MP Programme de colle n° 6

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

5. Compacité
6. Connexité par arcs
7. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

5.1.c

Théorème de Bolzano-Weierstarss dans $\mathbb{C}$: De toute suite bornée de nombres complexes, on peut extraire une suite convergente.

…en considérant connu le même théorème dans $\mathbb{R}$.

5.3

Propriété 1 : Tout compact est fermé et borné

5.3

Propriété 2 : Toute partie fermée d'un compact est compacte.

5.4

Théorème : Soit $f : E \to F$ une application continue.
Si A est une partie compacte de E, $f(A)$ est une partie compacte de F.

Théorème de Heine :
toute application continue sur un compact est uniformément continue

6.3.a

Toute partie convexe est connexe par arcs

Toute partie étoilée est connexe par arcs

6.4

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}(A,F)$ où E et F sont des e.v.n.. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

7.4

Théorème 5 :Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Théorème 6 : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-e.v.n. normés de dimension finie.
Alors toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est continue.