Espace vectoriel euclidien

Produit scalaire

Exercice 1 [01568] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2 [01569] [correction]
Montrer que
$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 3 [01570] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose
$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4 [01571] [correction]
Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x,y)$ et $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$\varphi(u,v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$
A quelle(s) condition(s) sur a,b,c,d a-t-on φ produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 [01572] [correction]
Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.\mid.)$.
Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation
$$(a \mid x) = \lambda$$
d'inconnue $x \in E$.

Exercice 6 [01573] [correction]
Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
b) Soit $\theta : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\theta(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que pour tout $P \in E$ on ait $\theta(P) = \varphi(P,Q)$.

Exercice 7 [01574] [correction]
[Famille obtusangle]
Soit $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer qu'il est impossible que
$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+2,\ (x_i \mid x_j) < 0$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

Exercice 8 [01575] [correction]
Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
Etudier les cas d'égalités.

Exercice 9 [01576] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$
Préciser les cas d'égalité.

Exercice 10 [01577] [correction]
On considère $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour f strictement positive sur $[a,b]$ on pose

$$\ell(f)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f)\geqslant(b-a)^2$.
Etudier les cas d'égalités.

Exercice 11 [01578] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer

$$I_{n+p}^2\leqslant I_{2n}I_{2p}$$

Orthogonalité

Exercice 12 [01579] [correction]
Soient E un espace euclidien et $x,y\in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\|x+\lambda y\|\geqslant\|x\|$$

Exercice 13 [01580] [correction]
On définit une application $\varphi:\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{C}$ par

$$\varphi(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\mathrm{e}^{i\theta})Q(\mathrm{e}^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 14 [00303] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x,y\in E,x\perp y\Rightarrow f(x)\perp f(y)$$

Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x\in E,\|f(x)\|=\lambda\|x\|$$

Base orthonormée

Exercice 15 [01581] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u,v,w) avec

$$u=(1,0,1),v=(1,1,1),w=(-1,1,0)$$

Exercice 16 [01583] [correction]
Construire une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan dont l'équation dans la base canonique est $x+y+z=0$.

Exercice 17 [01584] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x,y\in E,(f(x)\mid y)=(x\mid f(y))$$

a) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est symétrique.
b) Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Exercice 18 [01585] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.
Exprimer $(F\cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 19 [00522] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x,y\in E,(f(x)\mid y)=(x\mid f(y))$$

Montrer

$$\mathrm{Im} f=(\ker f)^\perp$$

Projections et symétries orthogonales

Exercice 20 [01588] [correction]
On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 21 [01589] [correction]
On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x=z$.

Exercice 22 [01590] [correction]
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=x-y+z-t=0\right\}$$

a) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
b) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
c) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
d) Calculer $d(u,F)$ où $u=(1,2,3,4)$.

Exercice 23 [01591] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 24 [01592] [correction]
Soient a et b deux vecteurs distincts d'un espace vectoriel euclidien E tels que

$$\|a\|=\|b\|$$

Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b.

Exercice 25 [01593] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure à 2.
Soient x et y deux vecteurs distincts de E tels que $(x\mid y)=\|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y=p_H(x)$.

Exercice 26 [01594] [correction]
Soit $E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
Pour $f,g\in E$, on pose

$$\varphi(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
b) On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.
Montrer que $\mathcal{I}=\mathcal{P}^\perp$.
c) Soit $\psi: f\mapsto\hat{f}$ avec $\hat{f}: x\mapsto f(-x)$.
Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 27 [01595] [correction]
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x\in E, \|p(x)\|\leqslant\|x\|$$

Exercice 28 [03924] [correction]
Soit p un projecteur d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x\in E, \langle p(x),x\rangle\geqslant 0$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 29 [01596] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien, H et H' deux hyperplans de E.
On note s et s' les réflexions par rapport à H et H'.
A quelle condition s et s' commutent-elles et préciser alors $s \circ s'$.

Exercice 30 [01597] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et u, v, w trois vecteurs unitaires.
On pose
$$\alpha = Ecart(u, v), \beta = Ecart(v, w) \text{ et } \theta = Ecart(u,w)$$
En projetant v sur un plan contenant u et w, montrer que $\theta \leqslant \alpha + \beta$.

Exercice 31 [03403] [correction]
Soient x et y deux vecteurs non nul d'un espace euclidien E.
A quelle condition sur x et y, le projeté orthogonal du vecteur x sur la droite $\mathrm{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$?

Distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 32 [01598] [correction]
Soient n un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
a) Montrer que
$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur E.
b) Calculer
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 \mathrm{d}t$$

Exercice 33 [01599] [correction]
[Déterminant de Gram]
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
On note
$$G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i \mid x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
a) Montrer que si $(x_1, ..., x_n)$ est liée alors
$$\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$$
b) On suppose désormais que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre et on pose
$$F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$
On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F.
Exprimer $G(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de M et de ${}^tM$. En déduire que
$$\det G(x_1, \dots, x_n) > 0$$
c) On introduit de plus $x \in E$. Montrer que
$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$$

Automorphismes orthogonaux

Exercice 34 [01600] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y) \Leftrightarrow \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Exercice 35 [01601] [correction]
Soit $f : E \to E$ une application. Justifier l'équivalence suivante
$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E)$$

Exercice 36 [01603] [correction]
Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f(F) \subset F$.
Montrer
$$f(F) = F \text{ et } f(F^\perp) = F^\perp$$

Exercice 37 [01605] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E. On pose $g = f - \mathrm{Id}$.
a) Montrer que $\mathrm{Im} g = (\ker g)^\perp$.
b) Soit p la projection orthogonale sur $\ker g$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on considère
$$p_n = \frac{1}{n}(\mathrm{Id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

Démontrer que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \|(p_n - p)(x)\| = 0$$

Exercice 38 [01606] [correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E, α un réel et $f_\alpha : E \to E$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x \mid a).a$$

a) Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.
b) Calculer f_α^p pour $p \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1} ?
d) Montrer

$$f_\alpha \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2$$

Quelle est la nature de f_{-2} ?

Automorphismes orthogonaux du plan euclidien

Exercice 39 [01607] [correction]
Soit u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté.
Quels sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

Exercice 40 [01608] [correction]
Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.
Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 41 [01609] [correction]
A quelle condition une réflexion σ et une rotation r du plan commutent ?

Automorphismes orthogonaux de l'espace de dimension 3

Exercice 42 [01610] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Etudier f.

Exercice 43 [01611] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Former une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $v, w \in P : x + z = 0$.
b) Former la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ et reconnaître f.

Exercice 44 [01612] [correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristique, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée ci-après :

a) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ c) $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 45 [01613] [correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a) Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$, a-t-on $A \in \mathcal{O}(3)$?
b) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice 46 [01614] [correction]
Soir E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation f d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 47 [01615] [correction]
Soit f une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$.
a) On suppose qu'il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = -v$. Montrer que f est un retournement.
b) Montrer que toute rotation f peut s'écrire comme produit de deux retournements.

Exercice 48 [01616] [correction]
Soit f une rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire u et d'angle $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$.
Soit s une réflexion de E montrer que f et s commutent si, et seulement si,D est orthogonale au plan de réflexion de s ou bien D est incluse dans ce plan et f est un retournement.

Exercice 49 [01617] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
a) Montrer que deux rotations de même axe ou deux retournements d'axes orthogonaux commutent.
Soit f et g deux rotations de E, autres que Id_E, telles que $f \circ g = g \circ f$.
b) Soit u un vecteur unitaire appartenant à l'axe de la rotation f.
Montrer que $g(u)$ appartient à l'axe de la rotation f et en déduire que $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
c) Dans le cas où $g(u) = u$, conclure que les rotations f et g ont même axe.
d) Dans le cas où $g(u) = -u$, justifier que les axes de f et g sont orthogonaux puis que f et g sont des retournements autour de ceux-ci.

Exercice 50 [02922] [correction]
Dans un espace euclidien orienté E de dimension 3, on pose, pour $a \in E$ et $x \in E$, $f_a(x) = a \wedge x$ puis $r_a = \exp(f_a)$. Montrer que r_a est une rotation et en donner les éléments caractéristiques.

Exercice 51 [02923] [correction]
Soit E un espace euclidien de dimension 3, r dans $\mathrm{SO}(E)$ et s une symétrie orthogonale.
Caractériser l'application

$$s \circ r \circ s$$

Exercice 52 [02924] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul, $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$. Décrire $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 53 [02925] [correction]
Soient f et g dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tels que $f \neq g$ et $g \circ f = f \circ g$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe, soit deux symétries de droites orthogonales.

Exercice 54 [03186] [correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Rechercher les rotations R de E telles que

$$R(i) = -j \text{ et } R(i - j + k) = i - j + k$$

Exercice 55 [03190] [correction]
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments caractéristiques de

$$\mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \circ \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j, \pi}$$

Exercice 56 [03803] [correction]
Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.
Calculer $\det(M)$. Qu'en déduire d'un point de vue géométrique ?
Donner les caractéristiques géométriques de M.

Produit mixte et produit vectoriel

Exercice 57 [01618] [correction]
Soit u un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.
Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme $f : E \to E$ défini par
$f(x) = u \wedge x$.

Exercice 58 [01619] [correction]
Dans E espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, on se donne deux vecteurs $a \neq 0$ et b.
Résoudre l'équation $a \wedge x = b$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 59 [01620] [correction]
Soient a, b, c, d quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.
Montrer que $[a \wedge b, a \wedge c, a \wedge d] = 0$.

Exercice 60 [01621] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Montrer

$$\forall a, b, c \in E,\ \mathrm{Det}(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = \mathrm{Det}(a, b, c)^2$$

Exercice 61 [01622] [correction]
Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.
On pose $f : E \to E$ définie par $f(x) = (x \mid a)a + a \wedge x$.
Montrer que $f \in O(E)$ et préciser géométriquement f.

Exercice 62 [01623] [correction]
Soit u un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que
$f : E \to E$ définie par

$$f(x) = \alpha x + \beta(u \mid x)u + \gamma u \wedge x$$

soit une rotation.
Déterminer alors ses éléments caractéristiques.

Exercice 63 [01624] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul.
Montrer que f est une rotation vectorielle si, et seulement si,

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors
$$\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$$
donc
$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(k) = 0$$
Ainsi P admet au moins $n + 1$ racines, or $\deg P \leqslant n$ donc $P = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]
Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
Si $\varphi(f, f) = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout $t \in [-1, 1]$, $f(t)^2(1 - t^2) = 0$ et donc pour tout $t \in]-1, 1[$, $f(t) = 0$.
Par continuité de f en 1 et -1, on obtient $f(t) = 0$ sur $[-1, 1]$.
On peut alors conclure que φ est un produit scalaire.

Exercice 3 : [énoncé]
φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.
On a aussi $\varphi(f, f) \geqslant 0$ et
$$\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f' = 0$$
car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit
$$\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Exercice 4 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire.
Supposons que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
En prenant $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, la symétrie $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ donne $b = c$.
On a
$$\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2$$
Pour $u = (1, 0)$, $\varphi(u, u) > 0$ donne $a > 0$.
$$\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ad - b^2}{a}y^2$$
Pour $u = (-b, a)$, $\varphi(u, u) > 0$ donne
$$ad > b^2$$
Inversement, si $a > 0, ad > b^2$ et $b = c$ alors en reprenant l'étude ci-dessus, on montre que φ est un produit scalaire.

Exercice 5 : [énoncé]
Considérons le vecteur
$$x_0 = \frac{\lambda}{\|a\|^2} a$$
On a
$$(a \mid x_0) = \lambda$$
et donc $x_0 \in \mathcal{S}$.
Soit $x \in E$,
$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (a \mid x - x_0) = 0$$
donc
$$\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) ras
b) Supposons qu'un tel polynôme Q existe et considérons $P = XQ$.
On a $\theta(P) = 0 = \int_0^1 tQ^2(t)\,\mathrm{d}t$ donc $Q = 0$ d'où $\theta = 0$. Absurde.

Exercice 7 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$
Pour $n = 1$: Soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire
$x_1 = \lambda_1.u, x_2 = \lambda_2.u, x_3 = \lambda_3.u$
On a alors
$$(x_1 \mid x_2) = \lambda_1\lambda_2, (x_2 \mid x_3) = \lambda_2\lambda_3, (x_3 \mid x_1) = \lambda_3\lambda_1$$
Ces trois quantités ne peuvent être négatives car
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \geqslant 0$$
Supposons la propriété établie au rang $(n - 1) \in \mathbb{N}^\star$:
Par l'absurde, supposons que la configuration soit possible :
Nécessairement $x_{n+2} \neq 0$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x_{n+2})^\perp$. On a $\dim F = n-1$.

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n+1, x_i = y_i + \lambda_i . x_{n+2}$$

avec $y_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Comme $(x_i \mid x_{n+2}) < 0$ on a $\lambda_i < 0$.

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1,\ (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i \lambda_j \left\|x_{n+2}\right\|^2 < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1, \dots, y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Exercice 8 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n 1^2\right) = n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires i.e. : $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 9 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}}\sqrt{x_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^n x_k$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des n-uplets

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \text{ et } \left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}\right)$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \dots = x_n = 1/n$$

Exercice 10 : [énoncé]
Soit $g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'application définie par $g(t) = \sqrt{f(t)}$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b g(t).\frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \ell(f)$$

Il y a égalité si, et seulement si, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{g(t)}$ sont colinéaires ce qui correspond à f constante.

Exercice 11 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^1 t^n \sqrt{f(t)} t^p \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 t^{2p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 : [énoncé]
$(\Rightarrow)$ Via Pythagore
$(\Leftarrow)$ Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geqslant 0$.
Si, par l'absurde $(x \mid y) \neq 0$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda(x \mid y)$ qui change de signe en 0. Absurde.
Par suite $(x \mid y) = 0$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Par le changement de variable réelle $\xi = -\theta$, on vérifie

$$\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$$

D'autre part

$$\overline{\varphi(P,Q)} = \varphi(Q,P) = \varphi(P,Q)$$

donc $\varphi(P, Q) \in \mathbb{R}$.
φ est donc une application symétrique à valeurs réelles.
La bilinéarité et la positivité ne posent pas de problèmes.
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$$

Le polynôme réel P admet alors une infinité de racines complexes situées sur

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$$

b) La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Elle est orthonormale car

$$\varphi(X^k,X^\ell)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}1 & \text{si } k=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Exercice 14 : [énoncé]
Soient x,y deux vecteurs unitaires de E.
Puisque

$$(x+y\mid x-y)=\|x\|^2-\|y\|^2=0$$

les vecteurs $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux et donc $f(x+y)$ et $f(x-y)$ le sont aussi.
On a donc

$$\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2=(f(x)+f(y)\mid f(x)-f(y))=(f(x+y)\mid f(x-y))=0$$

On en déduit que les images par f des vecteurs unitaires de E ont tous la même norme. En posant λ cette valeur commune, on a

$$\forall u\in E,\|u\|=1\Rightarrow\|f(u)\|=\lambda$$

Pour $x\in E$ non nul, le vecteur $u=x/\|x\|$ est unitaire et donc

$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\lambda$$

d'où l'on tire

$$\|f(x)\|=\lambda\,\|x\|$$

relation qui reste valable quand $x=0$.

Exercice 15 : [énoncé]
On obtient la famille (e_1,e_2,e_3) avec

$$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),e_2=(0,1,0)\text{ et }e_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Exercice 16 : [énoncé]
Prenons $w=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (normal au plan) pour troisième vecteur.
Posons $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ (du plan) pour premier vecteur et $v=w\wedge u$ pour deuxième vecteur.

Exercice 17 : [énoncé]
a) $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=(a_{i,j})$ avec $a_{i,j}=(e_i\mid f(e_j))=(f(e_i)\mid e_j)=a_{j,i}$.
b) Soit $x\in\ker f$ et $z=f(y)\in\mathrm{Im}f$.
$(x\mid z)=(x\mid f(y))=(f(x)\mid y)=(0\mid y)=0$ donc $\ker f\subset\mathrm{Im}f^\perp$.
De plus $\dim\ker f=\dim E-\dim\mathrm{Im}f=\dim\mathrm{Im}f^\perp$ donc $\ker f=\mathrm{Im}f^\perp$ puis la conclusion.

Exercice 18 : [énoncé]
$F,G\subset F\cup G$ donc $(F\cup G)^\perp\subset F^\perp\cap G^\perp$.
Soit $x\in F^\perp\cap G^\perp$. Pour tout $y\in F\cup G$, en discutant selon l'appartenance de y à F ou G, on a $(x\mid y)=0$ donc $x\in(F\cup G)^\perp$. Ainsi $F^\perp\cap G^\perp\subset(F\cup G)^\perp$ puis l'égalité.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit $y\in\mathrm{Im}f$. Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ et alors

$$\forall z\in\ker f,\ (y\mid z)=(f(x)\mid z)=(x\mid f(z))=(x\mid 0)=0$$

donc $\mathrm{Im}f\subset(\ker f)^\perp$ puis $\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$ par égalité des dimensions.

Exercice 20 : [énoncé]
Soit $n=i+j+k$ un vecteur normal à P. Notons p la projection orthogonale sur P.
On sait

$$\forall x\in E,\ p(x)=x-\frac{(x\mid n)}{\|n\|^2}n$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

Exercice 21 : [énoncé]
Soit $n=i-k$ un vecteur normal à P. Notons s la symétrie orthogonale par rapport à P. La relation

$$s(x)=x-2\frac{(x\mid n)}{\|n\|^2}n$$

donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 22 : [énoncé]
a) Soient $H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\right\}$ et
$K = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\right\}$
On a $F = H \cap K$ puis $F^\perp = H^\perp + K^\perp$.
Soient $n = (1,1,1,1)$ et $m = (1,-1,1,-1)$ des vecteurs normaux à H et K.
Par Schmidt

$$e_1 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ et } e_2 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

forment une base orthonormée de $F^\perp$.
b) On peut facilement former $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp})$ car

$$\forall x \in E,\ p_{F^\perp}(x) = (x \mid e_1)e_1 + (x \mid e_2)e_2$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = I_4 - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Pour $u = (1,2,3,4), p_F(u) = (-1,-1,1,1)$ donc

$$d(u,F) = \|u - p_F(u)\| = \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26}$$

Exercice 23 : [énoncé]
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On a $A^2 = A$ donc p est une projection.
En déterminant $\ker p$, on obtient $\ker p = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a = i + 2j - k$.
$\mathrm{Im} p$ est un plan dont $p(i)$ et $p(j)$ forment une base.
Puisque $(p(i) \mid a) = (p(j) \mid a) = 0$ on a $\mathrm{Im} p \subset (\ker p)^\perp$ puis $\mathrm{Im} p = (\ker p)^\perp$ par égalité des dimensions.
p est donc la projection orthogonale sur le plan dont a est vecteur normal i.e.

$$P : x + 2y - z = 0$$

Exercice 24 : [énoncé]
Unicité : Si σ est une réflexion par rapport à un hyperplan H solution alors :
$\sigma(a-b) = b-a$ et donc

$$H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp$$

Existence : Soit $H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp$ et σ la réflexion par rapport à H.
$\sigma(a-b) = b-a$ et $\sigma(a+b) = a+b$ car $(a+b \mid a-b) = 0$.
Donc

$$\sigma(a) = \frac{1}{2}\sigma(a+b) + \frac{1}{2}\sigma(a-b) = b \text{et } \sigma(b) = a$$

La réflexion σ est solution.

Exercice 25 : [énoncé]
Unicité : $y = p_H(x)$ implique $y - x \in H^\perp$, or $y - x \neq 0$ donc $y - x$ est vecteur normal à H.
Ceci détermine H de manière unique.
Existence : Soit H l'hyperplan dont $y - x$ est vecteur normal.
Puisque $(x \mid y) = (y \mid y)$ on a $(x - y \mid y) = 0$ donc $y \in H$.
On a alors $x = y + (x-y)$ avec $y \in H$ et $x - y \in H^\perp$ donc $p_H(x) = y$ et H est solution.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Rien à signaler.
b) On a

$$\forall f \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in \mathcal{I},\ \varphi(f,g) = 0$$

car le produit $t \mapsto f(t)g(t)$ est impair et intégré sur un intervalle symétrique par rapport à 0.
Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$.
Inversement, soit $h \in \mathcal{I}^\perp$. On sait $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$ donc on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$.
On a $\varphi(h,g) = \varphi(f,g) + \varphi(g,g)$. Or $\varphi(h,g) = 0$ et $\varphi(f,g) = 0$ donc $\varphi(g,g) = 0$ d'où $g = 0$.
Ainsi $h = f \in \mathcal{P}$ puis $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{P}$. On conclut.
c) $\psi^2 = \mathrm{Id}$ donc ψ est une symétrie.

$$\forall f \in \mathcal{P}, \psi(f) = f \text{ et } \forall f \in \mathcal{I} = (\mathcal{P})^\perp, \psi(f) = -f$$

donc ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 27 : [énoncé]
Si p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F alors

$$\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$$

avec $p(x) \perp (x - p(x))$. Par le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

Inversement, soit p une projection telle que

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Puisque p est une projection, les espaces $F = \mathrm{Im}p$ et $G = \ker p$ sont supplémentaires et p est la projection sur F parallèlement à G. Il s'agit alors de montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.
Soient $u \in F, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le vecteur

$$x = u + \lambda.v$$

On a $p(x) = u$ et $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$ ce qui donne

$$0 \leqslant 2\lambda(u \mid v) + \lambda^2 \|v\|^2$$

Ceci valant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $(u \mid v) = 0$.
En effet, si $(u \mid v) \neq 0$ alors

$$2\lambda(u \mid v) + \lambda^2 \|v\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda(u \mid v)$$

ce qui est une expression qui change de signe.
Ainsi les espaces F et G sont orthogonaux et p est donc une projection orthogonale.

Exercice 28 : [énoncé]
Le projecteur p projette sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\ker p$. Il est orthogonal si, et seulement si, $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux. Soient $x \in \ker p$ et $y \in \mathrm{Im}p$. On a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle p(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle \geqslant 0$$

ce qui donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0$$

puis

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \langle y, x\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle \geqslant 0$$

Si par l'absurde $\langle y, x\rangle \neq 0$ alors

$$\lambda \langle y, x\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda \langle y, x\rangle$$

qui n'est pas de signe constant. C'est absurde.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit n et n' des vecteurs normaux à H et H'.
Si s et s' commutent alors $s \circ s'(n) = s' \circ s(n) = -s'(n)$ donc $s'(n) \in H^\perp$.
Puisque $\|s'(n)\| = \|n\|$ on a $s'(n) = n$ ou $s'(n) = -n$ i.e. $n \in H'$ ou $n \in H'^\perp$.
Inversement :
Si $n \in H'$ alors on peut construire une base adaptée qui permet matriciellement de conclure à la commutativité et d'observer que $s \circ s'$ est la symétrie orthogonale par rapport à $H \cap H'$.
Si $n \in H'^\perp$ alors $H = H'$ et $s \circ s' = \mathrm{Id}$.

Exercice 30 : [énoncé]
Notons v' le projeté de v sur un plan P contenant u et w.
Orientons P, de sorte que $(u, w) = \theta \quad [2\pi]$.
Notons $\alpha' = \mathrm{Ecart}(u, v')$ et $\beta' = \mathrm{Ecart}(v', w)$.
$(u \mid v) = \|u\| \|v\| \cos \alpha$ et $(u \mid v) = (u \mid v') = \|u\| \|v'\| \cos \alpha'$ avec $\|v'\| \leqslant \|v\|$ donc $\cos \alpha \leqslant \cos \alpha'$ puis $\alpha' \leqslant \alpha$.
De même $\beta' \leqslant \beta$.
Par des considérations d'angles orienté :
$\theta = \alpha' + \beta', \alpha' - \beta', -\alpha' + \beta', -\alpha' - \beta' \quad [2\pi]$.
Si $\theta = \alpha' + \beta' \quad [2\pi]$ alors $\theta = \alpha' + \beta'$ et $\theta \leqslant \alpha + \beta$.
Si $\theta = \alpha' - \beta' \quad [2\pi]$ alors $\theta = \alpha' - \beta' \leqslant \alpha' \leqslant \alpha + \beta$.
Si $\theta = -\alpha' + \beta' \quad [2\pi]$: idem.
Si $\theta = -\alpha' - \beta' \quad [2\pi]$ alors $\theta = 2\pi - \alpha' - \beta'$ et $\alpha + \beta \geqslant \alpha' + \beta' \geqslant \pi \geqslant \theta$.

Exercice 31 : [énoncé]
Le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathrm{Vect}(y)$ est

$$\frac{(y \mid x)}{\|y\|^2} y$$

Les projetés orthogonaux considérés seront donc égaux si, et seulement si,

$$\frac{(y \mid x)}{\|y\|^2} y = \frac{(x \mid y)}{\|x\|^2} x$$

Cette équation est vérifiée si, et seulement si, x et y sont orthogonaux ou

$$\|x\|^2 y = \|y\|^2 x$$

Dans ce dernier cas x et y sont colinéaires ce qui permet d'écrire $y = \lambda x$ et l'égalité donne

$$\lambda \|x\|^2 x = \lambda^2 \|x\|^2 x$$

d'où $\lambda = 1$.
Finalement, les projetés orthogonaux considérés seront égaux si, et seulement si, les vecteurs x et y sont égaux ou orthogonaux.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_{-1}^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.
b) On a

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 \mathrm{d}t = d(X^3, F)^2$$

où $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.
Soit P le projeté orthogonal de X^3 sur F. On peut écrire $P = a + bX + cX^2$ et on a par orthogonalité

$$(X^3 - P \mid 1) = (X^3 - P \mid X) = (X^3 - P \mid X^2) = 0$$

On en déduit que $P = \frac{3}{5}X$ puis

$$d(X^3, F)^2 = \frac{8}{175}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors les colonnes de $G(x_1, \dots, x_n)$ le sont selon la même relation.
b) $(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$ avec $M = (a_{i,j})$ donc $G(x_1, \dots, x_n) = {}^t MM$.
Par suite $\det(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \det(M)^2 > 0$ car M inversible puisque $(x_1, \dots, x_n)$ libre.
c) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. On a $d(x, F) = \|n\|$.
En exprimant la première colonne du déterminant comme somme de deux colonnes :

$$\det G(u + n, x_1, \dots, x_n) = \det G(u, x_1, \dots, x_n) + \begin{vmatrix} \|n\|^2 & \star \\ 0 & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix}$$

or $\det G(u, x_1, \dots, x_n) = 0$ car la famille est liée et

$$\begin{vmatrix} \|n\|^2 & \star \\ 0 & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix} = \|n\|^2 \det G(x_1, \dots, x_n)$$

On en déduit

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$$

Exercice 34 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Il suffit de prendre $x = y$
($\Leftarrow$) Par polarisation, pour tout $x, y \in E$,

$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

Or $f(x) + f(y) = f(x + y)$ et donc

$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x \mid y)$$

Exercice 35 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Le problème est de montrer que f est linéaire.
Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = \|f(\lambda x)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda x) \mid f(x)) + \lambda^2 \|f(x)\|^2$$

or $\|f(\lambda x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$, $(f(\lambda x) \mid f(x)) = \lambda(x \mid x)$ et $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ donc

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$$

Ainsi
$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
Soient $x, y \in E$,
$$\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = \|f(x+y)\|^2 - 2(f(x+y) \mid f(x)+f(y)) + \|f(x) + f(y)\|^2$$
or $\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$,
$$(f(x+y) \mid f(x) + f(y)) = (f(x+y) \mid f(x)) + (f(x+y) \mid f(y)) = (x+y \mid x+y)$$
et
$$\|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2(f(x) \mid f(y)) + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$$
donc
$$\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = 0$$
et ainsi
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Finalement f est linéaire. De plus f conserve le produit scalaire et a fortiori la norme et donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 36 : [énoncé]
f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ donc $f(F) = F$.
Soit $y \in f(F^\perp)$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in F^\perp$.
Soit $v \in F$ on peut écrire $v = f(u)$ avec $u \in F$.
On a alors
$$(y \mid v) = (f(x) \mid f(u)) = (x \mid u) = 0$$
Ainsi $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis par égalité des dimensions $f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Soient $z = g(a) \in \mathrm{Im} g$ et $y \in \ker g$. On a $f(y) = y$ donc
$$(z \mid y) = (g(a) \mid y) = (f(a) - a \mid y) = (f(a) \mid y) - (a \mid y) = (f(a) \mid f(y)) - (a \mid y) = 0$$
Ainsi $\mathrm{Im} g \subset \ker g^\perp$ puis par égalité des dimensions $\mathrm{Im} g = \ker g^\perp$.
b) Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y = p(x)$ et $z \in \mathrm{Im} g$.
$$(p_n - p)(x) = p_n(z) = \frac{1}{n}(\mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) \circ (f - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n}(f^n(a) - a)$$
Or $\left\|f^{n+1}(a)\right\| = \|a\|$ donc
$$\|(p_n - p)(x)\| \leqslant \frac{2\|a\|}{n} \to 0$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) On a
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = f_\beta \circ f_\alpha$$
b) Par récurrence
$$f_\alpha^p = f_{(\alpha+1)^p - 1}$$
c) Si $\alpha = -1$ alors $f_\alpha(a) = 0$.
f_{-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Si $\alpha \neq -1$ alors $g = f_{-\alpha/(\alpha+1)}$ satisfait à la propriété $f_\alpha \circ g = g \circ f_\alpha = \mathrm{Id}$ donc f_α inversible.
d) Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = \mathrm{Id}$.
Si $\alpha = -2$ alors f_α est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Dans les deux cas $f_\alpha \in \mathcal{O}(E)$.
Si $\alpha \neq 0, -2$ alors $f_\alpha(a) = (1+\alpha).a$ puis
$$\|f_\alpha(a)\| = |1+\alpha| \neq 1 = \|a\|$$
et donc $f_\alpha \notin \mathcal{O}(E)$.

Exercice 39 : [énoncé]
Il existe une seule rotation (et non deux) qui envoie u sur v, celle d'angle (u, v).
Reste à déterminer les réflexions qui échangent u et v. Soit s une telle réflexion.
Si $u = v$ alors s est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$.
Si $u \neq v$ alors s est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u - v)^\perp$.

Exercice 40 : [énoncé]
Posons $r = \mathrm{Rot}_\theta$ et $s = \sigma_D$.
$(s \circ r \circ s) \circ r = (s \circ r)^2 = \mathrm{Id}$ car $s \circ r \in O^-(E)$ et c'est donc une réflexion.
Par suite $s \circ r \circ s = r^{-1} = \mathrm{Rot}_{-\theta}$.
$s \circ (r \circ s \circ r) = (s \circ r)^2 = \mathrm{Id}$ donc $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

Exercice 41 : [énoncé]
Si $\sigma \circ r = r \circ \sigma$ alors $r = \sigma \circ r \circ \sigma$ or $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$ donc $r = r^{-1}$. Ainsi, si σ et r commutent alors $r = \mathrm{Id}$ ou $r = \mathrm{Rot}_\pi$. La réciproque est immédiate.

Exercice 42 : [énoncé]
$A \in \mathcal{O}(3)$ donc $f \in \mathcal{O}(E)$

Soit $u = xi + yj + zk \in E$.

$$f(u) = u \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases}$$

f est une rotation autour de l'axe dirigé et orienté par $u = 3i + j + k$.
Notons θ son angle.
$\cos\theta = -5/6$ et $\mathrm{Det}(u, i, f(i)) < 0$ donc

$$\theta = -\arccos(-5/6)$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) Les vecteurs suivants conviennent

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + k),\ v = j \text{ et } w = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + k)$$

b)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc f est le quart de tour direct autour de la droite dirigée et orientée par u.

Exercice 44 : [énoncé]
a) f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $w = i + j$ et d'angle $\theta = \pi/3$.
b) f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $w = i - 4k$ et d'angle $\theta = -\arccos(-8/9)$.
c) f est le retournement d'axe dirigé par $w = i + 4j + k$.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Par orthogonalité et unitarité des colonnes

$$A \in O(3) \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 1 \text{ et } 2ab + b^2 = 0$$

Ainsi

$$A \in O(3) \Leftrightarrow (a, b) \in \{(1, 0), (-1, 0), (1/3, -2/3), (-1/3, 2/3)\}$$

b) Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$.
Si $a = -1$ et $b = 0$ alors $f = -\mathrm{Id}$.
Si $a = 1/3$ et $b = -2/3$ alors f est la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.
Si $a = -1/3$ et $b = 2/3$ alors f est opposée à la transformation précédente, c'est le retournement d'axe dirigé par $w = i + j + k$.

Exercice 46 : [énoncé]
Soit $\mathcal{C} = (u, v, w)$ la base orthonormée définie par
$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j), v = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k), w = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

$$\Omega = P.\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = {}^tP$$

On peut aussi procéder en utilisant la formule

$$f(x) = \cos\theta.x + \sin\theta.u \wedge x$$

avec $u = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $x \in \{u\}^\perp$ mais ce n'est pas plus rapide.

Exercice 47 : [énoncé]
a) $(u \mid v) = (f(u) \mid f(v)) = (u \mid -v) = -(u \mid v) = 0$ donc $v \perp u$ et f est un retournement.
b) Soit g un retournement d'axe D' orthogonal à D et $h = g \circ f$.
h est une rotation et $h(u) = (g \circ f)(u) = g(u) = -u$ donc h est un retournement d'axe orthogonal à D et $f = g^{-1} \circ h = g \circ h$.

Exercice 48 : [énoncé]
Si $f \circ s = s \circ f$ alors $f(s(u)) = s(u)$ donc $s(u) = u$ ou $s(u) = -u$.
Si $s(u) = -u$ alors s est la réflexion par rapport à $P = \{u\}^\perp$.
Si $s(u) = u$ alors u appartient au plan de réflexion P et v est un vecteur de ce plan orthogonal à u alors $s(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ est aussi un vecteur de ce plan orthogonal à u. Or ce ne peut être v, c'est donc $-v$ et par suite f est un retournement.
Inversement : ok

Exercice 49 : [énoncé]
a) Si les deux rotations ont le même axe, il est connu que celles-ci commutent.
Si on considère deux retournements d'axes orthogonaux, alors relativement à une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs dirigeraient leurs axes, leurs matrices sont $\mathrm{diag}(1, -1, -1)$ et $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$ qui commutent.
b) $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$ donc $g(u)$ appartient à l'axe de f.
Comme $\|g(u)\| = \|u\|$, on a $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.

c) Si $g(u) = u$ alors u appartient à l'axe de la rotation g et donc f et g ont même axe.
d) Supposons $g(u) = -u$. Soit v un vecteur unitaire de l'axe de la rotation g.
On a $(u \mid v) = (g(u) \mid g(v)) = (-u \mid v) = -(u \mid v)$ donc $(u \mid v) = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. De plus, puisque $u \in \{v\}^\perp$ et $g(u) = -u$, g est un retournement.
Enfin, comme ci-dessus, on a aussi $f(v) = \pm v$. Or le cas $f(v) = v$ est à exclure puisque les axes de f et g sont orthogonaux. Il reste donc $f(v) = -v$ qui donne que f est un retournement.

Exercice 50 : [énoncé]
Si $a = 0$, $r_a = \mathrm{Id}$.
Si $a \neq 0$ alors dans une base orthonormée directe de premier vecteur $a/\|a\|$, la matrice de f_a est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}$ et par calcul celle de r_a est $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\|a\| & -\sin\|a\| \\ 0 & \sin\|a\| & \cos\|a\| \end{pmatrix}$. r_a est donc une rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle $\|a\|$.

Exercice 51 : [énoncé]
r est une rotation, définissons D son axe (droite vectorielle orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$) et θ son angle.
Dans une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour $x \in E$,

$$(s \circ r \circ s)(s(x)) = s(r(x))$$

Dans la base orthonormée $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ de E, un calcul direct donne que la matrice de $s \circ r \circ s$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si $\det s = 1$, la famille $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ est directe et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $s(\vec{u})$ et d'angle θ.
Si $\det s = -1$, la famille $(s(\vec{u}), s(\vec{v}), s(\vec{w}))$ est indirecte et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $s(\vec{u})$ et d'angle $-\theta$.

Exercice 52 : [énoncé]
On a

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(u)) = -g(u)$$

et pour $g(v) \perp g(u)$,

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(v)) = g(v)$$

Ainsi $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la réflexion par rapport à $g(u)^\perp$.

Exercice 53 : [énoncé]
f et g sont des rotations vectorielles et puisque $f \neq g$, on peut supposer, quitte à échanger, que $f \neq \mathrm{Id}$.
Si u dirige l'axe de f alors $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$ donc $g(u)$ appartient à l'axe de f puis $g(u) = \lambda u$. Or g est une isométrie donc $g(u) = \pm u$. Si $g(u) = u$ alors g est une rotation de même axe que f. Si $g(u) = -u$ alors v un vecteur unitaire de l'axe de la rotation g. On a $(u \mid v) = (g(u) \mid g(v)) = (-u \mid v) = -(u \mid v)$ donc $(u \mid v) = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. De plus, puisque $u \in \{v\}^\perp$ et $g(u) = -u$, g est un demi-tour et il en est de même pour f.

Exercice 54 : [énoncé]
Soit R une rotation solution (s'il en existe).
La rotation R n'est pas l'identité et son axe est dirigé par le vecteur $u = i - j + k$. Orientons cet axe par ce vecteur. Pour déterminer l'angle θ de la rotation, déterminons l'image d'un vecteur orthogonal à l'axe. Considérons

$$v = -2i - j + k = -3.i + u$$

Le vecteur v est orthogonal à u et

$$R(v) = i + 2j + k$$

On a

$$\cos\theta = \frac{(v \mid R(v))}{\|v\| \, \|R(v)\|} = -\frac{1}{2}$$

et le signe de $\sin\theta$ est celui de

$$\mathrm{Det}\,(v, R(v), u) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 > 0$$

On en déduit que R n'est autre que la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $\theta = -2\pi/3$.
Inversement, cette rotation est solution car pour celle-ci le vecteur u est invariant alors et le vecteur v est envoyé sur le vecteur $R(v)$ du calcul précédent ce qui entraîne que i est envoyé sur $-j$.

Exercice 55 : [énoncé]
Posons
$$R_1 = \text{Rot}_{k,\pi/2} \text{ et } R_2 = \text{Rot}_{\cos\theta i+\sin\theta j,\pi}$$
La composée de deux rotations est une rotation, donc $R_1 \circ R_2$ est une rotation.
Puisque les vecteurs k est $u = \cos\theta i + \sin\theta j$ sont orthogonaux
$$R_2(k) = -k$$
et donc
$$R_1 \circ R_2(k) = -k$$
On en déduit que $R_1 \circ R_2$ est un retournement dont l'axe est orthogonal à k i.e. inclus dans $\text{Vect}(i, j)$.
Puisque
$$R_2(u) = u \text{ et } R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$
on a
$$R_2 \circ R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$
et donc
$$u + R_2 \circ R_1(u) = (\cos\theta - \sin\theta)i + (\cos\theta + \sin\theta)j \neq 0$$
dirige l'axe du retournement.

Exercice 56 : [énoncé]
Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales, c'est donc une matrice orthogonale.
En développant selon une rangée $\det M = -1$.
Puisque la matrice M est de surcroît symétrique, c'est une matrice de réflexion par rapport à un plan. Ce plan est celui de vecteur normal ${}^t(1, 1, 1)$.

Exercice 57 : [énoncé]
$x \in \ker f \Leftrightarrow x$ et u colinéaires. Par suite $\ker f = \text{Vect}(u)$.
Par le théorème du rang $\dim \text{Im} f = 2$.
Puisque $\forall x \in E$, $f(x) = u \wedge x \in \{u\}^\perp$, on a $\text{Im} f \subset \{u\}^\perp$ puis par égalité des dimensions $\text{Im} f = \{u\}^\perp$.

Exercice 58 : [énoncé]
Si l'équation admet une solution x alors on a $a \wedge x = b$, puis
$(a \mid a \wedge x) = (a \mid b) = 0$.
Si $(a \mid b) \neq 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $(a \mid b) = 0$ alors cherchons une solution particulière x_0 de la forme $\lambda(a \wedge b)$.
On obtient $x_0 = \frac{b\wedge a}{\|a\|^2}$ solution particulière.
Soit $x \in E$, $x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow a \wedge (x - x_0) = 0$
Par suite $\mathcal{S} = x_0 + \text{Vect}(a)$.

Exercice 59 : [énoncé]
Si $a = 0$, ok. Sinon, les trois vecteurs sont coplanaires car orthogonaux à a.

Exercice 60 : [énoncé]
On a
$$\text{Det}(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = ((a \wedge b) \wedge (b \wedge c) \mid c \wedge a)$$
or par double produit vectoriel
$$(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = ((a \wedge b) \mid c)b = \text{Det}(a, b, c)b$$
et puisque $(b \mid c \wedge a) = \text{Det}(b, c, a)$ on obtient
$$\text{Det}(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = \text{Det}(a, b, c)\text{Det}(b, c, a) = \text{Det}(a, b, c)^2$$

Exercice 61 : [énoncé]
$\|f(x)\|^2 = (x \mid a)^2 + \|a \wedge x\|^2 = \|x\|^2$ car $\|a\| = 1$ donc $f \in O(E)$.
Si $f(x) = x$ alors $a \wedge ((x \mid a)a + a \wedge x) = a \wedge x$ conduit à $a \wedge x = 0$ puis $x \in \text{Vect}(a)$.
Inversement, si $x \in \text{Vect}(a)$ alors $f(x) = x$.
f est une rotation autour de $D = \text{Vect}(a)$. Orientons D par a.
Pour $x \in \{a\}^\perp$, on a $f(x) = a \wedge x = \text{Rot}_{\pi/2}(x)$.
Finalement f est la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle $\pi/2$.

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E telle que $i = u$.
$$f(i) = (\alpha + \beta)i,\ f(j) = \alpha j + \gamma k \text{ et } f(k) = \alpha.k - \gamma j$$
Par suite
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\gamma \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \Omega(\alpha, \beta, \gamma)$$

On a

$$\Omega(\alpha,\beta,\gamma)\in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha^2+\gamma^2=1\end{cases}$$

f apparaît alors comme la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ où $\cos\theta=\alpha$ et $\sin\theta=\gamma$.

Exercice 63 : [énoncé]
Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de E.
Supposons f est rotation vectorielle. $(f(\vec{i}),f(\vec{j}),f(\vec{k}))$ est une base orthonormée directe donc $f(\vec{i}),f(\vec{j})$ sont unitaires, $f(\vec{i}\wedge\vec{j})=f(\vec{k})=f(\vec{i})\wedge f(\vec{j})$ etc puis par linéarité $\forall\vec{u},\vec{v}\in E, f(\vec{u}\wedge\vec{v})=f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.
Inversement, supposons $\forall\vec{u},\vec{v}\in E, f(\vec{u}\wedge\vec{v})=f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.
On a $f(\vec{k})=f(\vec{i})\wedge f(\vec{j})$ et consort donc $f(\vec{i}),f(\vec{j}),f(\vec{k})$ est une famille orthogonale.
On a $\left\|f(\vec{k})\right\|=\left\|f(\vec{i})\right\|\left\|f(\vec{j})\right\|$ et consort donc $\left\|f(\vec{k})\right\|=\left\|f(\vec{k})\right\|\left\|f(\vec{i})\right\|^2$.
Si $f(\vec{i})=0$ alors $f(\vec{j})=f(\vec{k})=0$ et donc $f=0$.
Nécessairement $f(\vec{i})\neq 0$ et donc $\left\|f(\vec{k})\right\|=1$. De même $\left\|f(\vec{i})\right\|=\left\|f(\vec{j})\right\|=1$.
$(f(\vec{i}),f(\vec{j}),f(\vec{k}))$ est une base orthonormée.
Enfin, comme $f(\vec{k})=f(\vec{i})\wedge f(\vec{j})$, c'est une base orthonormée directe.
Puisque f transforme une base orthonormée directe en une autre, $f\in O^+(E)$, c'est donc une rotation.