Probabilités

Dans tous les exercices, les expériences aléatoires étudiées sont modélisées par un espace probabilisé fini (Ω, P).

Propriétés générales des probabilités

▷ 1

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.
Montrer que $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A \cap B)$.

▷ 2

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\overline{B}) \neq 0$.
Exprimer $\mathrm{P}_{\overline{B}}(\overline{A})$ sans faire intervenir de complémentaire.

▷ 3

1) Soit A et B deux événements tels que B entraîne A. Démontrer que $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.

2) Montrer que la somme des probabilités des événements formant un système complet d'événements vaut toujours 1.

► 4

Soit A et B deux événements.

1) Traduire par des opérations ensemblistes l'événement C : “ Ou bien A se réalise, ou bien B se réalise ”.

2) Exprimer $\mathrm{P}(C)$ à l'aide des probabilités de A, B et $A \cap B$.

► 5

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(A) = p$ et $\mathrm{P}(B) = q$. On suppose que $p > 0$ et $q < 1$. Montrer que

$$\frac{p-q}{1-q} \leqslant \mathrm{P}_{\overline{B}}(A) \leqslant \frac{p}{1-q}.$$

► 6

Une cible est découpée en trois régions concentriques délimitées par des cercles de rayon 1, 2 et 3. Un joueur tire une fléchette sur la cible. Si on note p la probabilité de toucher la cible et que la probabilité de toucher une région est proportionnelle à sa surface, calculer la probabilité de toucher chaque région.

Univers, dénombrement, probabilité uniforme

Dans les exercices de cette partie, on s'attachera à bien préciser un univers Ω approprié pour modéliser l'expérience.

► 7 Les anniversaires

1) Quelle est la probabilité que, dans une classe de 30 élèves, deux élèves ait leur anniversaire le même jour ? (On supposera que l'année comporte 365 jours et que les naissances sont équitablement réparties sur toute l'année.)

2) Écrire un programme Python qui permette de déterminer à partir de quelle taille de classe cette probabilité dépasse 95 %.

► 8

Dans une loterie, il y a 80 tickets dont 5 sont gagnants.
Quelle est la probabilité de gagner au moins une fois en choisissant au hasard 3 tickets ?

► 9

On permute au hasard les lettres du mot « limace ».

1) Calculer la probabilité d'obtenir le mot « malice ».

2) Calculer la probabilité d'obtenir un mot commençant par un c.

3) Calculer la probabilité que toutes les voyelles se trouvent les unes à côté des autres.

► 10

Dans un sac contenant des jetons numérotés de 1 à 10, on tire trois fois de suite un jeton, avec remise.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros rangés par ordre strictement croissant ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros rangés par ordre croissant au sens large ?

► 11 Livres sur une étagère

Sur une étagère, on dispose 20 livres de manière aléatoire. parmi lesquels 3 livres de Maupassant et 5 livres de Zola.

1) Quelle est la probabilité que les trois livres de Maupassant se retrouvent côte à côte ?

2) Quelle est la probabilité deux livres de Zola au moins soient l'un à côté de l'autre ?

Probabilités conditionnelles

Dans ces exercices, il n'est pas forcément nécessaire d'étudier avec précision l'univers Ω.

▷ 12

Dans une famille ayant deux enfants :

1) Si l'aîné est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

2) Si l'un des enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

3) Si l'un des enfants est une fille, quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?

► 13

On dispose de 2 pièces de monnaies, dont une est équilibrée et l'autre est truquée : elle donne « pile » avec probabilité $\frac{3}{5}$.
On choisit au hasard une des deux pièces et on la lance une fois.

1) Calculer la probabilité d'obtenir « pile ».

2) Quelle est probabilité d'avoir choisi la pièce truquée et d'obtenir face ?

3) Si on a obtenu « pile », quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce équilibrée ?

4) Si on a obtenu « pile », quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée ?

5) Si on a obtenu « face », quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce équilibrée ?

► 14

On dispose de quatre urnes $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \mathscr{U}_3, \mathscr{U}_4$ telles que l'urne $\mathscr{U}_k$ contienne k boules blanches et $5-k$ boules bleues.
On choisit l'urne $\mathscr{U}_k$ avec probabilité proportionnelle à k puis on extrait de cette urne une boule au hasard.

1) Déterminer la probabilité de choisir chaque urne.

2) On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir effectué le tirage dans chacune des urnes ?

► 15

Une urne contient $2n$ jetons dont la moitié sont blancs et l'autre moitié sont noirs. On vide cette urne par tirages successifs, sans remise, de paires de jetons. On introduit les événements A_k : " Au k-ième tirage, les deux jetons tirés sont de couleur différente " et B : " On a obtenu des paires de jetons de couleurs différentes à chaque tirage ".

1) Proposer une modélisation de cette expérience.

2) Calculer $\mathrm{P}(A_1)$.

3) Montrer que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\mathrm{P}\Big(A_k \mid \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \frac{n-k+1}{2(n-k+1)-1}.$$

4) En déduire que $\mathrm{P}(B) = \dfrac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}$.

On donne la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}.$$

5) Déterminer une équivalent de $\mathrm{P}(B)$ quand $n \to +\infty$.

Indépendance

▹ 16

Dans deux groupes de personnes, un représentant est choisi de manière aléatoire. Quelle est la probabilité que les représentants soient de même sexe si le premier groupe comporte un tiers d'hommes et le deuxième en comporte trois cinquièmes ?

► 17

Une urne contient des boules rouges et des boules noires, les boules rouges étant en proportion p. On effectue dans cette urne n tirages successifs avec remise.

1) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules noires ?

2) Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge pour la première fois au k-ième tirage ?

3) Retrouver le résultat de la première question à partir de ceux de la deuxième.

► 18

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On lance n fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements A : " tous les lancers donnent le même résultat " et B : " au plus un lancer donne face ".

1) Calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$.

2) Montrer que A et B sont indépendants pour une unique valeur de n, que l'on précisera.

► 19

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On effectue p tirages successifs et au hasard. On s'intéresse, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, à la probabilité que le plus grand numéro tiré soit k. On introduit les événements

- $A_{k,i}$: " le numéro obtenu au i-ième tirage est inférieur ou égal à k ",
- B_k : " sur les p tirages, le plus grand numéro tiré est inférieur ou égal à k ",
- C_k : " sur les p tirages, le plus grand numéro tiré est égal à k. ".

1) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(A_{k,i})$.

2) En déduire que $\mathrm{P}(B_k) = \dfrac{k^p}{n^p}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

3) Montrer que $C_k = B_k \cap \overline{B_{k-1}}$.

4) Montrer enfin que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}(C_k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}.$$

5) Que peut-on dire des événements $(C_1, \ldots, C_n)$? En déduire un moyen de vérifier que le résultat précédent est vraisemblable.