Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 1 [00389] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 2 [03490] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice 3 [00390] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 4 [00391] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 5 [00392] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 6 [00393] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E.
Résoudre l'équation

$$x' = u \wedge x$$

Exercice 7 [02902] [correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 8 [02490] [correction]
On considère l'équation

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x' + x = 0$$

a) Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de E si, et seulement si, $X = {}^t\begin{pmatrix} x & x' & x^{(2)} & x^{(3)} \end{pmatrix}$ est solution de $AX = X'$ avec A à déterminer.
b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?
c) Montrer que

$$\mathbb{C}^4 = \ker(A - iI_4) \oplus \ker(A + iI_4) \oplus \ker(A - I_4)^2$$

d) Montrer qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = B$ avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.
e) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 9 [03921] [correction]
a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est une famille libre.
Exprimer

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(f-\lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.
d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.
e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle
$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
$\text{Sp}(A) = \{2,3\}$, $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$
$Y' = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Exercice 2 : [énoncé]
C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation homogène : $X' = AX$.
$\chi_A = (X-1)(X-2)$, $\text{Sp}(A) = \{1,2\}$, $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.
Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$X = PY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \\ 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.
Solution particulière :
$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1, λ_2 fonctions dérivables.

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$$

donc

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = e^t \\ 2\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(t) = 1 \\ \lambda_2'(t) = -2e^{-t} \end{cases}$$

$\lambda_1(t) = t$ et $\lambda_2(t) = 2e^{-t}$ conviennent
$X(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.
Solution générale :

$$X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (3t+2)e^t \\ x_2(t) = 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (2t+2)e^t \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle
$X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{5, -3\}$, $E_5(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \mu\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{5t} \\ \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 4 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\mathrm{e}^{-t} \\ \mu\mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 5 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = -X^2(X+1)$.
Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.

$$Y' = TY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda\mathrm{e}^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 6 : [énoncé]
On complète u en une base orthonormée directe : (u,v,w). En notant a,b,c les composantes de x dans cette base on parvient au système

$$\begin{cases} a'=0 \\ b'=-c \\ c'=b \end{cases}$$

qui équivaut encore à

$$\begin{cases} a'=0 \\ c=-b' \\ c''+c=0 \end{cases}$$

On conclut

$$\begin{cases} a(t)=\nu \\ b(t)=\mu\cos t-\lambda\sin t \\ c(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t \end{cases}$$

Exercice 7 : [énoncé]
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A=-(X-2)(X^2-X+1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1={}^t(1,0,-1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA)=\mathrm{Sp}A=\{2\}$ et $E_2({}^tA)=\mathrm{Vect}{}^t(2,1,-1)$. Ainsi le plan d'équation $2x+y-z=0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2={}^t(0,1,1)$ et $X_3=AX_2={}^t(-1,2,0)$. On vérifie $AX_3=X_3-X_2$.
Ainsi pour $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=B$.
Pour $X={}^t(x,y,z)$ et $Y={}^t(y_1,y_2,y_3)=P^{-1}X$, on a $X'=AX\Leftrightarrow Y'=BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1'=2y_1 \\ y_2'=-y_3 \\ y_3'=y_2+y_3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_1'=2y_1 \\ y_2'=-y_3 \\ y_2''-y_2'+y_2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_1(t)=\alpha\mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\mu\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t)=-y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X=PY$.

Exercice 8 : [énoncé]
a)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.
b) On définit la matrice par :
`A:=matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 2]);`
On obtient son polynôme caractéristique factorisé par
`factor(charpoly(A, X));`
et ses éléments propres par
`eigenvects(A);`
On constate que 1 est valeur propre double mais que le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.
c) Puisque $\chi_A=(X-1)^2(X-i)(X+i)$ est annulateur de A, il suffit d'appliquer le lemme de décomposition des noyaux.
d) Par l'étude des éléments propres précédents, on prend
$C_1={}^t\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}$, $C_2={}^t\begin{pmatrix} -1 & i & 1 & -i \end{pmatrix}$ et $C_3={}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vecteurs propres associées aux valeurs propres $i,-i$ et 1.
On détermine enfin une colonne C_4 vérifiant $AC_4=C_4+C_3$.
`linsolve(A-diag(1, 1, 1, 1), vector([1, 1, 1, 1]));`
On choisit parmi les solutions $C_4={}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Finalement pour

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ i & -i & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude
```
P:=matrix(4, 4, [-1, -1, 1, 0, -I, I, 1, 1, 1, 1, 1, 2, I, -I, 1,
3]);
B:=evalm(inverse(P)&*A&*P);
```
e) Les solutions de l'équation $X'=AX$ sont les fonctions $X(t)=\exp(tA)X(0)$.
$\exp(tA)=P^{-1}\exp(tB)P$ permet le calcul de$\exp(tA)$.

Sachant

$$B^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{itb} & 0 & 0 & \\ 0 & \mathrm{e}^{-itb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

On achève le calcul de $\exp(tA)$ avec Maple

```
evalm(P&*matrix(4, 4, [exp(I*t), 0, 0, 0, 0, exp(-I*t), 0, 0, 0, 0,
exp(t), t*exp(t), 0, 0, 0, exp(t)])&*P^(-1));
```

Puis on détermine X

```
X:=evalm(%&*vector([x(0), D(x)(0), D(D(x))(0), (D@@3)(x)(0)]));
```

et enfin $x(t)$

```
X[1];
```

Exercice 9 : [énoncé]

a) Supposons

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = O_n$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$. Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$.

On montre de même successivement que $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0$.

On conclut que la famille $(I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre.

Puisque λI_n et N commutent, on a

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)} = \mathrm{e}^{t\lambda I_n}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_n + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right)$$

b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ, on a donc

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.

Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \ker N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \ker N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\right| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)}N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p - 1 > 0$.

On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

c) Les polynômes $(X - \lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \mathrm{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}$$

d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.

Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et ${}^tA$ commutent

$${}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,{}^tA + tA} = \mathrm{e}^{O_n} = I_n$$

Soit $X : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\|X(t)\|^2 = {}^t\overline{X(t)}X(t) = {}^t\overline{X(0)}\,{}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA}X(0) = \|X(0)\|^2$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.