**Exercice 1. 3-COLOR**

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On appelle $k$-**coloration** de $G$ une fonction $c : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour tout arc $(u, v) \in E$, on a $c(u) \neq c(v)$.
On considère le problème suivant :

**3-COLOR**

Entrée : un graphe $G$ non orienté
Sortie : un booléen indiquant si $G$ est 3-colorable

1. Montrer que 3-COLOR appartient à la classe NP.
2. Écrire une fonction OCaml `check_3color` qui prend en entrée un graphe $G$ (représenté par liste d'adjacence) et une coloration $c$ (un tableau) et qui renvoie un booléen indiquant si $c$ est une coloration de $G$.
3. Donner une réduction de 3-COLOR à 3-SAT.

Dans la suite, on veut trouver une réduction de 3-SAT à 3-COLOR.
On considère une formule $\varphi$ de 3-SAT de variables $x_1, ..., x_n$. On veut construire un graphe $G$ qui soit 3-colorable si et seulement si $\varphi$ est satisfiable.
On commence par ajouter, dans $G$, $n$ sommets (encore appelés $x_1$, ..., $x_n$ par abus de notation) correspondant à $x_1$, ..., $x_n$, $n$ sommets correspondant à $\neg x_1$, ..., $\neg x_n$ et 3 sommets $T, F, B$ reliés 2 à 2.
Dans un 3-coloriage de $G$, $V$ et $F$ doivent être de couleurs différentes. Chaque variable $x_i$ sera considérée comme fausse si le sommet correspondant est de la même couleur que $F$ et vraie s'il est de la même couleur que $T$.

4. Expliquer comment ajouter des arêtes à $G$ pour que chaque variable soit vraie ou fausse (c'est-à-dire coloriée avec la même couleur que $F$ ou la même couleur que $T$).
5. Dessiner un graphe (un *gadget*) avec (au moins) 3 sommets $l_1$, $l_2$, $s$ que l'on pourrait ajouter à $G$ tels que :
   - Si $e_1$ et $e_2$ sont de la même couleur que $F$, alors $s$ doit être de même couleur que $F$.
   - Si $e_1$ ou $e_2$ est de la même couleur que $T$, alors il existe un coloriage de $G$ où $s$ est de la même couleur que $T$.
6. Soit $l_1 \lor l_2 \lor l_3$ une clause de $\varphi$. Expliquer comment ajouter un gadget à $G$ de façon à ce que $l_1 \lor l_2 \lor l_3$ soit vraie si et seulement si $G$ est 3-coloriable.
7. Montrer que 3-COLOR est NP-complet.
8. Appliquer la réduction ci-dessus à la formule $\varphi = (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_4)$.

Cependant, 2-COLOR est dans la classe P :

9. Écrire une fonction OCaml `2color` qui prend en entrée un graphe $G$ (représenté par liste d'adjacence) avec $n$ sommets et $p$ arêtes et qui renvoie un booléen indiquant si $G$ est 2-colorable, en $\text{O}(n + p)$.

**Exercice 2. Sujet 0 CCP MPI**

1. Rappeler la définition d'un langage régulier.
2. Les langages suivants sont-ils réguliers? Justifier.

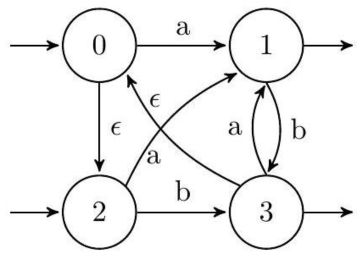
(a) $L_1 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$

(c) $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

(d) $L_4 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \equiv 0 \bmod 2\}$

3. On considère l'automate non déterministe suivant :




(a) Déterminiser cet automate.

(b) Construire une expression régulière dénotant le langage reconnu par cet automate.

(c) Décrire simplement avec des mots le langage reconnu par cet automate.

**Exercice 3. Extrait Centrale 2022 : Palindromes et rationalité**
Soit $w \in \Sigma^\star$. On dit que le mot $w$ est un palindrome si $\tilde{w} = w$.

1. Écrire une fonction palindrome de signature `string -> bool` qui teste, en temps linéaire, si un mot est un palindrome.

Pour un alphabet $\Sigma$, on note $\text{Pal}(\Sigma)$ l'ensemble des palindromes de $\Sigma^\star$.

2. Montrer que si $\Sigma$ est un alphabet à une lettre, alors $\text{Pal}(\Sigma)$ est rationnel.
3. Montrer que si $\Sigma$ contient au moins deux lettres, alors $\text{Pal}(\Sigma)$ n'est pas rationnel.
   On pourra utiliser un automate et un mot de $\text{Pal}(\Sigma) \cap a^\star b a^\star$.

Soit $L \subset \Sigma^\star$ un langage reconnu par l'automate $A = (Q, I, F, T)$.

Pour $(q, q') \in Q^2$, on note $L_{q,q'}$ le langage de tous les mots $w$ qui étiquettent un chemin dans $A$ partant de $q$ et arrivant en $q'$.

4. Montrer que $L_{q,q'}$ est reconnaissable et exprimer le langage $L_A$ en fonction de langages $L_{q,q'}$.
5. Montrer que $\text{Pal}(\Sigma) \cap \left(\Sigma^2\right)^\star = \{u\tilde{u} \mid u \in \Sigma^\star\}$.

Soit $L$ un langage rationnel reconnu par un automate $A = (Q, I, F, T)$. On définit les langages $D(L) = \{w\tilde{w} \mid w \in L\}$ et $R(L) = \{w \in \Sigma^\star \mid w\tilde{w} \in L\}$.

6. Décrire simplement les langages $D\left(a^\star b\right)$ et $R\left(a^\star b^\star a^\star\right)$.
7. Les langages $D(L)$ et $R(L)$ sont-ils reconnaissables? On pourra faire intervenir les langages $L_{q,q'}$, définis ci-dessus.

**Exercice 4. Radical d'un langage**
Soit $L$ un langage rationnel sur un alphabet $\Sigma$.
On définit $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* | u^2 \in L\}$ et $L_2 = \{u^2 \mid u \in L\}$.

1. Est-il toujours vrai que $L^2 = L_2$ ?
2. Montrer que $\sqrt{L}$ est rationnel.
3. Montrer que $L_2$ n'est pas forcément rationnel.
4. Est-il toujours vrai que $\sqrt{L_2} = L$ ?
5. Est-il toujours vrai que $\sqrt{L}^2 = L$ ?