Exercices d'oraux MP2I 2022

Juin 2022

1. Dichotomie et récursivité : Karatsuba
2. Programmation dynamique : Plus longue sous-suite commune
3. Arbres : Arbres AVL définis par récurrence
4. Graphes : Graphes graphiques
5. Graphes : Graphes eulériens

Karatsuba

On souhaite calculer le produit de deux entiers x et y. On suppose que x et y ont $2n$ chiffres en base 2. On peut donc écrire :

$$x = a2^n + b$$

$$y = c2^n + d$$

Avec $a, b, c, d < 2^n$.
1. Montrer que l'on peut calculer le produit xy en effectuant seulement 3 multiplications d'entiers à n chiffres, et expliciter ces 3 multiplications (les multiplications par 2^k ont un coût négligeable).
Indication : on pourra s'aider du développement du produit (a+b)(c+d)
2. Écrire une fonction `taille(x)` qui renvoie le nombre de chiffre de l'entier x en base 2.
3. Écrire une fonction `karatsuba(x, y, n)` qui calcule le produit xy par la méthode décrite dans la question 1, en supposant que les entiers x et y ont n chiffres en base 2.
4. En déduire une fonction `mult(x, y)` calculant le produit xy en utilisant `karatruba`.
5. On admet qu'avec cette méthode, la complexité est en $O(n^{1.58})$. Est-ce mieux qu'une méthode naïve de multiplications ? Justifier.
6. Expliquer comment adapter cette méthode au produit de deux polynômes.

Plus longue sous-suite commune

On considère une suite finie $x = (x_0, ..., x_{m-1})$ de m éléments d'un ensemble E. Une sous-suite de x de longueur k est une suite x' obtenue à partir de x en supprimant m_k éléments tout en conservant l'ordre : $x' = (x_{f(0), ..., x_{f(k-1)}})$ avec $0 \leq f(0) < ... < f(k-1) < m$. On dit que z est une sous-suite commune de x et y si z est une sous-suite de x et une sous-suite de y. On représentera les suites finies par des tableaux. On cherche maintenant à trouver une plus longue sous-suite commune à deux suites $x = (x_0, ..., x_{m-1})$ et $y = (y_0, ..., y_{n-1})$.
1. Une méthode naïve consiste à construire l'ensemble des sous-listes de x et de y, puis à calculer leur intersection. Évaluez la complexité de cette méthode en fonction de la taille des listes x et y.
Pour une méthode moins naïve, on va commencer par le calcul de la *longueur* d'une plus longue sous-suite commune. On note $l(i, j)$ la longueur de la plus longue sous-suite commune des suites $(x_0, ..., x_{i-})$ et $(y_0, ..., y_{j-})$. La longueur recherchée est donnée par $l(m, n)$. De plus, l vérifie :

$$l(i, j) = \max\left(l(i-1, j-1) + \delta_{(x_{i-1}, y_{j-1})}, l(i, j-1), l(i-1, j)\right)$$

où δ est le symbole de Kronecker.
2. Montrer qu'en utilisant cette relation pour écrire une fonction récursive naïve calculant $l(i, j)$, on obtient une complexité dans le pire cas minorée par $2^{\min(m,n)}$.
Le programmation dynamique contourne ce problème en stockant les résultats intermédiaires dans un tableau t : on va stocker $l(i, j)$ dans la case (i, j).
3. Comment remplir de proche en proche le tableau t ?

4. En déduire une fonction Caml `subseq_length: 'a vect -> 'a vect -> int` qui calcule la longueur de la plus longue sous-suite commune à deux suites
5. Comment adapter la méthode pour calculer la plus longue sous-suite commune au lieu de calculer simplement sa longueur ?

Arbres AVL définis par récurrence

On définit le déséquilibre d'un arbre binaire $a = (x, g, d)$ par : $des(a) = hauteur(g) - hauteur(d)$. On dit qu'un arbre binaire a est AVL si le déséquilibre de tout sous-arbre de a est 0, 1 ou -1.
On définit le type d'arbre binaire strict suivant : `type arbre = Feuille | Noeud of arbre * arbre ;;` et on définit par récurrence la suite d'arbres (A_n) :

- A_0 et A_1 sont des feuilles (de hauteur 0)
- si $n \leq 2$, A_n est l'arbre binaire dont le sous-arbre gauche est A_{n-1} et le sous-arbre droit est A_{n-2}.

1. Dessiner les arbres A_k pour $k \in [3, 5]$ puis définir une fonction Caml qui génère A_n en fonction de n.
2. Quelle est la hauteur de A_n ? Montrer que les arbres (A_n) sont AVL.
3. Déterminer le nombre de feuilles et de noeuds de A_n.
On suppose que pour un arbre AVL, on a :

$$\log_2(t+1) \leq h < \frac{\log_2(t+2)}{\log_2(\phi)} \tag{1}$$

Où ϕ est le nombre d'or, h la hauteur de l'arbre et t le nombre de noeuds.
4. Vérifier que cette relation fonctionne pour les arbres A_n.
On pourra utiliser le fait que $F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, *avec* F_n *le* n^{eme} *nombre de Fibonacci et* $\psi \approx -0.618$ *et que* $\log_\phi(\sqrt{5}) \approx 1.67$
5. Démontrer la relation (1).

Graphes graphiques

Une suite décroissante est dite *graphique* s'il existe un graphe simple (ni arêtes multiples ni boucle sur un sommet) dont les degrés des sommets correspondent à cette suite.
1. Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- $(3, 3, 2, 2)$
- $(5, 3, 3, 2)$
- $(3, 3, 1, 1)$

2. Trouver deux graphes différents correspondants à la suite $(3, 2, 2, 2, 1)$
3. Soit $n \geq 2$ et $(d_1, d_2, ..., d_n)$ une suite décroissante. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

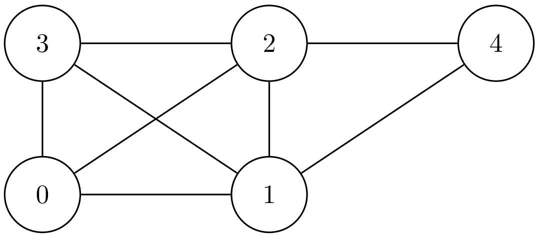
(a) la suite $(d_1, d_2, ..., d_n)$ est graphique

(b) la suite $(d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, ..., d_n)$ est graphique

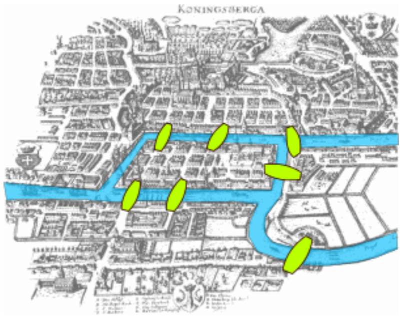
Pour le sens direct, on pourra montrer par l'absurde l'existence d'un graphe $G = (V, E)$ tel que $V = (v_1, ..., v_n)$, $deg(v_i) = d_i$ et tel que v_i soit adjacent aux sommets $v_2, v_3, ...v_{d_1+1}$.
4. Déduire de ce résultat un graphe correspondant à la suite $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$.

Graphes eulériens

Soit un graphe $G = (V, E)$ non orienté et sans sommets isolés. Une chaîne dans G est dite eulérienne si elle passe une et une seule fois par chaque arête. Un graphe G est dit eulérien s'il existe une chaîne eulérienne (qui peut être ouverte ou fermée).
1. Montrer que le graphe suivant est eulérien :



2. Montrer que si un graphe G est eulérien, alors il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
3. Est-il possible de se balader dans Königsberg en traversant tous les ponts une unique fois ?



4. Dans le cas où G ne possède que des sommets de degré pair, prouver que G possède une chaîne eulérienne fermée.
5. Dans le cas où G possède exactement deux sommets de degré impair, montrer l'existence d'une chaîne eulérienne ouverte.