Propriétés des nombres réels

Partie entière

▷ 1 Propriétés de partie entière

1) Rappeler les deux outils du cours permettant de prouver que la partie entière d'un nombre est un nombre donné.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Conjecturer puis démontrer la valeur de $\lfloor x+n \rfloor$.

3) Écrire formellement l'affirmation « E est une fonction croissante ». Démontrer cette affirmation.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Conjecturer puis démontrer l'expression de $\lfloor -x \rfloor$ (on distinguera deux cas).

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.
Donner un encadrement de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis en déduire que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

► 2

Soit x un nombre réel fixé. Montrer l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor (n-1)x \rfloor + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

► 3

On rappelle que, si a et b sont des nombres **entiers**,

$$a < b \iff a \leqslant b-1 \iff a+1 \leqslant b,$$

cette propriété n'étant bien entendu pas valable quand a et b sont des réels quelconques.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

2) Soit $(n,n') \in \mathbb{Z}^2$, $x \in \mathbb{R}$. Prouver que

$$n \leqslant x < n' \implies n \leqslant \lfloor x \rfloor < n'.$$

3) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

► 4 Suites des valeurs décimales approchées

Soit x un nombre réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les valeurs décimales approchées de x, par défaut et par excès, à 10^{-n} près.

1) Montrer que la suite a converge vers x.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10^{n+1}(a_{n+1} - a_n) \in [\![0,9]\!].$$

En déduire la monotonie de la suite a.

3) Montrer que les suites a et b sont adjacentes.

Majorants, maximum, borne supérieure etc.

▷ 5 Vrai / Faux

Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse (apporter suivant le cas une preuve ou un contre-exemple).

1) Si $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent, alors $\inf(A) \leqslant \sup(A)$.

2) Si $\sup(A)$ existe et $x > \sup(A)$, alors $x \notin A$.

3) Si $\inf(A)$ existe et $x \in A$, alors $x > \inf(A)$.

4) Si M est un majorant de A et que $M \in A$, alors $M = \sup(A)$.

5) Si A n'admet pas de maximum, alors A n'admet pas de borne supérieure.

6) Si $\inf(A)$ existe et n'appartient pas à A, alors A n'admet pas de minimum.

7) Si $\forall x \in A, x > 2$, alors $\inf(A)$ existe et $\inf(A) > 2$.

8) ♠ Si $\inf(A) = 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $1+\varepsilon \in A$.

► 6 Jouons avec les bornes supérieures

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

1) Montrer que $A \subset B \implies \sup(A) \leqslant \sup(B)$.

2) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

3) On dit que $A \leqslant B$ si $\forall (x,y) \in A \times B,\ x \leqslant y$.
Montrer que $A \leqslant B \implies \sup(A) \leqslant \sup(B)$.
Cet énoncé reste-t-il vrai si on le réécrit en substituant $<$ à $\leqslant$?

► 7 Majorations et minorations de parties

1) Soit $A = \left\{ \dfrac{2x-3}{3x+2},\ x > 0 \right\}$.

- **a.** Dresser rapidement le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{2x-3}{3x+2}$.
- **b.** Émettre des conjectures quant à l'existence et la valeur de $\sup(A)$ et $\max(A)$, puis les démontrer.

2) Soit $B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- **a.** Représenter graphiquement quelques termes de la suite $u = \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \right)_{n \geqslant 1}$.
- **b.** Démontrer que la suite u n'a pas de limite.
- **c.** Émettre des conjectures quant à $\inf(B)$, $\min(B)$, $\sup(B)$, $\max(B)$ puis les démontrer.

3) Mêmes questions pour l'ensemble

$$C = \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \right\}.$$

4) Étudier minimum, maximum, bornes inférieure et supérieure de $D = [0,1[\cap \mathbb{Q}$.