Développements limités

Principe général des développements limités

→ Approcher une fonction à l'aide d'un polynôme au voisinage d'un point.

Intérêt

→ Lever des formes indéterminées difficiles dans le calcul des limites ;
→ Étudier le signe d'une quantité compliquée au voisinage d'un point ;
→ Étudier la position d'une courbe par rapport à une tangente, une asymptote...

Dans tout ce cours, I désignera un intervalle contenant au moins deux points.

I Développements limités en 0

I.1 Principe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et n un entier naturel fixé. Déterminer un **développement limité de f en 0 à l'ordre n**, c'est parvenir à écrire $f(x)$ comme une somme

- d'un polynôme de degré au plus n : c'est la **partie régulière**
- et d'un **reste**, qui est une expression $r(x)$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$ *plus vite que x^n*.

On donne maintenant une définition plus précise :

Déf. • Développement limité d'une fonction en 0
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie en 0, n un entier naturel.
On dit que f **admet un développement limité (DL) en 0 à l'ordre n** s'il existe des constantes réelles $a_0, a_1, \dots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{x^n\,\varepsilon(x)}_{\text{reste}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Quelques remarques importantes

1) **Le polynôme doit toujours être écrit dans le sens des puissances croissantes de x.** Ainsi, plus on se déplace vers la droite dans l'écriture, plus on rencontre des termes « petits » quand x est « proche de 0 ».
2) **L'ordre n du développement limité mesure la précision de ce développement limité.** Plus n est grand, et plus $f(x)$ est approchée précisément par la partie régulière.
3) **L'ordre du développement limité se lit sur son reste.** C'est l'exposant n dans l'écriture $x^n\,\varepsilon(x)$.
4) **On ne cherche jamais à calculer $\varepsilon(x)$.** Ce qui importe est que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
5) **Un DL en 0 n'est utile que quand x tend vers 0.**

Exercice **1** ► Dans ce qui suit, ε est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dire si les écritures suivantes sont des développements limités. Si oui, préciser leur ordre :

1) $f(x) = x^2 + 2x - 1 + x^2\,\varepsilon(x)$, **4)** $\varphi(x) = x + x^2\,\varepsilon(x)$,
2) $g(x) = x(x+2) + x^3\,\varepsilon(x)$, **5)** $\psi(x) = 2 + \dfrac{3}{x} + x\,\varepsilon(x)$,
3) $h(x) = 1 + x - x^2 + x\,\varepsilon(x)$, **6)** $\theta(x) = x^5\,\varepsilon(x)$.

I.2 Développements limités usuels

Les développements limités suivants sont à connaître par cœur :

$$\frac{1}{1-x},\quad \frac{1}{1+x},\quad \ln(1+x),\quad e^x,\quad \cos(x),\quad \sin(x),\quad \tan(x)$$

et $(1+x)^\alpha$ où α est un exposant réel constant.

Ils sont récapitulés dans un tableau synthétique dans vos notes de cours.

Démo. ↬ Ces formules seront progressivement justifiées tout au long de ce cours.

Exercice **2** ► Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et de $x \mapsto (1+x)^4$.

Exercice **3** ► Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 de :

$$x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}.$$

II Calcul de développements limités en 0

II.1 Troncature de DL

Quand on connait un DL à un ordre donné n, on peut facilement le transformer en un DL d'ordre p plus petit que n. Il suffit de supprimer les monômes de degré au-delà de p dans la partie régulière et de changer l'exposant n du reste en un exposant p.

Exercice 4 ► Écrire les DL de la fonction tangente en 0 aux ordres 0, 1, 2 et 3.

Démo. Justification de la troncature.

II.2 Substitution de monôme dans un DL

Partant d'un DL en 0 écrit avec la variable X, on peut substituer le monôme λx^p ($\lambda \in \mathbb{R}^*, p \geqslant 1$) à X pour obtenir un autre DL en 0. L'ordre du DL obtenu est $n \times p$ (il augmente quand $p \geqslant 2$).

Ex. ✻ Les DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 s'obtiennent à partir des DL de $X \mapsto \frac{1}{1-X}$, dans lequels on substitue $-x$ à X.

Exercice 5 ► Écrire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto e^{-x^2/2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démo. Justification de la substitution de monôme.

II.3 Dérivation et primitivation de DL

Thm • Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie en 0, admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Si f est dérivable sur I et **que f' admet un DL en 0 à l'ordre $(n-1)$,** sa partie régulière est la dérivée de celle du DL de f.
2) Si F est une primitive de f sur I, alors **F admet un DL en 0 à l'ordre $(n+1)$.** Sa partie régulière s'obtient en prenant la primitive de la partie régulière du DL de f $\boxed{\textbf{dont le terme constant est } F(0).}$

Ex. ✻ En primitivant un DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ à l'ordre n, on obtient un DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $(n+1)$. En le dérivant et en prenant l'opposé, on obtient un DL de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre $(n-1)$.

Démo. Propriété admise.

Exercice 6 ► Déterminer le DL à l'ordre 6 en 0 de arctan, arccos et arcsin.

II.4 Opérations sur les développements limités

Important ✪ Quelques repères pour ne pas commettre d'erreur :

1) Pour combiner deux développements limités, il faut toujours qu'ils soient **de même ordre n.** Si ce n'est pas le cas, on tronque le DL le plus précis et on travaille à l'ordre le plus petit. **Le résultat est lui aussi un DL d'ordre n.**
2) **Le reste ne disparait jamais** en cours de calcul : ne pas l'oublier.

Attention ❢ **Dans tout ce paragraphe,** les fonctions ε_k sont des fonctions tendant vers 0 en 0.

Thm • DL d'une somme et d'un produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 admettant des DL à l'ordre n. On note $P(x)$ et $Q(x)$ les parties régulières respectives de ces DL. Alors :

1) **λf et $f+g$ admettent un DL à l'ordre n en 0.**
Leur parties régulières sont respectivement $\lambda P(x)$ et $P(x)+Q(x)$.
2) **$f \times g$ admet un DL à l'ordre n en 0.**
Sa partie régulière s'obtient en calculant $P(x)Q(x)$ et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Ex. ✻ 1) DL à l'ordre 3 de ch et sh.
2) DL à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-x} - \frac{1}{1+x}$ en 0.
3) DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ en 0.

Démo. Justification des sommes et produits de DL.

Exercice 7 ► Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 de

$$f : x \mapsto x\,e^{-x/2} - \ln(1+x), \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{1+x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \big(\ln(1+x)\big)^2.$$

Thm • DL d'une composée de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 admettant des DL à l'ordre n. On note $P(x)$ et $Q(x)$ les parties régulières respectives de ces DL. $\boxed{\textbf{Si } f(x) \to 0 \textbf{ quand } x \to 0,}$ alors $g \circ f$ est bien définie au voisinage de 0 et admet un DL à l'ordre n en 0.
Sa partie régulière s'obtient en calculant $Q\big(P(x)\big)$ et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Attention ❢ Il faut faire très attention à ce que la première fonction appliquée tende vers 0 : c'est une source d'erreur classique. Nous verrons plus bas comment faire quand ce n'est pas le cas.

Ex. ✻ DL à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{1+\ln(1+x)}$ en 0.

Démo. Justification du DL d'une composée.

Exercice 8 ► Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto e^{\sin x}$.

Calculer le développement limité de l'inverse d'une fonction ou d'un quotient est plus délicat. **On évitera de le faire autant que possible.**

Propr. • Développement limité de l'inverse d'une fonction

Si f admet un DL à l'ordre n en 0 **dont la partie régulière ne s'annule pas en 0,** alors **$\frac{1}{f}$ admet un DL de même ordre en 0.** Sa partie régulière se calcule de la manière suivante :

1) On écrit le DL de f ;

2) On écrit formellement $\frac{1}{f}$ à l'aide du DL. Au dénominateur on met a_0 en facteur et on fait apparaître un signe −. On aboutit à :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1-\big(\text{un certain DL}\big)}\,;$$

3) On écrit le DL de $\frac{1}{1-X}$ à l'ordre n et on conclut par une composition de DL.

Ex. ✻ Supposons que f admette pour DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 2 - 3x + 4x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

La partie régulière de son DL ne s'annule pas en 0, donc $\frac{1}{f}$ admet également un DL à l'ordre 2 en 0. Pour le déterminer, on écrit :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2-3x+4x^2+x^2\,\varepsilon_1(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}x+2x^2+x^2\,\varepsilon_2(x)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\big(\frac{3}{2}x-2x^2+x^2\,\varepsilon_3(x)\big)}.$$

Or, on a : $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^2\,\varepsilon_4(X)$.

On peut composer ces développement limités car le terme entre parenthèses est nul quand $x=0$ (on pose mentalement $X = \frac{3}{2}x - 2x^2$). On obtient :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2} \times \Big[1 + \big(\tfrac{3}{2}x - 2x^2\big) + \big(\tfrac{3}{2}x-2x^2\big)^2 + x^2\,\varepsilon_5(x)\Big]$$
$$= \frac{1}{2} \times \Big[1 + \big(\tfrac{3}{2}x - 2x^2\big) + \big(\tfrac{9}{4}x^2\big) + x^2\,\varepsilon_6(x)\Big]$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

***Exercice* 9** ► Calculer le DL de $\frac{1}{\cos}$ à l'ordre 4 en 0.

(Réponse : $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3\,\varepsilon(x)$.)

Méth. • Développement limité d'un quotient

Pour obtenir un développement limité de f/g :

1) on calcule d'abord un DL de $1/g$ par la méthode ci-dessus ;

2) on effectue le produit des DL de f et de $1/g$.

Ex. ✻ Puisque $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, on peut se servir de cette approche pour obtenir des développements limités de la fonction tangente. Par exemple, à l'ordre 3 on écrit :

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3\,\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\,\varepsilon_2(x)$$

donc en effectuant le produit des DL : $\boxed{\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) \ \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$

II.5 DL de $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$, $x \mapsto \big(f(x)\big)^\alpha$ et $x \mapsto e^{f(x)}$

• **Pour obtenir un développement limité de $\ln\big(f(x)\big)$ en 0 :**

1) Déterminer $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$, **qui doit être finie et non nulle.**

2) Factoriser $f(x)$ par ℓ : ceci permet d'écrire à coup sûr

$$\ln\big(f(x)\big) = \cdots = \ln(\ell) + \ln\big(1+g(x)\big) \quad \text{où } \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

3) On peut alors composer un DL de $\ln(1+X)$ avec un DL de $g(x)$ et conclure.

***Exercice* 10** ► Calculer un DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln\big(\cos(x)\big)$ et de $x \mapsto \ln(1+e^x)$.

• **Pour obtenir un développement limité de $\big(f(x)\big)^\alpha$ en 0 :**

La même méthode permet de se ramener au DL de $(1+X)^\alpha$.

***Exercice* 11** ► Calculer un DL de $x \mapsto \sqrt{\arccos(x)}$ en 0 à l'ordre 2.

• **Pour obtenir un développement limité de $e^{f(x)}$ en 0 :**

1) Déterminer $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$, **qui doit être finie.**

2) Écrire $f(x) = \ell + \big(f(x-\ell\big)$, ce qui permet d'arriver à l'écriture

$$e^{f(x)} = \cdots = e^\ell \times e^{g(x)} \quad \text{où } \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

3) On peut alors composer un DL de e^X avec un DL de $g(x)$ et conclure.

***Exercice* 12** ► Déterminer le DL de $x \mapsto e^{-\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 2.

III Développements limités ailleurs qu'en 0

Il est possible d'écrire un DL d'une fonction en un autre point que 0 :

Déf. • Développement limité d'une fonction en a

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie en $a \in I$, n un entier naturel. On dit que **f admet un développement limité en a à l'ordre n** s'il existe des constantes réelles $b_0, b_1, \ldots, b_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in I,\ \ \boldsymbol{f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.}$$

Dans une telle écriture, ce sont **les puissances de $(x-a)$ qui sont intéressantes** (et non les puissances de x) car elles tendent vers 0 quand $x \to a$. **Il ne faut surtout pas les développer.**

Pour obtenir un DL au point a, on procède souvent par changement de variable :

* Poser $h = x - a$ lorsque $x \to a$ ou $x \to a^+$,
* Poser $h = a - x$ lorsque $x \to a^-$.

Ainsi, on se ramène à étudier un DL quand $h \to 0$ ou $h \to 0^+$.

Exercice **13** ► Développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ en $a = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.

On peut également obtenir un tel DL directement **en appliquant la formule de Taylor-Young :**

Thm • Formule de Taylor-Young
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un point de I et $n \in \mathbb{N}$. On suppose f dérivable n fois de suite en a. Alors f admet en a un DL à l'ordre n donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a), \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0. \end{aligned}$$

Important ✪ Cette formule donne un résultat théorique important : quand une fonction peut être dérivée en a un nombre arbitrairement grand de fois, elle admet un DL à tout ordre en a.

Rem. ◇ Cette formule pourrait en théorie donner les DL de presque toutes les fonctions. Elle est la plupart du temps **impossible à appliquer en pratique :** le calcul des dérivées successives de f devient vite très compliqué.

IV Résultats théoriques sur les DL

IV.1 Un premier exemple fondamental

Les développements limités de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 découlent de la formule de sommation des progressions géométriques.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n\,\frac{x}{1-x}.$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\substack{\text{tend vers 0} \\ \text{quand } x\to 0}}.$$

On peut donc écrire

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0}$$

qui nous fournit le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n.

IV.2 Conséquences de la formule de Taylor-Young

Les développements limités des fonctions suivantes proviennent de la formule de Taylor-Young appliquée en 0 :

1) Développements limités en 0 de l'exponentielle
On sait que exp est dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$. En particulier $\exp^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
La formule de Taylor-Young nous fournit donc le DL de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 à l'ordre n :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

2) Développements limités en 0 de cosinus et sinus
cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ autant de fois que l'on veut. De plus,

$$\cos^{(k)} = \begin{cases} (-1)^p \cos & \text{si } k = 2p \\ (-1)^{p+1} \sin & \text{si } k = 2p+1, \end{cases} \qquad \sin^{(k)} = \begin{cases} (-1)^p \sin & \text{si } k = 2p \\ (-1)^p \cos & \text{si } k = 2p+1, \end{cases}$$

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } k = 2p \\ 0 & \text{si } k = 2p+1, \end{cases} \qquad \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p+1. \end{cases}$$

On en déduit les DL en 0 à l'ordre $n = 2p+1$ pour cosinus et à l'ordre $n = 2p$ pour sinus :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\,\varepsilon(x) & \text{où } \lim_0 \varepsilon = 0, \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{p-1}\,\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + x^{2p}\,\varepsilon(x) & \text{où } \lim_0 \varepsilon = 0. \end{aligned}}$$

3) Développements limités en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable autant de fois que l'on veut en 0 et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(k)} : x \mapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$
$$\text{donc} \quad \varphi^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

La formule de Taylor-Young nous fournit donc le DL à l'ordre n :

Pour chaque exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\textbf{fixé,}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

IV.3 Unicité du développement limité et conséquences

Propr. • Unicité du développement limité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie en 0, $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n, alors ce développement limité est unique : il n'y a qu'une seule partie régulière et un seul reste qui puissent convenir.

Si on obtient deux écritures d'un développement limité d'une fonction, **on peut donc identifier les coefficients** de ces deux écritures. Notamment, en confrontant ce résultat avec la formule de Taylor-Young, on constate que les deux premiers coefficients d'un DL en 0 sont toujours la valeur de la fonction en 0 et la valeur de sa dérivée en 0.

Coroll. • DL en **0** de fonctions paires et impaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie en 0 et admettant un DL en 0 à l'ordre n.

1) Si f est paire, alors la partie régulière du DL ne présente que des monômes de degré pair ;

2) Si f est impaire, elle ne présente que des monômes de degré impair.

Démo. ⇝ Sur les notes de cours.

Exercice **14** ► **1)** Justifier que la fonction tan admet en 0 un DL d'ordre 5.

2) En utilisant la relation fonctionnelle $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer ce DL.

V Applications des développements limités

V.1 Interprétation des parties régulières

Lorsqu'on dispose d'un DL à l'ordre n d'une fonction au point a, **la partie régulière de ce DL fournit la meilleure approximation de la courbe de f :**

- **au voisinage du point a,**
- par une courbe de polynôme **de degré inférieur ou égal à n.**

1) Le coefficient constant d'un DL de f en a est toujours la limite de f au point a ;

2) La partie régulière d'un DL à l'ordre 1 donne l'équation de la tangente à la courbe de f au point a ;

3) La partie régulière d'un DL à l'ordre 2 donne le meilleur polynôme de degré $\leqslant 2$ pour approcher la courbe de f autour du point a (sa courbe sera une parabole le plus souvent) ;

4) Celle d'un DL à l'ordre 3 donne l'équation du meilleur polynôme de degré $\leqslant 3$ pour approcher la courbe de f autour du point a etc.

V.2 Forme normalisée d'un développement limité

On dit qu'un développement limité est écrit **sous forme normalisée** lorsqu'il est présenté sous la forme

(pour un DL en 0)

$$f(x) = \boldsymbol{x^p} \times \left(\boldsymbol{a_0} + a_1 x + \cdots + a_p x^p + x^p \varepsilon(x)\right) \quad \textbf{où } \boldsymbol{a_0 \neq 0}$$

(pour un DL en a)

$$f(x) = \boldsymbol{(x-a)^p} \times \left(\boldsymbol{b_0} + b_1(x-a) + \cdots + b_{n-p}(x-a)^p + (x-a)^p\varepsilon(x-a)\right) \quad \textbf{où } \boldsymbol{b_0 \neq 0}$$

et où, comme d'habitude, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Il suffit pour obtenir cette écriture de factoriser le développement limité par la première puissance de x (resp. de $(x-a)$) qui apparait effectivement dans le DL. Cette écriture a de nombreux intérêts :

1) Pour x « suffisamment proche de 0 (resp. a), $f(x)$ est du même signe que $a_0 x^p$ (resp. $a_0(x-a)^p$).

On peut ainsi déterminer *localement* le signe d'une expression complexe, par exemple pour déterminer la position de relative de deux courbes au voisinage d'un point.

2) Pour lever des formes indéterminées, il suffit de décomposer l'expression en *blocs* qui se multiplient et se divisent entre eux, puis de trouver la forme normalisée de chaque bloc. La connaissance de p et de a_0 pour chaque bloc suffira à lever la forme indéterminée.

3) Elle permet parfois d'effectuer des opérations sur des DL d'ordre différent et de diminuer la quantité de calculs nécessaire pour parvenir au résultat.

***Exercice* 15** ► Déterminer le signe de $\sin(x) - \ln(1+x)$ quand x est au voisinage de 0.

***Exercice* 16** ► Déterminer la position relative de la courbe de $f : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ par rapport à sa tangente en 0.

***Exercice* 17** ► Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x)-\tan(x)}$.

***Exercice* 18** ► Étudier $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\left(e^x-1\right)\left(\sin(x^2)-x^2\right)}{\left(\sin(x)-\tan(x)\right)^2 \ln(1-2x^2)}$.

V.3 Ramener les problèmes en 0

En pratique, on ne sait calculer avec des DL qu'en 0 (sauf à utiliser la formule de Taylor-Young, qui est trop lourde dans la majorité des cas).

Or, on souhaite en général étudier les fonctions au voisinage de points qui peuvent être quelconques, et aussi en $\pm\infty$.

Si l'on veut étudier :

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x)}$, on utilise directement des DL en 0 ;

2) $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$ (resp. $\lim_{x\to a^+} f(x)$), on pose $\boldsymbol{h = x - a}$, on réécrit $f(x)$ à l'aide de h et on utilise des DL pour $h \to 0$ (resp. $h \to 0^+$) ;

3) $\boldsymbol{\lim_{x\to a^-} f(x)}$, on pose $\boldsymbol{h = a - x}$, on réécrit $f(x)$ à l'aide de h et on utilise des DL pour $h \to 0^+$;

4) $\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}$, on pose $\boldsymbol{h = \frac{1}{x}}$ ou $\boldsymbol{h = -\frac{1}{x}}$;

5) $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n}$, on pose $\boldsymbol{x = \frac{1}{n}}$ puis on utilise des DL pour $x \to 0$.

***Exercice* 19** ► Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.