

Dérivation

Marc SAGE

9 août 2008

Table des matières

1	Taylor-Young revisited	2
2	Dérivées discrètes et une caractérisation des entiers naturels	2
3	Dérivée à droite et croissance	3
4	Pseudo dérivée seconde	3
5	Étude d'une limite sous une condition de dérivabilité	5
6	Cette fois, on donne la limite et il faut montrer la dérivabilité	5
7	Rolle généralisé	6
8	Théorème de Darboux, version Rolle-éclair	7
9	Du Rolle, encore du Rolle...	7
10	Une somme de signaux électriques s'annule une infinité de fois	8
11	Un limite dans Taylor-Lagrange	8
12	Une suite diagonale de zéros	9
13	Un théorème d'analyticité de Bernstein	10
14	Vers les inégalités de Kolmogorov	11
15	Une fonction continue nulle part dérivable	14
16	Orthogonalité sur la sphère	15
16.1	Le début de la fin	15
16.2	Welcome into space	17

1 Taylor-Young revisited

1. Soit $n \geq 0$ et f de classe C^n au voisinage d'un point a . Montrer que, pour h petit, on a

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + o_{h \rightarrow 0}(h^n).$$

2. Soit $n \geq 1$ et f de classe C^{n-1} au voisinage d'un point a . Si $f^{(n)}(a)$ existe, montrer que

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + o_{h \rightarrow 0}(h^n).$$

Solution proposée.

On se ramène par translation à $a = 0$.

1. Quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ qui a les mêmes dérivées sauf la n -ième qui est nulle, il suffit d'étudier le cas où $f^{(n)}(0) = 0$.

On montre alors que le reste intégral de

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

est un $o(x^n)$. Soit pour cela $\varepsilon > 0$. $f^{(n)}$ étant continue, il y a un $\delta > 0$ tel que $|x| < \delta \implies |f^{(n)}(x)| < \varepsilon$. Pour un tel x , il vient

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{\varepsilon}{n!}, \text{ CQFD.}$$

2. Par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, la définition de $f'(0)$ équivaut à l'écriture $f(x) - f(0) = f'(0)x + o(x)$.

Supposons le résultat acquis pour un $n \geq 1$. Soit f de classe C^n telle que $f^{(n+1)}(0)$ existe. On veut que l'expression $f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ soit un $o(x^{n+1})$. Or, en dérivant, on tombe sur un $o(x^n)$ par hypothèse de récurrence appliquée à f' (qui est bien C^{n-1} et telle que $f'^{(n-1)}(0) = f^{(n)}(0)$ existe).

Il ne reste plus qu'à intégrer entre 0 et x . À gauche, on retombe sur nos pieds. À droite, il suffit de montrer que

$$f = o_0(g) \implies \int_0^x f = o_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^x |g| \right).$$

Soit pour cela $\varepsilon > 0$; il y a un $\delta > 0$ tel que $|x| < \delta \implies |f(x)| \leq \varepsilon g(x)$. Alors, pour un tel x , on aura

$$\left| \int_0^x f \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \varepsilon |g(t)| dt = \varepsilon \int_0^x |g|, \text{ CQFD.}$$

Remarque. Ces énoncés se prolongent bien évidemment aux fonctions à valeurs dans un Banach (afin d'avoir une intégrale). Il est plus difficile d'obtenir que la seconde version reste valable pour f à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque.

2 Dérivées discrètes et une caractérisation des entiers naturels

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont de signe constant. Montrer que les dérivées¹ de la suite $u := f|_{\mathbb{N}}$ sont de même signe que celles de f .

¹Rappelons que la dérivée discrète d'une suite u est la suite δu définie par $[\delta u]_n := u_{n+1} - u_n$. Cela doit faire penser à un taux d'accroissement en écrivant $\frac{u_{n+1} - u_n}{(n+1) - (n)}$.

2. Soit $\alpha > 0$ un réel tel que n^α est entier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que α est entier.

Solution proposée.

1. Montrons le résultat par récurrence sur l'ordre k de la dérivation.

Pour $k = 0$, il n'y a rien à faire.

Supposant le résultat pour un $k \geq 0$, soient f et u comme dans l'énoncé. La suite $\delta^{k+1}u = \delta^k(\delta u)$ est alors du signe de $g^{(k)}$ où g vérifie $[\delta u]_n = g(n)$, mettons $g := f(\cdot + 1) - f$. La dérivée $g^{(k)}$ vaut donc $f^{(k)}(\cdot + 1) - f^{(k)}$ qui est du signe de $f^{(k+1)}$ par le théorème des accroissements finis.

2. Posons $f : x \mapsto x^\alpha$. Sa k -ième dérivée vaut $f^{(k)}(x) = \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k}$ qui est positive tant que $k \leq \lceil \alpha \rceil$ et négative pour $k = \lceil \alpha \rceil + 1$. Si α n'est pas entier, $f^{(\lceil \alpha \rceil + 1)}$ devient strictement négative, donc la suite $\delta^{\lceil \alpha \rceil + 1}u$ est < 0 , i. e. la suite $\delta^{\lceil \alpha \rceil}u$ décroît strictement. Or, cette dernière est du signe de $f^{(\lceil \alpha \rceil)} > 0$, ce qui n'est pas possible vu que u (et donc ses dérivées) est à valeurs entières.

Les deux exercices qui suivent illustrent l'utilisation de la *méthode des perturbations*.

3 Dérivée à droite et croissance

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur un intervalle $I = [a, b]$, dérivable à droite en tout point de I et telle que la dérivée à droite $f_d(x)$ est toujours ≥ 0 .

Montrer que f est croissante.

Solution proposée.

Montrons déjà le résultat dans le cas où $f_d > 0$.

On fixe $x < y$ dans I . f est continue sur $[x, y]$, donc y atteint son sup en un $c \in [x, y]$; on veut bien sûr $c = y$ pour que $f(y) = f(c) \geq f(x)$. Si ce n'est pas le cas, on peut caser une suite $c_n \rightarrow c$ à droite de c et regarder

$$f'_d(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(c_n) - f(c)}^{\leq 0 \text{ car } f(c) \text{ maximum}}}{\underbrace{c_n - c}_{\geq 0 \text{ par construction}}} \leq 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $f'_d > 0$.

Pour se ramener à une inégalité stricte, on perturbe f'_d en lui rajoutant un $\varepsilon > 0$: cela peut se faire en posant $g = f + \varepsilon \text{Id}$, qui vérifie $g'_d = f'_d + \varepsilon > 0$, donc qui est croissante par ce qui précède. On en déduit, pour $x < y$ dans I ,

$$f(x) \leq f(y) + \varepsilon(y - x);$$

ceci tenant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $f(x) \leq f(y)$, ce qui montre la croissance de f .

4 Pseudo dérivée seconde

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une pseudo dérivée seconde² si la limite

$$f^{[2]}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

²Le terme de $f^{[2]}$ peut être réécrit sous la forme

$$\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h},$$

ce qui fait naturellement penser à une dérivée de dérivée, d'où le terme de pseudo dérivée seconde.

existe pour tout réel $x \in [a, b]$; $f^{[2]}$ est appelée *pseudo dérivée seconde* de f .

On sait que la vraie dérivée seconde vérifie les propriétés

$$f'' > 0 \implies f \text{ max aux bornes de } I \quad (\text{convexité})$$

et

$$f \text{ quadratique ssi } f'' \text{ existe et est constant.}$$

On demande de montrer que ceci tient encore pour la pseudo dérivée seconde.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $f^{[2]}$ existe et est > 0 , alors les seuls maxima de f sont aux bornes de I .
2. Montrer que f est quadratique ssi $f^{[2]}$ existe et est constant.

Solution proposée.

1. Supposons que f admette un maximum en $c \in \overset{\circ}{I}$. Pour $h > 0$, on a alors

$$\frac{\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - \frac{f(c)-f(c-h)}{h}}{h} < 0,$$

d'où $f^{[2]}(c) \leq 0$, absurde par hypothèse.

2. Pour $f = \lambda$ constant, on a

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{\lambda + \lambda - 2\lambda}{h^2} = 0;$$

pour $f = \text{Id}$ linéaire, on a

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{(x+h) + (x-h) - (2x)}{h^2} = 0;$$

pour $f(x) = x^2$ quadratique, on a

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2) + (x^2 - 2xh + h^2) - 2x^2}{h^2} = 1.$$

On en déduit que la pseudo dérivée seconde d'un trinôme $\lambda x^2 + \mu x + \nu$ est constante et vaut λ .

Réciproquement, soit f telle que $f^{[2]} \equiv \lambda$ constant.

Si f doit être un trinôme $ux^2 + vx + w$, la condition $f^{[2]} = \lambda$ impose $u = \lambda$; l'application $g : x \mapsto f(x) - \lambda x^2$ doit donc être affine. En fixant $a < b$ dans I , nécessairement g doit valoir

$$\alpha := g(a) + (\text{Id} - a) \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

On s'intéresse donc à la différence $\delta := \alpha - g$. Puisque α est affine, on sait déjà que $\alpha^{[2]}$ existe et vaut 0 partout, et par conséquent $\delta^{[2]} = 0$. On veut en déduire $\delta = 0$.

On va perturber δ en lui rajoutant un terme quadratique en εx^2 où $\varepsilon > 0$: posons

$$\tilde{\delta} : x \mapsto \delta(x) + \varepsilon(x^2 + \lambda x + \mu)$$

où λ et μ seront à ajuster au besoin. Alors $\tilde{\delta}^{[2]} = \varepsilon > 0$, donc (d'après ce qui précède) $\tilde{\delta}$ est maximum aux bornes de $[a, b]$; c'est maintenant que l'on choisit λ et μ pour que $\tilde{\delta}(a) = \tilde{\delta}(b) = 0$, ce qui donne $\tilde{\delta} \leq 0$, et ce $\forall \varepsilon > 0$, d'où $\delta \leq 0$. On montrerait de même que $\delta \geq 0$ en prenant $\varepsilon < 0$ et par conséquent la différence δ vaut bien 0 comme souhaité.

Il en résulte que $g(x) - \lambda x^2$ est affine, d'où le caractère quadratique de f .

Remarque On peut aussi parler de *pseudo dérivée première* en posant (lorsqu'elle existe)

$$f^{[1]}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

L'implication « dérivable » \implies « pseudo dérivable » est aisée (faire un DL), mais la réciproque est fautive (prendre la valeur absolue en 0).

5 Étude d'une limite sous une condition de dérivabilité

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Que dire de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) ?$$

Solution proposée.

Écrivons les hypothèses :

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + x f'(0) + x \varepsilon(x) = x f'(0) + x \varepsilon(x) \text{ où } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

On en déduit

$$\sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \sum_{p=1}^n \left[\frac{p}{n^2} f'(0) + \frac{p}{n^2} \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right] = \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{p=1}^n p + \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) = \underbrace{\frac{f'(0)}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}}_{\rightarrow \frac{1}{2} f'(0)} + \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right).$$

Pour analyser le terme restant, fixons un $\delta > 0$. Pour n assez grand, $\left| \frac{p}{n^2} \right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, de sorte que $\left| \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right| < \delta$, d'où

$$\left| \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} \left| \varepsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2} \delta = \delta,$$

ce qui montre que le second terme tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$. Il en résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0).$$

Remarque. Si l'on s'était contenté de la notation $o(x)$, il aurait été difficile de mener la sommation proprement car le x dans $o(x)$ dénote à la fois la fonction devant laquelle le o est négligeable et la variable de cette fonction.

6 Cette fois, on donne la limite et il faut montrer la dérivabilité

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0. On suppose l'existence d'un $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$l := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\lambda x)}{x} \text{ existe.}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Solution proposée.

Les hypothèses incitent à découper le taux d'accroissement en

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \sum_{k=0}^n \frac{f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k+1} x)}{x} + \frac{f(\lambda^{n+1} x) - f(0)}{x} \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda^k \left[\frac{f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k+1} x)}{\lambda^k x} \right] + \frac{f(\lambda^{n+1} x) - f(0)}{x}. \end{aligned}$$

À x fixé, le terme $\frac{f(\lambda^{n+1}x) - f(0)}{x}$ tend vers 0 par continuité de f en 0, et chacun des termes $\frac{f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k+1}x)}{\lambda^k x}$ s'apparente à l pour x petit car $|\lambda^k x| \leq |x|$. Ceci nous permet d'intuiter

$$f'(0) = \sum_{k \geq 0} \lambda^k l + 0 = \frac{l}{1 - \lambda}.$$

Vérifions : pour $\varepsilon > 0$ donné, il y a un $\delta > 0$ tel que

$$|x| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(\lambda x)}{x} - l \right| < \varepsilon,$$

d'où, pour $|x| < \delta$ (en reprenant les mêmes calculs),

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{l}{1 - \lambda} \right| &= \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - l \sum_{k=0}^n \lambda^k - l \sum_{k>n} \lambda^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \lambda^k \underbrace{\left| \frac{f(\lambda^k x) - f(\lambda^{k+1}x)}{\lambda^k x} - l \right|}_{\leq \varepsilon \text{ car } |\lambda^k x| \leq |x| < \delta} + \underbrace{\left| \frac{f(\lambda^{n+1}x) - f(0)}{x} \right|}_{\leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand (} f \text{ est continue en 0)}} + \underbrace{|l| \sum_{k>n} \lambda^k}_{\leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \lambda^k \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \left(\frac{1}{1 - \lambda} + 2 \right) \varepsilon, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

Remarque. Il est aisé de voir que, réciproquement, une application dérivable en 0 satisfait les hypothèses de l'énoncé :

$$\frac{f(x) - f(\lambda x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \lambda \frac{f(\lambda x) - f(0)}{\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} (1 - \lambda) f'(0).$$

On retrouve ainsi la valeur $f'(0)$ par la brève analyse ci-dessus ; les calculs que nous avons effectués pour intuiter $f'(0)$ nous ont cependant été utiles.

Nous attaquons à présent quatre exercices où Rolle fait parler de lui.

7 Rolle généralisé

Soit I un intervalle de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On se donne une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue³ sur \overline{I} , dérivable sur \mathring{I} , et telle que $f(\inf I) = f(\sup I)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f' s'annule sur \mathring{I} .

Solution proposée.

Il s'agit bien évidemment de se ramener au cas où I est un segment. Pour cela, il suffit de faire un changement de paramètres envoyant I et $f(I)$ sur des intervalles **bornés**. Comme l'on veut des résultats sur les dérivées, il est judicieux de choisir un changement de variables qui est gentil avec les propriétés de la dérivation, *i. e.* un difféomorphisme. Les exemples abondent, on citera par exemple les fonctions tangente circulaire et hyperbolique ainsi que leurs réciproques.

Soit donc $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ un tel difféo. L'application $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(I) \longrightarrow]-1, 1[$ se prolonge alors par continuité au **segment** $\varphi(\overline{I})$ et prend (par hypothèse sur f) les mêmes valeurs aux extrémités de ce dernier. Comme $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est par ailleurs dérivable sur $\varphi(I)$, on peut lui appliquer Rolle : sa dérivée s'annule en un point $\varphi(a)$ de l'intérieur de $\varphi(I)$. Puisque φ est un difféo, sa dérivée et celle de φ^{-1} ne s'annulent jamais, donc se simplifient :

³les limites en $\inf I$ et $\sup I$ pouvant être infinies

$$\begin{aligned} [\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}]'(\varphi(a)) &= 0 \\ [\varphi'(*) \times (f' \circ \varphi^{-1}) \times (\varphi^{-1})'](\varphi(a)) &= 0 \\ f'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que $\varphi(a) \in \text{Int } \varphi(I) = \varphi(\overset{\circ}{I})$, d'où $a \in \overset{\circ}{I}$ par injectivité de φ , CQFD.

8 Théorème de Darboux, version Rolle-éclair

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable (pas forcément \mathcal{C}^1). Montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution proposée.

Soit $f'(a)$ et $f'(b)$ deux points dans $\text{Im } f'$ et $\gamma \in]f'(a), f'(b)[$. En introduisant la fonction

$$\varphi := f - \gamma \text{Id}$$

dérivable sur $[a, b]$, on observe que

$$\varphi'(a)\varphi'(b) = (f'(a) - \gamma)(f'(b) - \gamma) < 0,$$

de sorte que φ n'est pas monotone ; puisque φ est continue, φ ne saurait être injective, d'où par Rolle un $c \in]a, b[$ annulant φ' , i. e. $f'(c) = \gamma$. Ploum.

9 Du Rolle, encore du Rolle...

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant exactement n zéros

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On suppose de plus f dérivable n fois.

Montrer que pour tout $\lambda \in [a, b]$, il y a un $c \in [a, b]$ tel que

$$f(\lambda) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^n (\lambda - a_i).$$

Solution proposée.

Le c cherché vérifie $f^{(n)}(c) = n! \frac{f(\lambda)}{\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)}$ (le cas où λ vaut l'un des a_i est trivial). L'idée est d'interpréter le $n!$ comme la dérivée n -ième d'un polynôme P de degré n , de sorte que c soit un zéro de la n -ième dérivée de

$$\varphi = f - P \frac{f(\lambda)}{\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)}.$$

Il suffit donc de choisir P tel que φ ait $n+1$ zéros et de conclure avec Rolle.

Des zéros potentiels sont les a_i et λ , et on trouve rapidement que $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ convient :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\lambda) \frac{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}{\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)}.$$

Remarque. On vient de montrer qu'une fonction ayant n zéros a_1, \dots, a_n s'apparente au polynôme $\prod (X - a_i)$ modulo un paramètre $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ qui joue le rôle de coefficient dominant. C'est donc une sorte de formule de Taylor-Lagrange multiplicative.

10 Une somme de signaux électriques s'annule une infinité de fois

Soit $n \geq 0$ un entier, $\omega_0, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}^*$ des pulsations non nulles, $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ des phases et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des amplitudes.

Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cos(\omega_i x + \varphi_i)$$

admet une infinité de zéros.

On pourra d'abord traiter le cas d'un unique signal synchrone parasité par un bruit du fond.

Solution proposée.

Quitte à regrouper les signaux de même pulsation selon

$$\begin{aligned} \lambda \cos(\omega x + \varphi) + \mu \cos(\omega x + \psi) &= (\lambda \cos \varphi + \mu \cos \psi) \cos \omega x - (\lambda \sin \varphi + \mu \sin \psi) \sin \omega x \\ &= \nu \cos(\omega x - \chi) \text{ avec } \nu \text{ et } \chi \text{ bien choisis,} \end{aligned}$$

puis à déphaser de π , on peut supposer les ω_i deux à deux distincts et tous les λ_i positifs.

On suit l'indication qui nous incite à regarder le cas où l'une des amplitudes prédomine sur les autres, par exemple

$$\lambda_0 > \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

On en déduit que $f(x) > 0$ là où le signal dominant est maximal :

$$f\left(\frac{-\varphi_0}{\omega_0}\right) = \underbrace{\lambda_0 \cos\left(\omega_0 \frac{-\varphi_0}{\omega_0} + \varphi_0\right)}_{=1} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i \cos\left(\omega_i \frac{-\varphi_0}{\omega_0} + \varphi_i\right)}_{\geq -1} \geq \lambda_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0,$$

et de même $f(x) < 0$ là où le signal dominant est minimal (en $x = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_0}$ par exemple), ce qui fournit un zéro pour f entre chaque extremum de $\lambda_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0)$, ce qui en fait beaucoup si l'on pense subtilement à invoquer la périodicité de $\lambda_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0)$.

Pour se ramener au cas précédent, on intègre f pour faire sortir du $\frac{1}{\omega_i}$ devant les amplitudes, ce qui a pour effet notoire de modifier ces dernières de façon géométrique avec des coefficients $\frac{1}{\omega_i}$ tous distincts. Pour N assez grand, l'amplitude du signal de plus petite pulsation domine celle des autres, d'où une infinité de zéros pour une N -ième primitive de f .

Pour redescendre à f , on utilise le lemme suivant : si une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable s'annule une infinité de fois, alors φ' aussi. En effet, si on se donne un entier k quelconque, φ s'annule au moins k fois, donc Rolle nous donne $k - 1$ zéros pour φ' , et ceci pour tout entier k , donc φ' s'annule une infinité de fois, *CQFD*⁴. Il reste à appliquer N fois le lemme avec φ une N -ième primitive de f .

Il est temps d'illustrer la puissance des formules soit-disant rébarbatives de Taylor, Lagrange, Young et Maclaurin⁵. Accrochez-vous, on y sera jusqu'à la fin !

11 Un limite dans Taylor-Lagrange

Soit f une fonction C^∞ et n un entier naturel. On peut écrire l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n sur le segment $[0, x]$ pour tout réel x :

$$\exists \lambda_x \in]0, 1[, \quad f(x) = \sum_{0 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(n)}(\lambda_x x)}{n!} x^n.$$

⁴Nous mettons au défi le lecteur de trouver un argument plus concis pour démolir ce lemme qui a l'air complètement évident.

⁵Que nos lecteurs français ne soient pas surpris à la lecture du nom de Maclaurin, leurs confrères anglophones le sont tout autant à celle du nom de Lagrange.

On suppose que les dérivées successives de $f^{(n)}$ ne sont pas toutes nulles en 0. Calculer $\lim_0 \lambda$.

Solution proposée.

Considérons le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $f^{(n+k)}(0) \neq 0$. L'information que nous souhaitons obtenir étant de nature locale, il est naturel d'invoquer Taylor-Young qui, à l'ordre $n+k$ va s'écrire presque comme l'égalité définissant λ_x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{0 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} x^{n+k} + o(x^{n+k}) \\ \Rightarrow \frac{f^{(n)}(\lambda_x x)}{n!} x^n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} x^{n+k} + o(x^{n+k}) \\ \Rightarrow f^{(n)}(\lambda_x x) - f^{(n)}(0) &= \frac{n!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0) x^k + o(x^k). \end{aligned}$$

On peut obtenir une autre expression de la quantité de gauche par Taylor-Young appliqué à $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(y) = f^{(n)}(0) + 0 + \frac{f^{(n+k)}(0)}{k!} y^k + o(y^k).$$

Prenant $y = \lambda_x x$, il vient, en prenant les équivalents⁶ lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n+k)}(0)}{k!} (\lambda_x x)^k &\sim \frac{n!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0) x^k, \\ \text{d'où la limite } \lambda_x &\sim \sqrt[k]{\frac{1}{\binom{n+k}{n}}}. \end{aligned}$$

Remarque. Cet exercice donne ainsi un peu d'information sur le fameux c qui apparaît dans le reste de Taylor-Lagrange

$$f(b) - \sum_{0 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

et sur lequel on ne sait généralement rien. D'ailleurs, si l'on utilise ces formules, c'est que l'on n'a pas envie de savoir ! D'où les notations floues $*$ ou $?$ que nous utiliserons par la suite.

12 Une suite diagonale de zéros

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = \lim_{\infty} f = 0$.

Montrer qu'il y a une suite (a_n) strictement croissante telle que $f^{(n)}(a_n) = 0$ pour tout n .

Solution proposée.

On procède par récurrence.

Pour $n = 0$, il n'y a rien à faire à part poser $a_0 := 0$.

Donnons-nous à présent $a_0 < \dots < a_n$ comme dans l'énoncé (pour un $n \geq 0$) et supposons par l'absurde que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas. Par continuité, elle garde un signe constant, de sorte que $f^{(n)}$ est strictement monotone. Vu que $f^{(n)}$ s'annule en x_n , elle est non nulle ailleurs, de sorte que le reste $\frac{f^{(n)}(*)}{n!} x^n$ de Taylor-Lagrange appliqué sur un segment $[a, a+x]$ ne contenant pas a_n est toujours non nul :

$$f(a+x) - \sum_{0 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} x^i = \frac{\overbrace{f^{(n)}(*)}^{\neq 0}}{n!} x^n.$$

⁶Il est important de noter que la quantité $\lambda_x x$ tend bien vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$.

Puisque $\lim_{\infty} f = 0$, le terme de gauche est un $o(x^n)$, donc le terme de droite aussi, d'où

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(*) = 0.$$

D'après la stricte monotonie de $f^{(n)}$, on doit avoir $\lim_{x \rightarrow \infty} (*) = a_n$; cette limite devant rester dans $[a, \infty[$, on obtient une contradiction en choisissant $a > a_n$.

13 Un théorème d'analyticité de Bernstein

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont positives. Montrer que pour tout réel a , il y a un voisinage de a sur lequel⁷

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

2. Même question si le domaine de f est un intervalle ouvert.
3. On suppose à présent que seules les dérivées paires de $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ sont positives. Même question.

Solution proposée.

1. Si l'on montre le résultat pour $a = 0$, il suffira de l'appliquer à $f(\cdot + a)$ pour obtenir la généralisation souhaitée. On se bornera donc au cas $a = 0$.

Il s'agit alors de montrer que, pour tout x dans un certain voisinage de 0, la différence

$$f(x) - \sum_{0 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Or, Taylor-Lagrange nous dit que cette différence se met sous la forme

$$\frac{f^{(n)}(*)}{n!} x^n \text{ pour un certain réel } *.$$

Pour majorer $f^{(n)}(*)$, comme l'on contrôle le signe des dérivées, Taylor-Lagrange devrait nous aider. L'appliquer entre $*$ et $* + r$ pour un r positif (toujours pour contrôler les signes) donne

$$f(*+r) - f(*) = \underbrace{\sum_{1 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(*)}{i!} r^i}_{\geq 0} + \frac{f^{(n)}(*)}{n!} r^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(?)}{(n+1)!} r^{n+1}}_{\geq 0} \geq \frac{f^{(n)}(*)}{n!} r^n.$$

On en déduit la majoration suivante du reste :

$$\left| \frac{f^{(n)}(*)}{n!} x^n \right| \leq \left(\frac{|x|}{r} \right)^n (f(*+r) - f(*)).$$

Il reste à choisir rétrospectivement $r > |x|$ pour faire tendre le terme de droite vers 0.

2. Notons I l'intervalle de définition. Quitte à considérer $f(\cdot - a)$ définie sur $I - a$, on se ramène au cas $a = 0$.

La démarche est exactement la même, sauf qu'on ne peut pas choisir notre r comme on veut (s'il est trop grand, $* + r$ peut sortir de I). On va donc jouer également sur $|x|$ afin que le quotient $\frac{|x|}{r}$ soit < 1 . Il s'agit de prendre x petit et r grand. Déjà, on peut toujours se restreindre à un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ vu que I est ouvert. En se souvenant que le réel $*$ doit tomber dans l'intervalle $]-|x|, |x|$, on voit que $* + \frac{\varepsilon}{2}$ reste dans I dès que $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui revient à prendre $r = \frac{\varepsilon}{2}$ et ce qui suffit à notre bonheur.

⁷On dit alors que f est *analytique* en a .

3. On peut déjà appliquer ce qui précède à la fonction paire $f^{\natural} : x \mapsto f(x) + f(-x)$: ses dérivées sont toutes positives (ou nulles), donc f est analytique. Pour passer de f^{\natural} à f , on compare les restes. Ceux de Lagrange sont difficiles à exploiter car les points où sont évalués $f^{\natural(n)}$ et $f^{(n)}$ ne sont pas nécessairement les mêmes. Pour pallier ce défaut de précision, on invoque les restes intégraux où tout apparaît.

Taylor-intégral entre 0 et x nous dit que

$$f(x) = \sum_{0 \leq i \leq 2n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n)}(t) dt}_{:=r_{2n}(f)}.$$

Nous avons pris un ordre pair pour la dérivée dans l'intrégrand afin de pouvoir utiliser l'hypothèse

$$f^{(2n)} \leq f^{(2n)} + f^{(2n)}(-\cdot) = f^{\natural(2n)}.$$

Il vient ainsi $r_{2n}(f) \leq r_{2n}(f^{\natural}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car f^{\natural} est analytique.

Il reste à montrer que $r_{2n+1}(f) \rightarrow 0$ pour conclure. Or, la différence $r_{2n+1}(f) - r_{2n}(f)$ vaut $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \leq \frac{f^{\natural(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$ qui tend vers 0 comme terme général d'une série convergente vu que f^{\natural} est analytique.

14 Vers les inégalités de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ . On note

$$M_k := \left\| f^{(k)} \right\|_\infty$$

le *supremum* (éventuellement infini) de $|f^{(k)}|$ pour k entier.

On suppose que M_0 et M_n sont finis pour un entier $n \geq 0$.

1. Montrer que tous les M_k sont finis pour $0 \leq k \leq n$. On pourra s'inspirer du cas $n = 2$.
2. On suppose ici $n = 2$. Montrer l'inégalité de Hadamard (1914) :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

3. Montrer dans le cas général les inégalités suivantes :

$$\forall k \in [0, n], M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

4. Dans le cas $n = 2$, peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$ dans l'inégalité d'Hadamard ? Même question si l'on restreint nos fonctions (et leurs dérivées) à \mathbb{R}^+ .

Solution proposée.

1. Regardons comme suggéré le cas $n = 2$ (il n'y rien à faire pour $n = 0$ ou 1). Il s'agit d'exprimer f' (sur qui on *veut* de l'information) à l'aide de f et f'' (sur qui on *a* de l'information). Taylor-Lagrange est fait pour ça : pour un réel x et un accroissement $h \neq 0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(*) , \text{ d'où (en isolant } f') \\ |f'(x)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(*) \right| \leq 2 \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2 < \infty. \end{aligned}$$

Pour un réel $h \neq 0$ fixé, notre $|f'(x)|$ se retrouve borné, *CQFD*.

Dans le cas général, on va appliquer de la même façon Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ puis isoler les termes en f et $f^{(n)}$. Comme l'on souhaite exprimer chaque $f^{(k)}$ en fonction de ces derniers, il serait plus judicieux d'écrire *plusieurs* égalités de Taylor-Lagrange, ce afin d'avoir un système que l'on espère inverser. Avanti !

Soit h_2, \dots, h_n des accroissements tous distincts (par exemple $h_k = k$). Taylor-Lagrange entre un réel x et $x + h_k$ nous donne

$$\sum_{1 \leq i < n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h_k^i = f(x + h_k) - f(x) - \frac{f^{(n)}(*)}{n!}.$$

On a devant nous un système en les variables $\frac{f^{(i)}(x)}{i!}$. Pour y voir plus clair, notons $\theta_k(x)$ les termes de droite (pour $2 \leq k \leq n$), lesquels sont bornés par hypothèse. Notre système s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} h_2^2 & h_2^3 & \dots & h_2^n \\ h_3^2 & h_3^3 & \dots & h_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n^2 & h_n^3 & \dots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{f'(x)}{1!} \\ \frac{f''(x)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2(x) \\ \theta_3(x) \\ \vdots \\ \theta_n(x) \end{pmatrix}.$$

La matrice est un Vandermonde, inversible car l'on a pris les h_i distincts. On peut donc inverser et écrire

$$\begin{pmatrix} \frac{f'(x)}{1!} \\ \frac{f''(x)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = H \times \Theta(x) \text{ où } \begin{cases} H \text{ est une matrice fixe} \\ \Theta(x) \text{ est un vecteur borné} \end{cases}.$$

Il en résulte que le vecteur de gauche est borné, ce qui conclut.

2. Regardons encore une fois le cas $n = 2$. Nous souhaitons obtenir (faire $k = 1$)

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Reprenons pour cela la majoration obtenue lors de la première question :

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}.$$

On aimerait bien faire sauter les h . Pour cela, il serait agréable transformer notre somme en produit. L'inégalité arithmético-géométrique $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ nous permet cela, mais elle est dans le mauvais sens ; qu'à cela ne tienne, on choisit h pour avoir le cas d'égalité, lequel est réalisé rappelons-le ssi $a = b$. On prend donc h vérifiant $\frac{2M_0}{h} = \frac{M_2h}{2}$, ce qui donne

$$|f'(x)| \leq 2\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 = 2\sqrt{2\frac{M_0}{h} \frac{h}{2}M_2} = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Ce n'est pas suffisant ! Il va donc falloir raffiner notre démarche.

Cela peut se faire en écrivant Taylor-Lagrange d'un côté et de l'autre de notre réel x , puis en prenant la différence pour tuer le terme en $f(x)$ qui nous donnait trop de M_0 dans notre inégalité (tout en priant pour que la contribution supplémentaire en M_2 soit moindre, mais la présence du $\frac{1}{2}$ devrait nous rassurer) :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(?) \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(?) \end{cases}, \text{ d'où} \\ f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}(f''(?) - f''(?)), \text{ ce qui donne} \\ |f'(x)| &\leq \frac{2M_0}{2h} + \frac{h}{4}2M_2. \end{aligned}$$

En choisissant un bon h comme un peu plus haut, on réalise l'égalité, d'où

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h\frac{M_2}{2} = 2\sqrt{\frac{M_0}{h} h\frac{M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}, \text{ CQFD.}$$

3. Pour le cas général, raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$ (le cas $n = 0$ ou 1 est trivial). La question 2 venant de traiter le cas $n = 2$, supposons le résultat pour un $n \geq 2$ et considérons une application f bornée de classe C^{n+1} telle que M_{n+1} soit fini. Fixons un entier k entre 0 et $n+1$. L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire une égalité très proche de celle souhaitée :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

On veut remplacer le facteur en M_n par du M_{n+1} . On dispose pour ce faire de l'inégalité

$$M_n \leq \sqrt{2M_{n-1}M_{n+1}},$$

mais voilà du M_{n-1} qui pointe son nez. On le tue en invoquant

$$M_{n-1} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{1-\frac{1}{n}}.$$

Il ne reste plus qu'à tout mettre ensemble avec les bonnes puissances. Pour alléger les calculs, notons $(M, a, b, c,) := (M_0, M_{n-1}, M_n, M_{n+1})$. Déjà, les deux dernières inégalités donnent

$$b^2 \leq 2ac \leq 2 \left(2^{\frac{n-1}{2}} M^{\frac{1}{n}} b^{1-\frac{1}{n}} \right) c = 2^{\frac{n+1}{2}} M^{\frac{1}{n}} b^{1-\frac{1}{n}} c.$$

Si b est non nul, on peut l'isoler :

$$b^{1+\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{n+1}{2}} M^{\frac{1}{n}} c,$$

inégalité qui reste valable pour $b = 0$. Il reste à incorporer dans le $b^{\frac{k}{n}}$ de la première inégalité. Pour ce faire, on élève à la puissance $\frac{k}{n+1}$, ce qui donne

$$b^{\frac{k}{n}} \leq 2^{\frac{k}{2}} M^{\frac{k}{n(n+1)}} c^{\frac{k}{n+1}}.$$

Il en résulte (en réécrivant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

$$\begin{aligned} M_k &\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M^{1-\frac{k}{n}} b^{\frac{k}{n}} \\ &\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M^{1-\frac{k}{n}} \left(2^{\frac{k}{2}} M^{k(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})} c^{\frac{k}{n+1}} \right) \\ &= 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M^{1-\frac{k}{n+1}} c^{\frac{k}{n+1}}, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

4. La réponse est non. Pour essayer d'atteindre l'égalité, on va chercher à maximiser M_1 à M_0 et M_2 constants. Pour faire simple, on peut chercher des bouts de paraboles. Un moyen raisonnable pour obtenir un grand M_1 est de suivre le graphe de $x \mapsto x^2$ depuis l'origine tant qu'on peut, *i. e.* tant que l'on n'a pas dépassé la borne M_0 . En fait, s'il l'on veut une fonction C^2 , il faut penser à ralentir la croissance jusqu'à 0 pour bien coller à la borne supérieure, ce qui ne nous autorise à monter que de $\frac{M_0}{2}$.

Finalement, on prend le graphe de $x \mapsto x^2$, on le translate de $(-1, -1)$, on le relie avec la droite $y = -1$, puis on le symétrise par rapport à l'origine. On obtient une fonction f de classe C^1 dont la dérivée est un pic de hauteur 2 et dont la dérivée seconde est un créneau d'amplitude ± 2 . On a donc trouvé une fonction réalisant l'égalité $\sqrt{2M_0M_2} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 2} = 2 = M_1$. Il reste quand même à rendre cette application C^2 , ou du moins à l'approcher assez près par des applications C^2 . Nous laissons cette étape aux bons soins de l'imagination et de la débrouillardise du lecteur.

Si l'on se place sur \mathbb{R}^+ , on ne peut pas faire notre Taylor-Lagrange des deux côtés de notre point, donc la démo ci-dessus ne tient plus. Cependant, en reprenant notre graphe de parabole ci-dessus, nous ne sommes plus astreints d'un côté à revenir à un plat. On peut par exemple prendre le graphe $x \mapsto -x^2$ entre -2 et 0 , le translater de $(2, 2)$, puis compléter avec la droite $y = 2$. Nous obtenons ainsi $(M_0, M_1, M_2) = (2, 4, 2)$, lesquels réalisent l'égalité $2\sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{2 \cdot 2} = 4 = M_1$ obtenue au tout début. La constante 2 est par conséquent la meilleure.

Remarque longue. Si f est non nulle, en introduisant les réels $\mu_k := \sqrt[k]{\frac{M_k}{M_0}}$, on peut réécrire plus joliment le résultat sous la forme

$$\sqrt{2}^k \mu_k \leq \sqrt{2}^n \mu_n.$$

On en déduit immédiatement la jolie chaîne d'inégalités (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$)

$$\sqrt{2}\mu_1 \leq \sqrt{2}^2\mu_2 \leq \dots \leq \sqrt{2}^n\mu_n \leq \dots$$

En fait, les constantes $2^{\frac{k(n-k)}{2}}$ peuvent être améliorées (sauf pour $n = 2$ bien sûr). Kolmogorov a montré en 1962 que les meilleurs constantes $C(n, k)$ pour lesquelles on a

$$M_k \leq C(n, k) M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

sont données par $C(n, k) = a_{n-k} a_n^{\frac{k}{n}-1}$ avec $a_n := \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{(-1)^i}{2i+1} \right)^{n+1}$ les constantes de Favard⁸ qui sont reliées aux approximations des fonctions réelles par des polynômes trigonométriques.

Les inégalités de Kolmogorov prennent alors la forme

$$\mu_k \leq \sqrt[k]{\frac{a_{n-k}}{a_n}} \sqrt[n]{a_n} \mu_n,$$

ce qui peut se rendre encore plus joli en introduisant les réels $\nu_k := \sqrt[k]{a_k} \mu_k$ et les entiers $k + k' = n$:

$$\nu_k \leq \sqrt[k]{\frac{a_k a_{k'}}{a_n}} \nu_n.$$

Si l'on est un adepte de la symétrie, on multiplie deux telles inégalités appliquées à k et k' , ce qui donne

$$\frac{\nu_k \nu_{k'}}{\nu_n^2} \leq \sqrt[k]{\frac{a_k a_{k'}}{a_n}}.$$

15 Une fonction continue nulle part dérivable

Nous allons construire une fonction continue nulle part dérivable. L'idée est de répéter un motif de valeur absolue qui introduit un point de non dérivabilité.

Notons pour cela v le prolongement 2-périodique de la valeur absolue restreinte à $[-1, 1]$ et posons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} v(2^p x) \end{cases}.$$

Soit $a \in [0, 1]$. On définit $\begin{cases} a_n := a - \frac{|2^n a|}{2^n} \\ A_n := a_n + \frac{1}{2^n} \end{cases}$. Étudier le taux d'accroissement de a_n à A_n et conclure.

Solution proposée.

Puisque $|v| \leq 1$, la série f converge normalement et est donc continue (puisque v est continue). Par parité et 2-périodicité de v (donc de f), on étudie la dérivabilité de f sur $[0, 1]$.

Il serait impardonnable au vu des puissances de 2 qui traînent partout de ne pas introduire le développement dyadique de a , mettons

$$a = \underbrace{\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_3}{2^3} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{2^n}}_{=a_n} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots \text{ où } \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Pour évaluer le taux d'accroissement entre a_n et A_n , on va déjà étudier la différence $v(2^p A_n) - v(2^p a_n)$ pour p entier ≥ 0 .

Pour $p > n$, les réels $2^p a_n$ et $2^p A_n$ sont des entiers pairs, donc annulés par v . Ensuite, pour $p \leq n$, les $p-1$ premiers ε_i disparaissent encore dans la nature par 2-périodicité de v . Il reste donc

$$v(2^p a_n) = v\left(\varepsilon_p + \sum_{i=1}^{n-p} \frac{\varepsilon_{p+i}}{2^i}\right) \text{ et } v(2^p A_n) = v\left(\varepsilon_p + \sum_{i=1}^{n-p} \frac{\varepsilon_{p+i}}{2^i} + \frac{1}{2^{n-p}}\right).$$

En invoquant le développement impropre de $\frac{1}{2^{n-p}}$, on voit que les deux termes après ε_p sont chacun majorés par

$$\sum_{i=1}^{n-p} \frac{1}{2^i} + \sum_{i>n-p} \frac{1}{2^i} = 1.$$

⁸Il est classique en taupe de calculer $a_0 = 1$ (c'est le DSE de atn en 1) et $a_1 = \frac{\pi}{2}$ (c'est une reformulation de l'identité bien connue $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). D'autres valeurs sont données par la table suivante

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{8}\pi^2 & \frac{1}{24}\pi^3 & \frac{5}{384}\pi^4 & \frac{1}{240}\pi^5 \end{array}.$$

Il est alors aisé de calculer les réels $v(2^p a_n)$ et $v(2^p A_n)$ au vu du graphe de v . On distingue deux cas : ou bien $\varepsilon_p = 0$, auquel cas l'on est sur une pente montante et la différence souhaitée vaut $\frac{1}{2^{n-p}}$; ou bien $\varepsilon_p = 1$, auquel cas l'on est sur une pente descendante et il faut mettre un signe moins. L'on comprend mieux à présent le choix des suites a_n et A_n tendant vers a : les pas dyadiques permettent de bien suivre les pentes ± 1 .

Nonus venons de montrer

$$\forall p \geq 0, \quad v(2^p A_n) - v(2^p a_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{(-1)^{\varepsilon_p}}{2^{n-p}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par sommation, il vient

$$\frac{f(A_n) - f(a_n)}{A_n - a_n} = \sum_{p=1}^n (-1)^{\varepsilon_p}, \text{ série qui diverge grossièrement.}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que, si une fonction est dérivable en un point a , alors, pour toutes suites (x_n) et (y_n) sans valeur commune et de même limite a , le quotient $\frac{u(y_n) - u(x_n)}{y_n - x_n}$ tend vers $u'(a)$. En passant au développements limités, on a (en introduisant des suites ε_n et δ_n de limites nulles)

$$\begin{aligned} u(y_n) - u(x_n) &= (u(y_n) - u(a)) - (u(x_n) - u(a)) \\ &= (y_n - a)(u'(a) + \varepsilon_n) - (x_n - a)(u'(a) + \delta_n) \\ &= (y_n - x_n)u'(a) + \underbrace{(y_n - a)\varepsilon_n + (x_n - a)\delta_n}_{=o(y_n - x_n)?} \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de majorer le membre souligné par

$$|y_n - a||\varepsilon_n| + |a - x_n||\delta_n| \leq |y_n - x_n|(|\varepsilon_n| + |\delta_n|), \quad CQFD.$$

Remarque. Une première idée pour résoudre le tout dernier lemme serait de faire apparaître directement les taux d'accroissement en a :

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + \frac{a - x_n}{y_n - x_n} \frac{f(a) - f(x_n)}{a - x_n}.$$

Si les quotients $\frac{y_n - a}{y_n - x_n}$ et $\frac{a - x_n}{y_n - x_n}$ convergent, mettons vers λ et μ , alors la somme $\lambda + \mu$ doit valoir 1 par unicité de la limite et le membre de droite converge vers $\lambda f'(a) + \mu f'(a) = f'(a)$, *CQFD*. Malheureusement, même dans le cas simple de notre exercice, on trouve

$$\frac{A_n - a}{A_n - a_n} = 1 - \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} - \frac{\varepsilon_{n+2}}{2^2} - \dots,$$

qui diverge pour peu que la suite (ε_n) soit périodique.

16 Orthogonalité sur la sphère

16.1 Le début de la fin

Soit $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{S}$ une application C^2 à valeurs dans le cercle unité complexe \mathbb{S} .

On se fixe un point $a \in \mathbb{S}$ et l'on s'intéresse au nombre

$$N := \text{Card} \{t \in [0, L] ; \gamma(t) \perp a\}$$

de valeurs de γ orthogonales à ce point a .

1. Si $\langle a | \gamma(0) \rangle \langle a | \gamma(L) \rangle \leq 0$, montrer que $N \geq 1$.

2. Si $N \geq 2$, montrer qu'il y a un $\lambda \in [0, L]$ tel que $a \perp \gamma'(\lambda)$. En déduire que⁹

$$\langle a \mid \gamma(0) \rangle \leq L^2 \|\gamma''\|.$$

3. Si $N \geq 1$, montrer que, sous l'hypothèse supplémentaire $\langle a \mid \gamma(0) \rangle \langle a \mid \gamma(L) \rangle > 0$, le résultat est conservé.

Solution proposée.

Dans tout ce qui suit, il est utile pour se ramener à des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'introduire le produit scalaire

$$p := \langle a \mid \gamma(\cdot) \rangle.$$

On observera que p est C^2 et que ses dérivées s'écrivent $p' = \langle a \mid \gamma' \rangle$ et $p'' = \langle a \mid \gamma'' \rangle$.

1. L'hypothèse s'écrit $p(0)p(L) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires p doit s'annuler, ce qui fournit une valeur de γ orthogonale à a , *CQFD*.
2. Par hypothèse, il y a deux réels $\alpha < \beta$ tels que $p(\alpha) = p(\beta) = 0$. Rolle nous donne alors un λ tel que $p'(\lambda) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\langle a \mid \gamma'(\lambda) \rangle = 0$, *CQFD*.

Pour en déduire quelque chose sur $p(0)$, on relie $p(0)$ et $p'(\lambda)$ en écrivant Taylor Lagrange entre λ et 0 :

$$p(0) = p(\lambda) - \underbrace{p'(\lambda)\lambda}_{=0} + \frac{p''(*)}{2}\lambda^2.$$

Le dernier terme $\frac{p''(*)}{2}\lambda^2$ étant borné par $\frac{\|p''\|}{2}L^2$, il suffirait pour conclure de montrer que $|p(\lambda)| \leq \frac{\|p''\|}{2}L^2$. Pour cela, inspirons-nous de ce qui précède en écrivant un Taylor-Lagrange avec du $p(\lambda)$ et plein de termes nuls (donc simples à évaluer). Par exemple, entre λ et α , on obtient

$$\underbrace{p(\alpha)}_{=0} = p(\lambda) + (\alpha - \lambda) \underbrace{p'(\lambda)}_{=0} + \frac{p''(*)}{2}(\alpha - \lambda)^2,$$

d'où la majoration voulue :

$$|p(\lambda)| \leq \left| \frac{p''(*)}{2}(\alpha - \lambda)^2 \right| \leq \frac{\|p''\|}{2}L^2.$$

3. Le cas $N \geq 2$ venant d'être traité, on peut supposer $N = 1$. La fonction p s'annule donc exactement une fois sur $[0, L]$, mettons en λ .

Sur un dessin, l'hypothèse $p(0)p(L) > 0$ se lit comme suit : le graphe de p reste du même côté de la droite $y = 0$; cette dernière est donc tangente au graphe de p au point $(\lambda, 0)$. Si nous acceptons cette intuition, on relie les quantités $p(0)$ et $p'(\gamma) = 0$ toujours par le même procédé en écrivant Taylor-Lagrange entre λ et 0 :

$$p(0) = \underbrace{p(\lambda)}_{=0} - \underbrace{p'(\lambda)\lambda}_{=0} + \frac{p''(*)}{2}\lambda^2.$$

La majoration souhaitée en résulte de manière évidente. Formalisons notre intuition.

Déjà, si p change de signe, il y a un μ tel que $p(0)p(\mu) < 0$, ce qui équivaut d'après l'hypothèse supplémentaire à $p(\mu)p(L) < 0$. Si $\mu < \lambda$, le TVI nous dit que p s'annule sur $[0, \mu]$, donc avant λ , ce qui contredit l'hypothèse $N = 1$. De même, l'hypothèse $\mu > \lambda$ fournirait un zéro dans $[\mu, L]$, lequel serait alors situé après λ . Sans oublier d'exclure le troisième cas $\mu = \lambda$ en invoquant $p(\lambda) = 0$, on aboutit à une impasse.

Ensuite, si par l'absurde $p'(\lambda) \neq 0$, un simple DL autour de λ montre que p doit changer de signe, ce qui est impossible.

Remarque. On peut remplacer le cercle unité de \mathbb{R}^2 par la sphère unité de \mathbb{R}^n sans rien changer aux démonstrations.

⁹La notation $\|f\|$ désigne $\sup |f|$.

16.2 Welcome into space

Pour le lecteur intéressé, nous détaillons la fin de la partie du sujet d'Agrégation Externe 2006 dont est adapté cet exercice – sans plus aucun rapport à la dérivation proprement dite.

Nous admettons que la sphère \mathbb{S} est munie d'une mesure μ induite par la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R}^n par la formule

$$\mu(A) := \frac{\lambda([0, 1] A)}{\lambda(\mathbb{B})} \text{ avec } \mathbb{B} \text{ la boule unité}$$

(la sphère est par exemple de mesure $\mu(\mathbb{S}) = 1$), ce qui permet de mesurer les parties $N^{-1}(\{k\})$ pour tout entier $k \geq 0$. On rappelle deux propriétés essentielles de la mesure de Lebesgue :

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \text{ pour tout réels } a_i < b_i,$$

$$\lambda(A \amalg B) = \lambda(A) + \lambda(B) \text{ pour toutes parties mesurables disjointes } A \text{ et } B.$$

On s'intéresse à l'aire balayée par la partie « γ -orthogonale » définie par $\{a \in \mathbb{S} ; \exists t, a \perp \gamma(t)\}$. C'est en fait une aire pondérée : lorsque γ bouge, un même point $a \in \mathbb{S}$ peut être balayé plusieurs fois, d'où l'introduction des nombres N .

Pour $a \in \mathbb{S}$ et $I \subset [0, L]$, on note plus généralement

$$N_I(a) := \text{Card} \{t \in I ; \gamma(t) \perp a\}.$$

On admet que l'aire *orthogonale* balayée par γ sur l'intervalle I s'écrit sous la forme

$$\mathcal{A}_I := \int_{\mathbb{S}} N(a) d\mu(a) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mu(\{a \in \mathbb{S} ; N_I(a) = k\}).$$

Notre but est de montrer que cette aire vaut

$$\mathcal{A}_{[0, L]} = \frac{L(\gamma)}{\pi}$$

où $L(\gamma) := \int_0^L \|\gamma'\|$ désigne la longueur de la courbe γ .

La *longueur d'arc* entre deux points a et b de \mathbb{S} est définie par

$$L(a, b) := \text{acs} \langle a, b \rangle.$$

On admet que c'est également π fois la mesure de la partie $\{x \in \mathbb{S} ; \langle a | x \rangle \langle b | x \rangle \leq 0\}$, comme un dessin en dimension 2 permettra de s'en convaincre.

1. Dédurre des questions précédentes que, pour tous réels $t > 0$ et $h > 0$, la quantité

$$\left| \mu(\{a \in \mathbb{S} ; N_{[t, t+h]}(a) = 1\}) - \frac{L(\gamma(t), \gamma(t+h))}{\pi} \right|$$

est un $O(h^2)$ uniforme en t .

2. Montrer la même chose pour la quantité

$$\left| \mathcal{A}_{[t, t+h]} - \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{\pi} \right|.$$

3. Conclure $\mathcal{A}_{[0, L]} = \frac{\text{Long}(\gamma)}{\pi}$.
4. Illustrer par quelques exemples simples.

Solution proposée.

1. La quantité sous les barres est la différence des mesures des parties des points $a \in \mathbb{S}$ définies par $N_{[t,t+h]}(a) = 1$ et $\langle a | \gamma(t) \rangle \langle a | \gamma(t+h) \rangle \leq 0$. Les questions précédentes donnaient de l'information lorsque ces conditions étaient mélangées autrement ; essayons de les répartir mieux.

On peut partitionner la seconde partie en les points vérifiant $N_{[t,t+h]}(a) = 1$ et $N_{[t,t+h]}(a) \geq 2$ (la première question excluant le cas $N_{[t,t+h]}(a) = 0$). La différence devient alors (avec quelques légers abus de notations)

$$\mu \{ N_{[t,t+h]}(a) = 1 \} - \mu \left\{ \begin{array}{c} N_{[t,t+h]}(a) = 1 \text{ et} \\ \langle a | \gamma(t) \rangle \langle a | \gamma(t+h) \rangle \leq 0 \end{array} \right\} - \mu \left\{ \begin{array}{c} N_{[t,t+h]}(a) \geq 2 \text{ et} \\ \langle a | \gamma(t) \rangle \langle a | \gamma(t+h) \rangle \leq 0 \end{array} \right\}.$$

On peut regrouper les deux premiers termes pour retrouver les hypothèses de la questions 2 :

$$= \mu \left\{ \begin{array}{c} N_{[t,t+h]}(a) = 1 \text{ et} \\ \langle a | \gamma(t) \rangle \langle a | \gamma(t+h) \rangle > 0 \end{array} \right\} - \mu \left\{ \begin{array}{c} N_{[t,t+h]}(a) \geq 2 \text{ et} \\ \langle a | \gamma(t) \rangle \langle a | \gamma(t+h) \rangle \leq 0 \end{array} \right\}.$$

D'après les questions 2 et 3 (il n'y a rien à modifier pour passer de $[0, L]$ à $[t, t+h]$), les deux parties ci-dessus dont on prend la mesure sont incluses dans $\{ \langle a | \gamma(t) \rangle \leq \varepsilon \}$ avec $\varepsilon := h^2 \|\gamma''\|$. Comme elles sont par ailleurs disjointes d'après la seconde condition, la différence cherchée est majorée par $\mu \{ \langle a | \gamma(t) \rangle \leq \varepsilon \}$.

Le vecteur $\gamma(t)$ étant fixe et la mesure μ invariante par rotation¹⁰, en envoyant $\gamma(t)$ sur le vecteur $(1, 0, 0, \dots, 0)$, on réécrit notre majorant sous la forme $\mu \{ \langle a | (1, 0, \dots, 0) \rangle \leq \varepsilon \}$. Mais un tel a doit avoir sa première coordonnée dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour satisfaire la condition sur le produit scalaire, et ses autres coordonnées de toute façon dans $[-1, 1]$ pour qu'il reste sur la sphère. On peut donc majorer par

$$\mu \left(\mathbb{S} \cap \left([-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1, 1]^{n-1} \right) \right) \leq \frac{\lambda \left([-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1, 1]^{n-1} \right)}{\lambda(\mathbb{B})} = \frac{2\varepsilon \cdot 2^{n-1}}{\lambda(\mathbb{B})} = \frac{2^n \|\gamma''\|}{\lambda(\mathbb{B})} h^2, \text{ CQFD.}$$

2. La première idée est de transformer le terme que l'on souhaite majorer : une inégalité des accroissements finis nous tend les bras pour $\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{\pi}$, mais on va la réserver pour la question d'après. Comparons plutôt chacun des termes à l'intérieur des barres dans les questions 1 et 2.

Le plus simple pour commencer semble de comparer la longueur d'arc à la ligne droite. Taylor-Lagrange nous disant que $\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| = O(h)$, il suffit de montrer $L(a, b) - \|a - b\| = O(\|a - b\|^2)$ pour $a, b \in \mathbb{S}$. Plaçons-nous dans le plan $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ où nous pourrions toujours imposer $a = 1$ et $b = e^{i\theta}$. La longueur $L(a, b)$ vaut alors θ . La ligne droite, quant à elle, s'évalue aisément :

$$\|a - b\| = |1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\theta - \sin \theta = O(\sin^2 \theta)$. Or, le quotient $\frac{\theta - \sin \theta}{\sin^2 \theta}$ est continu sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge en 0 par $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^3}{\theta^2} = 0$, donc est borné sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cela suffit à notre bonheur car le h mis en jeu sera de toute façon pris petit de sorte que le θ correspond tombera à coup sûr dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Quant à la seconde quantité, en revenant à la définition de $\mathcal{A}_{[t,t+h]}$, on trouve qu'elle vaut

$$\sum_{k \geq 2} k \cdot \mu \left(N_{[t,t+h]}^{-1}(k) \right).$$

3. Découpons notre segment $[0, L]$ de départ en n^2 petits segments de longueur $h := \frac{L}{n^2}$, ce qui permet de ramener $\mathcal{A}_{[0,L]} = \sum_{i=1}^{n^2} \mathcal{A}_{[(i-1)h, ih]}$ à une somme de petits $\mathcal{A}_{[t,t+h]}$. Pour faire le lien avec $\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{\pi}$, on invoque l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c_t \in [t, t+h], \quad \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| = h \|\gamma'(c_t)\|,$$

de sorte que la somme $\sum \|\gamma(ih) - \gamma((i-1)h)\|$ devienne une somme de Riemann pondérée par les $c_i \in [(i-1)h, ih]$:

$$\sum_{i=1}^{n^2} h \|\gamma'(c_i)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L \|\gamma'\|.$$

¹⁰s'en convaincre par un dessin, à défaut d'un argument précis invoquant que le jacobien d'une rotation est toujours égal à 1

On en déduit un découpage naturel pour majorer

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}_{[0,L]} - \frac{\int_0^L \|\gamma'\|}{\pi} \right| &\leq \sum_{i=1}^{n^2} \left| \mathcal{A}_{[(i-1)h, ih]} - \frac{1}{\pi} \|\gamma(ih) - \gamma((i-1)h)\| \right| \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left| \sum_{i=1}^{n^2} \|\gamma(ih) - \gamma((i-1)h)\| - \int_0^L \|\gamma'\| \right|. \end{aligned}$$

La première somme est majorée par n^2 termes en $O(h^2) = O(\frac{1}{n^4})$, donc est un $O(\frac{1}{n^2})$, lequel tend vers 0. La seconde somme tend vers 0 par Riemann.

4. Prenons $\gamma(t) = e^{it}$ définie pour $t \in [0, 2\pi]$. Tout point du cercle est orthogonal à exactement deux valeurs de γ , donc l'aire orthogonale doit valoir 2, ce qu'on retrouve par la formule $\frac{L(\gamma)}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Pour le même γ restreint à $[0, \pi]$, tout point (à l'exception de $\pm i$) est orthogonal à exactement une valeur de γ , d'où $\mathcal{A} = 1$, ce qui est bien cohérent avec la longueur $L(\gamma) = \pi$.