

# Colle PCSI 12: intégrales et matrices.

January 4, 2017

## Colle 1

MARTI (Cours: 7/10, Exo: 7/10, Note: 14/20): erreur dans le produit de deux matrices et dans les formules d'additions.

MIGOT (Cours: 6/10, exo: 7/10, note: 13/20): ne se souvient plus des formules d'additions. Lent, mais la récurrence est bien faite.

**Exercice 1.** Matrices inversibles et opérations :mq si  $A$  et  $B$  sont inversibles alors  $AB$  est inversible

**Exercice 2.** Formule du binôme de Newton pour les matrices?

**Exercice 3.**  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n$  ?

**Exercice 4.**  $\int_0^\pi \exp(t) \sin(3t) dt$ ?

**Exercice 5.** Soit  $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ .

- Mq

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

- Mq

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

- Calculer

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

## Colle 2

MARION Caroline (cours: 7/10, Exo: 5/10, note: 12/20): erreur dans la formule de Bernouilli. Perdue sur l'exercice.

MAMEDOV (cours: 6/10, exo: 5/10, note: 11/20) : erreur dans la formule de

Bernoulli. Problèmes de logique.

**Exercice 1.** Propriétés calculatoires pour les puissances de matrices : démonstration pour les points 1 et 2 seulement

**Exercice 2.** Formule de Bernoulli pour les matrices?

**Exercice 3.**

- Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent sont nilpotentes.
- Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,n}$  nilpotente:  $M^p = 0$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $I_n - M$  est inversible et déterminer son inverse.  
Indice: formule de Bernoulli pour les matrices qui commutent?

**Exercice 4.** Calculer  $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$  ( $= \frac{\pi}{8}$ )

## Colle 3

VICOMTE Romaric (cours: 3/10, Exo: 4/10, Note: 7/20): Perdu sur la démo de cours: ne sait pas ce qu'il faut démontrer, mélange un peu tout. Ecrit  $\cos(1) = 1$ . Ne sait pas appliquer la formule de chgt de variable.  
Léa LUHRING (cours: 7, exo: 6, note: 13/20): assez bien.

**Exercice 1.** Inversibilité d'une matrice carrée de taille 2.

**Exercice 2.** Quelle est la transposée de  $AB$ ?

**Exercice 3.** Calculer  $A^n$ , où:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.** Wallis:

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n t dt$$

- Mq  $I_n = \int \cos^n t dt$ .
- Mq  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .
- $I_n = ?$
- Mq  $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ .