

FONCTIONS CIRCULAIRES

(JE SAIS FAIRE)

1 Vrai ou faux ? Justifier.


- 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [2\pi] \implies x \equiv y [\pi].$
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [\pi] \implies x \equiv y [2\pi].$
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y [2\pi] \implies x \equiv y [\pi].$
- 4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [\pi] \implies 2x \equiv 2y [\pi].$
- 5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y [\pi] \implies x \equiv y [\pi].$

1 FONCTIONS sin, cos ET tan

 Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions sin, cos et tan et je connais par cœur les valeurs usuelles de ces fonctions, y compris pour tan.

2 Déterminer de tête les valeurs de : $\sin \frac{7\pi}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6}, \quad \sin \frac{3\pi}{4}, \quad \cos \left(-\frac{8\pi}{3} \right)$ et $\tan \left(-\frac{\pi}{6} \right).$

 Je sais dériver les fonctions sin, cos et tan. Je sais que la formule de dérivation de tan permet de calculer une tangente à partir d'un cosinus et vice versa.


 Je sais résoudre les équations : $\sin x = \sin y, \quad \cos x = \cos y$ et $\tan x = \tan y,$ et je sais visualiser sur une figure pourquoi le résultat est vrai.

3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$: $\sin(2x) = \sin(3x)$ et $\cos(2x) = -\frac{1}{2}.$

 Je sais retrouver de tête, mais sur un dessin, les formes simplifiées des expressions du genre : $\sin(x + \pi),$
 $\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad \sin(\pi - x) \dots$

4 On peut résumer la 2π -périodicité du (co)sinus en disant que « la fonction $x \mapsto x + 2\pi$ préserve le (co)sinus ». Quelle autre transformation importante préserve le cosinus ? le sinus ? Quelle transformation importante transforme le sinus en cosinus et vice versa ?

5 Simplifier pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(x + 17\pi)$ et $\sin(x + n(n + 1)\pi).$

 Je sais par cœur les développements : $\sin(x \pm y), \quad \tan(x \pm y) \dots$ Je sais retrouver très rapidement les développements correspondants pour : $\sin x \cos y, \quad \cos x \cos y \dots$ Je sais enfin par cœur les formules de duplication.

 Je sais transformer : $a \cos \theta + b \sin \theta$ en : $c \cos(\theta + \varphi)$ ou $c \sin(\theta + \varphi)$.

6

Proposer des valeurs de c et φ pour lesquelles pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = c \sin(\theta + \varphi)$.

2 FONCTIONS Arcsin, Arccos ET Arctan

 Je sais définir les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. J'ai compris l'importance du domaine de référence grâce auquel chacune de ces fonctions est définie.

7

Pour quelles valeurs de x les relations : $\text{Arcsin} \sin x = x$ et $\sin \text{Arcsin} x = x$ sont-elles vraies ? Même question avec les fonctions \cos/Arccos et \tan/Arctan .

8

Simplifier : $\text{Arccos} \cos \frac{29\pi}{6}$ et $\text{Arcsin} \sin \frac{17\pi}{6}$.

 Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions Arcsin, Arccos et Arctan.

 Je sais dériver les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan et je sais sur quels domaines elles sont dérivables.

3 CORRECTION DES EXERCICES

1

- 1) Vrai. Si $x = y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors $x = y + k'\pi$ avec $k' = 2k$ et k' est bien un entier.
- 2) Faux. Si $x = y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $0 \equiv \pi [\pi]$ mais : $0 \not\equiv \pi [2\pi]$.
- 3) Vrai. Si $2x = 2y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors $x = y + k\pi$, tout simplement !
- 4) Vrai. Si $x = y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors $2x = 2y + 2k\pi = 2y + k'\pi$ avec $k' = 2k$ et k' est bien un entier.
- 5) Faux. Si $2x = 2y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $2 \times \frac{\pi}{2} \equiv 2 \times 0 [\pi]$ mais : $\frac{\pi}{2} \not\equiv 0 [\pi]$.

2

$$\sin \frac{7\pi}{2} = -1, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0, 2\pi[: \quad \cos(2x) = -\frac{1}{2} &\iff \cos(2x) = \cos \frac{2\pi}{3} \\ &\iff 2x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi] \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\} \quad \text{ou} \quad x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \\ \text{et :} \quad \sin(2x) = \sin(3x) &\iff 2x \equiv 3x [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - 3x [2\pi] \\ &\iff x \equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5} \right] \\ &\stackrel{x \in [0, 2\pi[}{\iff} x = 0 \quad \text{ou} \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5} \right\} \iff x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5} \right\}. \end{aligned}$$

4

- La fonction $x \mapsto -x$ préserve le cosinus par parité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x$.
- La fonction $x \mapsto \pi - x$ préserve quant à elle le sinus : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi - x) = \sin x$.
- La fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ transforme les sinus en cosinus et vice versa :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

5

- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(x + 17\pi) = -\cos x$ et $\sin(x + n(n+1)\pi) = \sin x$ car $n(n+1)$, produit de deux entiers consécutifs, est pair.

6

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R} : \quad 3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) = 2\sqrt{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos \theta + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \theta \right) = 2\sqrt{3} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right).$$

7

- Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\text{Arcsin } \sin x = x$ et pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin \text{Arcsin } x = x$.
- Pour tout $x \in [0, \pi]$: $\text{Arccos } \cos x = x$ et pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos \text{Arccos } x = x$.
- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\text{Arctan } \tan x = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan \text{Arctan } x = x$.

8

$$\begin{aligned} \text{Arccos } \cos \frac{29\pi}{6} &= \text{Arccos } \cos \frac{5\pi}{6} \stackrel{\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]}{=} \frac{5\pi}{6}. \\ \text{Arcsin } \sin \frac{17\pi}{6} &= \text{Arcsin } \sin \frac{5\pi}{6} = \text{Arcsin } \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = \text{Arcsin } \sin \frac{\pi}{6} \stackrel{\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{=} \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$