MP*: Groupes et algèbre linéaire.

Coralie Renault

15 décembre 2014

Exercice

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Exercice

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice

a) Pour $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ avec $a \wedge n = 1$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1 \quad [n]$.

b) Pour p premier et $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, montrer que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

c) Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. On suppose que $a^{n-1} = 1 \quad [n]$. On suppose que pour tout x divisant $n-1$ et différent de $n-1$, on a $a^x \neq 1 \quad [n]$. Montrer que n est premier.

Exercice ($\mathbb{Z}$ *est noethérien*)

Montrer que tout suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Exercice

Déterminer les morphismes de groupes entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exercice

Donner l'ensemble G des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.
Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$

Exercice

Soit p un nombre premier supérieur à 3.
a) Quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
b) On suppose $p = 1 \quad [4]$. En calculant de deux façons $(p-1)!$, justifier que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
c) On suppose $p = 3 \quad [4]$. Montrer que -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice (*Matrice à diagonale strictement dominante*)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice (*Matrices de permutation*)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note

$$P(\sigma) = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

appelée matrice de permutation associée à σ.
a) Montrer que

$$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2, P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma) P(\sigma')$$

b) En déduire que $E = \{P(\sigma) / \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
c) Vérifier que

$$^t(P(\sigma)) = P(\sigma^{-1})$$

Exercice

XensP56

- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ii} = 0$ pour tout i et $a_{ij} \in \pm 1$ pour $i \neq j$. Si n est pair, montrer que A est inversible.
- On dispose de $2n+1$ cailloux, $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ caillouxpeut se partager en deux paquets de n cailloux de meme masse totale.Montrer que tout les cailloux ont la meme masse.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
b) Préciser noyau et image de M.
c) Calculer M^n.

Exercice

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$