Signe somme et signe produit, raisonnements par récurrence

I Signe somme (Σ) et signe produit (Π)

I.1 Signification du signe somme et du signe produit

- Signe somme

Soit a et b deux nombres réels quelconques, n un entier naturel.

L'écriture $\sum_{i=0}^{n} a^i\, b^{n-i}$ se lit « *somme, pour i variant de* 0 *à n, de* $a^i\, b^{n-i}$ » :

$$\sum_{i=0}^{n} a^i\, b^{n-i} = \underbrace{a^0\, b^n}_{i=0} + \underbrace{a^1\, b^{n-1}}_{i=1} + \underbrace{a^2\, b^{n-2}}_{i=2} + \cdots + \underbrace{a^{n-1}\, b^1}_{i=n-1} + \underbrace{a^n\, b^0}_{i=n}$$
$$= b^n + a\, b^{n-1} + a^2\, b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}\, b + a^n.$$

Dans cet exemple, i est l'**indice de sommation,** 0 et n sont les **bornes de la somme** et $a^i\, b^{n-i}$ est le **terme général de la somme.**

Rem. ◇ **1)** Dans la somme écrite avec points de suspension, l'indice a disparu.
2) L'indice de sommation intervient dans le terme général de la somme mais jamais dans ses bornes.

***Exercice* 1** ► Exprimez les sommes suivantes à l'aide du signe $\sum$:

$$q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{p-1} + q^p = \qquad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^n} =$$
$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{2k-1} + q^{2k} = \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 =$$
$$1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n-2} + q^{2n} = \qquad 3 + 7 + 11 + \cdots + 47 + 51 =$$

- Signe produit

Le signe $\prod$ est l'analogue du signe $\sum$ pour le produit. Ainsi, l'écriture $\prod_{i=1}^{n}(x-i)$ se lit « *produit, pour i variant de* 1 *à n, de* $(x-i)$ » et signifie

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i) = (x-1) \times (x-2) \times \cdots \times (x-n).$$

***Exercice* 2** ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du signe produit :

$$1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n) =,$$
$$2 \times 4 \times 6 \cdots \times (2n-2) \times (2n) =,$$
$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) = .$$

I.2 Sommes et produits usuels

Assez peu de sommes et de produits peuvent être calculés de façon explicite, c'est-à-dire exprimés sans signe $\sum$ ou $\prod$.

Propr. • Sommes et produits d'un terme constant

Soit p et q deux nombres entiers tels que $p \leqslant q$,
λ une constante (indépendante de l'indice de sommation). Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda = \underbrace{(q-p+1)}_{\text{nombre de termes dans la somme}} \times \lambda \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{q} \lambda = \lambda^{q-p+1}.$$

Démo. ☞ On a $\sum_{k=p}^{q} \lambda = \underbrace{\lambda + \lambda + \cdots + \lambda}_{q-p+1 \text{ fois}} = (q-p+1)\lambda$ et $\prod_{k=p}^{q} \lambda = \underbrace{\lambda \times \lambda \times \cdots \times \lambda}_{q-p+1 \text{ fois}} = \lambda^{q-p+1}$.

Propr. • Sommes de l'indice de sommation

Soit p et q deux nombres entiers tels que $p \leqslant q$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} k = \underbrace{(q-p+1)}_{\text{nombre de termes dans la somme}} \times \underbrace{\frac{p+q}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}}.$$

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Propr. • Sommes de puissances consécutives d'un nombre

Soit p et q deux nombres entiers tels que $p \leqslant q$,
λ une constante réelle ou complexe (indépendante de l'indice de sommation).

Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda^k = \begin{cases} \lambda^p \times \dfrac{1-\lambda^{q-p+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1, \\ (q-p+1) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

***Exercice* 3** ► Calculer les sommes suivantes, en discutant si nécessaire :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{e}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}.$$

Application. Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et de $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$: **sur les notes de cours.**

Du côté des produits, seul le produit des n premiers entiers s'écrit de manière compacte, à l'aide d'une définition :

Déf. • Factorielle

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle n** et on note $\boldsymbol{n!}$ le produit des n premiers entiers naturels non nuls :

$$\boldsymbol{n!} = 1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, on définit également **0!** par $0! = 1$.

Exercice **4** ► Calculer (et retenir !) les valeurs de $k!$ pour k variant de 0 à 6.

Exercice **5** ► Si $1\leqslant p\leqslant q$, exprimer $\prod_{k=p}^{q} k$ comme un rapport de factorielles.

I.3 Propriétés spécifiques au signe somme Σ

- On peut passer devant le signe somme tout terme en facteur dans le terme général **à condition qu'il ne dépende pas de l'indice :**

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\, a_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Il s'agit en fait de factoriser par λ dans la somme de gauche.

Exercice **6** ► Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{p} 3\,i,\qquad \sum_{k=0}^{n} a\,b^k,\qquad \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{a^{n/2}\,b^j},\qquad \sum_{n=0}^{p} \mathrm{e}^{a+nb}.$$

- On peut séparer une somme en plusieurs sommes au niveau d'un signe + ou d'un signe − :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \quad\text{et}\quad \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Exercice **7** ► Calculer la somme $\sum_{p=1}^{n}(2p+1)$.

Exercice **8** ► Écrire à l'aide de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et de termes explicites :

$$S = \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)^3 - k^3\big).$$

I.4 Propriétés spécifiques au signe produit Π

- Quant à eux, les produits peuvent être séparés au niveau des signes × et ÷ :

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i\,b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i \quad\text{et}\quad \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}.$$

- Si le terme général du produit s'écrit comme une puissance **et que l'exposant ne dépend pas de l'indice,** on peut faire porter la puissance sur le produit tout entier :

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i)^p = \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^p.$$

Exercice **9** ► Exprimer à l'aide de factorielles : $a = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}$,
$b = 2\times 4\times 6\times\cdots(2n-2)\times(2n)$, $c = 1\times 3\times 5\times\cdots(2n-1)\times(2n+1)$.

I.5 Extraire des termes d'une somme, regrouper deux sommes

Quelques exemples pour saisir le principe :

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i + \underbrace{q^n}_{\substack{\text{terme}\\ \text{pour } i=n}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2p} q^i &= 1+q+q^2+\cdots+q^{2p}\\ &= (1+q+q^2+\cdots+q^p)+(q^{p+1}+q^{p+2}+\cdots+q^{2p}) = \sum_{i=0}^{p} q^i + \sum_{i=p+1}^{2p} q^i.\end{aligned}$$

En raisonnant dans l'autre sens, on peut quand la situation s'y prête regrouper deux sommes ou deux produits en un seul.

Attention ! Quand on sépare une somme en deux sommes, les bornes se comportent presque comme dans une relation de Chasles... mais pas tout à fait !

Exercice **10** ► Réécrire sans signe $\sum$: $\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n+2}(u_k - v_k) - \sum_{k=2}^{n+1} v_k$.

Exercice **11** ► Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $n\times(n-1)!$.

I.6 Changements d'indice

- Choisir un autre indice de sommation

  Lorsqu'on écrit explicitement une somme ou un produit (à l'aide de points de suspension), *l'indice de sommation disparait*. Pour cette raison, on dit que **l'indice est muet :** le symbole choisi n'a aucune importance. On peut donc le remplacer par un autre indice à deux conditions :

  → que le nouvel indice ne soit pas déjà pris pour autre chose ;

  → de faire disparaître complètement l'ancien indice.

  Ainsi, on peut remplacer i par j dans la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a^i\, b^{n-i} = \sum_{j=0}^{n} a^j\, b^{n-j}.$$

  On aurait pu choisir k ou p... mais pas n, a ou b.

Rem. ◇ Les indices choisis habituellement sont i, j, k, n, p, q, ℓ, m...

Attention ❢ On ne pourra pas prendre i comme indice de sommation quand on travaille avec des nombres complexes.

- Translations d'indice

  On peut effectuer des changements d'indices du type $\boxed{i = j + \text{constante}}$ où la constante est un nombre entier (qui peut être négatif) :

  1) Écrire clairement le changement d'indice choisi ;

  2) Remplacer **tous** les i dans le terme général ;

  3) Ajuster les bornes à l'aide du raisonnement « quand i prend la valeur $\cdots$ alors j prend la valeur $\cdots$ ».

***Exercice* 12** ► Réécrire la somme $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}$ plus simplement.

***Exercice* 13** ► Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} 2^{n+k}$ de deux manières.

***Exercice* 14** ► Refaire la preuve pour la somme de puissances consécutives à l'aide d'une translation d'indice.

- Symétries d'indice

  On peut également effectuer des changements d'indice $\boxed{i = \text{constante} - j.}$ Tout se passe de la même manière mais **il faut remettre les bornes dans l'ordre à la fin de la réécriture.**

***Exercice* 15** ► Calculer $\sum_{k=0}^{n} q^{n-k}$ de deux manières différentes.

***Exercice* 16** ► Refaire la preuve de l'expression de $\sum_{k=p}^{q} k$ à l'aide d'une symétrie d'indice.

***Exercice* 17** ► Peut-on poser $i = 2j$ dans la somme $\sum_{i=0}^{2n} q^i$?

On retiendra : **Dans un changement d'indice, les indices ne doivent pas être multipliés par des constantes.**

- Séparer les termes d'indice pair des termes d'indice impair

  On peut en revanche regrouper les termes d'indice pair dans une première somme, et les termes d'indice impair dans une deuxième. Par exemple :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1} + a_{2n} \\ &= \underbrace{(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n})}_{\text{termes d'indices pairs}} + \underbrace{(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})}_{\text{termes d'indices impairs}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}.\end{aligned}$$

  Pour écrire directement cette réorganisation :

  1) La somme de départ devient une somme de deux sommes.

  2) Dans le terme général de la première somme, l'indice de sommation i est remplacé par $(2k)$; dans la deuxième somme, i est remplacé par $(2k+1)$.

  3) Il faut déterminer **soigneusement** les quatre bornes des nouvelles sommes, par essais/rectifications.

***Exercice* 18** ► Décomposer sur le même principe la somme $\sum_{i=0}^{2n-1} a_i$.

***Exercice* 19** ► Calculer $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j$, et $\sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^k (2k-1)$.

I.7 Sommes et produits télescopiques

Une **somme télescopique** est une somme dont le terme général est **une différence de deux termes consécutifs d'une même suite (u_k).** Par exemple :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \underbrace{(u_2 - u_1)}_{k=1} + \underbrace{(u_3 - u_2)}_{k=2} + \underbrace{(u_4 - u_3)}_{k=3} + \cdots + \underbrace{(u_n - u_{n-1})}_{k=n-1} + \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{k=n} \\ &= -u_1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_1.\end{aligned}$$

Ces sommes sont toujours calculables : il ne reste à la fin qu'une différence de deux termes de la suite (u_k), provenant du premier et du dernier terme de la somme.

***Exercice* 20** ► Exprimer sans signe $\sum$: $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})$, $\sum_{i=2}^{p} (b_{i-1} - b_i)$, et $\sum_{j=1}^{2n} (u_j - u_{j-1})$.

***Exercice* 21** ► Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$.
En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Le même principe vaut pour les produits, sauf qu'un produit télescopique a un terme général sous forme de **rapport de termes consécutifs d'une suite :**

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \frac{u_4}{u_3} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_1}.$$

***Exercice* 22** ► Pour tout n entier supérieur à 2, calculer $\prod_{i=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{i}\right)$.

Les sommes télescopiques permettent de démontrer l'identité remarquable portant sur $a^n - b^n$:

Thm • Formule de Bernoulli
Soit a et b deux nombres complexes, n un entier naturel non nul. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}.$$

Démo. ✑ Sur les notes de cours.

II Factorielles et coefficients binomiaux

On rappelle la définition des factorielles et une propriété qui nous sera utile en pratique :

Déf. • **Factorielle n**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle n** et on note $\boldsymbol{n!}$ le produit des n premiers entiers naturels non nuls :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On conviendra que $\mathbf{0! = 1}$.

Propr. • Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\quad n! = n \times (n-1)!$.

Démo. ✑ $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Comme $n \geqslant 1$ on peut extraire le dernier terme du produit, ce qui donne :
$n! = \left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) \times n = (n-1)! \times n$.

Au lycée, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ était, dans l'arbre de Bernoulli à n épreuves, le nombre de branches permettant d'obtenir k succès. Sa valeur s'obtenait à l'aide de la calculatrice ou du triangle de Pascal. Nous en donnons cette année une autre approche utilisant les factorielles.

Déf. • Coefficients binomiaux
Soit (n,k) un couple d'entiers naturels.
On définit le **coefficient binomial** $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ **(« $\boldsymbol{k}$ parmi $\boldsymbol{n}$ »)** par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Dans cette formule quand $0 \leqslant k \leqslant n$, $n!$ se simplifie avec $(n-k)!$ pour donner

$$\binom{n}{k} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1}_{k \text{ termes}}}.$$

On n'effectue pas les produits tout de suite : on commence par simplifier tous les termes du dénominateur pour obtenir un produit d'entiers.

***Exercice* 23** ► Écrire sous forme de produits d'entiers (voire calculer) les coefficient binomiaux suivants : $\binom{7}{3}$, $\binom{25}{4}$, $\binom{4}{8}$, $\binom{49}{5}$ et $\binom{n}{1}$.

Propr. • Propriétés calculatoires des coefficients binomiaux
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2) Formule de symétrie
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3) Petite formule sans nom
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
4) Formule de Pascal
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démo. ✑ Sur les notes de cours. Trois cas à traiter pour la formule de Pascal : $k<n$, $k=n$ et $k>n$.

La formule de symétrie permet de calculer efficacement les coefficients binomiaux où k est proche de n.

***Exercice* 24** ► Calculer $\binom{8}{7}$, $\binom{15}{13}$ et $\binom{1764}{1761}$.

La formule de Pascal a deux conséquences importantes :

1) On peut lire les coefficients binomiaux dans le triangle de Pascal, car la formule de Pascal est la règle de construction de ce triangle :

2) Les coefficients binomiaux définis au lycée vérifiaient aussi la formule de Pascal. On peut démontrer, par récurrence sur n, que ce sont les mêmes que ceux définis cette année à l'aide des factorielles.

On peut maintenant établir la formule généralisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ à toute puissance entière positive n.

Propr. • Formule du binôme de Newton
Soit n un entier naturel, a et b deux nombres complexes. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Démo. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, traité dans le paragraphe suivant.

***Exercice* 25** ► Exprimer $(2x-1)^{2n+1}$ et $(a-b)^n$ à l'aide d'une somme.

***Exercice* 26** ► Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

III Raisonnements par récurrence

III.1 Récurrences simples

Quand on souhaite démontrer une propriété de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \text{(une proposition logique où } n \text{ intervient)}$$

par exemple "$\forall n \in \mathbb{N},\ 8^n - 1$ est divisible par 7", on peut attaquer le problème de diverses manières :

- Prendre $n \in \mathbb{N}$ quelconque et essayer de **prouver directement** la proposition.
- **Procéder par récurrence.** Dans ce cas, on appelle $\boldsymbol{\mathscr{P}(n)}$ la proposition qui se trouve derrière le quantificateur ($\mathscr{P}(n)$ est dans notre exemple : "$8^n - 1$ est divisible par 7"), on montre que la propriété est **vraie au rang initial** ($\mathscr{P}(0)$ est vraie) puis qu'elle est **héréditaire** (si $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un rang n fixé, $\mathscr{P}(n+1)$ sera vraie également). De proche en proche, toutes les propositions $\mathscr{P}(n)$ sont alors vraies.

Thm • Principe de récurrence
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Si on constate que :

1) Initialisation : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,

2) Hérédité : Pour tout entier n fixé supérieur à n_0, $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$,

alors la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

***Exercice* 27** ► Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$$

1) Observer les premiers termes de la suite pour conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2) Démontrer cette conjecture par récurrence sur n.

***Exercice* 28** ► Démontrer, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

***Exercice* 29** ► Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 1$ est divisible par 7.

***Exercice* 30** ► Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

III.2 Récurrences doubles

Pour prouver qu'une proposition est vraie à un rang donné, on a parfois envie d'utiliser cette proposition aux deux rangs précédents. Dans ce cas, on peut essayer de procéder **par récurrence double.**

Thm • Principe de récurrence double

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Si on constate que :

1) Initialisation double : $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies,

2) Hérédité double : Pour tout entier n fixé supérieur à n_0,
$\big(\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)\big)$ implique $\mathscr{P}(n+2)$,

alors la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

***Exercice* 31** ► Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n - 1$.

***Exercice* 32** ► Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = -2,\ \ u_2 = 2, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \end{cases}$$

Conjecturer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis le démontrer.

III.3 Récurrences fortes

La récurrence forte est utile quand, pour démontrer une proposition au rang $n+1$, on souhaiterait utiliser la même proposition à un ou plusieurs rangs p strictement inférieurs à $n+1$ mais dont la position n'est pas très clairement connue.

Thm • Principe de récurrence forte

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Si on constate que :

1) Initialisation : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,

2) Hérédité forte : Pour tout entier n fixé supérieur à n_0,
$\big(\forall\, k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{P}(k)$ est vraie$\big)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$,

alors la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

***Exercice* 33** ► Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = 2^{n-1}$.

III.4 Preuves des trois théorèmes

Les trois principes de récurrence vus ci-dessus sont des théorèmes qui reposent sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres entiers naturels.

Propr. • Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Rem. ◇ Cette propriété n'est pas vraie pour les parties de $\mathbb{Z}$ (ex : $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) ni pour les parties de $\mathbb{R}$ (ex : $]-\infty, 0]$ mais aussi $]0, 1]$).

• Démonstration du principe de récurrence simple

Supposons que $\mathscr{P}(n)$ vérifie les hypothèses de la récurrence simple (initialisation au rang n_0 et hérédité) et montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
Procédons par l'absurde : supposons qu'il existe un rang $r \geqslant n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(r)$ soit fausse. Considérons l'ensemble

$$F = \{n \in \mathbb{N} \ /\ n \geqslant n_0 \text{ et } \mathscr{P}(n) \text{ est fausse}\}.$$

F est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ par définition. Il est non vide puisqu'il comprend l'entier r. D'après la propriété fondamentale ci-dessus, F admet donc un plus petit élément, que nous noterons m.

1) Tout d'abord, $m \in F$, donc la proposition $\boldsymbol{\mathscr{P}(m)}$ **est fausse** par définition de F.

2) En outre, $m \neq n_0$ car sinon la propriété d'initialisation serait fausse. On en déduit que $m \geqslant n_0 + 1$ donc que $m - 1 \geqslant n_0$. Comme $m - 1 < m$ et que m est le plus petit élément de F, $m-1$ n'appartient pas à F : par conséquent $\mathscr{P}(m-1)$ est vraie. Mais alors, en utilisant l'hérédité, $\boldsymbol{\mathscr{P}(m)}$ **est vraie** ce qui contredit le point précédent.

• Démonstration du principe de récurrence double

Le principe de récurrence double est en fait un cas particulier astucieux... du principe de récurrence simple ! Supposons que les propositions $\mathscr{P}(n)$ vérifient les hypothèses de la récurrence double. Il suffit d'introduire $\mathscr{Q}(n)$ la proposition "$\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies".

1) On se convainc que les propositions $\mathscr{Q}(n)$ vérifient les hypothèses de la récurrence **simple.**

2) On en déduit donc que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$...

3) ce qui entraîne immédiatement que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ puisque $\mathscr{Q}(n)$ implique $\mathscr{P}(n)$.

• Démonstration du principe de récurrence forte

Même idée que pour la récurrence double, en introduisant cette fois :

$$\mathscr{Q}(n):\quad \forall\, k \in \{n_0, n_0+1, \ldots, n\},\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}$$

IV Sommes doubles

IV.1 Sommes rectangulaires

Déf. • Une **somme rectangulaire** est une somme de termes $a_{i,j}$, indexés par deux indices i et j, variant indépendamment dans deux intervalles entiers : $i \in [\![p,q]\!]$ et $j \in [\![p',q']\!]$. Elles se notent

$$\sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant q\\ p'\leqslant j\leqslant q'}} a_{i,j}.$$

Elles se calculent en sommant par rapport à un des indices, puis par rapport à l'autre :

$$\sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant q\\ p'\leqslant j\leqslant q'}} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{q}\left(\sum_{j=p'}^{q'} a_{i,j}\right) \quad \text{mais aussi} \quad \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant q\\ p'\leqslant j\leqslant q'}} a_{i,j} = \sum_{j=p'}^{q'}\left(\sum_{i=p}^{q} a_{i,j}\right).$$

On remarque que l'on peut intervertir les signes $\sum$ sans précaution particulière.

Exercice **34** ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n-1\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (i+j)$.

2) Dans le cas où $n=4$, dressez le tableau des nombres sommés et vérifiez votre résultat.

IV.2 Sommes triangulaires

Déf. • Une **somme triangulaire** est une somme de termes $a_{i,j}$, indexés par deux indices i et j vérifiant une relation du type $p \leqslant i \leqslant j \leqslant q$, p et q étant deux bornes fixées. Elles s'écrivent

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant q} a_{i,j}.$$

Elles se calculent en sommant par rapport à un des indices, puis en sommant par rapport à l'autre :

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant q} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{q}\left(\sum_{j=i}^{q} a_{i,j}a_{i,j}\right) \quad \text{mais aussi} \quad \sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}a_{i,j}\right).$$

Dans une somme triangulaire, **il faut être prudent lorsqu'on intervertit les signes $\sum$**, car les bornes changent.

Rem. ◇ On peut également rencontrer des sommes triangulaires où les indices i et j vérifient : $p \leqslant i < j \leqslant q$.

Exercice **35** ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

2) Dans le cas où $n=4$, dressez le tableau des nombres sommés et vérifiez votre résultat.