MP Programme de colle n° 7

Chapitre 5

Séries et familles sommables

1. Séries dans un espace vectoriel normé
2. Compléments sur les séries à termes positifs.

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

1.2

Propriété 1 : convergence du terme général
Propriété 2 : convergence de la série des restes
Propriété 3 : lien entre série et suite

1.5.b

Proposition : On se place dans l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la série exponentielle $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge absolument

2.1.c

② Proposition :

Soit $\sum v_n$ une série convergente de réels positifs et $\sum u_n$ une série complexe.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = o(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i)$
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = O(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i)$.

③ Proposition :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors :.

- Si l'une des séries diverge, l'autre aussi et $\sum_{i=0}^{n} u_i \sim \sum_{i=0}^{n} v_i$
- Si l'une des séries converge, l'autre aussi et $\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i \sim \sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i$

2.2.

Théorème : **Régle de D'alembert**

Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs.

On suppose que $\ell = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

(démonstration du lemme y comprise)

<u>2.3.a</u>

Théorème 1 : Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

<u>2.4.b</u>

Théorème **: Critère spécial des séries alternées**

Soit la série alternée $\sum u_n$ où $u_n=(-1)^n v_n$.

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u> et <u>tend vers 0</u>, alors :

- la série alternée $\sum u_n$ converge. Soit S sa somme :
- $\forall n\in\mathbb{N}$: $S\in[S_n \overset{\leftrightarrow}{;} S_{n+1}]$
- $\forall n\in\mathbb{N}$: le reste R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n|\leqslant|u_{n+1}|$.