MP Programme de colle n° 12

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

Cours :

3. Isométries

4. Endomorphismes symétriques

Les démonstrations à connaître

Sur les isométries

3.1

Théorème : caractérisations d'une isométrie et définition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- Conservation du produit scalaire : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2 : (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)}$
- Conservation de la norme : $\boxed{\forall x \in E : \left\| u(x) \right\| = \left\| x \right\|}$
- Conservation du caractère orthonormé d'une base : l'image d'une base orthonormée de E est une base orthonormée
- A est une matrice orthogonale :

Tout endomorphisme de E vérifiant l'une de ces quatre propriétés est appelé **isométrie vectorielle** ou **automorphisme ortghogonal**.

3.2.b

Propriété : caractérisation d'une symétrie orthogonale par sa matrice

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :

$\boxed{[u \text{ est une symétrie orthogonale}] \Leftrightarrow [A \text{ est symétrique et orthogonale}]}$.

3.5

Théorème de stabilité Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

3.6

Proposition : spectre d'une matrice orthogonale

Si $A \in O(n)$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1,1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset U$

où U est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

De plus $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \bar{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Sur les endomorphismes symétriques

4.1.b

<u>Propriété</u> : Si s est un endomorphisme symétrique, alors $E = \mathrm{Ker}(s) \underset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(s)$

4.3

<u>Propriété : caractérisation d'un endomorphisme symétrique par sa matrice</u>

Soient $\mathcal{B}$ une base <u>orthonomée</u> de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

$[u$ est un endomorphisme symétrique$] \Leftrightarrow [A$ est une matrice symétrique$]$.

4.4

<u>Théorème de stabilité</u>

Si s est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par s, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par s.

4.5 **Théorèmes spectraux**

<u>Lemme 1</u> : Si s est un endomorphisme symétrique, alors le polynôme caractéristique de s est scindé dans $\mathbb{R}$. En particulier : $\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(s) = Sp_{\mathbb{C}}(s)}$

autrement dit : toutes les valeurs propres de s (dans $\mathbb{C}$) sont réelles.

<u>Lemme 2</u> : Si s est un endomorphisme symétrique, alors

ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral : Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. On dit aussi qu'il est "**orthodiagonalisable**".

autrement dit : toutes les valeurs propres de s (dans $\mathbb{C}$) sont réelles.

Théorème spectral pour les matrices :

$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \exists P \in O(n) \ / \ P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.