Espaces probabilisés finis

I Résultats d'une expérience aléatoire

I.1 Expérience aléatoire et univers

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut pas être connu avec certitude avant d'avoir mis en œuvre cette expérience.

Toutefois, la nature de l'expérience étudiée impose à ce résultat de varier dans un ensemble Ω, qui est connu avant que l'expérience soit réalisée.

Déf. • Expérience aléatoire, univers, issues

1) Lorsqu'on étudie une **expérience aléatoire,** l'ensemble comprenant tous ses résultats possibles est appelé **univers.** Il est généralement noté Ω.

2) Les éléments ω de l'univers sont appelés les **issues,** les **résultats possibles** ou encore les **réalisations.**

Cette année, nous étudierons seulement des expériences où les résultats possibles sont *en nombre fini.* Ainsi l'univers Ω sera un ensemble fini et

3) le **nombre de résultats possibles** est le cardinal de l'univers.

Ex. ✻ Univers et nombre de résultats possibles pour les expériences aléatoires :

1) Lancer d'un dé.

2) Lancer de deux dés de couleurs différentes ; lancer d'un seul dé deux fois de suite.

3) Tirage d'une boule dans une urne contenant n boules.

4) Tirages de p boules dans une urne en contenant n : successifs avec remise, successifs sans remise, simultanés.

Rem. ◇ Réaliser l'expérience aléatoire et observer son résultat revient à choisir un élément ω dans Ω. Cet élément ω contient toute l'information concernant le résultat de l'expérience (notamment tous les résultats successifs s'il y a des répétitions).

I.2 Évènements

Un **évènement** sert à modéliser une *affirmation* concernant le résultat d'une expérience aléatoire. Cette affirmation se révèlera vraie ou fausse une fois l'expérience réalisée, mais on ne connait pas sa valeur de vérité avant cela. Mathématiquement, un évènement sera un *sous-ensemble* de l'univers Ω : on ne garde dans cette partie que les issues pour lesquelles l'affirmation sera vraie.

Déf. • Événéments

Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire.
On appelle **évènement** toute partie A de l'univers Ω.
« A est un évènement » signifie donc, au choix :

$$A \subset \Omega \quad \text{ou} \quad A \in \mathscr{P}(\Omega).$$

Rem. ◇ Une fois que l'expérience a été réalisée, on dit que **l'évènement A est réalisé** quand l'issue ω de l'expérience appartient à l'ensemble A.

Ex. ✻ Exemples et contre-exemples d'évènements dans les cadres précédents.

Déf. • Évènements particuliers

Soit Ω un univers fini modélisant une expérience aléatoire.

1) Un **évènement élémentaire** est un évènement contenant un seul résultat possible : c'est un singleton $\{\omega\}$ inclus dans Ω.

2) L'**évènement impossible** est l'ensemble $\varnothing$: il n'est jamais réalisé.

3) L'**évènement certain** est l'ensemble Ω : il est toujours réalisé.

Attention ❢ Ne pas confondre **évènement élémentaire** (singleton $\{\omega\} \subset \Omega$)
et **résultat possible** (élément $\omega \in \Omega$).

Propr. • Opérations sur les évènements

Soit Ω un univers fini modélisant une expérience aléatoire,
A et B, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements.

1) L'affirmation "A est réalisé et B est réalisé" est modélisée par l'évènement $A \cap B$.

2) "A est réalisé ou B est réalisé" est modélisée par $A \cup B$.

3) "A n'est pas réalisé" est modélisée par $\bar{A}$.

4) "Tous les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont réalisés" est modélisée par $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

5) "Au moins un des évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est réalisé" est modélisée par $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Exercice 1 ► Par quels évènements sont modélisés les affirmations suivantes ?

1) " A est réalisé mais pas B ",
2) " Parmi A, B et C, au moins un est réalisé et au moins un ne l'est pas "
3) " Parmi A_1,A_2,A_3,A_4, deux évènements de numéros consécutifs sont réalisés "

Déf. • Relations entre deux évènements

Soit Ω un univers fini, A et B deux évènements.

1) On dit que ***A* entraîne *B*** lorsque $A \subset B$. Cela signifie qu'à chaque fois que l'évènement A est réalisé, l'évènement B est réalisé également.
2) On dit que ***A* et *B* sont incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$. Cela signifie que, pour une même issue de l'expérience, les évènements A et B ne sont jamais réalisés tous les deux.

Ex. ✻ Retour sur les exemples précédemment étudiés.

Déf. • Systèmes complets d'évènements

Soit Ω un univers fini, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ des évènements.

On dit que $\boldsymbol{(A_1,A_2,\ldots,A_n)}$ **est un système complet d'évènements** (souvent abrégé **s.c.e.**) quand :

1) Les évènements sont deux-à-deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ i \neq j\ \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

2) Leur réunion est l'évènement certain :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega.$$

Cela signifie qu'à chaque réalisation de l'expérience, un et un seul des évènements $A_1,A_2,\ldots,A_n$ est réalisé.

Ex. ✻ 1) Si A est un évènement, $(A,\overline{A})$ est un s.c.e.
2) Exemples et contre-exemples de s.c.e. pour un lancer de dés, deux lancers de dé, pour des tirages de n boules.

La notion de système complet d'évènements intervient lorsque, dans un raisonnement, on souhaite effectuer une disjonction de cas concernant le résultat de l'expérience aléatoire :

Propr. • Décomposition d'un évènement suivant un s.c.e.

Soit Ω un univers fini, $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ un système complet d'évènements et B un évènement quelconque. Alors :

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_n).$$

II Espaces probabilisés finis

Jusque ici, les objets introduits permettent de *décrire le résultat* d'une expérience. On souhaite à partir de maintenant *quantifier le risque* que chacun des évènements se réalise.

II.1 Fonction de probabilité

Mesurer la probabilité que chaque issue survienne consiste à se donner une application qui associe à chaque issue ω un nombre $\pi(\omega) \in [0,1]$.

Déf. • Soit Ω un univers fini modélisant une expérience aléatoire. Une **fonction de probabilité sur Ω** est une application $\pi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1.$$

Rem. ◇ 1) La définition impose que chaque $\pi(\omega)$ soit dans l'intervalle $[0,1]$, sans quoi la somme ci-dessus dépasserait 1.
2) Cette somme vaut 1 car, quelle que soit le déroulement de l'expérience, on obtient toujours une issue et une seule.

Ex. ✻ 1) Un jeu de pile ou face équilibré, puis déséquilibré.
2) Tirage d'un sujet de colle parmi trois possibles.
3) Dé pipé où 1 a deux fois plus de chances de sortir que les autres faces.

II.2 Mesure de probabilité

Étant donné une fonction de probabilité π, on peut en déduire la probabilité de n'importe quel évènement A en additionnant la probabilité des issues qui le composent.

Déf. • Probabilité d'un évènement

Soit Ω un univers fini et π une fonction de probabilité modélisant une expérience aléatoire. Pour tout évènement $A \subset \Omega$, on définit la **probabilité de *A*** par

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \pi(\omega).$$

Important ✪ La probabilité d'un évènement est un **nombre réel.**

Ex. ✻ Retour sur les exemples.

Les probabilités des évènements vérifient les propriétés fondamentales suivantes :

Propr. • Soit Ω un univers fini et π une fonction de probabilité modélisant une expérience aléatoire.

L'application $\mathrm{P}\colon \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall A \in \mathscr{P}(A), \quad \mathrm{P}(A) \geqslant 0,$

2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

3) si A et B sont deux évènements incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Déf. • Soit Ω un univers fini modélisation une expérience aléatoire.

1) Une application P vérifiant les trois propriétés ci-dessus est appelée une **(mesure de) probabilité sur Ω.**

2) Un **espace probabilisé** est un couple (Ω, P) formé par un univers Ω fini et par une mesure de probabilité P sur Ω.

II.3 Calcul élémentaire des probabilités

Toutes les propriétés calculatoires qui suivent s'appuient exclusivement sur le fait que P est une mesure de probabilité.

Propr. • Additivité de la probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini,
$A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements deux-à-deux incompatibles. Alors :

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Attention On réunit des évènements alors qu'on additionne des probabilités d'évènements.

Propr. • Probabilité d'une réunion

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements **quelconques.**
Alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. Modèle des 3 boules : probabilité qu'il y ait au moins une boule bleue parmi les deux premières tirées.

Propr. • Probabilité de l'évènement contraire, d'une différence

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements. Alors :

1) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

2) Si $B \subset A$, alors $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. 3 boules (bleu, rouge, jaune) dans une urne, n tirages succesifs avec remise. Probabilité qu'au moins une soit verte.

Propr. • Croissance de la probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements quelconques.
Si $A \subset B$ (A entraîne B), alors $\mathrm{P}(A) \subset \mathrm{P}(B)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex.

II.4 Probabilité uniforme

Il est courant (mais pas toujours vrai) que dans une expérience aléatoire, les différentes issues de l'expérience aient toutes autant de chances d'apparaître. Toutes les issues ont alors la même probabilité p. Or les issues sont au nombre de $|\Omega|$, donc $|\Omega| \times p = 1$, d'où $p = 1/|\Omega|$.

Déf. • Probabilité uniforme sur un univers fini

Soit Ω un univers fini modélisant une expérience aléatoire.
La **probabilité uniforme sur Ω** est la mesure de probabilité P associée à la fonction de probabilité π, définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \pi(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Rem. ◇ Dans le cas uniforme, la fonction de probabilité est une fonction constante.

Vocabulaire Quand on travaille avec la probabilité uniforme, on dit qu'il y a **équiprobabilité.**

En situation d'équiprobabilité, le calcul des probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement :

Propr. • Probabilité d'un évènement sous la probabilité uniforme

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, où P est la probabilité uniforme.
Alors pour tout évènement $A \subset \Omega$,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Démo. Sur les notes de cours.

Rem. ◇ En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement est proportionnelle au nombre d'issues qu'il contient. Il s'agit de la règle « probabilité = nombre d'issues favorables / nombre d'issues possibles ».

Ex. **1)** Dé équilibré.

2) Tirage d'une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes : probabilité d'avoir une couleur.

3) 3 boules (bleu, rouge, jaune) dans une urne, n tirages succesifs avec remise avec $n \geqslant 2$. Probabilité qu'au plus deux boules rouges sortent ?

III Probabilités conditionnelles

Lorsqu'on émet une hypothèse sur l'issue d'une expérience aléatoire (« si l'évènement H est réalisé… »), ou lorsqu'on dispose d'une information partielle sur ce résultat (« on sait que H est réalisé »), la perception que l'on a des probabilités s'en trouve modifiée. La probabilité P n'est donc plus un outil adapté pour mesurer les probabilités : on la replace dans les calculs par une **probabilité conditionnelle P_H.**

III.1 Approche fréquentiste des probabilités

Que modélise concrètement la probabilité d'un événement ? Considérons une expérience aléatoire modélisée par l'espace probabilisé fini (Ω, P) et un événement $A \subset \Omega$. Si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois, la probabilité de l'événement A s'approche de la fréquence à laquelle l'événement s'est réalisé. Plus précisément, si l'on note N le nombre de répétitions de l'expérience et N_A le nombre de fois où l'événement A s'est réalisé au cours des N essais,

$$\text{quand } N \text{ « très grand »}, \quad \mathrm{P}(A) \simeq \frac{N_A}{N}, \quad \text{ou encore } N_A \simeq \mathrm{P}(A) \times N.$$

Ajoutons un deuxième événement H et supposons que l'on sache que cet événement est réalisé. Sous cette hypothèse, comment évaluer raisonnablement la probabilité que A soit réalisé ? Parmi nos N essais, ceux où H n'est pas réalisé sont éliminés : il ne reste que N_H essais. Les essais où A sera réalisé verront $A \cap H$ réalisé : il y en a $N_{A\cap H}$. On évalue donc la probabilité de A à

$$\mathrm{P}_H(A) \simeq \frac{N_{A\cap H}}{N_H} \simeq \frac{\mathrm{P}(A\cap H) \times N}{\mathrm{P}(H) \times N} = \frac{\mathrm{P}(A\cap H)}{\mathrm{P}(H)}.$$

Ce raisonnement approximatif n'est pas une preuve mais vient expliquer la définition choisie pour les probabilités conditionnelles.

III.2 Définition et propriétés élémentaires

Déf. • Probabilité conditionnelle, sachant H, d'un évènement A

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, H un évènement tel que $\mathrm{P}(H) \neq 0$.

Pour chaque évènement A quelconque, la **probabilité conditionnelle, sachant H, de l'évènement A** est le nombre réel

$$\mathrm{P}_H(A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap H)}{\mathrm{P}(H)}.$$

Rem. ◇ $\mathrm{P}_H(A)$ est parfois noté $\mathrm{P}(A \mid H)$ mais cette notation favorise les erreurs de calcul : à éviter autant que possible.

Attention ❢ … **il n'existe pas d'évènement « A sachant H ».** Seuls existent *deux* évènements A et H et la terminologie « sachant que » n'est appropriée que si on étudie les **probabilités.**

Ex. ✻ Sur trois tirages successifs avec remise de boules (bleu/rouge/jaune), probabilité que la première soit rouge : sachant qu'il y a eu deux bleues, sachant qu'il y en a au moins une rouge.

Propr. • Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, H un évènement tel que $\mathrm{P}(H) \neq 0$.

Alors l'application P_H est une probabilité sur l'univers Ω.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Coroll. • Toutes les propriétés calculatoires vraies avec la probabilité **P** restent vraies avec la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_H$

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, H un évènement tel que $\mathrm{P}(H) \neq 0$.

1) $\mathrm{P}_H(\varnothing) = 0, \quad \mathrm{P}_H(\Omega) = 1.$

2) Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $\mathrm{P}_H(A\cup B) = \mathrm{P}_H(A) + \mathrm{P}_H(B)$.

3) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors $\mathrm{P}_H\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_H(A_k)$.

4) Si A et B sont deux évènements quelconques, alors $\mathrm{P}_H(A\cup B) = \mathrm{P}_H(A) + \mathrm{P}_H(B) - \mathrm{P}_H(A\cap B)$.

5) Si A est un évènement quelconque, alors $\mathrm{P}_H(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}_H(A)$.

6) Si A et B sont deux évènements tels que $A \subset B$, alors $\mathrm{P}_H(A) \leqslant \mathrm{P}_H(B)$.

III.3 Formules des probabilités composées

Ces formules permettent de reconstituer des probabilités non conditionnelles à partir de probabilités conditionnelles (souvent obtenues en faisant des hypothèses sur les résultats).

Propr. • Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) Si A et B deux évènements tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$, alors

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(B).$$

2) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des évènements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}_{A_1}(A_2)\,\mathrm{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Rem. ◇ Ces propriétés sont particulièrement utiles dans les expériences constituées d'étapes enchaînées les unes derrière les autres.
Dans les cas simples, ces situations peuvent se représenter à l'aide d'arbres pondérés qui sont de bons outils de conjecture.

***Exercice* 2** ► Une urne contient trois boules rouges et deux boules blanches. On y effectue trois tirages successifs sans remise.
Calculer la probabilité de tirer :

1) Une boule rouge au premier tirage, puis une boule blanche au deuxième ;
2) Une boule rouge, puis une boule blanche, puis une boule rouge.

III.4 Formule des probabilités totales

Ces formules servent à reconstituer la probabilité d'un évènement A quand on connait ses probabilités conditionnelles sachant des évènements H_k qui sont autant d'hypothèses simplificatrices pour l'étude. Elle n'est applicable que si les H_k forment un système complet d'évènements.

Propr. • Formules des probabilités totales
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un système complet d'évènements et A un évènement quelconque. Alors :

1) On a dans tous les cas :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap H_1) + \mathrm{P}(A \cap H_2) + \cdots + \mathrm{P}(A \cap H_n).$$

2) Si de plus on a $\mathrm{P}(H_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}_{H_1}(A) + \mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}_{H_2}(A) + \cdots + \mathrm{P}(H_n)\,\mathrm{P}_{H_n}(A).$$

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Dans le cas du système complet d'évènements $(H, \overline{H})$:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap H) + \mathrm{P}(A \cap \overline{H}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H)\,\mathrm{P}_H(A) + \mathrm{P}(\overline{H})\,\mathrm{P}_{\overline{H}}(A).$$

Propr. • Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Si $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(H_k) = 1.$$

***Exercice* 3** ► Retour sur l'exercice précédent : calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage, puis au troisième tirage.

III.5 Formules de Bayes

L'idée générale des deux formules de Bayes est de « retourner un conditionnement » : on connait $\mathrm{P}_B(A)$ et on souhaiterait obtenir $\mathrm{P}_A(B)$. Elles se déduisent des propriétés vues précédemment.

Propr. • Formule de Bayes simple
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Alors :

$$\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}\,\mathrm{P}_B(A).$$

Démo. Sur les notes de cours.

***Exercice* 4** ► Retour sur l'exercice précédent : calculer la probabilité d'avoir tiré une boule blanche au premier tirage sachant qu'on a tiré une boule rouge au deuxième.

Propr. • Formule de Bayes
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle, et A un évènement de probabilité non nulle.
Alors pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}_A(H_k) = \frac{\mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}_{H_k}(A)}{\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{P}(H_\ell)\,\mathrm{P}_{H_\ell}(A)}.$$

Démo. Sur les notes de cours. La démonstration est presque plus importante que la formule elle-même !

Rem. ◇ Cette formule est parfois appelée « formule de probabilité des causes ». Les H_k sont des phénomènes susceptibles d'engendrer le phénomène A, chacun avec probabilité $\mathrm{P}_{H_k}(A)$ connue. La formule de Bayes permet, lorsque le phénomène A est observé, d'évaluer la probabilité qu'il soit « dû » à chacune des sources possibles H_k.

Ex. ✻ Dans le cas du s.c.e. $(H, \overline{H})$:

$$\mathrm{P}_A(H) = \frac{\mathrm{P}(H)\,\mathrm{P}_H(A)}{\mathrm{P}(H)\,\mathrm{P}_H(A) + \mathrm{P}(\overline{H})\,\mathrm{P}_{\overline{H}}(A)},$$

$$\mathrm{P}_A(\overline{H}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{H})\,\mathrm{P}_{\overline{H}}(A)}{\mathrm{P}(H)\,\mathrm{P}_H(A) + \mathrm{P}(\overline{H})\,\mathrm{P}_{\overline{H}}(A)}.$$

***Exercice* 5** ► 3 % de la population est atteinte d'une maladie donnée. On dispose d'un test qui est positif chez 94 % des personnes atteintes et négatif chez 98 % des personnes non atteintes.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit effectivement atteinte si son test est positif ?

IV Évènements indépendants

Déf. • Évènements indépendants

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements.
On dit que **A et B sont indépendants** si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

Ex. ✻ **1)** Lancer de deux dés rouge et bleu : A : “ obtenir 4 avec le dé rouge ” et B : “ obtenir un résultat pair avec le dé bleu ” sont des évènements indépendants.

2) Deux tirages successifs dans l'urne 3R+2B : évènements R_1 et R_2 dans une situation avec ou sans remise.

Attention ❢ Ne surtout pas confondre évènements **indépendants** et **incompatibles,** ces deux notions ne signifient absolument pas la même chose.

Important ✪ L'indépendance d'évènements pourra être, suivant les situations :
- une propriété remarquable à démontrer par le calcul ;
- une hypothèse découlant sans calcul de la modélisation. Par exemple, dans une expérience aléatoire où il y a **répétition** d'un même procédé aléatoire **avec les mêmes conditions itinitiales**, des évènements qui concernent deux répétitions distinctes seront indépendants.

Propr. • Indépendance et probabilités conditionnelles

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini,
A et B deux évènements tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$.
Alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Important ✪ Cette propriété éclaire le sens de l'indépendance de deux évènements : le fait de savoir que l'évènement A est réalisé ne modifie pas la perception que l'on a du risque que B se réalise.

Propr. • Indépendance des contraires

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements.
A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B le sont, si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Déf. • Indépendance mutuelle d'une famille finie d'évènements

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements.
On dit que **les événéments $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants** si, pour tout sous-ensemble d'indices $I \subset [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right) = \prod_{k \in I} \mathrm{P}(A_k).$$

Rem. ◇ Signification dans le cas de 3 ou 4 évènements.

Important ✪ La plupart du temps, l'indépendance mutuelle de plusieurs évènements découlera sans calcul de la modélisation de l'expérience. En particulier, elle intervient dans les modèles où il y a répétition du même procédé aléatoire dans les mêmes conditions initiales.

Ex. ✻ n lancers d'une pièce déséquilibrée.

Attention ❢ L'indépendance mutuelle de n évènements est plus difficile à obtenir que l'indépendance deux-à-deux de ces évènements.

Ex. ✻ Deux lancers successifs de pièces de monnaies équilibrée, en posant A : “ obtenir pile au premier lancer ”, B : “ obtenir pile au deuxième lancer ” et C : “ obtenir le même résultat aux deux lancers ”, (A, B, C) sont deux à deux indépendants **mais pas** mutuellement indépendants.

Déf. • Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements.
On dit que les évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont **indépendants deux-à-deux** quand

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}(A_j).$$

Propr. • Si des évènements sont indépendants mutuellement, ils sont *a fortiori* indépendants deux-à-deux. La réciproque est fausse.

Démo. ↪ C'est immédiat, et l'exemple ci-dessus prouve que la réciproque est fausse.