MP: Sujet 3

Coralie Renault

14 mai 2015

Exercice

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

Exercice

a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $(I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est une famille libre.
Exprimer

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.
Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.
d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.
e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.