# Colles de mathématiques en PCSI 5

27 mars 2012

**Programme**

Révision du programme précédent. Groupes, anneaux, corps. Dénombrement.

**Exercice n° 1**

On se donne un ensemble fini $E$ et $n$ sous-ensembles $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(E)$, $n \geqslant 1$. On va établir une expression de $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$.

**1.** Étudier les cas $n = 2, 3, 4$. Conjecturer la formule.

**2.** Étant donnée une partie $A$ de $E$, on définit sa fonction indicatrice : $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ par :

$$\chi_A : x \in E \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exprimer en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$ les indicatrices : $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A^c}$.
Justifier que $\text{Card}(A) = \sum_{x\in E} \chi_A(x)$.

**3.** Conclure en considérant $\text{Card}\left((A_1 \cup ... \cup A_n)^c\right)$.

**Exercice n° 2**

Soit $E$ un ensemble fini. Calculer les sommes suivantes en fonction de $n = \text{Card}(E)$ :

$$\sum_{X\subset E} \text{Card}(X), \quad \sum_{X,Y\subset E} \text{Card}(X \cap Y), \quad \sum_{X,Y\subset E} \text{Card}(X \cup Y).$$

**Exercice n° 3**

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant n \leqslant p + q$. Montrer que :

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

**Exercice n° 4**

Soit $E$ un ensemble fini. Montrer que $E$ a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

**Exercice n° 5**

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

**Exercice n° 6**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geqslant p$.

**1.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

**2.** En déduire la *formule d'inversion de Pascal* :

Si $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, on définit $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ par : $\forall n\in\mathbb{N},\ g(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)$. Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k).$$

## Exercice n° 7

Soit $n$ un entier non nul. Calculer :

$$\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p} \text{ et } \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1};$$

$$\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n}\binom{n}{3p}.$$

Donner l'idée générale pour calculer, pour $p\leqslant n$ et $0\leqslant q<p$, la somme :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n,\ k\equiv q[p]}\binom{n}{k}.$$

## Exercice n° 8

On se propose de classifier les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$. Le résultat est le suivant :

Soit $G$ un tel sous-groupe. Alors on a l'alternative :

- Soit $G$ est discret de la forme $a\mathbb{Z}$, $a>0$ (i.e. $G=\{an,\ n\in\mathbb{Z}\}$).
- Soit $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On se donne donc $G$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et on pose $a=\inf(G\cap\mathbb{R}_+^*)$. On suppose d'abord que $a>0$. On montre alors qu'on est dans le cas discret.

**1.** Prouver que $a\in G$. (On pourra prendre $(x_n)\in(G\cap\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $(x_n)\to a$.)

**2.** En déduire $a\mathbb{Z}\subset G$.

**3.** Soit $x\in G$. En effectuant la pseudo-division euclidienne de $x$ par $a$, prouver que $x$ est un « multiple » de $a$. Conclure.

Maintentant on s'intéresse au cas $a=0$.

**4.** En utilisant à nouveau une suite minimisante, prouver que $G$ contient des éléments non nuls de valeur abolue aussi petite que l'on veut.

**5.** Conclure.

## Exercice n° 9

Soit $G$ un groupe, et $H\subset G$ une partie finie de $G$, non vide et stable par la loi de $G$, c'est à dire : $\forall x,y\in H,\ xy\in H$.

Prouver que $H$ est un sous-groupe de $G$.

## Exercice n° 10

Soit $G$ un groupe. On note :

$$\mathcal{Z}(G)=\{a\in G:\forall g\in G, ga=ag\}, \text{et pour } X\subset G,\quad \mathcal{C}(X)=\{g\in G:\forall x\in X, gx=xg\}.$$

Prouver que $\mathcal{Z}(G)$ et $\mathcal{C}(X)$ sont des sous-groupes de $G$.

**Exercice n° 11**

Soit $G$ un groupe fini, tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$.

1. Montrer que $G$ est commutatif. (considérer $(xy)^2$)
2. Soit $H$ un sous-groupe de $G$ et $x \notin H$. Prouver que si $K$ est le sous-groupe engendré par $H \cup \{x\}$, alors $\mathrm{Card}(K) = 2\,\mathrm{Card}(H)$.
3. En déduire que le cardinal de $G$ est une puissance de 2.

**Exercice n° 12**

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**Exercice n° 13**

Soit $f$ un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ (pour sa structure usuelle).

1. Déterminer $f|_{\mathbb{Q}}$.
2. Si on suppose $f$ continue, déterminer $f$.
3. Montrer que cette hypothèse est superflue.