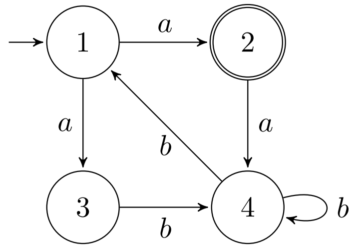
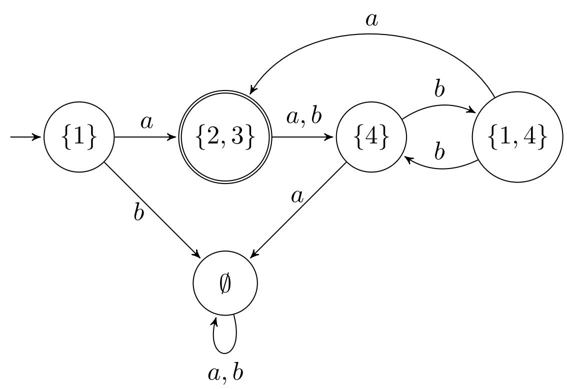
I Algorithme de déterminisation

Déterminiser l'automate suivant en utilisant l'algorithme du cours :



Solution : En appliquant l'algorithme du cours, on obtient :



II Clôture des langages reconnaissables

Si $m = m_1 ... m_n$ est un mot, on définit son miroir $\widetilde{m} = m_n ... m_1$. Si L est un langage, on définit son miroir $\widetilde{L} = \{\widetilde{m} \mid m \in L\}$.

1. Montrer que le miroir d'un langage reconnaissable est reconnaissable.

   Solution : Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, E)$ un langage reconnaissant L. Alors $\widetilde{A} = (\Sigma, Q, F, I, \widetilde{E})$ reconnaît $\widetilde{L}$, où on a inversé toutes les transitions ($\widetilde{E} = \{(q_1, a, q_2) \mid (q_2, a, q_1) \in E\}$). En effet il existe un chemin $q_1 \in I \xrightarrow{m_1} q_2 \xrightarrow{m_2} ... \xrightarrow{m_k} q_{k+1} \in F$ dans A si et seulement s'il existe un chemin $q_{k+1} \in F \xrightarrow{m_k} q_k \xrightarrow{m_{k-1}} ... \xrightarrow{m_1} q_1 \in I$ dans $\widetilde{A}$.

Si L est un langage sur Σ, on définit :

- $Pref(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*,\ uv \in L\}$: ensemble des préfixes des mots de L.
- $Suff(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*,\ vu \in L\}$: ensemble des suffixes des mots de L.
- $Fact(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v, w \in \Sigma^*,\ vuw \in L\}$: ensemble des facteurs des mots de L.

2. Donner des expressions régulières pour $Pref(a^*b)$ et $Pref((ab)^*)$.

   Solution : $Pref(a^*b) = a^*|a^*b$, $Pref((ab)^*) = (ab)^*|(ba)^*|(ab)^*a|(ba)^*b$.

3. Montrer que si L est reconnaissable alors $Pref(L)$, $Suff(L)$, $Fact(L)$ le sont aussi.

   Solution : Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, E)$ un langage reconnaissant L. Soit Q' l'ensemble des états co-accessibles et Q'' l'ensemble des états accessibles. Un mot m appartient à $Pref(L)$ si et seulement si il existe un chemin étiqueté par m d'un état de I vers un état de Q'. Donc (Σ, Q, I, Q', E) reconnaît $Pref(L)$. De même, (Σ, Q, Q'', F, E) reconnaît $Suff(L)$ et (Σ, Q, Q'', Q', E) reconnaît $Fact(L)$.

   Autre solution : après avoir démontré que $Pref(L)$ est reconnaissable, on peut remarquer que $Suff(L) = \widetilde{Pref(\widetilde{L})}$ ($m \in \widetilde{Pref(\widetilde{L})} \iff \widetilde{m} \in Pref(\widetilde{L}) \iff \exists v \in \Sigma^*,\ \widetilde{m}v \in \widetilde{L} \iff \exists v \in \Sigma^*,\ \widetilde{v}m \in L \iff m \in Suff(L)$, où on a utilisé le fait que $\widetilde{xy} = \widetilde{y}\ \widetilde{x}$).
   On peut aussi en déduire que $Fact(L)$ est reconnaissable en remarquant que $Fact(L) = Suff(Pref(L))$ $(= Pref(Suff(L)))$.
   En effet $m \in Suff(Pref(L)) \iff \exists u \in \Sigma^*,\ um \in Pref(L) \iff \exists u \in \Sigma^*,\ \exists v \in \Sigma^*,\ umv \in L \iff m \in Fact(L)$.

4. Montrer que si L est régulier alors $Pref(L)$, $Suff(L)$, $Fact(L)$ le sont aussi (puisqu'on va montrer que régulier = reconnaissable, c'est une preuve alternative à la précédente).

> Solution : Soit e est une expression régulière dont le langage est L. On définit par induction une expression régulière $P(e)$ de langage $Pref(L)$:
>
> - Si $e = a \in \Sigma$: $P(e) = \varepsilon + a$.
> - Si $e = e_1 + e_2$: $P(e) = P(e_1) + P(e_2)$.
> - Si $e = e_1 e_2$: $P(e) = P(e_1) + e_1 P(e_2)$.
> - Si $e = e_1^*$: $P(e) = e_1^* P(e_1)$.
>
> De même pour $Suff(L)$ et $Fact(L)$.