MP Programme de colle n° 5

Au programme :

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

3. Eléments de topologie
4. Etude locale des applications

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

3.1.c

Théorème : **Caractérisation séquentielle des fermés**

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

3.2.a

Théorème : **caractérisation séquentielle d'un point adhérent**

$$\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow [x \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A].$$

3.2.c

Propriétés de l'adhérence et de l'intérieur

$\boxed{\mathbf{1}}$. $\mathcal{C}_E \overline{A} = \mathcal{C}_E \overset{\circ}{A}$ et $\mathcal{C}_E \overset{\circ}{A} = \overline{\mathcal{C}_E A}$

$\boxed{\mathbf{2}}$. $A \subset B \Rightarrow \left[\ \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}\ \right]$

$\boxed{\mathbf{3}}$. $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$

$\boxed{\mathbf{4}}$. A est ouvert $\Leftrightarrow \left[\overset{\circ}{A} = A\right]$ et A est fermé $\Leftrightarrow \left[\overline{A} = A\right]$

$\boxed{\mathbf{5}}$. $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A.

$\boxed{\mathbf{6}}$. $\overline{A}$ est fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.

4.1.a

Si f admet une limite au point x_0, la limite est unique.

4.2

> Théorème : **caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction**
>
> Soient $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Alors
>
> $$\left[\ f \text{ admet pour limite } \ell \text{ en } a\ \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } a \\ \text{la suite } (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{converge vers } \ell\end{array}\right]$$

4.4.c

> Théorème : **fonctions égales sur une partie dense**
>
> Soit B une partie de E dense dans A et soit $f, g \in \mathcal{C}(A, F)^2$.
>
> Si $f_{|B} = g_{|B}$ alors $f = g$

4.4.d

> Théorème : **image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue**
>
> Soit $f : E \to F$.
>
> $f \in \mathcal{C}(E, F)$
>
> $\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E
>
> $\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E

4.6

> Théorème : **caractérisation des applications linéaires continues**
>
> Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.
>
> $$\boxed{u \text{ est continue } \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall x \in E : \left\|u(x)\right\|_F \leqslant \|x\|_E\right]}$$