Représentations matricielles

L'objet de ce chapitre est d'établir une correspondance entre deux familles de problèmes :

- Les problèmes **géométriques,** qui s'expriment dans le langage de l'algèbre linéaire (vecteurs, applications linéaires) ;
- Les problèmes **numériques,** qui s'expriment dans le langage des matrices.

Nous allons constater que les problèmes géométriques **en dimension finie** trouvent des formulations équivalentes en termes de matrices. Le calcul matriciel permet ensuite de les étudier de manière uniformisée.

I Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

I.1 Matrice d'un vecteur

Déf. • Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
On choisit une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ de E.
Si $\vec{u}$ est un vecteur de E, la **matrice (des coordonnées) de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$** est la matrice-colonne de taille n dont les coefficients sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. On la note $\underset{\mathscr{B}}{\mathbf{mat}}(\vec{u})$**.** Ainsi :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i.$$

Ex. ✻ **1)** Matrice des coordonnées du vecteur $P = X^2 - X + 2$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ puis dans la base $\mathscr{B} = (1, X+1, X^2-1)$.
2) Matrice des coordonnées du vecteur $u = (2, -1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base $\mathscr{B} = \big((1,1), (1,-1)\big)$.

Attention ❢ La matrice d'un vecteur **dépend du choix de la base.**

Propr. • Correspondance vecteurs / matrices-colonne

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :

1) Deux vecteurs de E sont égaux si et seulement si ils ont la même matrice dans la base $\mathscr{B}$.
2) À toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ correspond un vecteur $\vec{u}$ de l'espace E dont il est la matrice dans la base $\mathscr{B}$.

Démo. ⇝ Points évident en utilisant la relation $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \vec{e}_k$.

Propr. • Matrices de vecteurs et opérations

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de E, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u} + \vec{v}) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u}) + \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\lambda \, \vec{u}) = \lambda \, \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u}).$$

Démo. ⇝ Conséquences du premier cours d'algèbre linéaire.

Les deux propriétés précédentes démontrent qu'une fois qu'on a choisi une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E, l'application suivante est un *isomorphisme* :

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \vec{u} & \longmapsto & \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u}), \end{array} \quad \text{de bijection réciproque} \quad \Phi_{\mathscr{B}}^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} x_k \, \vec{e}_k. \end{array}$$

I.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Déf. • Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n,
$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E,
$\mathscr{B}$ une base de E.
La **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs $\vec{u}_k$ dans la base $\mathscr{B}$. On la note $\underset{\mathscr{B}}{\mathbf{mat}}(\mathscr{F})$**.**

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,j} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & \dots & x_{i,j} & \dots & x_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1, p]\!], \ u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \, \vec{e}_i.$$

Ex. ✻ Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, matrice de la famille $\mathscr{F} = (X, \, X(X-1), \, X(X-1)^2)$ dans la base canonique.

II Matrice d'une application linéaire

II.1 Définitions

Déf. • **Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p,
F un espace vectoriel de dimension finie n,
$f : E \to F$ une application linéaire.

1) On choisit $\mathscr{U} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E,
$\mathscr{V} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base de F.

La **matrice de f dans les bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$** est la matrice de taille (n, p) dont la j^{e} colonne comporte les coordonnées du vecteur $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathscr{V}$. On note cette matrice $\underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathbf{mat}}(f)$.

$$\underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,j} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & \dots & x_{i,j} & \dots & x_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\, \vec{\varepsilon}_i.$$

2) Quand f est un endomorphisme ($E = F$), il est possible de prendre pour $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ une même base $\mathscr{B}$ de E. On parle alors de la **matrice de f dans <u>la</u> base $\mathscr{B}$** et on la note $\underset{\mathscr{B}}{\mathbf{mat}}(f)$.

Attention ❢ Là encore, la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies. Il faut donc toujours les préciser.

Rem. ◇ Si M est la matrice de f dans deux bases :
- Le nombre de lignes de M est la dimension de l'espace d'arrivée de f ;
- Le nombre de colonnes de M est la dimension de l'espace de départ de f.

Ex. ✻ **1)** Matrice de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x + y, x - y, -3y)$ dans les bases canoniques $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2) Matrice de l'endomorphisme $\Delta : P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Matrice de l'identité de $\mathbb{R}^3$ dans diverses bases.

***Exercice* 1** ► Soit $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ et $\vec{c} = (1, 1, 1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{c})$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, que $\mathscr{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. et que la projection sur F parallèlement à G est

$$p : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-x + 2y - z,\ -2x + 3y - z,\ -2x + 2y).$$

2) Écrire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathscr{B}$.

II.2 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

Les applications linéaires de E dans F sont fidèlement représentées par les matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $p = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$ au sens des trois propriétés suivantes :

Propr.1 • **Deux applications linéaires f et g ayant même matrice sur un même couple de bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ sont égales.**

Démo. ☞ Si deux applications linéaires ont même matrice, elles transforment la base $\mathscr{U}$ en la même famille de vecteurs. Or une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base : c'est donc que ces applications linéaires sont égales.

Propr.2 • **Application linéaire donnée par sa matrice dans un couple de bases**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions respectives p et n,
$\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ des bases de E et F.
On se donne une matrice M quelconque de taille (n, p).
Alors il existe une application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice dans les bases $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ est M.

Démo. ☞ On se donne une matrice M quelconque. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base $\mathscr{U}$ de l'espace E et $\vec{u}_j$ le vecteur de l'espace d'arrivée F dont la matrice dans la base $\mathscr{V}$ est la j-ème colonne de M. Reste à introduire l'application linéaire f qui envoie $\vec{e}_j$ sur $\vec{u}_j$: elle a pour matrice M dans les bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$.

Important ✪ Lorsque les bases $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont des bases canoniques, il est assez aisé d'expliciter l'application f correspondant à une matrice donnée (voir plus bas les applications canoniquement associées à une matrice). Mais cela se complique si ces bases sont quelconques !

Propr.3 • **Matrices d'applications linéaires et opérations**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie,
$\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ des bases de E et F,
f et g deux applications linéaires de E dans F, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $\underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f + g) = \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f) + \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(g)$ et $\underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(\lambda f) = \lambda \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f)$.

Ces trois propriétés se résument en un seul théorème, qui nous permet d'obtenir la dimension de l'espace vectoriel usuel $\mathscr{L}(E, F)$:

Thm • **$\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On choisit $\mathscr{U}$ une base de E, $\mathscr{V}$ une base de F.

Alors l'application $\Psi_{\mathscr{U},\mathscr{V}} : \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$f \longmapsto \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f)$$

Démo. La propr. 3 donne la linéarité, la propr. 1 l'injectivité et la propr. 2 la surjectivité.

Coroll. • **Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$**

Soit E et F deux espaces vectoriels **de dimension finie.** Alors :

- $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = \dim(E) \times \dim(F)$.
- $\mathscr{L}(E)$ est dimension finie et $\dim\big(\mathscr{L}(E)\big) = (\dim E)^2$.

Démo. On sait que $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est de dimension finie $p \times n = np$. Puisque cet espace est isomorphe à $\mathscr{L}(E,F)$, il en est de même pour $\mathscr{L}(E,F)$.

Ex. ✻ $\dim\big(\mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)\big) =, \quad \dim\big(\mathscr{L}(\mathbb{C}_3[X])\big) = .$

Lorsque, dans un problème matriciel, on souhaite voir une matrice comme une application linéaire, on fait appel à l'**application canoniquement associée à cette matrice :**

Déf. • Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ quelconque.

On appelle **application linéaire canoniquement associée à M** l'unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est M.

Rem. ◇ Son existence est donnée par la propriété 2, son unicité par la propriété 1.

Ex. ✻ Application linéaire canoniquement associée à $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

II.3 Interprétations du produit matriciel

Thm • Interprétations vectorielles du produit matriciel

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On choisit des bases $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de chacun d'entre eux.

1) Si $\vec{x}$ est un vecteur de E et $f : E \to F$ est linéaire, alors $\underset{\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}\big(f(\vec{x})\big) = \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{mat}}(\vec{x})$.

2) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $\underset{\mathscr{U},\mathscr{W}}{\mathrm{mat}}(g \circ f) = \underset{\mathscr{V},\mathscr{W}}{\mathrm{mat}}(g) \times \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ce théorème est très important car il va permettre, associé au principe que deux objets (vecteurs ou applications linéaires) sont égaux si et seulement si ils ont même matrice, de **traduire de nombreux problèmes vectoriels dans le langage matriciel et vice-versa.**

Exemples typiques :

1) Calcul d'images de vecteurs

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire dont la matrice M est $\left(\begin{smallmatrix} 4 & e \\ 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans les bases $\mathscr{U} = \big((-1,0),\ (2,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{V} = \big(1,\ X+1,\ (X+1)^2\big)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Calculer l'image par f du vecteur $u = (1,2)$.

2) Calcul de composées d'applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$f : (x,y,z) \mapsto (4x - y + 5z,\ -3x + 2y - 5z,\ -3x + y - 4z).$$

Montrer que f est une projection.

3) Résolution d'équations vectorielles

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Résoudre l'équation $f(P) = (1,2)$.

4) Preuves des propriétés du calcul matriciel

Preuve de l'associativité du produit de matrices.

On en tire aussi l'équivalence entre isomorphismes et matrices inversibles :

Propr. • Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **même** dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ des bases de ces espaces, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Si A est la matrice de f dans les bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, alors

$$A \text{ est inversible} \iff f \text{ est bijectif}$$

et dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $(\mathscr{V}, \mathscr{U})$.

Démo. À l'aide de la caractérisation algébrique des isomorphismes.

Ex. ✻ Preuve que $f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X],\ P \mapsto P + P'$ est un isomorphisme.

III Changements de bases

III.1 Matrices de passage

Déf. • Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_n{}')$ deux bases de E.

La **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. On note cette matrice $\mathbf{P}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$. Elle contient donc les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i,1} & \cdots & p_{i,j} & \cdots & p_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Rem. ◇ Une matrice de passage est toujours une matrice carrée. La base $\mathscr{B}$ est communément appelée **ancienne base** et la base $\mathscr{B}'$ **nouvelle base.**

Ex. ✻ **1)** Dans $E = \mathbb{R}^3$, en prenant $\mathscr{B}$ la base canonique et $\mathscr{B}' = \big((1,2,-1),(2,1,0),(-1,1,1)\big)$.

2) Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, en prenant $\mathscr{B}$ la base canonique et $\mathscr{B}' = \big((X+1)^k\big)_{k\in[\![0,4]\!]}$.

Propr. • Matrices de passages comme matrice de l'endomorphisme identité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$,
$\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e}'_1,\dots,\vec{e}'_n)$ deux bases de E.
Alors $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E)$.

Démo. Conséquence directe de la définition des objets.

Attention ❢ L'ordre des bases s'inverse, attention à ne pas se tromper !

Propr. • Inversibilité des matrices de passages

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$,
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Alors la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Démo. Posons $P = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$. Alors $P = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E)$. Comme l'identité est un automorphisme de E, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

III.2 Effet de changements de bases sur les matrices de vecteurs et d'applications linéaires

Thm • Formule de changement de base pour les vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie,
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de E.
On note $X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u})$, $X' = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\vec{u})$,
P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Alors :

$$X = P\,X'.$$

Démo. $X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\vec{u}) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\big(\mathrm{Id}_E(\vec{u})\big) = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E) \times \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\vec{u}) = P\,X'$.

Attention ❢ L'ordre d'écriture de la formule est assez contre-intuitif : en effet, on exprime les anciennes coordonnées de $\vec{u}$ en fonction des nouvelles coordonnées.

Ex. ✻ Dans $E = \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1,1,3)$ dans la base $\mathscr{B}' = \big((1,2,-1),\ (2,1,0),\ (-1,1,1)\big)$. Est-ce une méthode rentable ?

Thm • Formule de changement de base pour les endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie,
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit f un endormorphisme de E.
On note $M = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f)$, $M' = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(f)$,
P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Alors :

$$M' = P^{-1}\,M\,P.$$

Démo. $M' = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(f) = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E) = P^{-1}\,M\,P$.

Rem. ◇ Ici, on exprime la matrice de f dans la nouvelle base en fonction de sa matrice dans l'ancienne base : « M' en fonction de M ». En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient M en fonction de M' :

$$M' = P^{-1}\,M\,P \quad \text{donc} \quad P\,M'\,P^{-1} = \mathrm{I}_n\,M\,\mathrm{I}_n \quad \text{donc} \quad M = P\,M'\,P^{-1}.$$

Ex. ✻ Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = \big((1,2,-1),\ (2,1,0),\ (-1,1,1)\big)$.

Thm • Formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,
$\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ deux bases de E, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ deux bases de F.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On note $M = \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f)$ et $M' = \underset{\mathscr{U}',\mathscr{V}'}{\mathrm{mat}}(f)$,
P la matrice de passage de la base $\mathscr{U}$ à la base $\mathscr{U}'$,
Q la matrice de passage de la base $\mathscr{V}$ à la base $\mathscr{V}'$.
Alors :

$$M' = Q^{-1}\,M\,P.$$

Démo. $M' = \underset{\mathscr{U}',\mathscr{V}'}{\mathrm{mat}}(f) = \underset{\mathscr{U}',\mathscr{V}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E) = \underset{\mathscr{V},\mathscr{V}'}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_F) \times \underset{\mathscr{U},\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{\mathscr{U}',\mathscr{U}}{\mathrm{mat}}(\mathrm{Id}_E) = Q^{-1}\,M\,P$.

IV Noyau, image et rang d'une matrice

IV.1 Noyau et image d'une matrice

Déf. • Noyau et image d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1) Le **noyau de la matrice** A est l'ensemble des matrices-colonne X de taille p telles que $AX = 0$. On le note **Ker(A).** Formellement :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\right\}.$$

2) L'**image de la matrice** A est l'ensemble des matrice-colonne Y de taille n pouvant s'écrire sous la forme AX où X est une matrice-colonne de taille p. On le note **Im(A).** Formellement :

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{AX,\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\right\}.$$

Ex. ✻ Noyau et image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Propr. • Propriétés des noyaux et images de matrices

Soit A une matrice de taille (n, p).

1) $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:
c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$.

2) $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:
c'est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

3) Soit $f : E \to F$ une application linéaire,
$\vec{x}$ un vecteur de E, $\vec{y}$ un vecteur de F,
$\mathscr{U}$ une base de E et $\mathscr{V}$ une base de F.
On note A la matrice de f dans les bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$,
$X = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{mat}}(\vec{x})$ et $Y = \underset{\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(\vec{y})$. Alors :

$$\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f) \iff X \in \mathrm{Ker}(A) \quad \text{et} \quad \vec{v} \in \mathrm{Im}(f) \iff Y \in \mathrm{Im}(A).$$

4) Avec les notations précédentes, on a $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$
et $\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Démo. ↪ Sur les notes de cours.

Rem. ◇ $\mathrm{Im}(A)$ est aussi l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ est compatible.

Dans le paragraphe qui suit, on donne une **autre définition du rang d'une matrice** (qui était jusqu'ici le nombre de pivots obtenus après échelonnement de la matrice). Cette définition vient remplacer la définition précédente... que l'on retrouvera sous forme de théorème dans le dernier paragraphe.

IV.2 Rang d'une matrice

Déf. • Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang de la matrice** A est le rang de la famille formée par ses colonnes. On le note **rg(A).**

Ex. ✻ Rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, de toute matrice diagonale.

Propr. • Soit A une matrice de taille (n, p). Alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Démo. ↪ Par définition, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1, \dots, A_p)$ où $A_1, \dots, A_p$ sont les colonnes de A. En notant $F = \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_p)$, c'est donc $\dim(F)$. Or $\dim(F) \leqslant p$ car $(A_1, \dots, A_p)$ est une famille génératrice de F ; et $\dim(F) \leqslant n$ car F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Thm • Interprétations du rang d'une matrice

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) Pour toute matrice A, $\mathrm{rg}(A) = \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big)$.

2) Le rang d'une famille de vecteurs de E est le rang de sa matrice A dans n'importe quelle base de E.

3) Le rang d'une application linéaire de E dans F est le rang de sa matrice A dans tout couple de bases de E et de F.

Démo. ↪ **1)** En notant $A_1, \dots, A_p$ les colonnes de A, on a par définition $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1, \dots, A_p) = \dim\big(\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_p)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big)$ d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent.

2) On introduit U_k la matrice de $\vec{u}_k$ dans la base $\mathscr{B}$. Par définition, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(U_1, U_2, \dots, U_p)$. Notons $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $F' = \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$. Ce sont respectivement des sous-espaces vectoriels de E et de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (n étant la dimension de E). On vérifie alors que l'application $\Psi : F \to F'$, $\vec{u} \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$ est un isomorphisme. En conséquence, $\dim(F) = \dim(F')$, autrement dit $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$.

3) Supposons que A soit la matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans les bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$. On note $\mathscr{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$. Puisque chaque colonne de A est la matrice de $f(\vec{e}_k)$ dans la base $\mathscr{B}_F$, le point précédent permet de dire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)\big)$. Or la famille $\mathscr{G} = \big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On en tire que $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{G})\big) = \mathrm{rg}(A)$.

Ex. ✻ **1)** Rang de $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ où $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X + 1$ et $P_4 = X^2 + X$.

2) Rang de $\Delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$.

Thm • Théorème du rang pour les matrices

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $p = \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) + \mathrm{rg}(A)$.

Démo. ↪ Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. $\mathbb{K}^p$ étant de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à f et obtenir

$$\dim(\mathbb{K}^p) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Or $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ ont même dimension, de même que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(A)$, donc le théorème est démontré.

Ex. ✻ Déterminer le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propr. • Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.

Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$,
si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$,
si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démo. On prend f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On sait déjà que A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme. D'une part, c'est équivalent à $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ donc à $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. D'autre part, c'est équivalent à $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$ donc à $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Enfin, puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^n$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$ est équivalent à $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$, donc à $\mathrm{rg}(f) = n$, donc à $\mathrm{rg}(A) = n$.

IV.3 Rang et opérations sur les lignes et les colonnes

Lemme • Multiplier une matrice à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas son rang.

Démo. Il s'agit de la traduction matricielle du fait que composer une application linéaire par un isomorphisme ne change pas son rang.

Thm • Pivot de Gauss et rang des matrices

1) Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne change pas son rang.

2) Deux matrices équivalentes (par lignes ou par colonnes) ont même rang.

3) Si une matrice est échelonnée (par lignes ou par colonnes), son rang est égal au nombre de ses pivots.

Démo. **1)** On a vu qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice revient à la multiplier par une matrice élémentaire, qui est inversible. Le lemme précédent permet de conclure.

2) Deux matrices sont équivalentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires : elles ont donc même rang.

3) Si A est échelonnée par lignes, on commence par la réduire, opération pendant laquelle le rang et le nombre de pivots est conservé. Ensuite, par des opérations sur les colonnes, on annule complètement les colonnes dépourvues de pivot. Le rang de la matrice obtenue étant le rang de ses colonnes, il est maintenant évident qu'il s'agit du nombre de ses pivots.
On raisonne de manière similaire pour les matrices échelonnées par colonnes.

Propr. • Lien entre rang des matrices et rang d'un système linéaire

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice de ses **coefficients**.

Attention On ne tient pas compte du second membre, il ne s'agit pas du rang de la matrice augmentée $(A \,|\, B)$.

Démo. Le rang d'un système linéaire était défini comme le nombre de pivots obtenu après échelonnement de la matrice du système. On vient de voir que ce nombre était le rang de la matrice.

Propr. • Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1) Le rang de A^{T} est égal au rang de A.

2) Le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille formée par ses lignes.

Rem. ◇ Les lignes de A sont des vecteurs de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Démo. **1)** On part de la matrice A est on l'échelonne à l'aide d'opérations sur les lignes : on obtient une matrice B. On a vu que le rang de A est le nombre de pivot apparaissant dans B. La matrice A^{T} contient les mêmes nombres que A en échangeant le rôle des lignes et des colonnes. En effectuant les mêmes opérations élémentaires que précédemment mais **sur les colonnes**, on parvient à la matrice B^{T} qui est échelonnée par colonnes. Son rang est le nombre de ses pivots, qui est le même que celui de B ; ainsi $\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(B^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$.

2) La rang de A est égal au rang de A^{T}, donc au rang des colonnes de A^{T}. Or les colonnes de A^{T} sont des réécritures verticales des lignes de A, ce qui montre que leur rang est aussi le rang des lignes de A.

Ex. ✻ Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

IV.4 Bilan : les notions de rang

Le rang concerne les objets suivants :

- **les systèmes linéaires :**
  le rang d'un système est le nombre de pivots après échelonnement.
- **les familles de vecteurs $\mathscr{F}$:**
  $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big)$.
- **les applications linéaires f :**
  $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.
- **les matrices A :**
  $\mathrm{rg}(A)$ est à la fois le rang des colonnes de A,
  le rang des lignes de A et
  la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.

Le rang d'un système linéaire / d'une famille de vecteurs / d'une application linéaire est le rang de toute matrice qui les représente.

Pour calculer le rang d'une matrice :

1) On peut éliminer toute colonne ou toute ligne qui est combinaison linéaire des autres (en particulier les colonnes et lignes nulles).

2) On peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de manière à faire apparaitre des zéros, puis échelonner la matrice.

3) Une fois ceci fait, le rang de la matrice de départ est le nombre de pivots de la matrice échelonnée.

V Déterminants

Le **déterminant** est un procédé associant un **nombre** à chaque **matrice carrée.** Le déterminant d'une matrice sera non nul si et seulement si cette matrice est inversible. En outre, les nombreuses propriétés du déterminant permettent de le calculer en pratique.

Le déterminant se généralise aux familles de vecteurs (pour déterminer s'il s'agit de bases) et aux endormorphismes (pour déterminer s'ils sont bijectifs).

Dans toute cette partie, lorsque $C_1, \ldots, C_n$ sont des matrices-colonne de taille n, on notera $[C_1, \ldots, C_n]$ la matrice carrée de taille n dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_n$. On notera $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

V.1 Déterminant d'une matrice

Thm • Déterminant des matrices carrées de taille $\boldsymbol{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul fixé. Il existe une unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois axiomes suivants :

1) **$\boldsymbol{f}$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable :**
Pour toutes colonnes $(C_1, \ldots, C_n) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout numéro de colonne $j \in [\![1, n]\!]$,

$$f\left([C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{C_j}}, \ldots, C_n]\right) = \underline{\boldsymbol{\lambda}}\, f\left([C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_j}}, \ldots, C_n]\right),$$

$$f\left([C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_j + C'_j}}, \ldots, C_n]\right) = f\left([C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_j}}, \ldots, C_n]\right) + f\left([C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C'_j}}, \ldots, C_n]\right).$$

2) **$\boldsymbol{f}$ est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable :**
Pour toutes colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$, pour tous numéros de colonnes $j < k$:

$$f\left(C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_j}}, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_k}}, \ldots, C_n\right) = -f\left(C_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_k}}, \ldots, \underline{\boldsymbol{C_j}}, \ldots, C_n\right).$$

3) **$\boldsymbol{f(\mathrm{I}_n) = 1}$.**

Cette unique application sera appelé **déterminant** et dorénavant notée **det.**

Pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(M)$ est un scalaire de $\mathbb{K}$ que l'on notera aussi

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Démo. Admise (peut-être démontrée l'année prochaine !)

Ex. ✻ Étude des déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2+a \\ 2 & -1 & 4-a^2 \\ 0 & 1 & 3a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

V.2 Propriétés calculatoires immédiates

Propr. • Cas immédiats de déterminants nuls

1) Toute matrice carrée dont une colonne est nulle a un déterminant nul.

2) Toute matrice carrée présentant deux colonnes identiques a un déterminant nul.

3) Toute matrice carrée dont les colonnes forment une famille liée a un déterminant nul.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Déterminant d'un multiple d'une matrice

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \det(\lambda M) = \lambda^n\, M$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ $\det(\lambda\, \mathrm{I}_n) = \lambda^n$.

Attention On constate ici que **<u>le déterminant n'est pas une application linéaire.</u>** En effet, $\det(\lambda M) \neq \lambda \det(M)$; en outre il n'y a pas de formule simple pour $\det(M + N)$.

Propr. • Déterminants de matrices simples

1) Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses éléments diagonaux.

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est le produit de ses éléments diagonaux.

3) Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Si on échange deux colonnes de M,
la matrice M' obtenue vérifie $\det(M') = -\det(M)$.

2) Si on ajoute à une colonne de M un multiple d'une autre colonne de M, la matrice M' obtenue vérifie $\det(M') = \det(M)$.

3) Si on multiplie une colonne de M par λ,
la matrice M' obtenue vérifie $\det(M') = \lambda \det(M)$.

Démo. Sur les notes de cours.

Important ✪ On peut donc calculer le déterminant de toute matrice à ce stade : il suffit de l'echelonner par colonnes en faisant attention lors des échanges de colonnes.

Ex. ✻ Calcul de $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

V.3 Déterminant d'un produit de matrices

Thm • Déterminant du produit de deux matrices
Soit A et B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démo. (admise)

Propos. • Déterminant et matrices inversibles
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.
Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Si c'est le cas, on a alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démo. Sur les notes de cours.

Important ✪ Ceci nous fournit une nouvelle méthode pratique pour établir qu'une matrice est inversible mais ne nous donne pas son inverse.

Propos. • Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes
Les opérations sur les lignes d'une matrice ont le même effet sur son déterminant que les opérations sur ses colonnes.

Démo. (à l'aide des matrices d'opérations élémentaires)

Rem. ◇ Partant de n'importe quelle matrice carrée M, on peut toujours la transformer en une matrice triangulaire par la méthode du pivot de Gauss. Cela fournit un moyen de calculer le déterminant d'une matrice.

Propos. • Déterminant de la transposée
Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(M^{\mathrm{T}}) = \det(M)$.

Démo. On échelonne M par ligne par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet de calculer son déterminant. En appliquant à ${}^tM$ les opérations analogues sur les colonnes, on arrive à la transposée de la matrice échelonnée précédente et le déterminant a été modifié de la même manière. La valeur de $\det(M^{\mathrm{T}})$ est donc la même que celle de $\det(M)$.

Propos. • Toutes les propriétés du déterminant concernant les colonnes sont donc vraies pour les lignes.

V.4 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Principe expliqué sur quelques exemples :

1) Développement de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ par rapport à la deuxième ligne ;

2) Idem par rapport à la troisième colonne ;

3) Idem après une opération astucieuse sur les colonnes.

Démo. La démonstration de la validité de cette technique est admise cette année.

Astuce Il est intéressant de développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne qui contient des coefficients simples (et dans l'idéal beaucoup de zéros).

V.5 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Déf. • Soit E un espace vectoriel de dimension finie $\underline{\boldsymbol{n}}$,
$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de $\underline{\boldsymbol{n}}$ vecteurs de E,
$\mathscr{B}$ une base de E.
Le **déterminant de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ dans la base** $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice de cette famille de vecteurs dans la base $\mathscr{B}$.
On le note $\boldsymbol{\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)}$.

Attention ❢ **Le résultat dépend de la base $\mathscr{B}$ choisie !** Il faudra donc préciser dans quelle base est calculé le déterminant d'une famille de vecteurs.

Ex. ✻ Calcul du déterminant de (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}_2[X]$, où $P_1 = X^2 - X + 1$, $P_2 = X^2 + 3X - 2$ et $P_3 = X^2 - 2X + 1$.

Propr. • Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus,

$$(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \neq 0.$$

Démo. Notons A la matrice de la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Par chaîne d'équivalences : $\mathscr{F}$ est une base de $E \iff \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n \iff \mathrm{rg}(A) = n \iff A$ est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

V.6 Déterminant d'un endomorphisme

Prop. Déf. • Déterminant d'un endomorphisme
Soit E un espace vectoriel de dimension finie,
$f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ **une** base de E.
Alors le déterminant de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ ne dépend pas du choix de la base. Ce nombre est appelé **déterminant de l'endomorphisme f** et il est noté **$\det(f)$.**

Démo. Sur les notes de cours.

Propr. • Soit f et g deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie. Alors :
1) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$;
2) f est bijectif $\iff \det(f) \neq 0$.

Démo. Sur les notes de cours.

Ex. ✻ Déterminant de l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \mapsto (y - 2z, -x + 2y - 2z, -2x + 2y - z),$$

Déterminant d'une symétrie.