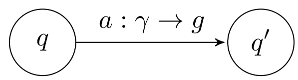
I Automate à pile et grammaire

Soit Σ et Γ deux alphabets. Un **automate à pile** sur Σ est un quintuplet $A = (Q, q_0, \gamma_0, \delta)$, où Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ est l'état initial, $\gamma_0 \in \Gamma$ est le symbole de pile initial et δ est une fonction de transition de $Q \times \Sigma \times \Gamma$ vers l'ensemble des parties de $Q \times \Gamma^*$.

Une **configuration** de A est un couple (q, z) où $z \in \Gamma^+$ est la **pile** et $q \in Q$. La configuration initiale est (q_0, γ_0) et une configuration (q, ε) où $q \in Q$ est dite **acceptante**.

Une **transition** $\delta(q, a, \gamma) = (q', g)$ signifie que si A est dans une configuration $(q, z\gamma)$ où $\gamma \in \Gamma$ est le sommet de pile, et qu'il lit la lettre $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, alors il peut aboutir à la configuration (q', zg) (on lit a et on remplace le sommet de la pile par g).

Cette transition sera dessinée comme suit :



L'automate à pile A **accepte** un mot de Σ^* s'il peut lire ses lettres dans l'ordre à partir de la configuration initiale pour parvenir à une configuration acceptante.

1. Étant donné un automate A sur Σ sans pile, expliquer comment construire un automate à pile A' sur Σ qui reconnaît le même langage que A.
2. On prend dans cette question $\Sigma = \{a, b\}$. Proposer un automate à pile qui reconnait le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Qu'en déduire?
3. On prend toujours $\Sigma = \{a, b\}$. Proposer un automate à pile qui reconnait le langage $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, où $|w|_a$ et $|w|_b$ désignent respectivement le nombre de a et de b de w.

Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire hors contexte, qu'on suppose sous forme normale de Chomsky (règles de la forme $A \to BC$ où $B, C \in V \setminus \{S\}$, $A \to a$ où $A \in V$ et $a \in \Sigma$, $S \to \varepsilon$).

4. Montrer qu'il existe un automate à pile reconnaissant $L(G)$.

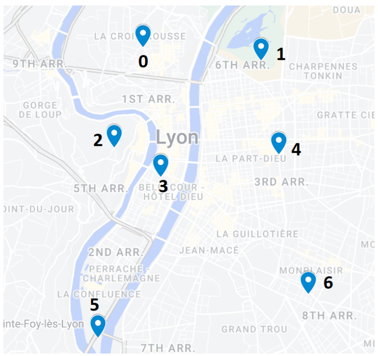
Soit A un automate à pile.

5. Justifier qu'on peut supposer que les transitions de A ajoutent au plus 2 symboles sur la pile.
6. On définit $L_{q,q',z}$ comme l'ensemble des mots u tels qu'il existe un chemin d'étiquette u de la configuration (q, z) à (q', ε) dans A. Donner une relation de récurrence sur $L_{q,q',z}$.
7. En déduire une grammaire engendrant $L(A)$.

II Algorithme de Christofides

On considère un graphe $G = (V, E)$ **non orienté**, **complet** et **pondéré** par une fonction $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On supposera dans toute la suite que $V = \{0, ..., n-1\}$ où n est le nombre de sommets. Si G' est un graphe ou un ensemble d'arêtes, son **poids** $w(G')$ est la somme des poids des arêtes de G'.

On utilisera comme exemple le graphe G_{ex} suivant, représenté par matrice d'adjacence pondérée, dont les sommets sont des points d'intérêts de Lyon (numérotés de 0 à 6) et chaque arête correspond à une distance euclidienne entre les deux points :



$$G_{ex} = \begin{pmatrix} 0.0 & 2.3 & 1.75 & 2.2 & 2.9 & 4.8 & 5.1 \\ 2.3 & 0.0 & 2.9 & 2.6 & 1.5 & 5.4 & 4.0 \\ 1.75 & 2.9 & 0.0 & 0.9 & 2.9 & 3.2 & 4.2 \\ 2.2 & 2.6 & 0.9 & 0.0 & 2.1 & 2.9 & 3.2 \\ 2.9 & 1.5 & 2.9 & 2.1 & 0.0 & 4.4 & 2.5 \\ 4.8 & 5.4 & 3.2 & 2.9 & 4.4 & 0.0 & 3.7 \\ 5.1 & 4.0 & 4.2 & 3.2 & 2.5 & 3.7 & 0.0 \end{pmatrix}$$

On suppose que G est **métrique**, c'est-à-dire que w vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in V, \quad w(x, y) \leq w(x, z) + w(z, y)$

Un **cycle hamiltonien** dans un graphe est un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Dans la suite, on représente un cycle hamiltonien par sa liste de sommets, dans l'ordre (contenant donc chaque sommet exactement une fois).

Le **problème du voyageur de commerce (TSP)** consiste à trouver un cycle hamiltonien de poids minimum.

L'**algorithme de Christofides** donne une $\frac{3}{2}$-approximation du TSP. Voici son fonctionnement :

- Trouver un arbre couvrant de poids minimum T de G.
- Considérer V_1 l'ensemble des sommets de degré impair de T.
- Trouver un couplage parfait de poids minimum M de $G[V_1]$.
- Considérer le multigraphe H obtenu par union des arêtes de T et de M.
- Trouver un circuit eulérien C dans H.
- Transformer C en cycle hamiltonien en « sautant » les sommets répétés.

II.1 Recherche d'un arbre couvrant de poids minimum

1. Quel algorithme peut-on utiliser pour trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe ? L'appliquer sur G_{ex} en donnant les arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum T_{ex} obtenu par l'algorithme, dans l'ordre.

II.2 Sommets de degré impair

Soit V_1 l'ensemble des sommets de degré impair dans T (en ne considérant que les arêtes de T).

2. Donner V_1 dans le cas où $T = T_{ex}$.
3. Montrer qu'un graphe G' non orienté possède un nombre pair de sommets de degré impair.

La question précédente montre donc que V_1 est de cardinal pair.

II.3 Couplage parfait de poids minimum

On définit $G[V_1]$ (**graphe induit** par V_1) comme le graphe dont l'ensemble de sommets est V_1 et dont deux sommets sont adjacents si et seulement si ils sont adjacents dans G. Les poids des arêtes de $G[V_1]$ sont les mêmes que ceux de G.

Un **couplage parfait de poids minimum** est un couplage parfait dont le poids est minimum parmi tous les couplages parfaits possibles.

4. Montrer l'existance d'un couplage parfait de poids minimum de $G[V_1]$.

5. On suppose que les sommets de G sont des points de $\mathbb{R}^2$ (comme c'est le cas pour G_{ex}). On peut alors considérer chaque arête comme un segment dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que si M est un couplage de G dont deux arêtes se croisent (c'est-à-dire que les segments correspondants s'intersectent), alors M n'est pas de poids minimum.

6. Avec $G = G_{ex}$ et $T = T_{ex}$, donner les arêtes d'un couplage parfait de poids minimum M_{ex} de $G[V_1]$, ainsi que son poids.

II.4 Cycle eulérien

Un **multigraphe** est comme un graphe, sauf qu'il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets.
On définit le multigraphe $H = (V, E_H)$ dont les sommets sont les mêmes que G et tel que E_H contienne l'union des arêtes de T et de M (avec répétition : E_H est un multiensemble).

7. Dessiner H dans le cas où $G = G_{ex}$, $T = T_{ex}$ et $M = M_{ex}$.

Dans un graphe G' non orienté, un **cycle eulérien** est un cycle passant par chaque arête exactement une fois (mais qui peut passer plusieurs fois par un sommet, contrairement à un cycle hamiltonien).

8. Donner un cycle eulérien dans H dans le cas où $G = G_{ex}$, $T = T_{ex}$ et $M = M_{ex}$.

9. Montrer que si G' possède un cycle eulérien C, alors G' est connexe et tous les sommets de G' sont de degré pair.

On veut écrire un algorithme en OCaml permettant de trouver un cycle eulérien dans un graphe.

10. Écrire une fonction `supprime e l` supprimant la première occurence de `e` dans la liste `l`. Si `e` n'apparaît pas dans `l`, on renverra `l` inchangée. Par exemple, `supprime 3 [6; 3; 2; 3; 5]` doit renvoyer `[6; 2; 3; 5]`.

Dans la suite, on suppose que G' est connexe et que tous les sommets de G' sont de degré pair.

11. On part d'un sommet u quelconque de G', puis, tant que possible, on se déplace suivant une arête adjacente à u qui n'a pas encore été utilisée. Montrer que ce processus termine et que la liste des sommets visités forme un cycle C.

12. Écrire une fonction `cycle g u` qui renvoie le cycle C obtenu par l'algorithme précédent sous forme d'une liste de sommets, où G' est représenté par une liste d'adjacence `g`. On supprimera de `g` les arêtes utilisées par le cycle.

13. Montrer que G' possède un cycle eulérien, en raisonnant par récurrence.

14. En déduire une fonction `euler g u` qui renvoie un cycle eulérien (sous forme d'une liste de sommets) en partant depuis le sommet `u` dans le graphe G' donné sous forme de liste d'adjacence.

II.5 Cycle hamiltonien

Le cycle eulérien C dans le graphe H de la section précédente peut passer plusieurs fois par le même sommet. Pour le transformer en cycle hamiltonien, on supprime les sommets apparaissant plusieurs fois dans C (à part la première occurence).

15. Donner le cycle hamiltonien obtenu avec $G = G_{ex}$ ainsi que son poids. Comparer avec le cycle hamiltonien de poids minimum.

16. Écrire une fonction `supprime_doublons l` qui renvoie la liste obtenue en supprimant les doublons dans la liste de sommets `l`, sauf la première occurence de chaque sommet.
Par exemple, `supprime_doublons [1; 0; 1; 4; 6; 4]` doit renvoyer `[1; 0; 4; 6]`.

II.6 Preuve de la $\frac{3}{2}$-approximation

Soit C^* un cycle hamiltonien de poids minimum de G et T un arbre couvrant de poids minimum de G.

17. Montrer que $w(T) \leq w(C^*)$.

Soit V_1 l'ensemble des sommets de degré impair de T. Soit C_1^* un cycle hamiltonien de poids minimum de $G[V_1]$.

18. Montrer qu'on peut séparer les arêtes de C_1^* en deux couplages parfaits M_1 et M_2 de $G[V_1]$.

19. Soit M un couplage parfait de poids minimum de $G[V_1]$. Montrer que $w(M) \leq \min(w(M_1), w(M_2))$.

20. Montrer que $\min(w(M_1), w(M_2)) \leq \dfrac{w(C_1^*)}{2}$.

21. Montrer que $w(C_1^*) \leq w(C^*)$.

22. Soit C le cycle hamiltonien obtenu par l'algorithme de Christofides. Montrer que $w(C) \leq \dfrac{3}{2} w(C^*)$.