Programme de colle n°6

Semaine du 7 au 10 novembre

An3-b : Propriétés analytiques de $x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **sur** $]-R, R[$.

- Continuité, DL en 0 - Primitive, intégration
- Dérivabilité. Toute somme de série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$
- Série entière de Taylor associée à $f \in \mathscr{C}^\infty(]-\alpha, \alpha[)$

An3-c : Série produit de Cauchy. Application à exp et à la série géométrique.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$: rayon et somme par produit de Cauchy
- exp vérifie $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$. Propriétés de exp
- sin et cos trigonométrique et hyperbolique sur $\mathbb{C}$.

An 1 : Intégrale sur un segment (fonctions continues par morceaux)

- Révisions sur l'intégrale de Sup : généralisation et adaptation des résultats aux fonctions continues par morceaux sur un segment.
- Formule de Taylor reste intégral
- Comparaison série intégrale : Equivalent de somme partielle de série divergente. Equivalent de reste de série convergente.

An 4 : Intégration sur un intervalle quelconque :

- Définition d'une intervalle convergente. Caractérisation pour les fonctions positives.
- Exemples ; Exemples de référence (Riemann)
- Domination, comparaison, équivalent des fonctions positives.
- Convergence absolue
- Linéarité, Positivité, Croissance, Chasles, $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$ si l'intégrale CVA.
- Si $\displaystyle\int_I f$ CVA et f continue sur I telle que $\displaystyle\int_I |f| = 0$, alors $f = 0$.
- Changement de variables sur un intervalle quelconque
- IPP : Je préconise de passer à la limite dans les intégrales sur un segment.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ CV sans converger absolument.

Remarque : Attention la notion de fonction intégrable n'a pas été abordé !

Attention : Merci aux colleurs de poser à chaque élève un exercice de justification de convergence d'intégrale, pour vérifier que les techniques sont connues.

Questions de cours : Les preuves font partie de la question de cours...

* Rayon et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ (par intégration ou dérivation) : Formule à connaître...
* Série entière de coefficients u_n où u_n est une suite de Fibonacci. Calcul de la somme.
* Formule de Taylor reste intégral
* Thm des sommes de Riemann (démonstration pour les fonctions lipchitziennes)
* Lemme de Lebesgue * Produit de Cauchy : $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$.
* DL en 0 d'une somme de série entière
* Convergence d'intégrale : Comparaison, domination et équivalents de fonction positives.
* Etalon de Riemann (en $+\infty$, en 0, en a) * Convergence absolue implique convergence
* $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$ si l'intégrale CVA
* Si $\displaystyle\int_I f$ CVA et f continue sur I telle que $\displaystyle\int_I |f| = 0$, alors $f = 0$.
* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ est convergente sans être absolument convergente.