SEMAINE 13

INTÉGRALES DÉPENDANT d'UN PARAMÈTRE

EXERCICE 1 :

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la **transformée de Laplace** de f est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\, dt$$

pour tout réel p tel que cette intégrale est convergente.

1. Théorème de la valeur finale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$. Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p\to 0^+} p\cdot \mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t\to+\infty} f(t)\ .$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ soit convergente (éventuellement "semi-convergente"). Montrer alors que, pour tout $p \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ converge et que la fonction $p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Utiliser la question précédente pour calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

- -

1. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $p > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Écrivons

$$p\cdot\mathcal{L}[f](p) - l = \int_0^{+\infty} p\, e^{-pt}\,\big(f(t) - l\big)\, dt\ .$$

Soit M un majorant de $|f(t) - l|$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $A > 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}|p\cdot\mathcal{L}[f](p) - l| \quad &\leq \quad \left|\int_0^A p\, e^{-pt}\,\big(f(t)-l\big)\, dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} p\, e^{-pt}\,\big(f(t)-l\big)\, dt\right| \\ &\leq \quad M\int_0^A p\, e^{-pt}\, dt + \int_A^{+\infty} p\, e^{-pt}\,|f(t)-l|\, dt\ . \qquad \textbf{(*)}\end{aligned}$$

Donnons-nous alors $\varepsilon > 0$. Fixons A tel que $|f(t) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $t \geq A$, ce qui rend la deuxième intégrale de **(*)** inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\int_0^A pe^{-pt} dt = 1 - e^{-pA} \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut rendre la première intégrale inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ en prenant p suffisamment proche de 0. On a ainsi prouvé que $\lim_{p\to 0^+}\big(p\cdot\mathcal{L}[f](p) - l\big) = 0$.

On en déduit que, si $l \neq 0$, alors l'ensemble de définition de $\mathcal{L}[f]$ est exactement $\mathbb{R}_+^*$ et que $\mathcal{L}[f](p) \underset{p\to 0}{\sim} \frac{l}{p}$.

2. Soit F la primitive de f qui s'annule en zéro. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $p > 0$, la fonction $t \mapsto F(t)\, e^{-pt}$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)\, e^{-pt} = 0$, ce qui permet une intégration par parties :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \qquad \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = p \cdot \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-pt}\, dt\ .$$

La transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est donc définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathcal{L}[f](p) = p \cdot \mathcal{L}[F](p)\ . \qquad \textbf{(*)}$$

La transformée $\mathcal{L}[F]$, définie au moins sur $\mathbb{R}_+^*$, est continue sur cet intervalle : en effet, si on fixe $p_0 > 0$, la fonction $t \mapsto F(t)\, e^{-p_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathcal{L}[F]$ sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$. Grâce à **(*)**, on déduit la continuité de $\mathcal{L}[f]$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin,

$$\mathcal{L}[f](0) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{+\infty} F = \lim_{p\to 0^+} p \cdot \mathcal{L}[F](p) = \lim_{p\to 0^+} \mathcal{L}[f](p)$$

d'après le théorème de la valeur finale, d'où la continuité de la fonction $\mathcal{L}[f]$ en 0.

3. Il est bien connu que cette intégrale I est "semi-convergente". Appliquons alors la question **2.** à la fonction "sinus cardinal", à savoir $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, prolongée par continuité en zéro : sa transformée de Laplace est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Or, il est assez aisé de calculer l'expression de $\mathcal{L}[f](p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$ pour $p > 0$.

Pour cela, considérons $g : (p,t) \mapsto e^{-pt}\, \dfrac{\sin t}{t}$. La fonction g est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, si $a > 0$, on a $|g(p,t)| \le \dfrac{e^{-at}\, |\sin t|}{t}$ pour $(p,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at}\, |\sin t|}{t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, cela prouve la continuité de la fonction $\mathcal{L}[f]$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\dfrac{\partial g}{\partial p}(p,t) = -e^{-pt}\, \sin t$ et, si $a > 0$, la majoration

$$\left| \frac{\partial g}{\partial p}(p,t) \right| \le e^{-at}\ , \text{ valable pour } \quad (p,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*\ ,$$

prouve que la fonction $\Phi = \mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\Phi'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \sin t\, dt = -\frac{1}{1+p^2}\ .$$

Donc $\Phi(p) = C - \arctan p$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème de convergence dominée ("version familiale", c'est-à-dire appliqué à une famille de fonctions) permet de montrer que $\lim\limits_{+\infty} \Phi = 0$, donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Phi(p) = \mathcal{L}[f](p) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, p\ .$$

La question **2.** permet d'affirmer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est continue en zéro (*ce que les théorèmes du cours ne suffisent pas à garantir puisque la fonction sinus cardinal n'est pas intégrable sur* $\mathbb{R}_+$), d'où

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\mathcal{L}[f](0)=\lim_{p\to 0^+}\mathcal{L}[f](p)=\frac{\pi}{2}\ .$$

EXERCICE 2 :

Pour tout $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$.

1. Démontrer la relation : $\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$

2. En déduire : $\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$

En déduire, pour tout $x>0$ fixé, l'équivalence

$$x(x+1)\cdots(x+n)\sim\frac{n^x\,n!}{\Gamma(x)}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on note f une fonction logarithmiquement convexe (c'est-à-dire la fonction $x\mapsto\ln\big(f(x)\big)$ est convexe) de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $f(1)=1$ et la relation fonctionnelle $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x+1)=x\,f(x)$.

3. Soient $x>0$, $y>0$, $\lambda\in[0,1]$. Posons $t=\lambda x+(1-\lambda)y$. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'inégalité

$$t(t+1)\cdots(t+n)\,f(t)\le\big(x(x+1)\cdots(x+n)\,f(x)\big)^\lambda\cdot\big(y(y+1)\cdots(y+n)\,f(y)\big)^{1-\lambda}\ .$$

En déduire que

$$\frac{f(t)}{\Gamma(t)}\le\left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^\lambda\left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-\lambda}\ .$$

4. Montrer que $f=\Gamma$.

- -

1. Plus généralement, soit $f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $g:t\mapsto e^{-t}\,f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\,f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n f(t)\,dt\ .$$

En effet, pour tout réel t, on a $e^{-t}=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Définissons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une fonction $u_n:\,]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par

$$u_n(t)\ =\begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si}\quad 0<t\le n\\[2mm] 0 & \text{si}\quad t>n\ .\end{cases}$$

Alors u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la suite (u_n) converge simplement, sur $\mathbb{R}_+^*$, vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$.
En posant $g_n = u_n \cdot f$, on a une suite (g_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, convergeant simplement vers g sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité classique $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$, valable pour $t \in [0, n[$, montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t} \quad \text{donc} \quad |g_n(t)| \leq |g(t)| \; .$$

L'hypothèse de domination est alors vérifiée et le théorème de convergence dominée s'applique.
Il suffit donc d'appliquer ce résultat avec $f(t) = t^{x-1}$.

2. Le changement de variable $t = nu$ donne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n\, u^{x-1}\, du = n^x\, B(x, n+1) \; ,$$

en notant $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 u^{p-1}\,(1-u)^{q-1}\, du$ pour p et q réels strictement positifs (**intégrale eulérienne de première espèce**). La fonction $u \mapsto u^{p-1}(1-u)^{q-1}$ est bien intégrable sur $]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} B(x, n+1) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n}{x} \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1}\, du \\ &= \frac{n}{x}\, B(x+1, n) \; . \end{aligned}$$

À partir de $B(x,1) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\, du = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, une récurrence immédiate donne

$$B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \; .$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = \frac{n^x\; n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \; ,$$

d'où le résultat. L'équivalence demandée est alors une conséquence immédiate.

3. En vertu de la relation fonctionnelle satisfaite par f, l'inégalité à prouver équivaut à

$$f\big(\lambda(x+n+1) + (1-\lambda)(y+n+1)\big) \leq \big(f(x+n+1)\big)^{\lambda}\, \big(f(y+n+1)\big)^{1-\lambda} \; ,$$

ou encore à

$$\ln\Big[f\big(\lambda(x+n+1) + (1-\lambda)(y+n+1)\big)\Big] \leq \lambda\, \ln\big(f(x+n+1)\big) + (1-\lambda)\, \ln\big(f(y+n+1)\big) \; ,$$

ce qui résulte de la convexité de la fonction $\ln \circ f$.

L'inégalité obtenue peut aussi s'écrire

$$\frac{f(t)}{\big(f(x)\big)^{\lambda}\,\big(f(y)\big)^{1-\lambda}} \leq \frac{\big(x(x+1)\cdots(x+n)\big)^{\lambda}\,\big(y(y+1)\cdots(y+n)\big)^{1-\lambda}}{t(t+1)\cdots(t+n)}\;. \qquad \textbf{(*)}$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ en utilisant l'équivalence démontrée à la fin de la question **2.** Le second membre de **(*)** tend vers $\dfrac{\Gamma(t)}{\big(\Gamma(x)\big)^{\lambda}\,\big(\Gamma(y)\big)^{1-\lambda}}$. Il vient alors

$$\frac{f(t)}{\Gamma(t)} \leq \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^{\lambda}\,\left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-\lambda}\;.$$

4. L'inégalité obtenue ci-dessus signifie que la fonction $\ln\left(\dfrac{f}{\Gamma}\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, cette fonction est 1-périodique. Elle est donc constante : en effet, si une fonction g est convexe et 1-périodique sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g(1)=g(2)=C$, on obtient aisément $g\leq C$ sur $[1,2]$ et $g\geq C$ sur $[2,3]$ et la périodicité entraîne $g=C$ sur $[1,3]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $f(1)=\Gamma(1)=1$, on a donc $f=\Gamma$.

EXERCICE 3 :

1.. Soit $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Démontrer l'égalité

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\big(\varphi(0)+\varphi(1)\big) - \frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)\,\varphi''(t)\,dt\;. \qquad \textbf{(*)}$$

On suppose maintenant que $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. Montrer l'existence d'une constante C telle que $\left|\displaystyle\int_0^1\varphi\right|\leq C\cdot M$, où $M=\max\limits_{[0,1]}|\varphi''|$.

2. On note K le pavé $[0,1]^2$. Soit $f:K\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^4$. On suppose que f est nulle sur le bord ∂K du pavé K et que $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\right|\leq M'$ sur K. Trouver une constante C' telle que

$$\left|\iint_K f\right|\leq C'\cdot M'\;.$$

- -

1. Par deux intégrations par parties successives, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 t(1-t)\,\varphi''(t)\,dt &= \big[t(1-t)\,\varphi'(t)\big]_0^1 + \int_0^1 (2t-1)\,\varphi'(t)\,dt\\ &= \big[(2t-1)\,\varphi(t)\big]_0^1 - 2\int_0^1\varphi(t)\,dt\\ &= \varphi(1)+\varphi(0)-2\int_0^1\varphi\;,\end{aligned}$$

d'où la relation **(*)**. Si $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, il est alors immédiat que

$$\left| \int_0^1 \varphi \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 t(1-t)\, \varphi''(t)\, dt \right| \leq \frac{M}{2} \int_0^1 t(1-t)\, dt = \frac{M}{12} \ ,$$

d'où la possibilité de choisir $C = \dfrac{1}{12}$.

Ce choix est le "meilleur" possible, ainsi qu'on le voit en considérant la fonction $\varphi : t \mapsto t(1-t)$ (fonction vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et φ'' constante sur $[0,1]$).

2. La formule de Fubini permet d'écrire

$$\iint_K f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \ .$$

Or, en appliquant **(*)** à $y \mapsto f(x,y)$ pour un $x \in [0,1]$ fixé, puisque $f(x,0) = f(x,1) = 0$,

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 y(1-y)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, dy \ ,$$

puis

$$\begin{aligned} \iint_K f &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 y(1-y)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, dy \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 y(1-y) \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, dx \right) dy \qquad \text{(Fubini)} \end{aligned}$$

et, de nouveau grâce à **(*)**, pour tout $y \in [0,1]$ fixé, puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,y) = 0$,

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)\, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}(x,y)\, dx$$

et, finalement, en utilisant une dernière fois Fubini,

$$\iint_K f = \frac{1}{4} \iint_K xy(1-x)(1-y)\, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}(x,y)\, dx\, dy \ ,$$

d'où la majoration

$$\left| \iint_K f \right| \leq \frac{M'}{4} \iint_K xy(1-x)(1-y)\, dx\, dy = \frac{M'}{4} \left(\int_0^1 x(1-x)\, dx \right)^2 = \frac{M'}{144}$$

qui permet de choisir $C' = \dfrac{1}{144}$. Ici encore, la fonction $f : (x,y) \mapsto xy(1-x)(1-y)$, nulle sur le bord du pavé K et dont la dérivée partielle $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}$ garde une valeur constante, montre que $C' = \dfrac{1}{144}$ est "la meilleure" constante possible.

EXERCICE 4 :

Produit de convolution dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Pour tous f, g de $\mathcal{E}$, on définit une fonction $f * g$ par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt\ .$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne commutative dans $\mathcal{E}$.
Si l'une des fonctions f ou g est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, que peut-on dire de $f * g$?

2. Montrer que $\mathcal{E}$, muni des lois $+$ (addition usuelle) et $*$, possède une structure de pseudo-algèbre sur $\mathbb{C}$ (pas d'élément unité).

3. On appelle ***approximation de l'unité*** 2π***-périodique*** toute suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{E}$ vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad e_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_n = 1$;
- pour tout $\alpha \in\,]0, \pi[$, la suite (e_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\pi, -\alpha]$ et sur $[\alpha, \pi]$.

Montrer qu'alors, pour tout $f \in \mathcal{E}$, la suite de fonctions $(e_n * f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tous f, $g \in \mathcal{E}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f * g = \left(\int_0^{2\pi} f\right)\left(\int_0^{2\pi} g\right)\ .$$

- -

1. La continuité de $(x, t) \mapsto f(t)\, g(x-t)$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ garantit la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$. La périodicité est immédiate.

La commutativité se démontre en faisant le changement de variable $u = x - t$ et en notant que l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur $[a, a+2\pi]$ ne dépend pas du réel a.

Si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Leibniz montre que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $(f*g)' = f * g'$. Grâce à la commutativité, si f est $\mathcal{C}^1$, alors $f * g$ est $\mathcal{C}^1$ et $(f*g)' = f' * g$. Notons que, si f et g sont toutes deux $\mathcal{C}^1$, alors $f * g' = f' * g$, ce que l'on retrouve par une intégration par parties.

2. La distributivité de la convolution par rapport à l'addition

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

est immédiate.

Prouvons l'associativité de la loi de convolution :

$$\begin{aligned}
\big[(f*g)*h\big](x) &= \int_0^{2\pi} (f*g)(t)\, h(x-t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(u)\, g(t-u)\, du \right) h(x-t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(u) \left(\int_0^{2\pi} g(t-u)\, h(x-t)\, dt \right) du\ ,
\end{aligned}$$

d'après la formule de Fubini. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(t-u)\, h(x-t)\, dt &= \int_{-u}^{2\pi-u} g(s)\, h(x-u-s)\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} g(s)\, h(x-u-s)\, ds = (g*h)(x-u)\ ,
\end{aligned}$$

donc $\big[(f*g)*h\big](x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(u)\, (g*h)(x-u)\, du = \big[f*(g*h)\big](x)$.

$(\mathcal{E},+,*)$ est donc muni d'une structure de pseudo-anneau (pas d'élément unité) et il est immédiat que $\lambda(f*g) = (\lambda f)*g = f*(\lambda g)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{E}$.

Vérifions qu'il n'y a effectivement pas d'élément unité : si une telle fonction e existait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons c_n la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $c_n(x) = \cos nx$. Nous aurions alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(c_n * e)(0) = c_n(0)$, soit $\displaystyle\int_0^{2\pi} e(-t)\, \cos nt\, dt = 1$, ce qui contredit manifestement le théorème de Riemann-Lebesgue.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$. Notons $M = \|f\|_\infty = \max\limits_{[0,2\pi]} |f|$.

Soit $\alpha \in]0,\pi[$. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e_n * f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e_n(t)\, \big(f(x-t) - f(x)\big)\, dt = I_1 + I_2 + I_3\ ,$$

où I_1, I_2, I_3 sont les intégrales de cette même expression sur les intervalles $[-\pi,-\alpha]$, $[-\alpha,\alpha]$ et $[\alpha,\pi]$ respectivement.

Donnons-nous alors un $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est continue et périodique), nous pouvons trouver un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |x-y| \le \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Pour un tel choix de α, nous avons

$$|I_2| \le \int_{-\alpha}^{\alpha} e_n(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt \le \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\alpha}^{\alpha} e_n(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\pi}^{\pi} e_n = \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Cet α étant maintenant fixé, nous avons

$$|I_3| = \left| \int_\alpha^\pi e_n(t)\, \big(f(x-t) - f(x)\big)\, dt \right| \le 2M \int_\alpha^\pi e_n(t)\, dt\ ,$$

et cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ en vertu de la convergence uniforme de la suite (e_n) vers 0 sur $[\alpha, \pi]$; il est donc possible de la rendre inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{3}$ pour n assez grand (et ceci indépendamment de x). Procédant de même pour majorer $|I_1|$, nous déduisons l'existence d'un entier N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow \|e_n * f - f\|_\infty \leq \varepsilon \ ,$$

donc la convergence uniforme de $(e_n * f)$ vers f sur $\mathbb{R}$.

On dit que la suite (e_n) est une **approximation de l'unité** 2π**-périodique** car, pour tout f de $\mathcal{E}$, les fonctions $e_n * f$ approchent f uniformément.

4. C'est une conséquence immédiate de la formule de Fubini :

$$\int_0^{2\pi} f * g = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt \right) dx = \int_0^{2\pi} f(t) \left(\int_0^{2\pi} g(x-t)\, dx \right) dt$$

et l'intégrale intérieure est égale à $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(s)\, ds$, d'où le résultat.

EXERCICE 5 :

Produit de convolution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$

Pour traiter cet exercice, on pourra admettre la "formule de Fubini dans un triangle" :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : T_a \to \mathbb{C}$, continue, où T_a est le "triangle" :

$$T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \,,\, y \geq 0 \,,\, x + y \leq a\} \ .$$

On a alors l'égalité

$$\int_0^a \left(\int_0^{a-x} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{a-y} f(x, y)\, dx \right) dy$$

et la valeur commune de ces deux intégrales sera notée $\displaystyle\iint_{T_a} f(x, y)\, dx\, dy$ *ou* $\displaystyle\iint_{T_a} f$.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{C}$. Pour tous f, g de $\mathcal{E}$, on définit une fonction $f * g$ par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (f * g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt \ .$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne commutative dans $\mathcal{E}$.

2. Montrer que $\mathcal{E}$, muni des lois $+$ (addition usuelle) et $*$, possède une structure de pseudo-algèbre sur $\mathbb{C}$ (pas d'élément unité).

3. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^a (f * g)(x)\, dx$ peut s'exprimer comme une intégrale double.

4. Montrer que, si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, alors $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f * g = \left(\int_{\mathbb{R}_+} f \right) \left(\int_{\mathbb{R}_+} g \right) .$$

- -

1. Le changement de variable linéaire $t = xu$ donne

$$(f * g)(x) = x \int_0^1 f(xu)\, g\big(x(1-u)\big)\, du$$

et on en déduit la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}_+$ "par application des théorèmes usuels" (*comme il est d'usage de dire*), donc $*$ est une loi interne dans $\mathcal{E}$. La commutativité résulte immédiatement du changement de variable $u = x - t$.

2. La distributivité de la convolution par rapport à l'addition $f * (g + h) = f * g + f * h$ est immédiate.

L'associativité utilise "Fubini dans un triangle" :

$$\begin{aligned}
\big[(f * g) * h\big](x) &= \int_0^x (f * g)(x - t)\, h(t)\, dt \\
&= \int_0^x \left(\int_0^{x-t} f(u)\, g(x - t - u)\, du \right) h(t)\, dt \\
&= \int_0^x \left(\int_0^{x-u} g(x - t - u)\, h(t)\, dt \right) f(u)\, du \\
&= \int_0^x (g * h)(x - u)\, f(u)\, du = \big[f * (g * h)\big](x) .
\end{aligned}$$

Pour prouver qu'il n'y a pas d'élément neutre, on montre que la relation $e * 1 = 1$, avec $e \in \mathcal{E}$, est impossible : en effet, cela entraînerait $\displaystyle\int_0^x e(t)\, dt = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui est manifestement impossible pour $x = 0$.

3. Grâce à "Fubini dans un triangle", on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^a (f * g)(x)\, dx &= \int_0^a (f * g)(a - t)\, dt \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{a-t} f(u)\, g(a - t - u)\, du \right) dt \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{a-u} g(a - u - t)\, dt \right) f(u)\, du \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{a-u} g(t)\, dt \right) f(u)\, du \\
&= \iint_{T_a} f(x)\, g(y)\, dx\, dy ,
\end{aligned}$$

avec $T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\, ,\, y \geq 0\, ,\, x + y \leq a\}$.

4. Supposons f et g intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Notons d'abord que $|f*g| \leq |f|*|g|$. Ensuite, pour tout $a>0$, notons R_a le pavé $[0,a]^2$, on a, d'après la question précédente,

$$\int_0^a |f*g| \leq \int_0^a |f|*|g| = \iint_{T_a} |f(x)g(y)|\,dx\,dy \leq \iint_{R_a} |f(x)g(y)|\,dx\,dy = \left(\int_0^a |f|\right)\left(\int_0^a |g|\right) ,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $f*g$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $a>0$, posons

$$\varphi(a) = \left(\int_0^a f\right)\left(\int_0^a g\right) - \int_0^a f*g = \iint_{R_a} f(x)\,g(y)\,dx\,dy - \iint_{T_a} f(x)\,g(y)\,dx\,dy .$$

Alors $\varphi(a) = \displaystyle\iint_{R_a\setminus T_a} f(x)\,g(y)\,dx\,dy$, donc

$$|\varphi(a)| \leq \iint_{R_a\setminus T_a} |f(x)\,g(y)|\,dx\,dy \leq \iint_{R_a\setminus R_{\frac{a}{2}}} |f(x)\,g(y)|\,dx\,dy ,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(a)| \leq \left(\int_0^a |f|\right)\left(\int_0^a |g|\right) - \left(\int_0^{\frac{a}{2}} |f|\right)\left(\int_0^{\frac{a}{2}} |g|\right) ,$$

d'où $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver la "formule de Fubini dans un triangle", on peut montrer d'abord que, pour toute fonction d'une variable $\varphi : [0,a] \to \mathbb{C}$, continue, on a

$$\int_0^a \left(\int_0^{a-y} \varphi(x)\,dx\right) dy = \int_0^a (a-x)\,\varphi(x)\,dx ,$$

puis appliquer Fubini (celui qui est au programme) à la fonction $g : [0,a]^2 \to \mathbb{C}$ définie par $g(x,y) = f(x,y) - f(x,a-x)$ si $(x,y) \in T_a$ et $g(x,y) = 0$ sinon.

EXERCICE 6 :

1. On admet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{f(t)-f(0^+)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin \lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,f(0^+) .$$

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux (c.p.m.) et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut définir l'intégrale

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\ .$$

La fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la **transformée de Fourier** *de f.*

Dans ce qui suit, la fonction f est supposée continue par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer la **formule de réciprocité** suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda\ . \qquad \textbf{(*)}$$

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(\lambda) = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$.

Montrer, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$, l'égalité

$$\int_{-A}^{A} F_n(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = 2 \int_{x-n}^{x+n} f(x-u)\, \frac{\sin Au}{u}\, du\ .$$

3. En utilisant la question **1.**, montrer l'égalité **(*)** ci-dessus.

- -

1. L'intégrale $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt$ est bien définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: en effet, on a $\left| f(t)\, \dfrac{\sin \lambda t}{t} \right| \leq |\lambda\, f(t)|$, donc la fonction $t \mapsto f(t)\, \dfrac{\sin \lambda t}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout réel λ.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $x = \lambda t$ donne immédiatement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ , \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda) - \frac{\pi}{2}\, f(0^+) &= \int_0^{+\infty} \big(f(t) - f(0^+)\big)\, \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{f(t) - f(0^+)}{t}\, \sin \lambda t\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \sin \lambda t\, dt - f(0^+) \int_\lambda^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\ . \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et la fonction g est intégrable sur $]0, 1]$. Les deux premiers termes tendent donc vers zéro lorsque λ tend vers $+\infty$ (théorème de Riemann-Lebesgue, *cf.* à la fin). Enfin, la (semi-)convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ montre que le troisième terme aussi tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda &= \int_{-A}^{A} \left(\int_{-n}^{n} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\right) e^{ix\lambda}\, d\lambda \\ &= \int_{-n}^{n} f(t) \left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\lambda}\, d\lambda\right) dt\end{aligned}$$

(cette interversion des intégrations est justifiée par le théorème de Fubini si f est continue sur $[-n, n]$ et reste valable si f est seulement continue par morceaux : il suffit alors de décomposer par la relation de Chasles en faisant intervenir les points de discontinuité de f dans le segment $[-n, n]$). On a donc

$$\int_{-A}^{A} F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda = 2 \int_{-n}^{n} f(t)\, \frac{\sin A(x-t)}{x-t}\, dt = 2 \int_{x-n}^{x+n} f(x-u)\, \frac{\sin Au}{u}\, du\ ,$$

la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin Au}{u}$ étant évidemment prolongée par continuité en zéro.

3. On en déduit

$$\int_{-A}^{A} F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda = 2 \left(\int_0^{n-x} f(x+v)\, \frac{\sin Av}{v}\, dv + \int_0^{x+n} f(x-u)\, \frac{\sin Au}{u}\, du\right)\ .$$

Pour x et A fixés, ces intégrales ont des limites finies lorsque n tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\sin Au}{u}$ (évidemment prolongé par continuité pour $u = 0$) est borné.
D'autre part, la majoration

$$|\widehat{f}(\lambda)\, e^{ix\lambda} - F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}| = |\widehat{f}(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{-n} |f| + \int_n^{+\infty} |f|\ ,$$

avec f intégrable sur $\mathbb{R}$, montre que la suite de fonctions $\big(\lambda \mapsto F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda)\, e^{ix\lambda}$.
Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, posons $g(A) = \displaystyle\int_{-A}^{A} \widehat{f}(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda$. On a donc

$$\begin{aligned}g(A) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-A}^{A} F_n(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(x+u)\, \frac{\sin Au}{u}\, du + 2 \int_0^{+\infty} f(x-u)\, \frac{\sin Au}{u}\, du\ .\end{aligned}$$

Or, si f est c.p.m. et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les "taux d'accroissement" $\dfrac{f(x+u) - f(x^+)}{u}$ et $\dfrac{f(x-u) - f(x^-)}{u}$ ont des limites finies lorsque u tend vers zéro par valeurs supérieures.
Les conditions d'application de la question **1.** sont alors remplies, ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \pi\, \big(f(x^+) + f(x^-)\big)$.

Remarque. Sans hypothèse supplémentaire sur f, on a simplement démontré l'existence d'une limite de l'expression ("intégrale symétrique") $g(A)=\displaystyle\int_{-A}^{A}\widehat{f}(\lambda)\,e^{ix\lambda}\,d\lambda$ lorsque A tend vers $+\infty$. Cela n'implique pas la convergence (même la "semi-convergence") de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)\,e^{ix\lambda}\,d\lambda$: en effet, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}$, considérées séparément, peuvent être divergentes.

Sous les hypothèses de cet exercice, en supposant de plus f continue sur $\mathbb{R}$, le "signal" f peut être entièrement retrouvé lorsqu'on connaît sa transformée de Fourier $\widehat{f}$. Si on suppose de plus $\widehat{f}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce qui peut résulter d'hypothèses de régularité faites sur la fonction f), la formule de réciprocité de Fourier peut alors s'écrire

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)\,e^{ix\lambda}\,d\lambda\ ,$$

soit

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\,\widehat{\widehat{f}}\,(-x)\ ,\ \textit{ou encore}\quad \widehat{\widehat{f}}\,(x)=2\pi\,f(-x)\ .$$

Pour finir, voici l'énoncé et une preuve du **théorème de Riemann-Lebesgue** :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f:I\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur I.

Alors l'intégrale $\tilde{f}(\lambda)=\displaystyle\int_I f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt$ tend vers zéro lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

Preuve : L'existence de $\tilde{f}(\lambda)$ résulte trivialement de l'intégrabilité de f sur I.

• Plaçons-nous d'abord dans le cas où I est un segment : $I=[a,b]$.

▷ si f est la fonction caractéristique d'un intervalle $J=[\alpha,\beta]$ (ou $]\alpha,\beta]$ ou $[\alpha,\beta[$ ou $]\alpha,\beta[$) avec $a\le\alpha\le\beta\le b$,alors

$$|\tilde{f}(\lambda)|=\left|\int_J e^{i\lambda t}\,dt\right|=\left|\frac{e^{i\lambda\beta}-e^{i\lambda\alpha}}{i\lambda}\right|\le\frac{2}{|\lambda|}\ ,$$

et le résultat est évident.

▷ si f est en escalier sur $[a,b]$, le résultat est encore vrai car f est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles.

▷ si f est une fonction c.p.m. quelconque sur $[a,b]$, f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions en escalier. Cela signifie que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction φ, en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]\quad |f(x)-\varphi(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. On a alors $\displaystyle\int_I|f-\varphi|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$|\tilde{f}(\lambda)-\tilde{\varphi}(\lambda)|=\left|\int_I\big(f(t)-\varphi(t)\big)\,e^{i\lambda t}\,dt\right|\le\int_I|f-\varphi|\le\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Puisque φ est en escalier, on peut trouver un réel Λ tel que, pour $\lambda\ge\Lambda$, on ait $|\tilde{\varphi}(\lambda)|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $|\tilde{f}(\lambda)|\le\varepsilon$.

• Soit maintenant I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver un segment J inclus dans I tel que $\displaystyle\int_K |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, en posant $K = I \setminus J$ (K est, soit un intervalle, soit la réunion de deux intervalles). Alors

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_J f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt + \int_K f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\ ,$$

d'où l'on tire $|\tilde{f}(\lambda)| \leq \left|\displaystyle\int_J f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}$. Or, il résulte de l'étude faite sur un segment que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_J f(t)\ e^{i\lambda t}\ dt = 0$; on peut alors trouver Λ tel que, pour $\lambda \geq \Lambda$, on ait $\left|\displaystyle\int_J f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $\lambda \geq \Lambda$, on aura alors $|\tilde{f}(\lambda)| \leq \varepsilon$.

Remarque. Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, une intégration par parties, puis une majoration des différents termes obtenus, permettent de conclure plus simplement.