

Semaine du 14 au 18 novembre

**An3-b : Propriétés analytiques de  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sur  $] - R, R[$ .**

- Continuité, DL en 0 - Primitive, intégration
- Dérivabilité. Toute somme de série entière est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - R, R[$
- Série entière de Taylor associée à  $f \in \mathcal{C}^\infty([-\alpha, \alpha])$

**An3-c : Série produit de Cauchy. Application à exp et à la série géométrique.**

- $\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$  : rayon et somme par produit de Cauchy
- exp vérifie  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$ . Propriétés de exp
- sin et cos trigonométrique et hyperbolique sur  $\mathbb{C}$ .

**An 4 : Intégration sur un intervalle quelconque :**

- Définition d'un intervalle convergente. Caractérisation pour les fonctions positives.
- Exemples ; Exemples de référence (Riemann)
- Domination, comparaison, équivalent des fonctions positives.
- Convergence absolue
- Linéarité, Positivité, Croissance, Chasles,  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$  si l'intégrale CVA.
- Si  $\int_I f$  CVA et  $f$  continue sur  $I$  telle que  $\int_I |f| = 0$ , alors  $f = 0$ .
- Changement de variables sur un intervalle quelconque
- IPP : Je préconise de passer à la limite dans les intégrales sur un segment.
- $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$  CV sans converger absolument.
- Fonction intégrable.

**An 5 : Espace vectoriel normé**

- Norme. Exemples dans  $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X]$
- Distance associée : elle conserve la distance par translation
- Normes équivalentes, exemples.
- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
- Boules, sphère. Ensemble borné. Union, intersection.
- Suite, convergence, limite. Toute suite convergente est bornée.
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \implies \|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|\ell\|$ .
- Combinaison linéaire et produit de suites convergentes...
- Suite extraite. Propriétés.
- Lien entre convergence et norme.
- Suite et convergence en dimension finie : non dépendance à la norme...
- Application pour les matrices : Si  $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$ , alors  $A_k^T \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A^T$  et si  $B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} B$ , alors  $A_k B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} AB$

**An 6 : Suite de fonctions**

- Introduction de la notion de convergence simple.
- Exemples et insuffisance de cette notion
- Convergence uniforme
- CVU  $\Rightarrow$  CVS
- Méthode : Etude du tableau de variations de  $t \mapsto |f_n(t) - f(t)|$  pour établir la CVU.

**Attention :** Merci aux colleurs de poser à chaque élève un exercice de justification de convergence d'intégrale, pour vérifier que les techniques sont connues.

**Questions de cours :** Les preuves font partie de la question de cours...

- \* Rayon et somme de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  (par intégration ou dérivation) : Formule à connaître...
- \* Série entière de coefficients  $u_n$  où  $u_n$  est une suite de Fibonacci. Calcul de la somme.
- \* Produit de Cauchy :  $\frac{1}{(1-z)^2}$ ,  $\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$ .
- \* DL en 0 d'une somme de série entière
- \* Convergence d'intégrale : Comparaison, domination et équivalents de fonction positives.
- \* Etalon de Riemann (en  $+\infty$ , en 0, en  $a$ )
- \*  $\int_0^1 \ln(t) dt$  et, pour  $\alpha > 0$ ,  $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$  convergent
- \* Convergence absolue implique convergence
- \*  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$  si l'intégrale CVA (ou  $f$  intégrable sur  $I$ ...)
- \* Si  $\int_I f$  CVA (ou  $f$  intégrable sur  $I$ ...) et  $f$  continue sur  $I$  telle que  $\int_I |f| = 0$ , alors  $f = 0$ .
- \*  $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ ,  $\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t} dt$  sont convergentes sans être absolument convergentes.
- \* Convergence et lien entre  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$
- \*  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolonge la factorielle.
- \* Toute suite convergente est bornée
- \* Combinaison linéaire de suites CV
- \* Si  $\vec{u}_n$  CV vers  $\vec{\ell}$  et  $v_n$  CV vers  $\ell'$ , alors  $\lambda \vec{u}_n + \mu \vec{v}_n$  CV vers  $\lambda \vec{\ell} + \mu \vec{\ell}'$ .
- \* Produit d'une suite scalaire et d'une suite vectorielle convergentes.
- \* Cas d'une algèbre : Produit de suites vectorielles convergentes...
- \* Convergence et norme : Si  $N \leq k.N'$ , alors ... Application : Cas des normes équivalentes.
- \* Lien entre  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N_1$  dans  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$  : Elles ne sont pas équivalentes, mais il y a une inégalité...