SEMAINE 15

FORMES QUADRATIQUES

EXERCICE 1 :

K est un corps de caractéristique nulle.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire b.

On appelle SETI (**sous-espace totalement isotrope**) tout sous-espace vectoriel F de E dont tous les vecteurs sont isotropes :

$$\forall x \in F \qquad q(x) = 0\ .$$

On appelle SETIM tout SETI maximal pour l'inclusion (c'est-à-dire qui n'est inclus strictement dans aucun SETI).

1. Soient U et V deux SETI. Montrer que, pour tout $x \in U \cap V^\perp$, le sous-espace $W = V + Kx$ est un SETI.

2. Soient U et V deux SETI, soient M et N des supplémentaires de $U \cap V$ dans U et dans V respectivement. Prouver l'inclusion

$$M \cap N^\perp \subset U \cap V^\perp\ .$$

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimensions r et s. Prouver que

$$\dim(F \cap G^\perp) \geq r - s\ .$$

4. Montrer que tout SETI est contenu dans au moins un SETIM, puis que tous les SETIM ont même dimension.

- -

1. Soit $w = v + kx \in V + Kx$. Alors

$$q(w) = q(v) + 2k\, b(v,x) + k^2\, q(x)\ .$$

Or, $v \in V$ donc $q(v) = 0$; $x \in U$ donc $q(x) = 0$; enfin, $x \in V^\perp$ donc $b(v,x) = 0$. Donc $q(w) = 0$ et le sous-espace $W = V + Kx$ est totalement isotrope.

2. *Remarquons d'abord que, si U est un SETI alors $b(u,u') = 0$ pour tous vecteurs u et u' de U (la forme bilinéaire induite par b sur U est nulle) : cela résulte des identités de polarisation* $b(u,u') = \dfrac{1}{4}\big(q(u+u') - q(u-u')\big)$.

Soit $x \in M \cap N^\perp$.

- Comme $M \subset U$, on a $x \in U$.
- Soit $v \in V$, décomposons-le en $v = u + n$ avec $u \in U \cap V$ et $n \in N$. Alors $b(x,v) = b(x,u) + b(x,n)$ mais chaque terme est nul (le premier car x et u appartiennent à U qui est un SETI, *cf.* la remarque faite au début de cette question ; le deuxième car $x \in N^\perp$ et $n \in N$). On a donc $b(x,v) = 0$ pour tout $v \in V$, donc $x \in V^\perp$.

Finalement, $x \in U \cap V^\perp$.

3. Soit $(g_1, \ldots, g_s)$ une base de G. L'application

$$\begin{cases} \varphi\ :\ F \to K^s \\ \quad\ \ x \mapsto \big(b(x,g_1), \ldots, b(x,g_s)\big) \end{cases}$$

est linéaire, et $\operatorname{Ker}\varphi = F \cap G^\perp$. Comme $\operatorname{Im}\varphi \subset K^s$, on a $\dim \operatorname{Im}\varphi \leq s$. Le théorème du rang donne alors

$$\dim(F \cap G^{\perp}) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim F - \dim(\operatorname{Im}\varphi) \geq r - s\ .$$

4. Il existe des SETI : $\{0\}$ en est un.

Soit $V = V_0$ un SETI ; si ce n'est pas un SETIM, il existe un SETI, V_1, contenant strictement V_0. Si V_1 n'est pas un SETIM, il existe un SETI, V_2, contenant strictement V_1. Si V n'était contenu dans aucun SETIM, on pourrait construire une suite (V_n) de SETI, strictement croissante pour l'inclusion, mais les dimensions de ces sous-espaces iraient aussi en croissant strictement, ce qui est impossible dans un espace vectoriel E de dimension finie. Tout SETI est donc contenu dans au moins un SETIM.

D'après ce qui précède, il existe donc au moins un SETIM dans E. Soient U et V deux SETIM, supposons $\dim U > \dim V$. Introduisons deux sous-espaces M et N tels que $\begin{cases} U = (U \cap V) \oplus M \\ V = (U \cap V) \oplus N \end{cases}$. Alors $\dim M > \dim N$, donc (question **3.**) :

$$\dim(M \cap N^{\perp}) \geq \dim M - \dim N > 0 \qquad \text{et} \qquad M \cap N^{\perp} \neq \{0\}\ .$$

Soit x un vecteur non nul de $M \cap N^{\perp}$. Alors $x \in U \cap V^{\perp}$ (question **2.**), donc $W = V + Kx$ est un SETI (question **1.**). Mais $x \notin V$ (si on avait $x \in V$, alors $x \in U \cap V$ et $x \in M$, donc $x = 0$ puisque les sous-espaces sont supplémentaires), donc W contient strictement V, ce qui est absurde.

Il en résulte que les SETIM ont tous la même dimension, appelée **indice** de la forme b (*l'exercice 2 donne un moyen de calculer l'indice d'une forme non dégénérée*).

EXERCICE 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, soit b une forme bilinéaire symétrique sur E.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **totalement isotrope** (en abrégé, un SETI) lorsque $F \subset F^{\perp}$, c'est-à-dire lorsque la forme bilinéaire induite par b sur F est la forme nulle.

On appelle **base de Witt** pour b toute base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_k)$ de E, avec $2r + k = n$, dans laquelle la matrice de b est de la forme

$$W = \begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_k \end{pmatrix}\ ,$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

1. On suppose b non dégénérée. Montrer que b admet une base de Witt.

2. On suppose que b admet une base de Witt $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_k)$ et on pose

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_r)\ , \qquad G = \operatorname{Vect}(v_1, \cdots, v_r) \quad \text{et} \qquad H = \operatorname{Vect}(w_1, \cdots, w_k)\ .$$

a. Montrer que b est non dégénérée.

b. Déterminer, en fonction des entiers r et k, la signature (p, q) de la forme b.

c. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$. Montrer que $G \cap F^\perp = \{0\}$ et $H = (F+G)^\perp$.

d. Montrer que F et G sont des sous-espaces totalement isotropes, maximaux au sens de l'inclusion.

Source : J. RIVAUD, Algèbre linéaire, tome 2, Éditions Vuibert, ISBN 2-7117-2151-5

- -

On notera f la forme quadratique associée à b.

1. Soit (p, q) la signature de la forme b. On sait qu'il existe une base b-orthogonale $(e_1, \cdots, e_p, e'_1, \cdots, e'_q)$ avec $f(e_i) = +1$ pour $i \in [\![1, p]\!]$ et $f(e'_j) = -1$ pour $j \in [\![1, q]\!]$.

Supposons $p \geq q$. Posons $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e'_i)$ et $v_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e'_i)$ pour $i \in [\![1, q]\!]$, puis $w_i = e_{q+i}$ pour $i \in [\![1, p-q]\!]$. Ces n vecteurs forment évidemment une base $\mathcal{B}$ de E.
On vérifie les relations

- $b(u_i, u_j) = b(v_i, v_j) = 0$ pour $(i, j) \in [\![1, q]\!]^2$, y compris si $i = j$;
- $b(u_i, v_i) = 1$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$;
- $b(u_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$;
- $f(w_i) = b(w_i, w_i) = 1$ pour tout $i \in [\![1, p-q]\!]$;
- pour $i \in [\![1, p-q]\!]$, w_i est b-orthogonal à tous les autres vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

La matrice de la forme b dans la base $\mathcal{B}$ est donc $W = \begin{pmatrix} 0 & I_q & 0 \\ I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{B}$ est une base de Witt pour la forme b, avec $r = q$ et $k = p - q$.

On procède de même si $p < q$, avec $W = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{q-p} \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, on obtient une base de Witt pour b, avec $r = \min\{p, q\}$ et $k = |p - q|$.

2.a. La matrice de Witt W est inversible, donc b est non dégénérée.

b. C'est la question "inverse" de la question **1.**, puisqu'il s'agit, à partir de la base de Witt $\mathcal{B}$, de construire une base b-orthogonale. Posons donc $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u_i + v_i)$ et $e'_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u_i - v_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, puis $e''_i = w_i$ pour $i \in [\![1, k]\!]$. Je laisse l'improbable lecteur vérifier que la base $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_r, e'_1, \cdots, e'_r, e''_1, \cdots, e''_k)$ est b-orthogonale, avec $f(e_i) = +1$, $f(e'_i) = -1$ et $f(e''_i) = \varepsilon$. En conséquence, la signature de la forme b est $\begin{cases} (r+k, r) & \text{si } \varepsilon = +1 \\ (r, r+k) & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$.

c. Tout d'abord, rappelons que, si b est non dégénérée, on a, pour tout sous-espace vectoriel V de E, la relation

$$\dim V + \dim V^\perp = \dim E\,. \qquad (*)$$

En effet, pour tout x de E, considérons la forme linéaire $\beta_x : y \mapsto b(x,y)$. Si b est non dégénérée, l'application linéaire $\beta : x \mapsto \beta_x$ est injective (donc est un isomorphisme de E sur E^*). Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est une base de V, les p formes linéaires $\beta_{x_1}, \cdots, \beta_{x_p}$ sont indépendantes et $V^\perp = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \beta_{x_i}$ est de dimension $n - p$.

De l'allure de la matrice W, on déduit que $F + H \subset F^\perp$; comme ces deux sous-espaces ont même dimension d'après **(*)**, on a $F^\perp = F + H$. De même, $G^\perp = G + H$. Comme $E = F \oplus G \oplus H$, on en déduit $F \cap G^\perp = G \cap F^\perp = \{0\}$.

Enfin, $H \subset F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ et $\dim H = n - \dim(F+G) = \dim(F+G)^\perp$, donc $(F+G)^\perp = H$.

d. On a $F \subset F^\perp$, donc F est totalement isotrope (F est un SETI).

Montrons qu'il est maximal pour l'inclusion : si V est un SETI contenant F, alors $V \subset V^\perp \subset F^\perp = F + H$. Un élément de V est donc de la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in H$. Mais x est isotrope, donc

$$0 = f(x) = f(y) + f(z) + b(y,z) = f(z)$$

car $y \in F$ est isotrope et $z \in H \subset F^\perp$, donc $f(z) = 0$: z est donc nul puisque la restriction de la forme b au sous-espace H est définie (positive ou négative selon la valeur de ε). Finalement, $x \in F$, ce qui prouve que $V = F$.

Les sous-espaces F et G sont des SETIM pour la forme b, cf. exercice 1 et leur dimension commune r est donc l'indice de la forme b. La question **1.** *donne donc la valeur de l'indice en fonction de la signature, dans le cas d'une forme non dégénérée.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit q une forme quadratique non dégénéreé sur E, de forme polaire b. On note $O(q)$ le **groupe orthogonal** pour la forme q, c'est-à-dire

$$O(q) = \{u \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall (x,y) \in E^2 \quad b\big(u(x), u(y)\big) = b(x,y)\} \ .$$

On note $C(q)$ le **cône isotrope** de q :

$$C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\} \ .$$

1. Pour tout vecteur a non isotrope ($a \notin C(q)$), on définit l'endomorphisme s_a de E par la relation

$$\forall x \in E \qquad s_a(x) = x - \frac{2\,b(x,a)}{q(a)}\, a \ .$$

Montrer que $s_a \in O(q)$. Interpréter géométriquement s_a.

2. Soient x et y deux vecteurs de E tels que $q(x) = q(y) \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur a non isotrope tel que $s_a(y) = x$ ou $s_a(y) = -x$.

3. Montrer que le groupe $O(q)$ est engendré par les s_a, avec $a \in E \setminus C(q)$.

Source : Jacques CHEVALLET, Algèbre MP/PSI, Collection Vuibert Supérieur, ISBN 2-7117-2092-6

- -

1. • Tout d'abord, s_a est un automorphisme de l'espace vectoriel E puisque, si $s_a(x) = 0$, alors x est colinéaire à a, soit $x = \lambda a$, d'où $s_a(x) = \lambda a - 2\lambda a = -\lambda a$, puis $x = 0$.

• Si x et y sont dans E, alors

$$b\big(s_a(x), s_a(y)\big) = b\Big(x - \frac{2b(a,x)}{q(a)}\, a \ , \ y - \frac{2b(a,y)}{q(a)}\, a\Big) = b(x,y) \ ,$$

donc $s_a \in O(q)$.

• Soit $H = (\mathbb{R}a)^\perp$: on a alors $E = H \oplus (\mathbb{R}a)$. En effet, $H \cap (\mathbb{R}a) = \{0\}$ car a est non isotrope et, la forme b étant non dégénérée, la forme linéaire $\varphi : x \mapsto b(x,a)$ n'est pas nulle, donc son noyau H est un hyperplan de E. Comme $a \notin H$, on a bien $H \oplus (\mathbb{R}a) = E$. Notons aussi que $H^\perp = \mathbb{R}a$: en effet, $H^\perp = \big((\mathbb{R}a)^\perp\big)^\perp$ contient $\mathbb{R}a$ et $\dim H^\perp = n - \dim H = 1$ car la forme b est non dégénérée (*cf.* exercice 2, question **2.c.**). *En fait, quand une forme bilinéaire symétrique b sur E est non dégénérée, on a $(V^\perp)^\perp = V$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.*

• s_a est la réflexion d'hyperplan (non isotrope) H, c'est-à-dire la symétrie par rapport à H et parallèlement à $H^\perp = \mathbb{R}a$: en effet, $s_a(a) = -a$ et, pour tout x appartenant à H, $s_a(x) = x$.

2. Les vecteurs $x+y$ et $x-y$ ne peuvent être tous deux isotropes car, en ajoutant les relations $q(x+y) = 0$ et $q(x-y) = 0$, il viendrait $q(x) + q(y) = 2q(x) = 0$, contraire à l'hypothèse.

Supposons $x+y$ non isotrope, notons H l'hyperplan $\big(\mathbb{R}(x+y)\big)^\perp$; alors $b(x+y, x-y) = 0$, donc $s_{x+y}(y) = -x$ puisque $y - x \in H$ et $y + x \in \mathbb{R}(x+y) = H^\perp$.

Rappelons que, si $E = F \oplus G$, un vecteur Y de E est image du vecteur X par la symétrie par rapport à F et parallèlement à G si et seulement si $\begin{cases} X + Y \in F \\ X - Y \in G \end{cases}$.

Si $x - y$ est non isotrope, on vérifie de même $s_{x-y}(y) = x$.

3. Prouvons-le par récurrence sur $n = \dim E$.

C'est évident pour $n = 1$: alors $O(q) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ et, si $a \neq 0$, $s_a = -\mathrm{id}_E$.

Soit $n \geq 2$, supposons l'assertion vraie en dimension $n-1$, et soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, soit q une forme quadratique non dégénérée sur E, de forme polaire b. Soit $u \in O(q)$. Soit a un vecteur de E, non isotrope, on a alors $q\big(u(a)\big) = q(a) \neq 0$, donc il existe un vecteur c non isotrope de E tel que $s_c\big(u(a)\big) = \varepsilon a$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit l'hyperplan $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, soit q' la forme induite par q sur H.

• La forme q' est non dégénérée : notons b' sa forme polaire ; si $x \in \operatorname{Ker} b'$, alors $b'(x,y) = b(x,y) = 0$ pour tout vecteur y de H mais on a aussi $b(x,a) = 0$ car $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, donc $x \in \operatorname{Ker} b$ et $x = 0$.

• H est stable par $s_c \circ u$: si $x \in H$, alors $b(x,a) = 0$, donc

$$b\big(s_c \circ u(x), a\big) = \varepsilon\, b\big(s_c \circ u(x) \ , \ s_c \circ u(a)\big) = \varepsilon\, b(x,a) = 0$$

car $s_c \circ u \in O(q)$; donc $s_c \circ u(x) \in (\mathbb{R}a)^\perp = H$.

Notons v' l'endomorphisme de H induit par $s_c \circ u$.

- $v' \in O(q')$: il est clair que $b'\big(s_c \circ u(x)\ ,\ s_c \circ u(y)\big) = b'(x,y)$ pour tout x et y de H ; enfin, $s_c \circ u$ est un automorphisme de E laissant stable H, donc $v'(H) = (s_c \circ u)(H)$ est un sous-espace de H de même dimension que H, donc $v'(H) = H$ et $v' \in \mathrm{GL}(H)$.
- Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $v' = s'_{a_1} \circ \cdots \circ s'_{a_k}$ où les vecteurs a_i $(1 \leq i \leq k)$ de H sont non isotropes pour q' (ou pour q, ce qui revient au même), s'_{a_i} étant (dans H) la réflexion d'hyperplan l'orthogonal de $\mathbb{R}a_i$ dans H, c'est-à-dire $H \cap (\mathbb{R}a_i)^{\perp}$. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, soit s_{a_i} la réflexion (dans E) d'hyperplan $(\mathbb{R}a_i)^{\perp}$: c'est l'unique endomorphisme de E qui coïncide avec s'_{a_i} sur H et qui vérifie $s_{a_i}(a) = a$. Posons alors $v = s_{a_1} \circ \cdots \circ s_{a_k}$.

  Alors

  ▷ si $x \in H$, on a $s_c \circ v(x) = s_c\big(v'(x)\big) = s_c\Big(s_c\big(u(x)\big)\Big) = u(x)$;

  ▷ $s_c \circ v(a) = s_c(a) = s_c\Big(\varepsilon\, s_c\big(u(a)\big)\Big) = \varepsilon\, u(a)$.

  Donc :

  ▷ si $\varepsilon = +1$, on a $u = s_c \circ v = s_c \circ s_{a_1} \circ \cdots \circ s_{a_k}$;

  ▷ si $\varepsilon = -1$, on a $u = s_{u(a)} \circ s_c \circ v$ puisque, pour $x \in H$, $s_{u(a)}\big(u(x)\big) = u(x)$ du fait que $b\big(u(x), u(a)\big) = b(x,a) = 0$ et $s_{u(a)}\big(-u(a)\big) = u(a)$: les deux endomorphismes u et $s_{u(a)} \circ s_c \circ v$ coïncident donc sur H et sur $\mathbb{R}a$.

Dans les deux cas, on a prouvé que u est produit d'un nombre fini de réflexions par rapport à des hyperplans non isotropes.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On note F et G deux formes quadratiques sur E, de matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans la base $\mathcal{B}$.

On note Q et R les formes quadratiques sur E dont les matrices relativement à la base $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$M_{\mathcal{B}}(Q) = C = (a_{ij}b_{ij}) \quad ; \qquad M_{\mathcal{B}}(R) = D = \left(e^{a_{ij}}\right) .$$

1. Montrer que, si F et G sont positives, alors Q l'est aussi. Que peut-on dire si F et G sont définies positives ?

2. Que dire de la forme R si F est positive? définie positive ?

Source : Patrice TAUVEL, Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation, Éditions Masson, ISBN 2-225-84441-0

- -

1. Si F est positive de rang p, donc de signature $(p,0)$, elle est somme des carrés de p formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$. De même, si G est positive de rang q, elle est somme des carrés de q formes linéaires indépendantes $\psi_1, \cdots, \psi_q$:

$$F = \sum_{k=1}^{p} (\varphi_k)^2 \quad ; \qquad G = \sum_{l=1}^{q} (\psi_l)^2 .$$

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, notons $\Phi_k = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & \cdots & \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}$ la matrice de la forme linéaire φ_k dans la base $\mathcal{B}$. Posons de même $\Psi_l = M_{\mathcal{B}}(\psi_l) = \begin{pmatrix} \beta_1^{(l)} & \cdots & \beta_n^{(l)} \end{pmatrix}$ pour $l \in [\![1,q]\!]$. On a alors $A = \sum_{k=1}^{p} {}^t\Phi_k \Phi_k$ et $B = \sum_{l=1}^{q} {}^t\Psi_l \Psi_l$, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \sum_{l=1}^{q} \beta_i^{(l)} \beta_j^{(l)} \ .$$

Donc, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)} \Big) \Big(\sum_{l=1}^{q} \beta_i^{(l)} \beta_j^{(l)} \Big) x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} \beta_i^{(l)} x_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} \beta_j^{(l)} x_j \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} \beta_i^{(l)} x_i \Big)^2 , \end{aligned}$$

donc $Q(x) \geq 0$: la forme Q est positive.

Supposons F et G définies positives (alors $p = q = n$). Si $Q(x) = 0$, alors chaque terme de la somme est nulle, soit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} \beta_i^{(l)} x_i = 0$ pour tout $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, notons y_l le vecteur de coordonnées $(\beta_1^{(l)} x_1, \cdots, \beta_n^{(l)} x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a $\varphi_k(y_l) = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit $y_l \in \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_k$ donc $y_l = 0$ puisque les formes linéaires φ_k sont indépendantes. On en déduit que, pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, $\psi_l(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(l)} x_i = 0$ donc $x \in \bigcap_{l=1}^{n} \operatorname{Ker} \psi_l$, donc $x = 0$ puisque les formes linéaires ψ_l sont indépendantes. La forme Q est donc définie positive.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons A_p la matrice de coefficients (a_{ij}^p) (par convention, A_0 est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1). La forme quadratique de matrice A_0 dans la base $\mathcal{B}$ est positive, plus précisément de signature $(1,0)$ puisque

$${}^t X A_0 X = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \Big)^2 .$$

Si la forme F est positive alors, d'après la question **1.**, la forme F_p définie par $F_p(x) = {}^t X A_p X$ est positive pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ donc

$$R(x) = {}^t X D X = \sum_{i,j} x_i e^{a_{ij}} x_j = \sum_{i,j} x_i \Big(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^p}{p!} \Big) x_j = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{i,j} \frac{x_i a_{ij}^p x_j}{p!} \Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{{}^t X A_p X}{p!} \ .$$

Chaque terme étant positif, on a $R(x) \geq 0$, donc la forme quadratique R est positive.

Si F est définie positive, si $R(x) = 0$, alors chaque terme doit être nul, et en particulier ${}^tXAX = F(x) = 0$, donc $x = 0$: la forme R est définie positive.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall\, \overrightarrow{X} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad q(\overrightarrow{X}) = x^2 + 4z^2 + 2xy + 2yz + 4zx\ .$$

Déterminer tous les plans P de $\mathbb{R}^3$ tels que la restriction de q à P soit définie positive.

- -

Commençons par une réduction de Gauss :

$$q(\overrightarrow{X}) = (x+y+2z)^2 - y^2 + 2yz - 4yz = (x+y+2z)^2 + z^2 - (y+z)^2$$

(les trois formes linéaires sont indépendantes), q est donc de signature $(2,1)$.

Si P est un plan tel que $q|_P$ soit définie positive, alors $P^\perp$ est une droite supplémentaire de P (*en effet, lorsqu'une forme quadratique est non dégénérée, on a* $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$ *et* $(V^\perp)^\perp = V$ *pour tout sous-espace vectoriel* V *de* E*, cf. exercice 2, question* **2.c.** *; de plus, si le sous-espace* V *est non isotrope, c'est-à-dire si* $V \cap V^\perp = \{0\}$*, alors il est évident que* $V \oplus V^\perp = E$), notons $P^\perp = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$; on a alors $q(\overrightarrow{u}) < 0$ par le théorème d'inertie de Sylvester.

Réciproquement, si un plan P admet un vecteur q-orthogonal $\overrightarrow{u}$ tel que $q(\overrightarrow{u}) < 0$, alors $P^\perp = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, puis $(\mathbb{R}\overrightarrow{u})^\perp = P$ et $P \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \mathbb{R}^3$ car le vecteur $\overrightarrow{u}$ est non isotrope. De la loi d'inertie de Sylvester, il résulte que $q|_P$ est définie positive.

Nous cherchons donc les plans P tels qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$, q-orthogonal à ce plan, vérifie $q(\overrightarrow{u}) < 0$.

La forme polaire f de q est définie par

$$f(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X'}) = xx' + 4zz' + 2xz' + 2zx' + xy' + yx' + yz' + zy'$$

donc, si $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ est un vecteur non nul, le plan $P = (\mathbb{R}\overrightarrow{u})^\perp$ (*qui n'est pas toujours un supplémentaire de* $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$) admet pour équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, avec $\begin{cases} \alpha = a + b + 2c \\ \beta = a + c \\ \gamma = 2a + b + 4c \end{cases}$. En "inversant le point de vue" (et le système), un plan P d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$ admet pour vecteur q-orthogonal $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ avec $\begin{cases} a = \alpha + 2\beta - \gamma \\ b = 2\alpha - \gamma \\ c = -\alpha - \beta + \gamma \end{cases}$. La forme $q|_P$ est définie positive si et seulement si $q(\overrightarrow{u}) < 0$, c'est-à-dire si et seulement si (*après calculs*)

$$\alpha^2 + \gamma^2 + 4\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma < 0\ .$$

Soit K un corps fini, de caractéristique différente de 2.

1. Démontrer l'assertion : $\forall (a,b) \in (K^*)^2 \quad \exists (x,y) \in K^2 \qquad ax^2 + by^2 = 1.$

2. Soit α un élément de K qui n'est pas un carré dans K. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Montrer que, pour toute forme quadratique q non dégénérée sur E, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de q est, soit la matrice -unité I_n, soit la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, \alpha)$.

Source : Cyril GRUNSPAN et Emmanuel LANZMANN, L'oral de mathématiques aux concours, Algèbre, Collection Vuibert Supérieur, ISBN 2-7117-8824-5

- -

1. Soit $N = |K|$ le cardinal de K. Alors K^* est un groupe de cardinal $N - 1$ et l'application $\gamma : x \mapsto x^2$ est un endomorphisme de ce groupe, de noyau $\{-1, 1\}$ (ces deux éléments, *distincts*, appartiennent à $\mathrm{Ker}\,\gamma$ et l'équation $x^2 - 1 = 0$ ne peut avoir plus de deux solutions dans le corps K). Donc $\mathrm{Im}\,\gamma$ (ensemble des carrés de K^*) est de cardinal $\dfrac{N-1}{2}$. Comme 0 est un carré dans K, l'ensemble Γ des carrés dans K est de cardinal $\dfrac{N+1}{2}$.

Considérons maintenant les ensembles $A = \{ax^2 \ ; \ x \in K\}$ et $B = \{1 - by^2 \ ; \ y \in K\}$. Ils sont tous deux de cardinal $\dfrac{N+1}{2}$, donc $|A| + |B| > |K|$ et $A \cap B \neq \emptyset$, ce qui démontre l'assertion.

On démontre de façon analogue que tout élément a de K est somme de deux carrés, en considérant les ensembles $\{x^2 \ ; \ x \in K\} = \Gamma$ et $\{a - y^2 \ ; \ y \in K\}$.

2. Procédons par récurrence sur $n = \dim E$.

- Pour $n = 1$, $E = Ka$ avec a vecteur non nul de E.

  $\triangleright$ si $q(a) \in \Gamma$, alors $q(a) = \lambda^2$ (avec $\lambda \in K^*$ car q est non dégénérée) et $q\left(\dfrac{a}{\lambda}\right) = 1$, donc la matrice de q dans la base $\mathcal{B} = \left(\dfrac{a}{\lambda}\right)$ est $I_1 = (1)$;

  $\triangleright$ si $q(a) \notin \Gamma$, alors il existe $\lambda \in K^*$ tel que $\lambda^2 q(a) = \alpha$: en effet, l'application $\mathrm{Ker}\,\gamma = \Gamma \setminus \{0\} \to K \setminus \Gamma$, $z \mapsto q(a)z$, est injective, donc surjective car les ensembles de départ et d'arrivée ont le même cardinal $\dfrac{N-1}{2}$. Donc $q(\lambda a) = \alpha$ et la matrice de q dans la base $\mathcal{B} = (\lambda a)$ est (α).

- Soit $n \geq 2$, supposons l'assertion vraie en dimension $n-1$, soit q une forme non dégénérée sur E de dimension n. Il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs non isotropes, c'est-à-dire avec $q(e_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Posons $a = q(e_1)$ et $b = q(e_2)$. D'après la question **1.**, on peut trouver deux scalaires x et y tels que $ax^2 + by^2 = 1$, donc le vecteur $u = xe_1 + ye_2$ vérifie $q(u) = 1$. Ce vecteur u étant non isotrope, on a $E = (Ku) \oplus H$, où $H = (Ku)^\perp$. La forme q' induite par q sur H étant non dégénérée (vérification immédiate), on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(f_1, \cdots, f_{n-1})$ de H dans laquelle la forme q' admet pour matrice I_{n-1} ou $\mathrm{diag}(1\$(n-2), \alpha)$. La matrice de q dans la base $(u, f_1, \cdots, f_{n-1})$ de E est alors I_n ou $\mathrm{diag}(1\$(n-1), \alpha)$.