Chapitre 15

Probabilités

1. Dénombrements (rappels de M.P.S.I.)

1.1. Cardinaux

1.2. Applications

1.3. Injections

1.4. Permutations de E

1.5. Parties d'un ensemble

1.6. Compléments

- Formules de Pascal, de Pascal généralisée, de Vandermonde.

2. Espaces probabilisés

2.1. Tribus

a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.

b) Tribu sur un ensemble Ω

- Définitions : tribu, espace probabilisé, système complet d'événements
- Exemples.

Propriétés : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω.

- $\mathcal{T}$ contient l'événement certain Ω et l'événement impossible $\varnothing$.

  autrement dit : $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie.
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.
- $\mathcal{T}$ est stable par soustraction ensembliste.

- Démonstration de la stabilité par intersection

2.2. Probabilité

a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.

b) Définition : probabilité, espace probabilisé

c) Détermination d'une probabilité lorsque Ω est fini (rappels M.P.S.I.)

d) Détermination d'une probabilité lorsque Ω est dénombrable

2.3. Propriétés élémentaires (revisite de celles vues en M.P.S.I.)

2.4. Propriétés des suites d'événements

> Propriété de la continuité croissante
>
> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion
>
> autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, A_n \subset A_{n+1}$,
>
> alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

- Démonstration

> Propriété de la continuité décroissante
>
> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion
>
> autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, A_{n+1} \subset A_n$,
>
> alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

- Démonstration

> Inégalité de Boole (sous-additivité)
>
> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P\;\, A_n$.

- Démonstration

2.5. Evénements négligeables, événements presque sûrs.

> Propriété : Toute réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

- Démonstration

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définition

- L'application $P_B : \mathcal{T} \to [0,1]$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ Démo

3.2. Inversion des conditionnements

> Proposition Soient A et B deux événements non négligeables.
>
> Alors $P_B(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)}$

- Démonstration

3.3. Formule des probabilités composées

> Théorème : **formule des probabilités composées**
>
> Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{T}^n$ telle que $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Alors
>
> $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\ldots\times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

- Démonstration

3.4. Formule des probabilités totales

Théorème : **formule des probabilités totales**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables.

Soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

- Démonstration .

3.5. Formule de Bayes

Théorème : **formule de Bayes**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ système complet d'événements non négligeables. Soit $B \in \mathcal{T}$.

Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et $\boxed{P_B(A_j) = \dfrac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)}}$

- Démonstration

4. Evénements indépendants

4.1. Couple d'événements indépendants

a) Définition

b) Propriétés

Propriété 1 Si $P(A) \neq 0$, $[A$ et B sont indépendants$] \Leftrightarrow [P_A(B) = P(B)]$.

Propriété 2 Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

- Démonstration

4.2. Famille d'événements indépendants

a) Définition : famille dévénements deux à deux (resp. mutuelement) indépendants

b) Propriétés

Propriété 1 L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

Propriété 2 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(A_k) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

- Démonstration

Propriété 3 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ l'est aussi, où $\forall i \in I \ : \ B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

4.3. Schéma de Bernoulli, épreuves répétées

❈ Epreuve de Bernoulli, schéma de Bernoulli, formule $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.