Cours de mathématiques – 2017/2018

PCSI

Vésale Nicolas

LYCÉE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL & TECHNOLOGIQUE VICTOR HUGO

Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation
	α	Alpha
	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
	ϵ	Epsilon
	ζ	Zeta
	η	Eta
Θ	θ	Theta
	ι	Iota
	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
	μ	Mu
	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
	τ	Tau
	υ	Upsilon
Φ	φ	Phi
	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Chapitre 1

Premier semestre

1.1 Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1.1 Rudiments de logique

La logique est la grammaire des mathématiques. Elle permet d'articuler des *propositions*, qui sont des énoncés mathématiques supposés vrais ou faux (on écrira V ou F) à l'aide de connecteurs logiques. Le tableau suivant résume les règles d'utilisation des principaux opérateurs logiques :

P	Q	non(P)	P ou Q	P et Q	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V

Remarque(s) 1 : Presque tout le contenu de ce tableau devrait vous paraître naturel, à l'exception d'un point : le *ou* mathématique n'est pas exclusif. Plus précisément, la proposition :

« il fait beau aujourd'hui » *ou* « il n'y a pas de nuages »

est une proposition vraie s'il fait beau et qu'il n'y a pas de nuages.

Les autres opérations logiques se définissent à partir de celles-ci, par exemple, l'équivalence est définie par :

$$P \Longleftrightarrow Q \overset{Def.}{=} (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P).$$

En particulier, une équivalence se prouve presque toujours en montrant deux implications successives, que l'on appelle implication directe ($P \Longrightarrow Q$) et réciproque ($Q \Longrightarrow P$). Notez qu'on peut vérifier en utilisant la table ci-dessus que l'équivalence logique correspond bien à l'égalité des valeurs de vérité des propositions.

1.1.2 Rudiments de théorie des ensembles

Les ensembles, quand à eux, sont le vocabulaire de base des mathématiques. On les note souvent avec des lettres majuscules : « soit E un ensemble », ou, lorsqu'ils sont particuliers, avoir leur lettre dédiée. Par exemple :

1. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs,
3. $\mathbb{Q}$ celui des rationnels,
4. $\mathbb{R}$ celui des réels.

Un ensemble est souvent décrit par ses *éléments* ; si x est un élément d'un ensemble E, on écrira $x \in E$, si ce n'est pas le cas, $x \notin E$. Par exemple :

$$2 \in \mathbb{N}, \quad ,-3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Si E est un ensemble fixé, on dit qu'un ensemble A est *inclus* ou *une partie* de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E ; on écrit alors :

$$A \subset E.$$

Par exemple :

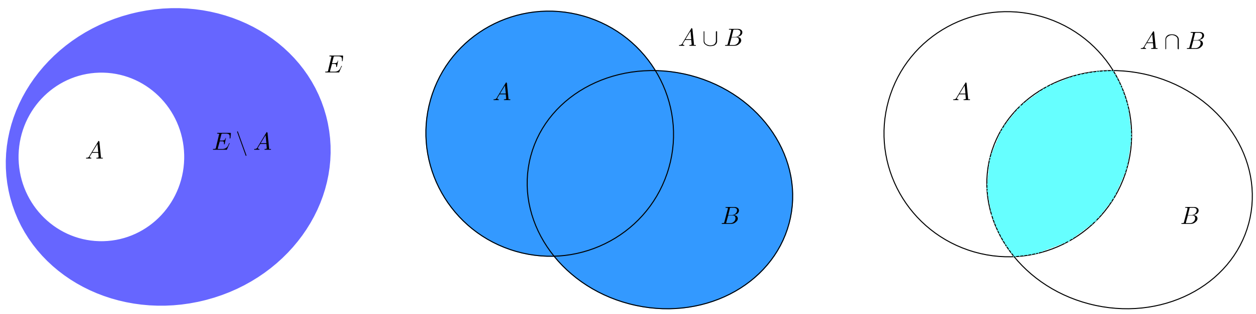
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Un autre ensemble joue un rôle particulièrement important : l'ensemble vide. Il s'agit de l'ensemble qui ne contient aucun élément, noté $\boxed{\varnothing}$.
Pour A et B deux parties d'un ensemble E, il est possible de définir des opérations sur A et B en utilisant la table suivante, pour x un élément de E :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in E \setminus A$	$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

ou, autrement dit :

$$x \in E \setminus A \iff \text{non}(x \in A), \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B), \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$



On appelle ces ensembles :

1. $E \setminus A = \overline{A} = \complement_A^E$, le *complémentaire* de A dans E,
2. $A \cup B$, *l'union* de A et B,
3. $A \cap B$, *l'intersection* de A et B.

1.1.3 Quantificateurs, premiers raisonnements

Pour formuler des propositions mathématiques, il est souvent utile d'utiliser des quantificateurs. Ils sont au nombre de deux :

$$\forall : \text{ « pour tout »}, \quad \exists : \text{ « il existe »}.$$

Traitons un exemple ; la proposition « tout réel élevé au carré est positif » peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0.$$

Les quantificateurs sont particulièrement agréables pour travailler avec les négations ; en effet :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) = \exists x \in E, \ \text{non}(P(x)) \quad \text{et} \quad \text{non}(\exists x \in E, P(x)) = \forall x \in E, \ \text{non}(P(x)).$$

Exemple(s) 1 :

1.1 La proposition

« Tout réel est inférieur à 10^{99} »

est fausse ! Elle s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leqslant 10^{99}$ et sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \ x > 10^{99}$ est clairement vraie en prenant $x = 10^{99} + 1$. C'est ce qu'on appelle une recherche de contre-exemple ; ce type de raisonnement se résume en :

Pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, il suffit d'en trouver un contre-exemple.

1.2 Dans une proposition logique, l'ordre des quantificateurs est primordial. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est vraie ; il suffit de prendre $x = y$ mais :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est clairement fausse : un contre exemple est donné par $y = x + 1$.

Terminons cette partie par trois types de raisonnements couramment utilisés :

1. *Le raisonnement par implication directe :* c'est le plus simple à utiliser, pour prouver $P \Longrightarrow Q$ on suppose P vrai et on en déduit qu'alors Q aussi. Par exemple :

   « Si x est positif, alors x est le carré d'un réel »

   Est une proposition vraie. En effet, si x est positif, alors $\sqrt{x}$ existe donc on peut écrire : $x = (\sqrt{x})^2$.
2. *Le raisonnement par contraposée :* qui se base sur la constatation suivante :

P	Q	non(P)	non(Q)	non(Q)$\Longrightarrow$ non(P)	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

   Ou, autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)).$$

   La méthode consiste donc à supposer que Q est faux et à en déduire que P est faux. Par exemple :

   « Si $\forall \epsilon > 0,\ x \leqslant \epsilon$ alors $x \leqslant 0$ »

   est une proposition vraie. En effet, sa contraposée est :

   « Si $x > 0$ alors $\exists \epsilon > 0,\ x > \epsilon$ » et elle est vraie car si $x > 0$ alors $\epsilon = x/2 > 0$ et $x > x/2 = \epsilon$.
3. *Le raisonnement par l'absurde :* qui part du principe qu'il est équivalent de dire que P est vraie et que non(P) est fausse. Vous en avez sans-doute déjà vu deux : la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et celle de l'infinité des nombres premiers. Voyons un autre exemple ; montrons que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{Q}$$

   Supposons pour ceci par l'absurde que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

   Alors en particulier, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ aussi. Mais alors, pour les irrationnels $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, on trouve :

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q},$$

   ce qui est absurde ! La proposition est donc vraie. Notez le côté particulièrement frustrant d'une telle preuve ; il est impossible de décider qui de $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ est l'exemple ici. On sait donc qu'il existe un exemple, mais on est incapable de dire lequel...

Il reste un dernier « raisonnement » : l'analyse-synthèse. Il s'agit par ce raisonnement de montrer qu'un objet ayant certaines propriétés existe. On commence (souvent au brouillon) par supposer que l'objet existe avec ses propriétés, puis on raisonne par *conditions nécessaires* jusqu'à trouver un exemple. On termine en vérifiant (sur la copie) que l'exemple trouvé a bien les bonnes propriétés (on parle de *conditions suffisantes*). Par exemple, si un exercice nous demande de trouver s'il existe un paramètre m tel que l'équation :

$$x^2 + m \times x + 11 = 0$$

admet une solution entière, on commence par supposer (ce qui se fait, j'insiste, au brouillon !) que m est tel quel ceci est vrai. L'équation admet alors deux solutions, x_1 et x_2 qui vérifient :

$$x_1 \times x_2 = 11$$

dont au moins l'une est un entier. Comme 11 est un nombre premier, on en déduit que $x_1 = 1$ ou 11. Supposons par exemple que $x_1 = 1$ et remplaçons dans l'équation ; on trouve :

$$1 + m + 11 = 0$$

et l'on en déduit $m = -12$. Ceci termine l'analyse et notre travail au brouillon. Sur la copie, il s'agit seulement d'écrire :

Prenons $m = -12$. Alors 1 est un entier racine de l'équation $x^2 + m \times x + 11$. Il existe donc un tel paramètre m.

Notez que si l'énoncé avait demandé *tous* les paramètres m tels que cette équation admette une solution entière, la rédaction aurait été différente...

1.2 Équations différentielles : quelques cas simples pour la physique

1.2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 1.2.1 : *Soit I un intervalle et b une fonction définie sur I. Soit a un réel. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une expression du type :*

$$y' + a \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f définie et dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du premier ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de $t_0 \in I$ et de y_0 un réel ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y' + a \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$.

Remarque(s) 2 :

1. La fonction b est appelée **second membre** de l'équation différentielle.
2. Lorsqu'on travaille avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = b(t),$$

on est souvent amené à travailler aussi avec l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0$$

on l'appelle **équation différentielle homogène associée**.

3. Il y a deux questions à se poser systématiquement lorsqu'on travaille avec un problème de Cauchy : une solution existe-t-elle (**existence**) ? Est-elle unique (**unicité**) ?
4. En mathématiques, il est important de bien distinguer l'équation différentielle et le problème de Cauchy ; souvent, un problème de Cauchy admet une unique solution (c'est ce qui semble intuitif en physique ; par exemple, le mouvement doit être unique) mais une équation différentielle une infinité.

Propriété(s) 1.2.1 : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène : $y' + a \times y = 0$ est :

$$\boxed{S = \left\{t \in I \mapsto C \times e^{-a \times t},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Le problème de Cauchy associé, pour la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution :

$$\boxed{f:\ t \in I \mapsto y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}.}$$

Démonstration : Commençons par le premier point. Appelons S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a \times y = 0.$$

Il s'agit de montrer que les ensembles S et $S_0 = \left\{t \in I \mapsto C \times e^{-a \times t},\ C \in \mathbb{R}\right\}$ sont égaux. Procédons par double inclusion :

1. Si $f \in S_0$ alors il existe un réel C tel que pour tout t de I, $f(t) = C \times e^{-a \times t}$. Alors $f'(t) = -a \times f(t)$ donc $f \in S$.
2. Si $f \in S$, alors si pour tout t de I, $g(t) = f(t) \times e^{a \times t}$, on a :

$$g'(t) = \big(f'(t) + a \times f(t)\big) \times e^{a \times t} = 0$$

   Donc la fonction g est constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \times e^{a \times t} = g(t) = C.$$

   Donc $f(t) = C \times e^{-a \times t}$, $f \in S_0$.

Pour le deuxième point, procédons par analyse et synthèse. Si f est une solution du problème de Cauchy, c'est une solution de l'équation différentielle. Il existe donc une constante C telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = C \times e^{-a \times t}.$$

On utilise maintenant la condition initiale : $y_0 = f(t_0) = C \times e^{-a \times t_0}$ donc $f(t) = y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}$. Donc si il existe une solution au problème de Cauchy, c'est celle-ci. Effectuons maintenant la synthèse : si $f(t) = y_0 \times e^{-a \times (t-t_0)}$, alors $f(t_0) = y_0$ et f est solution de l'équation différentielle. La solution existe donc.

■

Comment passer d'une équation homogène à une équation quelconque ? On peut utiliser, pour ceci, le **principe de superposition** : si f est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t)$$

et g une solution de

$$y' + a \times y = c(t)$$

alors $f + g$ est une solution de :

$$y' + a \times y = b(t) + c(t).$$

De ce principe, on déduit immédiatement que :

Propriété(s) 1.2.2 : S'il existe f_0, une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + a \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est :

$$\boxed{S = \left\{t \in I \mapsto f_0(t) + C \times e^{-a \times t}, \quad C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

En particulier, la solution du problème de Cauchy est unique.

Il reste une dernière chose à régler : comment trouver cette solution particulière ? Nous verrons des méthodes plus générales dans un chapitre ultérieur, mais pour le moment, nous nous contenterons de quelques cas particuliers :

Forme de b	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A\times e^{\lambda\times t}$	si $-a\neq\lambda$, $B\times e^{\lambda\times t}$ sinon $B\times t\times e^{\lambda\times t}$
$A\times\cos(\omega\times t)+B\times\sin(\omega\times t)$	$D\times\cos(\omega\times t)+E\times\sin(\omega\times t)$

Exemple(s) 2 :

2.1 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'+y=e^{-t}.$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $y'+y=0$. Les solutions sont :

$$S_0=\left\{t\in\mathbb{R}\mapsto C\times e^{-t},\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière ; le tableau nous dit qu'elle sera de la forme $B\times t\times e^{-t}$. Un calcul direct nous donne que cette fonction est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$B\times e^{-t}=e^{-t}$$

il faut et il suffit donc que $B=1$, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$S=\left\{t\in\mathbb{R}\mapsto (C+t)\times e^{-t},\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

2.2 Résolvons sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'+y=\cos(3\,t)\\ y(0)=0\end{cases}$$

On connaît déjà les solutions de l'équation homogène. Cherchons maintenant une solution particulière. Le tableau nous dit d'essayer $t\mapsto D\times\cos(3\,t)+E\times\sin(3\,t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} 3\,E+D=1\\ -3\,D+E=0\end{cases} \iff \begin{cases} D=\frac{1}{10}\\ E=\frac{3}{10}\end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S=\left\{t\mapsto\frac{1}{10}\times(\cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t))+C\times e^{-t},\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Résolvons maintenant le problème de Cauchy. Une solution du type :

$$t\mapsto\frac{1}{10}\times(\cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t))+C\times e^{-t}$$

est solution du problème de Cauchy pour la condition initiale $y(0)=0$ si et seulement si $\frac{1}{10}+C=0$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1}{10}\times(\cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)-e^{-t}).$$

2.3 Terminons en cherchant les solutions de l'équation différentielle :

$$y'+y=\cos(3\,t)+e^{-t}.$$

Pour ceci, noua allons utiliser le principe de superposition ; on a déjà calculé une solution particulière de :

$$y'+y=e^{-t}$$

et une solution particulière de :

$$y'+y=\cos(3\,t),$$

on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$S=\left\{t\mapsto\frac{1}{10}\times(\cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t))+(C+t)\times e^{-t},\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

1.2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 1.2.2 : *Soit I un intervalle et b une fonction définie sur I. Soit p et q deux réels. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une expression du type :*

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f définie et dérivable sur I, telle que f' soit aussi dérivable sur I et qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du second ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de $t_0 \in I$ et de (y_0, z_0) des réels ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y'' + p \times y' + q \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = z_0$.

Remarque(s) 3 :

1. Comme pour l'équation de degré un, on parle de second membre pour b et d'équation homogène pour :
$$y'' + p \times y' + q \times y = 0.$$
2. Il existe une quantité essentielle pour ces équations différentielles : **l'équation caractéristique associée** :
$$x^2 + p \times x + q = 0$$
dont on notera dans ce cours le discriminant $\delta = p^2 - 4\,q$.

Théorème 1.2.1 : *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y'' + p \times y' + q \times y = 0$$

est :

$$\boxed{S = \left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\},}$$

avec :

1. *Si $\delta > 0$:*
$$f_1(t) = \exp\left(\frac{-p + \sqrt{\delta}}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \exp\left(\frac{-p - \sqrt{\delta}}{2} \times t\right),$$
2. *Si $\delta = 0$:*
$$f_1(t) = \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = t \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right),$$
3. *Si $\delta < 0$:*
$$f_1(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right), \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\delta|}}{2} \times t\right) \times \exp\left(-\frac{p}{2} \times t\right).$$

De plus, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.

Démonstration : Faisons la preuve dans le premier cas. Dans le deuxième, la preuve est exactement la même et pour le troisième, elle sera exactement la même une fois qu'on saura dériver l'exponentielle complexe. Commençons par remarquer que comme :

$$f_1(t) = \exp(x_1 \times t)$$

où x_1 est une racine de l'équation

$$x^2 + p \times x + q = 0$$

alors :

$$f_1''(t) + p \times f_1'(t) + q \times f_1(t) = (x_1^2 + p \times x_1 + q) \times \exp(x_1 \times t) = 0.$$

Donc f_1 donc de même f_2 (car elle est définie par la deuxième racine de l'équation, x_2) puis par principe de superposition tout l'ensemble de fonctions $\left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}$ sont solutions de l'équation différentielle. Montrons que ce sont les seules. Si f est une solution de l'équation différentielle, posons pour tout t :

$$g(t) = f(t) \times \exp(-x_1 \times t) \Longleftrightarrow f(t) = g(t) \times \exp(x_1 \times t).$$

Comme f est solution de l'équation différentielle, on a :

$$f''(t) + p \times f'(t) + q \times f(t) = 0 \Longleftrightarrow ((x_1^2 + p \times x_1 + q) \times g(t) + (2\,x_1 + p) \times g'(t) + g''(t)) \times e^{x_1 \times t} = 0$$

on utilise une nouvelle fois que x_1 est racine de l'équation caractéristique et on en déduit que g' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + \sqrt{\delta} \times y = 0.$$

Donc par ce qu'on a déjà vu sur les équations différentielles d'ordre un, il existe un réel A tel que :

$$g'(t) = A \times e^{-\sqrt{\delta} \times t}$$

donc comme $\delta \neq 0$, il existe une constante B telle que :

$$g(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{-\sqrt{\delta} \times t} + B \Longleftrightarrow f(t) = -\frac{A}{\sqrt{\delta}} \times e^{x_2 \times t} + B \times e^{x_1 \times t}.$$

La fonction f appartient donc à l'ensemble de fonctions $\left\{C \times f_1 + D \times f_2, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Parlons maintenant du problème de Cauchy : une solution $C \times f_1 + D \times f_2$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si :

$$\begin{cases} C \times f_1(t_0) + D \times f_2(t_0) = y_0 \\ C \times x_1 \times f_1(t_0) + D \times x_2 \times f_2(t_0) = z_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D \times \sqrt{\delta} \times f_2(t_0) = y_0 \times x_1 - z_0 \\ C \times \sqrt{\delta} \times f_1(t_0) = y_0 \times x_2 - z_0 \end{cases}$$

ce qui montre, comme $\sqrt{\delta}$, $f_1(t_0)$ et $f_2(t_0)$ sont non nuls que C et D existent et sont uniques, donc la solution au problème de Cauchy aussi.

■

Exemple(s) 3 :

3.1 L'équation différentielle :

$$y'' - y' - 6\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto C \times e^{3\,t} + D \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3.2 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C \times t + D) \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3.3 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 13\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C \times \cos(3\,t) + D \times \sin(3\,t)) \times e^{-2\,t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre un, on peut utiliser le principe de superposition ; on en déduit :

Propriété(s) 1.2.3 : Si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + p \times y' + q \times y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation sont :

$$\boxed{S = \{f_0 + f, \quad f \in S_0\}}$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. En particulier, le problème de Cauchy associé admet une unique solution.

Terminons, comme dans la partie précédente, par quelques méthodes pour trouver des solutions particulières :

Forme de b	Forme de la solution particulière
constante	constante
$A \times e^{\lambda \times t}$	si λ n'est pas racine, $B \times e^{\lambda \times t}$; si λ est racine simple $B \times t \times e^{\lambda \times t}$ sinon $B \times t^2 \times e^{\lambda \times t}$
$A \times \cos(\omega \times t) + B \times \sin(\omega \times t)$	$D \times \cos(\omega \times t) + E \times \sin(\omega \times t)$ sauf si $p = 0$ et $q = \omega^2$: $D \times t \times \cos(\omega \times t) + E \times t \times \sin(\omega \times t)$

Exemple(s) 4 :

4.1 Considérons l'équation différentielle :
$$y'' + 2\,y' + y = e^{-t}.$$
L'équation caractéristique $x^2+2\,x+1$ a pour racine double -1, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :
$$S_0 = \left\{t \mapsto (C + D \times t) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
Recherchons maintenant une solution particulière. Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, il s'agit de trouver une solution du type $B \times t^2 \times e^{-t}$. En remplaçant dans l'équation, on a qu'une telle fonction est solution si et seulement si :
$$2\,B \times e^{-t} = e^{-t}$$
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :
$$S = \left\{t \mapsto \left(\frac{t^2}{2} + D \times t + C\right) \times e^{-t}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

4.2 Soit $\omega \neq \omega_0$ deux réels strictement positifs. Cherchons la solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' + \omega^2 \times y = \cos(\omega_0 \times t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
Commençons par remarques que les solutions de l'équation homogène sont :
$$S_0 = \{t \mapsto C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}\}.$$
Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle. Chance ! Comme $\omega \neq \omega_0$, il s'agit de trouver une solution du type $A \times \cos(\omega_0 \times t) + B \times \sin(\omega_0 \times t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :
$$\begin{cases} A \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 1 \\ B \times (-\omega_0^2 + \omega^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Le solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t), \quad (C, D) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant la solution du problème de Cauchy. Une solution f du problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle, donc il existe des réels C et D tels que

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C \times \cos(\omega \times t) + D \times \sin(\omega \times t).$$

Utilisons maintenant les conditions initiales, qui nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + C = 1 \\ D \times \omega = 0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donc le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 \times t) - \cos(\omega \times t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega \times t).$$

4.3 Cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(t)$$

Les solutions de l'équation homogène sont immédiatement :

$$S_0 = \left\{ t \mapsto C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, nous sommes dans le cas où il faut chercher une solution du type $D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$-2\,D \times \sin(t) - D \times t \times \cos(t) + 2\,E \times \cos(t) - E \times t \times \sin(t) + D \times t \times \cos(t) + E \times t \times \sin(t) = \cos(t).$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2\,D = 0 \\ 2\,E = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4.4 Enfin, si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2 + \cos(t)$$

On peut utiliser le principe de superposition et remarquer que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2$$

pour conclure que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ t \mapsto 2 + \frac{t}{2} \times \sin(t) + C \times \cos(t) + D \times \sin(t), \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1.3 Études de fonctions

1.3.1 Généralités sur les fonctions

Définition 1.3.3 : *Une fonction f est la donnée de deux ensembles E et F et, pour chaque $x \in E$ d'un unique élément $f(x) \in F$. On la note :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

1. *On appelle E l'ensemble de définition de f,*
2. *on dit que f est à valeurs dans F,*
3. *et que $f(x)$ est l'image de x par f.*

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans F.

Remarque(s) 4 :

1. Pour une fonction g réelle à valeurs réelle que l'on souhaite définir par une formule, il est parfois utile de chercher le domaine de définition **maximal**, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \text{ existe}\}.}$$

   Par exemple :
   (a) la fonction ln admet pour domaine de définition maximal $\mathbb{R}_+^*$
   (b) la fonction racine carrée admet pour domaine de définition maximal $\mathbb{R}_+$
   (c) si l'on souhaite définir g par la formule $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, le domaine de définition maximal de g est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Concernant l'ensemble F, il est souvent utile de le choisir aussi **petit** que possible, c'est-à-dire **l'ensemble image** :

$$\boxed{f(E) = \{f(x), \quad x \in E\}.}$$

   Par exemple :
   (a) La fonction exponentielle : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour ensemble image $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8$ admet pour ensemble image $[-8, +\infty[$.
3. Notez que, par définition, l'image de x par f est unique. Si $y \in F$, on appelle **antécédent** de y par f un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors :
   (a) -1 n'a pas d'antécédent,
   (b) 0 a un unique antécédent : 0,
   (c) 1 admet deux antécédents : -1 et 1.

Exemple(s) 5 :

5.1 La fonction

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

est appelée **identité de E.**

5.2 Si $G \subset E$, alors :

$$\mathbb{1}_G : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 1 \text{ si } x \in G, \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction, appelée **indicatrice de G.**

5.3 Si $f: E \to F$ est une fonction et $G \subset E$ alors :

$$f_{|G} : \begin{cases} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **restriction de f à G**.

5.4 (Hors programme) Si $f: E \to F$ est une fonction et $G \subset f(E)$ alors :

$$f^{|G} : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **co-restriction de f à G**.

1.3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 1.3.4 : *Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F)$. Supposons que $F \subset \mathbb{R}$. On définit les fonctions :*

1. *somme de f et g, notée $f + g \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
2. *produit de f et g, notée $f \times g \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.*
3. *si g ne s'annule pas sur E, le quotient de f par g, noté $\frac{f}{g} \in \mathcal{F}(E, F)$ par : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Exemple(s) 6 :

6.1 Attention ! Il est important de vérifier que la fonction g ne s'annule pas avant d'écrire un quotient. Par exemple, si $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2 - 1$, le quotient $\frac{f}{g}$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$! Son domaine de définition maximal est :

$$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Définition 1.3.5 : *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(G, H)$ Alors si $\boxed{F \subset G}$, on peut définir le composition de f par g, notée $g \circ f \in \mathcal{F}(E, H)$ par :*

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple(s) 7 :

7.1 Dans la définition, l'inclusion est indispensable ! Par exemple, si f est la fonction logarithme et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est définie par $g(x) = x$, alors $f \circ g$ n'existe pas !

7.2 Si :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

Alors :

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x| \end{cases} \quad \text{et} \quad g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

En particulier, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux fonctions très différentes.

1.3.3 Tangentes et dérivées

Considérons maintenant une courbe $\mathcal{C}$ du plan (intuitivement, quelque chose que l'on peut tracer avec un crayon). Un cas particulier nous sera celui des courbes définies par des fonctions f définies sur un intervalle I :

$$\mathcal{C} = \{(x,y), \quad y = f(x), \ x \in I\}$$

on parle alors de **graphe** de la fonction f. Une information intéressante pour tracer le graphe de la fonction f est donnée par la définition suivante :

Définition 1.3.6 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dur un intervalle I. On dit que :*

1. *f est croissante sur I si :*
$$\forall (x,y) \in I, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y),$$
2. *f est décroissante sur I si :*
$$\forall (x,y) \in I, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y),$$
3. *f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I,*
4. *f est strictement croissante sur I si :*
$$\forall (x,y) \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y),$$
5. *f est strictement décroissante sur I si :*
$$\forall (x,y) \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y),$$
6. *f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

La définition suivante est aussi souvent utile :

Définition 1.3.7 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dur un intervalle I. On dit que :*

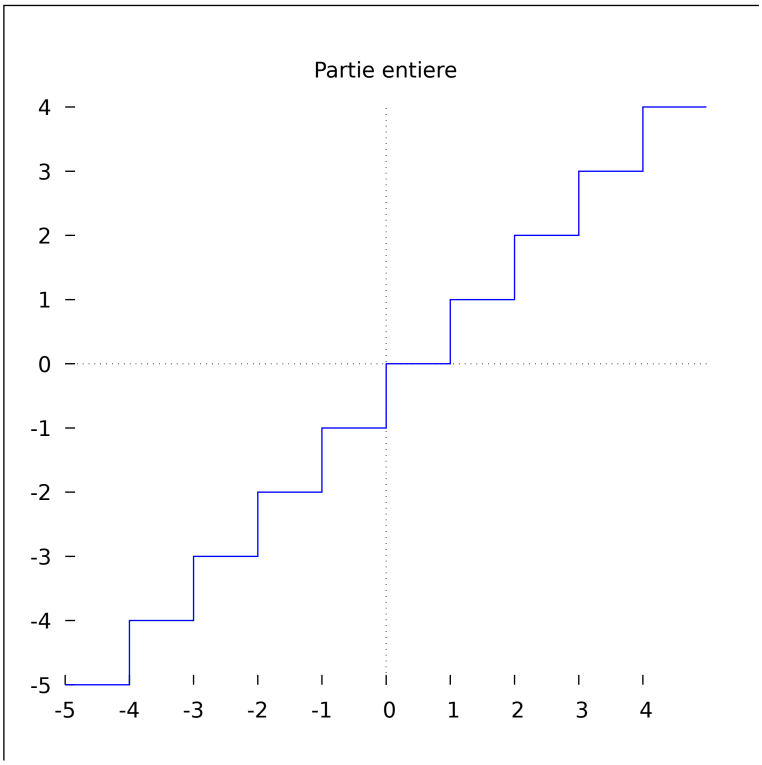
1. *f est majorée si :*
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M$$
2. *f est minorée si :*
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leqslant f(x)$$
3. *f est bornée si f est majorée et minorée.*

Exemple(s) 8 :

8.1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est :
   (a) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
   (b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$,
   (c) non monotone sur $\mathbb{R}$
   (d) ni majorée ni minorée sur $\mathbb{R}$.

8.2 La fonction sin et la fonction cos sont bornées sur $\mathbb{R}$.

8.3 On définit la fonction partie entière pour tout réel x par :
$$\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow k \leqslant x < k+1$$
Le graphe de cette fonction est (attention, l'ordinateur ne « voit » pas bien ce qui se passe à chaque entier) :



Alors :

(a) La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$,

(b) elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.3.3.1 Droites du plan, pentes

On peut définir une droites du plan de plusieurs façons différentes :

1. Par un *lieu géométrique* :
   (a) la droite passant par deux points distincts,
   (b) la droite passant par un point et dirigée par un vecteur non nul,
   (c) la droite parallèle à une autre passant par un point, ou perpendiculaire...
2. Par une équation *paramétrique*, qui est souvent la façon algébrique la plus simple de décrire une droite à partir d'un lieu géométrique ; par exemple la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A = (a, b)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (u, v) \neq (0, 0)$ a pour équation paramétrique :
$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad M = A + t.\vec{u}.$$
   Ou encore :
$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases} .}$$
3. Par une équation *cartésienne*, qui est souvent la formulation la plus simple à manier pour les calculs ; si l'on reprend le cas de l'exemple précédent, comme $u \times v \neq 0$, on a :
$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a + t \times u \\ y = b + t \times v \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{v \times (x - a) - u \times (y - b) = 0.}$$

Remarque(s) 5 : Il est important de savoir passer d'une écriture à l'autre dans ces définitions ; par exemple si l'énoncé vous donne l'équation cartésienne ($\beta \neq 0$) :

$$\alpha \times x + \beta \times y + \gamma = 0$$

il faut savoir immédiatement dire que cette droite est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ et passe par le point $\left(0, \frac{-\gamma}{\beta}\right)$.

Définition 1.3.8 : *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, que l'on suppose dirigée par un vecteur $\vec{u} = (u, v)$, $u \neq 0$. On appelle pente de la droite $\mathcal{D}$ la valeur v/u.*

Remarque(s) 6 :

1. Parfois, il est commode de quand même parler de pente d'une droite si $u = 0$. On dira dans ce cas que la droite à une pente infinie.
2. Il semble *à priori* que changer de choix de vecteur $\vec{u}$ pourrait changer la valeur de la pente de la droite $\mathcal{D}$. Ce n'est pas le cas ! Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$ ($\lambda \neq 0$) donc $\vec{v} = (\lambda \times u, \lambda \times v)$ et
$$\frac{\lambda \times v}{\lambda \times u} = \frac{v}{u}$$
on dit que la pente est une propriété intrinsèque de la droite (et non du vecteur).
3. Considérons la droite d'équation $y = a \times x + b$; la pente de cette droite est alors égale à a, si l'on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = a \times x + b$, on remarque immédiatement que sur $\mathbb{R}$:
   (a) f est croissante si et seulement si $a \geqslant 0$,
   (b) f est décroissante si et seulement si $a \leqslant 0$,
   (c) f est strictement croissante si et seulement si $a > 0$
   (d) f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$

   une des idées de la tangente est de généraliser ce fait aux courbes en utilisant en chaque point une droite « meilleure approximation » de la courbe.

1.3.3.2 Tangentes, nombre dérivé, version géométrique (hors programme, non fait en cours)

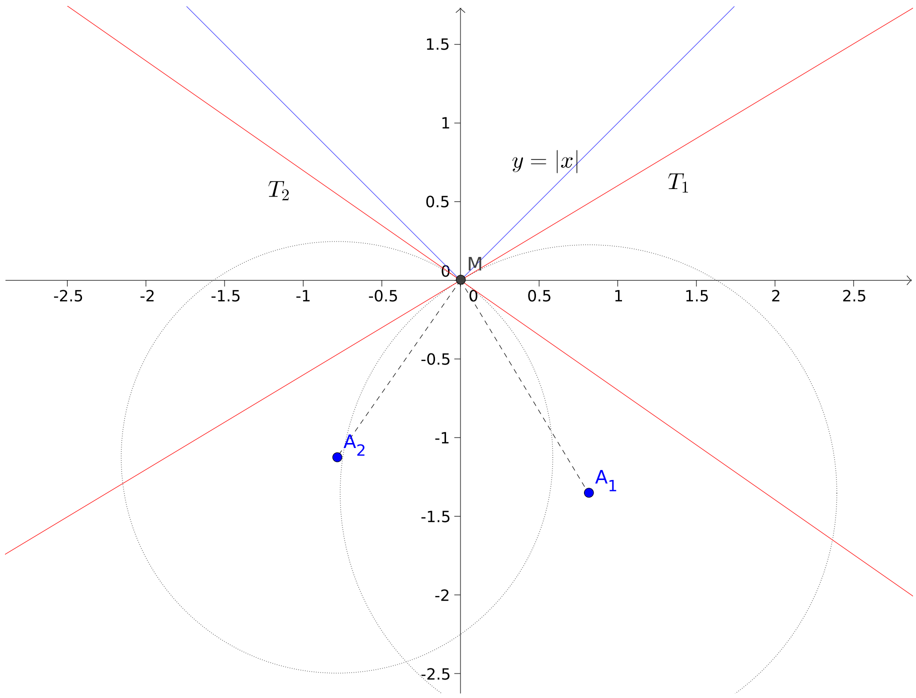
Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie. (Descartes, sur la tangente d'une courbe en un point)

La définition suivante est, pour une fois, **à ne pas retenir** : elle montre la difficulté qu'il existe à définir une tangente de façon géométrique :

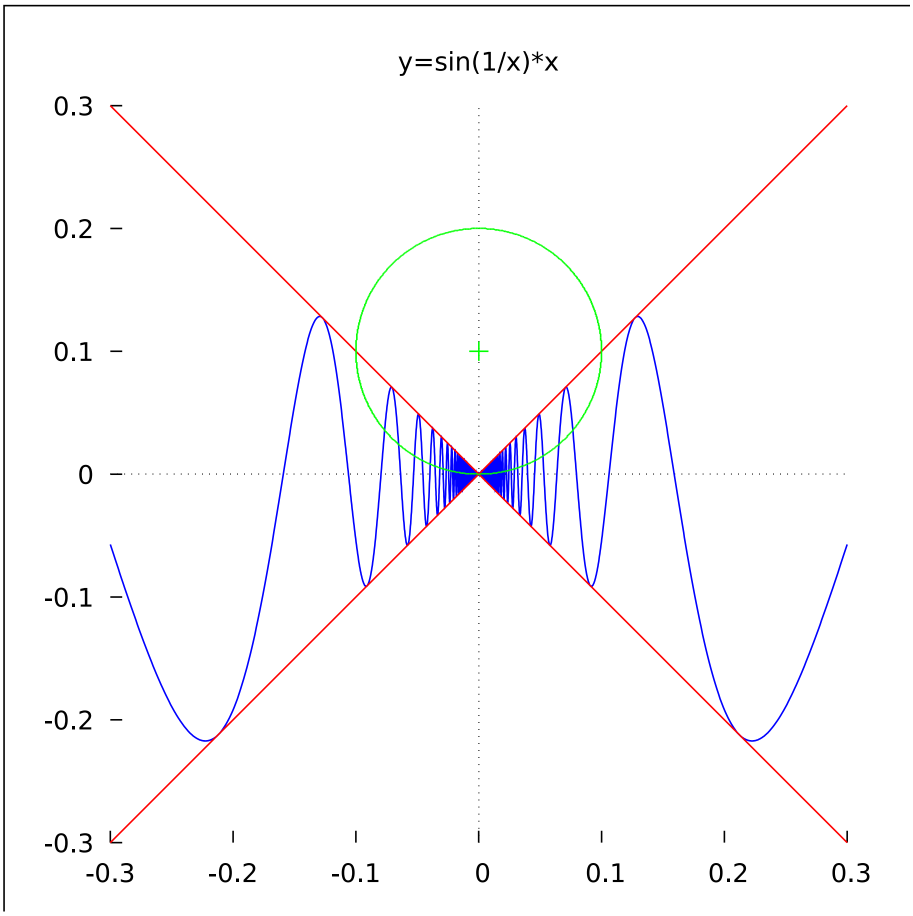
Définition 1.3.9 : *(Descartes) Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ admet une tangente au point M si il existe un cercle de centre A différent de M dont l'intersection avec $\mathcal{C}$ est réduite à M. Une tangente à $\mathcal{C}$ au point M est alors la droite passant par M orthogonale à la droite (AM).*

Remarque(s) 7 :

1. Notez qu'à priori, rien ne dit que la tangente en un point d'une courbe est unique ; parfois, c'est même faux :

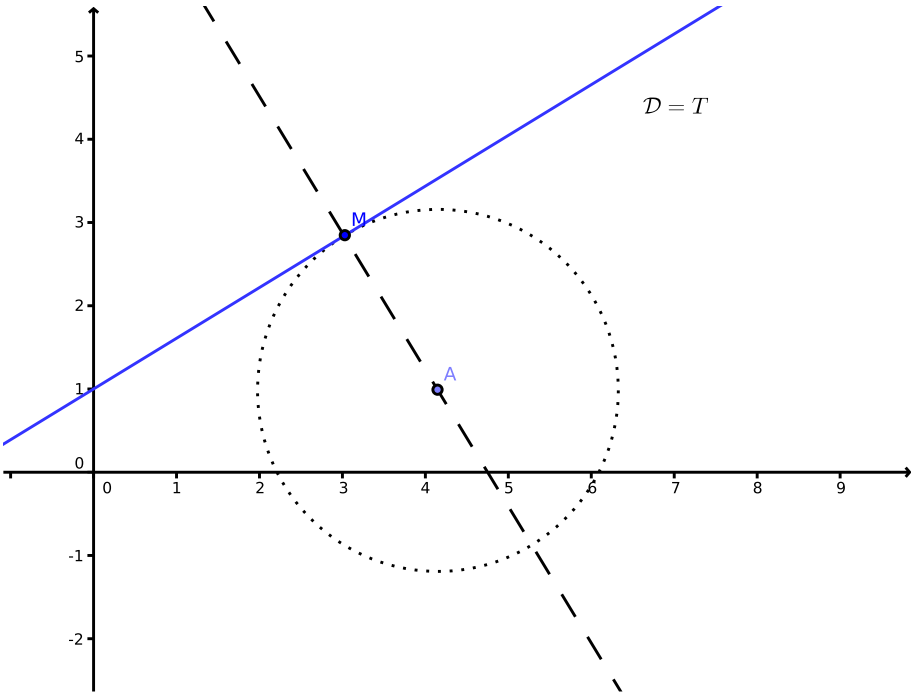


2. Il est même possible qu'une courbe n'admette pas en un point de tangente ; ici, il est impossible de tracer un cercle qui n'intersecte la courbe qu'en le point $(0, 0)$:

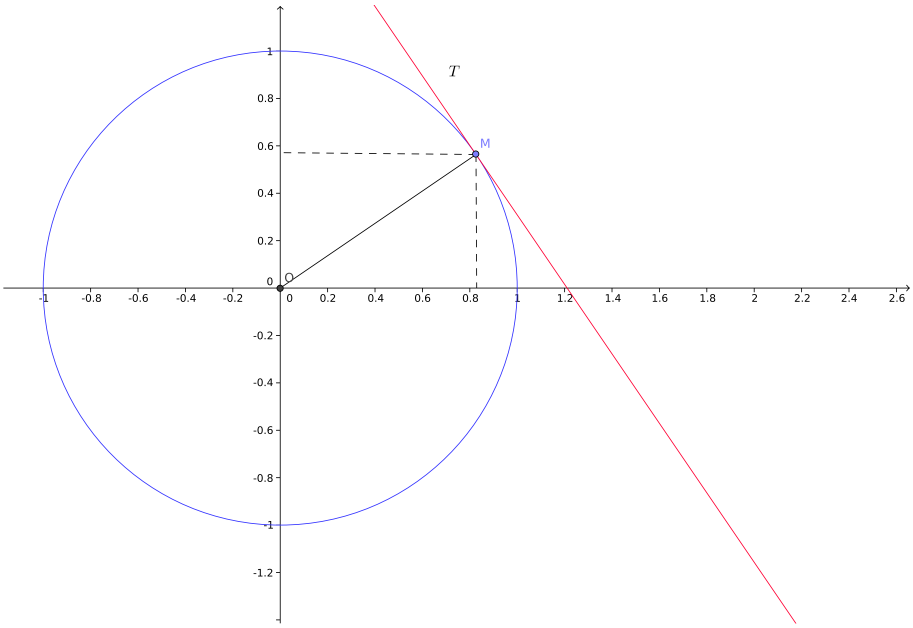


3. Il est cependant important de connaître certains résultats :

   (a) Dans la cas d'un point M appartenant à une droite $\mathcal{D}$, il n'y a qu'une seule droite tangente T à $\mathcal{D}$ au point M : la droite $\mathcal{D}$ elle-même !



(b) Dans le cas d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O la tangente T du cercle $\mathcal{C}$ au point M est unique ; c'est la droite perpendiculaire à (OM) qui passe par M.



La méthode géométrique donnée par la définition est particulièrement mauvaise pour faire des calculs. Heureusement, il existe une meilleure méthode méthode pour certaines courbe. Tout part de la remarque suivante : elle est unique, pour connaître la tangente en un point M d'une courbe, il suffit d'en connaître la pente, puisqu'on en connaît déjà un point : M.

Définition 1.3.10 : *Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est dérivable en $x \in I$ si la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y), \quad y = f(x),\ x \in I\}$ admet en $(x, f(x))$ une unique tangente de pente finie. On note alors $f'(x)$ la pente de cette tangente.*
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et on note f' et on appelle fonction dérivée de f la fonction définie sur I qui à x associe $f'(x)$.

Exemple(s) 9 :

9.1 On commence à s'approcher de ce que vous connaissez : la fonction f' ! Ce qu'il faut retenir de ce paragraphe est la chose suivante : il n'est absolument pas évident, à priori, que donnée une fonction, cette fonction soit dérivable ; on a par exemple montré que les fonctions :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases} \qquad \text{et} \quad f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

ne sont pas dérivables en 0.

9.2 Cependant, on sait déjà calculer un type de fonction dérivée ; si f est définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a \times x + b$$

alors $f'(x) = a$, puisque la tangente d'une droite est la droite elle-même !

1.3.3.3 Le grand prêt : calculs pratiques de dérivées

Pour réussir à utiliser quand-même la notion de dérivée, nous allons temporairement emprunter les résultats d'une centaine d'années de recherche mathématique ; l'idée est d'utiliser une définition analytique de la dérivée :

Définition 1.3.11 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*

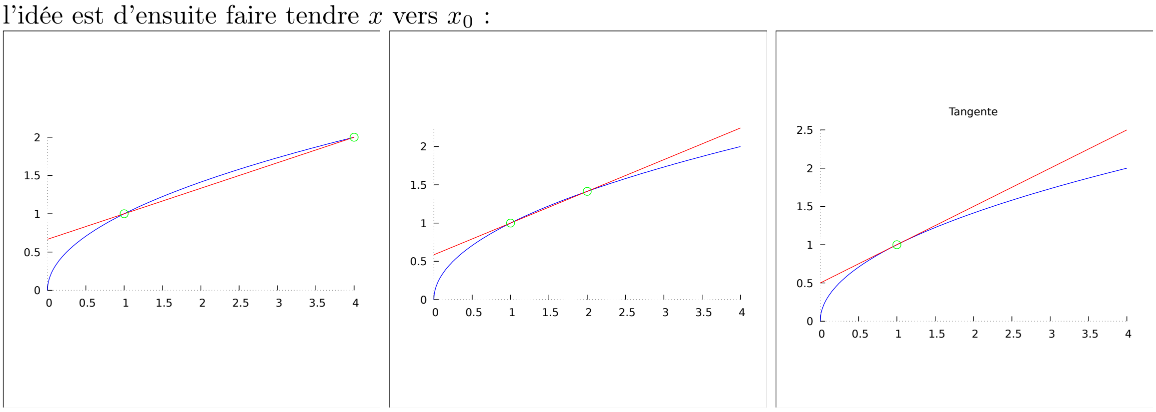
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On la note alors $f'(x_0)$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Remarque(s) 8 : 1. D'où vient cette idée ? On peut faire un dessin pour essayer de l'expliquer. Si une droite passe par $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$, alors elle a pour pente :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

l'idée est d'ensuite faire tendre x vers x_0 :



2. Notez que par définition, si elle existe, l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a).}$$

3. Rappelez vous que toutes les fonctions ne sont pas dérivables, même avec cette définition. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

On a le tableau suivant des dérivations des fonctions usuelles sur $\mathbb{R}$:

$f(x)$	$f'(x)$	dérivable sur
$x^n,\ (n \in \mathbb{N})$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^{-n},\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$(-n) \times x^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exemple(s) 10 :

10.1 Dans tous les exemples précédents, le domaine de dérivabilité est le même que celui de définition. Mais la fonction :
$$f : x \longmapsto \sqrt{x}$$
est définie sur $\mathbb{R}_+$ et n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$!

Propriété(s) 1.3.4 : Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
2. $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)' = k.f'$.
3. $f \times g$ est dérivable sur I et
$$\boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.}$$
4. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable sur I et :
$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}}$$
5. Si $h : J \supset f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est dérivable sur I et
$$\boxed{(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'.}$$

Exemple(s) 11 :

11.1 Par soucis de cohérence, on peut vérifier qu'avec les autres formules, on peut retrouver la formule de dérivation d'un quotient ; on montre d'abord avec la formule de dérivation des composées et celle de $x \mapsto \frac{1}{x}$ que la dérivée de $\frac{1}{g}$ est $-\frac{g'}{g^2}$, puis on utilise la formule de dérivation des produits pour obtenir :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \times g'}{g^2} = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}.$$

11.2 On définit, pour α un réel quelconque **la fonction puissance** α par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$x^\alpha = \exp(\alpha \times \ln(x)).$$
Alors, cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée :
$$\alpha \times \frac{1}{x} \times \exp(\alpha \times \ln(x)) = \alpha \times x^{\alpha-1}.$$

11.3 On définit la fonction tangente par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Son domaine de définition maximal est :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \times \pi,\ k \in \mathbb{R} \right\},$$

et l'on peut calculer sa dérivée en tout x de son ensemble de définition :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

11.4 Un exercice de calcul de dérivée commence souvent par la détermination du domaine de dérivation. Par exemple, si l'on cherche à calculer la dérivée de :

$$f :\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$

l'ensemble de définition maximal de cette fonction est $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ mais son ensemble de dérivation est seulement $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$! Pour tout x de ce domaine, on a alors :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Et tant qu'on est à faire des prêts, en voici un dernier, essentiel :

Propriété(s) 1.3.5 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{lcl} f' \geq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ croissante} \\ f' \leq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ décroissante} \\ f' > 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement croissante} \\ f' < 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement décroissante} \end{array}$$

Remarque(s) 9 : 1. Grâce aux deux premières affirmations, on en déduit :

$$f' = 0 \iff f \text{ constante}$$

2. Il est possible de relâcher légèrement les hypothèses pour obtenir une monotonie stricte ; il suffit que la dérivée soit strictement positive, sauf en un nombre fini de points. C'est par exemple pratique de s'en souvenir pour montrer qu $x \mapsto x^n$, n impair est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Notez qu'il n'y a pas de réciproque dans les deux dernières implications, il est même possible qu'une fonction soit strictement croissante alors que sa dérivée s'annule une infinité de fois, comme le montre la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto x - \cos(x).$$