I Clôture par sur-mots et sous-mots

On fixe un alphabet Σ. Étant donné deux mots $w, w' \in \Sigma^*$, on dit que w' est un sur-mot de w, noté $w \preccurlyeq w'$, s'il existe une fonction strictement croissante ϕ de $\{1, \ldots, |w|\}$ dans $\{1, \ldots, |w'|\}$ telle que $w_i = w'_{\phi(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq |w|$, où $|w|$ dénote la longueur de w et w_i dénote la i-ème lettre de w. Étant donné un langage L, on note $\overline{L}$ le langage des sur-mots de mots de L, c'est-à-dire $\overline{L} := \{w' \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, w \preccurlyeq w'\}$.

1. On pose L_0 le langage défini par l'expression rationnelle ab^*a, et L_1 le langage défini par l'expression rationnelle $(ab)^*$. Donner une expression rationnelle pour $\overline{L_0}$ et pour $\overline{L_1}$.
2. Montrer que, pour tout langage L, on a $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$.
3. Existe-t-il des langages L' pour lesquels il n'existe aucun langage L tel que $\overline{L} = L'$?
4. Montrer que, pour tout langage régulier L, le langage $\overline{L}$ est également régulier.
5. On admettra pour cette question le résultat suivant : pour toute suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de Σ^*, il existe $i < j$ tels que $w_i \preccurlyeq w_j$.

   Montrer que, pour tout langage L (non nécessairement régulier), il existe un langage fini $F \subseteq L$ tel que $\overline{F} = \overline{L}$.
6. Un langage L est clos par sur-mots si, pour tout $u \in L$ et $v \in \Sigma^*$ tel que $u \preccurlyeq v$, on a $v \in L$. Déduire de la question précédente que tout langage clos par sur-mots est régulier.
7. On considère un langage L arbitraire, non nécessairement régulier, et on souhaite construire effectivement un automate pour reconnaitre $\overline{L}$. Comment peut-on procéder, et de quelles opérations sur L a-t-on besoin? Discuter de l'efficacité de cette procédure.
8. Un langage L est clos par sous-mots si, pour tout $u \in L$ et $v \in \Sigma^*$ tel que $v \preccurlyeq u$, on a $v \in L$. Montrer que tout langage clos par sous-mots est régulier.
9. Démontrer le résultat admis à la question 5.

II Automates pour les valuations de formules booléennes

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini de variables. Une valuation de $\mathcal{X}$ est une fonction de $\mathcal{X}$ dans $\{0,1\}$. Soit Φ une formule de la logique propositionnelle sur $\mathcal{X}$. On dit que la valuation ν satisfait Φ si la formule Φ s'évalue à 1 lorsque l'on remplace chaque variable dans Φ par son image par ν.

On fixe l'alphabet $\Sigma = \{0,1\}$. Soit $<$ un ordre total sur $\mathcal{X}$: on écrira en conséquence $\mathcal{X} = x_1, \ldots, x_n$, avec $x_i < x_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
Le mot suivant $<$ d'une valuation ν de $\mathcal{X}$ est le mot $\nu(x_1) \cdots \nu(x_n)$ de longueur n sur l'alphabet Σ.
Un automate de valuations pour Φ et $<$ est un automate A sur l'alphabet Σ tel que, pour tout mot $w \in \Sigma^*$, l'automate A accepte w si et seulement si $|w| = n$ et w est le mot suivant $<$ d'une valuation ν qui satisfait Φ.

1. Construire un automate de valuations pour la formule $(x_1 \wedge x_3) \vee x_2$.

2. Proposer un algorithme naïf qui, étant donné une formule Φ de la logique propositionnelle, construit un automate de valuations pour Φ. Discuter de la complexité de cet algorithme.

Dans les deux prochaines questions, on cherche à améliorer l'efficacité de cet algorithme.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle L_n le langage sur Σ défini par $L_n := \{ww \mid w \in \Sigma^n\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout automate A qui reconnait L_n, l'automate A a au moins 2^n états.

4. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout ensemble de variables totalement ordonné de taille paire $\mathcal{X} = x_1, \ldots, x_{2n}$, on peut construire une formule Φ_{2n} de taille $O(n)$ telle que tout automate de valuations pour Φ_{2n} et $<$ ait au moins 2^n états.

   Qu'en déduire quant à l'algorithme de la question 1 ?

5. Montrer le même résultat qu'à la question précédente pour une famille de formules Φ'_{2n} qui utilise seulement les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ (et pas $\neg$).

6. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables arbitraire de taille paire totalement ordonné par $<$, soit $2n$ la taille de cet ensemble, et soit Φ_{2n} la formule définie à la question 3. Existe-t-il un ordre différent $<'$ sur $\mathcal{X}$ pour lequel il y ait un automate de valuations pour Φ_{2n} et $<'$ de taille plus faible que 2^n ?