Analyse asymptotique

Dans ce cours, toutes les fonctions étudiées sont définies au voisinage de a (fini ou infini). On supposera qu'elles ne s'annulent pas au voisinage de a, ce qui permet de diviser par ces fonctions. En outre, les notions exposées ici pour les fonctions s'appliquent également aux suites (au voisinage de $+\infty$ exclusivement).

I Fonctions équivalentes

Dire que deux fonctions sont *équivalentes* en a signifie informellement qu'elles se comportent approximativement de la même manière au voisinage de a. En voici la définition précise.

Déf. • Équivalence de deux fonctions

Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a.

On dit que f **est équivalente à** φ **en** a quand : ____________________

On note dans ce cas : ____________________ ou ____________________

L'intérêt de cette notion est que deux fonctions équivalentes en a partagent le même signe au voisinage de a et la même limite éventuelle en a.

Propr. • Lien entre équivalents, limites et signe des fonctions

Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a. On suppose que f et φ sont équivalentes en a. Alors :

1) Si $\lim\limits_a \varphi = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.

2) f et φ ont le même signe au voisinage du point a.

Démo. Sur les notes de cours.

Les équivalents servent donc à simplifier l'écriture d'une expression lorsque l'on étudie sa limite ou son signe au voisinage de a.

Comment obtenir des équivalents ?

- ► si on conjecture que φ est équivalente à f en a, on peut montrer que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$;
- ► sinon on part des équivalents fondamentaux ci-dessous et on en fabrique d'autres à l'aide des opérations autorisées.

Propos. • Équivalents fondamentaux

1) En a quelconque (fini ou infini), toute fonction ayant une limite **réelle non nulle** est équivalente à sa limite.

2) En $\pm\infty$, toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus haut degré.

3) En 0, toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus bas degré.

4) En 0, si f admet un DL à l'ordre n dont la partie régulière est non nulle, alors f est équivalente au terme de plus bas degré qu'on y trouve.

5) En un réel a quelconque, si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$,

alors ____________________________________

Exercice **1** ► En utilisant des équivalents, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{1-2x^2}$.

Exercice **2** ► Donner des équivalents simples en 0 de : $-2x^3-3x^2-1$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, e^x-1, $1-\cos(x)$, $(1+x)^\alpha - 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante.

Propos. • Le symbole $\sim$ est une relation d'équivalence

L'équivalence des fonctions au voisinage de a (fixé) est une relation d'équivalence :

1) $\sim$ est réflexive : on a toujours $f \sim f$;

2) $\sim$ est symétrique : si $f \sim g$, alors $g \sim f$;

3) $\sim$ est transitive : si $f \sim g$ et $g \sim h$, alors $f \sim h$.

Démo. Exercice.

Astuce En pratique, la transitivité permet d'enchaîner les symboles $\sim$.

Propos. • Opérations autorisées sur les équivalents

Le symbole $\sim$ est compatible avec les opérations multiplicatives :

1) Si $\begin{cases} f \sim \varphi \\ g \sim \psi, \end{cases}$ alors $\begin{cases} fg \sim \varphi\psi \\ \frac{f}{g} \sim \frac{\varphi}{\psi}. \end{cases}$

2) Si $f \sim \varphi$ et α est un réel <u>**constant**</u>, alors $f^\alpha \sim \varphi^\alpha$.

3) On peut effectuer des changements de variable dans les équivalents :

$$\text{Si } \begin{cases} f(X) \underset{X\to b}{\sim} \varphi(X) \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} b, \end{cases} \quad \text{alors } f\big(u(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \varphi\big(u(x)\big).$$

Astuce Dans le changement de variable, on dit qu'on a « posé $X = u(x)$ ».

Démo. Découlent des opérations sur les limites et théorèmes de composition de limite.

Exercice **3** ► Déterminer un équivalent, la limite et le signe local :
de $\dfrac{\ln(1+x^2)\left(e^{2x}-1\right)}{\left(\cos(x)-1\right)\sin(x^2-x)}$ en 0 ;   de $\left(\ln(\cos x)\right)^2$ en 0 ;
de $\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ en $+\infty$;   de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ en $+\infty$.

Le symbole $\sim$ est très pratique mais doit être manié avec une rigueur absolue. En effet, certaines opérations simples sont très tentantes alors qu'elles sont rigoureusement interdites ! Voici les erreurs à ne pas commettre :

1) Quand on manipule des équivalents, il est interdit d'additionner ou de soustraire.

Ex. ✻ En 0, on a $\cos(x) \sim e^x$ car tous les deux sont équivalents à 1.
Qu'obtient-on si on retire 1 de part et d'autre ?

Astuce ➽ **Quand on trouve qu'une fonction est équivalente à 0,** c'est sans doute qu'on a ajouté ou soustrait des équivalents. Comme on est en train d'écrire des bêtises, **on s'arrête immédiatement et on réfléchit !**

Astuce ➽ Malgré cette interdiction, additionner des équivalents peut fournir des **conjectures** intéressantes. On essaie alors de les démontrer par d'autres moyens (par exemple en utilisant le calcul sur les petits ô présenté plus bas).

2) On n'applique pas de fonction de part et d'autre d'un équivalent.
Le plus tentant est de « passer à l'exponentielle dans les équivalents ».
Cela ne marche pas du tout !

Ex. ✻ En $+\infty$, on a $x^2+x \sim x$ et pourtant e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2} : leur rapport vaut e^x et il ne tend pas vers 1.

Exception : on peut appliquer le logarithme dans la plupart des équivalents.

Propr. • Passage au logarithme dans les équivalents
Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a.

$$\text{Si } \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \quad \text{alors } \ln\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} \ln\left(\varphi(x)\right).$$

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

II Fonction négligeable devant une autre

II.1 Définition et propriétés élémentaires

Déf. • Fonction négligeable devant une autre
Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a. On dit, au choix, que **f est négligeable devant φ en a** ou que φ **est prépondérante sur f en a**

ou que **f est un petit ô de φ en a** quand ______________

On écrit alors : ______________ ou ______________

Exercice **4** ► Entre les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^4$, laquelle est négligeable devant l'autre en $+\infty$? en 0 ? Même questions pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^4}$.

Dans un développement limité, le reste $x^n\,\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$, est en fait une fonction f non explicite dont on sait juste qu'elle est négligeable devant x^n en 0. En effet :

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{x^n\,\varepsilon(x)}{x^n} = \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n).$$

On écrira dorénavant le reste d'un développement limité à l'aide de petit ô :

$$\ln(1+x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

On donne quelques règles simples de manipulation des petits ô :

Propr. • Calcul avec les petit ô

1) Transitivité
Si $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{=} o(\psi)$, alors $f \underset{a}{=} o(\psi)$.

2) Insensibilité aux constantes multiplicatives
Si λ est une constante non nulle, alors

$$f \underset{a}{=} o(\varphi) \iff \lambda f \underset{a}{=} o(\varphi) \iff f \underset{a}{=} o(\lambda\,\varphi).$$

3) Sommes de petits ô
Si $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $g \underset{a}{=} o(\varphi)$, alors $f+g \underset{a}{=} o(\varphi)$.

4) Changement de variable

$$\text{Si } \begin{cases} f(X) \underset{X\to b}{=} o(\varphi(X)) \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} b, \end{cases} \quad \text{alors } f\left(u(x)\right) \underset{x\to a}{=} o\left(\varphi(u(x))\right).$$

Démo. ➾ Sur les notes de cours.

II.2 Échelles de comparaison

Échelle de comparaion en $+\infty$
Soit α, β et λ des constantes réelles **strictement positives**. Les relations de négligeabilité permettent de placer sur un axe les fonctions usuelles suivantes (si une fonction f est placée à gauche d'une fonction g, c'est que $f = \underset{+\infty}{o}(g)$) :

De plus, si $\beta < \beta^*$, on aura

$$\ln^{\beta}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\ln^{\beta^*}(x)\right) \quad \text{mais} \quad \frac{1}{\ln^{\beta^*}(x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^{\beta}(x)}\right).$$

Même principe pour x^{α} et $e^{\lambda x}$.

Exercice **5** ► Placer sur une échelle de comparaison en $+\infty$: x, x^2, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$ $x\sqrt{x}$, $\ln^5(x)$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, e^{2x}, e^{-x}, e^{-3x}.

Échelle de comparaison en 0
Même principe, cette fois en 0, avec des exposants α et β **strictement positifs** :

Si $\alpha < \alpha^*$ et $\beta < \beta^*$, on aura $\quad x^{\alpha^*} = \underset{x\to0}{o}\left(x^{\alpha}\right) \quad$ mais $\quad |\ln(x)|^{\beta} = \underset{x\to0}{o}\left(|\ln(x)|^{\beta^*}\right)$.

Exercice **6** ► Même exercice que précédemment, mais en 0, en retirant les exponentielles et en ajoutant des valeurs absolues.

II.3 Liens entre équivalence et négligeabilité

On peut transformer tout équivalent en écriture faisant intervenir des petits ô (utile quand on a envie d'additionner des équivalents). Inversement, lorsqu'on additionne à une fonction des fonctions négligeables devant elle, la somme est équivalente à la fonction de départ.

Propr. • Lien entre équivalence et négligeabilité
Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a.
1) On a : $f \underset{a}{\sim} \varphi \iff$ ____________ $\iff$ ____________
2) Si $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont toutes négligeables devant φ, alors

____

Démo. ☞ Sur les notes de cours.

Exercice **7** ► Déterminer un équivalent en $+\infty$ et en 0^+ de $\dfrac{1-\ln(x)+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}\ln(x)}$.

Exercice **8** ► Démontrer que si $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to0}{\sim} -3x$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to0}{\sim} -x$.

III Fonction dominée par une autre

Déf. • Fonction dominée par une autre
Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a. On dit, au choix, que **f est dominée par φ en a** ou que **f est un grand Ô de φ en a** quand le rapport $\frac{f}{\varphi}$ est ____________________

On écrit alors : ____________ ou ____________

Remarques. 1) Quand $f = \underset{a}{\mathcal{O}}(\varphi)$, f est majorée au voisinage de a par une fonction de la forme $K\varphi$ où K est une constante (inconnue en général). Si $f = \underset{a}{\mathcal{O}}(\varphi)$ et que φ tend vers 0 en a, alors « φ entraîne f avec elle » : f tend également vers 0 en a, au moins aussi vite que φ. **2)** La notion de fonction dominée est utilisée en algorithmique pour évaluer la complexité d'un algorithme.

Propr. • Liens entre équivalents, fonctions négligeables et fonctions dominées
Soit f et φ deux fonctions non nulles au voisinage de a.
Alors : $\quad f = \underset{a}{o}(\varphi) \implies f = \underset{a}{\mathcal{O}}(\varphi) \quad$ et $\quad f \underset{a}{\sim} \varphi \implies f = \underset{a}{\mathcal{O}}(\varphi)$.

Démo. ☞ Si une fonction tend vers une limite finie en a (que ce soit 0 ou 1), elle est bornée au voisinage de a.

Les règles de calcul vues pour les petits ô restent valides pour les grands Ô.