SEMAINE 8

FONCTIONS de $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$. FONCTIONS CONVEXES

EXERCICE 1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **absolument continue** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute liste $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ de points de I vérifiant $x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n$, on ait

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \alpha \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon \ .$$

1. Montrer que (**a**) $\Longrightarrow$ (**b**) $\Longrightarrow$ (**c**), avec

(**a**) : f est lipschitzienne sur I ;

(**b**) : f est absolument continue sur I ;

(**c**) : f est uniformément continue sur I.

2. A-t-on (**c**) $\Longrightarrow$ (**b**) ?

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, uniformément continue, monotone et convexe (ou concave). Montrer que f est absolument continue sur I.

4. A-t-on (**b**) $\Longrightarrow$ (**a**) ?

Source : Bertrand HAUCHECORNE, Les contre-exemples en mathématiques, Éditions Ellipses, ISBN 2-7298-8806-3

- -

1. L'implication (**a**) $\Longrightarrow$ (**b**) est immédiate (choisir $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$ si f est k-lipschitzienne). L'implication (**b**) $\Longrightarrow$ (**c**) est encore plus immédiate (la continuité uniforme correspond au cas $n = 1$ dans la définition de la continuité absolue).

2. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin\dfrac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$. La fonction f est continue sur $[0, 2]$, donc uniformément continue.

Choisissons maintenant $\varepsilon = 1$ et montrons que, pour tout $\alpha > 0$, il est possible de trouver des x_i et des y_i tels que $\sum(y_i - x_i) < \alpha$ et $\sum |f(y_i) - f(x_i)| \geq 1$.

Pour cela, pour tout entier $k \geq 1$, posons $x_k = \dfrac{2}{2k+1}$ et $y_k = \dfrac{2}{2k-1} = x_{k-1}$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < y_n = x_{n-1} < y_{n-1} = x_{n-2} < \cdots < y_2 = x_1 < y_1 = 2$ et $f(x_k) = x_k \sin(2k+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^k x_k = f(y_{k+1})$.

Donnons-nous un $\alpha > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y_n = \dfrac{2}{2n-1} < \alpha$. On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{p}(y_{n+k} - x_{n+k}) = y_n - x_{n+p} \leq y_n < \alpha$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} |f(y_{n+k}) - f(x_{n+k})| &= \sum_{k=0}^{p}(x_{n+k-1} + x_{n+k}) = \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{2}{2n+2k-1} + \frac{2}{2n+2k+1}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} \quad \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty\end{aligned}$$

car la série harmonique est divergente. En choisissant p assez grand, on aura donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} |f(y_{n+k}) - f(x_{n+k})| \geq 1$ et f n'est pas absolument continue sur $[0, 2]$.

3. Démontrons d'abord le lemme suivant, dit **lemme des trois cordes** (*faire un dessin*) :

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors, pour tout réel $h > 0$, la fonction $\Delta_h f$ définie par $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ est croissante.

En effet, prenons $x \in I$, $y \in I$ avec $x < y$ et $y + h \in I$. On sait que la pente des sécantes dont on fixe une extrémité est fonction croissante de l'extrémité variable, donc, en notant $T_f(a, b)$ le taux d'accroissement de f entre deux points a et b, on a

$$\Delta_h f(x) = h \cdot T_f(x, x+h) \leq h \cdot T_f(x, y+h) \leq h \cdot T_f(y, y+h) = \Delta_h f(y) \ .$$

Soit alors $f : I \to \mathbb{R}$, uniformément continue, croissante et convexe. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in I^2$, on ait $|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Donnons-nous maintenant $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ avec $x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \alpha$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $\delta_i = y_i - x_i$, ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i < \alpha$. La fonction f étant croissante, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \big(f(y_i) - f(x_i)\big)$. Définissons une nouvelle liste de points $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1})$ en "compactant" les intervalles de longueurs δ_i, de la façon suivante :

on pose $\xi_{n+1} = y_n$, $\xi_n = x_n = y_n - \delta_n$, puis $\xi_{n-1} = \xi_n - \delta_{n-1} = y_n - (\delta_{n-1} + \delta_n)$, jusqu'à

$$\xi_1 = \xi_2 - \delta_1 = y_n - (\delta_1 + \cdots + \delta_n) \ .$$

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a donc $\displaystyle\xi_k = y_n - \sum_{i=k}^{n} \delta_i$. *Il est vivement recommandé de faire un schéma.* Il est clair que $x_k \leq \xi_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc, par le lemme des trois cordes, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$f(y_k) - f(x_k) = \Delta_{\delta_k}(x_k) \leq \Delta_{\delta_k}(\xi_k) = f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k) \ ,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \big(f(y_k) - f(x_k)\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\big) = f(\xi_{n+1}) - f(\xi_1) \ ;$$

or, $\displaystyle\xi_{n+1} - \xi_1 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i < \alpha$, donc $|f(\xi_{n+1}) - f(\xi_1)| < \varepsilon$ et on a prouvé l'absolue continuité de f sur I.

Le lecteur adaptera sans difficulté la démonstration ci-dessus au cas d'une fonction décroissante (ou concave).

4. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue, croissante et concave sur $[0, 1]$, donc absolument continue sur cet intervalle, mais elle n'est pas lipschitzienne.

EXERCICE 2 :

On note $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a,b]$.

Pour toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et pour $\sigma=(a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b)\in\mathcal{S}_{a,b}$, on note

$$v(f,\sigma)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\ .$$

On dit que f est **à variation bornée** sur $[a,b]$ si l'ensemble $\{v(f,\sigma)\ ;\ \sigma\in\mathcal{S}_{a,b}\}$ est majoré. Dans ce cas, on pose

$$V_{a,b}(f)=\sup_{\sigma\in\mathcal{S}_{a,b}}v(f,\sigma)$$

(**variation totale** de f sur $[a,b]$). On note enfin $\mathcal{V}([a,b])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$

1. Soit $c\in]a,b[$. Montrer que $f\in\mathcal{V}([a,b])$ si et seulement si $f\big|_{[a,c]}\in\mathcal{V}([a,c])$ et $f\big|_{[c,b]}\in\mathcal{V}([c,b])$. Quelle relation y a-t-il alors entre les nombres $V_{a,b}(f)$, $V_{a,c}(f)$ et $V_{c,b}(f)$?

2. Montrer qu'une fonction f est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si on peut l'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.

3. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ est à variation bornée et déterminer sa variation totale.

- -

1. • Si $f\in\mathcal{V}([a,b])$, alors, pour toute subdivision $\sigma=(a=x_0,x_1,\cdots,x_n=c)$ de $[a,c]$, on a

$$v\left(f\big|_{[a,c]},\sigma\right)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|f(c)-f(b)|=v(f,\tau)$$

où $\tau=(x_0,x_1,\cdots,x_n,b)\in\mathcal{S}_{a,b}$, donc $v\left(f\big|_{[a,c]},\sigma\right)\leq V_{a,b}(f)$ et la restriction de f au segment $[a,c]$ est à variation bornée. Il en est bien sûr de même de sa restriction à $[c,b]$.

• Supposons les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ toutes deux à variation bornée, soit $\sigma\in\mathcal{S}_{a,b}$, soit τ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en intercalant le point c dans la subdivision σ (s'il n'y figure pas déjà). Alors τ est la "réunion" de deux subdivisions τ_1 et τ_2 de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement et on a

$$v(f,\sigma)\leq v(f,\tau)=v\left(f\big|_{[a,c]},\tau_1\right)+v\left(f\big|_{[c,b]},\tau_2\right)\leq V_{a,c}(f)+V_{c,b}(f)\ .$$

Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$ et, de plus, en "passant au sup",

$$V_{a,b}(f)\leq V_{a,c}(f)+V_{c,b}(f)\ .$$

• Si $f\in\mathcal{V}([a,b])$, donnons-nous $\varepsilon>0$, alors il existe des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement telles que

$$v\left(f\big|_{[a,c]},\sigma_1\right)\geq V_{a,c}(f)-\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{et}\qquad v\left(f\big|_{[c,b]},\sigma_2\right)\geq V_{c,b}(f)-\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ (*notation abusive*) est une subdivision de $[a,b]$ et

$$v(f,\sigma) = v\left(f\big|_{[a,c]},\sigma_1\right) + v\left(f\big|_{[c,b]},\sigma_2\right) \geq V_{a,c}(f) + V_{c,b}(f) - \varepsilon\ .$$

On en déduit que $V_{a,b}(f) = V_{a,c}(f) + V_{c,b}(f)$.

2. • Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, à variation bornée. D'après la question **1.**, la fonction $g : x \mapsto V_{a,x}(f)$ est croissante puisque, si $a \leq x \leq y \leq b$, alors

$$g(y) - g(x) = V_{a,y}(f) - V_{a,x}(f) = V_{x,y}(f) \geq 0\ .$$

Posons $h = g - f$, alors $f = g - h$ et il serait agréable que h soit aussi croissante. Eh bien, figurez-vous que c'est le cas puisque, si $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$h(y) - h(x) = \big(g(y) - g(x)\big) - \big(f(y) - f(x)\big) = V_{x,y}(f) - \big(f(y) - f(x)\big)$$

et cette quantité est positive car $V_{x,y}(f) \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x)$.

• Toute fonction g croissante sur $[a,b]$ est évidemment à variation bornée avec $V_{a,b}(g) = g(b) - g(a)$. Par ailleurs, il est facile de vérifier que $\mathcal{V}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ puisque, pour toute subdivision σ, on a

$$v(\lambda f + \mu g,\sigma) \leq |\lambda|\, v(f,\sigma) + |\mu|\, v(g,\sigma)\ ,$$

donc toute différence de deux fonctions croissantes est à variation bornée.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors sa dérivée est bornée ($|f'| \leq M$ sur $[a,b]$) et on en déduit $v(f,\sigma) \leq M(b-a)$ pour toute subdivision σ, donc $f \in \mathcal{V}([a,b])$ et $V_{a,b}(f) \leq M(b-a)$.

Si $\sigma = (x_0,\cdots,x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, alors

$$v(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(c_k)|(x_{k+1} - x_k) \leq V_{a,b}(f) \qquad \textbf{(*)}$$

avec $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$ d'après le théorème des accroissements finis. Lorsque le pas de la subdivision σ tend vers zéro, le premier membre de l'inégalité **(*)** tend vers $\displaystyle\int_{[a,b]} |f'|$ donc, par passage à la limite, on a l'inégalité $\displaystyle\int_{[a,b]} |f'| \leq V_{a,b}(f)$.

Ceux qui refusent de passer à la limite suivant la base de filtre des subdivisions dont le pas tend vers zéro pourront écrire l'inégalité **(*)** *pour la subdivision régulière σ_N du segment $[a,b]$ en N segments et feront tendre N vers $+\infty$.*

Par ailleurs, si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver une subdivision σ telle que $v(f,\sigma) \geq V_{a,b}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour toute subdivision τ, le réel $v(f,\tau)$ est une somme de Riemann pour la fonction $|f'|$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision τ de pas inférieur à α, on ait $\left|v(f,\tau) - \displaystyle\int_{[a,b]} |f'|\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.Pour une telle subdivision τ, on a alors $v(f,\sigma\cup\tau) \geq v(f,\sigma) \geq V_{a,b}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et, comme $\sigma\cup\tau$ a un pas inférieur à α, on a

$\left|v(f,\sigma\cup\tau)-\int_{[a,b]}|f'|\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\int_{[a,b]}|f'|\geq V_{a,b}(f)-\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a $\int_{[a,b]}|f'|\geq V_{a,b}(f)$.

Finalement, $V_{a,b}(f)=\int_{[a,b]}|f'|$ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

EXERCICE 3 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour $g:I\to\mathbb{R}$, $x\in I$, $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+h\in I$, on pose

$$\Delta_h g(x)=T_g(x,x+h)=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ .$$

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que

$$\forall x\in I\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad\lim_{h\to0}\Delta_h^n f(x)=f^{(n)}(x)$$

en notant $\Delta_h^n=\Delta_h\circ\cdots\circ\Delta_h$ (avec n facteurs).

- -

Pour tout réel h, notons τ_h l'opérateur de translation défini par $\tau_h f(x)=f(x+h)$, alors $\Delta_h=\frac{1}{h}(\tau_h-\mathrm{id})$. Donc

$$\Delta_h^n=\frac{1}{h^n}(\tau_h-\mathrm{id})^n=\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}\tau_h^k\ ,$$

c'est-à-dire

$$\Delta_h^n f(x)=\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}f(x+kh)\ .$$

Le lecteur perspicace aura remarqué que la formalisation en termes d'opérateurs τ_h, Δ_h et id *souffre de quelques imprécisions puisque, à part dans le cas où $I=\mathbb{R}$, on ne peut pas les considérer comme endomorphismes d'un espace de fonctions, les fonctions f et $\tau_h f$ n'ayant pas le même intervalle de définition. Une formalisation plus rigoureuse serait assez lourde et n'apporterait pas grand'chose à la compréhension du problème.*

Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ fixés, la formule de Taylor-Young donne, si $x+kh\in I$,

$$f(x+kh)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(kh)^p}{p!}\,f^{(p)}(x)+h^n\,\varepsilon_k(h)\ ,\quad\text{avec}\quad\lim_{h\to0}\varepsilon_k(h)=0\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta_h^n f(x) &= \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\frac{(kh)^p}{p!}\,f^{(p)}(x)+\varepsilon(h)\\ &= \frac{1}{h^n}\sum_{p=0}^{n} S_n(p)\,\frac{h^p}{p!}\,f^{(p)}(x)+\varepsilon(h)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ et $S_n(p)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}k^p$: essayons d'évaluer cette dernière expression.

Parachutons pour cela la fonction $\varphi : t\mapsto (e^t-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}e^{kt}$. On constate que, pour tout entier naturel p, on a $S_n(p)=\varphi^{(p)}(0)$. Mais $e^t-1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc $\varphi(t)\underset{t\to 0}{\sim} t^n$: le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\varphi(t)$ est donc $\varphi(t)=t^n+o(t^n)$. Par comparaison avec la formule de Taylor-Young et unicité du développement limité, on déduit que $S_n(p)=\varphi^{(p)}(0)=0$ si $0\le p\le n-1$ et $S_n(n)=\varphi^{(n)}(0)=n!$.

Il reste donc $\Delta_h^n f(x)=f^{(n)}(x)+\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, c'est ce que l'on voulait prouver.

EXERCICE 4 :

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit la somme de Riemann $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a. Donner un développement asymptotique de S_n, à la précision $O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Indication. Pour $x\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$, on écrira une inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $\left[x,\dfrac{k}{n}\right]$, puis on intégrera cette inégalité sur le segment $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$. On sera amené ensuite à appliquer la même méthode aux fonctions f' et f''.

b. En déduire un développement asymptotique, avec trois termes non nuls, de

$$u_n=\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\ .$$

- -

a. Soit $x\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$ $(1\le k\le n)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à f sur $\left[x,\dfrac{k}{n}\right]$, s'écrit :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_3}{6n^3}$$

avec $M_3 = \max\limits_{[0,1]} |f^{(3)}|$. Intégrons cette inégalité sur le segment $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ en utilisant

- $\left| \int g \right| \leq \int |g|$ avec $g : x \mapsto f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)$;
- $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} t\, dt = -\frac{1}{2n^2}$;
- $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} t^2\, dt = \frac{1}{3n^3}$,

cela donne

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_3}{6n^4} .$$

En ajoutant ces inégalités pour k de 1 à n, en vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \int_0^1 f - S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M_3}{6n^3} ,$$

soit

$$S_n(f) = \int_0^1 f + \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right) .$$

On développe de même (à des ordres moindres) les quantités $S_n(f')$ et $S_n(f'')$:

$$S_n(f') = \int_0^1 f' + \frac{1}{2n} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n(f'') = \int_0^1 f'' + O\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

d'où, en réinjectant,

$$S_n(f) = \int_0^1 f + \frac{f(1) - f(0)}{2n} + \frac{f'(1) - f'(0)}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) .$$

b. On a $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = S_n(f) + \ln n$, avec $f : x \mapsto \ln(1+x)$, d'où

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \ln n + \int_0^1 f + \frac{f(1) - f(0)}{2n} + \frac{f'(1) - f'(0)}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \ln n + (2\ln 2 - 1) + \frac{\ln 2}{2n} - \frac{1}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) , \end{aligned}$$

puis $u_n = n \times \frac{4}{e} \times e^{\frac{\ln 2}{2n} - \frac{1}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$, donc

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{4}{e}\,n\left[1+\frac{\ln 2}{2n}+\left(\frac{(\ln 2)^2}{8}-\frac{1}{24}\right)\,\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\
&= \frac{4}{e}\,n+\frac{2}{e}\,\ln 2+\frac{3(\ln 2)^2-1}{6en}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .
\end{aligned}
$$

EXERCICE 5 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que f est **logarithmiquement convexe** (c'est-à-dire la fonction $g = \ln\circ f$ est convexe) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.

- -

• Supposons $g = \ln\circ f$ convexe, alors $f^\alpha = \exp\circ(\alpha g)$ est convexe car c'est la composée d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante. Détaillons :

Si $g : I \to J$ est convexe et $h : J \to \mathbb{R}$ est convexe croissante, alors pour $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$
g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \le \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\ ,
$$

donc

$$
\begin{aligned}
(h\circ g)\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) &\le h\big(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\big)\\
&\le \lambda(h\circ g)(x)+(1-\lambda)(h\circ g)(y)
\end{aligned}
$$

en utilisant successivement la croissance et la convexité de h. On a ainsi prouvé que la fonction composée $h\circ g$ est convexe. En revenant aux notations de l'énoncé, on a ainsi f^α convexe pour tout $\alpha > 0$.

• Supposons f^α convexe pour tout $\alpha > 0$.

Fixons $x \in I$, $y \in I$, $\lambda \in [0,1]$. On a

$$
\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^* \qquad f^\alpha\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \le \lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\ ,
$$

donc

$$
\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^* \qquad \ln\Big[f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\Big] \le \frac{1}{\alpha}\,\ln\big(\lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\big) \qquad \textbf{(*)}\ .
$$

Pour conclure, il suffit de passer à la limite quand α tend vers zéro : en effet, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \ln\big(\lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$
\forall\alpha\in\mathbb{R} \qquad \varphi'(\alpha) = \frac{\lambda\, f(x)^\alpha\cdot\ln f(x)+(1-\lambda)\, f(y)^\alpha\cdot\ln f(y)}{\lambda\, f(x)^\alpha+(1-\lambda)\, f(y)^\alpha}\ .
$$

En particulier, $\varphi'(0) = \lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y)$. Comme $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \varphi'(0)$. En passant à la limite dans **(*)**, on obtient

$$\ln \Big[f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \Big] \leq \lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y) \ ,$$

c'est-à-dire la convexité de $g = \ln \circ f$.

EXERCICE 6 :

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **fortement convexe** s'il existe un réel k strictement positif tel que la fonction $x \mapsto f(x) - kx^2$ soit convexe.

1. Traduire l'hypothèse de forte convexité :

a. par une condition sur la dérivée seconde, si f est supposée deux fois dérivable ;

b. par une condition portant sur les rapports

$$R_{a,b,\lambda}(f) = \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) - f\big(\lambda a + (1-\lambda) b\big)}{\lambda(1-\lambda)(b-a)^2}$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $\lambda \in]0,1[$, sans hypothèse de dérivabilité.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer l'existence d'une **fonction affine d'appui** en tout point a de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire d'une fonction affine φ_a telle que $\varphi_a(a) = f(a)$ et $\varphi_a \leq f$ sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite de l'exercice, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est supposé fortement convexe.

3. Montrer que l'on peut définir une fonction f^* sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \big(xt - f(t) \big) \ .$$

4. Montrer que f^* est convexe.

5. Montrer que l'on peut définir f^{**} et que l'on a l'égalité $f^{**} = f$ (*on pourra commencer par calculer h^{**} lorsque h est une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$*).

- -

1.a. Une fonction deux fois dérivable est fortement convexe si et seulement si sa dérivée seconde est minorée par un réel strictement positif (*évident*) ; ainsi, les fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ ou $x \mapsto \operatorname{ch} x$ sont fortement convexes, mais la fonction $x \mapsto e^x$ ne l'est pas.

b. Soit $k \in \mathbb{R}$ donné. On vérifie que la fonction $g : x \mapsto f(x) - kx^2$ est convexe si et seulement si

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) - f\big(\lambda a + (1-\lambda) b\big) \geq k\, \lambda(1-\lambda)(b-a)^2 \ .$$

On en déduit que f est fortement convexe si et seulement si les rapports $R_{a,b,\lambda}(f)$ sont minorés par un réel strictement positif.

2. Si la fonction f est dérivable, on sait que la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, la fonction affine tangente au point a, soit $x \mapsto f(a) + f'(a)\,(x-a)$, est une fonction affine d'appui au point a.

En fait, une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est toujours dérivable à gauche et à droite en tout point a avec $f'_g(a) \leq f'_d(a)$: en effet, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$; sur $]-\infty, a[$, elle est majorée (par exemple par $\tau_a(a+1)$), donc elle admet une limite à gauche au point a (théorème de la limite monotone), d'où l'existence de $f'_g(a)$. On montre de même l'existence de $f'_d(a)$ et l'inégalité $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Si on prend un réel $m \in [f'_g(a), f'_d(a)]$, alors, d'après la croissance de la fonction τ_a, pour tout réel x différent de a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - m$ est du signe de $x-a$, ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a) + m(x-a)$. On a donc trouvé (au moins) une fonction affine d'appui de f en a.

3. Soit k un réel strictement positif tel que la fonction $g : x \mapsto f(x) - kx^2$ soit convexe. Soit x un réel fixé, soit $\varphi : t \mapsto g(x) + m(t-x)$ une fonction affine d'appui de g au point x, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(t) - kt^2 \geq g(x) + m(t-x)\ ,$$

d'où l'on déduit

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad xt - f(t) \leq -kt^2 + (x-m)t + mx - g(x)\ .$$

Le second membre est une fonction du second degré de la variable t ayant $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et en $+\infty$ donc est majoré lorsque t décrit $\mathbb{R}$; le premier membre $xt - f(t)$ est, a fortiori, majoré lorsque t décrit $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $f^*(x) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big(xt - f(t)\big)$. La fonction f^* est appelée **fonction polaire** de la fonction fortement convexe f. Par exemple, pour $f : x \mapsto \operatorname{ch} x$, on obtient $f^*(x) = x \operatorname{argsh} x - \sqrt{1+x^2}$.

4. Soient x et y deux réels, $\lambda \in [0,1]$, posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, on a alors

$$\begin{aligned} zt - f(t) &= \lambda\big(xt - f(t)\big) + (1-\lambda)\big(yt - f(t)\big) \\ &\leq \lambda\, f^*(x) + (1-\lambda)\, f^*(y) \end{aligned}$$

En passant au sup, on obtient $f^*(z) \leq \lambda\, f^*(x) + (1-\lambda)\, f^*(y)$, c'est-à-dire la convexité de la fonction f^*.

5. • Soient x et t deux réels, alors $f^*(x) = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \big(xs - f(s)\big) \geq xt - f(t)$, soit $tx - f^*(x) \leq f(t)$. Cela prouve que, pour tout réel t, la fonction $x \mapsto tx - f^*(x)$ est majorée, ce qui permet de définir $f^{**}(t) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big(tx - f^*(x)\big)$. De plus, en passant au sup dans l'inégalité obtenue ci-dessus, on obtient l'inégalité $f^{**}(t) \leq f(t)$.

• Pour $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$, on vérifie que $h^*(x) = \dfrac{x^2 - 2bx + b^2 - 4ac}{4a}$, puis $h^{**} = h$.

• Si f et g sont deux fonctions fortement convexes telles que $f \leq g$, on a bien sûr $g^* \leq f^*$.

- Soit f fortement convexe, soit $k > 0$ tel que la fonction $g : x \mapsto f(x) - kx^2$ soit convexe, soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_x : t \mapsto g(x) + m(t-x)$ une fonction affine d'appui de g au point x, on a alors (*cf.* question **3.**) $f(t) \geq h_x(t)$ pour tout t réel en posant $h_x(t) = kt^2 + m(t-x) + g(x)$. Comme h_x est une fonction polynôme du second degré, on a $h_x^{**} = h_x$ et, de l'inégalité $f \geq h_x$, on tire $f^* \leq h_x^*$, puis $f^{**} \geq h_x$ donc, en particulier, $f^{**}(x) \geq h_x(x) = f(x)$. On a ainsi prouvé $f^{**} \geq f$, donc $f^{**} = f$.