MP Programme de colle n° 11

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

Cours :

1. Espaces préhilbertiens réels (rappels de M.P.S.I.)
2. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie
3. Isométries
   3.1. Matrices orthogonales
   3.2. Isométries
      a) Définitions

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

1.2.c

Théorème 1 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\forall (x,y) \in E^2 : \boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|} \text{ ou } \boxed{(x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2 \times \|y\|^2}$$

L'égalité est réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires

i.e. $\boxed{x = 0_E \ \textbf{ou}\ \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ y = \lambda x}$

1.2.d

Théorème 2 : **Inégalité de Minkowski, dite aussi triangulaire**

$$\forall (x,y) \in E^2 : \boxed{\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$$

L'égalité est réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens

i.e. $\boxed{x = 0_E \ \textbf{ou}\ \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ /\ y = \lambda x}$

1.4.b

Propriété 1 : toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

Propriété 2 : **Théorème de Pythagore**

Si la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$ est orthogonale, alors $\boxed{\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2}$

2.1

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie p de E.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors :

- ❑ $F \oplus F^\perp = E$ et $F = (F^\perp)^\perp$
- ❑ On peut définir le projecteur orthogonal p_F de E sur F et

$$\forall x \in E : \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x).e_i$$

- ❑ $\forall x \in E : d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$.
- ❑ $\forall x \in E : p_F(x)$ est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$

2.3

Théorème : **Inégalité de Bessel**

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille orthonormale E, alors : $\boxed{\forall x \in E : \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2}$

2.4

Théorème : Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille libre de l'espace préhilbertien E.

Alors il existe une et une seule famille orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] : \begin{cases} Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(u_1, \dots, u_k) \\ (e_k \mid u_k) > 0 \end{cases}.$$

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ s'appelle l'orthonormalisée de Schmidt de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$

- Connaître les formules définissant $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et l'algorithme de construction

2.5

Théorème : Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale de E.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n le projeté orthogonal de E sur $Vect(e_0, e_1, \dots, e_n)$.

Alors $\forall x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

3.1

Théorème : **caractérisations d'une isométrie et définition**

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- ❖ Conservation du produit scalaire : $\boxed{\forall (x, y) \in E^2 : (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)}$
- ❖ Conservation de la norme : $\boxed{\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|}$
- ❖ Conservation du caractère orthonormé d'une base :

  $\boxed{\text{l'image d'une base orthonormée de } E \text{ est une base orthonormée}}$
- ❖ A est une matrice orthogonale :

Tout endomorphisme de E vérifiant l'une de ces quatre propriétés est appelé **isométrie vectorielle** ou **automorphisme ortghogonal**.