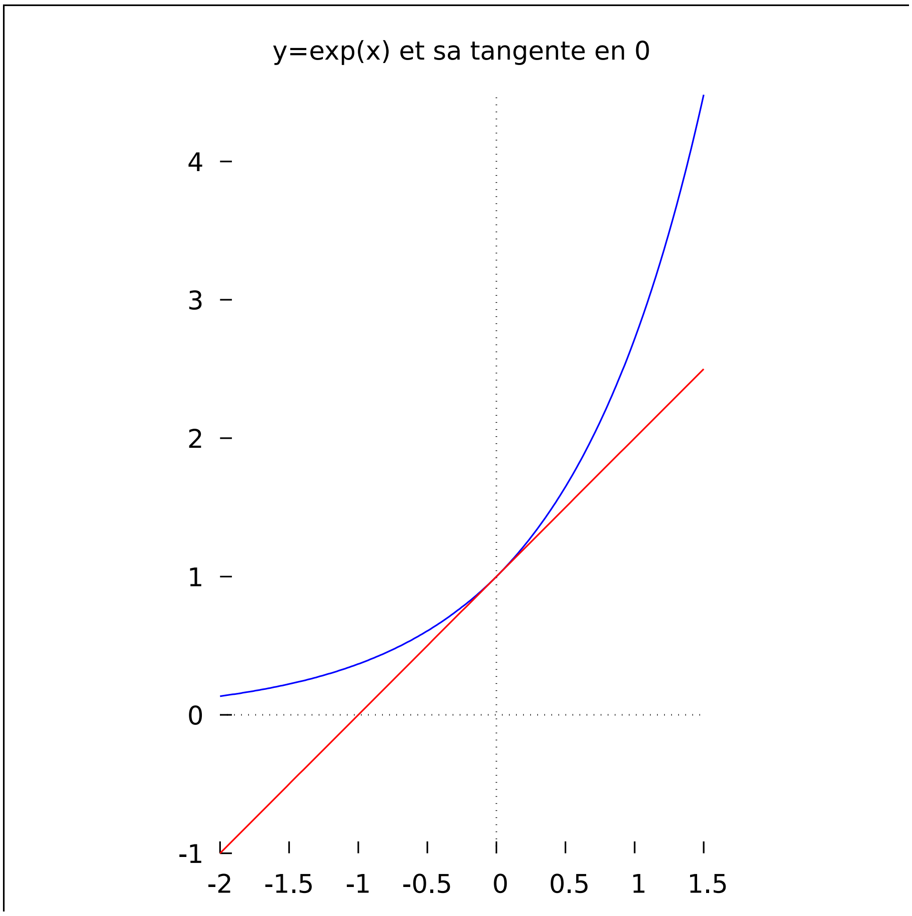
Une nouveauté est l'utilisation du taux d'accroissement ; parfois, la connaissance de la dérivée permet de conclure en utilisant :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Par exemple :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Une autre nouveauté est l'utilisation des «croissances comparées» : tout commence par la remarque géométrique suivante : le graphe de la fonction exponentielle est « au-dessus » de sa tangente en 0 :



En termes quantifiés :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^x}{x^n} = e^{x/2} \times \left(\frac{e^{x/2\,n}}{x}\right)^n \geqslant \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,n}\right)^n \times e^{x/2}$$

Donc, comme le côté droit de l'inégalité tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.}$$

De cette limite, on en déduit :

Propriété(s) 3.4.8 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{a \times x}}{x^b} = +\infty \quad (1), \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^b \times \mathrm{e}^{a \times x} = 0 \quad (2),$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \qquad \lim_{x \to 0^+} x^a \times |\ln(x)|^b = 0 \quad (4).$$

Démonstration : IL s'agit essentiellement à chaque fois d'effectuer le bon changement de variables. On pose : $y = a \times x$ dans le premier cas, $y = -a \times x$ dans le deuxième, $y = a \times \ln(x)$ dans le troisième et $y = -a \times \ln(x)$ dans le dernier. Développons le premier cas. Il s'agit après changement de variables de déterminer la limite lorsque y tend vers $+\infty$ de

$$a^b \times \frac{e^y}{y^b} \geqslant a^b \times \frac{e^y}{y^n}$$

où $y \geqslant 1$ et n est un entier supérieur à b. Il reste à utiliser ce qu'on vient de prouver pour conclure.

■

Exemple(s) 15 :

15.1 On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} \times x \times e^{-x} = 0$$

15.2 On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \times e^{-x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} = 0$$

15.3 On a :

$$\frac{x^2 + x + \ln(x)}{3\,\ln(x)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)}\right)$$

Donc cette quantité admet pour limite $\frac{1}{3}$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$.

3.5 Études de fonctions

3.5.1 Réduction du domaine

Définition 3.5.13 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I. On dit que :*

1. *f est p-périodique si : $\forall x \in I, \quad f(x+p) = f(x)$,*
2. *si I est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire si pour tout x de I, $-x \in I$) :*
   (a) *f est impaire si : $\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$*
   (b) *f est paire si : $\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$.*

Exemple(s) 16 :

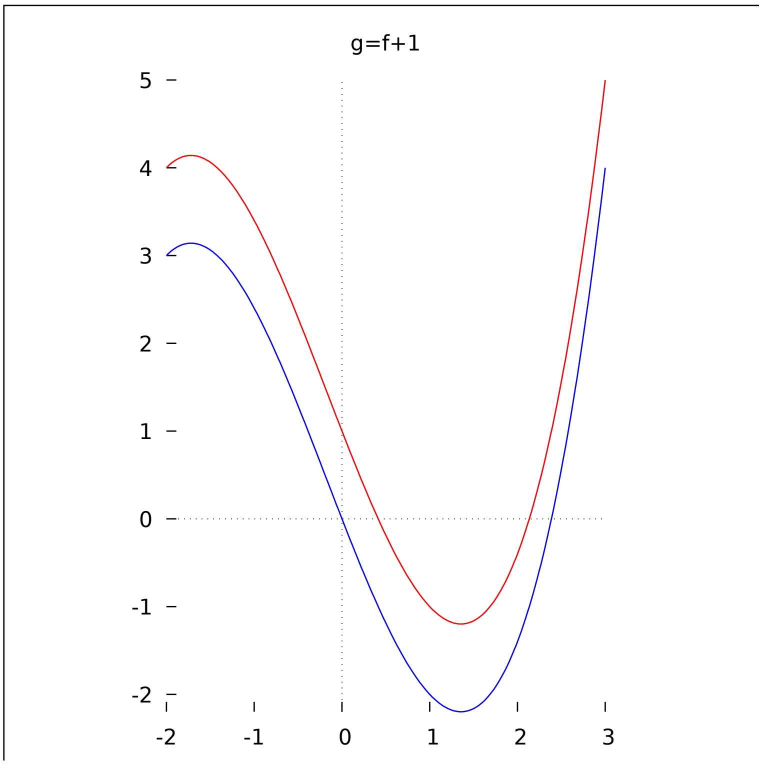
16.1 La fonction sinus est impaire, $2\,\pi$-périodique

16.2 la fonction cosinus est paire, $2\,\pi$-périodique.

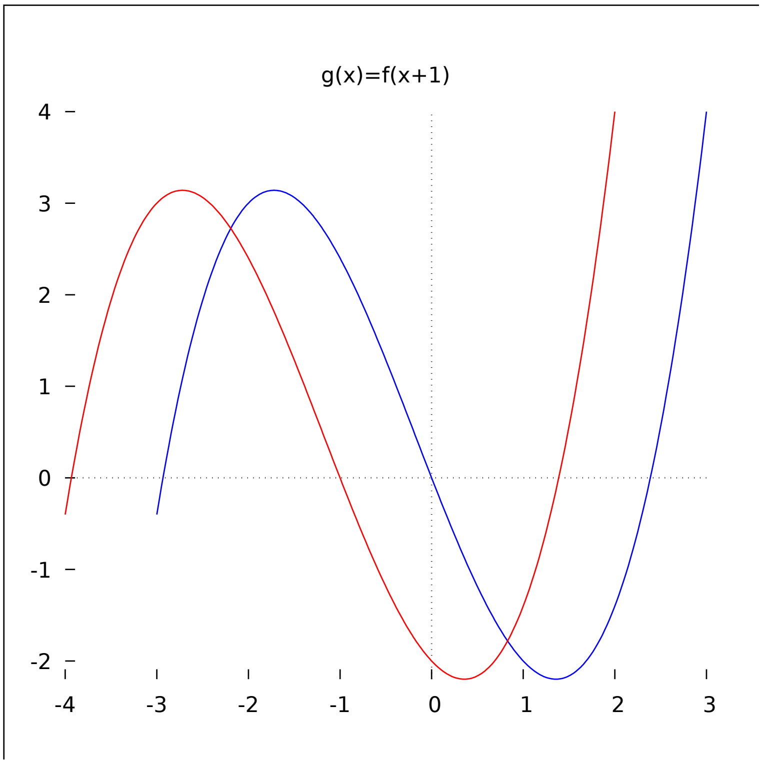
16.3 la fonction tangente est impaire, π-périodique

Faisons maintenant quelques remarques géométriques :

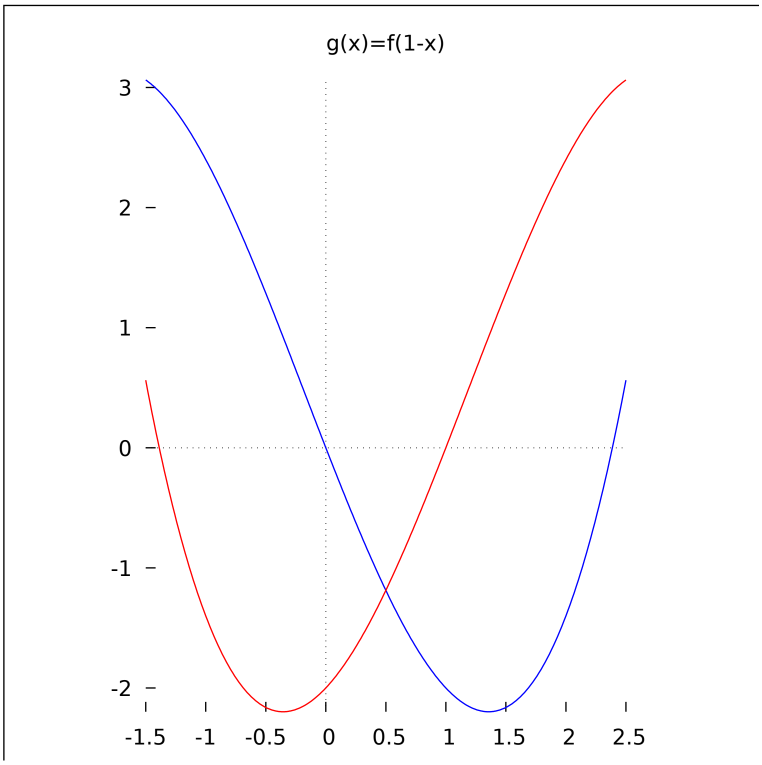
Remarque(s) 10 : 1. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x) + a$ est le translaté du graphe de la fonction de f de vecteur $(0, a)$:



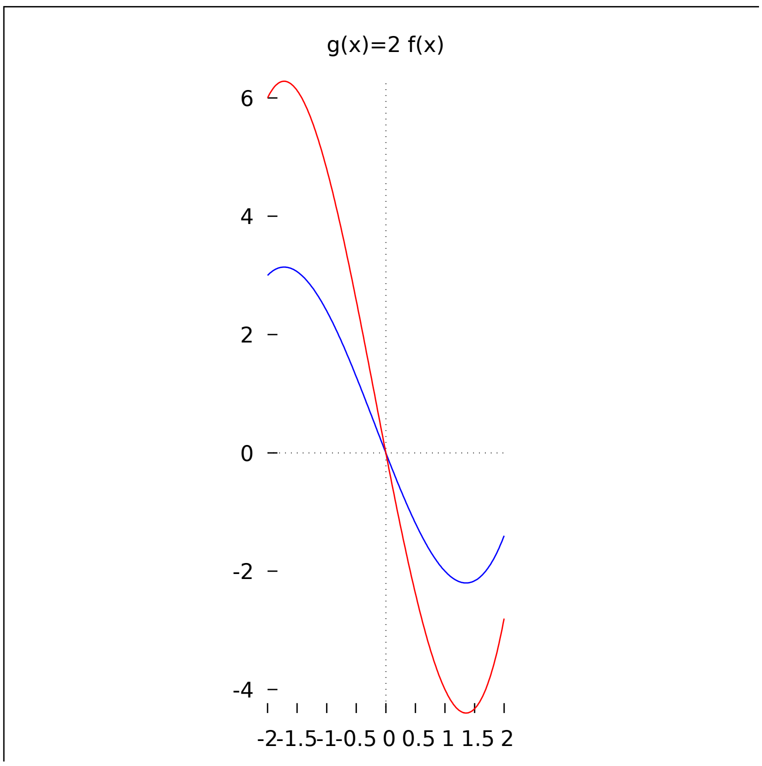
2. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x+a)$ est le translaté du graphe de la fonction de f de vecteur $(-a, 0)$:



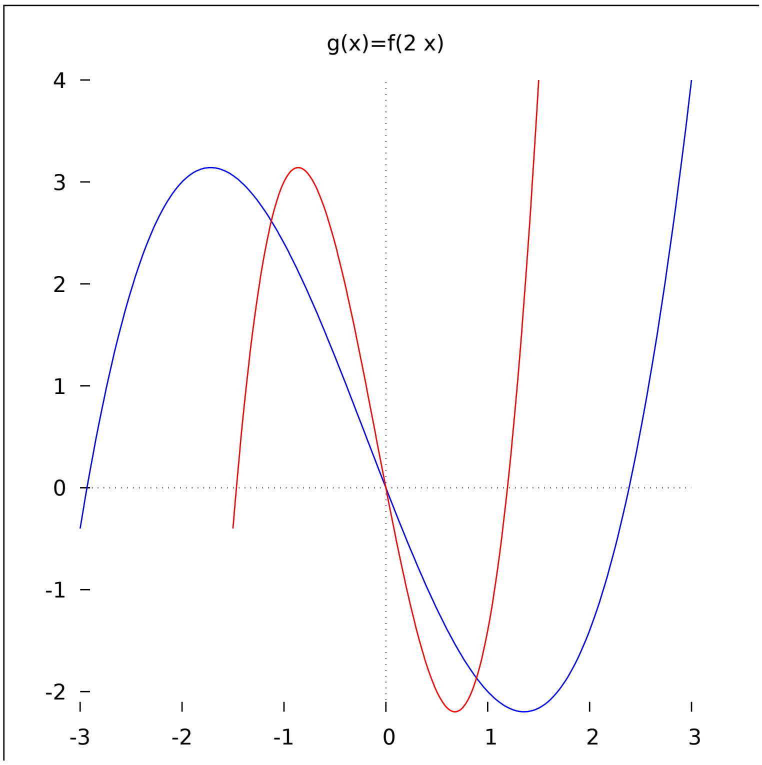
3. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(a-x)$ est la symétrie du graphe de la fonction de f par rapport à la droite $x = \frac{a}{2}$:



4. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto a \times f(x)$ est l'affinité du graphe de f par rapport à l'axe O_x de rapport a (c'est-à-dire, la distance à l'axe O_x de tout point du graphe est multiplié par a)



5. Si $a \in \mathbb{R}^*$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(a \times x)$ est l'affinité du graphe de f par rapport à l'axe O_y de rapport $\frac{1}{a}$ (c'est-à-dire, la distance à l'axe O_y de tout point du graphe est multiplié par $\frac{1}{a}$)



De ces remarques, on en déduit la méthode suivante pour réduire le domaine d'étude d'une fonction :

1. Si une fonction est p-périodique, il suffit de l'étudier sur une période (c'est-à-dire sur une intervalle de longueur p) pour en déduire son graphe entier par translations (remarque 2),
2. si une fonction est impaire ou paire, il suffit de l'étudier sur le partie positive de son ensemble de définition, pour en déduire son graphe complet par symétrie orthogonale par rapport à O_y (dans le cas pair, par la remarque 3) ou centrale par rapport à O (dans le cas impair, par les remarques 3 et 4).
3. Plus généralement, il est possible d'utiliser ces remarques pour réduire le domaine en utilisant toute symétrie de la fonction. Par exemple, comme
$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$
il suffit d'étudier la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour en connaître le graphe...

3.5.2 Recherche d'asymptotes

Définition 3.5.14 : *Soit f une fonction à valeurs réelle. Soit x_0, a et b trois réels. On dit que :*

1. *f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$ si :*
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$
2. *f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ en x_0 si :*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$
3. *f admet une asymptote oblique d'équation $y = a \times x + b$ si :*
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - a \times x - b) = 0$$

Remarque(s) 11 : 1. Il est relativement facile de trouver une asymptote horizontale ou verticale. Mais comment faire pour en trouver une oblique ?

(a) On recherche une éventuelle limite en $+\infty$ de $f(x)$. Si cette limite existe et est infinie alors :

(b) on recherche une éventuelle limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe et est finie, notons-la a et :

(c) on recherche une éventuelle limite en $+\infty$ de $f(x) - a \times x$. Si cette limite existe et est finie, notons-la b : la droite d'équation $y = a \times x + b$ est une asymptote oblique de la courbe de f.

Exemple(s) 17 :

17.1 La fonction $a(x) = \frac{1}{x}$. admet en 0^+ et en 0^- une tangente verticale.

17.2 La fonction définie pour $x \geqslant -1$ par :

$$f(x) = \frac{5 + 7\,x + 4\,x^2}{2\,(x+1)}$$

admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = 2\,x + \frac{3}{2}$.

17.3 La fonction $g(x) = \cos(x)$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

17.4 La fonction $h(x) = \ln(x)$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

3.5.3 Mise en œuvre

Une étude de fonctions utilise toutes mes méthodes que l'on a vues jusqu'à maintenant. En résumé :

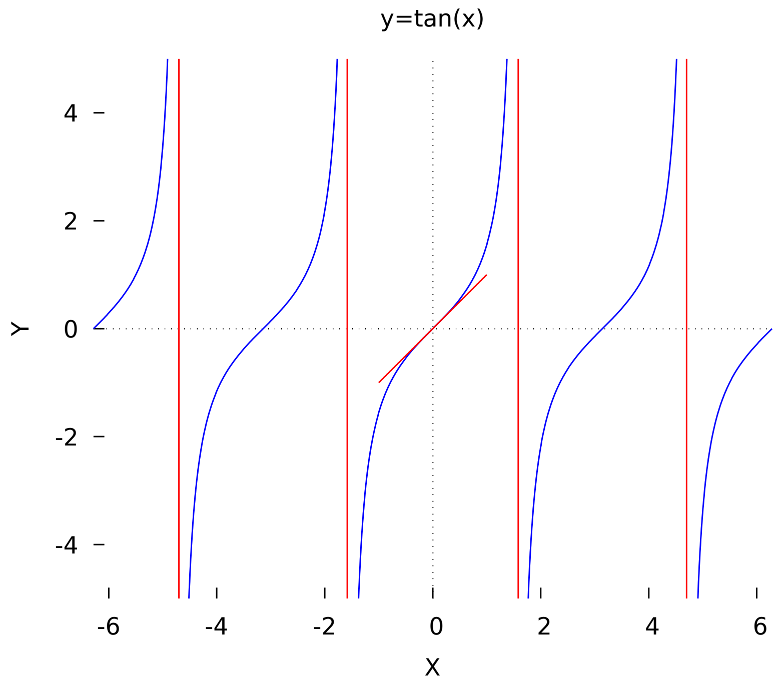
1. On détermine l'ensemble de définition
2. on cherche à réduire au maximum l'ensemble d'étude en utilisant les symétries de la fonction.
3. on détermine l'ensemble de dérivation, et on calcule la dérivée sur cet ensemble
4. on étudie le signe de la dérivée ; et on utilise le lien entre signe de la dérivée et croissance/décroissance
5. on étudie les points particuliers : en chaque point, on détermine une éventuelle limite, tangente ou asymptote
6. on trace le graphe de la fonction.

Traitons quelques exemples :

1. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$ et dérivable sur le même ensemble. Comme elle est π-périodique et impaire, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On a :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$$

on étudie les points extrémaux : en 0, la courbe admet pour tangente $y = x$ et en $\frac{\pi}{2}^-$, la fonction admet pour limite $+\infty$ donc elle y a une tangente verticale. On en déduit le graphe :



2. La fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

admet pour domaine de définition et de dérivabilité l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Elle est impaire, il suffit donc de l'étudier sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 \times \left(x^2 - 3\right)}{(x-1)^2 \times (x+1)^2}$$

La dérivée est du signe de $x^2 - 3$, donc positive pour x supérieur à $\sqrt{3}$ et négative sinon. Faisons le tableau de variations :

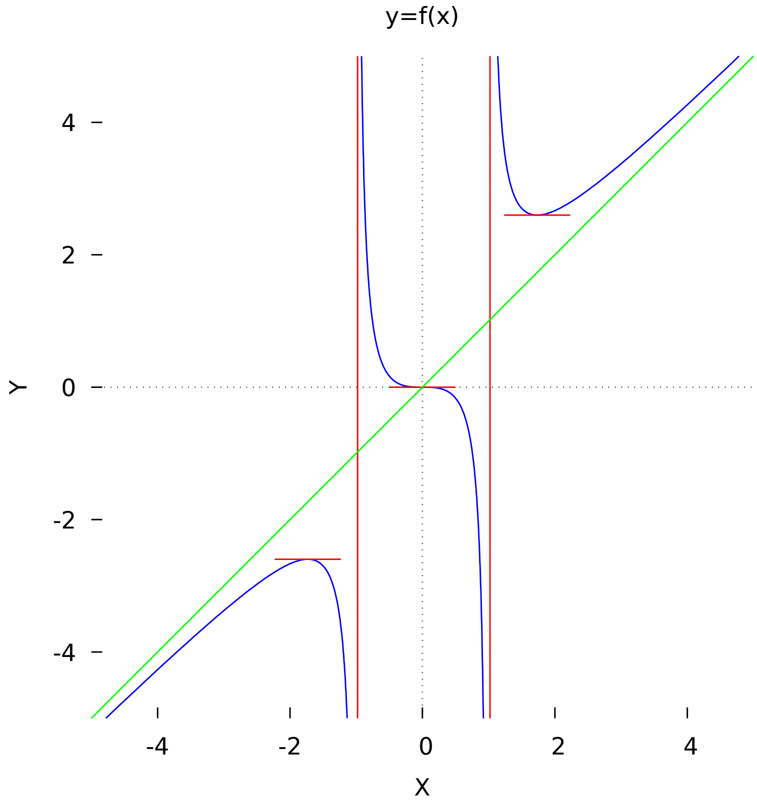
x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

En 0 et en $\sqrt{3}$ la dérivée s'annule, en 1, on a une asymptote verticale à droite et à gauche. Reste à étudier une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$:

(a) $\frac{f(x)}{x}$ admet pour limite 1 en $+\infty$

(b) $f(x) - x = \frac{x}{x^2-1}$ admet pour limite 0 en $+\infty$

la courbe de f admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$. On en déduit le graphe :



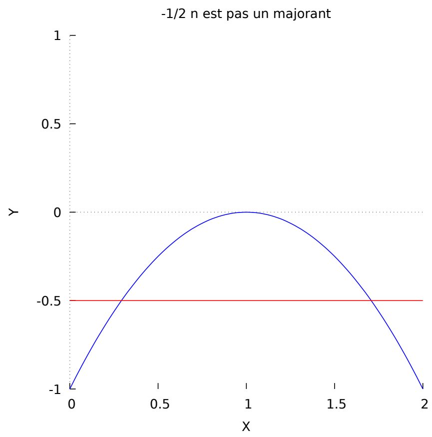
3.6 Application à la recherche d'inégalités

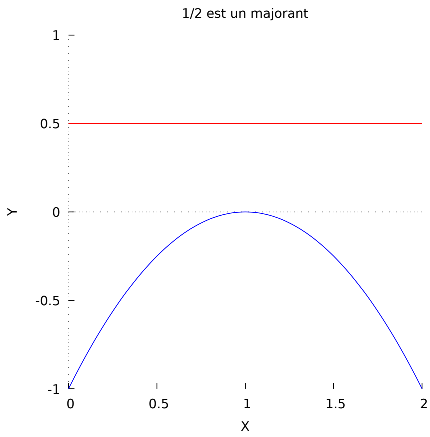
L'étude de fonctions permet également de prouver des inégalités. Commençons par un peu de vocabulaire :

Définition 3.6.15 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que :*

1. *M est un majorant de f sur I si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M$$
2. *m est un minorant de f sur I si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant m$$
3. *M_0 est un maximum de f sur I si c'est un majorant de f et si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M_0$*
4. *m_0 est un minimum de f sur I si c'est un minorant de f et si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m_0$*

Remarque(s) 12 :
1. Notez que presque toujours les majorants (et les minorants) d'une fonction f ne sont pas uniques. Le fonction cosinus admet par exemple tout réel supérieur à 1 comme majorant.
2. Il est aussi possible qu'une fonction n'admette ni majorant ni minorant ; la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ n'a ni majorant ni minorant sur $\mathbb{R}$.
3. Par contre, si une fonction admet un maximum (ou un minimum), celui-ci est unique : nommons $M - 1$ et M_2 deux éventuels maximum de f sur I alors par définition il existe x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = M_1$ et $f(x_2) = M_2$ donc comme ce sont des majorants :
$$M_1 = f(x_1) \leqslant M_2 \quad \text{et} \quad M_2 = f(x_2) \leqslant M_1$$
donc $M_1 = M_2$.
4. Il est très facile de repérer graphiquement un majorant ou un minorant si l'on connaît le graphe d'une fonction. Par exemple :





5. Il arrive très souvent qu'une fonction admette un majorant mais pas de maximum. Par exemple, la fonction
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet pour majorant 0 mais n'a pas de maximum.

La recherche de majorants ou de maximum d'une fonction s'effectue souvent par une étude de fonction. Par exemple, si l'on considère la fonction traitée dans la partie précédente :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

alors cette fonction admet sur $]-\infty, 1[$

1. pour majorants tous les réels de l'intervalle $[\frac{\sqrt{3}\times 3}{2}, +\infty[$
2. pour maximum $\frac{\sqrt{3}\times 3}{2}$.

Mais on peut aller plus loin : si l'on cherche à montrer que :

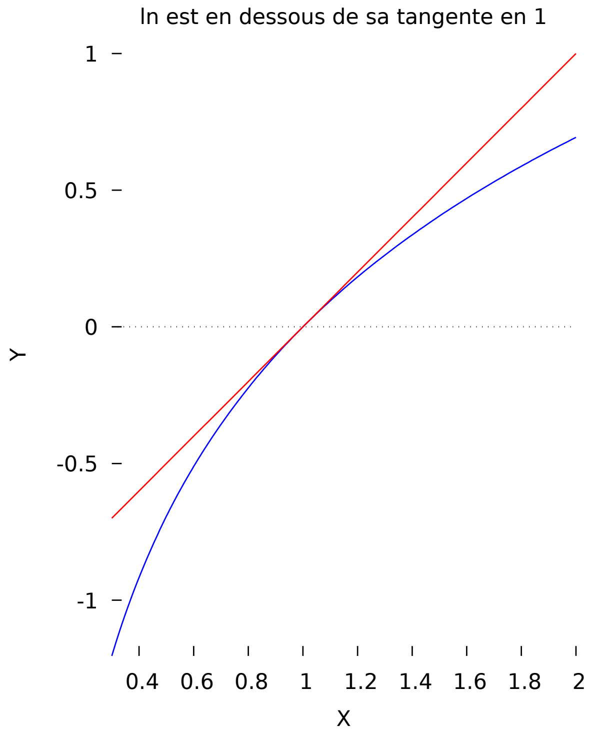
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x)$$

alors il suffit de montrer que 0 est un majorant de $f-g$ (ou un minorant de $g-f$) à l'aide d'une étude de fonction. Voici quelques exemples essentiels :

Exemple(s) 18 :

18.1 Commençons par prouver que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$$
c'est l'inégalité géométrique que l'on a utilisée lors des théorèmes de comparaison. On pose :
$$f(x) = e^x - (x-1)$$
Alors $f'(x) = e^x - 1$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f admet un minimum en 0, c'est-à-dire l'inégalité recherchée.

18.2 La fonction logarithme vérifie aussi une inégalité géométrique du même type :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x-1}$$
on dit que la fonction logarithme est « en dessous » de sa tangente en 1.



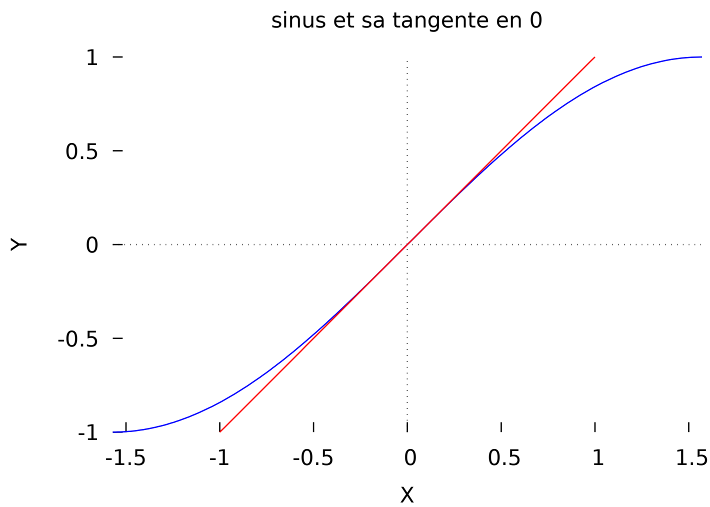
En effet, si :

$$f(x) = \ln(x) - x + 1$$

Alors $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ donc f est croissante sur $]0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1, ce qui montre l'inégalité recherchée.

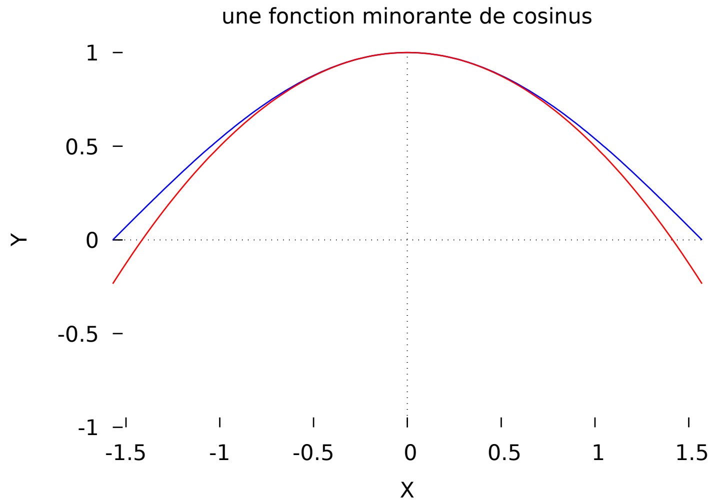
18.3 Pour la fonction sinus, il est important de retenir que l'inégalité suivante, qui se montre de la même façon que les autres, n'est vraie que pour les réels positifs :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x}$$



18.4 Enfin, pour la fonction cosinus, l'inégalité suivante se montre à l'aide de celle du sinus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}}$$



3.7 Fonctions usuelles

3.7.1 Fonctions puissance

Rappelons que, si α est un réel et x un réel strictement positif, on a posé :

$$x^\alpha = \exp\left(\alpha \times \ln(x)\right)$$

Mais nous connaissons d'autres façons de définir une puissance, par exemple, si n est un entier naturel non nul :

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad (n \text{ fois}).$$

Bien entendu, ces deux formules coïncident si $x > 0$. La différence essentielle entre elles est l'ensemble de définition, dans le premier cas, le formule n'a de sens que si $x > 0$ dans le deuxième, toujours. Pour ce qui concerne les entiers naturels (et aussi relatifs), la définition par multiplication (ou division) est donc bien plus générale. Que se passe-t-il en 0^+ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$? Un rapide calcul de limites donne :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pour cette raison, on étend la définition de ces fonctions puissances en 0 en posant, si $\alpha > 0$, $0^\alpha = 0$. Résumons ; la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie :

1. sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$
2. sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
3. sur $\mathbb{R}_+^*$ et étendue en 0 si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$

4. sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$

Rappelons maintenant quelques formules utiles : si α et β sont des réels quelconques et pour tout x tel que ceci ait du sens, on a :

$$\boxed{(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}.}$$

Si l'on s'intéresse à leur domaine de dérivabilité, les théorèmes généraux nous donnent que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf éventuellement dans la cas où $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, pour lequel le point $x = 0$ reste à étudier. Écrivons le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

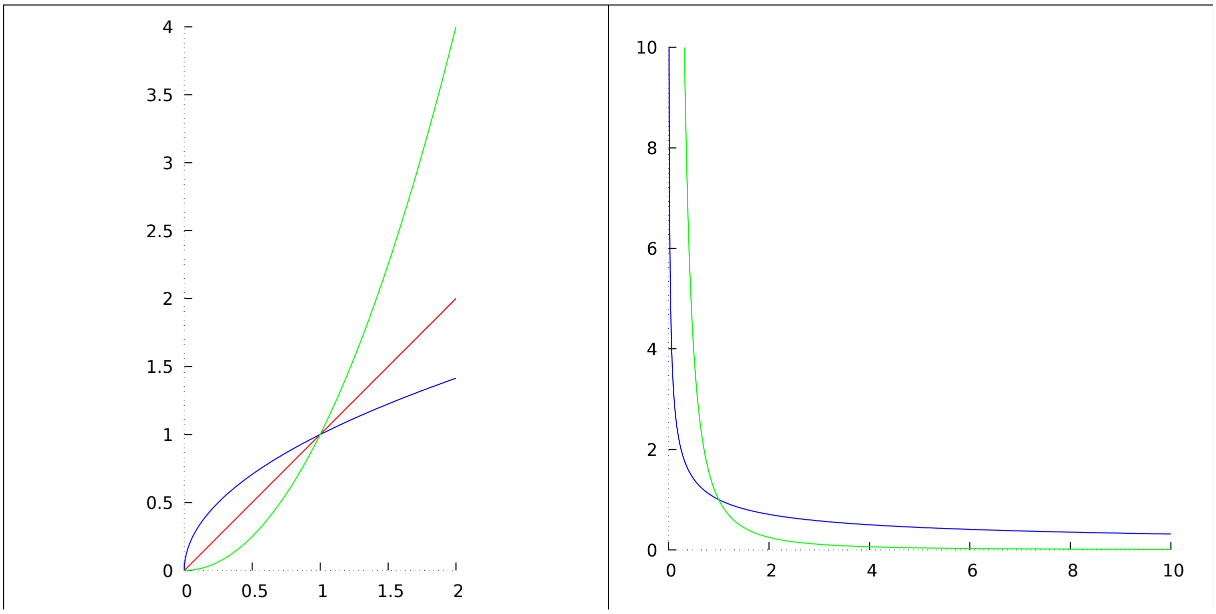
Récapitulons. Les fonctions puissances sont donc dérivables sur leur domaine de définition, sauf si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et $\boxed{\alpha < 1}$ et alors $x \mapsto x^\alpha$

$$\boxed{\text{n'est dérivable que sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Terminons par une étude de fonctions. Pour $x > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ admet pour dérivée :

$$\alpha \times x^{\alpha-1}$$

on en déduit (dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) les formes de graphes suivantes (si $\alpha > 0$ puis $\alpha < 0$)



3.7.2 Cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies pour tout réel x par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

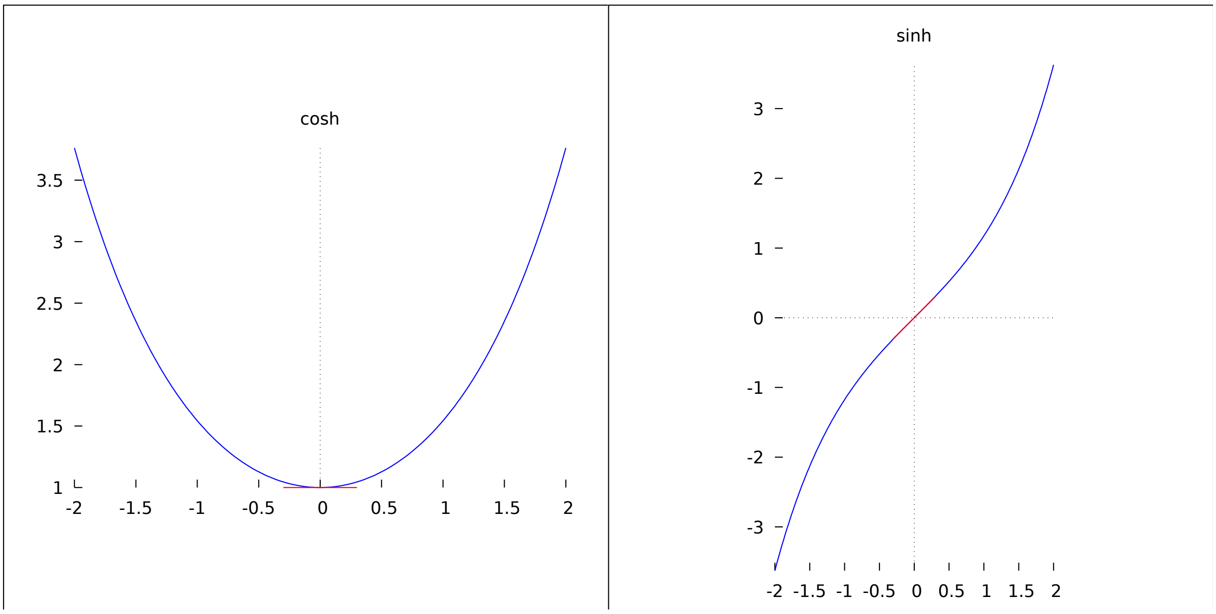
Elles vérifient certaines identités semblables à celles des fonctions sinus et cosinus. La plus importante est sans-doute :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Elles sont de plus dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

On en déduit les graphes :



3.7.3 Fonctions inverses

3.7.3.1 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Définition 3.7.16 : *Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans J. On dit que :*

1. *f est injective si chaque antécédent est unique, c'est-à-dire si :*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$
2. *f est surjective si tout élément de J admet un antécédent par f c'est-à-dire si :*
$$\forall y \in J, \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y.$$
3. *f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque(s) 13 : 1. Il est parfois énoncé directement la définition de la bijectivité d'une fonction de la façon suivante : tout élément de J admet un unique antécédent par f ou :
$$\forall y \in J, \; \exists! x \in I, \quad f(x) = y$$
où le quantificateur $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple(s) 19 :

19.1 Un exemple essentiel de fonction injective est une fonction strictement monotone (il suffit de prendre la contraposée de sa définition). Rappelons que pour montrer qu'une fonction est strictement monotone, il suffit d'examiner sa dérivée si elle existe.

19.2 Il est facile de, à partir d'une fonction, en construire une surjective. Il suffit pour ceci de considérer la (co-)restriction de cette fonction à son image. Plus généralement, une fonction $f : \; I \to J$ est surjective si et seulement si
$$f(I) = J$$

On en déduit la méthode suivante lorsqu'on cherche à construire une fonction bijective à partir d'une fonction réelle à valeurs réelles dérivable.

1. On cherche un intervalle le plus grand possible sur lequel sa dérivée est strictement positive ou négative (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On restreint le fonction à cet intervalle.
2. On calcule l'image de cet intervalle et on (co-)restreint la fonction à cette image.

Exemple(s) 20 :

20.1 La fonction sinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et que son image une fois restreinte à cet intervalle est $[-1,1]$. On en déduit que la fonction :

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$$

est bijective.

20.2 La fonction cosinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et que son image une fois restreinte à cet intervalle est $[-1,1]$. On en déduit que la fonction :

$$g : \begin{cases} [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$$

est bijective.

20.3 La fonction tangente n'est pas bijective, mais elle est strictement croissante (et définie !) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Son image une fois restreinte à cet intervalle est $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction :

$$h : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

est bijective.

3.7.3.2 Fonction réciproque d'une bijection

À partir d'une fonction bijective, on peut construire sa fonction réciproque :

Définition 3.7.17 : *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie par :*

$$f^{-1} : \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto x, \ f(x) = y. \end{cases}$$

Remarque(s) 14 :

1. Notez qu'il est indispensable que f soit bijective pour que cette définition ait du sens. L'élément x existe car f est surjective et il est unique car f est injective.
2. On remarque que, par définition, si une fonction f est bijective alors f^{-1} existe et vérifie :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I.$$

Exemple(s) 21 :

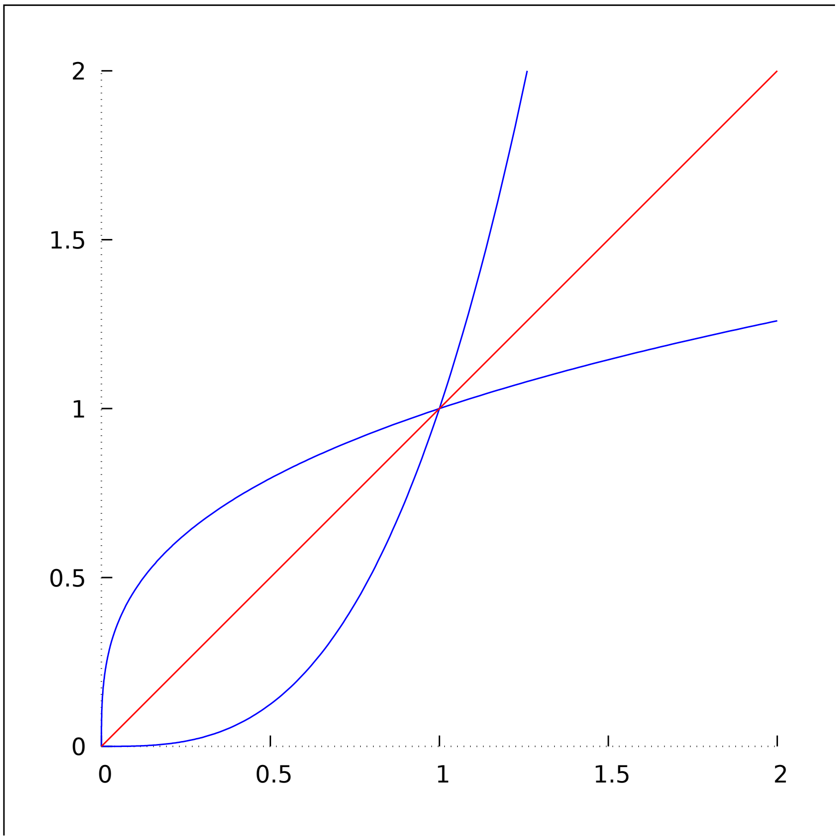
21.1 La fonction réciproque de l'exponentielle est le logarithme, celle du logarithme l'exponentielle.

21.2 La fonction réciproque de la racine carrée est la fonction :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2. \end{cases}$$

Pour le fonctions réelles à valeurs réelles, il est très facile de tracer le graphe d'une fonction réciproque f^{-1} à partir ce celui de f. Il s'agit de la symétrie orthogonale du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ en effet, si $f(x) = y$:

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$



Terminons cette partie en parlant de la dérivée d'une fonction réciproque. On a :

Théorème 3.7.2 : *Soit $f : I \to J$ continue et bijective sur I. On suppose que f est dérivable en x et que $f'(x) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et :*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque(s) 15 : Il existe de nombreuses façons de retenir ce théorème, plus ou moins mathématiques ;

1. un physicien aimera sans-doute
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
2. un mathématicien retrouvera facilement la formule en dérivant la formule $f(f^{-1}(y)) = y$ grâce à la formule de dérivation des fonctions composées,

aucune de ces astuces ne peut remplacer la connaissance du théorème et de ses hypothèses.

3.7.3.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Rappelons que les trois fonctions suivantes sont bijectives :

$$f : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases} \quad ; \quad g : \begin{cases} [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases} \quad ; \quad h : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases} .$$

On définit les fonctions trigonométriques réciproques par :

$$\arcsin = f^{-1} : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \longmapsto \arcsin(x) \end{cases} ; \arccos = g^{-1} : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ x \longmapsto \arccos(x) \end{cases} ; \arctan = h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x \longmapsto \arctan(x) \end{cases} .$$

Le point le plus important pour ces fonctions concerne leurs ensembles de définition. En particulier, les formules suivantes sont **fausses** en dehors des ensembles sur lesquelles elles sont énoncées :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques (et un peu de trigonométrie) donnent :

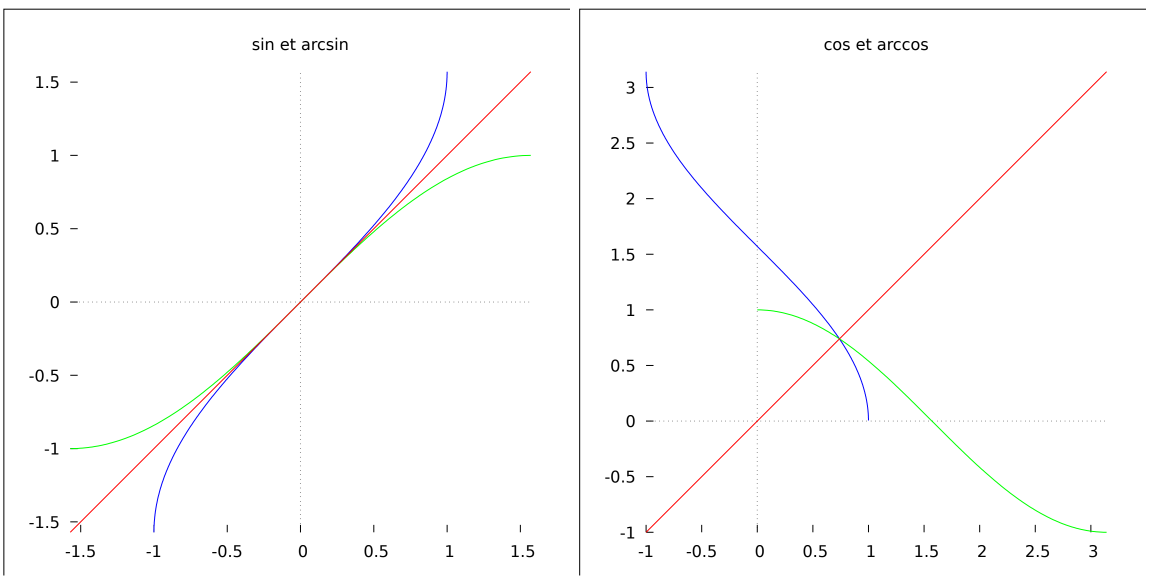
Propriété(s) 3.7.9 : 1. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

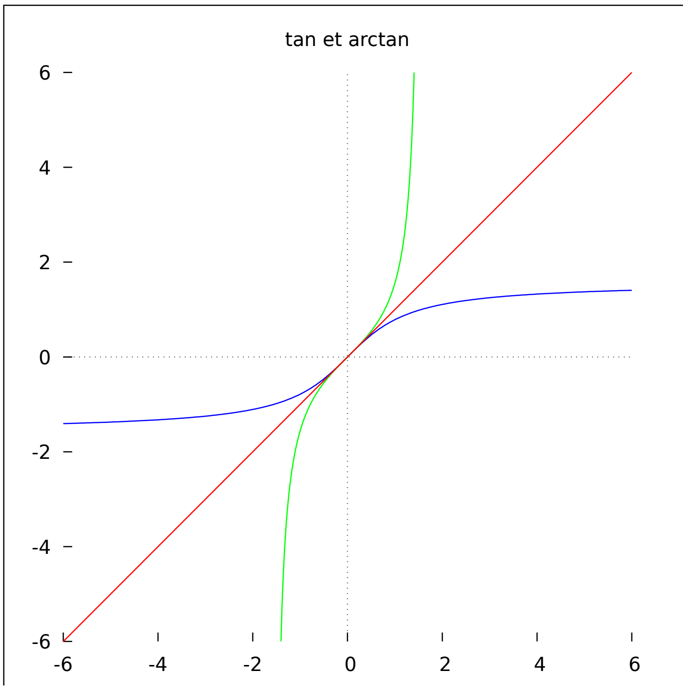
2. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et vérifient :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Terminons par les graphes de ces fonctions qui sont obtenus par symétrie de ceux des fonctions sinus et cosinus pour arcsin et arccos :



et par symétrie de celle de tangente pour arctan :



notez qu'en particulier

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 4

Nombres complexes et trigonométrie

4.1 Définition

Définition 4.1.18 : *On considère l'ensemble des points du plan, que l'on note*

$$\mathbb{C} \overset{Not.}{=} \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\},$$

sur lequel on définit deux lois (ou opérations) notées + et × par, pour tous réels a, b, c et d :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c).$$

Notation(s) : Si $z = (a, b)$ est un élément de $\mathbb{C}$, on le notera :

$$z \overset{Not.}{=} a + b\,i$$

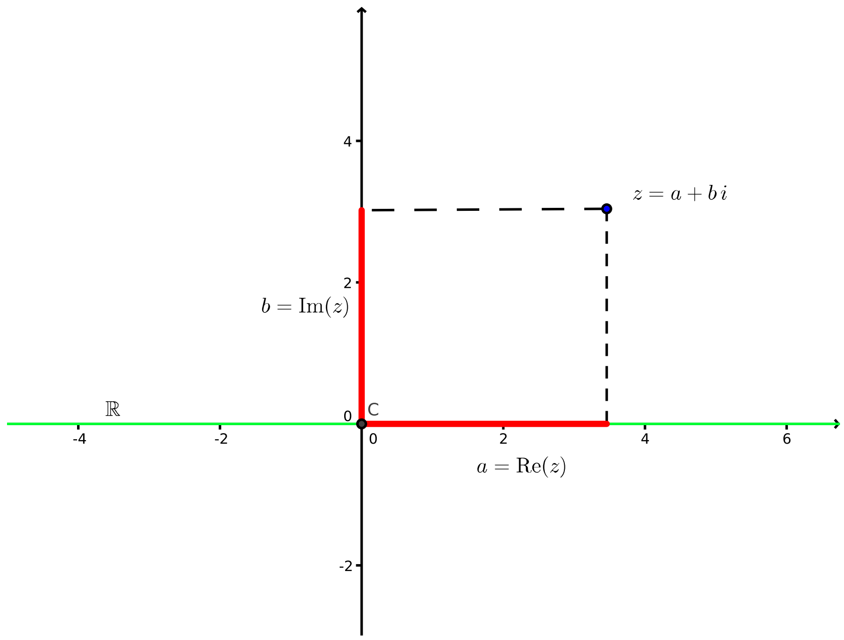
Et on dira que $a + b\,i$ est *l'affixe* de ce complexe. On appellera de plus a *la partie réelle* du complexe z et b sa *partie imaginaire*. On les notera :

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

On verra dans la suite l'ensemble des réels comme le sous ensemble des complexes donc la partie imaginaire est nulle ; en particulier :

$$0 = 0 + 0\,i, \quad 1 = 1 + 0\,i.$$

Tout ceci se résume très bien sur une dessin...



Il est important de remarquer qu'il est possible de faire les calculs dans $\mathbb{C}$ de la même façon que dans les réels :

Proposition 4.1.1 : *Soit z_1, z_2 et z_3 trois éléments de $\mathbb{C}$ (dans la suite, on notera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ou $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$) alors :*

1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$ *associativité de la somme et du produit,*
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ *commutativité de la somme et du produit,*
3. $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$, *distributivité du produit sur la somme,*
4. $z_1 + 0 = z_1$, $z_1 \times 1 = z_1$ *0 est un élément neutre pour la somme et 1 pour le produit,*

Remarque(s) 16 : Heureusement pour nous, il existe une astuce qui permet de retenir extrêmement facilement tous ces résultats ; avec la notation $z = a + b\,i$, *tout se passe comme si* il suffisait de se souvenir de la règle de calcul supplémentaire

$$\boxed{i^2 = -1}$$

puis d'utiliser les règles de calcul usuelles. Notez bien que i n'est pas un réel mais juste une notation pour $(0, 1)$!

4.2 Premières opérations géométriques

Par sa nature géométrique l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est muni de diverses opérations géométriques :

Définition 4.2.19 : *Soit $z = a + b\,i$ un complexe. Alors :*

1. *La distance de z à 0 est notée $|z|$ et appelée module de z ; par le théorème de Pythagore $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
2. *La symétrie centrale par rapport à 0 de z est notée $-z$; clairement, $-z = -a - b\,i$.*
3. *La symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels de z est appelée conjugaison complexe de z et est notée $\bar{z}$; clairement, $\bar{z} = a - b\,i$.*

Remarque(s) 17 : 1. Bien-entendu, la définition de $-z$ ne tient pas au hasard. En plus de son sens géométrique, on remarque facilement que :

$$z + (-z) = 0$$

on dit que z admet un *inverse* pour $+$.

2. On remarque facilement que si z est un complexe alors :

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

3. De même, un rapide calcul donne :

$$z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

La propriété suivante permet de faire le lien entre calculs et géométrie :

Proposition 4.2.2 : *Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$. On a :*

1. $-(z_1 + z_2) = -z_1 - z_2$, $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ *(compatibilité avec les opérations)*
2. $z_1 \times \bar{z}_1 = |z_1|^2$

Remarque(s) 18 : La deuxième formule nous donne en particulier l'existence et une méthode pour calculer l'inverse (pour $\times$) d'un complexe non nul. En effet, si z est un complexe différent de zéro (on notera dans la suite $z \in \mathbb{C}^*$) alors :

$$z \times \left(\frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}\right) = 1$$

cette égalité nous incite alors à noter :

$$\frac{1}{z} \overset{Not.}{=} \frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}.$$

Exemple(s) 22 :

22.1 $\frac{1+2\,i}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i.$

Proposition 4.2.3 : *Soit z et z' deux complexes. Alors :*

1. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
2. *(si $z' \neq 0$)* $\frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$.
3. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(première inégalité triangulaire)*
4. $|z + z'| = |z| + |z'|$ *si et seulement si z et z' sont alignés, de même sens (c'est-à-dire qu'il existe un réel positif a tel que $z = a \times z'$ ou $a \times z = z'$).*
5. $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$ *(deuxième inégalité triangulaire)*

Le module nous donne également une façon commode de décrire les cercles et disques du plan ; en effet si M_0 a pour affixe z_0 et r est un réel strictement positif, alors :

1. Le cercle de centre M_0 et de rayon r est l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| = r\}$$

2. Le disque de centre M_0 et de rayon r est l'ensemble des points :

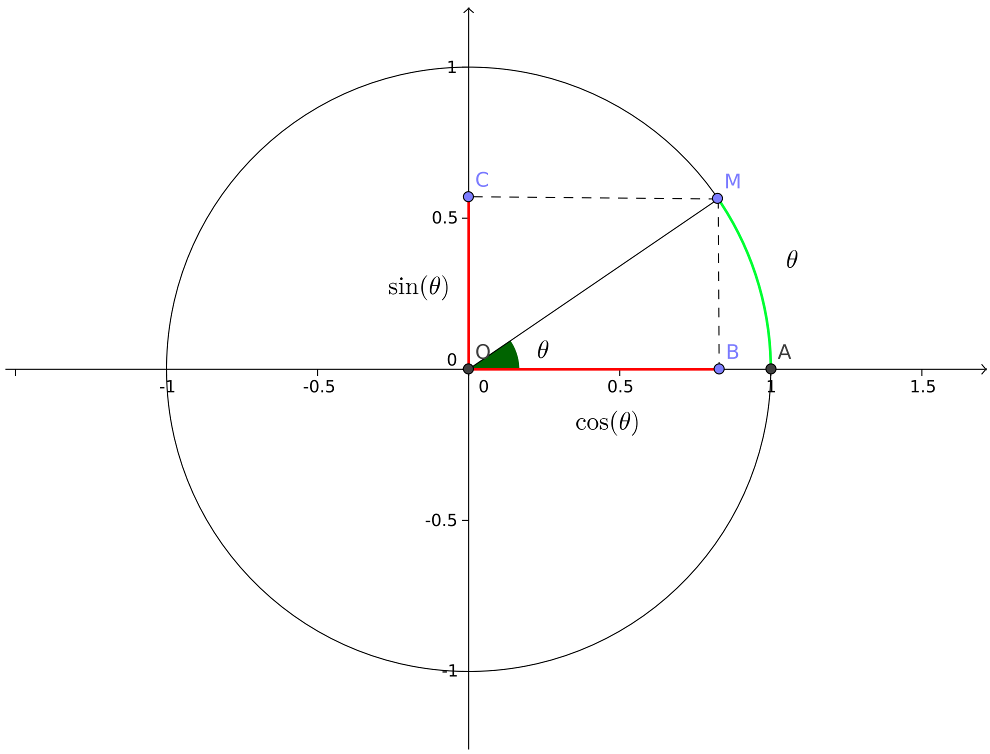
$$\mathcal{D}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leqslant r\}.$$

4.3 Nombres complexes de module un, trigonométrie

Parmi les nombres complexes, ceux de module un jouent un rôle particulier. On note :

$$\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.}$$

Il s'agit du cercle centré en 0 et de rayon 1. On peut *paramétrer* les points M de ce cercle par l'angle direct entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$, où $O = (0, 0)$ et $A = (1, 0)$ (notez qu'il est possible de *définir* cet angle par la longueur de l'arc de cercle reliant A à M en sens direct). Si θ désigne cet angle, alors $M = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.



Commençons par remarquer que, par définition,

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.}$$

De cette formule, on déduit les valeurs particulières :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Les formules suivantes s'obtiennent immédiatement en faisant un dessin :

Propriété(s) 4.3.10 :
1. $\cos(\theta + 2\,\pi) = \cos(\theta)$, $\sin(\theta + 2\,\pi) = \sin(\theta)$,
2. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = \sin(\theta)$,
3. $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$,
4. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$,
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$,
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$.

Il est par contre nécessaire de faire un peu plus de géométrie pour obtenir les deux formules suivantes :

Proposition 4.3.4 : *Pour tous réels θ et θ', on a :*

1. $\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\times\cos(\theta') - \sin(\theta)\times\sin(\theta')$,
2. $\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\times\cos(\theta') + \cos(\theta)\times\sin(\theta')$.

Démonstration : Notons $M_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et comme d'habitude $O = (0,0)$. Alors

$$\overrightarrow{OM_{\theta+\theta'}} = \cos(\theta').\overrightarrow{OM_\theta} + \sin(\theta').\overrightarrow{OM_{\theta+\frac{\pi}{2}}}.$$

Il suffit alors d'utiliser le point 6 de la propriété précédente et de prendre des coordonnées pour conclure.

■

Ces deux formules essentielles sont heureusement extrêmement faciles à apprendre grâce aux nombres complexes. On note, pour θ un réel :

$$\boxed{e^{i\,\theta} \overset{Not.}{=} \cos(\theta) + \sin(\theta)\,i.}$$

Alors les deux formules précédentes se résument en :

$$\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2,\quad \boxed{e^{i\,(\theta+\theta')} = e^{i\,\theta}\times e^{i\,\theta'}.}$$

Notez qu'on peut aussi passer de cette exponentielle complexe aux fonctions qui la définissent grâce aux *formules d'Euler* :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2},\quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2\,i}.}$$

Exemple(s) 23 :

23.1 Examinons, pour θ un réel, le complexe $1\pm e^{i\,\theta}$. On a :

(a) $1+e^{i\,\theta} = 2\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\times\left(\frac{e^{-i\,\frac{\theta}{2}}+e^{i\,\frac{\theta}{2}}}{2}\right) = 2\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

En particulier, ce complexe est de module $2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

(b) $1-e^{i\,\theta} = 2\,i\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\times\left(\frac{e^{i\,\frac{\theta}{2}}-e^{-i\,\frac{\theta}{2}}}{2\,i}\right) = 2\,i\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

En particulier, ce complexe est de module $2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

De ces formules s'en déduisent toutes les suivantes :

Propriété(s) 4.3.11 :

1. $\sin(a-b) = \sin a\times\cos b - \cos a\times\sin b$
2. $\cos(a-b) = \cos a\times\cos b + \sin a\times\sin b$
3. $\cos(2\,a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\,\cos^2 a - 1 = 1 - 2\,\sin^2 a$,
4. $\sin(2\,a) = 2\sin a\times\cos a$,
5. $\cos a\times\cos b = \frac{1}{2}\,(\cos(a-b)+\cos(a+b))$,
6. $\sin a\times\sin b = \frac{1}{2}\,(\cos(a-b)-\cos(a+b))$,
7. $\cos a\times\sin b = \frac{1}{2}\,(\sin(a+b)-\sin(a-b))$,
8. $\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\times\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,
9. $\cos p-\cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\times\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$,
10. $\sin p+\sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\times\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,
11. $\sin p-\sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\times\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exemple(s) 24 :

24.1 Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On remarque que :

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(1+\sqrt{3}).$$

24.2 Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a :

$$\cos(2\,a)=2\,\cos^2(a)-1$$

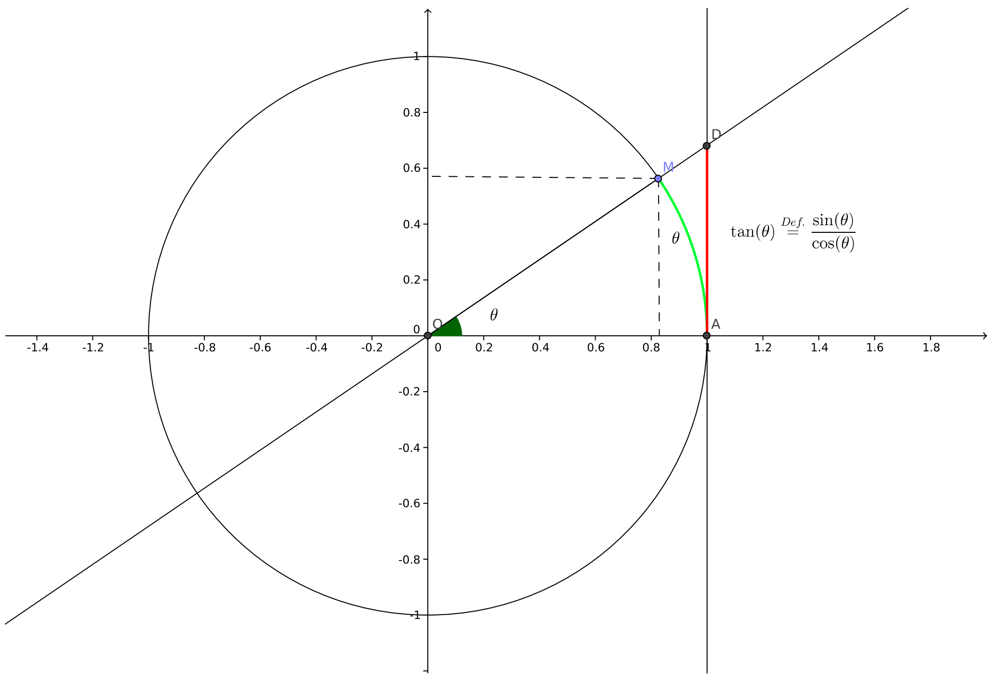
donc en appliquant en $a=\frac{\pi}{8}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1$$

On en déduit, après avoir remarqué que comme $\frac{\pi}{8}\in[0,\pi]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Terminons par une dernière fonction trigonométrique, la fonction *tangente*, qui doit son nom au petit dessin suivant :



Commençons immédiatement par remarquer que, contrairement aux fonctions sinus et cosinus, la fonction tangente n'est pas définie pour tout réel θ, ce qui peut se voir géométriquement, ou simplement en cherchant les points d'annulation de la fonction cosinus. L'ensemble de définition de la fonction tangente est :

$$\boxed{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\times\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

La formule nous donne immédiatement les valeurs particulières suivantes :

$$\tan(0) = 0,\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Les formules trigonométriques à connaître pour la fonction tangente sont au nombre de deux :

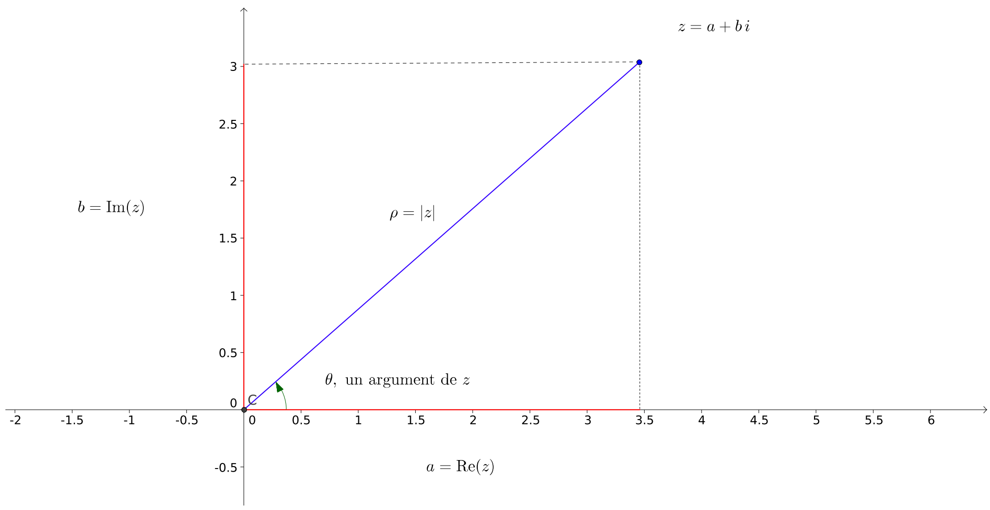
Propriété(s) 4.3.12 : Soit $(a, b) \in \mathcal{D}^2$. On a :

1. si $a + b \in \mathcal{D}$, alors $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$,
2. si $a - b \in \mathcal{D}$, alors $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

4.4 Arguments d'un nombre complexe non nul

4.4.1 Définition, premières propriétés

Il n'existe une autre façon de décrire un point du plan que de donner ses coordonnées, c'est ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* ou encore en termes de nombres complexes *le module et l'argument*. Faisons un dessin.



Pour un complexe non nul $z = a + i\,b$, on note $\rho = |z| \in \mathbb{R}^*$ et on rappelle qu'il s'agit du module du complexe z. On désigne également par θ et on appelle *argument du complexe z* **un** angle direct entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, $M = (a, b)$. Notez que cet angle existe car le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est non nul, mais qu'il est loin d'être unique ! En effet, si θ est un tel angle, toute valeur du type $\theta + 2\,k \times \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ conviendra aussi. Pour rendre ce problème moins douloureux, on introduit la définition :

Définition 4.4.20 : *Soit θ et θ' deux réels. On dira que θ et θ' sont égaux ou congruents modulo $2\,\pi$ si il existe un entier relatif k tel que :*

$$\theta' = \theta + 2\,k \times \pi$$

et on écrira alors :

$$\theta' \equiv \theta \mod 2\,\pi.$$

On peut alors dire que l'argument θ du complexe z est bien défini **modulo** $2\,\pi$. Voici quelques règles de calcul à connaître :

Propriété(s) 4.4.13 : Soit θ, θ', θ'' et θ''' des réels. Alors :

1. Propriétés de relation d'équivalence :

(a) $\theta \equiv \theta \mod 2\,\pi$ (réflexivité),

(b) $\theta \equiv \theta' \mod 2\,\pi \Longleftrightarrow \theta' \equiv \theta \mod 2\,\pi$ (symétrie),

(c) si $\theta \equiv \theta' \mod 2\,\pi$ et $\theta' \equiv \theta'' \mod 2\,\pi$ alors $\theta \equiv \theta'' \mod 2\,\pi$ (transitivité),

2. Compatibilité avec la somme :

(a) si $\theta \equiv \theta' \mod 2\,\pi$ et $\theta'' \equiv \theta''' \mod 2\,\pi$ alors $\theta + \theta'' \equiv \theta' + \theta''' \mod 2\,\pi$

(b) si $\theta \equiv \theta' \mod 2\,\pi$ et $\theta'' \equiv \theta''' \mod 2\,\pi$ alors $\theta - \theta'' \equiv \theta' - \theta''' \mod 2\,\pi$

Remarque(s) 19 : Notez qu'il est **faux** de penser que cette relation est compatible avec le produit ; par exemple :

$$0 \equiv 2\,\pi \mod 2\,\pi \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2} \mod 2\,\pi,$$

mais :

$$0 \not\equiv \pi \mod 2\,\pi.$$

Un peu de trigonométrie nous permet de voir que :

$$M = (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)),$$

autrement dit, en termes de nombres complexes :

$$\boxed{z = \rho \times e^{i\,\theta}.}$$

Faisons le lien avec l'amplitude et la phase d'un signal. Il existe deux façons équivalentes de décrire un signal sur $\mathbb{R}$:

$$a \times \cos(t) + b \times \sin(t) \quad \text{et} \quad A \times \cos(t - \varphi).$$

Pour passer d'une expression à l'autre, il faut et il suffit de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a = A \times \cos(\varphi) \\ b = A \times \sin(\varphi) \end{cases}$$

Autrement dit, d'un point de vue complexe, A est le module du complexe $a + i\,b$ et s'il est non nul, φ un argument de ce complexe.

4.4.2 Calculs pratiques d'arguments

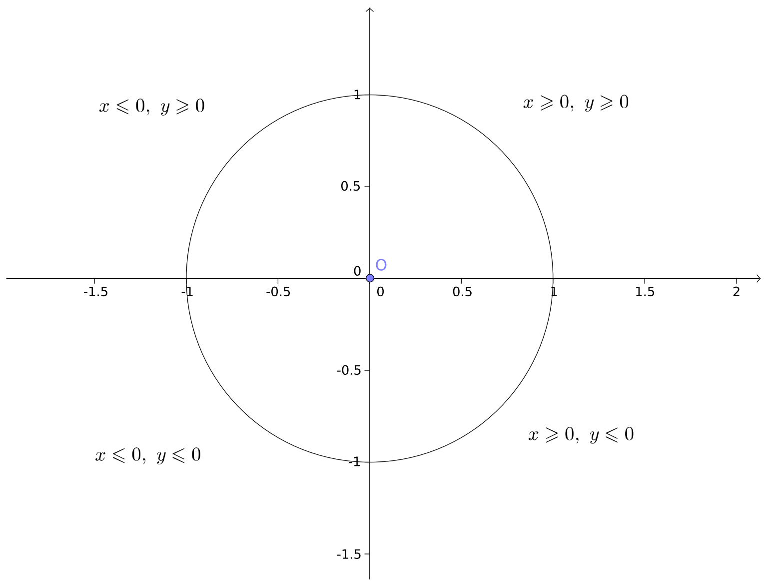
La dernière formule du paragraphe précédent nous permet de passer de l'argument et du module d'un complexe non nul à son affixe. Passer d'une affixe à un module et un argument se fait à l'aide des fonctions trigonométriques inverses. Supposons que x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire. Alors rappelons que :

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

pour retrouver θ, on utilise que :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}.}$$

La dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$. Pour savoir si il est légitime d'utiliser les formules d'inversion, il faut déterminer dans quel quadrant du cercle trigonométrique se situe l'angle θ recherché. On a quatre cas, déterminés par les signes de x et de y :



On a déduit donc les possibilités suivantes, dans chaque cas, un argument θ est donné par une des formules (à choisir en fonction du contexte) :

1. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$

2. Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$

3. Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$:

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$

4. Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$:

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

la dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$

C'est souvent (pour des raisons de facilité de calculs) les formules qui utilisent la fonction arc-tangente qui sont utilisées en pratique, résumons-les : l'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ du complexe $z = x + y\,i$ est donné par :

$$\boxed{\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y \geq 0\ ,\ x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & y < 0\ ,\ x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0\ ,\ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0\ ,\ x = 0 \end{cases}}$$

Exemple(s) 25 :

25.1 Un argument de $z = -4 - 10\,i$ est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \pi$$

4.5 Exponentielle complexe

Définition 4.5.21 : *(Exponentielle complexe.) Soit $z = a + b\,i$ un nombre complexe. On appelle exponentielle du complexe z et on note e^z ou $\exp(z)$ le complexe :*

$$e^z \overset{Def.}{=} e^a \times e^{i\,b}.$$

Remarquer que cette définition « prolonge » l'exponentielle réelle à $\mathbb{C}$. La fonction exponentielle jouit de presque les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle. Les voici résumées :

Propriété(s) 4.5.14 : Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
2. $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
3. $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \mod 2\,\pi$.

Remarque(s) 20 :

1. En particulier, si θ est un argument de z et θ' un argument de z', alors :
   (a) $\theta + \theta'$ est un argument de $z \times z'$
   (b) si $z' \neq 0$, $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$.
2. Il faut faire particulièrement attention, s'il existe une exponentielle complexe, le notion de logarithme complexe est totalement hors programme (et beaucoup plus difficile) ; en particulier, retenez que d'écrire $\log(z)$ pour z un complexe n'a absolument aucun sens !

4.6 Résolutions d'équations complexe

L'ensemble des nombres complexes est le bon ensemble pour résoudre des équations. Traitons plusieurs exemples.

4.6.1 Second degré

4.6.1.1 Racines carrées d'un nombre complexe : méthode algébrique

Supposons que nous cherchions, pour un complexe $z = a + b\,i$ un complexe δ appelé racine carrée de z [1] vérifiant :

$$\delta^2 = a + b\,i$$

L'idée de la méthode algébrique est de raisonner en résolvant astucieusement un système :

1. Il est totalement *interdit* d'utiliser la notation $\sqrt{\delta}$ pour un complexe (sauf si c'est un réel positif) !

1. On écrit $\delta = x + y\,i$ et on dit qu'il si et seulement si :

$$x^2 - y^2 + 2\,x \times y\,i = \delta^2 = a + b\,i$$

ou encore :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2\,x \times y = b \end{cases}$$

2. Malheureusement ces équations sont en général difficiles à résoudre... il existe heureusement une astuce : l'équation $\delta^2 = a + b\,i$ implique aussi l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = |\delta^2| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$; on en déduit le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2\,x \times y = b \end{cases}$$

3. On résout le système : les deux premières lignes donnent x^2 et y^2 ce qui détermine x et y au signe près, signe que l'on détermine avec la dernière équation.

Exemple(s) 26 :

26.1 Parfois, les racines carrées sont « évidentes » : les racines carrées de -1 dont :

$$\delta_1 = i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -i$$

26.2 Les racines complexes de $z = i$ sont :

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i = e^{i\,\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i = -e^{i\,\frac{\pi}{4}}$$

elles peuvent se retrouver facilement en constatant que $i = e^{i\,\frac{\pi}{2}}$.

26.3 Cherchons les racines carrées complexes de $z = -4 - 10\,i$. Le complexe $\delta = x + y\,i$ est une racine carrée de z si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{29} \\ 2\,x \times y = -10 \end{cases}$$

On en déduit, par addition puis soustraction des deux premières lignes que :

$$x^2 = -2 + \sqrt{29} \quad \text{et} \quad y^2 = 2 + \sqrt{29}$$

d'où

$$x^2 = \pm\sqrt{-2 + \sqrt{29}} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{2 + \sqrt{29}}$$

mais par la troisième ligne du système d'équations, x et y sont de signes opposés donc les deux racines carrées recherchées sont :

$$\delta_1 = \sqrt{\sqrt{29} - 2} - \sqrt{\sqrt{29} + 2}\,i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt{\sqrt{29} - 2} + \sqrt{\sqrt{29} + 2}\,i.$$

4.6.1.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, on peut toujours écrire, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$a \times z^2 + b \times z + c = a \times \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4a \times c - b^2}{4a}.$$

Il vient alors, pour l'équation à l'inconnue complexe z : $a \times z^2 + b \times z + c = 0$.

1. Si $\Delta = b^2 - 4a \times c = 0$ (Δ s'appelle le *discriminant de l'équation*), alors l'équation possède une unique solution :

$$z_0 = -\frac{b}{2a} \text{ (dite solution double)},$$

et l'équation s'écrit :

$$a \times \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation possède deux solutions distinctes

$$\text{(si } \delta \in \mathbb{C} \text{ est une récine cérrée de } \Delta) \; z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Et l'équation s'écrit :

$$a \times (z - z_1) \times (z - z_2) = 0.$$

Remarque(s) 21 :
1. En développant l'expression ci-dessus, on voit que :

$$a \times (z - z_1) \times (z - z_2) = a \times z^2 - (z_1 + z_2) \times z + z_1 \times z_2 = a \times z^2 + b \times z + c,$$

donc

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Lorsque la solution est double les relations sont encore exactes (avec $z_1 = z_2 = z_0$).

2. Si a, b et c sont dans $\mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on peut prendre

$$\delta = i \times \sqrt{-\Delta} \text{ et } -\delta = \overline{\delta},$$

et l'on retrouve les formules :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2\,a}$$

En particulier, $z_1 = \bar{z}_2$.

3. De manière générale, si α est solution de $a \times z^2 + b \times z + c = 0$, alors

$$\overline{\alpha} \text{ est solution de } \overline{a} \times z^2 + \overline{b} \times z + \overline{c} = 0.$$

Exemple(s) 27 :

27.1 Les racines de l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

sont

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = z_1^2$$

on notera :

$$\boxed{j \overset{Not.}{=} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{3}\right).}$$

27.2 Résolvons l'équation :

$$z^2 + (-1 - 3\,i) \times z + 3\,i - 4 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = (-1 - 3\,i)^2 - 4\,(3\,i - 4) = 8 - 6\,i.$$

Cherchons ses racines carrées par la méthode du paragraphe précédent. Le complexe $\delta = x + y\,i$ est racine carrée de Δ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2\,x \times y = -6 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent :

$$x = \pm 3 \quad \text{et} \quad y = \pm 1$$

mais par la troisième équation, x et y sont de signes opposés, donc les racines carrées de Δ sont :

$$\delta_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -3 + i.$$

On en déduit que les racines de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-(-1 - 3\,i) + \delta_1}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-(-1 - 3\,i) + \delta_2}{2} = -1 + 2\,i.$$

4.6.2 Quelques équations d'ordre n.

4.6.2.1 Racines de l'unité

On appelle *unité* le complexe identifié à 1. Le problème qui va nous intéresser est le suivant : étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation :

$$z^n = 1.$$

Les solutions complexes de cette équation s'appellent *racines n-ième de l'unité.* Calculons-les. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

1. *Si $z^n = 1$, alors $z \in \mathbb{U}$.* En effet, $z \neq 0$, il possède un argument noté θ. On a alors :

$$z^n = \left(|z| \times e^{i\times\theta}\right)^n = |z|^n \times e^{i\times n\times\theta} = 1.$$

En prenant les modules, on obtient :

$$|z|^n = 1, \text{ or } |z| > 0 \text{ donc } |z| = 1.$$

2. *Il y a exactement n racines n-ième de l'unité.* En effet, si z est solution de $z^n = 1$, alors on a :

$$n \times \theta - 0 \in 2\pi\mathbb{Z}, \text{ soit } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k \times \pi}{n}.$$

Mais, la fonction $x \mapsto e^{i\times x}$ est 2π-périodique, il reste donc les solutions :

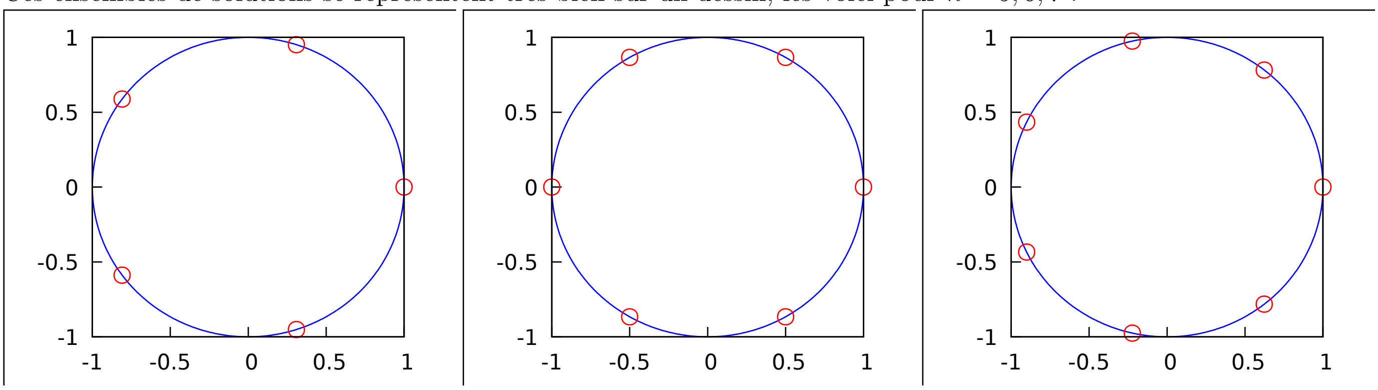
$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ z_k = \exp\left(i \times \frac{2k \times \pi}{n}\right).}$$

3. On note :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\exp\left(i \times \frac{2k \times \pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\},$$

c'est l'ensemble des racines n-ième de l'unité cherché.

Ces ensembles de solutions se représentent très bien sur un dessin, les voici pour $n = 5, 6, 7$:



Algébriquement, on trouve facilement :

Exemple(s) 28 :

28.1
$$\mathbb{U}_1 = \{1\},\ \mathbb{U}_2 = \{1, -1\},\ \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \text{ et } \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\},$$
où l'on rappelle que :
$$j = \exp\left(i \times \frac{2\pi}{3}\right).$$
On a donc : $j^3 = 1$, $\overline{j} = j^2$, $1 + j + j^2 = 0$.

4.6.2.2 Racines n-ième d'un complexe.

Soit maintenant l'équation
$$z^n = a,\ \text{où } a \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{N}^*.$$
($a = 0$ est facile). Soit $\delta \in \mathbb{C}$, tel que $\delta^n = a$ (une solution), alors
$$\{z \in \mathbb{C},\ z^n = a\} = \delta \times \mathbb{U}_n.$$
Comment trouver δ ?
$$\text{Si } a = |a| \times e^{i\times\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ \text{ on peut prendre } \delta = \sqrt[n]{|a|} \times \exp\left(i \times \frac{\theta}{n}\right).$$
Finalement :
$$\boxed{\{z \in \mathbb{C},\ z^n = a\} = \left\{\sqrt[n]{|a|} \times \exp\left(i \times \frac{\theta + 2\,k \times \pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.}$$

Exemple(s) 29 :

29.1 Résolvons l'équation :
$$z^3 = i.$$
On remarque que $i = e^{i\,\frac{\pi}{2}}$. On a donc :
$$S = \left\{\exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + k \times \frac{2\,\pi}{3}\right)\right),\quad k \in [\![0, 2]\!]\right\} = \{e^{i\,\frac{\pi}{6}}, e^{i\,\frac{5\,\pi}{6}}, e^{i\,\frac{9\,\pi}{6}}\}.$$
Il est ici possible d'exprimer ces trois complexes à l'aide de racines (c'est un coup de chance...) :
$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -i\right\}.$$

29.2 Résolvons l'équation :
$$z^4 = -16\,i$$
On remarque que $-16\,i = 2^4\,e^{i\,\frac{3\,\pi}{2}}$. Les solutions sont donc :
$$S = \left\{2 \times \exp\left(i\left(\frac{3\,i\,\pi}{8} + k \times \frac{\pi}{2}\right)\right),\quad k \in [\![0, 3]\!]\right\} = \{2 \times e^{\frac{3\,i\,\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{7\,i\,\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{11\,i\,\pi}{8}}, 2 \times e^{\frac{15\,i\,\pi}{8}}\}.$$

Remarque(s) 22 : En particulier, cette méthode nous donne une autre façon de calculer les racines carrées d'un complexe z. On peut :

a Écrire le complexe z sous forme exponentielle :

$$z = |z| \times e^{i\,\theta}$$

b En déduire que les racines carrées de z sont :

$$\delta_1 = \sqrt{|z|} \times e^{i\,\frac{\theta}{2}} \quad \delta_2 = -\delta_1.$$

Traitons quelques exemples :

1. Parfois, ça se passe bien : les racines carrées de $1 + i = \sqrt{2} \times e^{i\,\pi/4}$ sont :

$$\delta_1 = 2^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{\pi}{8}\,i}, \quad \delta_2 = -\delta_1$$

2. Parfois, la méthode algébrique est mieux adaptée : cherchons de cette façon les racines carrées de :

$$z = -4 - 10\,i.$$

Alors, comme nous l'avions remarqué, un argument de z est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \pi$$

et son module vaut clairement : $|z| = \sqrt{116}$. Les racines carrées de z sont donc :

$$\delta_1 = (116)^{\frac{1}{4}} \times \exp\left(\left(\frac{\arctan\left(\frac{5}{2}\right)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\,i\right), \quad \delta_2 = -\delta_1.$$

4.7 Fonctions réelles à valeurs complexes

Définition 4.7.22 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable si les fonctions :*

$$\mathrm{Re}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{cases}$$

sont dérivables sur I. On note alors :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{Im}(f)'(x)\,i.$$

Remarque(s) 23 :

1. Bien entendu, cette définition s'énonce de même pour les autres notions de régularité que nous avons étudiées (ou nous étudierons) : continuité, dérivable n fois...
2. Notez bien que **nous n'avons pas** (parce que c'est autrement plus compliqué) parlé de fonctions complexes à valeurs complexes. La fonction considérée ici est réelle à valeurs complexe.

Exemple(s) 30 :

30.1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'exemple le plus utile est sans-doute la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \exp(\lambda \times t).$$

Si l'on écrit $\lambda = a + b\,i$ alors :

$$\mathrm{Re}(f)(t) = e^{a\times t} \times \cos(b \times t) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(t) = e^{a\times t} \times \sin(b \times t).$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\mathrm{Re}(f)'(t) = a \times e^{a\times t} \times \cos(b \times t) - b \times e^{a\times t} \times \sin(b \times t)$$

$$\mathrm{Im}(f)'(t) = a \times e^{a\times t} \times \sin(b \times t) + b \times e^{a\times t} \times \cos(b \times t).$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{a\times t} \times (a \times \cos(b \times t) - b \times \sin(b \times t) + (a \times \sin(b \times t) + b \times \cos(b \times t))\,i) \\ &= (a + b\,i) \times e^{a\times t} \times (\cos(b \times t) + \sin(b \times t)\,i) = \lambda \times e^{\lambda \times t}. \end{aligned}$$

On retrouve alors (ou pouvait s'y attendre!) pour $\boxed{\lambda \in \mathbb{C}}$:

$$\boxed{\text{La dérivée de } f(t) = e^{\lambda\times t} \text{ est } f'(t) = \lambda \times e^{\lambda\times t}.}$$

30.2 Plus généralement et presque par le même calcul, si φ est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors la fonction définie sur I par

$$f(t) = \exp(\varphi(t))$$

est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \varphi'(t) \times \exp(\varphi(t)).$$

Enfin, on retrouve les propriétés classiques de dérivabilité des fonctions réelles à valeurs réelles :

Propriété(s) 4.7.15 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $a \times u$ est dérivable sur I de dérivée $a \times u'$
2. $u + v$ est dérivable sur I, de dérivée $u' + v'$
3. $u \times v$ est dérivable sur I, de dérivée $u' \times v + u \times v'$
4. si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, de dérivée :

$$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer les deux points les plus difficile, les troisièmes et quatrièmes. Écrivons

$$u = a + b\,i \quad v = c + d\,i.$$

Alors :

$$u \times v = a \times c - b \times d + (a \times d + b \times c)\,i$$

par le théorèmes généraux sur les fonctions réelles, cette fonction est donc dérivable sur I, de dérivée :

$$\begin{aligned} (u \times v)' &= a' \times c + a \times c' - b' \times d - b \times d' + (a' \times d + a \times d' + b' \times c + b \times c')\,i \\ &= (a' + b'\,i) \times (c + d\,i) + (a + b\,i) \times (c' + d'\,i) = u' \times v + u \times v'. \end{aligned}$$

Déduisons-en 3. Il suffit de remarquer que, par la méthode de la quantité conjuguée

$$\frac{1}{v} = \frac{c - d\,i}{c^2 + d^2}$$

donc par les théorèmes généraux sur les fonctions réelles, $\frac{1}{v}$ puis $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I. Mais ce serait inutilement compliqué d'utiliser cette formule pour calculer la dérivée. On a, si v ne s'annule pas sur I :

$$u = \frac{u}{v} \times v$$

donc par la formule 3 :

$$u' = \left(\frac{u}{v}\right)' \times v + \frac{u}{v} \times v'$$

et l'on en déduit la formule recherchée.

■

Exemple(s) 31 :

31.1 Il est parfois utile de « passer par les complexes » pour obtenir des solutions réelles des équations différentielles. Par exemple, pour trouver une solution particulière de :

$$y'' + 2\,y = e^t \times \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)\,t} + e^{(1-i)\,t}\right)$$

On peut utiliser le principe de superposition. Une solution particulière de :

$$y'' + 2\,y = \frac{1}{2}\,e^{(1+i)\,t}$$

est : $f_0(t) = \frac{1-i}{8}\,e^{(1+i)\,t}$ et une solution particulière de :

$$y'' + 2\,y = \frac{1}{2}\,e^{(1-i)\,t}$$

est : $f_1(t) = \frac{1+i}{8}\,e^{(1-i)\,t}$. On en déduit la solution particulière de l'équation différentielle initiale :

$$\boxed{f_2(t) = f_0(t) + f_1(t) = \frac{e^t}{4}\,(\cos(t) + \sin(t)).}$$

4.8 Opérations sur les complexes et géométrie plane.

4.8.1 Affixes et géométrie du plan

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'. Alors :

1. le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ a pour affixe $z - z'$
2. la distance $M'M$ vaut $|z - z'|$

Soit A, B et C d'affixes respectives a, b et c deux à deux distinctes. Alors :

1. un angle orienté entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est donné par un argument du complexe
$$\frac{c-a}{b-a}.$$
2. $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \mathrm{Re}((c-a) \times \overline{b-a})$.

Il est en particulier facile de vérifier l'alignement ou l'orthogonalité en termes d'affixes :

1. Les points d'affixes a, b et c sont alignés si et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad (a-b) = \lambda.(a-c) \quad \text{ou} \quad \lambda.(a-b) = a-c.$$
En particulier, si les points d'affixes a b et c sont deux à deux distincts, il sont alignés si et seulement si :
$$\boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0}$$
2. Si a, b et c sont les affixes de points A, B et C deux à deux distincts alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si :
$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0}$$

4.8.2 Quelques exemples de transformations du plan

4.8.2.1 Transformations du plan, premiers exemples

Définition 4.8.23 : *Une transformation du plan est une bijection du plan vers lui-même.*

Toutes les application suivantes sont des transformations du plan :

Exemple(s) 32 :

32.1 Soit $b \in \mathbb{C}$, alors la fonction

$$z \mapsto z + b$$

est une translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ où B est le point du plan d'affixe b.

32.2 Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction :

$$z \mapsto k \times (z - b) + b$$

est une homothétie de centre d'affixe b et de rapport k

32.3 Soit θ un réel. Alors la fonction :

$$z \mapsto e^{i\,\theta} \times (z - b) + b$$

est la rotation de centre d'affixe b et d'angle θ.

4.8.2.2 Similitudes du plan

Il existe de nombreuses autres transformations du plan, mais ce sont les exemples venus de la géométrie qui nous intéresseront particulièrement :

Définition 4.8.24 : *Une similitude du plan est une transformation qui conserve les angles non orientés.*

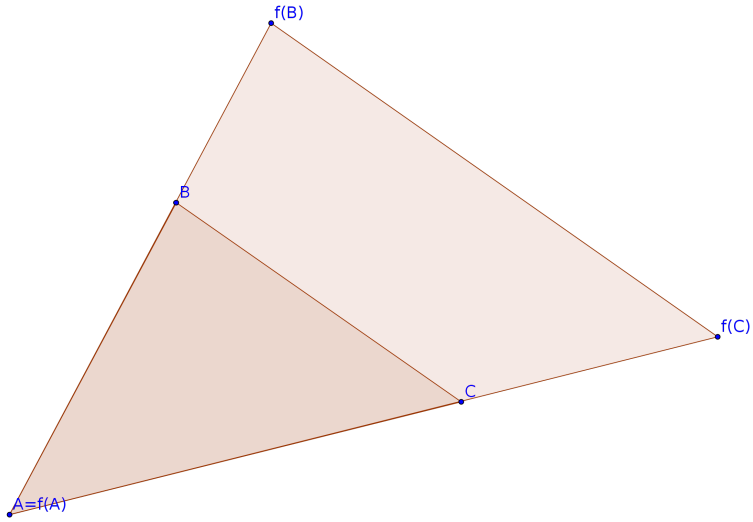
Exemple(s) 33 :

33.1 Tous les exemples considérés au paragraphe précédent sont des similitudes.

33.2 Toutes les symétries orthogonales et centrales sont des similitudes.

Propriété(s) 4.8.16 : Une similitude du plan conserve les rapports de distances.

Démonstration : Après translation, rotation et éventuellement symétrie (il y a exactement deux cas : tous les angles du triangle image ont même orientation ou orientation opposée), la situation géométrique devient



et l'on obtient ainsi le résultat par le théorème de Thalès.

■

En particulier, lors de la preuve, nous avons montré qu'une similitude conserve les angles orientés ou transforment *tous* les angles orientés en leurs opposés. Traitons les deux cas.

4.8.2.3 Similitudes directes du plan

Définition 4.8.25 : *Soit f une transformation du plan. On dit que f est une similitude directe du plan si elle préserve les angles orientés (donc aussi les rapports de distance). En termes d'affixes, pour tous trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives z, z' et z'' :*

$$\frac{f(z')-f(z)}{f(z'')-f(z)}=\frac{z'-z}{z''-z}$$

Remarque(s) 24 :

1. Dans les exemples du paragraphe précédent, tous sont des similitudes directes.
2. Rappelons que l'application

$$z\mapsto\bar{z}$$

est une transformation du plan : la symétrie orthogonale par rapport à l'axe O_x. Ce n'est pas une similitude directe.

Propriété(s) 4.8.17 : Une transformation du plan f est une similitude directe si et seulement si il existe a un complexe non nul et b un complexe tels que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=a\times z+b.$$

Démonstration : La réciproque est un calcul direct. Soit f une similitude directe. Alors pour tout z différent de 0 et 1, on a :

$$\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)} = \frac{z-0}{1-0} = z.$$

On en déduit :

$$f(z) = z \times (f(1)-f(0)) + f(0)$$

et il reste à remarquer que cette formule est aussi vraie pour $z=0$ et $z=1$ et que comme f est injective, $a = f(1)-f(0) \neq 0$.

■

En pratique, c'est souvent de cette façon qu'est donnée une similitude directe dans les énoncés. Pour reconnaître ce qu'elle représente géométriquement, on procède de la façon suivante :

1. On recherche un éventuel **point fixe**, c'est-à-dire, on résout l'équation : $f(z) = z$.
2. Si $a \neq 1$, on trouve $z_0 = \frac{b}{1-a}$ comme point fixe et
$$f(z) = a \times (z - z_0) + z_0$$
si l'on écrit $a = \rho \times e^{i\theta}$, la similitude directe f est donc la composée d'une rotation de centre d'affixe z_0 et d'angle θ et d'une homothétie de centre d'affixe z_0 et de rapport ρ.
3. Si $a = 1$, il s'agit de la translation de vecteur d'affixe b.

Exemple(s) 34 :

34.1 La transformation donnée par la formule :

$$f(z) = (1+i) \times z + 1$$

est la composée de la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de centre d'affixe i et de rapport $\sqrt{2}$.

4.8.2.4 Similitudes indirectes du plan

Définition 4.8.26 : *Soit f une transformation du plan. On dit que f est une similitude indirecte du plan si elle transforme tous les angles orientés en leurs opposés (et donc préserve aussi les rapports de distance). En termes d'affixes, pour tous trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives z, z' et z'' :*

$$\frac{f(z')-f(z)}{f(z'')-f(z)} = \overline{\left(\frac{z'-z}{z''-z}\right)}$$

Exemple(s) 35 :

35.1 La transformation :

$$z \mapsto e^{i\theta} \times \bar{z}$$

est une similitude indirecte, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

35.2 Plus généralement, la transformation

$$z \mapsto e^{i\theta} \times \overline{z-b} + b$$

est une similitude indirecte, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par le point d'affixe b et faisant un angle de $\theta/2$ avec l'axe O_x.

Avec la même preuve que dans le cas des similitudes directes, on a :

Propriété(s) 4.8.18 : Une transformation du plan f est une similitude directe si et seulement si il existe a un complexe non nul et b un complexe tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a \times \bar{z} + b.$$

Comme pour les similitudes directes, c'est souvent de cette façon que sont données les similitudes indirectes dans les exercices. Voici comment reconnaître ce qu'elles représentent géométriquement :

1. On recherche d'éventuels points fixes, c'est-à-dire les z tels que $f(z) = z$. Un tel z est solution de l'équation :

$$(1 - |a|^2) \times z = b + a \times \bar{b}.$$

2. Si $|a| = 1$ et $b = 0$ alors si $a = e^{i\,\theta}$, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

3. Si $|a| = 1$ et $b \neq 0$ alors si $a = e^{i\,\theta}$, f est la composée de la translation de vecteur d'affixe b et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times y = 0.$$

4. Si $|a| \neq 1$ alors f admet un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{b + a \times \bar{b}}{1 - |a|^2}$$

et l'on peut réécrire $f(z) = z_0 + a \times \overline{z - z_0}$. Donc si l'on note M le point d'affixe z_0 et $a = \rho \times e^{i\,\theta}$, f est la composée de la symétrie par rapport à la droite passant par M et faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe O_x et d'une homothétie de centre M et de rapport ρ.

Chapitre 5

Calculs algébriques

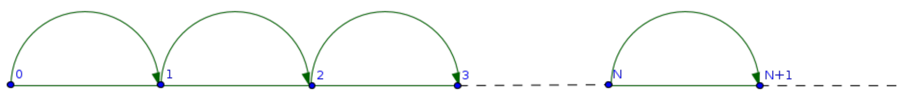
5.1 Les raisonnements par récurrence

Commençons en parlant d'un raisonnement essentiel en mathématiques : les raisonnements par récurrence.

5.1.1 Récurrence simple

Le raisonnement par récurrence simple est basé sur le principe suivant. Considérons une proposition $P(n)$ dont on veut montrer la véracité pour tout entier naturel n. Alors il suffit de :

1. La montrer pour $n = 0$ (on parle *d'initialisation* de la récurrence) (notez qu'on pourrait aussi commencer en un entier k quelconque mais qu'alors la propriété ne serait prouvée que pour $n \geqslant k$)
2. De montrer que si pour un entier naturel N, $P(N)$ est vraie, alors $P(N+1)$ aussi (on parle *d'hérédité* de la récurrence)



Exemple(s) 36 :

36.1 Montrons que (inégalité de Bernoulli) :

$$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n \times x.$$

Pour ceci, on pose :

$$\mathcal{P}(n) : \ \forall x \geqslant -1, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n \times x.$$

(a) *Initialisation :* prenons $n = 0$. Alors, pour $x \geqslant -1$:

$$(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0 \times x.$$

(b) *Hérédité :* supposons, pour N un entier naturel fixé, que $\mathcal{P}(N)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(N+1)$. Soit x un réel plus grand que -1. On a :

$$(1+x)^N \geqslant 1 + N \times x \text{ (hypothèse de récurrence)} \quad \text{et} \quad 1 + x \geqslant 0 \ (x \geqslant -1).$$

Ceci nous donne, en multipliant la première inégalité par le réel positif $1 + x$:

$$(1+x)^{N+1} \geqslant (1 + N \times x) \times (1+x) = 1 + (N+1) \times x + N \times x^2 \geqslant 1 + (N+1) \times x \quad (x^2 \geqslant 0).$$

Concluons : par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n ; donc :

$$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n \times x.$$

36.2 Il est possible d'initialiser une récurrence pour un entier différent de 0 ; par exemple, montrons que toute somme supérieure à 12 peut être payée seulement avec des pièces de 4 et de 5 :

$$\forall n \geqslant 12, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad 12 = 4 \times a + 5 \times b$$

(a) *Initialisation :* prenons $n = 12$. Alors $12 = 4 \times 3$.

(b) *Hérédité :* supposons, pour N un entier naturel fixé supérieur à 12, la propriété soit vraie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$N = 4 \times a + 5 \times b$$

Il y a alors deux cas :

i. Si $a \neq 0$ alors :
$$N + 1 = 4 \times (a-1) + 5 \times (b+1)$$

ii. Si $a = 0$ alors, comme $N \geqslant 12$, $b \geqslant 3$ donc :

$$N + 1 = 5 \times b + 1 = 5 \times (b-3) + 4 \times 4$$

Concluons : par principe de récurrence, le propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 12$.

36.3 Traitons maintenant un exemple de mauvaise utilisation : montrons (ce qui est évidemment faux !) que n points du plan sont toujours alignés.

(a) C'est clairement vrai pour $n = 0, 1$ et 2

(b) Si je considère $N+1$ points, notés $A_0, A_1, \ldots, A_N$ alors par hypothèse de récurrence $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ sont alignés et $A_1, \ldots, A_N$ aussi donc $A_0, A_1, \ldots, A_N$ sont sur la même droite : celle qui passe par $A_1, \ldots, A_{N-1}$; ils sont alignés !

Sauriez-vous trouver l'erreur ?

5.1.2 Récurrence double

Le raisonnement par récurrence double est une conséquence immédiate du raisonnement par récurrence simple ; son principe est le suivant : pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n, il suffit de montrer que :

1. $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais (*initialisation*)
2. et que si, pour tout entier N, la véracité de $P(N)$ et $P(N+1)$ entraîne celle de $P(N+2)$ (*hérédité*)

Exemple(s) 37 :

37.1 Soit x un réel tel que $x + 1/x \in \mathbb{Z}$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

(a) *initialisation :* le résultat est vrai pour $n = 0$ car $2 \in \mathbb{Z}$ et pour $n = 1$ par hypothèse

(b) *hérédité :* supposons le résultat vrai pour N et pour $N+1$. Alors :

$$\left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} + x^N + \frac{1}{x^N}$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} = \left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) - x^N + \frac{1}{x^N} \in \mathbb{Z}.$$

On conclut alors que la propriété est vraie pour tout n par principe de récurrence double.

37.2 On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On pose :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

(a) *initialisation :* le résultat est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (faites le calcul !)

(b) *hérédité :* supposons le résultat vrai pour N et pour $N + 1$. Alors (hypothèse de récurrence) :

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\varphi^N - \psi^N\right) \quad \text{et} \quad u_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\varphi^{N+1} - \psi^{N+1}\right).$$

On en déduit :

$$u_{N+2} = u_{N+1} + u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\varphi^N \times (1+\varphi) - \psi^N \times (1+\psi)\right)$$

mais $1 + \varphi = \varphi^2$ et $1 + \psi = \psi^2$ (faites le calcul !) donc :

$$u_{N+2} = u_{N+1} + u_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\varphi^{N+2} - \psi^{N+2}\right)$$

et on conclut : par principe de récurrence double, la propriété est donc vraie pour tout n c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

Notez que si la vérification de la formule est assez facile ici, il serait intéressant de trouver d'où vient l'idée de celle-ci...

5.1.3 Récurrence forte

Le raisonnement par récurrence forte, quand à lui, repose sur le principe que, pour montrer $P(n)$ pour tout n, il suffit de :

1. Montrer $P(0)$ (*initialisation*)
2. Montrer que si, pour tout entier N, la propriété est vraie pour tout entier k inférieur à N, alors elle l'est aussi pour $N + 1$ (hérédité)

Exemple(s) 38 :

38.1 Montrons que tout entier naturel supérieur à 2 admet un diviseur premier.

(a) *initialisation :* si $n = 2$ alors 2 est un nombre premier qui divise 2

(b) *hérédité :* soit N un entier naturel et supposons que pour tout entier k inférieur ou égal à N, k admette un diviseur premier. Alors, soit $N + 1$ est un nombre premier et c'est terminé, soit il s'écrit comme produit de deux entiers naturels strictement inférieurs différents de 1 : $N + 1 = n_1 \times n_2$, $1 < n_1 < N + 1$, $1 < n_2 < N + 1$ et alors par hypothèse de récurrence appliquée à n_1, il est divisible par un nombre premier donc $N + 1$ aussi.

38.2 Montrons d'une autre façon que :

$$\forall n \geqslant 12, \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad n = 4 \times a + 5 \times b.$$

(a) *initialisation :* on a :

$$12 = 4 \times 3, \quad 13 = 4 \times 2 + 5, \quad 14 = 4 + 5 \times 2, \quad 15 = 5 \times 3$$

(b) *hérédité :* soit $N \geqslant 16$ un entier naturel et supposons que pour tout entier k inférieur ou égal à N et supérieur à 12, la propriété soit vraie. C'est en particulier vrai pour $N-4 \geqslant 12$:

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad N-4 = 4\times a + 5\times b$$

donc : $N = 4\times(a+1)+5\times b$.

La propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 12$ par principe de récurrence forte.

5.2 Sommes et produits :

5.2.1 Définition, premiers exemples

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensemble. On appelle produit cartésien de cette famille l'ensemble :

$$\boxed{\prod_{i\in I} E_i \overset{Not.}{=} \left\{ x :\ I \to \bigcup_{i\in I} E_i,\ \forall i \in I, \quad x(i) \in E_i \right\}.}$$

Un élément de ce produit cartésien est appelé famille et sera noté $(x_i)_{i\in I}$. Si $E_i = E$ pour tout i, on notera plus simplement cet ensemble E^I. Un cas particulier qui nous intéressera sera celui où $I = \mathbb{N}$ et E_i est l'ensemble des réels (resp. des complexes). On parlera dans ce cas de suite réelle (resp. complexe), que l'on notera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).

Définition 5.2.27 : *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On définit, pour tout entier n :*

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} x_k$$

par les formules de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{0} x_k = x_0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{0} x_k = x_0, \quad \prod_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \times x_{n+1}.$$

Remarque(s) 25 : 1. Il est parfois aisé, pour bien se représenter les sommes et les produits, de noter :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} x_k = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n.$$

Attention cependant ! Ces notations utilisant des pointillés sont très dangereuses et peuvent faire faire des erreurs (pensez à la récurrence fausse du paragraphe précédent)...

2. Soit I un ensemble fini non vide à n éléments. Numérotons ses éléments par les entiers compris entre 0 et $n-1$, c'est-à-dire :

$$I = \{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\}.$$

Alors on définit, pour $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes indexés par I

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_{i_k}, \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} x_i = \prod_{k=0}^{n-1} x_{i_k}.$$

Notez que cette définition ne dépend pas de l'ordre employé dans la numérotation de I.

3. Par la définition précédente, si $I = [\![k, k+n]\!]$, où k et n sont deux entiers naturels, on a :

$$\sum_{i=k}^{k+n} x_i \overset{Not.}{=} \sum_{i \in [\![k,k+n]\!]} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_{i-k}$$

c'est ce qu'on appelle un *changement d'indices* ; il en existe d'autres...

Traitons quelques exemples :

Exemple(s) 39 :

39.1 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

39.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)}$$

En effet,comme la suite est arithmétique on remarque facilement que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$: $u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$ donc en effectuant le changement d'indices $k \leftrightarrow n-k$:

$$2 \times \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + u_n) = (n+1) \times (u_0 + u_n)$$

39.3 En particulier (somme arithmétique) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \times (n+1)}{2}.}$$

39.4 Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 1$. On a (somme géométrique) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.}$$

En effet :

$$(1-a) \times \sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}.$$

39.5 On en déduit immédiatement que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r \neq 1$ alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{r^{n+1} - 1}{r-1} \times v_0.}$$

39.6 En particulier, si $\zeta \in \mathbb{U}_n$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0.$$

39.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a (formule de Bernoulli) :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}.}$$

En effet :

$$(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \times b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} = a^n - b^n.$$

39.8 Il existe un type de somme particulièrement facile à calculer : les sommes dites télescopiques : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1}-v_k)=v_{n+1}-v_0.$$

Par exemple, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

39.9 Les sommes télescopiques ont aussi leur tenant pour les produits ; si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes non nuls, alors :

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{v_{k+1}}{v_k}=\frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

Par exemple, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=n+1.$$

39.10 La notation indicielle de la somme est particulièrement adaptée au produit de sommes : en effet (il suffit , pour s'en rappeler, de se souvenir de la distributivité du produit sur la somme) :

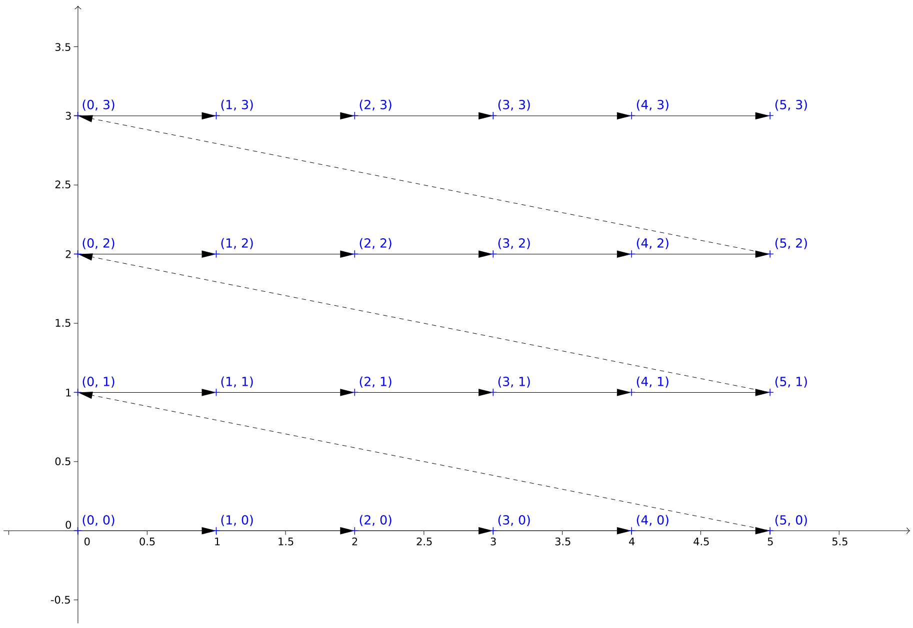
$$\boxed{\left(\sum_{i\in I}x_i\right)\times\left(\sum_{j\in J}y_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}x_i\times y_j.}$$

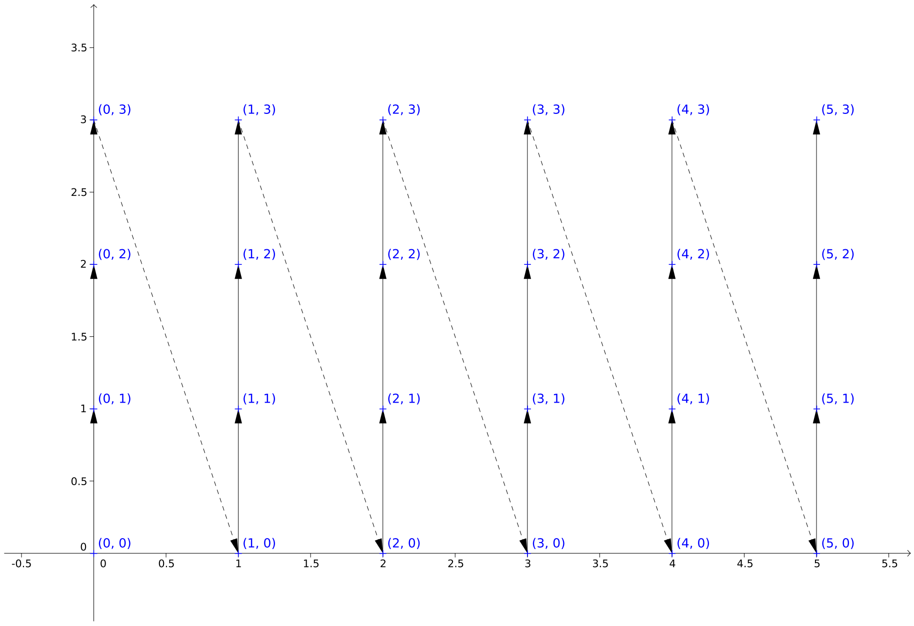
5.2.2 Sommes doubles

Le dernier exemple nous suggère naturellement d'étudier les sommes dites *doubles*. Le cas le plus simple est le suivant :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]}a_{i,j}.$$

Il exista alors deux façons d'effectuer la somme, par lignes, ou par colonnes :





Ce qui donne, en utilisant ces deux numérotations : :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{i,j}.}$$

Exemple(s) 40 :

40.1 On a :

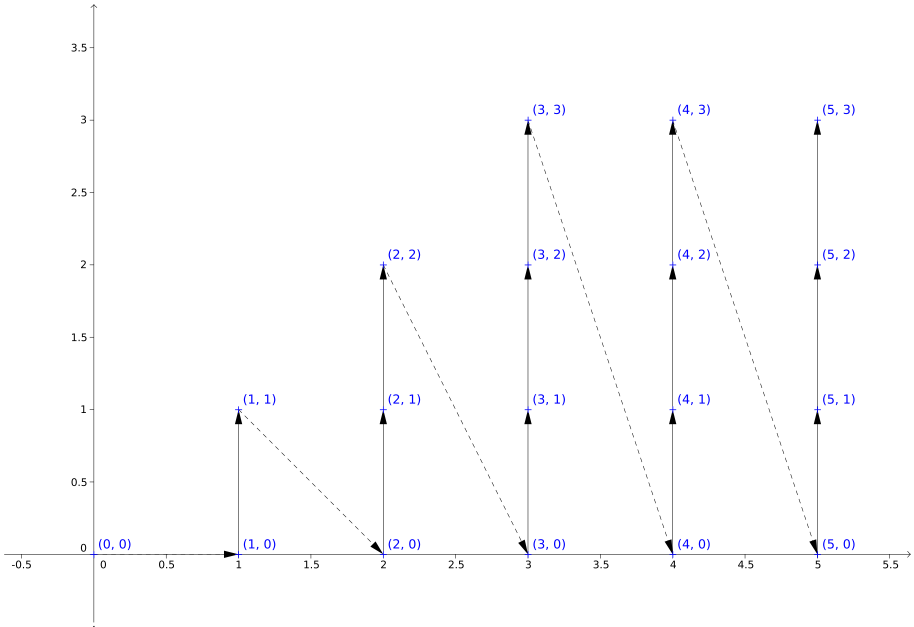
$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} (i+j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i+j) = \sum_{i=0}^{n}(m+1)\times\left(i+\frac{m}{2}\right) = \frac{(n+1)\times(m+1)\times(n+m)}{2}.$$

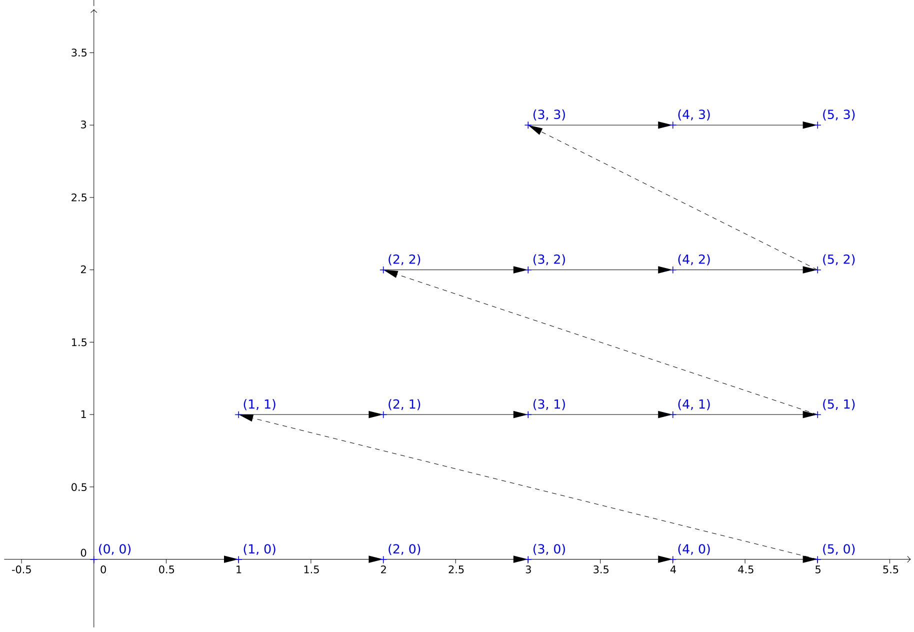
40.2 On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} i\times j = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m} j\right) = \frac{n\times m\times(n+1)\times(m+1)}{4}.$$

Un autre type de sommes doubles que l'on rencontre souvent est dit « triangulaire » :

$$\sum_{\substack{j\leqslant i\\(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]}} a_{i,j}$$





On peut alors, comme pour le cas des sommes précédentes, procéder par lignes ou par colonnes (par convention, la dernière somme est nulle si $j > n$) :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\max(i,m)} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \leqslant i \\ (i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

Souvent, $m = n$ dans une telle somme et la formule se simplifie alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \leqslant i \\ (i,j) \in [\![0,n]\!]^2}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.}$$

Exemple(s) 41 :

41.1 Parfois, intervertir une somme triangulaire facilite grandement les calculs :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}1=n.$$

41.2 Parfois, une somme triangulaire apparaît naturellement lors d'un calcul :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\min(i,j)=\sum_{\substack{j\leqslant i\\(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}}j+\sum_{\substack{i<j\\(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}}i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\times j+\sum_{i=1}^{n}(n-i)\times i=(2\,n+1)\times\frac{n\times(n+1)}{2}-\frac{n\times(n+1)\times(2\,n+1)}{3}=\frac{n\times(n+1)\times(2\,n+1)}{6}.$$

5.3 Formule du binôme de Newton

Terminons cette partie par la formule du binôme de Newton. Commençons par rappeler que les coefficients binomiaux sont définis par, pour $p\leqslant n$ deux entiers naturels :

$$\boxed{\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!\times(n-p)!}.}$$

Notez que, souvent, si $p>n$, on dira que $\binom{n}{p}=0$. Retenir la formule de définition est très importante, mais il existe une méthode pour calculer ces coefficients : le *triangle de Pascal*, dont la justification est donnée par la formule éponyme, pour k et n des entiers strictement positifs (faites le calcul !) :

$$\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.}$$

cette formule, couplée à la remarque que $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$ permet de calculer les coefficients binomiaux ligne par ligne (et c'est exactement ce dont on aura besoin pour la formule du binôme de Newton) :

$n\backslash k$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Théorème 5.3.3 (Formule du binôme de Newton) : *Soit* $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ *et* $n\in\mathbb{N}$*. Alors :*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\times b^{n-k}.$$

Démonstration : Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. Montrons la formule par récurrence sur n.

1. *initialisation* : si $n=0$, on a :

$$(a+b)^0=1\quad\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k\times b^{0-k}=\binom{0}{0}a^0\times b^{0-0}=1.$$

2. *hérédité* : supposons que, pour N un entier naturel fixé :

$$(a+b)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k\times b^{N-k}.$$

Alors :

$$(a+b)^{N+1} = (a+b) \times \left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N-k} \right) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{k+1} \times b^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k}.$$

Donc, en effectuant le changement de variables $k' = k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(a+b)^{N+1} &= \sum_{k'=1}^{N+1} \binom{N}{k'-1} a^{k'} \times b^{N+1-k'} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k} \\ &= a^{N+1} + b^{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right) a^k \times b^{N+1-k}.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la formule du triangle de Pascal pour conclure.

■

Exemple(s) 42 :

42.1 On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Voyons maintenant quelques applications ; il est possible, grâce au binôme de Newton et aux formules d'Euler d'obtenir des formules de trigonométrie :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La **formule de Moivre** :

$$\cos(n \times \theta) + \sin(n \times \theta)\, i = e^{i\, n \times \theta} = (\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i)^n$$

permet, en développant l'expression de droite grâce au binôme de Newton, d'exprimer $\cos(n\times\theta)$ et $\sin(n\times\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Par exemple :

$$(\cos(\theta)+\sin(\theta)\, i)^5 = \cos^5(\theta)+5\, i\, \cos^4(\theta)\times\sin(\theta)-10\, \cos^3(\theta)\times\sin^2(\theta)-10\, i\, \cos^2(\theta)\times\sin^3(\theta)+5\, \cos(\theta)\times\sin^4(\theta)+i\, \sin^5(\theta)$$

On en déduit :

$$\begin{cases}\cos(5\,\theta) = \cos^5(\theta) - 10\, \cos^3(\theta) \times \sin^2(\theta) + 5\, \cos(\theta) \times \sin^4(\theta) \\ \sin(5\,\theta) = 5\, \cos^4(\theta) \times \sin(\theta) - 10\, \cos^2(\theta) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta).\end{cases}$$

Remarquez que grâce à la formule $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, il est possible pour ces formules (et c'est toujours les cas pour le cosinus) d'exprimer le cosinus uniquement à l'aide de cosinus et le sinus seulement à l'aide de sinus :

$$\begin{cases}\cos(5\,\theta) = 16\, \cos^5(\theta) - 20\, \cos^3(\theta) + 5\, \cos(\theta) \\ \sin(5\,\theta) = 16\, \sin^5(\theta) - 20\, \sin^3(\theta) + 5\, \sin(\theta).\end{cases}$$

2. Inversement, on peut **linéariser** les puissances de cosinus et de sinus, c'est-à-dire les exprimer à l'aide de cosinus et sinus sans puissances ; par exemple :

$$\cos(\theta)^4 = \left(\frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i\,4\,\theta} + e^{-i\,4\,\theta}}{2} + 4\,\frac{e^{i\,2\,\theta} + e^{-i\,2\,\theta}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\,(\cos(4\,\theta) + 4\, \cos(2\,\theta) + 3),$$

$$\sin(\theta)^4 = \left(\frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\,i}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i\,4\,\theta} + e^{-i\,4\,\theta}}{2} - 4\,\frac{e^{i\,2\,\theta} + e^{-i\,2\,\theta}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\,(\cos(4\,\theta) - 4\, \cos(2\,\theta) + 3).$$

Chapitre 6

Calculs de primitives :

6.1 Définition, premiers exemples

Définition 6.1.28 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f une fonction $F: I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que :*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque(s) 26 :

1. Une fonction f n'admet jamais une seule primitive, en effet, si F est un primitive de f alors pour toute constante $k \in \mathbb{K}$, la fonction $F + k$ est aussi une primitive de f.
2. Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f, alors $(F - G)' = 0$ donc comme I est un intervalle, il existe une constante k telle que : $F = G + k$ sur I.
3. Les deux précédentes remarques se résument à : si F est une primitive de f alors l'ensemble des primitives de f est :
$$\boxed{\{F + k, \quad k \in \mathbb{K}\}.}$$
4. Il est possible que certains énoncés demandent de trouver des primitives sur une réunion d'intervalles E ; dans ce cas, il s'agit de chercher une primitive sur chaque intervalle. Attention cependant ! Dans ce cas, l'ensemble des primitives est différent que si il s'agissait d'un intervalle ; par exemple, l'ensemble des primitives de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est :
$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln(x) + k_1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(-x) + k_2 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases} \quad , \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple(s) 43 :

43.1 On a des primitives célèbres à bien connaître (F désigne *une* primitive de f sur chaque intervalle où la fonction f est définie) :

$f(x)$	$F(x)$
x^α ($\alpha \neq -1$)	$x^{\alpha+1}/(\alpha + 1)$
$1/x$	$\ln(\lvert x \rvert)$

La première formule est fondamentale, elle contient de nombreuses primitives connues, par exemple, on peut en déduire que sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$, si $n \neq 1$, une primitive de $f(x) = 1/x^n$ est :

$$F(x) = \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

De même, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est :

$$F(x) = \frac{2}{3} \times x^{3/2}.$$

43.2 Les même formules sont vraies avec un décalage : si a est une constante, *une* primitive de f sur chaque intervalle où la fonction f est définie est :

$f(x)$	$F(x)$
$(x+a)^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$(x+a)^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/(x+a)$	$\ln(\lvert x+a \rvert)$

Propriété(s) 6.1.19 : Soit F une primitive de f et G une primitive de g sur un intervalle I et $k \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$
2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$.

Exemple(s) 44 :

44.1 Une primitive sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$$

est la fonction :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{6\,x^6} + \frac{1}{4\,x^4} - \frac{1}{2\,x^2} - \ln(|x|).}$$

44.2 Cherchons une primitive sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Écrite comme ceci, il est difficile de trouver une primitive de f. Pour simplifier, il est possible de *décomposer cette fraction en éléments simples* :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

et l'on en déduit une primitive de f :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|).}$$

Nous reviendrons ultérieurement sur cette idée de décomposition.

6.2 Méthodes directes

6.2.1 Linéarisation

Commençons par remarquer que les fonctions suivantes f ont pour primitives F sur $\mathbb{R}$:

$f(x)$	$F(x)$
$e^{\lambda \times x}$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$	$e^{\lambda \times x}/\lambda$
$\cos(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\sin(\omega \times x)/\omega$
$\sin(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$-\cos(\omega \times x)/\omega$
$\cosh(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\sinh(\omega \times x)/\omega$
$\sinh(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\cosh(\omega \times x)/\omega$

Il est alors possible, à partir de ces formules, d'obtenir une primitive de n'importe quelle somme ou produit de ces fonctions. La méthode est la suivante :

1. On linéarise l'expression grâce que formules d'Euler ou la définition,
2. on trouve une primitive de la fonction linéarisée grâce aux formules que l'on vient de voir et éventuellement on travaille un peu pour faire apparaître des fonctions réelles.

Exemple(s) 45 :

45.1 Rappelons-nous que par linéarisation :

$$\cos(x)^4 = \frac{1}{8}\,(\cos(4\,x) + 4\,\cos(2\,x) + 3),$$

une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)^4$ est donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{32}\,\sin(4\,x) + \frac{1}{4}\,\sin(2\,x) + \frac{3}{8}\,x.}$$

45.2 Considérons maintenant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) \times e^x$: on commence en linéarisant :

(a) $f(x) = \cos(x) \times e^x = \frac{1}{2}\,(e^{(1+i)\,x} + e^{(1-i)\,x})$

(b) une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2\,(1+i)}\,e^{(1+i)\,x} + \frac{1}{2\,(1-i)}e^{(1-i)\,x} = \boxed{e^x \times \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}.}$$

45.3 Avec la même méthode, on peut montrer qu'une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cosh(x) \times \cos(x)$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\,(\sin(x) \times \cosh(x) + \cos(x) \times \sinh(x)).}$$

6.2.2 Repérer des dérivées de fonctions composées

Cette méthode permet parfois de résoudre très facilement des exercices qui seraient sinon très techniques.

Propriété(s) 6.2.20 : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u: I \to J$ et $v: J \to \mathbb{R}$ deux fonction dérivables sur leur ensemble de définition. Alors une primitive de la fonction définie sur I par :

$$f(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

est la fonction définie sur I par :

$$F(x) = v(u(x)).$$

Exemple(s) 46 :

46.1 Deux cas particulier que nous utiliserons fréquemment sont donnés par :

$$(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}, \quad \ln(|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

46.2 Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3(x) \times \sin^6(x) = \cos(x) \times \sin^6(x) - \cos(x) \times \sin^8(x)$$

est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = \frac{(\sin(x))^7}{7} - \frac{(\sin(x))^9}{9}.}$$

Plus généralement, si l'on cherche une primitive d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^i(x) \times \sin^j(x)$ alors, en utilisant la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

(a) si i est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en $\sin(x)$

(b) si j est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en $\cos(x)$

Il ne faut donc surtout pas linéariser lorsqu'on cherche une primitive d'une telle fonction !

46.3 Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2\,x}{x^2+1}$$

est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$ Plus généralement, il est bon de remarquer qu'une primitive de la fonction définie sur par :

$$f(x) = \frac{2\,a \times x + b}{a\,x^2 + b\,x + c}$$

est sur tout intervalle de son ensemble de définition la fonction :

$$F(x) = \ln(|a\,x^2 + b\,x + c|).$$

46.4 Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

est le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2\,(1+x^2)}.}$$

46.5 Une primitive de la fonction tangente :

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

est, sur tout intervalle de son ensemble de définition :

$$\boxed{F(x) = -\ln(|\cos(x)|).}$$

6.2.3 Quelques fractions rationnelles

Commençons cette partie en rappelant la primitive :

$f(x)$	$F(x)$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x)$

Nous allons dans la suite utiliser cette primitive, en plus de certaines autres primitives que nous avons rencontrées pour calculer des primitives de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a \times x + b}$$

Suivant le signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4\,b$, il y a deux cas :

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $x^2 + a \times x + b = 0$ a deux racines distinctes : x_1 et x_2 et l'on peut écrire :

$$x^2 + a \times x + b = (x - x_1) \times (x - x_2).$$

il est alors possible d'écrire la **décomposition en éléments simples :** (à savoir retrouver sur les exemples et non à apprendre par cœur)

$$\frac{1}{x^2 + a \times x + b} = \frac{1}{(x - x_1) \times (x - x_2)} = \frac{\frac{1}{x_1 - x_2}}{x - x_1} + \frac{\frac{1}{x_2 - x_1}}{x - x_2}$$

On en déduit qu'une primitive de f est :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} \times (\ln(|x - x_1|) - \ln(|x - x_2|)).}$$

2. Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine double x_1 et l'on peut écrire :

$$\frac{1}{x^2 + a \times x + b} = \frac{1}{(x - x_1)^2}$$

il s'agit alors de reconnaître la dérivée d'une fonction composée. On en déduit la primitive :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x - x_1}.}$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, il faut travailler un peu pour se ramener à la dérivée d'une fonction composée ; on a :

$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\, x + \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1}$$

On en déduit la primitive (penser $\arctan(u)' = \frac{u'}{1+u^2}$)

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\, x + \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\right).}$$

Encore une fois, c'est la méthode plus que le résultat qu'il faut retenir ici.

Traitons quelques exemples :

Exemple(s) 47 :

47.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3\,x + 2} = \frac{1}{(x-1) \times (x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \ln(|x - 2|) - \ln(|x - 1|).$$

47.2 Il faut faire bien attention à se ramener à ce qu'on sait faire s'il y a une constante au numérateur ou devant le x^2 au dénominateur :

$$f(x) = \frac{2}{3\,x^2 + 6\,x + 3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x^2 + 2\,x + 1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(x+1)^2}.$$

La fonction f admet donc pour primitive le fonction :

$$F(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{x+1}.$$

47.3 Enfin, une primitive de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

On peut prolonger la méthode un peu ; il est possible en utilisant les résultats des deux paragraphes précédents de calculer une primitive d'une fonction du type :

$$f(x) = \frac{c\,x + d}{x^2 + a\,x + b}.$$

Il faut d'abord faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$f(x) = \frac{c\,x + d}{x^2 + a\,x + b} = \frac{c}{2} \times \frac{2\,x + a}{x^2 + a\,x + b} + \left(d - \frac{a \times c}{2}\right) \times \frac{1}{x^2 + a\,x + b}.$$

Puis de remarquer que l'on sait calculer une primitive des deux fonctions ; la première est un logarithme, la deuxième grâce à la méthode que l'on vient de voir.

Exemple(s) 48 :

48.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2\,x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

est la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x).$$

48.2 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

6.3 Méthodes intégrales

6.3.1 Notation intégrale

Dans la suite du paragraphe, on admettra que, sur un intervalle I, **toute fonction continue admet une primitive**.

Définition 6.3.29 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tour $c \in I$, on note pour tout x de l'intervalle I :*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

l'unique primitive de f qui s'annule en c.

Remarque(s) 27 : 1. Nous verrons dans un paragraphe futur que (ce qui est très loin d'être évident) cette notation est reliée à un calcul d'aire ; plus précisément, la quantité : $\int_c^d f(t)\,dt$ désigne, si $c \leqslant d$ sont deux réels de l'intervalle I l'aire (orientée) comprise entre l'axe O_x et la courbe de f.

2. Une telle primitive est bien-sûr dérivable, mais il y a plus, comme f est continue, sa dérivée est continue. On appelle une telle fonction une **fonction de classe $\mathcal{C}^1$.**
3. Le réel c importe peu si l'on cherche à calculer **une** primitive : changer c en un autre réel de l'intervalle revient à ajouter une constante à la primitive que nous sommes en train de calculer.
4. Si a et b sont deux réels d'un intervalle I et F est un primitive quelconque de f alors ;

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a).$$

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la compatibilité des primitives avec la somme et le produit par une constante.

Propriété(s) 6.3.21 : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I. Soit k une constante. alors, pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_a^b k \times f(t)\,\mathrm{d}t = k \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.3.2 Intégration par parties

Proposition 6.3.5 : *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de l'intervalle I :*

$$\int_a^b u'(t) \times v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t) \times v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Il s'agit d'une application directe de la formule $u' \times v = (u \times v)' - u \times v'$.

■

Exemple(s) 49 :

49.1 Calculons une primitive de la fonction logarithme par intégration par parties :

$$\int_c^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t \times \ln(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 1\,\mathrm{d}t = x \times \ln(x) - x + C.$$

une primitive de la fonction logarithme est donc la fonction :

$$\boxed{F(x) = x \times \ln(x) - x.}$$

49.2 Calculons une primitive de la fonction arc-tangente par intégration par parties :

$$\int_c^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t \times \arctan(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x \times \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Une primitive de la fonction arc-tangente est donc la fonction :

$$\boxed{F(x) = x \times \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$$

49.3 Une primitive de la fonction arc-sinus sur $]-1,1[$ se calcule aussi par intégration par parties :

$$\int_c^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t = [t \times \arcsin(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{t}{\sqrt{1-t^t}}\,\mathrm{d}t = x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction arc-sinus est donc la fonction :

$$\boxed{F(x) = x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.}$$

49.4 Enfin, il est possible de faire plusieurs intégrations par parties de suite ; par exemple, si l'on cherche à calculer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \times e^x$:

$$\int_c^x t^2 \times e^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2 \times e^t\right]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 2\,t \times e^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2 \times e^t\right]_{t=c}^{t=x} - \left[2\,t \times e^t\right]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x 2\,e^t\,\mathrm{d}t = (x^2 - 2\,x + 2) \times e^x + C.$$

6.3.3 Changements de variables

6.3.3.1 Le théorème, premiers exemples

Théorème 6.3.4 (changement de variables) : *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur J et $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour tous a et b éléments de I :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f alors la fonction G définie sur I par :

$$G(t) = F(\varphi(t))$$

est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$ car elle est dérivable et par la formule de dérivation des composées :

$$G'(t) = \varphi'(t) \times F'(\varphi(t)).$$

On en déduit :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

Remarque(s) 28 : 1. Il est possible de retenir cette formule plus facilement comme une formule de changements de variables ; si l'on note $s = \varphi$ (et qu'on le pense comme une nouvelle variable) la formule se réécrit :

$$\int_{s(a)}^{s(b)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit pour l'appliquer de penser à la règle : $\boxed{\mathrm{d}s = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$ et de ne pas oublier de changer les bornes.

Exemple(s) 50 :

50.1 Calculons une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}.$$

On a :

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{e^t}{1+e^{2\,t}}\,\mathrm{d}t \underset{s=e^t}{=} \int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = [\arctan(s)]_{s=e^c}^{s=e^x} = \arctan(e^x) + C$$

50.2 Calculons maintenant une primitive de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sin(x)},$$

sur l'intervalle $]0, \pi[$. On a :

$$\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{\sin(t)}{1-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \underset{s=\cos(t)}{=} \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) + C.$$

50.3 Attention à l'ensemble de définition du changement de variables ! Si l'on cherche à calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$h(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$$

une façon de procéder est d'écrire :

$$\int_c^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)} = \int_c^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t) + 2\,\sin^2(t)} = \int_c^x \frac{1}{1+2\,\tan^2(t)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \underset{s=\tan(t)}{=} \int_{\tan(c)}^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}s}{1+2\,s^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\tan(c)}^{\tan(x)} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan(\sqrt{2}\,\tan(x)) + C.$$

La primitive trouvée n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$! Le problème vient du fait que la fonction tan n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Le calcul que nous avons fait n'est valable que sur tout intervalle de la forme :

$$\left]-\frac{\pi}{2} + n\times\pi, \frac{\pi}{2} + n\times\pi\right[, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(à la lisière du programme) il est cependant possible de trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h à l'aide des primitives que l'on vient de calculer si l'on pose :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\arctan(\sqrt{2}\,\tan(x)) + n\times\pi), & \text{si} \quad c \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\times\pi, \frac{\pi}{2} + n\times\pi\right[, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + n\times\pi\right) & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2} + n. \end{cases}$$

6.3.3.2 Primitives de fonctions avec des racines

Si l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction qui fait apparaître une expression du type $\sqrt[n]{\frac{a\times x+b}{c\times x+d}}$, il est souvent utile d'effectuer le changement de variables :

$$s = \sqrt[n]{\frac{a\times x+b}{c\times x+d}}.$$

Exemple(s) 51 :

51.1 Cherchons à calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

On a :

$$\int_c^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{s=\sqrt{t}}{=} \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{x}} \frac{2\,s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}t = 2\,\sqrt{x} - 2\,\arctan(\sqrt{x}) + C.$$

51.2 Cherchons à calculer une primitive sur $]-1/2, +\infty[$ de la fonction :

$$g(x) = \frac{\sqrt{2\,x+1}+1}{x+1}.$$

Remarquons qu'il faut travailler un peu plus pour le changement de variables :

$$s = \sqrt{2\,t+1} \Longrightarrow t = \frac{s^2-1}{2}$$

$$\int_c^x \frac{\sqrt{2\,t+1}+1}{t+1}\,\mathrm{d}t \underset{s=\sqrt{2\,t+1}}{=} \int_{c'}^{\sqrt{2\,x+1}} \frac{s+1}{\frac{s^2-1}{2}+1} \times s\,\mathrm{d}s = 2\int_{c'}^{\sqrt{2\,x+1}} \frac{s^2+s}{s^2+1}\,\mathrm{d}s$$
$$= 2\int_{c'}^{\sqrt{2\,x+1}} \left(1+\frac{1}{2}\,\frac{2\,s}{s^2+1} - \frac{1}{1+s^2}\right)\mathrm{d}s$$

Une primitive de la fonction g est donc la fonction :

$$G(x) = 2\sqrt{2\,x+1} + \ln(2\,x+2) - 2\,\arctan(\sqrt{2\,x+1}).$$

Si dans une fonction apparaît une expression du type :

$$\sqrt{-x^2+a\times x+b} = \sqrt{b+\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}$$

remarquons que $a^2+4\,b$ *doit* être strictement positif pour que la fonction soit définie sur un intervalle d'intérieur non vide. On a donc :

$$\sqrt{-x^2+a\times x+b} = \sqrt{\frac{4\,b+a^2}{4}} \times \sqrt{1-\left(\frac{2\,x-a}{4\,b+a^2}\right)^2}$$

l'idée est alors de poser :

$$\frac{2\,x-a}{4\,b+a^2} = \sin(\theta),$$

puis d'utiliser la formule $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$

Exemple(s) 52 :

52.1 Cherchons une primitive de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+1}}.$$

On a :

$$\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{5}}\int_c^x \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\,t-1}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,\mathrm{d}t \overset{\sin(\theta)=\frac{2\,t-1}{\sqrt{5}}}{=} \int_d^{\arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right)} \mathrm{d}\theta.$$

Et l'on en déduit la primitive :

$$G(x) = \arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

52.2 Cherchons une primitive de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{-x^2+x+1}$$

On a :

$$\int_c^x \sqrt{-t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int_c^x \sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_c^x \sqrt{1-\left(\frac{2\,t-1}{\sqrt{5}}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{\sin(\theta)=\frac{2\,t-1}{\sqrt{5}}}{=} \frac{5}{4}\int_d^{\arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right)} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{5}{8}\int_d^{\arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right)} (\cos(2\,\theta)+1)\,\mathrm{d}\theta$$

On en déduit la primitive :

$$F(x) = \frac{5}{16}\sin\left(2\,\arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right)\right) + \frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

6.3.3.3 Formules de l'arc-moitié et applications

Les formules de l'arc-moitié permettent d'exprimer toutes les fonctions trigonométriques d'un angle t en fonction de $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Attention cependant ! Ce changement de variables n'est défini que si $t \notin \pi + 2\,\pi \times \mathbb{Z}$. On a :

$$\boxed{\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin(t) = \frac{2\,u}{1+u^2} \qquad \tan(t) = \frac{2\,u}{1-u^2}.}$$

Démonstration : Pour la première égalité, il suffit de se souvenir de la dérivée de la fonction tangente. Pour la deuxième, on a :

$$\cos(t) = 2\,\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1$$

donc $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$ puis $\cos(t) = 2\,\frac{1}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Enfin,

$$\sin(t) = 2\,\cos\left(\frac{t}{2}\right) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 2\,\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \times u = \frac{2\,u}{1+u^2}$$

et la dernière formule est une conséquence directe des deux précédentes.

■

Ces formules permettent de ramener le calcul d'intégrales faisant apparaître des fonctions trigonométriques à un calcul d'intégrales faisant apparaître des puissances.

Exemple(s) 53 :

53.1 Une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}$$

est la fonction :

$$\int_c^x \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_d^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_d^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_d^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}u/\sqrt{3}}{1+(u/\sqrt{3})^2}$$

On en déduit la primitive :

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

53.2 Cherchons maintenant une primitive sur $]-\pi/2, \pi[$ de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}$$

on a :

$$\int_c^x \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t = \int_d^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2\,u}{1+u^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_d^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + D.$$

6.4 Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre

6.4.1 Définitions, solutions de l'équation homogène

Définition 6.4.30 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une expression du type :*

$$y' + a(t) \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t) \times f(t) = b(t).$$

Le problème de Cauchy associé à cette équation différentielle est la donnée supplémentaire d'une condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On le note :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$.

Remarque(s) 29 :
1. Comme dans le cas linéaire à coefficients constants, on appelle équation différentielle homogène associée l'équation :
$$y' + a(t) \times y = 0.$$
2. Le principe de superposition s'applique à ces équations comme dans le cas des coefficients constants : si f_1 est une solution de $y' + a(t) \times y = b_1(t)$ et f_2 est une solution de $y' + a(t) \times y = b_2(t)$ alors $f_1 + f_2$ est une solution de :
$$y' + a(t) \times y = b_1(t) + b_2(t).$$

Proposition 6.4.6 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur l'intervalle I :

$$\boxed{\forall t \in I, \quad f(t) = y_0 \times \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right).}$$

Démonstration : Clairement, f est solution du problème de Cauchy. Réciproquement, si g est une solution du problème de Cauchy, on pose :

$$h(t) = g(t) \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Alors :

$$\forall t \in I, \quad h'(t) = (g'(t) + a(t) \times g(t)) \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = 0,$$

la fonction h est donc constante, mais par la condition initiale, $h(t_0) = y_0$ et l'on en déduit l'unicité.

■

Remarque(s) 30 :
1. Notez l'importance de travailler sur un **intervalle** I.
2. De cette proposition, on en déduit immédiatement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t) \times y = 0$: si A est une primitive de a,

$$\boxed{S_0 = \{t \in I \mapsto C \times \exp(-A(t)), \quad C \in \mathbb{K}\}.}$$

Exemple(s) 54 :

54.1 Évidemment, les résultats que nous avions donnés pour les équations à coefficients constants restent valables ; traitons un exemple venant de la physique : le circuit RC :

$$R \times C \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

pensez bien à diviser par $R \times C$ pour vous ramener à la proposition ! Une fois ceci fait, une primitive de la fonction constante $1/(R \times C)$ est la fonction $1/(R \times C) \times t$; on en déduit les solutions :

$$S_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto A \times \exp\left(\frac{-t}{R \times C}\right), \quad A \in \mathbb{R} \right\}.$$

54.2 Prenons maintenant un exemple plus mathématique. Les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2\,x}{1+x^2} \times y = 0$$

sont par la proposition :

$$S_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C \times \exp\left(-\ln(|1+x^2|)\right), \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mais cette expression se simplifie ; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{C}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

54.3 Cherchons maintenant les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{\sqrt{3}}{2\,\cos(t) + 1} \times y = 0$$

sur l'intervalle $]-\frac{2\,\pi}{3}, \frac{2\,\pi}{3}[$. Pour ceci, nous allons chercher à calculer la primitive suivante grâce aux formules de l'arc-moitié :

$$\int_c^t \frac{\sqrt{3}}{2\,\cos(s)+1}\,\mathrm{d}s = \int_d^{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{\sqrt{3}}{2\,\frac{1-u^2}{u^2+1}+1}\,\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int_d^{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{-2\,\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{u^2-3}$$

$$= \int_d^{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \left(\frac{1}{u+\sqrt{3}} - \frac{1}{u-\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{3}-\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\right) + D$$

Notez que quand $t \in]-\frac{2\,\pi}{3}, \frac{2\,\pi}{3}[$, $\tan\left(\frac{t}{2}\right) \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. On en déduit les solutions de l'équation différentielle :

$$S = \left\{ t \in \left]-\frac{2\,\pi}{3}, \frac{2\,\pi}{3}\right[\mapsto C \times \frac{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{3}-\tan\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Terminons par quelques remarques sur la justification d'une méthode appréciée en physique pour résoudre l'équation différentielle. Remarquons que par la forme des solutions, *si une solution y s'annule en un point de I, alors elle est nulle sur I*. En conséquence, si elle vérifie pour la condition initiale $y(t_0) \neq 0$, elle n'est jamais nulle sur I donc par la théorème des valeurs intermédiaires strictement positive ou strictement négative comme elle est continue. Si $y(t_0)$ est strictement positif, le calcul suivant est donc légitime (et peut permettre de retrouver la formule) :

$$y' + a(t) \times y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a(t) \iff \ln(y) = -A(t) + D \iff y = \exp\left(-A(t)+D\right) = C \times \exp\left(-A(t)\right).$$

6.4.2 Solutions de l'équation différentielle

Le principe de superposition nous donne, comme dans le cas à coefficients constants : si f_0 est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + a(t) \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\boxed{S = \{f_0 + f, \quad f \in S_0\} = \{f_0 + C \times \exp(-A(t)), \quad C \in \mathbb{K}\}.}$$

Le problème est alors réduit à : comment trouver une telle solution (si elle existe) ? Supposons que l'on cherche une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'idée qui suit est appelée **variation de la constante** : si f est une fonction dérivable, on fixe $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$ la primitive de a qui s'annule en t_0 et l'on pose :

$$C(t) = f(t) \times e^{A(t)} \iff f(t) = C(t) \times e^{-A(t)}$$

alors f est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f'(t) + a(t) \times f(t) = b(t) \iff (C'(t) - a(t) \times C(t) + a(t) \times C(t)) \times \times e^{-A(t)} = b(t) \iff C'(t) = b(t) \times e^{A(t)}$$

il reste alors à remarquer que $C(t_0) = y_0$ pour conclure : f est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s) \times \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s + y_0 \right) \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} -a(u)\,\mathrm{d}u \right).$$

Cette formule n'est absolument pas à retenir par cœur ! Ce sont ses deux conséquences qu'il faut connaître :

$$\boxed{\text{pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle, on peut précéder par variation de la constante}}$$

ce qui se fait en pratique en cherchant f_0 de la forme $\boxed{f_0(t) = C(t) \times e^{-A(t)}}$; remarquez que tout se passe comme si la constante des solutions de l'équation homogène devenait une fonction et

Proposition 6.4.7 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Exemple(s) 55 :

55.1 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' - y = (1 + t) \times e^t.$$

L'équation homogène ne pose pas de problème. Pour chercher une solution particulière, on procède par variation de la constante : la fonction $f_0(t) = C(t) \times e^t$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^t = (1 + t) \times e^t \iff C'(t) = 1 + t$$

il suffit donc de prendre $C'(t) = \frac{t^2}{2} + t$; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \left(C + \frac{t^2}{2} + t \right) \times e^t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

55.2 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' + t \times y = t$$

Une primitive de la fonction $a(t) = t$ est le fonction $A(t) = t^2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc le la forme $C \times e^{-t^2}$. Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Une fonction $f_0 = C(t) \times e^{-t^2}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^{-t^2} = t \iff C'(t) = t \times e^{t^2}.$$

Il suffit donc de prendre $C(t) = e^{t^2}$ et donc la solution particulière constante égale à un (qu'on aurait pu deviner...). On en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + C \times e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

55.3 Terminons par un dernier exemple ; si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y' - i \times y = \cos(t)$$

les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $C \times e^{i\,t}$. Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Une fonction $f_0 = C(t) \times e^{i\,t}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) \times e^{i\,t} = \cos(t) = \frac{e^{i\,t} + e^{-i\,t}}{2} \iff C'(t) = \frac{1 + e^{-2\,i\,t}}{2}$$

il suffit donc de prendre $C(t) = \frac{1}{2}\,t + i\,\frac{e^{-2\,i\,t}}{4}$ et l'on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1}{2}\,t + i\,\frac{e^{-2\,i\,t}}{4} + C \right) \times e^{i\,t}, \quad C \in \mathbb{C} \right\}.$$

55.4 Il est également possible d'utiliser ces résultats pour des exercices théoriques. Par exemple, montrons que si une solution f de $y' + a \times y = b$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie, pour $T \in \mathbb{R}$ $f(T) = f(0)$ alors elle est périodique de période T. En effet, elle est solution du problème de Cauchy ;

$$\begin{cases} y' + a \times y = b \\ y(0) = f(0) \end{cases}$$

De plus, si l'on note $g(t) = f(t + T)$, comme f est solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t + T) + a \times f(t + T) = b \iff g'(t) + a \times g(t) = b$$

la fonction g est donc solution du problème de Cauchy ;

$$\begin{cases} y' + a \times y = b \\ y(0) = g(0) = f(T) = f(0) \end{cases}$$

Comme ce problème de Cauchy admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = g(t) = f(t + T)$$

la fonction f est donc T-périodique.

6.4.3 Problèmes de recollement

Parfois, on rencontre des expressions différentielles du type :

$$c(t) \times y' + d(t) \times y = e(t)$$

avec c, d et e des fonctions continues sur un intervalle I. Une solution d'un tel problème est une fonction f dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad c(t) \times f'(t) + d(t) \times f(t) = e(t).$$

Pour résoudre ce type de problème, on raisonne par analyse-synthèse. L'idée est de diviser par c pour se ramener au problème précédent avec $a(t) = d(t)/c(t)$ et $b(t) = e(t)/c(t)$ **sur chaque intervalle sur lequel la fonction c ne s'annule pas**. Une fois ceci fait, pour trouver les solutions sur I, on continue l'analyse en «recollant» les solutions trouvées sur chaque intervalle, en faisant bien attention à la dérivabilité de la fonction en chaque point de «recollement». Une fois ceci terminé, on effectue la synthèse.

Exemple(s) 56 :

56.1 Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'expression différentielle :

$$t \times y' - y = 0$$

L'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{t}\, y = 0$$

admet pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $S_1 = \left\{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times t, \quad C \in \mathbb{R}\right\}$ et pour solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ les fonctions $S_2 = \left\{t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times t, \quad D \in \mathbb{R}\right\}$. Une solution f de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 0$ par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes C et D telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C \times t, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D \times t, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

il ne faut surtout pas s'arrêter ici : la fonction, pour être une solution doit être dérivable en 0. En particulier, il faut que

$$C = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = D$$

Finalement, il est nécessaire qu'une solution de l'expression différentielle s'écrive pour tout réel t $f(t) = C \times t$ pour $C \in \mathbb{R}$. Il est de plus clair qu'une telle fonction est solution de l'expression différentielle ; l'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times t, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

56.2 Cherchons maintenant les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'expression différentielle :

$$t \times y' - 2\, y = 0.$$

L'équation différentielle :

$$y' - \frac{2}{t}\, y = 0$$

admet pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $S_1 = \left\{t^2 \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times t, \quad C \in \mathbb{R}\right\}$ et pour solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ les fonctions $S_2 = \left\{t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times t^2, \quad D \in \mathbb{R}\right\}$. Une solution f de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 0$ par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes C et D telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

de plus, la fonction, pour être une solution doit être dérivable en 0. Mais on remarque que :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0 = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}.$$

Une telle fonction est donc toujours dérivable en 0 ! On en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+ \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases} \quad , \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

56.3 Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'expression différentielle :

$$t \times y' + y = 0$$

L'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{t}\, y = 0$$

admet pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $S_1 = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C \times 1/t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$ et pour solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ les fonctions $S_2 = \left\{ t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto D \times 1/t, \quad D \in \mathbb{R} \right\}$. Une solution f de l'expression différentielle est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 0$ par l'expression différentielle. il existe donc deux constantes C et D telles que :

$$f(t) = \begin{cases} C/t, & t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0, & t = 0 \\ D/t, & t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

traitons maintenant le dérivabilité en 0. On a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si,} \quad C \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si,} \quad D \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour que f soit solution de l'expression différentielle sur $\mathbb{R}$, il est donc nécessaire que $C = D = 0$, et la fonction nulle est clairement solution de l'expression différentielle. on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto 0 \} .$$

56.4 Enfin, l'expression différentielle :

$$t \times y' + t \times y = 1$$

n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$! En effet, s'il en existait une alors elle vérifierait :

$$0 = 0 \times y'(0) + 0 \times y(0) = 1$$

absurde ! L'ensemble de solutions est donc $S = \emptyset$.

Remarque(s) 31 : 1. Remarquez qu'il n'existe pas d'expression générale en termes de constantes de l'ensemble des solutions d'une telle expression différentielle ;

2. il arrive qu'un problème de Cauchy associé à une expression différentielle admette plus d'une ou une infinité de solutions, en reprenant les exemples que l'on vient de traiter, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} t \times y' - 2\, y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions, les fonctions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} C \times t^2, & t \in \mathbb{R}_+ \\ D \times t^2, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases} \quad , \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} t \times y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

n'admet pas de solution !

6.4.4 Une étude qualitative : définition de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est par définition l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Notons-la (juste pour ce paragraphe) f et redémontrons ses propriétés **sans résoudre l'équation différentielle**. On a :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x \times y) = f(x) + f(y)$.

   Démonstration : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Notons g et h les fonction définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

   $$g(x) = f(x \times y), \quad h(x) = f(x) + f(y).$$

   Alors les fonctions g et h vérifient :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = y \times f'(x \times y) = \frac{y}{x \times y} = \frac{1}{x}, \quad h'(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$$

   mais également $g(1) = f(y)$ et $h(1) = f(1) + f(y) = f(y)$. Les fonctions g et h sont donc toutes deux solutions du problème de Cauchy :

   $$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = f(y) \end{cases}$$

   elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui nous donne l'égalité recherchée.

   ■

2. On a :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(e^y) = y, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(f(x)) = x.$$

   Démonstration : Pour prouver la première égalité, on considère la fonction définie par :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = f(e^y)$$

   alors la fonction g vérifie : pour tout réel y, $g'(y) = e^y \times f'(e^y) = \frac{e^y}{e^y} = 1$ et $g(0) = f(e^0) = f(1) = 0$ donc pour tout réel y, $g(y) = f(e^y) = y$. De plus, si l'on pose :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = \frac{\exp(f(x))}{x}$$

   on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = \frac{f(x) \times \exp(f(x)) \times x - \exp(f(x))}{x^2} = 0$$

   et $h(1) = \exp(f(1)) = \exp(0) = 1$, on en déduit que pour tout réel strictement positif x, $h(x) = x$ c'est-à-dire $\exp(f(x)) = x$.

   ■

Chapitre 7

Nombres réels, suites numériques

7.1 Quelques généralités sur les nombres réels

7.1.1 Majorants, minorants

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Comme lorsque l'on a travaillé avec les fonctions réelles à valeurs réelles, On dit que :

Définition 7.1.31 :
1. *Le réel M est un majorant de A si : $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$,*
2. *Le réel m est un minorant de A si : $\forall x \in A, \quad x \leqslant m$,*
3. *On dit que A est majoré si il admet un majorant, minoré si il admet un minorant et borné si il admet un majorant et un minorant,*
4. *Le réel M_0 est un maximum de A si c'est un majorant de A et si $M_0 \in A$,*
5. *Le réel m_0 est un minimum de A si c'est un minorant de A et si $m_0 \in A$.*

Remarque(s) 32 :
1. Comme dans le cas des fonctions, si un ensemble admet un maximum ou un minimum, celui-ci est unique. il est donc légitime d'écrire :
$$\max(A) \quad \text{resp.} \quad \min(A)$$
pour le maximum (resp. le minimum) de l'ensemble A si il existe.
2. Certains ensembles n'ont ni maximum ni minimum, comme $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, il faut donc toujours prouver qu'un tel élément existe avant de le considérer.

Exemple(s) 57 :

57.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme :
$$I =]a, b], \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
alors, I est minoré (par $a-1$) et majoré (par $b+1$), il admet un maximum : $\max(I) = b$ mais pas de minimum. Ce résultat se généralise sans difficulté à tous types d'intervalles.

57.2 Parfois, il faut réfléchir un peu plus : pour l'ensemble
$$A = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 2\,x - 3)^2 - 25 \leqslant 0\right\},$$
le mieux est d'abord d'essayer de l'exprimer comme un intervalle ; on a :
$$(x^2+2\,x-3)^2-25 \leqslant 0 \iff (x^2+2\,x+2)\times(x^2+2\,x-8) \leqslant 0 \iff (x^2+2\,x+2)\times(x-2)\times(x+4) \leqslant 0.$$
On en déduit $A = [-4, 2]$ un intervalle qui admet un maximum : 2 et un minimum : -4.

57.3 Il est possible de, en résolvant une inéquation comme celle que nous venons de traiter, trouver une union d'intervalles ; on peut alors utiliser la propriété : si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui admettent des maximas, alors $A \cup B$ admet un maximum et :

$$\boxed{\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B)).}$$

Démonstration : Notons $m = \max(\max(A), \max(B))$. Alors comme $\max(A)$ et $\max(B)$ sont des majorants de A (resp. B) :

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant \max(A) \leqslant m \quad \text{et} \quad \forall x \in B, \quad x \leqslant \max(B) \leqslant m$$

on en déduit :

$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leqslant m$$

le réel m est donc un majorant de $A \cup B$. De plus, $\max(A) \in A$ et $\max(B) \in B$, donc $m = \max(\max(A), \max(B)) \in A \cup B$. L'ensemble $A \cup B$ admet donc un maximum : m.

■

Seriez-vous capables d'énoncer et de prouver un résultat analogue avec le minimum ?

57.4 Cherchons maintenant d'éventuels majorants, minorants, maximums ou minimums de l'ensemble :

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^*, \quad x - \frac{2}{x} \leqslant -1 \right\}.$$

Il faut encore travailler :

$$x - \frac{2}{x} \leqslant -1 \iff \frac{x^2 + x - 2}{x} \leqslant 0 \iff \frac{(x-1) \times (x+2)}{x} \leqslant 0$$

Un tableau de signes nous donne alors : $B =]-\infty, -2] \cup]0, 1]$. L'ensemble est donc non minoré, majoré et admet pour maximum le réel 1.

7.1.2 Bornes supérieures, inférieures

Définition 7.1.32 : *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des majorants de A et $\mathcal{M}_-$ l'ensemble des minorants de A :*

$$\mathcal{M}_+ = \{M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant M\}, \quad \mathcal{M}_- = \{m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad m \leqslant x\}$$

1. *On dit que A admet une borne supérieure si $\mathcal{M}_+$ admet un minimum. On pose alors* $\sup(A) = \min(\mathcal{M}_+)$.
2. *On dit que A admet une borne inférieure si $\mathcal{M}_-$ admet un maximum. On pose alors* $\inf(A) = \max(\mathcal{M}_-)$.

Remarque(s) 33 :

1. Pour retenir facilement cette définition, on dit souvent que la borne supérieure est, si elle existe : «le plus petit des majorants» et la borne inférieure est, si elle existe : «le plus grand des minorants».
2. On peut légèrement généraliser cette définition, si A est non vide, non majoré on dit que $\sup(A) = +\infty$ et si A est non vide, non minoré, $\inf(A) = -\infty$.

Exemple(s) 58 :

58.1 Soit a et b deux réels. Considérons l'intervalle :

$$I = [a, b[$$

Alors, pour cet intervalle, l'ensemble des majorants est : $\mathcal{M}_+ = [b, +\infty[$ et l'ensemble des minorants : $\mathcal{M}_- =]-\infty, a]$. Le premier admet un minimum : b et le deuxième un maximum : a. L'intervalle I admet donc une borne supérieure et une borne inférieure :

$$\sup(I) = b, \quad \inf(I) = a.$$

Ceci se généralise aisément à n'importe quel intervalle.

58.2 Cherchons une éventuelle borne supérieure/inférieure de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{-x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Pour ceci, il s'agit d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2\,x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est clairement dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{-(1+x^2) + 2\,x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Finalement, $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$, l'ensemble A admet une borne supérieure et une borne inférieure : $\sup(A) = 0$, $\inf(A) = -\frac{1}{2}$.

58.3 Comme pour le maximum, on a la propriété : si le ensembles A et B admettent une borne supérieure, alors $A \cup B$ admet une borne supérieure et

$$\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))}$$

Démonstration : Notons $m = \max(\sup(A), \sup(B))$. Alors comme $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont des majorants de A (resp. B) :

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant \sup(A) \leqslant m \quad \text{et} \quad \forall x \in B, \quad x \leqslant \sup(B) \leqslant m$$

on en déduit :

$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leqslant m$$

le réel m est donc un majorant de $A \cup B$. Montrons que c'est le plus petit. Si M est un majorant de $A \cup B$ alors c'est en particulier un majorant de A donc comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A : $\sup(A) \leqslant M$. De même c'est en particulier un majorant de B donc $\sup(B) \leqslant M$; On en déduit :

$$m = \max(\sup(A), \sup(B)) \leqslant M,$$

le réel m est donc le plus petit des majorants de $A \cup B$, donc la borne supérieure.

■

Sauriez-vous énoncer et prouver une propriété analogue pour les bornes inférieures ?

58.4 Étudions enfin une éventuelle borne inférieure ou supérieure de l'ensemble :

$$B = \left\{ x \in]-\pi, \pi], \quad \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Grâce à un cercle trigonométrique, on trouve :

$$B = \left]-\pi, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right].$$

L'ensemble B admet donc une borne inférieure et une borne supérieure : $\inf(B) = -\pi$, $\sup(B) = \pi$.

Propriété(s) 7.1.22 : Soit M un majorant de A. On a :

$$M = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in A,\ M - \epsilon < x.$$

Démonstration : Supposons que $M = \sup(A)$ et soit $\epsilon > 0$. Alors, comme $M = \sup(A)$ est le plus petit des majorants de A et $M - \epsilon < M$, $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe un élément x de A tel que $M - \epsilon < x$.
Réciproquement, si M est un majorant de A qui vérifie : $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A,\ M - \epsilon < x$. Soit m_0 un réel strictement inférieur à M. Alors si l'on pose $\epsilon = M - m_0 > 0$, on a :

$$\exists x \in A,\ M - \epsilon = m_0 < x$$

donc m_0 n'est pas un majorant de A. Comme aucun réel strictement inférieur à M n'est un majorant de A, M est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire sa borne supérieure.

■

Remarque(s) 34 : Il existe une caractérisation identique pour la borne inférieure ; un minorant m est la borne inférieure de A si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, \quad x < m + \epsilon.$$

7.1.3 Nombres décimaux, approximations de réels

Définition 7.1.33 : *On appelle ensemble des nombres décimaux le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n}, \quad k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Remarque(s) 35 :

1. Un nombre décimal est simplement un réel qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple :
$$123,456789 = \frac{123456789}{10^6}.$$
2. Certains nombres décimaux sont un peu « cachés », par exemple :
$$\frac{3}{4} = 0.75 = \frac{75}{10^2}.$$
3. Par définition, un nombre décimal est un rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ mais il existe des rationnels qui ne sont pas de nombres décimaux ; par exemple
$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & & & 1 & 1 & & \\ \cline{5-8}
-1 & 1 & & & 1, & 1 & 8 & \cdots \\ \cline{1-2}
 & \boxed{2} & 0 & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 9 & 0 & & & & \\
 & & -8 & 8 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & \boxed{2} & & & &
\end{array}$$

On remarque en effectuant la division euclidienne que si l'on cherche à écrire $\frac{13}{11}$ sous forme décimale, il est nécessaire d'écrire un nombre infini de chiffres (on parle de développement périodique) :

$$\frac{13}{11} = 1,181818181818\cdots$$

ce que l'on résume en écrivant $1,\underline{18}$.

4. Plus généralement, comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers strictement inférieurs à $b \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne d'un rationnel $\frac{a}{b}$ donne *toujours* deux fois le même reste, il est donc toujours possible d'écrire un rationnel sous forme d'un développement périodique.
5. La réciproque est aussi vraie, si l'on nous donne un développement périodique, il est possible de l'écrire comme un rationnel, par exemple, si $x = 1,\underline{123}$ alors :

$$(x-1) \times 1000 - 123 + 1 = x \iff x = \frac{374}{333}.$$

Les nombres décimaux servent à « approximer » les nombres réels ; l'idée intuitive est qu'il est toujours possible d'écrire un réel avec une infinité de chiffres après la virgule :

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\cdots, \quad \pi = 3.141592653589793\cdots.$$

Donnons une définition plus précise de ceci :

Définition 7.1.34 : *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle approximation de x à ϵ près un réel a tel que :*

$$|x - a| \leqslant \epsilon$$

si $a > x$ on parle d'approximation par excès, si $a < x$ on parle d'approximation par défaut.

L'approximation par des réels de fait à l'aide de la fonction partie entière, rappelons que, si x est un réel, $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x est l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ou encore le plus grand entier relatif inférieur à x.

Exemple(s) 59 :

59.1 Si $x = -\pi$, alors $\lfloor x \rfloor = -4$.

59.2 Si $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad k \times \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor k \times y \rfloor.$$

En effet, $k \times \lfloor y \rfloor$ est un entier et par définition de la partie entière, $k \times \lfloor y \rfloor \leqslant k \times y$, l'inégalité est alors claire car $\lfloor k \times y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $k \times y$.

Propriété(s) 7.1.23 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $d_n = \lfloor x \times 10^n \rfloor \times 10^{-n} \in \mathbb{D}$ est une approximation par défaut du réel x et $d_n + 10^{-n} \in \mathbb{D}$ est une approximation par excès à 10^{-n} près du réel x :

$$d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}.$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leqslant d_{n+1} < d_n + 10^{-n}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \leqslant x \times 10^n < \lfloor x \times 10^n \rfloor + 1$$

et la première inégalité recherchée est alors immédiate en divisant par 10^n. pour la deuxième inégalité, on écrit :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \times 10 \leqslant \lfloor x \times 10^{n+1} \rfloor \leqslant x \times 10^{n+1} < (\lfloor x \times 10^n \rfloor + 1) \times 10$$

et il suffit alors de diviser par 10^{n+1}.

■

Tout réel x admet donc pour tout entier naturel n une suite d'approximations à 10^{-n} près par des nombres décimaux $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple si $x = \pi$:

$$d_0 = 3, \quad d_1 = 3.1, \quad d_2 = 3.14, \quad d_3 = 3.141, \quad d_4 = 3.1415$$

nous admettrons [1] réciproquement qu'une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de décimaux vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leqslant d_{n+1} < d_n + 10^{-n}$$

caractérise un réel x. Notez qu'il y a une petite subtilité ici, il est possible qu'une telle suite ne soit pas celle de l'écriture usuelle du réel x. Par exemple :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 0.9, \quad s_2 = 0.99, \quad s_3 = 0.999, \quad \cdots$$

vérifie toutes ces propriétés et caractérise le réel 1. Pour cette raison, on écrit parfois :

$$1 = 0.999999\cdots.$$

7.1.4 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

Théorème 7.1.5 ($\mathbb{R}$ est archimédien) : *Soit x et y, $y \neq 0$ deux réels positifs, alors :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad k \times y \geqslant x.$$

Démonstration : Il suffit de prendre $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + 1$.

■

Exemple(s) 60 :

60.1 En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel n tel que :

$$n \times \epsilon \geqslant 1 \iff \frac{1}{n} \leqslant \epsilon.$$

si l'on prend k tel que $10^k > n$ ceci donne :

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, 10^{-k} < \frac{1}{n} \leqslant \epsilon.$$

Théorème 7.1.6 ($\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$) : *Soit $x \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists d \in \mathbb{D}, \quad |d - x| \leqslant \epsilon.$$

Démonstration : Il suffit de prendre une approximation décimale à $10^{-n} \leqslant \epsilon$ (voir de dernier exemple) près du réel x.

■

Remarque(s) 36 : 1. Comme tout décimal est un rationnel, on a donc aussi que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Remarquer qu'on a même mieux : il est possible de prendre une approximation par excès ou une approximation par défaut, il est donc possible d'approcher à ϵ-près tout réel par par excès et psr défaut tout réel par des décimaux.

1. C'est évidemment une grosse arnaque ! Mais une construction rigoureuse des réels est hors programme car très difficile... si vous souhaitez en consulter une pendant vos vacances, votre professeur vous conseille de lire ceci.

Exemple(s) 61 :

61.1 La borne supérieure de l'ensemble :
$$\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}]$$
est le réel $\sqrt{2}$. Ce n'est pas un maximum. Il suffit pour s'en convaincre d'utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la propriété qui caractérise la borne supérieure.

61.2 De même, l'ensemble :
$$\mathbb{D}\cap\left]-\infty,\frac{2}{3}\right]$$
n'a pas de maximum mais une borne supérieure : $\frac{2}{3}$.

Théorème 7.1.7 (propriété de la borne supérieure) : *Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors A possède une borne supérieure.*

Démonstration : Notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des majorants de A et posons, pour tout entier naturel :
$$d_n = \min(10^{-n}\times\mathbb{Z}\cap\mathcal{M}_+).$$
Notez que d_n existe car A est non vide, majoré donc $\mathbb{Z}\cap 10^n\times\mathcal{M}_+$ est n ensemble d'entiers non vide, minoré. Alors par définition, on a :
$$\forall n\in\mathbb{N}, d_{n+1}\leqslant d_n, \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in A,\quad x\leqslant d_n, \forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in A,\quad x_n > d_n-10^{-n}.$$
On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N},\quad d_n-10^{-n}<d_{n+1}\leqslant d_n$, la suite définit donc un réel x, qui est un majorant par le deuxième point est qui est la borne supérieure par le troisième et la caractérisation de la borne supérieure.

■

7.1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $a<b$ deux réels. On classe les intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

1. (a) bornés : $\emptyset$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$
   (b) non bornés : $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$.
2. (a) fermés : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$
   (b) ouverts : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$
   (c) semi-ouverts : $[a,b[$, $]a,b]$
3. Enfin, on dit que les intervalles du type $[a,b]$ sont des **segments**.

Proposition 7.1.8 : *(caractérisation des intervalles) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors A est un intervalle si et seulement si :*
$$\forall(x,y)\in A^2, x<y\quad [x,y]\subset A.$$

Démonstration : Si I est un intervalle, il est clair qu'il possède cette propriété. Réciproquement, supposons que A est un ensemble possédant cette propriété. Alors si A est vide, c'est un intervalle. Sinon, les quantités $u=\sup(A)$ et $v=\inf(A)$ existent (notez qu'ils peuvent être infinis !). Il y a alors quatre cas, suivant si u et v sont des éléments de A. Nous traiterons le cas $u\in A$ et $v\notin A$, les autres cas se traitent de façon similaire. Montrons que : $A=[u,v[$.

1. Comme u est un minorant de A et v un majorant, on a : $\forall x\in A,\quad u\leqslant x<v$ donc $A\subset[u,v[$.
2. Soit $x\in[u,v[$. Alors, $x<v$ n'est par un majorant de A par définition de la borne supérieure donc : $\exists y\in A,\quad x<y$. Comme $u\leqslant x<y$ sont deux éléments de A, $[u,y]\subset A$ mais $x\in[u,y]\subset A$ donc comme ceci est vrai pour tout $x\in[u,v[$, $[u,v[\subset A$.

On conclut alors par double inclusion : $A=[u,v[$.

■

7.2 Suites numériques

7.2.1 Modes de définitions

7.2.1.1 Généralités

Dans la suite, on posera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe au moins trois façons de définir une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. De façon **explicite** (souvent, celle que l'on préfère) : si il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n).$$

Exemple(s) 62 :

62.1 On peut définir une suite arithmétique de façon explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a \times n + b, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2,$$

62.2 On peut aussi définir une suite géométrique de façon explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = b \times a^n, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2.$$

2. De façon **implicite** : pour tout n, u_n est l'unique solution d'une équation dépendant de n.

Exemple(s) 63 :

63.1 Soit $n \geqslant 2$. L'équation :

$$\tan(x) = x \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n \times \pi, \frac{\pi}{2} + n \times \pi\right[$$

admet une unique solution, que l'on appelle a_n.

63.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation :

$$x^n - n \times x + 1 = 0$$

admet une unique solution sur $[0, 1]$ (car la fonction $x \mapsto x^n - n \times x + 1$ est strictement décroissante sur cet intervalle) ; on note b_n cette solution.

3. Enfin, **par récurrences** :
   (a) simple : $u_{n+1} = f(u_n, n) \quad u_0 = a \in \mathbb{K}$
   (b) double : $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}, n) \ u_0 = a \in \mathbb{K}, \ u_1 = b \in \mathbb{K}$
   (c) forte : $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_1, u_0, n) \quad u_0 = a \in \mathbb{K}$.

On peut parfois résoudre des exercices en donnant une forme explicite d'une suite dont la définition est donnée de façon explicite ou par récurrence. Voyons quelques exemples.

7.2.1.2 Suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère la suite définie par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

On appelle un tel type de « suite arithmético-géométrique ». Évidemment, si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique et la forme explicite est bien connue. Sinon, l'idée est de se ramener à une suite géométrique grâce à la méthode suivante :

1. On résout l'équation :

$$x = a \times x + b,$$

on trouve : $x = \frac{b}{1-a}$ et l'on pose $v_n = u_n - x$.

2. On cherche la formule de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: comme

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \quad \text{et} \quad x = a \times x + b,$$

on en déduit : $v_{n+1} = a \times v_n$.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a donc pour tout entier naturel n : $v_n = a^n \times v_0$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \times (u_0 - x) + x.$$

Exemple(s) 64 :

64.1 Sa suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2\,u_n + 1$$

admet pour formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 1$$

7.2.1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 7.2.8 : *Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\delta = p^2 - 4\,q$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + p \times u_{n+1} + q \times u_n = 0.$$

Alors :

$$\boxed{\exists!(C,D) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C \times a_n + D \times b_n}$$

avec :

1. *Si $\delta > 0$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\frac{-p+\sqrt{\delta}}{2}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{-p-\sqrt{\delta}}{2}\right)^n,$$

2. *si $\delta = 0$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\frac{-p}{2}\right)^n, \quad b_n = n \times \left(\frac{-p}{2}\right)^{n-1},$$

3. *si $\delta < 0$ et si l'on écrit $(-p + i\sqrt{-\delta})/2 = \rho \times e^{i\,\theta}$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \rho^n \times \cos(\theta \times n), \; b_n = \rho^n \times \sin(\theta \times n).$$

Démonstration : Vous aurez sans aucun doute repéré la similarité avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Ce n'est pas un hasard. Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + p \times y' + q \times y = 0 \\ y(0) = u_0 \\ y'(0) = u_1 \end{cases}$$

Alors ce problème de Cauchy admet une unique équation :

$$\exists!(C,D) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f = C \times f_1 + D \times f_2.$$

où f_1 et f_2 vérifient :

1. Si $\delta > 0$: $f_1(t) = \exp\left(\frac{-p+\sqrt{\delta}}{2} \times t\right)$, $\quad f_2(t) = \exp\left(\frac{-p-\sqrt{\delta}}{2} \times t\right)$,
2. Si $\delta = 0$: $f_1(t) = \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$, $\quad f_2(t) = t \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$,
3. Si $\delta < 0$: $f_1(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$, $\quad f_2(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right)$.

Notons en particulier que f est infiniment dérivable. Le lien entre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction f est fait par la remarque suivante : comme f est solution de l'équation différentielle :

$$f'' + p \times f' + q \times f = 0$$

donc en dérivant n fois et en évaluant en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n+2)}(0) + p \times f^{(n+1)}(0) + q \times f^{(n)}(0) = 0$$

si l'on ajoute à ceci que $f(0) = u_0$ et $f'(0) = 0$ on en déduit que : pour tout entier n, $u_n = f^{(n)}(0)$. Reste à calculer les dérivées n-ièmes des fonctions f_1 et f_2, ce qui se fait aisément en remarquant que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^{\lambda \times t})^{(n)} = \lambda^n \, e^{\lambda \times t}, \quad (t \times e^{\lambda \times t})^{(n)} = \lambda^{n-1} \, (n + \lambda \times t) \times e^{\lambda \times t}$$

d'où, en évaluant cette égalité en $t = 0$:

$$(e^{\lambda \times t})^{(n)}(0) = \lambda^n, \quad (t \times e^{\lambda \times t})^{(n)}(0) = n \times \lambda^{n-1},$$

enfin, si $x + i\, y = \mu = \rho \times e^{i\,\theta}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(e^{x \times t} \times \cos(y \times t)\right)^{(n)} + i \, \left(e^{x \times t} \times \sin(y \times t)\right)^{(n)} = \left(e^{\mu \times t}\right)^{(n)} = \mu^n \times e^{\mu \times t}$$

donc, en évaluant cette égalité en $t = 0$:

$$\left(e^{x \times t} \times \cos(y \times t)\right)^{(n)}(0) = \rho^n \times \cos(\theta \times n), \quad \left(e^{x \times t} \times \sin(y \times t)\right)^{(n)}(0) = \rho^n \times \sin(\theta \times n),$$

il suffit alors de se souvenir des différentes formules de f_1 et f_2 pour conclure.

■

Remarque(s) 37 : 1. Dans la suite, on appellera équation caractéristique de cette suite l'équation :

$$x^2 + p \times x + q = 0,$$

évidemment, δ est son discriminant. il est alors facile de retrouver les formules dans les trois cas en remarquant que :

(a) dans le cas $\delta > 0$, si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation caractéristique, $a_n = x_1^n$ et $b_n = x_2^n$

(b) dans le cas $\delta = 0$, si x_1 est l'unique solution de l'équation caractéristique, $a_n = x_1^n$ et $b_n = n \times x_1^n$

(c) dans le dernier cas, si z_1 est une solution complexe de l'équation caractéristique dont la partie imaginaire est positive :

$$a_n = \mathrm{Re}(z_1^n), \quad b_n = \mathrm{Im}(z_1^n).$$

2. Nous verrons dans la partie algèbre linéaire du cours une preve plus « directe » de ce résultat.
3. En pratique, les réels C et D sont déterminés par les deux premiers termes de la suite.

Exemple(s) 65 :

65.1 Revenons sur la suite de Fibonacci :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

dans ce cas, l'équation caractéristique :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

admet pour racines :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc deux uniques constantes C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = C \times \varphi^n + D \times \psi^n.$$

Reste à déterminer les constantes C et D ; les deux premières valeurs de la suite donnent :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ C \times \varphi + D \times \psi = 1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

65.2 Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0, \quad u_0 = u_1 = 1$$

l'équation caractéristique :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

a pour discriminant $\delta = -3$ et

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

on en déduit qu'il existe deux uniques constantes C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C \times \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right) + D \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right).$$

Pour déterminer les constantes C et D, on utilise les deux premières valeurs de la suite :

$$\begin{cases} C = 1 \\ -C \times \frac{1}{2} + D \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases}$$

On en déduit $C = 1$ et $D = \sqrt{3}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right) + \sqrt{3} \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n\right).$$

Le cas complexe est plus simple à énoncer :

Théorème 7.2.9 : *Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, $\delta = p^2 - 4q$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + p \times u_{n+1} + q \times u_n = 0.$$

Alors :

$$\boxed{\exists!(C, D) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C \times a_n + D \times b_n}$$

avec :

1. *Si $\delta \neq 0$:*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1^n, \quad b_n = \lambda_2^n,$$
où λ_1 et λ_2 sont les deux solutions de l'équation caractéristique $z^2 + p \times z + q = 0$
2. *si $\delta = 0$:*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda^n, \quad b_n = n \times \lambda^{n-1},$$
où λ est l'unique solution de l'équation caractéristique.

Démonstration : Cette preuve sera faire dans le chapitre « algèbre linéaire ».

■

Exemple(s) 66 :

66.1 Cherchons l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad , u_{n+2} = (3 - 2i) \times u_{n+1} - (5 - 5i) \times u_n.$$

Commençons pour ceci par chercher les solutions complexes de l'équation caractéristique :

$$z^2 - (3 - 2\,i) \times z + (5 - 5\,i) = 0.$$

Le discriminant de cette équation s'écrit :

$$\delta = (3 - 2\,i)^2 - 4\,(5 - 5\,i) = -15 + 8\,i.$$

Pour trouver une racine carrée de ce complexe, on utilise la méthode habituelle, $r = x + y\,i$ est une racine carrée de δ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ x^2 + y^2 = 17 \\ 2\,x \times y = 8 \end{cases}$$

On en déduit la racine carrée $r = 1 + 4\,i$ puis les solutions complexes :

$$\lambda_1 = 2 + i \quad \lambda_2 = 1 - 3\,i$$

il existe donc des uniques complexes C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C \times (2 + i)^n + D \times (1 - 3\,i)^n$$

que l'on détermine grâce aux premières valeurs de la suite :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ C \times (2 + i) + D \times (1 - 3\,i) = 1 + 4\,i \end{cases}$$

ce qui donne $C = 1$ et $D = -1$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2 + i)^n - (1 - 3\,i)^n.$$

7.2.2 Quelques généralités sur les suites réelles

7.2.2.1 Monotonie

Les notions de monotonie se généralisent sans difficulté aux suites réelles : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$,
2. strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$,
3. décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$,
4. strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$,
5. monotone si elle est croissante ou décroissante
6. strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
7. majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$
8. minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$
9. bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si : $\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

nous pouvons ajouter à ces notions une dernière, plus spécifique aux suites numériques : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n = u_{n_0}.$$

Remarque(s) 38 : 1. Si la suite est donnée par une formule explicite $u_n = f(n)$ où f est une fonction réelle à valeurs réelles, il est **suffisant** que f soit croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le soit, mais ce n'est pas une condition nécessaire, comme la montre la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(2\,\pi \times n) = 1$$

ceci s'étend sans difficulté aux autres notions de monotonie.

2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   Démonstration : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors,
   $$\exists (M,m)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad -|m|\leqslant m\leqslant u_n\leqslant M\leqslant |M|$$
   on en déduit :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant \max(|M|,|m|),$$
   la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.
   Réciproquement, si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :
   $$\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n|\leqslant M$$
   on en déduit :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad -M\leqslant u_n\leqslant M;$$
   la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

■

Exemple(s) 67 :

67.1 La suite définie par :
$$\forall n\geqslant 1,\quad u_n=\left\lfloor 2+\frac{4}{n}\right\rfloor$$
est décroissante car définie explicitement par une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $u_n\geqslant 2$ et $u_5=2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir de $n=5$.

67.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante ; alors la suite définie par :
$$\forall n\geqslant 1,\quad v_n=\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$$
est aussi croissante. En effet, pour tout entier $n\geqslant 1$:
$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}}{n+1}-\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}=\frac{n\times u_{n+1}-(u_1+\cdots+u_n)}{n\times(n+1)}\geqslant 0.$$

7.2.2.2 Convergence d'une suite réelle

Définition 7.2.35 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $l\in\mathbb{R}$ comme limite lorsque n tend vers $+\infty$ si :*
$$\forall \epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,\quad |u_n-l|\leqslant\epsilon$$
On dit qu'une telle suite est convergente.

Remarque(s) 39 :

1. On écrit alors :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n=l$$
et l'on dira souvent que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$.
2. L'inégalité $|u_n-l|\leqslant\epsilon$ peut se réécrire :
$$-\epsilon+l\leqslant u_n\leqslant\epsilon+l$$
ce qui peut se comprendre « tout intervalle ouvert centré en l contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang ».

3. Cette définition s'étend aux limites $+\infty$ et $-\infty$ de la façon suivante :
   (a) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :
   $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A.$$
   (b) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :
   $$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant B.$$
4. Rappelons que :
   $$\text{« Si } \forall \epsilon > 0,\ x \leqslant \epsilon \text{ alors } x \leqslant 0 \text{ »}$$
   est une proposition vraie. En effet, sa contraposée est : « Si $x > 0$ alors $\exists \epsilon > 0,\ x > \epsilon$ » et elle est vraie car si $x > 0$ alors $\epsilon = x/2 > 0$ et $x > x/2 = \epsilon$.

Propriété(s) 7.2.24 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors cette limite est unique.

Démonstration : Soit $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$. Montrons que $l = l'$. Par définition, si $\epsilon > 0$ est fixé, on a :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |u_n - l'| \leqslant \epsilon$$
pour que ces deux inégalités soient vraies au même temps, on pose $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a alors, si $n \geqslant n_2$:
$$|u_n - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad |u_n - l'| \leqslant \epsilon$$
On en déduit :
$$|l - l'| \leqslant |u_n - l| + |u_n - l'| \leqslant 2\,\epsilon$$
cette dernière égalité état vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit $|l - l'| \leqslant 0$ donc $l = l'$.

■

Exemple(s) 68 :

68.1 Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c$$
tend vers c lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = 0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - c| = 0 < \epsilon.$$

68.2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}.$$
Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, si $\epsilon > 0$ alors comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \times \epsilon \geqslant 0$. On en déduit, pour $n \geqslant n_0$:
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \epsilon.$$

68.3 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = n.$$
Alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, si $A \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant A$ donc :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad n \geqslant n_0 \geqslant A.$$

68.4 Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \exp(n).$$
Alors $e_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En effet comme $\mathbb{R}$ est archimédien, pour $A \in \mathbb{R}$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n_0 \geqslant \ln(|A|+1)$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad e^n \geqslant e^{n_0} \geqslant A$$
on montre de la même façon que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

68.5 La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n$$
n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$; en effet si une telle limite l existait, alors par la définition pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, la définition donne :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |l - (-1)^n| \leqslant \frac{1}{2}.$$
Donc pour n pair supérieur ou égal à n_0 :
$$\frac{1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3}{2}$$
et pour n impair supérieur ou égal à n_0 :
$$-\frac{3}{2} \leqslant l \leqslant -\frac{1}{2}$$
mais ces deux inéquation sont incompatibles... absurde ! Il n'existe donc pas de telle limite l.

$\boxed{\text{Il faut donc impérativement toujours vérifier qu'une limite existe avant d'en parler !}}$

Traitons maintenant quelques exemples moins triviaux :

Exemple(s) 69 :

69.1 La suite définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n+\cos(n)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet en utilisant les deux inégalités triangulaires, on a pour $n \geqslant 2$ [2]
$$\left|\frac{\sin(n)}{n+\cos(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n-1}$$
Donc, si l'on fixe $\epsilon > 0$ et l'on prend n_0 tel que $(n_0 - 1) \times \epsilon \geqslant 1$, on a :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{\sin(n)}{n+\cos(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{n_0-1} \leqslant \epsilon.$$

69.2 On considère maintenant le série harmonique :
$$\forall n \geqslant 1, \quad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Commençons par remarquer que, cette suite est croissante car :
$$h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$
L'idée est de considérer, pour $n \in \mathbb{N}$ la différence :
$$h_{2\,n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}$$

2. en général, si l'on a conjecturé une limite l, c'est une bonne idée de chercher à majorer $|u_n - l|$ grâce aux inégalités triangulaires.

On en déduit, pour tout entier m :

$$h_{2^m} - 1 = \sum_{k=0}^{m-1} h_{2^{k+1}} - h_{2^k} \geqslant \frac{m}{2}$$

Finalement, si A est un réel fixé et $\frac{m_0}{2} + 1 \geqslant A$, on a, pour tout $n \geqslant 2^{m_0}$, comme la suite est croissante :

$$h_n \geqslant h_{2^{m_0}} \geqslant \frac{m_0}{2} + 1 \geqslant A.$$

Donc $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

69.3 Remarquons que, cependant,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée !

7.2.2.3 Quelques propriétés sur les limites

Propriété(s) 7.2.25 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$.
Alors :

1. $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + l'$,
2. $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \times l$,
3. $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \times l'$,
4. si $l \neq 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n \neq 0$ et

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l}.$$

Remarque(s) 40 :
1. Cette propriété s'étend aux limites infinies à condition de prendre les précautions habituelles pour les formes indéterminées. Vous pouvez consulter le paragraphe 3.4.1 du cours à ce propos. C'est un excellent exercice de faire soi-même la preuve d'au moins une de ces propriétés.
2. Cette propriété, associée aux exemples du paragraphe précédent permet maintenant de raisonner « comme pour les limites de fonctions » pour les suites définies explicitement.

Démonstration :

1. Montrons la première propriété. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par définition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1,\ |v_n - l'| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Pour que ces deux propriétés soient vraies en même temps, on prend $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \epsilon.$$

On en déduit que

$$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + l'.$$

2. Pour le deuxième point, commençons par remarquer que si $\lambda = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, fixons $\epsilon > 0$; alors par la définition appliquée au réel strictement positif $\frac{\epsilon}{|\lambda|}$:
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \frac{\epsilon}{|\lambda|}.$$
En multipliant cette dernière inégalité par le réel strictement positif $|\lambda|$, on en déduit :
$$|\lambda \times u_n - \lambda \times l| = |\lambda| \times |u_n - l| \leqslant \epsilon$$
donc $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \times l$.
3. Commençons par remarquer que, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vars l', la définition pour $\epsilon = 1$ donne :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |v_n - l'| \leqslant 1$$
on en déduit, pour $n \geqslant n_0$: $|v_n| \leqslant |v_n - l'| + |l'| \leqslant 1 + |l'|$. Remarquons maintenant que, par définition si $\epsilon > 0$ est fixé :
$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |u_n - l| \leqslant \frac{\epsilon}{1+|l'|+|l|} \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_2, \quad |v_n - l'| \leqslant \frac{\epsilon}{1+|l'|+|l|}$$
Donc, pour $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$:
$$|u_n \times v_n - l \times l'| = |(u_n - l) \times v_n + l \times (v_n - l')| \leqslant |v_n| \times |u_n - l| + |l| \times |v_n - l'| \leqslant (1+|l'|+|l|) \times \frac{\epsilon}{1+|l'|+|l|} = \epsilon.$$
Finalement, $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \times l'$.
4. Commençons par prouver le premier point. Par définition, pour $\epsilon = |l|/2 > 0$ (car $l \neq 0$) :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \frac{|l|}{2}.$$
On en déduit, par la deuxième inégalité triangulaire, pour $n \geqslant n_0$:
$$|u_n| = |u_n - l + (-l)| \geqslant ||l| - |u_n - l|| \geqslant \frac{|l|}{2} > 0.$$
Donc, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$. Soit maintenant $\epsilon > 0$. Alors :
$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |u_n - l| \leqslant \frac{\epsilon \times |l|^2}{2}.$$
On en déduit, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$:
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|l - u_n|}{|l| \times |u_n|} \leqslant \frac{2}{|l|^2} \times |l - u_n| \leqslant \epsilon.$$
c'est-à-dire :
$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l}.$$

■

Exemple(s) 70 :

70.1 Montrons qu'aucune des suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n)$$
ne converge. Pour ceci, commençons par remarquer que :
$$\cos(n-1) = \cos(1) \times \cos(n) + \sin(1) \times \sin(n)$$
donc si (u_n) converge, alors (v_n) aussi. Mais de plus, si (v_n) converge vers l, comme :
$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos(n) \times \sin(1),$$
$\cos(n)$ converge vers $(l-l)/(2\sin(1)) = 0$. En particulier, la convergence d'une des deux suites implique toujours celle de l'autre. De plus, d'après la première égalité, $\sin(n)$ converge vers 0. Mais enfin, l'égalité
$$\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$$
implique en passant à la limite $0 = 1$. Absurde !

Propriété(s) 7.2.26 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration : Posons $z_n = u_n - v_n$. Par la propriété précédente, $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - l'$ et par définition, pour tout n, $z_n \leqslant 0$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |z_n - (l - l')| \leqslant \epsilon.$$

On en déduit $-\epsilon \leqslant z_n - (l - l')$ donc comme $z_n \leqslant 0$:

$$l - l' \leqslant z_n + \epsilon \leqslant \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit : $l - l' \leqslant 0$.

■

Remarque(s) 41 :

1. Attention ! Cette propriété n'est vraie que avec des inégalités larges. En effet,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \leqslant 0.$$

2. Attention également ! Dans cette propriété, **il faut** que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites. « Passer à la limite » dans l'inégalité :

$$(-1)^n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

n'a par exemple aucun sens !

Exemple(s) 71 :

71.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du segment $[a, b]$. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors $l \in [a, b]$. En effet, il suffit de passer à la limite dans les inégalités :

$$a \leqslant u_n \leqslant b.$$

71.2 La limite d'une suite positive est positive ; celle d'une suite négative est négative.

7.2.3 Théorèmes de convergence

7.2.3.1 Comparaisons de suites

Propriété(s) 7.2.27 : Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration : Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors par définition,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A$$

mais alors, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

■

Remarque(s) 42 : 1. Sauriez-vous énoncer et prouver une propriété analogue pour $-\infty$?

2. La force de cette propriété est qu'elle permet de **prouver** que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. La valeur de cette limite est un bonus agréable...

Exemple(s) 72 :

72.1 La suite $u_n = (2+\sin(n))\times n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2+\sin(n))\times n \geqslant n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

72.2 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

72.3 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}.$$

Alors, comme une racine est toujours positive, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \sqrt{n}$$

par théorème de comparaison, on en déduit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 7.2.10 (dit des gendarmes) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui tendent vers le même réel l. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers le même réel l,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |v_n - l| \leqslant \epsilon.$$

En particulier, pour $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$-\epsilon \leqslant u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \epsilon$$

c'est-à-dire $|v_n - l| \leqslant \epsilon$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

■

Exemple(s) 73 :

73.1 Considérons la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Alors, pour tout n non nul :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

73.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n).$$

Remarquons que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. De plus, par l'inégalité « géométrique » de la fonction sinus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$$

donc par une rapide récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n} \times u_0 = \frac{1}{2^n}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure : a suite (u_n) converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

73.3 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors la suite définie par $v_n = \frac{a^n}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{a^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a}{k};$$

mais la suite $\frac{a}{k}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ donc :

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant k_0, \quad \frac{a}{k} \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit, pour $n \geqslant k_0$:

$$0 \leqslant v_n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{a}{k}\right) \times \frac{1}{2^{n-k_0}}$$

mais la suite $\frac{1}{2^{n-k_0}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc (v_n) aussi par le théorème des gendarmes.

7.2.3.2 Suites monotones

Théorème 7.2.11 : *Toute suite croissante majorée converge. De même, toute suite décroissante minorée converge.*

Démonstration : Montrons le premier point. Le deuxième se montre de la même façon. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Alors l'ensemble

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide, majoré. Il admet donc une borne supérieure, que l'on appelle l. Soit $\epsilon > 0$; par caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_{n_0} \geqslant l - \epsilon$$

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant l - \epsilon$$

mais l est un majorant de A donc $u_n \leqslant l$. On en déduit $0 \leqslant l - u_n \leqslant \epsilon$ donc $|u_n - l| \leqslant \epsilon$. La suite (u_n) converge donc.

■

Exemple(s) 74 :

74.1 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On remarque que, pour $n \geqslant 2$ par l'inégalité « géométrique » du logarithme :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante. De plus, toujours par l'inégalité géométrique du logarithme : pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$, donc :

$$u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante, minorée par 0, elle converge donc. On note :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

On ne sait que peu de choses de la constante γ, appelée constante d'Euler–Mascheroni : par exemple, on ne sait pas si il s'agit d'un rationnel ou non.

74.2 On considère maintenant la suite définie par :

$$u_0 \in [0,2], \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$$

Montrons que u_n tend vers 2. Commençons par remarquer que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.

(a) la fonction f est clairement croissante et $f(0) = 1 \geqslant 0$, $f(1) = \frac{5}{4} \leqslant 2$. L'intervalle $[0,2]$ est donc **stable par** f, c'est-à-dire que si $x \in [0,2]$, $f(x) \in [0,2]$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,2]$$

(b) Remarquons maintenant que pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$; pour étudier une éventuelle monotonie de (u_n), il suffit alors d'**étudier le signe de** $f(x) - x$ pour $x \in [0,2]$. Ici :

$$f(x) - x = \frac{x^2}{4} + 1 - x = \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{(x-2)^2}{4} \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

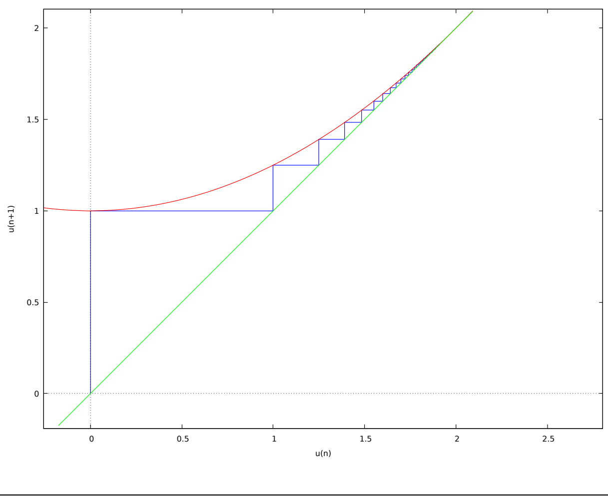
(c) Le suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 2, elle converge donc. Notons $l \in [0,2]$ sa limite. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, on trouve :

$$l = \frac{l^2}{4} + 1 = f(l)$$

notez que l **est un point fixe de** f **sur l'intervalle** $[0,2]$**.** Il reste à résoudre l'équation pour trouver l :

$$l \in [0,2], \quad f(l) - l = 0 \iff \frac{(l-2)^2}{4} = 0 \iff l = 2.$$

Finalement, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$.



74.3 Considérons maintenant la suite définie par :

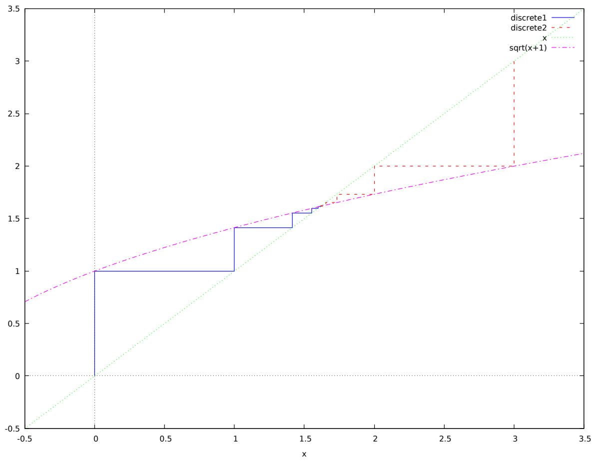
$$u_0 \in [-1, +\infty[, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

(a) Commençons par chercher un intervalle stable ; on a $u_{n+1} = g(u_n)$. De plus, la fonction g clairement croissante sur $[-1, +\infty[$ et $g(-1) = 0$, l'intervalle $[-1, +\infty[$ est donc stable, en particulier, ceci prouve que (u_n) est bien définie et que pour tout n, $u_n \in [-1, +\infty[$.

(b) Étudions maintenant le signe de $g(x) - x$. On a [3]

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \sqrt{x+1} - x \leqslant 0 \iff x + 1 \leqslant x^2 \iff x \in [\varphi, +\infty[\,.$$

Malheureusement pour nous, il y a plusieurs possibilités dans l'intervalle $[-1, +\infty[$, on ne peut donc pas conclure que la suite est croissante ou décroissante. Heureusement pour nous, un dessin nous redonne espoir :



Il semble qu'on puisse résoudre le problème en faisant deux cas.

(c) Retour aux intervalles stables : les la fonction g est croissante sur les intervalles $[-1, \varphi]$ et sur $[\varphi, +\infty[$. De plus, $g(-1) = 0$ et $g(\varphi) = \varphi$. On a donc deux intervalles stables :

$$[-1, \varphi] \quad \text{et} \quad [\varphi, +\infty[.$$

On en déduit deux cas :

i. si $u_0 \in [-1, \varphi]$, pour tout n, $u_n \in [-1, \varphi]$ et par (b), (u_n) est croissante. Elle est croissante majorée donc convergente. Notons $l \in [-1, \varphi]$ sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

$$l = g(l) \Longrightarrow l = \varphi$$

donc dans ce cas, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

ii. si $u_0 \in [\varphi, +\infty[$, pour tout n, $u_n \in [\varphi, +\infty[$ et par (b), (u_n) est décroissante. Elle est décroissante minorée donc convergente. Notons $l \in [\varphi, +\infty[$ sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

$$l = g(l) \Longrightarrow l = \varphi$$

donc dans ce cas, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

On en conclut : dans tous les cas : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

On peut légèrement généraliser ce théorème :

Propriété(s) 7.2.28 : Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

3. On rappelle que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour obtenir la dernière équivalence, il faut faire deux cas, suivant si x est positif ou négatif...

Démonstration : Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$, mais alors, comme (u_n) est croissante, pour tout entier supérieur ou égal à n_0 ;

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A.$$

La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

■

Exemple(s) 75 :

75.1 Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$

Montrons que u_n tend vers $+\infty$. Pour ceci, on reprend les résultats de l'exemple précédent ; on a $u_{n+1} = f(u_n)$ donc :

(a) f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$, $f(2) = 2$ donc l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. On en déduit :

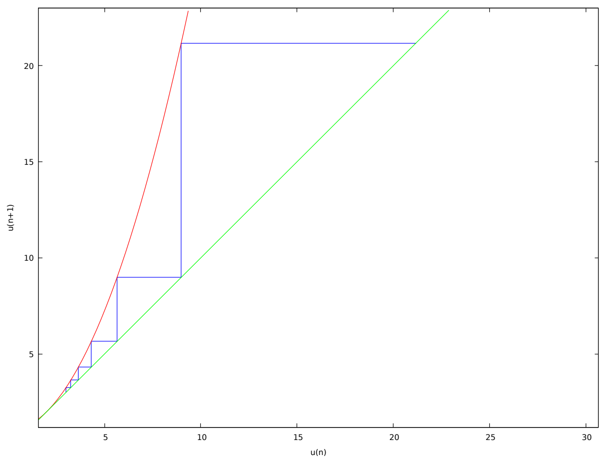
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]2, +\infty[.$$

(b) $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]2, +\infty[$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) par la propriété, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l ou tend vers $+\infty$; en éliminant la première possibilité, nous aurons la deuxième. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Alors en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, on a :

$$l = f(l) \Longrightarrow l = 2 \quad \text{ou} \quad l = -2$$

ce qui est impossible ! En effet, $u_n \geqslant u_0 > 2$ donc en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $l \geqslant u_0 > 2$. On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.



7.2.3.3 Suites adjacentes

Définition 7.2.36 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si :*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,*
2. *$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante,*
3. *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Remarque(s) 43 : 1. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$
En effet, dans le cas contraire, on aurait : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} > v_{n_0}$ donc, par la monotonie des deux suites, pour $n \geqslant n_0$:
$$u_n \geqslant u_{n_0} > v_{n_0} \geqslant v_n$$
ce qui contredit que $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. L'exemple canonique de suites adjacentes est celui des approximations décimales d'un réel, il s'agit en fait d'une autre façon de définir un réel par approximations.

Théorème 7.2.12 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite.*

Démonstration : Par ce que l'on vient de remarquer, comme (v_n) est décroissante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant b_0$$
la suite (u_n) est donc croissante, majorée, donc elle converge. Si l'on note l sa limite, comme $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $v_n = u_n - (u_n - v_n)$ converge aussi vers la même limite.

■

Remarque(s) 44 : 1. Par croissance de (u_n) et décroissance de (v_n), on a alors :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n.}$$
On en déduit que v_n est une approximation par excès à $v_n - u_n$-près de l et u_n est une approximation par défaut à $v_n - u_n$-près de l, ce qui peut servir pour calculer une valeur approchée d'un réel.

Exemple(s) 76 :

76.1 Voyons par exemple l'utilisation de deux telles suites pour calculer une valeur approchée de e. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}.$$
Rappelons que (a_n) tend vers e lorsque n tend vers $+\infty$.La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante. Concernant b_n, on a :
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{n! \times n \times (n+1)^2}$$
la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Enfin,
$$b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Par la remarque précédente, on a l'inégalité, pour tout entier n :
$$a_n \leqslant e \leqslant b_n$$
Ce qui signifie donc, que pour tout entier n, on a :
$$0 \leqslant e - a_n \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!},$$
ce qui nous donne, si $\frac{1}{n\times n!} \leqslant 10^{-k}$ une valeur de e à 10^{-k}-près.

7.2.4 Suites extraites

7.2.4.1 Définition, premières propriétés

Définition 7.2.37 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est fonction strictement croissante.

Remarque(s) 45 : On dit souvent qu'une suite extraite est « formée de certains termes de la suite (u_n) ».

Exemple(s) 77 :

77.1 Les exemples les plus utilisés de suites extraites sont les suites :

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}.$$

77.2 Si l'on considère la suite définie par la formule $u_n = (-2)^n$, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour formules :

$$u_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2 \times 4^n.$$

Il s'agit dans les deux cas de suites géométriques de raison 4.

77.3 On peut se servir des suites extraites pour contredire certaines affirmations, il est par exemple clair que si une suite est bornée, majorée ou minorée, alors toutes ses suites extraites aussi. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n \times n$ n'est ni majorée ni minorée car :

$$u_{2n} = 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Propriété(s) 7.2.29 : Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite l et soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commençons par montrer par récurrence que comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

1. *initialisation :* $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$,
2. *hérédité :* soit N un entier naturel fixé. Supposons que $\varphi(N) \geqslant N$. Alors $N+1 > N$ donc comme φ est strictement croissante :

$$\varphi(N+1) > \varphi(N) \geqslant N$$

mais $\varphi(N+1)$ est un entier naturel, donc $\varphi(N+1) \geqslant N+1$.

Par principe de récurrence, la formule est donc exacte. Montrons maintenant que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon.$$

Mais alors, si $n \geqslant n_0$, par ce qu'on vient de prouver, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc :

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \epsilon.$$

■

Remarque(s) 46 : 1. La même preuve nous donne sans difficulté que si (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors toutes ses suites extraites aussi.

Cette propriété sert à montrer facilement qu'une suite n'est pas convergente, en effet :

Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit d'exhiber deux de ses sous-suites qui ont une limite différente.

Exemple(s) 78 :

78.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente ; en effet :

$$u_{2\,n} = 1 + \frac{1}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = -1 + \frac{1}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

78.2 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

est divergente. En effet,

$$u_{3\,n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u_{3\,n+1} = n + \frac{1}{3} - \left\lfloor n + \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

78.3 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + (-2)^n \times \sin\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$$

est divergente. En effet,

$$u_{2\,n} = 2^{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{4\,n+1} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

7.2.4.2 Application aux « escargots ».

On utilise parfois les suites extraites pour montrer qu'une suite converge. Par exemple, on a :

Si $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite** l, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_{2\,n} - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |u_{2\,n+1} - l| \leqslant \epsilon.$$

Donc, si $n \geqslant \max(2\,n_0, 2\,n_1 + 1)$ il y a deux cas :

1. Si n est pair, $n = 2\,k$ et alors $k \geqslant n_0$ et donc $|u_n - l| = |u_{2\,k} - l| \leqslant \epsilon$
2. Si n est pair, $n = 2\,k + 1$ et alors $k \geqslant n_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2\,k+1} - l| \leqslant \epsilon$

dans tous les cas, $|u_n - l| \leqslant \epsilon$.

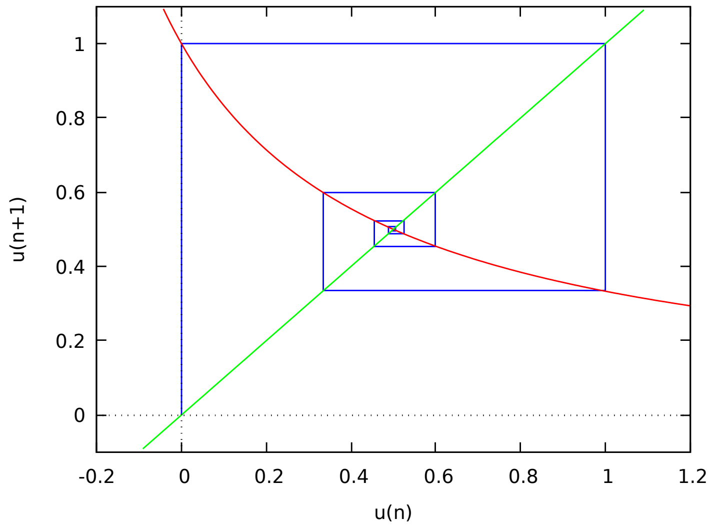
∎

Exemple(s) 79 :

79.1 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2\,u_n}$$

Commençons par remarquer que si l'on pose $f(x) = \frac{1}{1+2\,x}$, l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f. Faisons maintenant une dessin :



...qui nous suggère d'étudier les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Commençons par étudier la suite définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{2n}$. On a :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad v_0 = 0 \leqslant v_1 = \frac{1}{3}.$$

Comme la fonction f est décroissante, une récurrence immédiate donne alors, pour tout entier naturel : $v_{n+1} \geqslant v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Elle est de plus majorée, donc elle converge.

(b) Si l'on considère maintenant la suite définie pour tout entier naturel par $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$, comme la fonction f est décroissante et pour tout entier naturel : $v_{n+1} \leqslant v_n$, on a $w_{n+1} = f(v_{n+1}) \leqslant w_n = f(v_n)$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée, elle converge aussi.

(c) Il reste à montrer qu'elles convergent vers la même limite. pour ceci, il faut remarquer que :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(f(w_n))$$

donc que par les théorèmes généraux, en passant à la limite dans ces égalités, leurs limites respectives sont des points fixes de $g = f \circ f$. Calculons-les. On a :

$$g(l) = l \Longleftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{2}{1+2l}} = l \Longleftrightarrow \frac{2l^2 + l - 1}{2l+3} = 0.$$

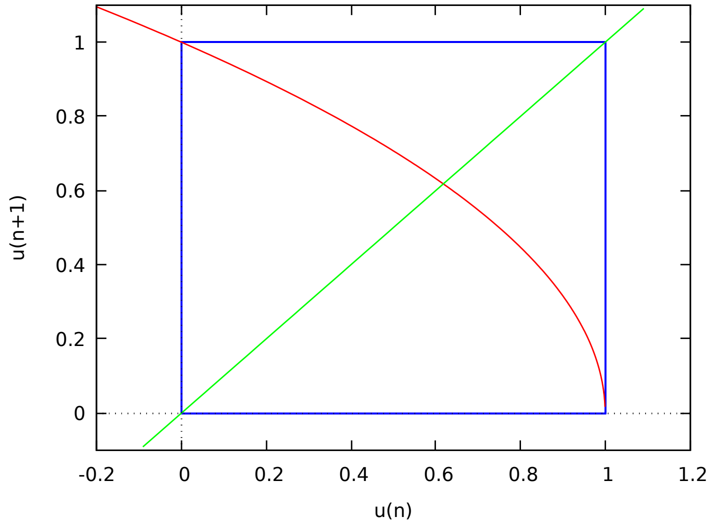
Si l est un point fixe de g, on a donc $l = \frac{1}{2}$ ou $l = -1$. Heureusement pour nous, une éventuelle limite des suites (v_n) et (w_n) doit appartenir à l'intervalle $[0,1]$, il n'y a donc qu'une valeur possible pour ces limites : $l = \frac{1}{2}$.

Finalement, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite : $\frac{1}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.}$$

79.2 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$$



alors :

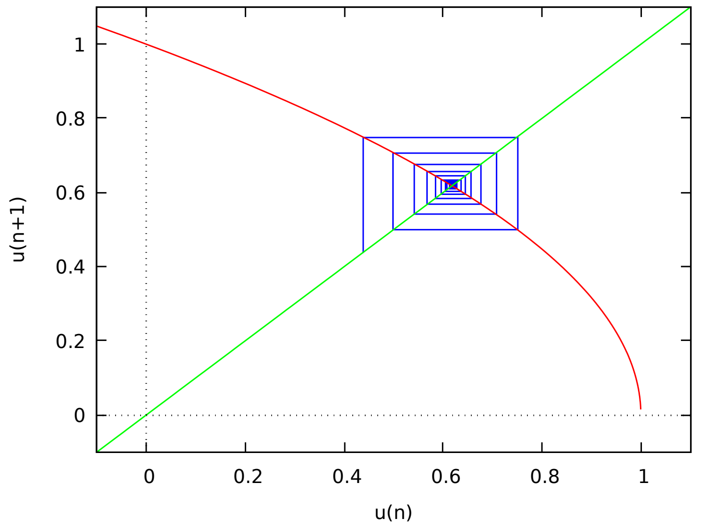
$$u_{2\,n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas (on parle de 2-cycle).

79.3 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = \frac{7}{16}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$$

Commençons par remarquer que si l'on pose $f(x) = \sqrt{1-x}$, l'intervalle $]0,1[$ est stable par f. Faisons maintenant une dessin :



...qui nous suggère d'étudier les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Commençons par étudier la suite définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{2\,n}$. On a :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{7}{16} \leqslant v_1 = \frac{1}{2}.$$

Comme la fonction f est décroissante, une récurrence immédiate donne alors, pour tout entier naturel : $v_{n+1} \geqslant v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Elle est de plus majorée, donc elle converge.

(b) Si l'on considère maintenant la suite définie pour tout entier naturel par $w_n = u_{2\,n+1} = f(v_n)$, comme la fonction f est décroissante et pour tout entier naturel : $v_{n+1} \geqslant v_n$, on a $w_{n+1} = f(v_{n+1}) \leqslant w_n = f(v_n)$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée, elle converge aussi.

(c) Il reste à montrer qu'elles convergent vers la même limite. pour ceci, il faut remarquer que :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(f(w_n))$$

donc que par les théorèmes généraux, en passant à la limite dans ces égalités, leurs limites respectives sont des points fixes de $g = f \circ f$. Calculons-les. On a :

$$g(l) = l \Longleftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{1-l}} = l \Longrightarrow l^2 = 1-\sqrt{1-l} \Longrightarrow 1-l = (1-l^2)^2 \Longrightarrow l \times (l-1) \times (l^2+l-1) = 0.$$

Si l est un point fixe de g, il s'agit donc de l'un des réels : 0, 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (notez qu'un des quatre n'est en fait pas un point fixe car nous n'avons procédé que par implication). Heureusement pour nous, une éventuelle limite des suites (v_n) et (w_n) doit appartenir à l'intervalle $[u_0, u_1] \subset]0,1[$ (on utilise ici leur sens de variation), il n'y a donc qu'une valeur possible pour ces limites : $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ [4], on en déduit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$$

Remarque(s) 47 : 1. Fondamentalement, la différence entre les exemples de ce paragraphe et ceux du paragraphe 7.2.3.2 est que, dans ce cas, le fonction f est décroissante, alors que dans le premier, elle était croissante sur l'intervalle stable considéré.

2. Le fait que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones dans ce cas est général, mais même si cette information est intéressante, elle ne permet pas de conclure : elles pourraient converger vers des limites différentes (comme dans le deuxième exemple), il est de plus parfois utile de savoir plus précisément si elles sont croissantes ou décroissantes, comme le montre le troisième exemple.

7.2.4.3 Un peu de poésie dans ce monde de brutes

Les deux théorèmes de ce paragraphe sont hors programme.

Théorème 7.2.13 (du soleil levant) : *Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

Démonstration : (idée de la) On considère le graphe de la suite dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, que l'on imagine éclairé par un soleil rasant par la droite. On considère l'ensemble des « sommets » qui voient le soleil [5]. Si ils sont infinis, ils définissent une suite extraite décroissante. Si ils sont finis, on va au-delà du dernier vers la droite et l'on prend le premier élément à l'ombre, il est forcément caché par un sommet, qui est lui aussi à l'ombre, en réitérant ce procédé, on construit ainsi une suite extraite croissante.

■

Théorème 7.2.14 (Bolzano-Weierstrass) : *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : Par le théorème précédent, elle admet une suite extraite monotone et bornée, donc convergente.

■

7.2.5 Suites complexes

Commençons par remarquer que, comme le symbole $\leqslant$ n'a pas de sens dans les complexes, les notions de monotonie n'ont pas de sens pour les suites complexes. On peut cependant « sauver » une notion similaire : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (complexe) est **bornée** si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée au sens réel.

4. Elles sont même adjacentes !
5. on peut le quantifier : $\{u_n, \quad \forall p > n, u_n > u_p\}$

Définition 7.2.38 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon.$$

Remarque(s) 48 :
1. Notez que la seule différence avec la définition pour les suites réelles est que la valeur absolue est devenue un module.
2. Comme pour les suites réelles, une méthode efficace pour montrer qu'une suite complexe converge est de montrer que la quantité $|u_n - l|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, c'est d'autant plus utile ici que cette suite est alors réelle !
3. Contrairement au cas réel, il n'existe pas de notion de suites convergeant vers $\pm\infty$.
4. Récapitulons : les notions suivantes, pour les suites complexes :

ont du sens	n'ont pas de sens
converge, bornée, suite extraite, stationnaire, constante.	croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée, tend vers $\pm\infty$.

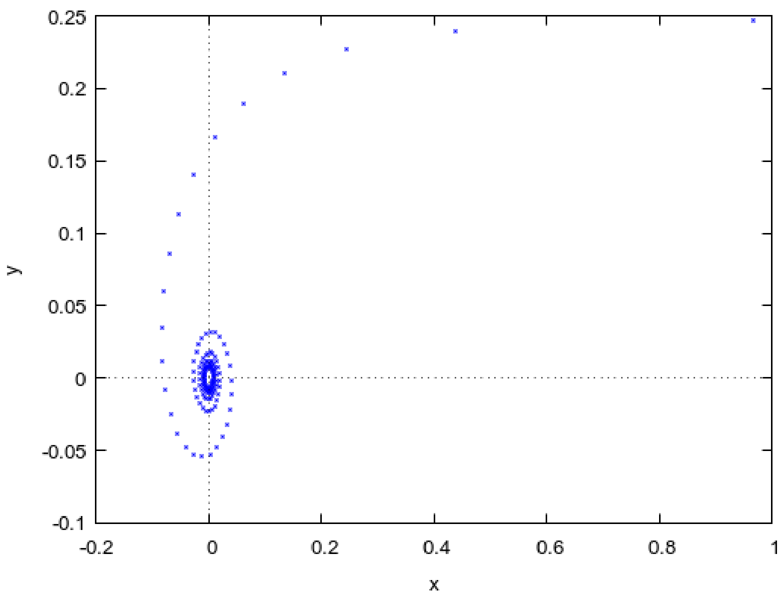
Exemple(s) 80 :

80.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{e^{i\,\frac{n}{4}}}{n}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$



Il existe une deuxième façon de relier les suites complexes aux suites réelles, via les parties réelles et imaginaires :

Proposition 7.2.9 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b \Longleftrightarrow \left[\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b\right].$$

Démonstration : Le point clé de cette preuve sont les inégalités suivantes (faites un dessin !). Si $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, alors :

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|.$$

Procédons maintenant par double implication.

1. Supposons que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b$. Alors :

$$|\operatorname{Re}(u_n) - a| = |\operatorname{Re}(u_n - l)| \leqslant |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   on en déduit que : $\operatorname{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et de même que $\operatorname{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

2. Réciproquement, si l'on suppose que :

$$\operatorname{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$$

   alors :

$$|u_n - l| \leqslant |\operatorname{Re}(u_n - l)| + |\operatorname{Im}(u_n - l)| = |\operatorname{Re}(u_n) - a| + |\operatorname{Im}(u_n) - b| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b$.

■

Remarque(s) 49 :

1. En particulier, grâce à cette proposition, on en déduit que la limite d'une suite complexe, si elle existe, est unique.
2. Des théorèmes d'opérations sur les limites réelles, on en déduit également les mêmes théorèmes sur les limites de suites complexes.

Exemple(s) 81 :

81.1 Soit $q \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

Alors :

(a) si $|q| < 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(b) si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à 1,

(c) dans tous les autres cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Démonstration : Supposons que $|q| < 1$. Alors :

$$|u_n - 0| = |q^n| = |q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le deuxième cas est immédiat. Supposons maintenant que $|q| \geqslant 1$ et $q \neq 1$. Alors, si l'on suppose par l'absurde que la suite (u_n) converge vers l :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

donc en passant à la limite dans cette égalité $l = q \times l$, donc comme $q \neq 1$, $l = 0$. Absurde ! Comme $|q| \geqslant 1$, $|u_n| \geqslant 1$ pour tout entier naturel n.

■

81.2 En particulier, pour tout $\theta \in]0, 2\,\pi[$ la suite définie explicitement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{i\,n\times\theta}$$

est divergente !

81.3 Cherchons une éventuelle limite de la suite définie par u_0 quelconque et :

$$u_{n+1} = \frac{i}{2}\, u_n + 1.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons-en une formule explicite.

(a) On résout $x = \frac{i}{2}\, x + 1$, ce qui donne $x = \frac{-2}{i-2} = \frac{2}{5} \times (i+2)$.

(b) On pose alors pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - x$. on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{i}{2} \times v_n.$$

Le suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique, de raison $\frac{i}{2}$. Donc pour tout entier naturel n, $v_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0$

(c) On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x.$$

il suffit alors d'utiliser ce qu'on vient de voir : comme $|i/2| = 1/2 < 1$,

$$u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x = \frac{2}{5} \times (i+2).$$

81.4 Déterminons les suites complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+2} - (1+i) \times z_{n+1} + i \times z_n = 0.$$

Une telle suite est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Son équation caractéristique :

$$z^2 - (1+i) \times z + i = 0$$

Dont les deux racines sont :

$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = 1.$$

Si une telle suite complexe vérifie cette relation de récurrence, il existe donc deux uniques complexes C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = C + D \times i^n.$$

Si une telle suite converge, alors ses suites extraites $(u_{4\,n})$ et $(u_{4\,n+2})$ aussi, donc $C + D = C - D$ ce qui implique $D = 0$. Donc si une suite complexe vérifie cette relation de récurrence et converge, elle est constante, et réciproquement, il est clair qu'une suite constante vérifie cette relation de récurrence et converge.

81.5 Considérons la suite définie par :

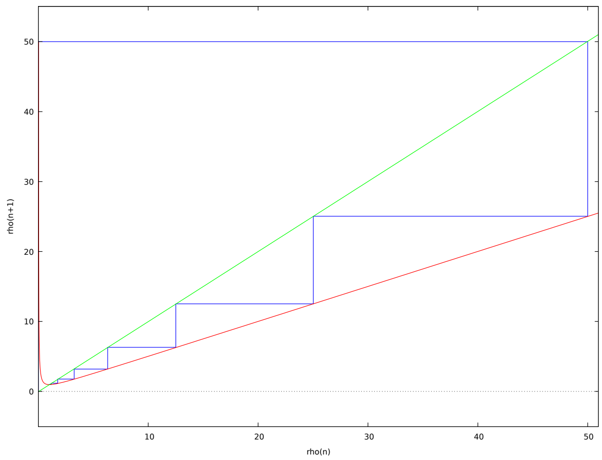
$$z_0 \in \mathbb{C}^*, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{\overline{z_n}}\right).$$

Remarquons que, si $z_n = \rho_n \times e^{i\,\theta_n}$, alors :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \frac{1}{\rho_n}\right) \times e^{i\,\theta_n}.$$

On en déduit que, si $z_0 = \rho \times e^{i\,\theta}$ alors pour tout entier n, on a (à condition de vérifier qu'il existe) : $z_n = \rho_n \times e^{i\,\theta}$, où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle définie par :

$$\rho_0 = \rho > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \frac{1}{\rho_n}\right).$$



De plus, si l'on définit pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = 1/2 \times (x + 1/x)$, on a $f'(x) = 1/2 \times (1 - 1/x^2)$, on en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $[1, +\infty[$ est donc stable par f et pour $n \geqslant 1$, $\rho_n \in [1, +\infty[$. En particulier, ceci prouve que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. De plus :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - x = \frac{1 - x^2}{2\,x} \leqslant 0$$

La suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante. Elle est de plus minorée par 1, elle converge donc vers une limite l. Comme f est continue, on a alors $f(l) = l$ donc $l = 1$. Finalement :

$$\rho_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et l'on en déduit :

$$z_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{i\,\theta}.$$