MP Programme de colle n° 3

Au programme :

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

4. Polynôme caractéristique
5. Endomorphismes diagonalisables
6. Endomorphismes trigonalisables

Les démos à connaître (en rouge les plus conséquentes)

4.1a

Propriétés :

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- $\chi_{{}^tA} = \chi_A$

4.2.a

Théorème : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(K)$

Les valeurs propres de u (resp. A) sont les racines de son polynôme caractéristique : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \mathrm{Rac}(\chi_u)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \mathrm{Rac}(\chi_A)$.

4.2.c

Théorème : Si λ est valeur propre d'ordre m, alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m$

5.2.a

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ E possède une base de vecteurs propres.

$\Leftrightarrow$ E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) = n$ où $r = \mathrm{card}(Sp(u))$

$\Leftrightarrow$ χ_u est scindé et $\forall i \in [\![1, r]\!] : \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$

(m_i ordre de multiplicité de λ_i)

Corollaire : Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

5.3.a

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$ où $r = card(Sp(u))$ et soit p_i la projection de E sur E_{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ .Alors $\boxed{P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) p_i}$

5.3.a

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

6.2. a

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé

$\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme annulateur scindé

$\Leftrightarrow \mu_u$ est scindé

Attention : (iv) $\Rightarrow$ (i) est admis