Chapitre 16
Calcul différentiel

1. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1. Dérivée selon un vecteur

1.2. Dérivées partielles

2. Différentiabilité

2.1. Définition

2.2. Exemples

2.3. Continuité

2.4. Lien avec dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

Proposition : Si $f : U \to F$ est différentiable en a, alors f admet en ce point une dérivée selon tout vecteur u non nul et $\boxed{\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{d}f(a).u}$

- Démonstration

Proposition :

Soit $f : U \to F$ différentiable en a et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E.

Soit $h \in E$ tel que $h = \sum_{j=1}^{n} h_j.e_j$. Alors $\mathrm{d}f(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j.\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

- Démonstration

2.5. Opérations sur les fonctions différentiables

- combinaisons linéaires, produits, composée

3. Matrices jacobiennes

3.1. Matrice de la différentielle de f en a, matrice jacobienne

3.2. Applications au calcul des dérivées

- Méthode des matrices jacobiennes, règle de la chaîne

3.3. Dérivée le long d'un arc

Proposition 4 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\gamma : I \to U$ un arc différentiable.

Ainsi $\forall t \in I$: $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ où $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^n$

Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I

et $\forall t \in I$: $\boxed{(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i{}'(t).\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ où $a = \gamma(t)$

- Démonstration

4. Cas des applications numériques

4.1. Vecteur gradient

a) Théorème de représentation des formes linéaires

Théorème : Soit E un espace euclidien : $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \exists!\, a \in E \,/\, \varphi = (a\,|\,.)$

- Démonstration

b) Vecteur gradient : définition, expression

c) Interprétation géométrique

Propriété : Soit E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.
Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

- Démonstration

d) Expression du gradient en coordonnées polaires

- Démonstration

4.2. Condition nécessaire d'extremum local

Définition : Soit E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.
a est un **point critique** de f si $\mathrm{d}f\ \ a\ \ = 0$ autrement dit si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\ \ a\ \ = 0$.

Théorème : Soit E euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.
Si f admet en a un extremum local, alors a est un point critique.

- Démonstration

4.3. Exemples de recherche d'extremums

a) Recherche d'extremums locaux sur un ouvert

b) Recherche d'extremums globaux sur un compact

5. Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé

5.1. Définition

5.2. Plan tangent à une surface

a) Définition : surface d'équation $z = f(x,y)$

b) Proposition : équation du plan d'affine tangent

- Démonstration

c) Exemple

5.3. Vecteurs tangents à une ligne de niveau

a) Définition : ligne de niveau k d'une application f.

b) Proposition : orthogonalité des vecteurs tangents au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$

- Démonstration

c) Exemple

6. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

6.1. Définition

6.2. Propriété caractéristique

- Démonstration admise

6.3. Propriétés algébriques

6.4. Caractérisation des fonctions constantes

Lemme : $\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = f(b) - f(a)$ où $a = f(0)$ et $b = f(1)$

- Démonstration

Théorème : Soit U un ouvert connexe par arcs et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. Alors :

$$[f \text{ est constante}] \Leftrightarrow [\mathrm{d}f = 0]$$

- Démonstration

6.5. Généralisation : applications de classe $\mathcal{C}^k$

a) Définitions

b) Propriétés algébriques

c) Théorème de Schwarz

7. Exemples d'équations aux dérivées partielles

- ❑ **Hypothèse de travail** : on supposera en général U convexe
- ❑ **Méthodologie** : on sera amenés souvent à effectuer des changements de variables. Les seuls prévus par le programme sont les transformations affines et le passage en coordonnées polaires.