Connexité par arcs

Exercice 1 [01147] [correction]
Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Exercice 2 [01148] [correction]
Montrer que l'union de deux connexes par arcs non disjoints est connexe par arcs.

Exercice 3 [01149] [correction]
Montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Exercice 4 [01150] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que f' s'annule.
a) Etablir que $A = \left\{(x, y) \in I^2, x < y\right\}$ est une partie connexe par arcs de I^2.
b) On note $\delta : A \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$. Etablir que $0 \in \delta(A)$.
c) Conclure en exploitant le théorème de Rolle

Exercice 5 [01151] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.
Indice : on peut considérer $\varphi(x, y) = f(x) - f(y)$ défini sur
$X = \left\{(x, y) \in I^2, x < y\right\}$.

Exercice 6 [01152] [correction]
Soient A et B deux parties connexes par arcs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
b) En déduire que $A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 7 [01153] [correction]
Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Exercice 8 [01154] [correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$
Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

Exercice 9 [01155] [correction]
Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 2$.
a) Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n - 2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 10 [01156] [correction]
Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonalisables est connexe par arcs.

Exercice 11 [01157] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 12 [01158] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 13 [03737] [correction]
[Théorème de Darboux]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $U = \left\{(x, y) \in I^2 / x < y\right\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
b) On note $\tau : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Justifier

$$\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 14 [03867] [correction]
Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons $P_1, \dots, P_n$ les points à exclure.
Considérons une droite $\mathcal{D}$ ne passant par aucun des points $P_1, \dots, P_n$. Cette droite est une partie connexe.
Considérons un point A du plan autre que $P_1, \dots, P_n$. Il existe une infinité de droites passant par A et coupant la droite $\mathcal{D}$. Parmi celles-ci, il y en a au moins une qui ne passe par les $P_1, \dots, P_n$. On peut dont relier A à un point de la droite $\mathcal{D}$.
En transitant par cette droite, on peut alors relier par un tracé continu excluant les $P_1, \dots, P_n$, tout couple de points (A, B) autres que les $P_1, \dots, P_n$.

Exercice 2 : [énoncé]
Si les deux points à relier figurent dans un même connexe par arcs, le problème est résolu. Sinon, on transite par un point commun au deux connexes pour former un arc reliant ces deux points et inclus dans l'union.

Exercice 3 : [énoncé]
L'image d'un arc continu par une application continue est un arc continu. Ainsi si X est connexe par arcs et f continue définie sur X alors pour tout $f(x), f(y) \in f(X)$, l'image par f d'un arc continu reliant x et à y est un arc continue reliant $f(x)$ à $f(y)$ et donc $f(X)$ est connexe par arcs.

Exercice 4 : [énoncé]
a) A est une partie convexe donc connexe par arcs.
b) L'application δ est continue donc $\delta(A)$ est connexe par arcs c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Puisque f' prend des valeurs strictement positives et strictement négative, la fonction f n'est pas monotone et par conséquent des valeurs positives et négatives appartiennent à l'intervalle $\delta(A)$. Par conséquent $0 \in \delta(A)$.
c) Puisque $0 \in \delta(A)$, il existe $a < b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. On applique le théorème de Rolle sur $[a, b]$ avant de conclure.

Exercice 5 : [énoncé]
X est une partie connexe par arcs (car convexe) et φ est continue donc $\varphi(X)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle.
De plus $0 \notin \varphi(X)$ donc $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{-\star}$ et on peut conclure.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Soient $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Par la connexité de A et B, il existe $\varphi : [0,1] \to A$ et $\psi : [0,1] \to B$ continues vérifiant $\varphi(0) = a, \varphi(1) = a'$ et $\psi(0) = b, \psi(1) = b'$. L'application $\theta : [0,1] \to A \times B$ définie par $\theta(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ est continue et vérifie $\theta(0) = (a, b)$ et $\theta(1) = (a', b')$. Ainsi $A \times B$ est connexe par arcs.
b) $A + B$ est l'image de $A \times B$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ vers E, $A + B$ est donc connexe par arcs.

Exercice 7 : [énoncé]
Il nous suffit d'étudier A.
Soient $a, a' \in A$. $A \subset A \cup B$ donc il existe $\varphi : [0,1] \to A \cup B$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$.
Si φ ne prend pas de valeurs dans B alors φ reste dans A et résout notre problème.
Sinon posons $t_0 = \inf \{t \in [0,1] \,/\, \varphi(t) \in B\}$ et $t_1 = \sup \{t \in [0,1] \,/\, \varphi(t) \in B\}$. φ étant continue et A, B fermés,

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B$$

$A \cap B$ étant connexe par arcs, il existe $\psi : [t_0, t_1] \to A \cap B$ continue tel que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. En considérant $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0, t_1]$ et $\theta(t) = \varphi(t)$ sinon, on a $\theta : [0,1] \to A$ continue et $\theta(0) = a$, $\theta(1) = a'$.
Ainsi A est connexe par arcs.

Exercice 8 : [énoncé]
Soient $a, b \in S$.
Si $a \neq -b$. On peut alors affirmer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)a + \lambda b \neq 0$.
L'application $\lambda \mapsto \frac{1}{\|(1-\lambda)a+\lambda b\|}((1-\lambda)a + \lambda b)$ est alors un chemin joignant a à b inscrit dans S.
Si $a = -b$, on transite par un point $c \neq a, b$ ce qui est possible car $n \geqslant 2$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \ker f$, f est continue et $f(E \backslash H) = \mathbb{R}^\star$ non connexe par arcs donc $E \backslash H$ ne peut l'être.
b) Oui. Introduisons une base de F notée $(e_1, \dots, e_p)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_n)$.
Sans peine tout élément $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ de $E \backslash F$ peut être lié par un chemin continue dans $E \backslash F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$ (prendre $x(t) = (1-t)x_1 e_1 + \dots + (1-t)x_{n-1}e_n + ((1-t)x_n + t)e_n$).

De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continue dans $E\backslash F$ en prenant $x(t) = (1-2t)e_n + (1-t^2)e_{n-1}$. Ainsi $E\backslash F$ est connexe par arcs.

Exercice 10 : [énoncé]
Notons $\mathcal{D}_n$ la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étudiée et montrons que toute matrice de $\mathcal{D}_n$ peut-être reliée par un chemin continu inscrit dans $\mathcal{D}_n$ à la matrice I_n ce qui suffit pour pouvoir conclure.
Soit $A \in \mathcal{D}_n$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale.
Considérons alors $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\gamma(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = (1-t)D + tI_n$.
L'application γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{D}_n$ avec $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$: elle résout notre problème.

Exercice 11 : [énoncé]
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par celle-ci est $\mathbb{R}^\star$ qui n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne peut l'être.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il suffit d'observer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relier continûment dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à la matrice I_n.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP = (b_{i,j})$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Nous allons construire un chemin continue joignant I_n à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puis en déduire un chemin joignant I_n à A lui aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour $i > j$, posons $m_{i,j}(t) = 0$.
Pour $i < j$, posons $m_{i,j}(t) = tb_{i,j}$ de sorte que $m_{i,j}(0) = 0$ et $m_{i,j}(1) = b_{i,j}$.
Pour $i = j$, on peut écrire $b_{i,i} = \rho_i \mathrm{e}^{i\theta_i}$ avec $\rho_i \neq 0$. Posons $m_{i,i}(t) = \rho_i^t \mathrm{e}^{it\theta_i}$ de sorte que $m_{i,i}(0) = 1$, $m_{i,i}(1) = b_{i,i}$ et

$$\forall t \in [0,1]\,,\, m_{i,i}(t) \neq 0$$

L'application $t \mapsto M(t) = (m_{i,j}(t))$ est continue, elle joint I_n à B et ses valeurs prises sont des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls, ce sont donc des matrices inversibles.
En considérant $t \mapsto PM(t)P^{-1}$, on dispose d'un chemin continu joignant I_n à A et restant inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 13 : [énoncé]
a) La partie U est convexe donc connexe par arcs.
b) Par le théorème des accroissements finis, un taux de variation est un nombre dérivé et donc

$$\tau(U) \subset f'(I)$$

De plus, tout nombre dérivé est limite d'un taux de variation, donc

$$f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) Puisque l'application τ est continue sur U connexe par arcs, son image $\tau(U)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. L'encadrement précédent assure alors aussi que $f'(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : [énoncé]
On sait

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Par ce paramétrage, on peut affirmer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexes par arcs, car image continue de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$