Année Universitaire 2014-2015
2e année de 1er cycle
Liste d'exercices n° 1

Algèbre 3

Réduction des matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, χ_A désigne le polynôme caractéristique de A.

1. $*$ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ distinctes ou non.

   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det\,(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   (b) On suppose que la somme des coefficients de chaque ligne de A (respectivement de chaque colonne) est égale à λ. Montrer que λ est valeur propre de A.

   (c) Soient a, b, c des nombres complexes tels que $a + b + c \neq 0$, et la matrice $A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit non inversible. Alors A possède comme valeur propre :

   ☐ 0 ☐ $2a + b - c$ ☐ $2a - b + c$ ☐ $2a - b - c$ ☐ $2a + b + c$.

2. $*$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe un polynôme réel P (que l'on ne cherchera pas à calculer) de degré $n - 1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

3. $*$ Soit $A \in M_n\,(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}\,[T]$.

   (a) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ (partir de $AX = \lambda X$).

   (b) Est-ce que, réciproquement, une valeur propre de $P(A)$ est de la forme $P(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$?
   (Considérer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P := T^2 + 1$).

   (c) Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les valeurs propres de $P(A)$ sont les $P(\lambda)$, λ valeur propre de A (on admettra qu'il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure).

4. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & d \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3\,(\mathbb{R})$, $\;a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de A.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que A soit triangulable sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que si $ac > 0$ et $d = 0$ alors A est diagonalisable.

5. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable.

   (b) Diagonaliser A lorsque cette condition est satisfaite.

6. Soit $A := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit définie positive.

   (b) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

7. $*$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Sans calcul, justifier que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$, matrice orthogonale, telle que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; on écrira P de sorte que les coefficients de la 1ère ligne soient ≥ 0.

8. $*$ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4/3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de T^n par le polynôme caractéristique de A.

   (b) En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n\, A + b_n\, I_2$.

9. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer un polynôme Π_A de degré minimal tel que $\Pi_A(A) = 0$.

   (c) Déterminer le reste de la division euclidienne de T^n par Π_A (c'est un polynôme de degré 1) et en déduire A^n, $n \in \mathbb{N}$.

10. Soit $A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}+1 & 3\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$.

    (a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A (il y a une racine évidente) et montrer que A n'est pas diagonalisable.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[T]$ de degré 1 ou 2 tel que $P(A) = 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de T^n par χ_A (on utilisera entre autres la valeur $\chi'_A(3)$) et en déduire une expression simple de A^n en fonction de I_3, A et A^2.

11. $*$ Vérifier si oui ou non les matrices suivantes sont triangulables sur $\mathbb{R}$. Dans l'affirmative, trigonaliser les

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Soit $A := \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

13. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire A^n, $n \in \mathbb{N}$, en fonction de P, P^{-1} et de n.

14. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit inversible et

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ On ne calculera pas U^{-1}.

(c) On pose $B := U^{-1}AU - I_4$. Sachant que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$ pour $k \geq 3$, exprimer $A^n,\ n \in \mathbb{N}$, en fonction de $U,\ U^{-1}$ et de n.

15. $*$ Montrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Cocher la ou les bonnes réponses parmi les cinq propositions suivantes. Il existe $U \in M_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $U^{-1}AU$ soit égale à :

□ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Année Universitaire 2014-2015
2e année de 1er cycle
Liste d'exercices n° 2

Algèbre 3

Équations différentielles

1. * Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, on considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad x' + ax = b \quad \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ où } x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est dérivable.}$$

   (a) En dérivant $\left(t \longmapsto x(t) \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)\right)$, résoudre (E) lorsque $b = 0$.

   (b) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $\left(t \longmapsto \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)\right)$.

   (c) Montrer qu'il existe une unique solution de :

$$(1+t^2)\,x'(t) + 2t\,x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

   telle que $x(1) = 0$ et déterminer-la.

2. * On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad x'' + x' - 2x = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

   (a) On pose $X := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$. Écrire (E) sous la forme $X' = AX$.

   (b) Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   (c) On pose $U := P^{-1}X$. Déterminer le nouveau système satisfait par U et le résoudre.

   (d) En déduire les solutions de (E).

3. On considère le système différentiel :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = x + z \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

   (a) Écrire (S) sous la forme $X' = AX$ et déterminer $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   (b) Résoudre le système vérifié par $U := P^{-1}X$ sur $\mathbb{C}$.

   (c) Résoudre le système (S) sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

4. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est diagonalisable et déterminer $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   (b) Résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que le système différentiel

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}$$

   possède une ou plusieurs (préciser) solution(s) constante(s) et déterminer alors la ou les (préciser) solution(s) de ce système telle(s) que

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. $*$ On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = 2x + z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}.$$

   (a) Écrire (S) sous la forme $X' = AX$ où $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ et montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice $P := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ soit inversible et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ à préciser. On ne calculera pas P^{-1}.

   (c) Résoudre le système vérifié par $U = P^{-1}X$ et en déduire les solutions de (S).

6. On considère le système différentiel :

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x' = x - 3y + 4z \\ y' = 4x - 7y + 8z \\ z' = 6x - 7y + 7z \end{cases}.$$

   (a) Écrire (S) sous la forme $X' = AX$ et déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(b) Résoudre le système vérifié par $U := P^{-1}X$ et résoudre (S).

7. $*$ On considère le système d'équations différentielles : $(S) \begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x \end{cases}$

   (a) Donner un système équivalent sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice carrée.

   (b) Montrer que A est diagonalisable et calculer une matrice inversible P et une matrice Q diagonale telles que $A = PQP^{-1}$.

   (c) En déduire l'exponentielle e^{tA}.

   (d) Donner les solutions de (S). (On prendra comme conditions initiales $x(0) = a$ et $y(0) = b$).

   (e) Donner l'allure des courbes intégrales du système (S). (On se placera dans le repère obtenu par le changement de base associé à P).

8. (a) Déterminer la solution du système :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x \end{cases} \quad \text{telle que } x(0) = a \text{ et } y(0) = b.$$

   (b) En déduire l'expression de e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Représenter les courbes intégrales de (S).

   (d) Mêmes questions avec les matrices $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $*$ On considère le système différentiel :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

   (a) Soit A la matrice associée à (S). Déterminer e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Résoudre (S) et déterminer en particulier la solution de (S) prenant en $t = 0$ la valeur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

10. $*$ On considère le système différentiel :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x' = x + z + e^{-t} \\ y' = x + 2y - 2z - e^{-t} \\ z' = -2x - 2y + z + 2e^{-t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Résoudre le système homogène associé à (S).

   (b) Déterminer une solution particulière de la forme $e^{-t}V$ où $V \in \mathbb{R}^3$.

11. $*$ Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $U \in GL_4(\mathbb{R})$, $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ tels que $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

(b) Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$, $t \in \mathbb{R}$. On exprimera les solutions à l'aide de U.

12. $*$ On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases} \qquad \text{dans } \mathbb{R}.$$

(a) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$. Montrer que (S) peut s'écrire sous la forme $X' = AX$ où $A \in M_4(\mathbb{R})$ est à déterminer.

(b) Résoudre le système différentiel (S).

13. On considère le système différentiel :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \mathbb{R}.$$

(a) Dériver la première équation de (S). Eliminer y'', y' et y et en déduire que x est solution de $x^{(4)} - 3x'' - 4x = 0$.

(b) Résoudre (S) sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

(c) On pose $u := x'$, $v := y'$ et $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$.

Mettre (S) sous la forme $X' = AX$ où $A \in M_4(\mathbb{R})$, et déduire de (b) les valeurs propres et les vecteurs propres complexes de A.

14. Soit

$$(E) : \qquad y'' - 3y' + 2y = xe^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pour $a = 3$, donner la solution de l'équation différentielle ci-dessus vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

(b) Pour $a = 2$, donner les solutions réelles de (E).

15. $*$ Résoudre l'équation différentielle :

$$x''' + x'' + x' + x = \sin t \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

16. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 x''(t) + 3t\, x'(t) + x(t) = 1 + t^2 \text{ sur } I =]0, +\infty[\,.$$

   (a) Soit x une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on pose $t = e^u$ et $y(u) = x(t)$.

      i. Montrer que y est deux fois dérivable, et exprimer $y'(u)$, $y''(u)$ en fonction des dérivées de x et de la variable t.

      ii. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si y vérifie l'équation différentielle

$$(E') \quad y''(u) + 2\, y'(u) + y(u) = 1 + e^{2u}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

   (b) Résoudre (E'), puis (E) (pour déterminer la solution particulière de (E'), considérer séparément les seconds membres 1 et e^{2u}.

17. Soit l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad (t-1)\, x''(t) + (1-2t)\, x'(t) + t\, x(t) = 0, \quad t > 1.$$

Montrer que si $y'(t) = y(t)$ pour tout $t > 1$, alors y est solution de (E). En déduire une base de solutions de (E).

18. On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad t^2 x'' + t\, x' - \left(t^2 + t + 1\right) x = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^*.$$

   (a) Montrer que $\left(t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}\right)$ est solution de (E).

   (b) Déterminer une base des solutions de (E).

19. $*$ Résoudre l'équation différentielle :

$$x'' + x = \frac{2}{\cos^3 t} \quad \text{dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,,$$

à l'aide de la méthode de variation des constantes.