I Mots qui commutent

Soient u et v deux mots. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. $uv = vu$.
2. Il existe un mot w et des entiers $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^k$ et $v = w^p$.

Solution : Par récurrence forte sur $n = |u| + |v|$.
Cas de base : $|u| + |v| = 0$. Si $u = v = \varepsilon$, alors $u = w^1$ et $v = w^1$ pour $w = \varepsilon$, $n = p = 1$.
Cas inductif : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie pour des mots u, v tels que $|u| + |v| < n$.
Soient u et v tels que $uv = vu$ et $|u| + |v| < n$.
Si $|u| = |v|$ alors les $|u|$ premières lettres dans l'égalité $uv = vu$ donne $u = v$ et $u = w^1 = v$ avec $w = u$.
Supposons $|u| \leq |v|$ (l'autre cas étant symétrique). Comme $uv = vu$, u est préfixe de v : il existe un mot $v' \neq \varepsilon$ tel que $v = uv'$. On a alors $u^2v' = uv'u$. En particulier, $uv' = v'u$. Comme $|u| + |v'| < |u| + |v|$, il existe un mot w et des entiers $k, p \geq 1$ tels que $u = w^k$ et $v' = w^p$, par hypothèse de récurrence. On a alors $u = w^k$ et $v = uv' = w^{k+p}$, ce qui conclut la preuve.

II Règles sur les expressions régulières

Pour chacune des propositions suivantes sur des expressions régulières quelconques, donner une preuve ou un contre-exemple :

1. $(e^*)^* \equiv e^*$
2. $(e_1|e_2)^* \equiv e_1^*|e_2^*$
3. $(e_1e_2)^* \equiv e_1^*e_2^*$
4. $(e_1|e_2)^* \equiv (e_1^*e_2^*)^*$

Solution :

1. Vrai. Voir cours.
2. Faux car $ab \in (a|b)^*$ mais $ab \notin a^* + b^*$.
3. Faux car $abab \in (ab)^*$ mais $abab \notin a^*b^*$.
4. Vrai. Voir cours.

III Exemples de langages réguliers

1. Écrire une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement un a et un b (et un nombre quelconque de c).
2. Écrire une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas de a consécutifs (aa ne doit pas apparaître).
3. Écrire une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement deux a et tels que tout c est précédé d'un b.
4. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $L(x)$ l'ensemble des préfixes des chiffres de x après la virgule. Par exemple, $L(\pi) = \{\varepsilon, 1, 14, 141, 1415...\}$. En sachant que $\frac{1}{6} = 0.1666...$ et $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$, montrer que $L(\frac{1}{6})$ et $L(\frac{1}{7})$ sont réguliers.
5. Montrer plus généralement que $L(x)$ est régulier si $x \in \mathbb{Q}$ (on montrera plus tard que c'est en fait une équivalence).

Solution :

1. En distinguant le cas où a est avant b et le cas où b est avant a: $c^*ac^*bc^*|c^*bc^*ac^*$.
2. On peut donner $(a(b|c)|b|c)^*(a|\varepsilon)$ (un a doit être suivi d'un b ou d'un c).
3. Soit $e = (b|bc)^*$ (décrivant tous les mots sur $\{b, c\}$ dont chaque c est précédé d'un b). Alors $eaeae$ est une expression régulière qui convient.
4. $\varepsilon|16^*$ est une expression régulière de langage $L(\frac{1}{6})$.

   $(142857)^*(\varepsilon|1|14|142|1428|14285|142857)$ est une expression régulière de langage $L(\frac{1}{7})$.
5. Si $x \in \mathbb{Q}$, on peut écrire ses chiffres sous la forme $x = x_1, x_2ppp...$
   Soit $Pref(m)$ l'ensemble des préfixes d'un mot m, qui est un ensemble fini si m est fini ($|Pref(m)| = |m| + 1$). Alors $L(x) = Pref(x_2)|x_2p^*Pref(p)$ (un élément de $L(x)$ est soit un préfixe de x_2 soit contient x_2 suivi d'un certain nombre

de p, suivi d'une partie de p).