Nombres complexes

Forme algébrique et forme trigonométrique

▷ 1

Représenter dans le plan complexe les points d'affixe respectives :

$$1+\mathrm{i},\quad -1-\mathrm{i},\quad 5,\quad -3,\quad 3\,\mathrm{i},\quad 4-4\,\mathrm{i},\quad 3+3\,\mathrm{i}.$$

Sans calcul, par des considérations géométriques, donner un argument de chacun de ces nombres.

▷ 2

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1) $|z|=4$, **4)** $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$,

2) $\mathrm{Re}(z)=-2$, **5)** $\arg(z)\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [\pi]$

3) $\mathrm{Im}(z)=1$, **6)** $\arg(z)\equiv\pi\ [\frac{\pi}{4}]$.

▷ 3

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=3+2\,\mathrm{i}-1+3\,\mathrm{i}$, $z_6=(2+\mathrm{i})^3$,

$z_2=12-3\,\mathrm{i}-4(-5+8\,\mathrm{i})$, $z_7=\frac{1}{1+\mathrm{i}}$,

$z_3=(2+\mathrm{i})(3-2\,\mathrm{i})$, $z_8=\frac{1+2\,\mathrm{i}}{1-2\,\mathrm{i}}$,

$z_4=(4-3\,\mathrm{i})^2$ $z_9=\frac{1}{2+\mathrm{i}}-\frac{1}{3+\mathrm{i}}$,

$z_5=(1+\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$, $z_{10}=\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{31}}{(1-\mathrm{i})^{18}}$

▷ 4

Soit $z_1=\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ et $z_2=\frac{4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

1) Mettre ces deux nombres sous forme trigonométrique.

2) En déduire la forme algébrique de z_1z_2, $\overline{z_1}\,z_2^2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

▷ 5

On pose $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_2=3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_3=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$z_1\,z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},\quad z_1^3,\quad z_1\,z_2\,z_3,\quad z_3^4,\quad \frac{z_2}{z_3},\quad \frac{1}{z_3},\quad \overline{z_3}\,z_1\,z_2.$$

▷ 6

Dans chacun des cas suivants, écrire z_k sous forme trigonométrique en déduire sa forme algébrique. Mêmes questions pour $\bar{z}_k$ et $\frac{1}{z_k}$.

$z_1=\frac{6}{1+\mathrm{i}}$, $z_4=-4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

$z_2=(1+\mathrm{i}\,\sqrt{3})^4$, $z_5=(2\sqrt{3}+2\,\mathrm{i})^5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$,

$z_3=3\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_6=\dfrac{(2+2\,\mathrm{i})^6}{(1-\mathrm{i})^4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

► 7

Exprimer un argument de chacun des complexes suivants à l'aide d'un arc-tangente :

$$z_1=2+\mathrm{i},\quad z_2=-3-\mathrm{i},\quad z_3=-\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{i},\quad z_4=\sqrt{3}-2\,\mathrm{i}.$$

► 8

Soit $z=\dfrac{1+\mathrm{i}\,\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}$. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $z^n\in\mathbb{R}$. Même question pour $z^n\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

► 9

On se propose de résoudre l'équation : $\bar{z}=\mathrm{j}z^2$ où $z\in\mathbb{C}$ et $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer le module de toute solution de l'équation. Résoudre l'équation.

► 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z :

1) $2\bar{z}=\mathrm{i}-1$, **5)** $z=2\bar{z}-2+6\,\mathrm{i}$,

2) $\mathrm{i}\bar{z}-\bar{z}+2-\mathrm{i}=0$, **6)** $2z+\mathrm{i}\bar{z}=5-4\,\mathrm{i}$,

3) $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}\bar{z}+\mathrm{i}-2)=0$, **7)** $z^2-\bar{z}+2=0$,

4) $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=\mathrm{i}$, **8)** $4z^2+8\left|z^2\right|-3=0$.

► 11

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Préciser à quelles conditions les expressions suivantes existent, puis déterminer leurs modules et arguments :

1) $\cos(a)-\mathrm{i}\,\sin(a)$, **4)** $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{3}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$, **7)** $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}}$.

2) $\sin(a)-\mathrm{i}\,\cos(a)$, **5)** $1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$,

3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1$, **6)** $\dfrac{1+\mathrm{i}\,\tan(a)}{1-\mathrm{i}\,\tan(a)}$,

► 12

Soit M un point du plan d'affixe z.

1) Déterminer les points M tels quel $z+\bar{z}=|z|$.

2) Déterminer les points M tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

► 13

Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\leqslant\sqrt{2}\,|z|$.

Applications à la trigonométrie

► 14

Soit $Z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

1) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z.

2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

▷ 15 Linéarisation

Soit x un nomre réel. Linéariser $(\cos x)^2 \sin(2x)$ et $\cos^4(x)\sin^3(x)$.

▷ 16 Développements

Soit x un réel quelconque.

1) **a.** Développer $\left(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\right)^6$ à l'aide de l'identité remarquable.

b. En déduire l'expression le $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(6x)$ en fonction de $\sin(x)$.

2) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Équations d'inconnue complexe, deuxième degré.

▷ 17

Factoriser dans $\mathbb{C}$ les expressions suivantes :

1) x^2-5,

2) x^2+1,

3) $2x^2+5$,

4) x^2+a où $a\in\mathbb{R}$,

5) x^2+a où $a\in\mathbb{C}^*$,

6) $x^2+2x+\mathrm{i}$.

▷ 18

1) Montrer que l'équation (E) : $z^4+z^3+6z^2+4z+8=0$ admet deux solutions imaginaires pures.

2) En factorisant, résoudre l'équation (E).

▷ 19 Calcul de racines carrées

1) Calculer les racines carrées complexes de $-8+6\mathrm{i}$ sous forme algébrique.

2) Pour les nombres complexes suivants :

$$-8\mathrm{i}, \quad -1+\mathrm{i}, \quad \sqrt{3}+\mathrm{i},$$

a. calculer les racines carrées complexes sous forme trigonométrique ;

b. les représenter dans le plan complexe ;

c. calculer les racines carrées complexes sous forme algébrique ;

3) Déduire de la question précédente les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► 20

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) $z^2-(3+2\mathrm{i})z+5-\mathrm{i}=0$, (oui, c'est moche)

2) $z^4+z^2+1=0$,

3) ♠♠ θ étant un paramètre pris dans $]0,\pi[$,
$z^4+2z^2(1+\cos\theta)\cos\theta+(1+\cos\theta)^2=0$.

► 21

Déterminer tous les couples (u,v) de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} uv = \frac{1}{2}, \\ u+2v=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Donner les couples solutions sous forme trigonométrique.

Racines n-ièmes complexes et résolution d'équations

▷ 22 Calcul de racines n-ièmes complexes

1) Déterminer les racines quatrièmes complexes de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Représenter leurs images dans le plan complexe.

2) Faire de même pour les racines sixièmes complexes de -8.

► 23 Racines cinquièmes de l'unité

1) Déterminer les racines cinquièmes de l'unité et les représenter sur un dessin.

2) Indépendamment de la question précédente, montrer que :

$$(E) \quad z^5-1=0 \iff z=1 \text{ ou } z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0.$$

3) Soit $u=z+\frac{1}{z}$. Développer u^2 et exprimer $z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ en fonction de u et u^2.

4) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

5) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

► 24

On souhaite trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$(E) \quad x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

1) Que devient le premier membre quand on le multiplie par $(x-1)$?

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ci-dessus. Combien a-t-on trouvé de solutions ?
Comparer au degré de l'équation (E).

3) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les solutions complexes de l'équation

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1=0.$$

4) Même question pour l'équation $1-x+x^2-x^3+x^4=0$.

► 25

On résoudra les équations suivantes à l'aide de changements d'inconnues.

1) Résoudre $\left(\dfrac{z+1}{\mathrm{i}z+1}\right)^4 = 1$.

2) ♠ Résoudre $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Résoudre $(z-1)^n = (z+1)^n$.

Applications à la géométrie

▹ 26

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \mathrm{i}, æ)$.

1) Soit D le point de coordonnées $(\sqrt{3}, 3)$. Quelle est son affixe z_D ?

2) Soit A, B, C d'affixes respectives

$$z_A = \sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad z_B = -\sqrt{3}-\mathrm{i}, \quad z_C = 2\mathrm{i}.$$

a. Calculer les modules des affixes de tous les points, puis placer les points dans le repère.

b. Quelles conclusions géométriques peut-on tirer de l'observation des modules ?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$?

3) Déterminer l'affixe du point E pour que $ABEC$ soit un parallèlogramme.

▹ 27

Soit A, B, C, D, M, G des points du plan, muni d'un repère orthonormé direct, d'affixes respectives a, b, c, d, z et g. On suppose A, B et C distincts.

Exprimer à l'aide des complexes les conditions suivantes :

1) M est le milieu de $[AB]$,

2) Le triangle ABC est rectangle en A (puis isocèle en A, rectangle isocèle en A, équilatéral)

3) G est le centre de gravité du triangle ABC.

▹ 28

Déterminer la nature des transformations du plan qui correspondent aux applications complexes :

1) $z \mapsto z+\mathrm{i}$,	**4)** $z \mapsto \frac{1}{2}z - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}z$,
2) $z \mapsto z-1+\mathrm{i}$,	**5)** $z \mapsto \sqrt{3}z$,
3) $z \mapsto \mathrm{i}z$,	**6)** $z \mapsto -z$.

▹ 29

Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 1+\mathrm{i}$ et $z_B = \sqrt{2}\mathrm{i}$.

1) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) Soit O_1, A_1 et B_1 les images respectives de O, A et B par la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $-2+3\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe des points O_1, A_1, B_1.

3) Soit O_2, A_2 et B_2 les images respectives de O, A et B par l'homothétie de centre O et de rapport 3. Calculer la distance A_2B_2.

▹ 30

Soit $z_A = 2+2i$ et $z_B = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$, A et B les points associés respectivement à z_A et z_B dans le plan complexe. On appelle C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

1) Calculer l'affixe z_C de C.

2) Prouver que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ est un imaginaire pur. Calculer le module de ce quotient.

3) En déduire la nature du triangle ABC.

► 31

Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble M des points du plan dont l'affixe z vérifie :

1) $|z-2i| = |z+2|$;

2) $|\mathrm{i}z-1| = |z+2|$.

► 32 Égalité du parallélogramme

1) Montrer que, pour tous complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = 2\left(|z|^2 + \left|z'\right|^2\right).$$

2) En déduire que dans un parallélogramme $ABCD$:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

► 33 Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus)

À l'aide des nombres complexes, montrer que dans tout triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right).$$