Changement de base

Exercice 1 [01276] [correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice de f dans cette base.
c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 [01277] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
b) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.
c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$?

Exercice 3 [01278] [correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
a) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.
c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 4 [00716] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (-1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.
b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.
c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 [01282] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 [01283] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.

b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.
c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 [01284] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
b) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 8 [03212] [correction]
Soient $b = (i, j)$ et $B = (I, J)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et P la matrice de passage de b à B.
Pour $x \in E$, notons

$$v = \mathrm{Mat}_b x \text{ et } V = \mathrm{Mat}_B x$$

a) Retrouver la relation entre v et V.
b) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$m = \mathrm{Mat}_b f \text{ et } M = \mathrm{Mat}_B f$$

Retrouver la relation entre m et M.
c) Par quelle méthode peut-on calculer m^n lorsqu'on connaît deux vecteurs propres non colinéaires de f.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Aisément la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puis c'est une base car formée de trois vecteurs en dimension 3.
b) $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1, f(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3)=0$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

c) On observe que $\varepsilon_3\in\ker f$ et $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathrm{Im}f$.
Le théorème du rang permet de conclure : (ε_3) est une base de $\ker f$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base de $\mathrm{Im}f$.

Exercice 2 : [énoncé]
a)

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=A$$

donc$f$ est une projection vectorielle.
b) En résolvant les équations $f(x)=x$ et $f(x)=0$ on obtient que (u,v) forme une base de $\mathrm{Im}f$ et (w) forme une base de $\ker f$ avec $u=i+j, v=i+k$ et $w=i+j+k$.
c)

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $\ker f=\mathrm{Vect}(u)$ avec $u=(1,1,1)$. $\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}(v,w)$ avec $v=(2,-1,-1), w=(-1,2,-1)$.
Comme $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est libre on peut conclure que $\ker f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) $\mathcal{C}$ est une base adaptée à la supplémentarité de $\ker f$ et Imf.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

c) f est la composée, commutative, de l'homothétie vectorielle de rapport 3 avec la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\ker f$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
b) $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}f=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Par récurrence :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n)=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Par changement de bases avec

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)=\begin{pmatrix}n+1&n&-n\\0&1&0\\n&n&1-n\end{pmatrix}$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) $\mathcal{B}'$ est libre et formée de trois vecteurs en dimension 3, c'est une base de E.
$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1, f(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3)=3\varepsilon_3$ donc $D=\mathrm{diag}(1,2,3)$.
b)

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

c) Par formule de changement base

$$A=PDP^{-1}$$

d) Puisqu'il est facile de calculer D^n

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\0&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) En recherchant des vecteurs tels que $f(x) = x, f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$ on observe que $\varepsilon_1 = (-1, 1, 2), \varepsilon_2 = (0, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ conviennent. De plus ces trois vecteurs forment une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.
b)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Par changement base

$$A = PDP^{-1}$$

d) Sachant calculer D^n on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1 - 3^n & -1 + 3^n \\ -2^n + 3^n & -1 + 3.2^n - 3^n & 1 - 2.2^n + 3^n \\ -2^n + 3^n & -2 + 3.2^n - 3^n & 2 - 2.2^n + 3^n \end{pmatrix}$$

qu'on peut encore écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) En résolvant les équations : $f(u) = 0, f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ on trouve que $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3, \varepsilon_2 = e_2 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$ sont des vecteurs tels que $f(\varepsilon_1) = 0, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.
On vérifie aisément que la famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de E, celle-ci convient.
b) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Par changement de base

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1} - 1 & -2^n & 1 - 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Posons $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$. On observe $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence $X_n = A^n X_0$.
Avec $X_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient

$$\begin{cases} x_n = 2^{n+1} \\ y_n = 1 \\ z_n = 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) P est la matrice de l'application Id_E dans les bases B au départ et b à l'arrivée.
La relation $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donne matriciellement $v = PV$.
b) La relation $f = \mathrm{Id}_E^{-1} \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donne matriciellement $M = P^{-1}mP$.
c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale et ses puissances sont alors faciles à calculer. Par changement de base, on en déduit m^n.