Dérivabilité

Dans tout le cours, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

I Nombre dérivé en un point

I.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé en un point

Déf. • Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un élément de I.

1) On appelle **taux d'accroissement de f en a** l'application
$$\tau_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \end{array}$$

2) On dit que **f est dérivable en a** quand $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers une limite **finie** quand x tend vers a.

3) **Si f est dérivable en a**, on appelle **nombre dérivé de f en a** le nombre réel $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Rem. ⋄ Lorsqu'on étudie « à la main » la limite du taux d'accroissement, on effectue très souvent le changement d'origine $h = x - a$ et on étudie $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \to 0$ (ce qui permet d'utiliser les équivalents ou les DL usuels).

Ex. ✻ Étude de $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

I.2 Interprétation géométrique, DL d'ordre 1, continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On fixe a un point de I et on note $M(x)$ le point de la courbe représentative de f qui a pour abscisse x.

Que peut-on dire de la droite $\big(M(a)M(x)\big)$, sécante à la courbe, quand x tend vers a ?

► C'est toujours une droite qui passe par le point $M(a)$;

► Sa pente vaut $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, qui tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a.

Illustr. ✐

La sécante $\big(M(a)M(x)\big)$ se rapproche de la droite passant par $M(a)$ de pente $f'(a)$. Cette droite a pour équation

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{càd :} \quad y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Propr. • **Lien entre dérivabilité et tangente à la courbe représentative**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet un tangente au point d'abscisse a qui a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a. Ceci se formalise à l'aide de la propriété suivante.

Propr. • **Développement limité d'ordre 1 d'une fonction dérivable**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \Big[\, \exists (b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a) \Big].$$

Lorsque ces énoncés sont vrais, on a $f(a) = b_0$ et $f'(a) = b_1$.

Démo. ✍ Sur les notes de cours.

Méthode ✐ On peut donc se servir d'un développement limité en un point a pour montrer que la fonction est dérivable en a.

Coroll. • **Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.**

Démo. ✍ Sur les notes de cours

Attention ❢ Évidemment la réciproque est fausse !

I.3 Dérivées à gauche, dérivées à droite

Déf. • Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ qui n'est **pas** une extrémité de I.

1) On dit que **f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a** si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) **finie** quand x tend vers a.

2) Lorsque f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, on appelle cette limite **nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en a** et on le note **$f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).**

Ex. ✻ Étude de abs : $x \mapsto |x|$:

Propr. • Si f est dérivable à droite en a, alors :

1) f est continue à droite en a ;

2) La courbe de f admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse a dont l'équation est $y = f(a) + f'_{\mathrm{d}}(a)(x-a)$.

Les mêmes propriétés valent pour les notions à gauche. En outre :

3) f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a **et** $f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$. Lorsque c'est le cas, on a $f'(a)$ est égale à la valeur commune de $f'_{\mathrm{d}}(a)$ et $f'_{\mathrm{g}}(a)$.

Déf. • Point anguleux

Lorsque f admet en a une dérivée à droite et une dérivée à gauche, mais que $f'_{\mathrm{d}}(a) \neq f'_{\mathrm{g}}(a)$, on dit que le point d'abscisse a est un **point anguleux** sur la courbe de f.

Illustr. ✐

I.4 Caractère local de la dérivée

Propr. • Soit f et g deux fonctions qui sont égales sur un intervalle I **ouvert** contenant a. Si f est dérivable en a, alors g est dérivable en a également et $g'(a) = f'(a)$.

Démo. ✎ Provient directement du caractère local de la limite.

Ex. ✻ Étude de la dérivabilité du prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

I.5 Théorèmes opératoires

Propr. • Théorèmes opératoires pour les dérivées

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Si f et g sont dérivables en a,
alors $f+g$, λf et fg sont dérivables en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

2) Si f et g sont dérivables en a et $g \neq 0$ au voisinage de a,
alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}.$$

Démo. ✎ En revenant aux définitions, en utilisant les théorèmes opératoires pour les limites.

Propr. • Dérivation d'une fonction composée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$,
alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \,.\, f'(a).$$

Démo. ✎ En utilisant les développements limités d'ordre 1.

Propr. • Dérivation d'une bijection réciproque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone, $J = f(I)$,
$g : J \to I$ sa fonction réciproque.
Soit $t \in J$. On suppose f dérivable en $g(t)$.

1) Si $f'\big(g(t)\big) \neq 0$,
alors g est dérivable en t et

$$g'(t) = \frac{1}{f'\big(g(t)\big)}.$$

2) Si $f'\big(g(t)\big) = 0$, alors g n'est pas dérivable en t et la courbe de g admet au point d'abscisse t une tangente verticale.

Démo. ✎ Sur les notes de cours.

II Fonction dérivée

Déf. • Fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) On dit que $\boldsymbol{f}$ **est dérivable sur** $\boldsymbol{I}$ si f est dérivable en chaque point $a \in I$.

2) Si f est dérivable sur I, on définit sa **fonction dérivée** par

$$f' : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

La plupart des fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition complet. Exceptions :

Propr. • Théorèmes opératoires pour les fonctions dérivées

1) Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $f+g$, λf et fg sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

2) Si de plus g ne s'annule sur I,
alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

3) Si f est dérivable sur I, g dérivable sur J et que $f(I) \subset J$,
alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \, . \, f'$.

4) Si f est continue et strictement monotone sur I et que f' ne s'annule pas sur I, sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démo. Immédiate en appliquant les théorèmes opératoires vus précédemment.

Pour étudier rigoureusement la dérivabilité d'une fonction :

1) La recherche des points spéciaux permet de **conjecturer** sur quels intervalles la fonction sera dérivable à coup sûr.

2) Ces conjectures se **prouvent** en appliquant patiemment les théorèmes ci-dessus.

3) La dérivabilité aux points spéciaux doit être étudiée séparément (limite de taux d'accroissement ou théorème de dérivabilité au point manquant vu plus bas).

***Exercice* 1** ► Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$.

III Propriétés globales des fonctions dérivables

III.1 Dérivée et extrema locaux

Déf. • Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un point de I.

1) On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un minimum local au point** $\boldsymbol{a}$ quand il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], \quad f(x) \geqslant f(a).$$

2) On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un maximum local au point** $\boldsymbol{a}$ quand il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], \quad f(x) \leqslant f(a).$$

3) On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un extremum local au point** $\boldsymbol{a}$ quand f admet un minimum local ou un maximum local au point a.

Rem. ◇ On parle d'extremum *global* si les inégalités sont vérifiées pour tout $x \in I$.

Illustration

Thm • Condition nécessaire pour les extrema locaux en un point intérieur

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un point de I.
On suppose que :

1) a n'est pas une extrémité de l'intervalle I,

2) f est dérivable en a,

3) f admet un extremum local au point a.

Alors $f'(a) = 0$.

Démo. Sur les notes de cours.

Attention Deux subtilités auxquelles bien prendre garde :

1) L'annulation de la dérivée en a est *nécessaire* pour que f admette un extremum local en a, mais pas *suffisante* (contre-exemple : $x \mapsto x^3$ en $a = 0$).

2) La première hypothèse est importante : si a est une extrémité de I, f peut y admettre un extremum local sans que la dérivée s'y annule.

Illustrations

III.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Thm • Théorème de Rolle

Soit f une fonction :

1) continue sur le segment $[a, b]$,

2) dérivable sur $]a, b[$,

3) telle que $f(a) = f(b)$.

Alors la dérivée de f s'annule en au moins un point c de $]a, b[$:

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

Illustration

Démo. Sur les notes de cours.

Thm • Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction :

1) continue sur le segment $[a, b]$,

2) dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe un point $c \in]a, b[$ où la dérivée de f est égale au taux d'accroissement de f entre a et b :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Illustration On peut toujours trouver un point c où la tangente à la courbe est parallèle à la sécante reliant les points au extrémités a et b :

Démo. Sur les notes de cours.

III.3 Lien entre dérivée et sens de variation

Le théorème des accroissements finis permet en premier lieu de valider l'étude du signe de la dérivée dans le but d'obtenir le sens de variation d'une fonction.

Thm • Caractérisation des fonctions constantes et monotones

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

1) f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

2) f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.

3) f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

4) f est strictement croissante sur $I \impliedby \forall x \in I,\ f'(x) > 0$.

5) f est strictement décroissante sur $I \impliedby \forall x \in I,\ f'(x) < 0$.

Démo. Sur les notes de cours.

Pour étudier les variations d'une fonction, on utilise souvent la généralisation suivante :

Thm • Condition suffisante de stricte croissance

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que :

1) f est continue sur I,

2) f est dérivable sur I sauf éventuellement en un nombre **fini** de points,

3) $f'(x) > 0$ en tout point x de I, sauf éventuellement un nombre **fini** de points.

Alors f est strictement croissante sur I (tout entier !).

Démo. Sur les notes de cours.

Ce théorème admet des versions pour les quatre autres situations vues dans le théorème précédent ; il suffit de modifier l'hypothèse **3)**.

III.4 Fonctions lipschitziennes, inégalité des accroissements finis, applications aux suites récurrentes

Déf. • Fonctions lipschitziennes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, k une constante réelle.

1) On dit que **f est k-lipschitzienne sur I** quand

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y-x|.$$

2) Lorsque, de plus, la constante k est **strictement** inférieure à 1, on dit que **f est k-contractante.**

La constante k étant fixée, la variation de la fonction entre x et y n'excède pas k fois l'écart entre x et y. Les fonctions lipschitziennes n'amplifient pas exagérément les variations de leur variable.

***Exercice* 2** ► **1)** Démontrer que la fonction identité est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, que les fonctions affines le sont, que la fonction valeur absolue l'est.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

***Exercice* 3** ► Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I mais que la réciproque est fausse.

Pour démontrer qu'une fonction est lipschitzienne, il est d'usage de majorer la valeur absolue de sa dérivée et d'appliquer le théorème qui suit.

Thm • Inégalité des accroissements finis

Soit k une constante réelle. Si f est dérivable sur un intervalle I et que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur I.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Les fonctions lipschitziennes peuvent rendre de grands services dans l'étude des suites récurrentes.

***Exercice* 4** ► Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}\exp(-u_n)$.

1) Conjecturer le comportement de la suite.

2) Montrer que la fonction itératrice f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne sur l'intervalle $I = [0,1]$ et que cet intervalle est stable par f.

3) Montrer que f admet un unique point fixe a sur I.

4) Montrer que la suite u converge vers a et proposer un majorant de $|u_n - a|$.

5) Déterminer à partir de quel rang on est certain que u_n est une valeur approchée de a à 10^{-6} près.

III.5 Théorème de la limite de la dérivée

Ce théorème est utile pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point spécial, après avoir calculé l'expression de sa dérivée là où elle est donnée par les théorèmes opératoires.

Thm • Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle, a un point de I. On suppose que

1) f est continue sur I (entier),

2) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,

3) $f'(x)$ admet pour limite ℓ, finie ou infinie, quand x tend vers a.

Alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend également vers ℓ quand $x \to a$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

***Exercice* 5** ► Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$ en ses points spéciaux (suite d'un exercice précédent).

***Exercice* 6** ► Étudier la dérivabilité en 1 de $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \in \,]0,+\infty[\, \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

IV Dérivées successives

IV.1 Définitions et exemples

Si f est dérivable sur I, f' est une fonction définie sur I. On peut donc essayer de la dériver : quand c'est possible, on obtient la dérivée secondre f'', et ainsi de suite...

Déf. • Dérivées successives d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence sur n les notions suivantes :

1) Par convention, on dit que f est toujours **dérivable 0 fois sur I**, et on définit la **dérivée d'ordre 0 de f** par **$f^{(0)} = f$.**

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que **f est dérivable n fois sur I** quand elle est dérivable $(n-1)$ fois sur I et que sa dérivée d'ordre $(n-1)$, la fonction $f^{(n-1)}$, est dérivable sur I.

On définit alors la **dérivée d'ordre n de f** par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

$f^{(0)}$ désigne f, $f^{(1)}$ désigne f' et $f^{(2)}$ est aussi notée f''. À partir de trois dérivations, on n'utilise plus de primes. **En pratique, il sera souvent plus aisé d'utiliser une autre notation pour $f^{(n)}(x)$: $\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$.**

Calculer la dérivée d'ordre n d'une fonction requiert la plupart du temps des calculs assez techniques. C'est toutefois abordable dans quelques cas particuliers.

Propr. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ des constantes.
Alors les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ et $x \mapsto x^p$ sont dérivables autant de fois que l'on veut sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition. Leurs dérivées d'ordre n sont données par les formules :

$$\frac{d^n(e^{\lambda x})}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x}, \qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}},$$

$$\frac{d^n(x^p)}{dx^n} = \begin{cases} p \times (p-1) \times \cdots \times (p-n+1)\, x^{p-n} = \dfrac{p!}{(p-n)!}\, x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p, \\ 0 & \text{si } n > p. \end{cases}$$

Démo. D'abord trouver les formules par tâtonnements puis démontrer par récurrence sur n.

IV.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$

Lorsqu'après n dérivations successives, la *dernière dérivée obtenue* (càd $f^{(n)}$), est continue, on dit que la fonction de départ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Déf. • Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que **f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I** quand f est dérivable n fois sur I et que sa **dérivée d'ordre n**, $f^{(n)}$, est une fonction continue sur I.
2) On dit que **f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I** quand f est dérivable n fois sur I quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on notera **$\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$** l'ensemble comprenant toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Rem. ◇ "f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I" signifie "f est continue sur I" ;
"f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I" signifie "f est dérivable sur I et f' est continue sur I".

***Exercice* 7** ► Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\setminus \{1\} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

***Exercice* 8** ► Soit $f :\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il faudrait désormais étudier si les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. **Nous admettrons que pour toutes nos fonctions usuelles, dès que la fonction est dérivable sur I, elle est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.** Par exemple :

* $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$,
* $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ mais de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ seulement.

IV.3 Théorèmes opératoires pour les dérivées successives

Propr. • Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors :

1) $f + g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
2) λf est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.
3) Formule de Leibniz
$f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$\left(f \times g\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

Démo. Les preuves se font toutes par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
On démontre la formule pour la somme et la formule de Leibniz.

***Exercice* 9** ► Écrire la formule de Leibniz pour les petites valeurs de n.

***Exercice* 10** ► Soit $f : x \mapsto x^2 e^{-3x}$. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour les autres opérations usuelles sur les fonctions, le caractère $\mathscr{C}^n$ est le plus souvent préservé mais il n'y a pas de formule explicite simple pour la dérivée d'ordre n.

Propr. • Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (suite)
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

1) Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
2) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont telles que $f(I) \subset J$ et que f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et J respectivement, alors $(g \circ f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone et de classe $\mathscr{C}^n$ et que f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque f^{-1} de f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $J = f(I)$.

Démo. Admises (mais faisables).

***Exercice* 11** ► Démontrer que $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$
Même question pour $x \mapsto e^{-1/x^2}$ sur $]0,+\infty[$.