Chapitre 6
Probabilités

1. Dénombrements (rappels de M.P.S.I.)

1.1. Cardinaux : propriétés algébriques

Cardinal et produit cartésien

- $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$
- $card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \prod_{i=1}^{p} card(E_i)$
- $card(E^p) = (card(E))^p$

Cardinal et réunion

- Si A et B sont deux parties disjointes de E (i.e. $A \cap B = \varnothing$) :

  $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
- Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de parties deux à deux disjointes de E :

  $$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$$
- Cas général : $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

- Exercice : démontrer la formule dite du crible

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) + card\ A \cap B \cap C$$
$$- card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C)$$

1.2. Applications

Soit X un ensemble de cardinal p et E un ensemble de cardinal n.

Nombre d'applications de X dans E	Nombre de p-listes d'éléments de E
$card(E^X) = card(E)^{card(X)} = n^p$	$card(E^p) = n^p$
Nombre de façons de placer p objets distincts dans n tiroirs	

1.3. Injections

Soit X un ensemble de cardinal p et E un ensemble de cardinal n.

Nombre d'injections de X dans E	Nbre de p-listes d'élémts distincts de E
$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$	$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$
Nombre de façons de ranger p éléments de E (arrangements).	

1.4. Permutations de E

Soit E un ensemble de cardinal n.

On appelle permutation de E toute bijection de E dans E.

L'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des permutations de E forme un groupe pour la loi $\circ$.

Nombre de permutations de E
$card(\mathfrak{S}(E)) = n!$

1.5. Parties d'un ensemble

Soit E un ensemble de cardinal n.

Nombre de parties de E
$card(\mathcal{P}(E)) = 2^{card(E)} = 2^n$

Nbre de parties à p éléments de E	Nbre de p–combinaisons d'élts de E
$\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1}$	$\binom{n}{p} = C_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$
Nombre de façons de choisir p éléments parmi n.	

1.6. Compléments

Coefficient binomial	$\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p} \times \binom{n-1}{p-1}$
Formule de Pascal	$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
Formule de Pascal généralisée	$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
Formule de Vandermonde	$\sum_{k=0}^{p} \left\{ \binom{m}{k} \times \binom{n}{p-k} \right\} = \binom{m+n}{p}$

- Démonstrations (deux possibles : ensembliste, polynomiale) **1**.

1.7. Petit bilan utile : p objets d'un ensemble à n éléments

	Avec répétition	Sans répétition
L'ordre compte	n^p	$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$
L'ordre ne compte pas		$\binom{n}{p} = C_n^p$

2. Espaces probabilisés

2.1. Tribus

a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.

En bleu, le vocabulaire en parallèle de la théorie des ensembles

❋ Univers : ensemble Ω des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire.

- Evénement : toute partie de Ω.
  - Evénement certain : Ω ; événement impossible : $\varnothing$.
  - Evénement élémentaire : tout événement de cardinal 1 (singleton de Ω)
  - Evénement contraire de A : $\Omega - A = \overline{A}$ (complémentaire)
  - Evénement « A et B » : $A \cap B$; événement « A ou B » : $A \cup B$.
  - Evénements incompatibles : A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ (disjoints)
- Système complet d'événements : toute famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ telle que :

  ① $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \ / \ i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ (i.e. A_i distincts deux à deux)

  ② $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (partition)

b) Tribu sur un ensemble Ω

Introduction : à la différence du programme de M.P.S.I.,

- Ω n'est plus nécessairement fini
- On ne travaille plus sur tout $\mathcal{P}(\Omega)$ mais sur une partie seulement de $\mathcal{P}(\Omega)$ qu'on appelle une tribu (qui doit vérifier certaines propriétés) ↙

Définitions

- $\boxed{\text{tribu}}$ sur un ensemble Ω : tout ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω tel que :
  - ❋ $\mathcal{T} \neq \varnothing$
  - ❋ $\mathcal{T}$ est stable par complémentarité : $\forall A \in \mathcal{T} : \Omega - A = \overline{A} \in \mathcal{T}$
  - ❋ $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$
- $\boxed{\text{espace probabilisable}}$: tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
- $\boxed{\text{événement}}$: tout élément de la tribu $\mathcal{T}$
- $\boxed{\text{système complet d'événements}}$: toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ telle que :

  $\forall (i,j) \in I \ / \ i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

- Exemples :
  - Sur tout ensemble Ω, $\mathcal{T} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu dite tribu grossière (logique du “tout ou rien”).
  - Sur tout ensemble Ω non vide, si A est une partie de Ω, $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu dite tribu engendrée par l’événement A.
  - Sur tout ensemble Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu : en particulier, si Ω est un ensemble fini, l’espace probabilisable utilisé en M.P.S.I. est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Propriétés : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω.

- $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie.
- $\mathcal{T}$ contient l’événement certain Ω et l’événement impossible $\varnothing$.

  autrement dit : $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.
- $\mathcal{T}$ est stable par soustraction ensembliste.

- Démonstration **2**.

2.2. Probabilité

a) Rappel du vocabulaire de M.P.S.I.

Définition : on appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $0,1$ telle que $\boxed{P(\Omega) = 1}$ et pour tout couple d’événements incompatibles (A, B) : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

b) Définition

Définitions

- On appelle probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ telle que :
  - $\boxed{P(\Omega) = 1}$
  - pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d’événements deux à deux incompatibles, la série $\sum P(A_n)$ converge et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$
- On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur l’ensemble Ω et P une probabilité sur l’espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

c) Détermination d’une probabilité lorsque Ω est fini (rappels M.P.S.I.)

- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est fini, toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la famille $(p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!] : p_i = P(\{\omega_i\})$ avec la condition $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- Si $\forall i \in [\![1,n]\!] : p_i = \dfrac{1}{n}$, la probabilité est dite $\boxed{\text{probabilité uniforme}}$

  Dans ce cas : $\forall A \in$, $\boxed{P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}}$

- Exemple 1 On lance un dé non pipé à six faces…
  - ❋ Modéliser une telle expérience aléatoire consiste à définir l'univers Ω, la tribu $\mathcal{T}$ et la probabilité P, autrement dit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
  - ❋ Ici, a priori, implicitement $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P est la probabilité uniforme : on a un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$
  - ❋ Mais si seul nous intéresse le fait d'obtenir ou non un '6', on peut aussi choisir comme espace probabilisé : $(\Omega', \mathcal{T}', P')$ où :
    - $\Omega = \{6, \bar{6}\}$
    - $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{6\}, \{\bar{6}\}, \Omega\}$

      c'est la tribu engendré par l'événement $A = \{6\}$
    - P' probabilité sur $(\Omega', \mathcal{T}')$ entièrement définie par $(p_6 = \dfrac{1}{6}, p_{\bar{6}} = \dfrac{5}{6})$
    - D'un point de vue pratique, les résultats seront les mêmes…

d) Détermination d'une probabilité lorsque Ω est dénombrable

- ❋ Si Ω est un ensemble dénombrable muni d'une tribu $\mathcal{T}$, toute probabilité P est entièrement déterminée par la famille sommable $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs et de somme 1 où $\forall \omega \in \Omega : p_\omega = P(\{\omega\})$.
- ❋ En particulier, si $\Omega = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$, pour définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, il suffit de se donner une série $\sum p_n$ de réels positifs, convergente et de somme égale à 1 où $\forall n \in \mathbb{N}$: $p_n = P(\{x_n\})$.
- ❋ On notera que l'équiprobabilité (probabilité uniforme) est ici impossible !

- ❋ Exemple 2 **3**.

  On tire au hasard $n \in \mathbb{N}^*$ avec une probabilité $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
  - ❖ On définit ainsi implicitement une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$
  - ❖ Calculer la probabilité p_a d'obtenir un entier $n \geqslant a$ (où $a \in \mathbb{N}^*$)

- ❋ Exercice traité (BC 259) **4**.

  Montrer qu'il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ P(n+2) = \frac{6}{5} P(n+1) - \frac{1}{5} P(n)$$

2.3. Propriétés élémentaires (revisite de celles vues en M.P.S.I.)

Propriétés : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

① $P(\varnothing) = 0$

② $\forall A \in \mathcal{T} : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

③ Pour toute famille finie $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{T}^n$ d'événements incompatibles deux à deux : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

④ $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \ : \ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

⑤ $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \ : \ [A \subset B] \Rightarrow [P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B - A) = P(B) - P(A)]$

⑥ $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \ : \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⑦ $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \ : \ P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$

⑧ Pour toute famille finie $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{T}^n$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

- Démonstrations $\boxed{5}$.

2.4. Propriétés des suites d'événements

Propriété de la continuité croissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion

autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ A_n \subset A_{n+1}$,

alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

- Démonstration $\boxed{6}$.
- Exemple : on lance un dé tétraédrique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

  ⇨ Quelle est la probabilité de l'événement « le '4' finira bien par sortir » ? $\boxed{7}$.

Propriété de la continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion

autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ A_{n+1} \subset A_n$,

alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

- Démonstration $\boxed{8}$.
- Exemple : reprise $\boxed{9}$.

Inégalité de Boole (sous-additivité)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

- Il est possible que la série $\sum P(A_n)$ diverge : on considérera alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.
- Démonstration **10**.

2.5. Evénements négligeables, événements presque sûrs.

Définitions : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

❋ Un événement A est dit presque sûr si $P(A) = 1$.

❋ Un événement A est dit négligeable si $P(A) = 0$.

- Il est clair que $[A$ négligeable$] \Leftrightarrow [\overline{A}$ presque sûr$]$
- les implications suivantes sont vraies mais pas leurs réciproques : $[A = \Omega] \Rightarrow [P(A) = 1]$ et $[A = \varnothing] \Rightarrow [P(A) = 0]$

Propriété : Toute réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable..

- Démonstration **11**.

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définition

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements tels que $P(B) > 0$ (i.e. B non négligeable).

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{noté aussi } P(A \mid B)$$

- Ambiguïté de la 2nde notation : il n'existe pas d'événement $(A \mid B)$!

Propriété L'application $P_B : \mathcal{T} \to [0,1]$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$

- Démonstration **12**.
- Exemple Dans une famille de deux enfants, en supposant que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille :
  - ⇨ Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aînée est une fille ?
  - ⇨ Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ? **13**.

3.2. Inversion des conditionnements

Proposition Soient A et B deux événements non négligeables.

Alors $P_B(A)=\dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)}$

- Démonstration $\boxed{\textbf{14}}$.
- Cette formule est aussi appelée “formule de probabilité des causes” car elle permet de “remonter le temps” : si l'événement B se produit après l‘événement A, elle permet de déduire, de la probabilité $P_A(B)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $P_B(A)$ qui elle remonte cette chronologie.
- Cette formule est un cas particulier de la formule de Bayes.

- Exemple : La grippe touche 18 % des individus. Dans le Jura, on compte 30 % de personnes âgées et la grippe a touché 40 % d’entre elles.

  ⇨ Quelle est la probabilité, sachant que Berthe a attrapé la grippe, que ce soit une personne âgée ?

3.3. Formule des probabilités composées

a) Cas d’un couple d’événements

Proposition

Soient A et B deux événements d’un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

On suppose A non négligeable. Alors : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$.

- Démonstration $\boxed{\textbf{15}}$.

- Exemple Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l’urne avec une boule de la même couleur. On procède à un second tirage.

  ⇨ Quelle est la probabilité d’obtenir deux boules noires ? $\boxed{\textbf{16}}$.

b) Cas général

Théorème : **formule des probabilités composées**

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d’événements d’un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right)>0$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\ldots\times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

- Démonstration $\boxed{\textbf{17}}$.

- Exemple **18**.

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, il reçoit une décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne porte. On envisage trois hypothèses :

❋ $\mathcal{H}_1$: Le rat a une bonne mémoire : à chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment.

❋ $\mathcal{H}_2$: Le rat a une mémoire immédiate : à chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent.

❋ $\mathcal{H}_3$: Le rat n'a pas de mémoire : il choisit à chaque essai de manière équiprobable une porte.

⇨ Pour chacune de ces hypothèses, calculer la probabilité de l'événement A_k : 'le rat réussit à sortir après exactement k essais'.

.

3.4. Formule des probabilités totales

a) Cas particulier très courant

Proposition Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que $0 < P(A) < 1$. Alors : $\boxed{P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$

- Démonstration **19**.

- Exemple **20**.

Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, qui représentent 20 % de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probablité d'avoir un accident par an est 0.5 ; pour la seconde : 0.1.

⇨ Quelle est la probabilité qu'un nouvel adhérent soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

b) Cas général

Théorème : **formule des probabilités totales**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables.

Soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

- Démonstration **21**.

- Exemple **22**.

Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés, à savoir : un jeton numéroté '1', deux jetons numérotés '2', … , n jetons numérotés 'n'.

On dispose de n urnes $\mathcal{U}_i$ où $i \in [\![1, n]\!]$.

L'urne $\mathcal{U}_i$ contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.

On tire un jeton dans l'urne $\mathcal{U}$: si le jeton tiré porte le numéro 'i', on prélève une boule dans l'urne $\mathcal{U}_i$.

⇨ Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

3.5. Formule de Bayes

a) Cas d'un couple d'événement

Proposition Pour tout couple $(A,B) \in \mathcal{T}^2$ d'événements non négligeables,

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}}$$

- Démonstration (cf § 3.2 + probabilités totales) **23**.
- Exemple **24**.

Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 %. lorsque cette maladie est effectivement présente (ce qui signifie qu'il y a 99% de chances que le test soit positif si la personne est malade. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0.1 % des personnes testées.

⇨ Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?

b) Cas général

Théorème : **formule de Bayes**

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ système complet d'événements non négligeables. Soit $B \in \mathcal{T}$.

Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et $\boxed{P_B(A_j) = \dfrac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)}}$

- Démonstration **25**.
- Exemple **26**.

Une forêt se compose de trois types d'arbres : chênes (30 %), peupliers (50 %) et hêtres (20 %). Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10 % des chênes, 4 % des peupliers et 25 % des hêtres.

⇨ Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

4. Evénements indépendants

4.1. Couple d'événements indépendants

a) Définition

Définition Deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

b) Propriétés

Propriété 1 Si $P(A) \neq 0$, $[A \text{ et } B \text{ sont indépendants}] \Leftrightarrow [P_A(B) = P(B)]$.

- Démonstration, interprétation **27**.

Propriété 2 Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

- Démonstration **28**.
- Cette formule est généralisée en § 4.2b, propriété 3.

c) Exemple **29**.

Une pièce de monnaie est lancée deux fois. On considère les événements :

A : « les deux lancers ne donnent pas le même résultat »

B : « le second lancer donne 'Face' »

On envisage les deux hypothèses suivantes :

- $\mathcal{H}_1$: la pièce est parfaitement équilibrée.
- $\mathcal{H}_2$: la pièce tombe sur 'Pile' dans 75 % des cas.

⇨ Pour chaque hypothèse, les événements A et B sont-ils indépendants ?

4.2. Famille d'événements indépendants

a) Définition

Définition Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements au plus dénombrable.

On dit que c'est une famille :

- d'événements deux à deux indépendants si

$$\forall (i,j) \in I^2 : \ [i \neq j] \Rightarrow [P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)]$$

- d'événements mutuellement indépendants si pour toute famille finie J incluse dans I : $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$.

b) Propriétés

Propriété 1

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

- Démonstration ; réciproque fausse (contre-exemple) **30**.

Propriété 2 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(A_k) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

- Démonstration **31**.

Propriété 3 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ l'est aussi, où $\forall i \in I \ : \ B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

- Démonstration **32**.

c) Exemple **33**.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un '6'.

⇨ Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

4.3. Schéma de Bernoulli, épreuves répétées

❈ Soit une expérience à deux issues S (succès) et E (échec) ; on la modélise par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où

$$\Omega = \{S, E\} \ ; \ \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega) \ : \ P \text{ définie par } \begin{cases} P(\{S\}) = p \\ P(\{E\}) = q \end{cases} \text{ où } \ p + q = 1$$

❈ Toute épreuve de ce type (à deux issues) s'appelle **épreuve de Bernoulli**.

❈ On répète cette expérience n fois, en considérant les résultats successifs indépendants : on parle d' « épreuves répétées » : on travaille donc ici sur l'espace probabilisé $(\Omega^n, \mathcal{T}', Q)$ où

⇨ $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(\Omega^n)$

⇨ Les événements élémentaires sont $\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\}$ où

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : \omega_i \in \{S, E\}$$

⇨ La probabilité Q est définie sur les événements élémentaires par :

$$\forall (\omega_i)_{i\in[\![1,n]\!]} : Q(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\}) = P(\omega_1) \times P(\omega_2) \times \ldots \times P(\omega_n)$$

❈ La probabilité de l'événement « on obtient k succès puis $n-k$ échecs » est donc $p^k q^{n-k}$.

❈ La probabilité de l'événement « on obtient k succès (peu importe l'ordre) » est alors $\boxed{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$.

❈ Toute suite de n épreuves indépendantes à deux issues s'appelle **schéma de Bernoulli** ou **épreuves répétées de Bernoulli.**.

Explications **34**.